

Universidade Federal do Ceará - UFC

Centro de Ciências

Pós-Graduação em Matemática

Curvas de Bézier em Grupos de Lie e Esferas  $S^2$  usando o  
Algoritmo de De Casteljau

Tiago da Silva Alencar

Fortaleza

2009

Tiago da Silva Alencar

Curvas de Bézier em Grupos de Lie e Esferas  $S^2$  usando o  
Algoritmo de De Casteljau

Dissertação submetida a coordenação do curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Computação Gráfica

Orientador: Prof. Dr. Cleon Barroso da Silva

Co-Orientador: Prof. Dr. Esdras Soares de Medeiros  
Filho

Fortaleza

2009

Alencar, Tiago da Silva

A355c Curvas de Bezier em Grupos de Lie e Esferas  $S^2$  usando  
o Algoritmo de De Casteljaou / Tiago da Silva Alencar -  
Fortaleza: 2009.

57f.

Orientador: Prof. Dr. Cleon Barroso da Silva

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará,  
Departamento de Matemática, 2009.

1- Computação Gráfica

CDD 006.6



# Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por sempre ter me guiado e amparado nos momentos difíceis.

Aos Professores Cleon Barroso, Levi Lopes e Romildo José, pela orientação fornecida durante este trabalho.

Ao Professor Esdras Medeiros pela valiosa Co-Orientação, aonde destaco sua paciência e presteza no andamento deste trabalho.

A minha namorada Valerinha, pelo amor e pelo companherismo durante toda essa jornada.

Aos amigos Juscelