UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Luiza Helena Félix de Andrade

SUPERFÍCIES COMPLETAS DE CURVATURA GAUSSIANA CONSTANTE EM CILINDROS RIEMANNIANOS

Fortaleza
2007

Luiza Helena Félix de Andrade

SUPERFÍCIES COMPLETAS DE CURVATURA GAUSSIANA CONSTANTE EM CILINDROS RIEMANNIANOS

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira.

Fortaleza
2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Superfícies Completas de Curvatura Gaussiana Constante em Cilindros Riemannianos

Luiza Helena Félix de Andrade

*Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Ceará, e encontra-se à disposição na biblioteca da referida Universidade.*

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 14 de fevereiro de 2007.

Banca Examinadora

Prof. Jorge Herbert Soares de Lira
UFC
(Orientador)

Prof. Antonio Gervasio Colares
UFC

Prof. Pedro Antonio Hinojosa Vera
UFPB

Aos meus queridos pais, Maria de Lourdes e Osmar de Andrade.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus.

Aos meus pais, Maria de Lourdes e Osmar de Andrade, pelo constante incentivo e apoio.

Aos meus irmãos, Márcia Vanessa(Guell) e Osmar Júnior(Fião), pela ajuda, incentivo e compreensão.

Ao meu sobrinho Caio, pelas horas de descontração e alegria.

A Julius Quintella pelo apoio incondicional ,carinho e dedicação.

A todos os amigos que me acompanharam na graduação e no mestrado, em especial,Iliane Pimenta, Valdenize Lopes , Silvana Alcântara, Jânio Kléo,Ivy Girão,Carpegiane,José Wilker e Alisson Guimarães .

Aos professores João Montenegro de Miranda,Maia Pinto, Gervásio Colares, Luquésio Petrola, Francisco Pimentel, João Lucas Barbosa, Abdênago Barros e, em especial, ao professor Jorge Herbert pela orientação, paciência e incentivo.

À CAPES, pelo incentivo financeiro.

A todos,com muito carinho, meus sinceros votos de agradecimento.

.

"Sábio é aquele que conhece os limites da própria ignorância."
(Sócrates)

Resumo

Estudam-se imersões de superfícies de curvatura constante nos espaços homogêneos $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Em particular, prova-se que existe uma única imersão de uma esfera de dimensão 2 de curvatura constante $K(I) > 0$ em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e de curvatura constante $K(I) > 1$ em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, a menos de isometrias do espaço ambiente.

Sumário

Introdução

O Teorema de Liebmann é um resultado celebrado na teoria das subvariedades e consiste no fato de que a esfera é a única superfície completa de curvatura constante positiva no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$. Este resultado pode ser estendido para esfera $\mathbb{S}^3$, uma vez que a prova original de Liebmann vale também neste espaço ambiente. Nesta generalização, é básico o fato de que as equações de Codazzi não mudam e a equação de Gauss é muito similar a de $\mathbb{R}^3$. Todavia, esta prova não pode ser estendida a outros espaços, porque as equações de compatibilidade são, em geral, completamente diferentes.

As equações de Gauss e Codazzi fazem parte da demonstração do Teorema de Liebmann por assegurarem que uma certa diferencial quadrática é holomorfa em uma determinada estrutura complexa da superfície imersa. O histórico desta abordagem inicia em 1955, quando H. Hopf descobriu que a complexificação da parte sem traço da segunda forma fundamental de uma superfície Σ com curvatura média constante H em $\mathbb{R}^3$ é uma forma quadrática holomorfa em Σ. Apresentamos a prova deste teorema nos Preliminares.

Teorema A *Se $H(A, B)$ é constante, a diferencial de Hopf de B é uma forma quadrática holomorfa.*

Seguindo as idéias apresentadas por Hopf, T. K. Milnor [6], em 1963, provou que a diferencial de Hopf associada a uma superfície de curvatura gaussiana constante é uma forma quadrática holomorfa.

Teorema B *Se $K(A, B) > 0$ é constante positiva, então a diferencial de Hopf de A é uma forma quadrática holomorfa.*

Nos enunciados acima, A e B formam o que denominamos um par de Codazzi, ou seja, um par de formas bilineares simétricas que satisfazem formalmente as equações de Codazzi euclidianas. A extensão dos resultados de Hopf e Klotz Milnor para outros ambientes requer escrever as equações de Codazzi nestes ambientes como equações euclidianas, convenientemente modificando a estrutura conforme.

Em 2004, o Teorema de Hopf sobre caracterização de esferas totalmente umbílicas, a saber, que a esfera "redonda" é a única superfície de curvatura média constante imersa numa forma espacial 3-dimensional, foi estendido para os espaços homogêneos $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ por U. Abresch e H. Rosenberg [1]. Em [1], tais autores classificam as imersões de curvatura média constante de uma esfera topológica nestes espaços. Posteriormente, enunciaram teoremas análogos nos espaços homogêneos tridimensionais com grupos de isometria de dimensão quatro, tais como esferas de Berger e espaço de Heisenberg.

Teorema C *Toda esfera cmc imersa $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ no espaço produto é uma esfera cmc rotacionalmente mergulhada em $M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$.*

Nesta notação $M^2(\kappa)$ é a superfície simplesmente conexa completa de curvatura constante κ.

O elemento fundamental da prova deste teorema é mostrar a existência de uma forma quadrática holomorfa associada com a diferencial de Hopf para toda superfície de curvatura média constante. Para tanto, Abresch e Rosenberg, mantendo a estrutura conforme original da superfície, complexificam a parte sem traço de uma perturbação da segunda forma fundamental.

Em 2005, J. A. Aledo, J. M. Espinar e J. A. Gálvez [2], alterando a estrutura conforme da superfície, conseguiram uma demonstração do Teorema de Liebmann nos espaços homogêneos $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Teorema D *Dada uma constante real K, existe, a menos de isometrias, uma única superfície completa de curvatura gaussiana constante $K > \kappa$ em*

$M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, se $\kappa > 0$; e uma única superfície completa de curvatura gaussiana constante $K > 0$ em $M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, se $\kappa < 0$. Além disso, esta superfície é rotacionalmente simétrica.

Em [2], os autores usam como elemento principal a existência de uma forma quadrática holomorfa associada a diferencial de Hopf para toda superfície de curvatura gaussiana constante. No referido trabalho, os autores utilizam igualmente o Teorema de analiticidade de Bernstein para garantir a unicidade da imersão, e calculam todos os símbolos de Christoffel e as equações de compatibilidade para a nova métrica nas superfícies. Nesta dissertação, pretendemos apresentar uma prova mais elementar do Teorema D, baseada no manuscrito [7].

Dito isto, no Capítulo 1 desta dissertação, definimos a noção de pares de Codazzi de formas bilineares, detalhamos o procedimento de complexificação de uma forma bilinear e, por fim, aplicamos os resultados abstratos às primeira e segunda formas fundamentais de uma superfície imersa. Como casos particulares, estudamos supoerfícies de curvaturas média e gaussiana constantes. Mostramos, mais especificamente, que, nestes casos, a forma associada à diferencial de Hopf é uma forma quadrática holomorfa para ambos os casos, supondo, no segundo caso, que a curvatura gaussiana é positiva.

No Capitulo 2, mostramos a existência de superfícies rotacionalmente simétricas completas completas em $M^2(\kappa)\times\mathbb{R}$ com curvatura gaussiana constante $K(I) > 0, K(I) = 0$ e $K(I) < 0$. A classificação e descrição explícita destes exemplos é baseada na parte intermediária do artigo [2].

Por fim, no Capítulo 3, temos a demonstração do resultado principal deste trabalho, o Teorema tipo Liebmann obtido em [2]. Inicialmente, determinamos símbolos de Christoffel de uma métrica obtida da métrica original da superfície pela adição de um termo perturbativo. Com a nova estrutura conforme e a segunda forma fundamental, definimos um par de formas bilineares que demonstramos ser um par de Codazzi com curvatura extrínseca constante e positiva sob certas condições em $K(I)$. Utilizando estes fatos, aplicamos o resultado de Milnor para garantir a existência de uma diferencial quadrática holomorfa. Uma vez que tal diferencial é definida sobre uma esfera topológica, anula-se identicamente. Caracterizamos, então, geometricamente esta informação mostrando que a superfície é de fato folheada por círculos geodésicos centrados em um eixo vertical, o que permite concluir que é rotacionalmente simétrica.

Capítulo 1

Preliminares

Seja S uma variedade riemanniana bidimensional conexa e orientada. É um fato clássico que S admite um atlas de sistemas de coordenadas isotérmicos (v. [10]). Isto significa que, se denotarmos a métrica riemanniana por A, existem parâmetros locais u, v tais que

$$A = \exp(2\omega)(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2),$$

onde $\omega = \omega(u, v)$ é uma função real positiva. Portanto, S é localmente conformemente euclidiana.

Identificando-se os parâmetros reais u, v a um parâmetro complexo $z = u + iv$, vê-se facilmente que a transição entre coordenadas complexas

$$z = u + iv, \quad w = \tilde{u} + i\tilde{v}$$

correspondente a dois sistemas de coordenadas reais u, v e $\tilde{u}, \tilde{v}$, define uma aplicação holomorfa

$$w = w(z)$$

em um aberto do plano complexo. Portanto, dado que os sistemas de coordenadas complexas definidos acima dotam S de uma estrutura complexa, S é uma superfície de Riemann. Tal estrutura, como vimos, é determinada pela classe de métricas conformes a métrica A.

Fixemos parâmetros u, v em S, não necessariamente isotérmicos. Consideremos uma forma bilinear simétrica B. As expressões locais de A e B são, respectivamente,

$$A = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2 \tag{1.1}$$

e

$$B = e\,\mathrm{d}u^2 + 2f\mathrm{d}u\mathrm{d}v + g\mathrm{d}v^2, \tag{1.2}$$

onde $\mathrm{d}u^2 = \mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u$, $E = A(\partial_u, \partial_u)$ e assim por diante. A aplicação de Weingarten, ou operador de forma, é o operador auto-adjunto S associado a B pela métrica A definido por

$$A(Sx, y) = B(x, y),$$

onde x, y são vetores tangentes a S. Os autovalores de B relativamente a A são as raízes da equação secular

$$\det(B - \kappa A) = 0$$

ou

$$\det(S - \kappa \mathrm{Id}) = 0.$$

Nestas expressões, A, B e S são representados localmente pelas matrizes

$$[A] = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad [B] = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

e

$$[B][A]^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} eG - fF & -eF + Ef \\ fG - gF & -fF + gE \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

respectivamente. Os autovalores de B (ou equivalentemente de S) são portanto

$$\kappa = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

onde $H = H(A, B)$ and $K = K(A, B)$ são respectivamente o semi-traço e o determinante de S (ou de B relativamente a A)

$$H = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}B = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}, \quad K = \frac{\det B}{\det A} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Denominamos estas quantidades respectivamente de *curvatura média* e *curvatura extrínseca* do par (A, B). A parte sem traço de B, denotada por B_0, é definida por

$$B_0 = B - HA.$$

Calcula-se facilmente

$$B_0 = (e - HE)\mathrm{d}u^2 + 2(f - HF)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + (g - HG)\mathrm{d}v^2$$

e, portanto, como esperado, o traço de B_0 relativamente a A é nulo:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}B_0 &= \frac{E(g - HG) - 2F(f - HF) + G(e - HE)}{EG - F^2} \\ &= \frac{Eg - 2Ff + Ge - 2H(EG - F^2)}{EG - F^2} = 2H - 2H = 0\end{aligned}$$

A derivada covariante em Σ compatível com a métrica A é representada por ∇. Os símbolos de Christoffel correspondentes, em parâmetros u, v, são indicados por Γ_{ij}^k. Denotando-se, como usual, $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$ e $g_{22} = G$, temos

$$2\Gamma_{ij}^k = g^{kl}(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}),$$

onde $[A]^{-1} = (g^{kl})$. Deste modo, obtém-se as expressões

$$\begin{aligned}2W^2\Gamma_{11}^1 &= GE_u - 2FF_u + FE_v, \\ 2W^2\Gamma_{11}^2 &= -FE_u + 2EF_u - EE_v, \\ 2W^2\Gamma_{12}^1 &= GE_v - FG_u, \\ 2W^2\Gamma_{12}^2 &= -FE_v + EG_u, \\ 2W^2\Gamma_{22}^1 &= 2GF_v - GG_u - FG_v, \\ 2W^2\Gamma_{22}^2 &= -2FF_v + FG_u + EG_v,\end{aligned}$$

onde $W = \sqrt{EG - F^2}$. Em particular, se consideramos parâmetros isotérmicos tais que

$$E = G = \exp 2\omega, \quad F = 0,$$

obtemos

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E}, \Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2E}, \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E},$$
$$\Gamma_{12}^2 = \frac{E_u}{2E}, \Gamma_{22}^1 = -\frac{E_u}{2E}, \Gamma_{22}^2 = \frac{E_v}{2E}.$$

As equações de Codazzi *euclidianas* para o par (A, B) são

$$\nabla_{\partial_u} B(\partial_v, \partial_v) - \nabla_{\partial_v} B(\partial_u, \partial_v) = 0.$$
$$\nabla_{\partial_v} B(\partial_u, \partial_u) - \nabla_{\partial_u} B(\partial_v, \partial_u) = 0.$$

Estas equações podem ser expressas em coordenadas locais de modo mais familiar. Obtém-se da definição de ∇:

$$\partial_v f - \partial_u g = \Gamma_{22}^1 e - (\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) f - \Gamma_{12}^2 g,$$
$$\partial_v e - \partial_u f = \Gamma_{12}^1 e - (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2) f - \Gamma_{11}^2 g.$$

Dizemos que (A, B) é um *par de Codazzi* se satisfaz às equações de Codazzi.

Mais adiante, detalharemos uma interpretação destas equações no contexto de imersões isométricas de superfícies.

1.1 Complexificação

Fixados parâmetros arbitrários u, v em um aberto U de S, os campos coordenados ∂_u, ∂_v e as formas duais $\mathrm{d}u, \mathrm{d}v$ formam, em cada ponto $p \in U$, bases dos espaços tangente $T_p M$ e cotangente $T_p^* M$, respectivamente.

Assim, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}u + i\mathrm{d}v$ e $\mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}u - i\mathrm{d}v$ formam uma base para $(T_p^* M)^{\mathbb{C}}$. Da mesma forma $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_u - i\partial_v)$ e $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_u + i\partial_v)$ constituem uma base para $(T_pM)^{\mathbb{C}}$. De fato,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z(\partial_z) &= \frac{1}{2}(\mathrm{d}u + i\mathrm{d}v)(\partial_u - i\partial_v) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{d}u(\partial_u) - \frac{i}{2}\mathrm{d}u(\partial_v) + \frac{i}{2}\mathrm{d}v(\partial_u) + \frac{1}{2}\mathrm{d}v(\partial_v). \end{aligned}$$

Como $\{\mathrm{d}u, \mathrm{d}v\}$ é base de T_p^*M dual a base $\{\partial_u, \partial_v\}$, temos $\mathrm{d}u(\partial_u) = 1, \mathrm{d}u(\partial_v) = \mathrm{d}v(\partial_u) = 0$ e $\mathrm{d}v(\partial_v) = 1$; logo $\mathrm{d}z(\partial_z) = 1$. Analogamente obtemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z(\partial_{\bar{z}}) &= \frac{1}{2}(\mathrm{d}u + i\mathrm{d}v)(\partial_u + i\partial_v) = 0 \\ \mathrm{d}\bar{z}(\partial_z) &= \frac{1}{2}(\mathrm{d}u - i\mathrm{d}v)(\partial_u - i\partial_v) = 0 \\ \mathrm{d}\bar{z}(\partial_{\bar{z}}) &= \frac{1}{2}(\mathrm{d}u - i\mathrm{d}v)(\partial_u + i\partial_v) = 1. \end{aligned}$$

Estamos aptos a definir a complexificação de uma forma bilinear simétrica $B = e\mathrm{d}u^2 + 2f\mathrm{d}u\mathrm{d}v + g\mathrm{d}v^2$. Denotando a forma complexa resultante por $B^{\mathbb{C}}$, define-se

$$\begin{aligned} B^{\mathbb{C}}(\partial_z, \partial_z) &= B\left(\frac{1}{2}(\partial_u - i\partial_v), \frac{1}{2}(\partial_u - i\partial_v)\right) \\ &= \frac{1}{4}\Big(B(\partial_u, \partial_u) - iB(\partial_u, \partial_v) - iB(\partial_v, \partial_u) - B(\partial_v, \partial_v)\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(B(\partial_u, \partial_u) - 2iB(\partial_u, \partial_v) - B(\partial_v, \partial_v)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e-g}{2} - if\right) =: \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Analogamente, calcula-se

$$\begin{aligned} B^{\mathbb{C}}(\partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}}) &= B\left(\frac{1}{2}(\partial_u + i\partial_v), \frac{1}{2}(\partial_u + i\partial_v)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e + 2if - g\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e-g}{2} + if\right) = \frac{\bar{\alpha}}{2}. \end{aligned}$$

Por fim,

$$B^{\mathbb{C}}(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) = B\left(\frac{1}{2}(\partial_u - i\partial_v), \frac{1}{2}(\partial_u + i\partial_v)\right) = \frac{e+g}{4}.$$

Portanto,

$$B^{\mathbb{C}} = \frac{\alpha}{2}\,\mathrm{d}z^2 + \frac{e+g}{2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z} + \frac{\bar{\alpha}}{2}\,\mathrm{d}\bar{z}^2. \tag{1.5}$$

Em particular, a complexificação da métrica tem componentes

$$\begin{aligned}
A^{\mathbb{C}}(\partial_z, \partial_z) &= \frac{1}{4}\left(A(\partial_u, \partial_u) - 2iA(\partial_u, \partial_v) - A(\partial_v, \partial_v)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{E-G}{2} - iF\right) =: \frac{\beta}{2},\\
A^{\mathbb{C}}(\partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}}) &= \frac{1}{4}\left(A(\partial_u, \partial_u) + 2iI(\partial_u, \partial_v) - A(\partial_v, \partial_v)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{E-G}{2} + iF\right) = \frac{\bar{\beta}}{2},\\
A^{\mathbb{C}}(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) &= \frac{1}{4}\left(A(\partial_u, \partial_u) + iA(\partial_u, \partial_v) - iA(\partial_v, \partial_u) + A(\partial_v, \partial_v)\right)\\
&= \frac{1}{4}(E+G).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$A^{\mathbb{C}} = \frac{\beta}{2}\,\mathrm{d}z^2 + \frac{E+G}{2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z} + \frac{\bar{\beta}}{2}\,\mathrm{d}\bar{z}^2. \tag{1.6}$$

Supondo-se que u, v são parâmetros isotérmicos (com respeito a estrutura conforme de A), temos

$$A^{\mathbb{C}} = \frac{E}{2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z} = \frac{\exp 2\omega}{2}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z}.$$

Neste caso, obtemos

$$H(A, B) = \frac{1}{2}\exp(-2\omega)(e+g)$$

e

$$B^{\mathbb{C}} = \frac{\alpha}{2}\,\mathrm{d}z^2 + \exp(2\omega)H\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z} + \frac{\bar{\alpha}}{2}\,\mathrm{d}\bar{z}^2.$$

Finalmente, a complexificação da parte sem traço B_0 de B tem coeficientes

$$\begin{aligned}
B_0^{\mathbb{C}}(\partial_z, \partial_z) &= B^{\mathbb{C}}(\partial_z, \partial_z) - HA^{\mathbb{C}}(\partial_z, \partial_z) = \frac{1}{2}\alpha,\\
B_0^{\mathbb{C}}(\partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}}) &= B^{\mathbb{C}}(\partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}}) - HA^{\mathbb{C}}(\partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}}) = \frac{1}{2}\bar{\alpha},\\
B_0^{\mathbb{C}}(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) &= B^{\mathbb{C}}(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) - HA^{\mathbb{C}}(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) = \frac{1}{2}\exp(2\omega)H - H\frac{1}{2}\exp 2\omega = 0.
\end{aligned}$$

Assim, como esperado, $B_0^{\mathbb{C}}$ é livre de traço. Além disso, o coeficiente de $\mathrm{d}z^2$ é conjugado do coeficiente de $\mathrm{d}\bar{z}^2$:

$$B_0^{\mathbb{C}} = \frac{1}{2}\alpha\, \mathrm{d}z^2 + \frac{1}{2}\bar{\alpha}\, \mathrm{d}\bar{z}^2.$$

Tais coeficientes são, por definição, os coeficientes das parte $(2,0)$ e $(0,2)$, respectivamente, de $B_0^{\mathbb{C}}$. Os coeficintes da parte $(1,1)$ de $B_0^{\mathbb{C}}$, isto é, os coeficientes de $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z}$ e $\mathrm{d}\bar{z}\,\mathrm{d}z$ são nulos.

Verifica-se que, sob certas condições geométricas, a parte $(2,0)$ de $B_0^{\mathbb{C}}$, dada por

$$\Omega = (B_0^{\mathbb{C}})^{(2,0)} = \frac{1}{2}\alpha\, \mathrm{d}z^2 \tag{1.7}$$

define uma forma quadrática (holomorfa) em S. Isto significa que, dado um outro parâmetro complexo w tal que

$$w = w(z)$$

é uma aplicação holomorfa, os coeficientes

$$\frac{1}{2}\alpha(z) = (B_0^{\mathbb{C}})^{(2,0)}(\partial_z, \partial_z), \quad \frac{1}{2}\tilde{\alpha}(w) = (B_0^{\mathbb{C}})^{(2,0)}(\partial_w, \partial_w),$$

são funções (holomorfas) satisfazendo

$$\tilde{\alpha}(w) = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right)^2 \alpha(z).$$

Deste modo, uma vez que

$$\mathrm{d}w = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z,$$

concluímos que

$$\alpha(z)\mathrm{d}z^2 = \tilde{\alpha}(w)\,\mathrm{d}w^2$$

definem um mesmo objeto invariante por coordenadas complexas.

Relembremos que uma função α é homolorfa se, e somente se,

$$\mathrm{Re}\,\alpha_u = \mathrm{Im}\,\alpha_v, \quad \mathrm{Re}\,\alpha_v = -\mathrm{Im}\,\alpha_u$$

ou, em termos do operador $\partial_{\bar{z}}$

$$\alpha_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}}\alpha = 0.$$

De fato, temos

Lema 1.1.1 *Uma função complexa diferenciável $\alpha = U + iV$ é holomorfa se, e somente se, $\alpha_{\bar{z}} = 0$.*

Prova: Temos:

$$\begin{aligned} \alpha_{\bar{z}} &= U_{\bar{z}} + iV_{\bar{z}} \\ &= \frac{1}{2}(U_u + iU_v) + \frac{i}{2}(V_u + iV_v) = (U_u - V_v) + i(U_v + V_u). \end{aligned}$$

Portanto, se α é holomorfa, valem as equações de Cauchy-Riemann, logo $\alpha_{\bar{z}} = 0$. Reciprocamente, se $\alpha_{\bar{z}} = 0$, temos $U_u = V_v$ e $U_v = -V_u$. Portanto α é holomorfa.

1.2 Pares de Codazzi

Relembremos que, para um par de formas bilineares simétricas (A, B), em que A é uma métrica Riemanniana em S, as curvaturas média e extrínseca associada a este par são:

$$H(A,B) = \frac{Eg - eFf + Ge}{2(EG - F^2)} \quad e \quad K(A,B) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}\ ,$$

sendo $A = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2$ e $B = e\mathrm{d}u^2 + 2f\mathrm{d}u\mathrm{d}v + g\mathrm{d}v^2$ as expressões locais de A e B em termos de parâmetros (u, v) em M.

Consideramos a seguir duas aplicações desta terminologia.

1.2.1 Curvatura média constante

Neste caso, fixamos em S a estrutura conforme definida por A e parâmetros isotérmicos u, v em que A é expressa por

$$A = \exp(2\omega)(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)$$

e os símbolos de Christoffel são dados por

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E}, \, \Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2E}, \, \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E},$$
$$\Gamma_{12}^2 = \frac{E_u}{2E}, \, \Gamma_{22}^1 = -\frac{E_u}{2E}, \, \Gamma_{22}^2 = \frac{E_v}{2E}.$$

Neste caso, as equações de Codazzi para o par (A, B) reduzem-se a

$$\partial_u g - \partial_v f = (e+g)\partial_u \omega,$$
$$\partial_v e - \partial_u f = (e+g)\partial_v \omega.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\partial_u(e-g) &= \partial_u(e+g-2g) = 2\partial_u(H\exp 2\omega) - 2\partial_u g \\
&= 2H_u \exp 2\omega + 4H\exp(2\omega)\omega_u - 2(e+g)\omega_u - 2f_v \\
&= 2H_u \exp 2\omega - 2f_v
\end{aligned}$$

e, de modo análogo,

$$\partial_v(e-g)_v - 2\partial_u f = 2H_v \exp 2\omega.$$

Em termos de parâmetros complexos, este par de equações pode ser reescrito como

$$\alpha_{\bar{z}} = H_z \exp 2\omega. \tag{1.8}$$

Concluímos que se $H = H(A, B)$ é constante, $\alpha(z)$ é uma função holomorfa. Isto implica que a forma quadrática

$$\Omega = \frac{1}{2}\alpha \, \mathrm{d}z^2, \tag{1.9}$$

a *diferencial de Hopf* de B, é holomorfa em S.

Proposição 1.2.1 *Se $H(A, B)$ é constante, a diferencial de Hopf de B é uma forma quadrática holomorfa.*

1.2.2 Curvatura extrínseca constante positiva

Agora, supomos que B é *também* uma métrica Riemanniana, i.e., que B é positiva e definida. Consideramos, então, parâmetros conformes, ditos *bisotérmicos*, relativamente a métrica B. Logo, em termos destes parâmetros u, v, temos

$$B = \mu(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2), \quad \mu > 0.$$

Neste caso

$$e = g = \mu, \quad f = 0.$$

Escrevemos, como antes,

$$A = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2.$$

Calculamos

$$K = K(A, B) = \frac{\mu^2}{W^2}, \quad H(A, B) = \frac{\mu}{W^2}(E + G),$$

onde $W^2 = EG - F^2$. Determinemos a parte sem traço de A relativamente a B. O meio-traço de A (relativamente a B) é dado por

$$2H(B, A) = \mathrm{tr}A = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{eg - f^2} = \frac{Eg + Ge}{EG - F^2}\frac{EG - F^2}{eg - f^2} = \frac{H(A, B)}{K(A, B)}.$$

Portanto, a parte sem traço de A é

$$A_0 = A - H(B, A)B = A - \frac{H(A, B)}{K(A, B)}B$$

Em termos de parâmetros conformes para B, a complexificação de A tem coeficientes

$$A^{\mathbb{C}}(\partial_z, \partial_z) = \frac{1}{2}\Big(\frac{E - G}{2} - iF\Big) = \frac{1}{2}\beta, \quad A^{\mathbb{C}}(\partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{E - G}{2} + iF\Big) = \frac{1}{2}\bar{\beta}$$

e

$$A^{\mathbb{C}}(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) = \frac{1}{4}(E + G) = \frac{1}{2}H(B, A)\mu = \frac{1}{4}\frac{H(A, B)}{K(A, B)}\mu.$$

Então, obtemos

$$A^{\mathbb{C}} = \frac{1}{2}\beta \mathrm{d}z^2 + \frac{1}{2}\frac{H}{K}\mu \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z} + \frac{1}{2}\bar{\beta}\mathrm{d}\bar{z}^2. \tag{1.10}$$

A complexificação de B tem coeficientes

$$B^{\mathbb{C}}(\partial_z, \partial_z) = \frac{1}{2}\Big(\frac{e-g}{2} - if\Big) = 0, \quad B^{\mathbb{C}}(\partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{e-g}{2} - if\Big) = 0$$

e

$$B^{\mathbb{C}}(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) = \frac{1}{4}(e+g) = \frac{1}{2}\mu.$$

Finalmente, a complexificação de A_0 tem coeficientes

$$A_0^{\mathbb{C}}(\partial_z, \partial_z) = \frac{1}{2}\beta, \quad A_0^{\mathbb{C}}(\partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}}) = \frac{1}{2}\bar{\beta}$$

e

$$A^{\mathbb{C}}(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) = 0,$$

onde

$$\beta = \frac{E-G}{2} - iF.$$

A forma diferencial quadrática

$$\Omega = \frac{1}{2}\beta \, \mathrm{d}z^2$$

é denominada *diferencial de Hopf* de A.

Seguindo esta notação, demonstramos

Proposição 1.2.2 *Se $K(A,B) > 0$ é constante positiva, então a diferencial de Hopf de A é uma forma quadrática holomorfa.*

Prova: Escrevemos $B = \mu(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2) = \mu \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}$. Assim,

$$K(A,B) = \frac{\mu^2}{EG - F^2} \quad e \quad \Omega = \frac{1}{2}\left(\frac{E-G}{2} - iF\right) dz^2 = \frac{1}{2}\beta \mathrm{d}z^2.$$

Neste caso, as equações de Codazzi reduzem-se a:

$$\begin{aligned} \mu_v &= \mu(\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2), \\ \mu_u &= \mu(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1), \end{aligned} \tag{1.11}$$

onde $\Gamma_{12}^1, \Gamma_{11}^2, \Gamma_{12}^2$ e Γ_{22}^1 são os símbolos de Christoffel da métrica A.

Denotando-se $W = \sqrt{EG - F^2}$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2W^2} + \frac{EG_u - FE_v}{2W^2} \\
&= \frac{GE_u - 2FF_u + EG_u}{2W^2} = \frac{W_u}{W}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2W^2} + \frac{GE_v - FG_u}{2W^2} \\
&= \frac{EG_v - 2FF_v + GE_v}{2W^2} = \frac{W_v}{W}.
\end{aligned}$$

Em suma,

$$\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 = \frac{W_u}{W} \qquad e \qquad \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1 = \frac{W_v}{W}\,. \tag{1.12}$$

Assim, as equações de Codazzi passam a ser

$$\mu_u = (\frac{W_u}{W} - \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1)\mu, \tag{1.13}$$

$$\mu_v = (\frac{W_v}{W} - \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2)\mu. \tag{1.14}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 &= \frac{GF_u - 2FF_u + FE_v}{2W^2} + \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2W^2} \\
&= \frac{G(E_u + 2F_v - G_u) + F(E_v - 2F_u - G_v)}{2W^2} \\
&= \frac{2G\left(\frac{E_u - G_u}{2} + F_v\right) + 2F\left(\frac{E_v - G_v}{2} - F_u\right)}{2W^2} \\
&= \frac{G\left(\frac{E_u - G_u}{2} + F_v\right) + F\left(\frac{E_v - G_v}{2} - F_u\right)}{W^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2W^2} + \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2W^2} \\
&= \frac{E(2F_u - E_v + G_v) + F(-E_u - 2F_v + G_u)}{2W^2} \\
&= \frac{-2E\left(\frac{E_v - G_v}{2} - F_u\right) - 2F\left(\frac{E_u - G_u}{2} + F_v\right)}{2W^2} \\
&= \frac{-E\left(\frac{E_v - G_v}{2} - F_u\right) - F\left(\frac{E_u - G_u}{2} + F_v\right)}{W^2},
\end{aligned}$$

concluímos que β é uma função holomorfa se e somente se

$$\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 = 0\,. \tag{1.15}$$

De fato, $\beta = \frac{E-G}{2} - iF$ é holomorfa se e somente se as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{E_u - G_u}{2} + F_v = 0 \qquad e \qquad \frac{E_v - G_v}{2} - F_u = 0\,. \tag{1.16}$$

são satisfeitas. Portanto, das equações (1.13) e (1.14) deduzimos que β é holomorfa se e somente se

$$\frac{\mu_u}{\mu} = \frac{W_u}{W}, \quad \frac{\mu_v}{\mu} = \frac{W_v}{W},$$

ou seja, β é holomorfa se e somente se

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \frac{\mathrm{d}W}{W}.$$

Por outro lado, $K = K(A,B) = \frac{\mu^2}{W^2}$ é constante se, e somente se, $\mathrm{d}\ln K = 0$, isto é:

$$\frac{\mathrm{d}K}{K} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} - \frac{\mathrm{d}W}{W}.$$

Portanto, se (A,B) é um par de Codazzi e $K(A,B)$ é constante e positiva, então a forma $\beta\,\mathrm{d}z^2$ é holomorfa em S.

1.3 Superfícies imersas

Nesta seção, supomos que S é imersa em uma variedade riemanniana orientada de dimensão três, que denotaremos por M. Representamos a imersão por $\psi : S \to M$. Fixamos o par de Codazzi (A,B) em S em que $A = I$ é a métrica Riemannina induzida em S pela imersão ψ. Se orientarmos S por um campo vetorial normal unitário N, pomos $B = II$, onde II é a segunda forma fundamental em S, definida por

$$II(x,y) = I(\bar{\nabla}_x y, N),$$

onde x, y são campos vetoriais tangentes a S e $\bar{\nabla}$ denota a conexão riemanniana em M. As equações de Gauss e Codazzi são equações de compatibilidade, condições necessárias de existência da imersão ψ (v. [3]). Deduzamos estas últimas. Denotemos a métrica por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Temos, usando a compatibilidade da conexão

$$\begin{aligned} e_v - f_u &= \langle \bar{\nabla}_{\partial_v} \bar{\nabla}_{\partial_u} \partial_u, N \rangle - \langle \bar{\nabla}_{\partial_u} \bar{\nabla}_{\partial_v} \partial_u, N \rangle + \langle \bar{\nabla}_{\partial_u} \partial_u, \bar{\nabla}_{\partial_v} N \rangle - \langle \bar{\nabla}_{\partial_v} \partial_u, \bar{\nabla}_{\partial_u} N \rangle \\ &= \langle \bar{R}(\partial_u, \partial_v)\partial_u, N \rangle - \Gamma_{11}^1 f - \Gamma_{11}^2 g + \Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f, \end{aligned}$$

onde $\bar{R}$ é o tensor de curvatura de M. Portanto, obtemos

$$e_v - f_u = \Gamma_{12}^1 e + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) f - \Gamma_{11}^2 g + \langle \bar{R}(\partial_u, \partial_v)\partial_u, N \rangle \tag{1.17}$$

e analogamente

$$f_v - g_u = \Gamma_{22}^1 e - (\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) f - \Gamma_{12}^2 g + \langle \bar{R}(\partial_u, \partial_v)\partial_v, N \rangle. \tag{1.18}$$

Se M tem curvatura seccional constante, os termos envolvendo curvatura são nulos e, portanto, o par (I, II) é um par de Codazzi. No caso geral, é preciso modificar as formas I e II, produzindo pares (A, B) para os quais as equações de Codazzi incorporem os termos de curvatura.

Como aplicações das proposições anteriores em formas espaciais, ressaltamos que o par (I, II) tem curvatura média constante se, e somente se, a diferencial de Hopf de II é uma forma quadrática holomorfa para a estrutura conforme induzida por I em S. Deduzimos, além disso, que o par (I, II) tem curvatura extrínseca constante se, e somente se, a diferencial de Hopf de I é uma forma quadrática holomorfa para a estrutura conforme induzida por II em S.

A equação de Gauss pode ser escrita como

$$K(I) - \bar{K} = K(I, II), \tag{1.19}$$

onde $K(I)$ e $\bar{K}$ são as curvaturas intrínsecas em S e M, respectivamente, isto é:

$$K(I) = \frac{\langle R(\partial_u, \partial_v)\partial_u, \partial_v \rangle}{EG - F^2}$$

e
$$\bar{K} = \frac{\langle \bar{R}(\partial_u, \partial_v)\partial_u, \partial_v \rangle}{EG - F^2},$$
onde R é o tensor de curvatura de S.

Estudaremos a seguir o caso em que M é um dos produtos riemannianos $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Capítulo 2

Superfícies de revolução com curvatura constante

Denotaremos por $M^2(\kappa)$ a superfície simplesmente conexa, orientável, com curvatura constante κ. Se $\kappa > 0$, a superfície $M^2(\kappa)$ corresponde a esfera euclidiana de raio $\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$. Se $\kappa < 0$, corresponde ao plano hiperbólico de curvatura κ.

Consideramos, no que segue, os produtos riemannianos da forma $M^2(\kappa)\times\mathbb{R}$. Nesta seção, estudamos imersões completas nestes produtos satisfazendo a condição de curvatura Gaussiana constante.

Fixemos, por comodidade, $\kappa = \pm 1$. Neste caso, trabalhamos com os seguintes modelos dos produtos $M^2(\kappa)\times\mathbb{R}$. Denotamos por $\mathbb{R}^4_k$, $k = 0, 1$, o espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$ dotado de coordenadas lineares (x_1, x_2, x_3, x_4) e a métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzida pela forma quadrática $\kappa x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, onde $\kappa = 1$, se $k = 0$ e $\kappa = -1$, se $k = 1$. Modelamos $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$ como a subvariedade do espaço euclidiano $\mathbb{R}^4_0$, dada por:

$$\mathbb{S}^2\times\mathbb{R} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4\,;\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Analogamente, descrevemos $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$ como subvariedade do espaço lorentziano

$\mathbb{R}^4_1$, dada por:

$$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,;\, -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1,\; x_1 > 0\}.$$

Em várias circunstâncias, denotaremos $t = x_4$.

Agora, focamos nossa atenção no estudo das superfícies de revolução de curvatura constante em $M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, onde, como vimos acima, $M^2(\kappa)$ denota $\mathbb{S}^2$ se $\kappa = 1$ e $\mathbb{H}^2$ se $\kappa = -1$.

É sabido que o grupo ortogonal especial SO(2) pode ser identificado com o subgrupo de isometrias de $M^2(\kappa)\times\mathbb{R}$ (rotações) que preservam a orientação e fixam todo ponto de um eixo $\{p\} \times \mathbb{R}$, com $p \in M^2(\kappa)$ fixado. Lembremos que

$$\mathrm{SO}(2) = \{A \in M_{2\times 2} \,;\, \langle A(x), A(y)\rangle = \langle x, y\rangle \;\, e \;\, \det A = 1\}.$$

A menos de uma isometria, podemos assumir que o eixo de rotação é dado por $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$. Além disso, o conjunto

$$P = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in M^2(\varepsilon) \times \mathbb{R} \,;\, x_2 \geq 0, x_3 = 0\}$$

é intersectado por toda órbita de SO(2) uma vez. Desejamos obter uma curva em P que não corta o eixo, exceto nos pontos inicial e final. Além disso, a curva só pode intersectar o eixo ortogonalmente, caso contrário, a superfície de revolução tem uma singularidade.

2.1 Superfícies de Revolução em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Considere a curva $\alpha(u) = (\cosh\, k(u), \operatorname{senh} k(u), h(u))$ em P, onde $k(u) \geq 0$ e u é o comprimento de arco de α, isto é, $|\alpha'(u)|^2 = 1$, ou seja,

$$(k'(u))^2 + (h'(u))^2 = 1. \tag{2.1}$$

A superfície de revolução associada a esta curva é dada por

$$\psi(u, v) = (\cosh\, k(u), \operatorname{senh} k(u) \cos\, v, \operatorname{senh} k(u)\operatorname{sen} v, h(u)),$$

com métrica induzida na forma

$$I = \mathrm{d}u^2 + \operatorname{senh}^2 k(u)\mathrm{d}v^2. \tag{2.2}$$

Em geral, a curvatura gaussiana de uma métrica na forma $I = \mathrm{d}u^2 + f^2(u)\mathrm{d}v^2$ é $K(I) = -\frac{f''(u)}{f(u)}$. Deste modo, $K(I) = 0$ se, e somente se, $f(u) = au + b$ para constantes a e b. Se $K(I) > 0$, obtemos a solução

$$f(u) = a\cos(\sqrt{K(I)}u) + b\operatorname{sen}(\sqrt{K(I)}u).$$

Se $K(I) < 0$, a solução será da forma

$$f(u) = a\cosh(\sqrt{-K(I)}u) + b\operatorname{senh}(\sqrt{-K(I)}u).$$

Portanto, as soluções gerais da equação $K(I) = cte.$ são

$$\begin{aligned} f(u) &= a\cos(\sqrt{K(I)}u) + b\operatorname{sen}(\sqrt{K(I)}u), \ \ se\, K(I) > 0 \\ f(u) &= au + b, \ \ se\, K(I) = 0, \\ f(u) &= a\cosh(\sqrt{-K(I)}u) + b\operatorname{senh}(\sqrt{-K(I)}u), \ \ se\, K(I) < 0, \end{aligned}$$

onde a e b são constantes que não se anulam simultaneamente. Resulta que $f(u) = \operatorname{senh} k(u)$.

A seguir, trabalharemos com os três casos separadamente.

2.1.1 $K(I) > 0$

Neste caso, temos $\operatorname{senh} k(u) = a\cos(\sqrt{K(I)}u) + b\operatorname{sen}(\sqrt{K(I)}u)$. Por outro lado, se a superfície de revolução é completa e $K(I) > 0$, segue do teorema de Gauss-Bonnet, que ψ é uma parametrização de uma esfera topológica, isto é, α é uma curva que intersecta o eixo nos pontos inicial e final.

Vamos denotar por u_0 o ponto inicial. Então, mudando o parâmetro de u para $x = u - u_0$, o ponto inicial passa a ser $x = 0$. Assim

$$\operatorname{senh} k(x) = C\operatorname{sen}(\sqrt{K(I)}x),$$

para uma certa constante C. De fato, dada a expressão

$$\operatorname{senh} k(x) = a\cos(\sqrt{K(I)}u) + b\operatorname{sen}(\sqrt{K(I)}u),$$

efetuando a mudança de variáveis, temos

$$\operatorname{senh} k(0) \;=\; a\cos(0) + b\operatorname{sen}(0),$$

e portanto, $a = \operatorname{senh} k(0)$. Como k é a distância hiperbólica, a condição $k(0) = 0$ implica $a = 0$. Derivando a equação $\operatorname{senh} k(x) = b\operatorname{sen}(\sqrt{K(I)}x)$, temos

$$\cosh\ k(x)k'(x) = \sqrt{K(I)}b\cos(\sqrt{K(I)}x).$$

Calculando esta expressão no ponto inicial $x = 0$ obtemos:

$$k'(0) = \sqrt{K(I)}b \Rightarrow b = \frac{k'(0)}{\sqrt{K(I)}} = C.$$

Portanto, $\operatorname{senh} k(x) = C\operatorname{sen}(\sqrt{K(I)}x)$. Daí:

$$k(x) = \operatorname{arcsenh}(C\operatorname{sen}(\sqrt{K(I)}u)).$$

Como

$$\cosh\ k(x).k'(x) = C\cos(\sqrt{K(I)}x).\sqrt{K(I)},$$

segue que

$$k'(x) = \frac{\sqrt{K(I)}C\cos(\sqrt{K(I)}x)}{\cosh\ k(x)}.$$

De (2.1), temos:

$$(h'(x))^2 = 1 - \frac{K(I)C^2\cos^2(\sqrt{K(I)}x)}{\cosh^2\ k(x)}.$$

Utilizando a identidade $\cosh^2 x = 1 + \operatorname{senh}^2 x$, temos $\cosh^2 k(x) = 1 + C^2\operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)}x)$. Donde, extraímos

$$(h'(x))^2 = 1 - \frac{K(I)C^2\cos^2(\sqrt{K(I)}x)}{1 + C^2\operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)}x)}.$$

Como α intersecta o eixo ortogonalmente no ponto inicial e o vetor velocidade α' é dado por $\alpha'(u) = (\operatorname{senh} k(u).k'(u), \cosh\, k(u).k'(u), 0, h'(u))$, temos $h'(0) = 0$. Por outro lado,

$$0 = h'(0) = 1 - \frac{C^2K(I)\cos^2(0)}{1 + C^2\text{sen}^2(0)}.$$

Daí $C^2K(I) = 1$. Portanto

$$\begin{aligned}
(h'(x))^2 &= 1 - \frac{\cos^2(\sqrt{K(I)}x)}{1 + C^2\text{sen}^2(\sqrt{K(I)}x)} \\
&= 1 - \frac{K(I)\cos^2(\sqrt{K(I)}x)}{K(I) + \text{sen}^2(\sqrt{K(I)}x)} \\
&= \frac{K(I) + \text{sen}^2(\sqrt{K(I)}x) - K(I)(1 - \text{sen}^2(\sqrt{K(I)}x))}{K(I) + \text{sen}^2(\sqrt{K(I)}x)} \\
&= \frac{\text{sen}^2(\sqrt{K(I)}x)(1 + K(I))}{K(I) + \text{sen}^2(\sqrt{K(I)}x)}.
\end{aligned}$$

Integrando, obtemos

$$h(x) = \int h'(x)dx = \sqrt{1 + K(I)} \int \frac{\text{sen}(\sqrt{K(I)}x)}{\sqrt{K(I) + \text{sen}^2(\sqrt{K(I)}x)}}dx.$$

A mudança de variáveis

$$w = \frac{\cos(\sqrt{K(I)}x)}{\sqrt{K(I) + \text{sen}^2(\sqrt{K(I)}x)}},$$

satisfaz

$$dw = \frac{-\sqrt{K(I)}(1 + K(I))\text{sen}(\sqrt{K(I)}x)}{(K(I) + \text{sen}^2(\sqrt{K(I)}x))^{\frac{3}{2}}}.$$

Por um lado, calculamos

$$\int \frac{1}{1 + w^2}\, \mathrm{d}w = \text{arctg} w = \text{arctg}\left(\frac{\cos(\sqrt{K(I)}x)}{\sqrt{K(I) + \text{sen}^2(\sqrt{K(I)}x)}}\right).$$

Por outro lado, verifica-se que

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{1+w^2}\,\mathrm{d}w = \\
&= \int \frac{1}{1+\frac{\cos^2(\sqrt{K(I)}x)}{K(I)+\operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)}x)}} \frac{-\sqrt{K(I)}(1+K(I))\operatorname{sen}(\sqrt{K(I)}x)}{(K(I)+\operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)}x))^{\frac{3}{2}}}dx \\
&= \int \frac{1}{\frac{K(I)+\operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)}x)+\cos^2(\sqrt{K(I)}x)}{K(I)+\operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)}x)}} \frac{-\sqrt{K(I)}(1+K(I))\operatorname{sen}(\sqrt{K(I)}x)}{(K(I)+\operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)}x))^{\frac{3}{2}}}dx \\
&= -\sqrt{K(I)} \int \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{K(I)}x)}{\sqrt{K(I)+\operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)}x)}}dx = -\frac{\sqrt{K(I)}}{\sqrt{1+K(I)}}h(x).
\end{aligned}$$

Portanto

$$h(x) = -\frac{\sqrt{1+K(I)}}{\sqrt{K(I)}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos(\sqrt{K(I)}x)}{\sqrt{K(I)+\operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)}x)}}\right).$$

Como a função arctg é definida em $\mathbb{R}$, temos que h está definida para qualquer valor do parâmetro u e a função arcsenh é definida em $\mathbb{R}$, ou seja, k é válida para qualquer valor do parâmetro u. Portanto, a superfície é completa. Provamos a existência de uma única superfície de revolução completa com curvatura Gaussiana constante positiva $K(I)$, a menos de isometrias.

2.1.2 $K(I) = 0$

Neste caso, $\operatorname{senh} k(u) = au + b$.

Se α não corta o eixo, então a métrica da superfície de revolução, dada por

$$I = du^2 + (Au + B)^2 dv^2$$

é completa se α é definida para todo $u \in \mathbb{R}$. Assim, $a = 0$ uma vez que α não intersecta o eixo, e ψ é um cilindro ao redor do eixo. Por outro lado, se α corta o eixo, então, como acima, podemos assumir que isto acontece em $u = 0$ e neste caso $\operatorname{senh} k(u) = au$. Daí $k(u) = \operatorname{arcsenh}(au)$.

Agora usando que a interseção é ortogonal em $u = 0$, isto é, $h'(0) = 0$, temos de (2.1) que $k'(0) = 1$. Donde $\cosh k(0).k'(0) = a$, o que assegura $a = 1$. Então

$$k(u) = \text{arcsenh} u \quad e \quad k'(u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Daí

$$(h'(u))^2 = 1 - \frac{1}{1+u^2} = \frac{u^2}{1+u^2}.$$

Integrando esta expressão, obtemos

$$h(u) = \int h'(u)du = \int \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}du.$$

Efetuando a mudança de variáveis $w = 1 + u^2$, tem-se $dw = 2udu$. Assim

$$h(u) = \frac{1}{2}\int \frac{dw}{\sqrt{w}} = \sqrt{w} + D,$$

ou seja, $h(u) = \sqrt{1+u^2} + D$. Como $h(0) = 0$, temos $D = -1$. Portanto, $h(u) = \sqrt{1+u^2} - 1$.

Pelo mesmo argumento da seção anterior, verifica-se que esta superfície é completa.

2.1.3 $K(I) < 0$

Agora, temos $\text{senh}\, k(u) = a\cosh(\sqrt{-K(I)}u) + b\text{senh}(\sqrt{-K(I)}u)$. Primeiro, consideremos o caso em que α corta o eixo. Como anteriormente, podemos assumir que a interseção acontece em $u = 0$. Então

$$\text{senh}\, k(u) = C\text{senh}(\sqrt{-K(I)}u)$$

para um certo número real C. Novamente, $h'(0) = 0$ e $C^2K(I) = -1$. Observemos que

$$k(u) = \text{arcsenh}\left(\frac{1}{\sqrt{-K(I)}}\text{senh}(\sqrt{-K(I)}u)\right)$$

é não-negativo para $u \geq 0$ e, sendo $v = \sqrt{-K(I)}\text{senh}(\sqrt{-K(I)}u)$, tem-se $v' = \cosh(\sqrt{-K(I)}u)$. Daí

$$\begin{aligned} k'(u) &= \frac{v'}{\sqrt{1+v^2}} \\ &= \frac{\sqrt{-K(I)}\cosh(\sqrt{-K(I)}u)}{\sqrt{\text{senh}^2(\sqrt{-K(I)}u) - K(I)}}. \end{aligned}$$

Uma vez que a superfície de revolução deve ser completa, a função $k(u)$ está bem definida para todo $u \geq 0$. Além disso, de (2.1) tem-se $(k'(u))^2 \leq 1$, o que implica $-K(I) \leq 1$. De fato,

$$(k'(u))^2 = \frac{-K(I)\cosh^2(\sqrt{-K(I)}u)}{\text{senh}^2(\sqrt{-K(I)}u) - K(I)} \leq 1.$$

Daí

$$-K(I)(1 + \text{senh}^2(\sqrt{-K(I)}u)) \quad \leq \quad -K(I) + \text{senh}^2(\sqrt{-K(I)}u),$$

o que acarreta $-K(I) \leq 1$.

Portanto, $h(u)$ pode ser calculado explicitamente pela relação

$$-\frac{K(I)\cosh(\sqrt{-K(I)}u)}{\text{senh}^2(\sqrt{-K(I)}u) - K(I)} + (h'(u))^2 = 1.$$

Em outros termos,

$$\begin{aligned} (h'(u))^2 &= 1 + \frac{K(I)\cosh(\sqrt{-K(I)}u)}{\text{senh}^2(\sqrt{-K(I)}u) - K(I)} \\ &= \frac{-K(I) + \text{senh}^2(\sqrt{-K(I)}u) + K(I)\cosh^2(\sqrt{-K(I)}u)}{\text{senh}^2(\sqrt{-K(I)}u) - K(I)} \\ &= \frac{\text{senh}^2(\sqrt{-K(I)}u)(1 + K(I))}{\text{senh}^2(\sqrt{-K(I)}u) - K(I)}. \end{aligned}$$

Concluimos que

$$h'(u) = \frac{\sqrt{1 + K(I)}\text{senh}(\sqrt{-K(I)}u)}{\sqrt{\text{senh}^2(\sqrt{-K(I)}u) - K(I)}}.$$

Utilizando a mudança de variáveis $w = \cosh(\sqrt{-K(I)}u)$, temos

$$dw = \sqrt{-K(I)}\text{senh}(\sqrt{-K(I)}u)du.$$

Assim

$$\begin{aligned}
h(u) &= \int h'(u)du \\
&= \frac{\sqrt{1+K(I)}}{\sqrt{-K(I)}} \int \frac{\sqrt{-K(I)}\text{senh}(\sqrt{-K(I)}u)}{\sqrt{\cosh^2(\sqrt{-K(I)}u) - 1 - K(I)}} du \\
&= \frac{\sqrt{1+K(I)}}{\sqrt{-K(I)}} \int \frac{dw}{\sqrt{-(1+K(I)) + w^2}} \\
&= \frac{\sqrt{1+K(I)}}{\sqrt{-K(I)}} \log(w + \sqrt{w^2 - K(I) - 1}) + D \\
&= \frac{\sqrt{1+K(I)}}{\sqrt{-K(I)}} \log(\cosh(\sqrt{-K(I)}u) + \sqrt{\text{senh}^2(\sqrt{-K(I)}u) - K(I)}) + D.
\end{aligned}$$

A condição inicial é reescrita como

$$0 = h(0) = \frac{\sqrt{1+K(I)}}{\sqrt{-K(I)}} \log(1 + \sqrt{-K(I)}) + D.$$

Logo, $D = -\frac{\sqrt{1+K(I)}}{\sqrt{-K(I)}} \log(1 + \sqrt{-K(I)})$. Portanto,

$$h(u) = \frac{\sqrt{1+K(I)}}{\sqrt{-K(I)}} \log\left(\frac{\cosh(\sqrt{-K(I)}u) + \sqrt{\text{senh}^2(\sqrt{-K(I)}u) - K(I)}}{1 + \sqrt{-K(I)}}\right).$$

Como $-K(I) > 0$, temos que a função h está definida para qualquer valor do parâmetro u. Vemos, assim, que a superfície é completa. Provamos, desta forma, a existência, para toda constante negativa $K(I) \geq -1$, de uma única, a menos de isometrias, superfície de revolução completa de curvatura gaussiana $K(I)$ que corta o eixo de revolução.

Finalmente, consideremos o caso em que a curva α não toca o eixo de rotação. Agora, a métrica induzida é dada por

$$I = du^2 + (a\cosh(\sqrt{-K(I)}u) + b\text{senh}(\sqrt{-K(I)}u))^2 dv^2,$$

e deve ser definida para todo $u \in \mathbb{R}$ para ser completa. Se $a^2 < b^2$, então

$$\lim_{u\to-\infty} \operatorname{senh} k(u) = -\infty \quad e \quad \lim_{u\to+\infty} \operatorname{senh} k(u) = -\infty.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
&\lim_{u\to\pm\infty} a\cosh(\sqrt{-K(I)}u) + b\cosh(\sqrt{-K(I)}u) = \\
&= \lim_{u\to\pm\infty} a\frac{e^{\sqrt{-K(I)}u} + e^{-\sqrt{-K(I)}u}}{2} + b\frac{e^{\sqrt{-K(I)}u} - e^{-\sqrt{-K(I)}u}}{2} \\
&= \lim_{u\to\pm\infty} \frac{(a+b)e^{\sqrt{-K(I)}u}}{2} + \frac{(a-b)e^{-\sqrt{-K(I)}u}}{2}.
\end{aligned}$$

Como $a^2 < b^2$, segue que $(a+b)(a-b) < 0$. Desse modo, temos dois casos a analisar.

<u>Caso 1.</u> $a + b < 0$ e $a - b > 0$.

Neste caso, $e^{-\sqrt{-K(I)}u} \to 0$ quando $u \to +\infty$. Daí $\operatorname{senh} k(u) \to -\infty$ quando $u \to +\infty$, já que $e^{\sqrt{-K(I)}u} \to +\infty$ e $a + b < 0$, isto contradiz o fato de que $k(u) \geq 0$.

<u>Caso 2.</u> $a - b < 0$ e $a + b < 0$.

Neste caso, $e^{\sqrt{-K(I)}u} \to 0$ quando $u \to -\infty$. Daí $senh\, k(u) \to -\infty$ quando $u \to -\infty$, já que $e^{-\sqrt{-K(I)}u} \to +\infty$ e $a + b < 0$, isto contradiz o fato de que $k(u) \geq 0$.

Assim, devemos ter $a^2 \geq b^2$.

Se $a^2 = b^2$, então alterando a variável u por $-u$, se necessário, podemos assumir $a = b$. Assim, $\operatorname{senh} k(u) = ae^{\sqrt{-K(I)}u}$ e escrevendo u em vez de $u - u_0$ para um certo $u_0 \in \mathbb{R}$, temos $\operatorname{senh} k(u) = e^{\sqrt{-K(I)}u}$. Daí

$$k(u) \quad = \quad \operatorname{arcsenh}(e^{\sqrt{-K(I)}u}),$$

e portanto,

$$k'(u) = \frac{\sqrt{-K(I)}e^{\sqrt{-K(I)}u}}{\sqrt{1 + e^{2\sqrt{-K(I)}u}}}.$$

De (2.1), temos que $k'(u) \leq 1$. Logo, $K(I) \geq -1$. De fato

$$\sqrt{-K(I)}e^{\sqrt{-K(I)}u} \quad \leq \quad \sqrt{1+e^{2\sqrt{-K(I)}u}}$$

o que implica

$$-K(I)e^{2\sqrt{-K(I)}u} \quad \leq \quad 1+e^{2\sqrt{-K(I)}u}.$$

A métrica

$$I = du^2 + e^{2\sqrt{-K(I)}u}dv^2$$

induzida nesta superfície é completa.

Se $a^2 > b^2$, então $-1 < \frac{b}{a} < 1$. Isto implica que existem números reais θ e $C > 0$ tais que $a = C\cosh\,\theta, b = C\operatorname{senh}\theta$, já que $\frac{b}{a} = \operatorname{tgh}\theta$ e $-1 < \operatorname{tgh} < 1,\ \forall\,\theta \in \mathbb{R}$. Daí

$$\begin{aligned}\operatorname{senh} k(u) &= C\cosh\theta\cosh(\sqrt{-K(I)}u) + C\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}(\sqrt{-K(I)}u)\\ &= C\cosh(\sqrt{-K(I)}u + \theta).\end{aligned}$$

Substituindo u por $u - \frac{\theta}{\sqrt{-K(I)}}$, temos:

$$\begin{aligned}\operatorname{senh} k(u) &= C\cosh\left(\sqrt{-K(I)}\left(u - \frac{\theta}{\sqrt{-K(I)}}\right) + \theta\right)\\ &= C\cosh(\sqrt{-K(I)}u).\end{aligned}$$

Logo,

$$k(u) \quad = \quad \operatorname{arcsenh}(C\cosh(\sqrt{-K(I)}u))$$

o que implica

$$k'(u) = \frac{C\sqrt{-K(I)}\operatorname{senh}(\sqrt{-K(I)}u)}{\sqrt{1+C^2\cosh^2(\sqrt{-K(I)}u)}}.$$

Novamente a condição $(k'(u)^2) \leq 1$ é equivalente a $K(I) \geq -1$. Assim, a métrica induzida é $I = du^2 + (C^2\cosh^2(\sqrt{-K(I)}u))dv^2$, que é completa. Portanto, obtemos a existência de superfície de revolução completa de curvatura Gaussiana constante $K(I) \geq -1$ que não corta o eixo de revolução.

2.2 Superfície de Revolução em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

Seja a curva $\alpha(u) = (\operatorname{sen} k(u), \cos k(u), 0, h(u))$ em P, onde $\cos k(u) \geq 0$ e u é o comprimento de arco de α, isto é, $(k'(u))^2 + (h'(u))^2 = 1$. Então, a superfície de revolução associada a esta curva é dada por:

$$\psi(u, v) = (\mathrm{sen} k(u), \cos k(u) \cos v, \cos k(u) \mathrm{sen} v, h(u))$$

com a métrica induzida $I = du^2 + \cos^2\, k(u) dv^2$.

Vamos, novamente, distinguir os três casos em termos do sinal da constante $K(I)$.

2.2.1 $K(I) > 0$

A imersão completa deve satisfazer

$$\cos\, k(u) = a \cos(\sqrt{K(I)}u) + b\mathrm{sen}(\sqrt{K(I)}u).$$

Argumentando como em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, podemos assumir que α intersecta o eixo de rotação no ponto inicial, sendo $u = 0$. Assim, $\cos\, k(u) = C\mathrm{sen}(\sqrt{K(I)}u)$ para uma certa constante real positiva C. Além disso,

$$k(u) = \arccos(C\mathrm{sen}(\sqrt{K(I)}u)).$$

Daí

$$k'(u) \quad = \quad -\frac{C\sqrt{K(I)}\cos(\sqrt{K(I)}u)}{\sqrt{1 - C^2\mathrm{sen}^2(\sqrt{K(I)}u)}} \quad e \quad h'(0) = 0$$

Daí, deduzimos que $C^2K(I) = 1$.

Por outro lado, sabemos que α corta o eixo duas vezes quando $K(I) > 0$, isto é, $\cos\, k(u) = 0$ nos pontos inicial e final de α. Então, da equação $\cos\, k(u) = C\mathrm{sen}(\sqrt{K(I)}u)$, temos $\mathrm{sen}(\sqrt{K(I)}u) = 0$ nos pontos inicial e final, ou seja, em $u = 0$ e $u = \frac{\pi}{\sqrt{K(I)}}$, logo $u \in \left[0, \frac{\pi}{\sqrt{K(I)}}\right]$. Em particular, desde que $\cos k(u)$ é menor ou igual que 1 neste intervalo, temos $0 \leq \text{sen}(\sqrt{K(I)}u) \leq 1$ e, como $\cos k(u) = C\text{sen}(\sqrt{K(I)}u)$, segue que $C\text{sen}(\sqrt{K(I)}u) \leq 1$. Isto implica que $C \leq 1$. Daí $C^2 \leq 1$. Como $C^2K(I) = 1$, deduzimos que $K(I) \geq 1$.

Portanto, a imersão pode ser obtida pela expressão

$$k(u) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{K(I)}}\text{sen}(\sqrt{K(I)}u)\right).$$

E da equação $(k'(u))^2 + (h'(u))^2 = 1$, obtemos:

$$\begin{aligned}
(h'(u))^2 &= 1 - \frac{C^2K(I)\cos^2(\sqrt{K(I)}u)}{1 - C^2\text{sen}^2(\sqrt{K(I)}u)} \\
&= \frac{1 - C^2\text{sen}^2(\sqrt{K(I)}u) - C^2K(I)\cos^2(\sqrt{K(I)}u)}{1 - C^2\text{sen}^2(\sqrt{K(I)}u)} \\
&= \frac{K(I) - \text{sen}^2(\sqrt{K(I)}u) - K(I)\cos^2(\sqrt{K(I)}u)}{K(I) - \text{sen}^2(\sqrt{K(I)}u)} \\
&= \frac{-\text{sen}^2(\sqrt{K(I)}u) + K(I)(1 - \cos^2(\sqrt{K(I)}u))}{K(I) - \text{sen}^2(\sqrt{K(I)}u)} \\
&= \frac{-\text{sen}^2(\sqrt{K(I)}u) + K(I)\text{sen}^2(\sqrt{K(I)}u)}{K(I) - \text{sen}^2(\sqrt{K(I)}u)} \\
&= \frac{(K(I) - 1)\text{sen}^2(\sqrt{K(I)}u)}{K(I) - \text{sen}^2(\sqrt{K(I)}u)} \\
&= \frac{(K(I) - 1)\text{sen}^2(\sqrt{K(I)}u)}{K(I) - 1 + \cos^2(\sqrt{K(I)}u)},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$h'(u) = \frac{\sqrt{K(I) - 1}\text{sen}(\sqrt{K(I)}u)}{\sqrt{(K(I) - 1) + \cos^2(\sqrt{K(I)}u)}}. \tag{2.3}$$

Com a substituição $w = \cos(\sqrt{K(I)}u), dw = -\sqrt{K(I)}\text{sen}(\sqrt{K(I)}u)du$, escrevemos

$$h(u) = \int h'(u)du = \frac{-\sqrt{K(I) - 1}}{\sqrt{K(I)}} \int \frac{dw}{\sqrt{(K(I) - 1) + w^2}}$$

$$= \frac{-\sqrt{K(I)-1}}{\sqrt{K(I)}}\log(w+\sqrt{(K(I)-1)+w^2})+D.$$

Portanto,

$$h(u) = -\frac{\sqrt{K(I)-1}}{\sqrt{K(I)}}\log\left(\cos(\sqrt{K(I)}u)+\sqrt{(K(I)-1)+\cos^2(\sqrt{K(I)}u)}\right)+D.$$

Uma vez que $h(0)=0$, pois a curva corta o eixo no ponto inicial, temos:

$$D = \frac{\sqrt{K(I)-1}}{\sqrt{K(I)}}\log(1+\sqrt{K(I)}).$$

Donde,

$$h(u) = -\frac{\sqrt{K(I)-1}}{\sqrt{K(I)}}\log\left(\frac{\cos(\sqrt{K(I)}u)+\sqrt{K(I)-\operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)}u)}}{1+\sqrt{K(I)}}\right),$$

para $u \in \left[0, \frac{\pi}{\sqrt{K(I)}}\right]$.

Se $K(I)=1$, pela equação (2.3), h é constante e, portanto, definida para qualquer valor de u. Se $K(I)>1$, a função h é dada pela equação acima, e é definida para todo valor de u. Desse modo a imersão é completa. Assim, mostramos a existência de uma superfície de revolução completa com curvatura Gaussiana constante positiva $K(I)\geq 1$, a menos de isometrias.

2.2.2 $K(I)=0$

Agora cos $k(u)=au+b$. Se α não corta o eixo, então a métrica da superfície de revolução $I=du^2+(au+b)dv^2$ é completa somente se α está definida para todo $u\in\mathbb{R}$, mas isto é impossível se $a\neq 0$ porque cos $k(u)=au+b\in[-1,1]$. Assim, $a=0$ e ψ é um cilindro ao redor do eixo. Se α corta o eixo, então podemos assumir que isto ocorre no ponto inicial $u=0$. Então cos $k(u)=au$ e $k(u)$ não está bem definida para todo $u\geq 0$, isto é, a métrica induzida não é completa.

2.2.3 $K(I) < 0$

Neste caso,

$$\cos k(u) = a \cosh(\sqrt{-K(I)}u) + b\,\mathrm{senh}(\sqrt{-K(I)}u).$$

Se α não corta o eixo e a imersão é completa, então u deve variar em $\mathbb{R}$, mas isto é impossível, pois existem valores de u tal que

$$a \cosh(\sqrt{-K(I)}u) + b\,\mathrm{senh}(\sqrt{-K(I)}u) = \cos k(u) \notin [-1, 1].$$

Se α intersecta o eixo no ponto inicial $u = 0$, então

$$\cos k(u) = C\mathrm{senh}(\sqrt{-K(I)}u) \text{ para um certo } C \in \mathbb{R}.$$

Mas, $C\mathrm{senh}(\sqrt{-K(I)}u) \in [-1, 1]$ para todo $u \geq 0$ e utilizando o mesmo argumento do caso anterior, verificamos que a imersão não pode ser completa.

Capítulo 3

Um teorema tipo Liebmann

Nosso objetivo é apresentar uma prova do Teorema: *Dada uma constante real K, existe, a menos de isometrias, uma única superfície completa de curvatura Gaussiana constante $K > \kappa$ em $M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, se $\kappa > 0$; e uma única superfície completa de curvatura Gaussiana constante $K > 0$ em $M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, se $\kappa < 0$. Além disso, esta superfícies são rotacionalmente simétricas.*

3.1 Preliminares

Dadas uma métrica A em uma superfície de Riemann S e uma forma bilinear simétrica $\hat{A}$, definimos a perturbação de A dada por

$$\tilde{A} = A + \hat{A}. \tag{3.1}$$

Supondo que $\tilde{A}$ seja ainda positiva e definida, calculemos os símbolos de Christoffel correspondentes. Dados parâmetros isotérmicos u, v relativamente a A, tais que

$$A = E(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2),$$

expressamos $\hat{A}$ e $\tilde{A}$ localmente por

$$\hat{A} = \hat{E}\mathrm{d}u^2 + 2\hat{F}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \hat{G}\mathrm{d}v^2$$

e

$$\tilde{A} = \tilde{E}\mathrm{d}u^2 + 2\tilde{F}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \tilde{G}\mathrm{d}v^2$$

Denotando-se

$$\tilde{W}^2 = \tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2,$$

calculamos os símbolos de Christoffel $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ referentes a $\tilde{A}$:

$$\begin{aligned}
2\tilde{W}^2\tilde{\Gamma}_{11}^1 &= EE_u + 2\hat{A}_{11}^1 + E\hat{E}_u + \hat{G}E_u + \hat{F}E_v,\\
2\tilde{W}^2\tilde{\Gamma}_{11}^2 &= -EE_v + 2\hat{A}_{11}^2 - \hat{F}E_u + 2E\hat{F}_u - E\hat{E}_v - \hat{E}E_v,\\
2\tilde{W}^2\tilde{\Gamma}_{12}^1 &= EE_v + 2\hat{A}_{12}^1 + E\hat{E}_v + \hat{G}E_v - \hat{F}E_u,\\
2\tilde{W}^2\tilde{\Gamma}_{12}^2 &= EE_u + 2\hat{A}_{12}^2 - \hat{F}E_v + E\hat{G}_u + \hat{E}E_u,\\
2\tilde{W}^2\tilde{\Gamma}_{22}^1 &= -EE_u + 2\hat{A}_{22}^1 + 2E\hat{F}_v - E\hat{G}_u - \hat{G}E_u - \hat{F}E_v,\\
2\tilde{W}^2\tilde{\Gamma}_{22}^2 &= EE_v + 2\hat{A}_{22}^2 + \hat{F}E_u + E\hat{G}_v + \hat{E}E_v,
\end{aligned}$$

onde

$$2\hat{A}_{11}^1 = \hat{G}\hat{E}_u - 2\hat{F}\hat{F}_u + \hat{F}\hat{E}_v$$

e assim por diante.

3.2 Prova do Teorema

Sejam, como antes, S uma superfície de Riemann e $\psi : S \to M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica. Supomos S orientada por um campo vetorial normal unitário N. Sejam $I = \langle \mathrm{d}\psi, \mathrm{d}\psi \rangle$ e $II = \langle -\mathrm{d}N, \mathrm{d}\psi \rangle$ a primeira e segunda formas fundamentais de ψ, e $K(I)$ sua curvatura gaussiana.

Usaremos, no que segue, a notação $A = I$ e $B = II$. Suponhamos $K(I)$ constante.

Denotamos a coordenada t, quando restrita a S, por h. Se representarmos o campo coordenado ∂_t por ξ, o gradiente de h em S é o componente tangencial de ξ em S:

$$\nabla h = \xi^T = \xi - \langle \xi, N \rangle N.$$

Denotemos

$$\nu = \langle \xi, N \rangle,$$

a projeção normal do campo coordenado $\xi = \partial_t$.

Consideramos parâmetros conformes u, v com respeito a métrica I em S. Então, definimos um referencial ortonormal local

$$e_1 = E^{-1/2}\partial_u, \quad e_2 = E^{-1/2}\partial_v.$$

Mencionamos que, em parâmetros isotérmicos, o gradiente de h em S é dado por

$$\nabla h = \frac{1}{E}h_u\partial_u + \frac{1}{E}h_v\partial_v.$$

A curvatura seccional $\bar{K}$ do ambiente $M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ no plano tangente $\{e_1, e_2\}$ a S é dada por

$$\begin{aligned}
\bar{K} &= \langle \bar{R}(e_1, e_2)e_1, e_2 \rangle = \kappa((1 - \langle e_1, \xi \rangle)^2(1 - \langle e_2, \xi \rangle)^2 - (\langle e_1, \xi \rangle \langle e_2, \xi \rangle)^2) \\
&= \kappa(1 - \langle e_1, \xi \rangle^2 - \langle e_2, \xi \rangle^2) = \kappa \langle N, \xi \rangle^2 = \kappa \nu^2
\end{aligned}$$

ou, em termos da função h,

$$\bar{K} = \kappa(1 - |\nabla h|^2).$$

Utilizamos, neste cálculo, a decomposição do tensor de curvatura em um produto riemanniano, combinada à expressão da curvatura em uma forma espacial.

Consideramos, agora, uma perturbação da métrica $A = I$ em S dada por

$$\tilde{A} = A + c\,\mathrm{d}h^2, \tag{3.2}$$

onde $c = \kappa/(K(A) - \kappa)$. Temos

$$\widetilde{W}^2 = \tilde{E}\tilde{F} - \tilde{G}^2 = (E + \hat{E})(G + \hat{G}) - \hat{F}^2 = E^2 + E(\hat{E} + \hat{G}) + \hat{E}\hat{G} - \hat{F}^2 = \\ E^2 + cE(h_u^2 + h_v^2) = E^2(1 + c|\nabla h|^2).$$

Portanto, $\tilde{A}$ é uma métrica riemanniana segundo o seguinte critério

Lema 3.2.1 *Sejam S uma superfície de Riemann e $\psi : S \to M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ uma imersão com curvatura gaussiana $K(I)$. Então a forma quadrática $\tilde{A} = I + c\,\mathrm{d}h^2$ define uma métrica Riemanniana em S se*

(i) $\kappa < 0$ e $K(I) < \kappa$ ou $K(I) > 0$, ou

(ii) $\kappa > 0$ e $K(I) > \kappa$.

Para demonstrar o lema, basta utilizarmos o fato de que

$$|\nabla h| = 1 - \nu^2 \leq 1.$$

Portanto, uma vez que, dada a constante $c = \kappa/(K(A) - \kappa)$, temos

$$1 + c|\nabla h|^2 = \frac{1}{K(A) - \kappa}(K(A) + \kappa(|\nabla h|^2 - 1)),$$

verifica-se que $\tilde{W}^2 > 0$ se as hipóteses são satisfeitas. Isto garante que a matriz $\tilde{A}$ é positiva e definida. Deste modo, demonstramos o lema.

Verifica-se facilmente que escolhendo-se $c = \kappa/(K(A) - \kappa)$ temos

$$K(\tilde{A}, B) = K(A) - \kappa.$$

De fato, utilizando a equação de Gauss (1.19), obtém-se

$$K(\tilde{A}, B) = \frac{eg - f^2}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}\frac{EG - F^2}{\tilde{E}\tilde{F} - \tilde{G}^2} = K(A, B)\frac{E^2}{E^2(1 + c|\nabla h|^2)}$$
$$= (K(A) - \bar{K})\frac{1}{(1 + c|\nabla h|^2)} = \frac{K(A) - \kappa(1 - |\nabla h|^2)}{1 + c|\nabla h|^2}$$

Logo, $K(\tilde{A}, B) = K(A) - \kappa$ se e somente se

$$K(A) - \kappa(1 - |\nabla h|^2) = (K(A) - \kappa)(1 + c|\nabla h|^2)$$

ou seja, quando

$$\kappa = c(K(A) - \kappa).$$

Portanto, demonstramos que o par $(\tilde{A}, B)$ satisfaz a seguinte propriedade fundamental:

Lema 3.2.2 *Se $\tilde{A}$ é uma métrica riemanniana em S, então a curvatura extrínseca do par $(\tilde{A}, B)$ é dada por $K(\tilde{A}, B) = K(A) - \kappa$.*

Iniciamos, agora, a demonstração do principal resultado técnico de que faremos uso.

Teorema 3.2.1 *Sejam S uma superfície orientável e $\psi : S \to M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ uma imersão de curvatura Gaussiana constante. Nas condições do Lema 3.2.1, o par $(\tilde{A}, B)$ é um par de Codazzi com curvatura extrínseca constante.*

Prova: Calculemos os símbolos de Christoffel para $\tilde{A}$. Temos

$$\hat{E} = ch_u^2, \quad \hat{F} = ch_u h_v, \quad \hat{G} = ch_v^2.$$

Portanto, utilizando as fórmulas nos preliminares deste capítulo, obtemos

$$\begin{aligned}
2\hat{A}_{11}^1 &= \hat{G}\hat{E}_u - 2\hat{F}\hat{F}_u + \hat{F}\hat{E}_v = \\
&= 2c^2 h_u h_v^2 h_{uu} - 2c^2 h_u h_v (h_{uu} h_v + h_u h_{uv}) + 2c^2 h_u^2 h_v h_{uv} = 0 \\
2\hat{A}_{11}^2 &= -\hat{F}\hat{E}_u + 2\hat{E}\hat{F}_u - \hat{E}\hat{E}_v = \\
&= -2c^2 h_u^2 h_v h_{uu} + 2c^2 h_u^2 (h_{uu} h_v + h_u h_{uv}) - 2c^2 h_u^3 h_{uv} = 0, \\
2\hat{A}_{12}^1 &= GE_v - FG_u = \\
&= 2c^2 h_u h_v^2 h_{uv} - 2c^2 h_u h_v^2 h_{uv} = 0 \\
2\hat{A}_{12}^2 &= -FE_v + EG_u = \\
&= -2c^2 h_u^2 h_v h_{uv} + 2c^2 h_u^2 h_v h_{uv} = 0, \\
2\hat{A}_{22}^1 &= 2GF_v - GG_u - FG_v = \\
&= 2c^2 h_v^2 (h_{uv} h_v + h_u h_{vv}) - 2c^2 h_v^3 h_{uv} - 2c^2 h_u h_v^2 h_{vv} = 0, \\
2\hat{A}_{22}^2 &= -2FF_v + FG_u + EG_v = \\
&= -2c^2 h_u h_v (h_{uv} h_v + h_u h_{vv}) + 2c^2 h_u h_v^2 h_{uv} + 2c^2 h_u^2 h_v h_{vv} = 0.
\end{aligned}$$

Denotamos as componentes do hessiano of h em S por $h_{u,u}$, $h_{u,v}$ e $h_{v,v}$. Relembremos que

$$h_{u,u} = \langle \nabla_{\partial_u} \nabla h, \partial_u \rangle = h_{uu} - \Gamma_{11}^1 h_u - \Gamma_{11}^2 h_v = h_{uu} - \frac{E_u}{2E} h_u + \frac{E_v}{2E} h_v.$$

onde os símbolos de Christoffel Γ^i_{jk} são todos expressos em termos de E. Obtemos

$$
\begin{aligned}
&E\hat{E}_u + \hat{G}E_u + \hat{F}E_v = 2cE(h_u h_{u,u} + \frac{E_u}{2E}(h_u^2 + h_v^2))\,,\\
&-\hat{F}E_u + 2E\hat{F}_u - E\hat{E}_v - \hat{E}E_v = 2cE(h_v h_{u,u} - \frac{E_v}{2E}(h_u^2 + h_v^2))\,,\\
&E\hat{E}_v + \hat{G}E_v - \hat{F}E_u = 2cE(h_u h_{u,v} + \frac{E_v}{2E}(h_u^2 + h_v^2))\,,\\
&-\hat{F}E_v + E\hat{G}_u + \hat{E}E_u = 2cE(h_v h_{u,v} + \frac{E_u}{2E}(h_u^2 + h_v^2))\,,\\
&2E\hat{F}_v - E\hat{G}_u - \hat{G}E_u - \hat{F}E_v = 2cE(h_u h_{v,v} - \frac{E_u}{2E}(h_u^2 + h_v^2))\,,\\
&\hat{F}E_u + E\hat{G}_v + \hat{E}E_v = 2cE(h_v h_{v,v} + \frac{E_v}{2E}(h_u^2 + h_v^2)).
\end{aligned}
$$

Reunindo estas expressões, concluímos que

$$
\begin{aligned}
2\tilde{W}^2\tilde{\Gamma}^1_{11} &= EE_u + 2cE(h_u h_{u,u} + \frac{E_u}{2E}(h_u^2 + h_v^2)),\\
2\tilde{W}^2\tilde{\Gamma}^2_{11} &= -EE_v + 2cE(h_v h_{u,u} - \frac{E_v}{2E}(h_u^2 + h_v^2)),\\
2\tilde{W}^2\tilde{\Gamma}^1_{12} &= EE_v + 2cE(h_u h_{u,v} + \frac{E_v}{2E}(h_u^2 + h_v^2)),\\
2\tilde{W}^2\tilde{\Gamma}^2_{12} &= EE_u + 2cE(h_v h_{u,v} + \frac{E_u}{2E}(h_u^2 + h_v^2)),\\
2\tilde{W}^2\tilde{\Gamma}^1_{22} &= -EE_u + 2cE(h_u h_{v,v} - \frac{E_u}{2E}(h_u^2 + h_v^2)),\\
2\tilde{W}^2\tilde{\Gamma}^2_{22} &= EE_v + 2cE(h_v h_{v,v} + \frac{E_v}{2E}(h_u^2 + h_v^2)).
\end{aligned}
$$

Mais sucintamente, escrevemos

$$
\begin{aligned}
\tilde{W}^2\tilde{\Gamma}^1_{11} &= E^2(1 + c|\nabla h|^2)\Gamma^1_{11} + cE\, h_u h_{u,u},\\
\tilde{W}^2\tilde{\Gamma}^2_{11} &= E^2(1 + c|\nabla h|^2)\Gamma^2_{11} + cE\, h_v h_{u,u},\\
\tilde{W}^2\tilde{\Gamma}^1_{12} &= E^2(1 + c|\nabla h|^2)\Gamma^1_{12} + cE\, h_u h_{u,v},\\
\tilde{W}^2\tilde{\Gamma}^2_{12} &= E^2(1 + c|\nabla h|^2)\Gamma^2_{12} + cE\, h_v h_{u,v},\\
\tilde{W}^2\tilde{\Gamma}^1_{22} &= E^2(1 + c|\nabla h|^2)\Gamma^1_{22} + cE\, h_u h_{v,v},\\
\tilde{W}^2\tilde{\Gamma}^2_{22} &= E^2(1 + c|\nabla h|^2)\Gamma^2_{22} + cE\, h_v h_{v,v}.
\end{aligned}
$$

Logo, obtemos

$$\begin{aligned}
&\tilde{W}^2\tilde{\Gamma}^1_{22}e - \tilde{W}^2(\tilde{\Gamma}^1_{12} - \tilde{\Gamma}^2_{22})f - \tilde{W}^2\tilde{\Gamma}^2_{12}g \\
&= E^2(1 + c|\nabla h|^2)(\Gamma^1_{22}e - (\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})f - \Gamma^2_{12}g) \\
&+cEh_u h_{v,v}e - cEh_u h_{u,v}f + cEh_v h_{v,v}f - cEh_v h_{u,v}g
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Calculemos, agora, o hessiano de h. Como afirmamos acima

$$\nabla h = \xi - \langle \xi, N\rangle N.$$

Assim, dados vetores tangentes x, y a S, temos, dado que ξ é paralelo,

$$\begin{aligned}
\nabla^2 h(x,y) &= \langle \nabla_x \nabla h, y\rangle = \langle \bar{\nabla}_x \nabla h, y\rangle = \langle \bar{\nabla}_x \xi, y\rangle - \langle \bar{\nabla}\langle \xi, N\rangle N, y\rangle = \\
&= -\langle \xi, N\rangle\langle \bar{\nabla}_x N, y\rangle = \langle \xi, N\rangle B(v,w).
\end{aligned}$$

Usando a notação $\langle \xi, N\rangle = \nu$, escrevemos

$$h_{u,u} = \nu\, e, \quad h_{u,v} = \nu\, f, \quad h_{v,v} = \nu\, g.$$

Portanto, a expressão (3.3) acima torna-se equivalente a

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Gamma}^1_{22}e - (\tilde{\Gamma}^1_{12} - \tilde{\Gamma}^2_{22})f - \tilde{\Gamma}^2_{12}g \\
&= (\Gamma^1_{22}e - (\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})f - \Gamma^2_{12}g) + \frac{ch_u\nu(eg - f^2)}{E(1 + c|\nabla h|^2)}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, uma das equações de Codazzi para o par (A, B) em $M^2(\kappa)\times\mathbb{R}$ é, como vimos em (1.17),

$$\partial_v f - \partial_u g = \Gamma^1_{22}e - (\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})f - \Gamma^2_{12}g - \langle \bar{R}(\partial_u, \partial_v)N, \partial_v\rangle.$$

Substituindo acima, temos

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Gamma}^1_{22}e - (\tilde{\Gamma}^1_{12} - \tilde{\Gamma}^2_{22})f - \tilde{\Gamma}^2_{12}g \\
&= \partial_v f - \partial_u g + \langle \bar{R}(\partial_u, \partial_v)N, \partial_v\rangle + \frac{ch_u\nu(eg - f^2)}{E(1 + c|\nabla h|^2)}.
\end{aligned}$$

Entretanto, utilizando a expressão da curvatura em um produto riemanniano, obtém-se

$$\begin{aligned}\langle \bar{R}(\partial_u, \partial_v)N, \partial_v\rangle &= \kappa\left(-\langle \xi, \partial_u\rangle\langle \xi, N\rangle(E - \langle \xi, \partial_v\rangle^2)\right) - \\ &- \kappa\langle \xi, \partial_u\rangle\langle \xi, \partial_v\rangle\langle \xi, \partial_N\rangle\langle \xi, \partial_v\rangle = -E\kappa\nu h_u.\end{aligned}$$

Uma vez que $K(A, B) = (eg - f^2)/E^2$, temos

$$\begin{aligned}&\langle \bar{R}(\partial_u, \partial_v)N, \partial_v\rangle + \frac{ch_u\nu(eg - f^2)}{E(1 + c|\nabla h|^2)} = E\nu h_u\Big(- \kappa + \frac{c}{1 + c|\nabla h|^2}K(A, B)\Big)\\ &= E\nu h_u\Big(- \kappa + \frac{c}{1 + c|\nabla h|^2}(K(A) - \kappa + \kappa|\nabla h|^2)\Big)\\ &= \frac{E\nu h_u}{1 + c|\nabla h|^2}(- \kappa + c(K(A) - \kappa)) = 0,\end{aligned}$$

dado que escolhemos $c = \frac{\kappa}{K(A)-\kappa}$.

Concluímos que a equação de Codazzi

$$\partial_v f - \partial_u g = \tilde{\Gamma}^1_{22}e - (\tilde{\Gamma}^1_{12} - \tilde{\Gamma}^2_{22})f - \tilde{\Gamma}^2_{12}g,$$

é satisfeita pelo par $(\tilde{A}, B)$

A prova da outra equação de Codazzi para o par $(\tilde{A}, B)$ é análoga a que apresentamos acima.

Deste modo, verificamos que o par $(\tilde{A}, B)$ é Codazzi nas condições do lema 3.2.2. Vimos, além disso, que a curvatura extrínseca $K(\tilde{A}, B)$ deste par é constante e positiva, se supusermos que $K(A)$ é constante e satisfaz a condição

$$K(A) > \kappa.$$

Segue da proposição 1.2.2, que a componente $(2, 0)$ da complexificação da parte sem traço de $\tilde{A}$ com respeito a B é holomorfa. ■

Observamos que a existência desse par de Codazzi em $M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, para imersões de curvatura gaussiana constante, não depende somente das equações de Codazzi, como acontece em formas espaciais tridimensionais, mas também da equação de Gauss. Para uma imersão de curvatura gaussiana constante positiva $K(A)$ satisfazendo $K(A) - \kappa > 0$, a forma quadrática $\tilde{A}$ é Riemanniana. Além disso, pelo Teorema 3.2.1, $(\tilde{A}, B)$ é um par de Codazzi de curvatura extrínseca constante positiva, o que assegura a existência de uma forma quadrática holomorfa, como vimos na proposição 1.2.2.

Uma vez que a curvatura extrínseca $K(\tilde{A}, B)$ é constante e positiva (ou, dado que $K(A, B) = K(A) - \bar{K} > 0$, por hipótese), concluímos que B é uma forma definida. Sem perda de generalidade, consideramos B positiva. Neste caso, podemos tomar parâmetros (bisotérmicos) conformes u, v relativamente a estrutura conforme em S dada por B. Temos, deste modo,

$$e = g, \quad f = 0. \tag{3.4}$$

Corolário 3.2.1 *Sejam S uma superfície orientável e $\psi : S \to M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ uma imersão de curvatura gaussiana constante positiva $K(A)$ tal que $K(A) > 0$, se $\kappa < 0$ e $K(A) > \kappa$, se $\kappa > 0$. Se considerarmos S como a superfície de Riemann com a estrutura conforme induzida pela segunda forma fundamental B, então*

$$Q = \Big(\langle \psi_z, \psi_z \rangle + c\, h_z^2\Big) \mathrm{d}z^2$$

é uma forma quadrática holomorfa, onde z denota um parâmetro conforme em S.

Observamos que Q pode ser escrita de modo invariante como

$$Q = (\tilde{A}_0^{\mathbb{C}})^{(2,0)} = (A_0^{\mathbb{C}})^{(2,0)} + c((\mathrm{d}h^2)_0^{\mathbb{C}})^{(2,0)} \tag{3.5}$$

Dados parâmetros locais u, v na estrutura conforme de B, o coeficiente de Q é dado por

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{E} - \tilde{G}}{2} - i\tilde{F}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(E - ch_u^2) - (G - ch_v^2)}{2} - i(F - ch_u h_v)\right) \tag{3.6}$$

A existência desta forma quadrática holomorfa é a chave principal para a classificação de imersões de curvatura constante positiva.

Teorema 3.2.2 *Dada uma constante real K, existe, a menos de isometrias, uma única superfície completa de curvatura Gaussiana constante $K > \kappa$ em $M^2(\kappa)\times\mathbb{R}$, se $\kappa > 0$; e uma única superfície completa de curvatura Gaussiana constante $K > 0$ em $M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, se $\kappa < 0$. Além disso, esta superfícies são rotacionalmente simétricas.*

Prova: A parte da existência neste resultado é demonstrada no Capítulo 2. Portanto, vamos provar a seguir somente a unicidade.

Seja S uma superfície de Riemann imersa por uma aplicação $\psi : S \to M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ com curvatura gaussiana positiva K, satisfazendo $K > \kappa$, para $\kappa > 0$ e $K > 0$, se $\kappa < 0$. Como K é positivo, S é compacta e homeomorfa à esfera, pelo teorema de Gauss-Bonnet. Por outro lado, uma forma quadrática holomorfa numa esfera topológica é identicamente nula. De fato, assumindo que a superfície é a esfera de Riemman $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, temos uma estrutura complexa em $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, identificando $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$, dada por um atlas formado por dois sistemas de coordenadas. Um deles, a identidade $\varphi_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, cobre o plano estendido exceto $z = \infty$; outro, $\varphi_2 : \mathbb{C} \cup \{\infty\} - \{0\} \to \mathbb{C}$, cobre o plano estendido menos $z = 0$, onde

$$\varphi_2(z) = \begin{cases} z^{-1} & , \quad se\ z \neq \infty \\ 0 & , \quad se\ z = \infty. \end{cases}$$

Escrevemos, nestes sistemas de coordenadas, $Q = \alpha(z)\,\mathrm{d}z^2, z \in \varphi_1(\mathbb{C})$, $\widetilde{Q} = \beta(w)\,\mathrm{d}w^2, w \in \varphi_2(\mathbb{C} \cup \{\infty\} - \{0\})$. Na intersecção $(\mathbb{C} \cup \{\infty\} - \{0\}) \cap \mathbb{C} = \mathbb{C} - \{0\}$, a mudança de coordenadas $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(\mathbb{C} - \{0\}) \to \mathbb{C}$ é dada por

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = \varphi_2(\varphi_1^{-1}(z)) = \varphi_2(z) = z^{-1}.$$

Portanto, temos $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = -z^{-2}$ e

$$\alpha(z) = \beta(w)\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)^2 = \beta(w)(-z^{-2})^2 = \beta(w)z^{-4} = \beta(w)w^4.$$

Concluímos que α é holomorfa, logo inteira e $\lim\limits_{z\to\infty}\alpha(z)=\lim\limits_{w\to 0}\beta(w)w^4=0$. Pelo teorema de Liouville, como α é inteira e limitada, α é constante e, uma vez que $\lim\limits_{z\to\infty}\alpha(z)=0$, temos $\alpha(z)\equiv 0$. Logo, $Q=\alpha(z)\mathrm{d}z^2$ é identicamente nula.

Portanto, do Corolário 3.2.1, $Q\equiv 0$, isto é, a parte $(2,0)$ de $\tilde{A}$ para a estrutura conforme induzida por B se anula e, portanto, as métricas $\tilde{A}$ e B são conformes. De fato $Q\equiv 0$ implica, segundo (3.6)

$$\tilde{E}=\tilde{G},\quad \tilde{F}=0. \tag{3.7}$$

Uma vez que, por escolha dos parâmetros,

$$e=g,\quad f=0,$$

concluímos, como afirmamos, que $\tilde{A}$ e B são conformes. Portanto, existe uma função positiva λ relacionando estas duas métricas

$$B=\lambda\,\tilde{A}.$$

Em particular, $K(\tilde{A},B)=\lambda^2$ e pelo Lema 3.2.2, temos $\lambda^2=K(A)-\kappa$. Logo, o fator λ é constante. Isto implica que uma das linhas de curvatura é horizontal (isto é, está contida em um plano P_t da forma $M^2(\kappa)\times\{t\}$) e que S determina um ângulo constante com o eixo vertical ao longo de planos horizontais. De fato, temos

$$B=\lambda\tilde{A}=\lambda A+c\lambda\,\mathrm{d}h^2.$$

Assim, considerando desta vez parâmetros u,v isotérmicos com respeito a estrutura conforme dada pela métrica A, escrevemos

$$\begin{aligned}
a_{11}&=B(\partial_u,\partial_u)=\lambda\,E+\lambda c\,h_u^2,\\
a_{12}&=a_{21}=B(\partial_u,\partial_v)=\lambda c\,h_uh_v,\\
a_{22}&=B(\partial_v,\partial_v)=\lambda\,E+\lambda c\,h_v^2.
\end{aligned}$$

Nos pontos umbílicos de S (com respeito ao par (A, B)), temos $a_{12} = a_{21} = 0$. Portanto, $h_u = 0$ ou $h_v = 0$. Temos, ainda, $a_{11} = a_{22}$, o que implica $\lambda c\, h_u^2 = \lambda c\, h_v^2$. Uma vez que $\lambda c \neq 0$, deduzimos que $h_u^2 = h_v^2$. Portanto, $h_u = h_v = 0$, isto é, $\nabla h \equiv 0$ nos pontos umbílicos de S. Ou seja, nos pontos umbílicos, temos

$$\begin{aligned} 0 &= h_u = \partial_u(h) = \partial_u\langle \psi, \partial_t\rangle = \langle \partial_u, \partial_t\rangle \\ 0 &= h_v = \partial_v(h) = \partial_v\langle \psi, \partial_t\rangle = \langle \partial_v, \partial_t\rangle. \end{aligned}$$

Assim, o plano tangente à superfície em um ponto umbílico é horizontal, já que ∂_t gera a direção vertical.

Reciprocamente, em um ponto cujo plano tangente é horizontal, temos $\langle \partial_u, \partial_t\rangle = \langle \partial_u, \partial_t\rangle = 0$, ou seja, $h_u = h_v = 0$. Desse modo, $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{11} = a_{22} = \lambda E$, configurando um ponto umbílico.

Em um ponto não umbílico, podemos escolher um referencial ortonormal principal $\{e_1, e_2\}$ para B em uma vizinhança do ponto. Isto significa que $-\bar{\nabla}_{e_1} N = a_{11} e_1$ e $-\bar{\nabla}_{e_2} N = a_{22} e_2$. Neste caso, também teremos $a_{12} = a_{21} = 0$. Então $h_1 = 0$ ou $h_2 = 0$ em conjuntos abertos. Suponhamos $h_2 = 0$ em um destes abertos. Assim, temos

$$0 = e_2(h) = e_2\langle \psi, \partial_t\rangle = \langle e_2, \partial_t\rangle.$$

Como ∂_t é vertical e $\langle e_2, \partial_t\rangle = 0$, temos que e_2 é um campo de vetores horizontal. Logo, as linhas de curvatura associadas a a_{22} são horizontais. Além disso, ao longo de uma destas curvas, contidas, como vimos, na intersecção de S com um plano horizontal, temos

$$e_2\langle N, \partial_t\rangle = \langle \bar{\nabla}_{e_2} N, \partial_t\rangle = a_{22}\langle e_2, \partial_t\rangle = 0.$$

Portanto, o ângulo formado com a direção vertical permanece constante ao longo das linhas de curvatura horizontais. Observamos, ainda, que $a_{22} = \lambda$ é constante ao longo de uma dessas curvas.

Seja, então, V uma vizinhança de um ponto (p,t) não umbílico, dotada de um referencial principal $\{e_1, e_2\}$. As linhas de curvatura em V com direção e_2 estão localmente contidas nos planos horizontais $P_t = M^2(\kappa) \times \{t\}$, como provamos acima. Reciprocamente, as componentes conexas de $V \cap P_t$ são linhas de curvatura com direção tangente dada por e_2. Concluímos que, para um t fixo, V e P_t marcam um ângulo constante $\theta(t)$ ao longo de cada componente conexa da intersecção. Assim, se uma componente conexa da intersecção entre S e P_t tem um ponto não umbílico, o ângulo é constante não-nulo, a menos que exista também um ponto umbílico nesta mesma componente. Contudo, neste ponto o ângulo é necessariamente nulo. Assim, por continuidade da função ângulo, ou todos os pontos numa componente conexa $S \cap P_t$ são umbílicos e o ângulo é zero, ou todos os pontos são não-umbílicos e o ângulo é não-nulo. Suponhamos que todos os pontos de uma componente conexa são umbílicos. Então, ao longo desta componente conexa, P_t é o plano tangente a S, assim $N = \partial_t$, e $a_{22}\, e_2 = \bar{\nabla}_{e_2} N = 0$. Portanto, $a_{22} = 0$ e $K(A,B) = 0$ ao longo desta componente. Pela equação de Gauss (1.19), $K(A) - \bar{K} = 0$ ao longo da curva. Porém, $\bar{K} \in [0, \kappa]$, se $\kappa > 0$ e $\bar{K} \in [\kappa, 0]$, se $\kappa < 0$. Isto contradiz a hipótese de que $K(A) > \kappa$, se $\kappa > 0$ e $K(A) > 0$, se $\kappa < 0$.

Portanto, os pontos umbílicos são isolados e, deste modo, existe um referencial principal ortonormal $\{e_1, e_2\}$ num subconjunto denso de S. Fixemos e_2 tangente às linhas de curvatura horizontais.

Temos $\gamma \neq 0$, onde $\gamma = \nabla h$ é a parte tangente de ∂_t definida por $\gamma = \partial_t - \langle \partial_t, N \rangle N$. Segue que $\gamma = \langle e_1, \partial_t \rangle e_1 = \mathrm{sen}\theta(t)\, e_1$, onde $\theta(t)$ é o ângulo entre N e P_t ao longo de uma componente conexa dada de $S \cap P_t$. Agora, calculemos a curvatura geodésica da linha de curvatura horizontal em P_t. Temos,

$$e_1 = \frac{\gamma}{\mathrm{sen}\,\theta(t)} = \frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta(t)}(\partial_t - \langle \partial_t, N \rangle N) = \frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta(t)}(\partial_t - \cos\,\theta(t) N).$$

Como $\theta(t)$ é constante ao longo da curva, então $\cos\,\theta(t)$ e $\mathrm{sen}\,\theta(t)$ são constantes ao longo da curva. Logo,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{e_2}e_1 &= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta(t)}(\bar{\nabla}_{e_2}\partial_t - \cos\,\theta(t)\bar{\nabla}_{e_2}N)\\ &= -\frac{\cos\,\theta(t)}{\operatorname{sen}\theta(t)}\bar{\nabla}_{e_2}N = \frac{\cos\,\theta(t)}{\operatorname{sen}\theta(t)}a_{22}e_2\end{aligned}$$

Uma vez que que $\langle e_1, e_2\rangle = 0$, obtemos

$$\langle\bar{\nabla}_{e_2}e_2, e_1\rangle = -\frac{\cos\,\theta(t)}{\operatorname{sen}\theta(t)}\,a_{22},$$

a curvatura geodésica da linha de curvatura horizontal em S. Isto assegura que as linhas de curvatura horizontais têm curvatura geodésica constante em S. Agora, definimos

$$\eta = Je_2 = \operatorname{sen}\theta N - \cos\,\theta e_1,$$

a rotação em $\frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário de e_2, realizada no plano P_t. Dado que $\langle e_2, \eta\rangle = 0$, temos

$$\begin{aligned}\langle e_2, \bar{\nabla}_{e_2}\eta\rangle &= \langle e_2, \operatorname{sen}\theta\bar{\nabla}_{e_2}N - \cos\,\theta\bar{\nabla}_{e_2}e_1\rangle\\ &= \operatorname{sen}\theta\langle e_2, -a_{22}e_2\rangle - \cos\,\theta\langle e_2, \frac{\cos\,\theta}{\operatorname{sen}\theta}a_{22}e_2\rangle\\ &= -\frac{a_{22}}{\operatorname{sen}\theta}.\end{aligned}$$

Logo, $\langle\bar{\nabla}_{e_2}e_2, \eta\rangle = \frac{a_{22}}{\operatorname{sen}\theta}$ é a curvatura geodésica da linha de curvatura horizontal em $S \cap P_t$ relativamente ao plano P_t. Concluímos que para cada t, $S \cap P_t$ consiste de linhas de P_t com curvatura geodésica constante. Por compacidade de S, tais linhas, são círculos geodésicos em P_t.

Por fim, calculamos $\langle\bar{\nabla}_{e_1}e_1, e_2\rangle = 0$. De fato,

$$\bar{\nabla}_{e_1}e_1 = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}(\bar{\nabla}_{e_1}\partial_t - \cos\,\theta\bar{\nabla}_{e_1}N) = -\frac{\cos\,\theta}{\operatorname{sen}\theta}a_{11}e_1.$$

Assim, as linhas de curvatura de S com direção e_1 são geodésicas em S. Provamos a seguir que estas linhas de curvatura estão contidas em planos verticais.

Fixado um ponto (p,t) em $S \cap P_t$, seja $\alpha(s)$ a linha de curvatura com $\alpha'(s) = e_1(\alpha(s))$ passando por (p,t) em $s = 0$. Devemos provar que α está contida no plano geodésico vertical Π, determinado por e_1 e ∂_t em (p,t). Este é o plano gerado por e_1 e N em (p,t). Para cada s, consideremos o plano geodésico vertical Π_s em $M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ tal que $e_1 = \alpha'(s)$ e $\bar{\nabla}_{e_1} e_1 = \bar{\nabla}_{\alpha'} \alpha'$ sejam tangentes a $\alpha(s)$. Este plano é da forma $\beta_s \times \mathbb{R}$, onde β_s é a geodésica em $M^2(\kappa)$ dada pela interseção de $M^2(\kappa)$ com algum plano π_s em $\mathbb{R}^3$ com vetor unitário normal $\alpha(s)$. A intersecção do hiperplano $\pi_s \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^4$ com $M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ é então o plano Π_s. Agora, $p(s) \wedge \alpha'(s) \wedge \bar{\nabla}_{\alpha'} \alpha'$ é uma direção normal para o hiperplano em $\mathbb{R}^4$, onde $p(s)$ é a projeção de $\alpha(s)$ em $M^2(\kappa)$, ou seja, $\alpha(s) = (p(s), t(s))$. Contudo, dado que α é ao mesmo tempo linha de curvatura e geodésica, obtém-se

$$\bar{\nabla}_{e_1} e_1 = \bar{\nabla}_{\alpha'} \alpha' = (\bar{\nabla}_{e_1} e_1)^T + (\bar{\nabla}_{e_1} e_1)^N = (\bar{\nabla}_{e_1} e_1)^N = a_{11} N.$$

Deduzimos que o normal unitário para o hiperplano Π_s é

$$a(s) = p(s) \wedge e_1(s) \wedge N(s).$$

Derivando esta expressão, obtemos

$$\begin{aligned} a'(s) &= p'(s) \wedge e_1(s) \wedge N + p(s) \wedge \bar{\nabla}_{e_1} e_1 \wedge N(s) + p(s) \wedge e_1(s) \wedge \bar{\nabla}_{e_1} N \\ &= (\alpha'(s) - t'(s)\partial_t) \wedge e_1(s) \wedge N(S) = -t'(s)\, \partial_t \wedge e_1(s) \wedge N(s) = 0, \end{aligned}$$

uma vez que ∂_t está no plano gerado por e_1 e N. Assim, $a'(s) = 0$ e, portanto, $\Pi_s = \Pi$, para todo s. Então $\alpha(s)$ é uma curva plana contida em Π. Note que Π tem normal $e_2(p,t)$, uma vez que $e_2(p,t) = a(0)$. Logo as curvas integrais de e_1 são geodésicas planares em S. Assim, para um t fixo, uma componente $\sigma(s)$ de $S \cap P_t$ é uma curva em P_t com curvatura geodésica constante e o o plano vertical passando por $\sigma(s)$ com normal $e_2(\sigma(s))$ é um plano contendo uma geodésica de S, a saber, a linha de curvatura na direção e_1 passando através de $\sigma(s)$. Esta linha de curvatura tem dados iniciais $\sigma(s)$

para a posição e $e_1(\sigma(s))$ para velocidade. Sabemos que a curvatura dessa linha de curvatura (que é também geodésica) no plano vertical Π é dada pela curvatura normal

$$k_N(s) = \langle \bar{\nabla}_{e_1} e_1, N(s) \rangle = a_{11}.$$

Derivando a expressão $\cos\theta(t) = \langle \partial_t, N \rangle$, obtemos

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}(t) \;=\; \frac{a_{11}}{\operatorname{sen}\theta(t)} \langle \partial_t, e_1 \rangle = a_{11}.$$

Portanto a curvatura de α no plano Π é a derivada do ângulo entre ∂_t e N. Como provamos acima, este ângulo é constante ao longo de $S \cap P_t$. Logo, a curvatura é a mesma para qualquer curva que passe através de $\sigma(s)$ que tenha velocidade na direção de e_1. O Teorema Fundamental das Curvas Planas (v. [5]) em sua versão para planos da forma $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{H}^1 \times \mathbb{R}$, garante que essa curvatura determina completamente a curva. Mudando o ponto em σ, o dado inicial difere por um movimento rígido (uma isometria em P_t) e a função curvatura permanece a mesma nos pontos com altura igual. Assim, duas destas curvas diferem somente por um movimento rígido. Observamos a linha de curvatura σ corresponde a uma das componentes conexas de $S \cap P_t$. Portanto, estamos, por ora, fixando uma destas componentes conexas. Portanto, a componente conexa da superfície contendo σ é invariante por rotações. Logo, a superfície inteira é invariante por isometrias fixando $\sigma(s)$. Isto prova que $\psi(S)$ é rotacionalmente simétrica, e é única a menos de isometrias. Concluímos, deste modo, a prova do resultado.

Este resultado classifica, por exemplo, todas as imersões completas de curvatura constante positiva em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e de curvatura maior que 1 em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Referências Bibliográficas

[1] ABRESCH, U. ; ROSENBERG, H. A Hopf differencial for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *Acta Math.*, V. 193, 28 p., (2004).

[2] ALEDO, J. A., ESPINAR, J. M.; GÁLVEZ, J. A., *Complete surfaces of constant curvature in* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ *e* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. preprint.

[3] CARMO, M. P. do, *Geometria Riemanniana*, 2º Ed., Rio de Janeiro: IMPA, 299 p., 1988.

[4] CARMO, M. P. do, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.* Sociedade Brasileira de Matemática(SBM), Rio de Janeiro, 610 p., (2005).

[5] DANIEL, B., *Isometric immersions into* $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ *and* $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ *and applications to minimal surfaces*, preprint.

[6] KLOTZ, T. Some uses of the second conformal structure on strictly convex surfaces, *Proc. Am. Math. Soc.*, V.14, 793-799, (1963).

[7] LIRA, J. H. Constant curvature discs in homogeneous three manifolds. preprint.

[8] MILNOR, T. K. Abstract Weingarten Surfaces, *J.Diff.Geom.*, V. 15, 365-380, (1980).

[9] SILVA, A. R., *Extensão do Teorema H. Hopf para superfícies com curvatura média constante em* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, Dissertação de Mestrado em Matemática, (UFPE), 48 f. (2006).

[10] SPIVAK, M. A comprehensive introduction to Differential Geometry. Vol.4, *Publish or Perish*, Berkeley, (1979).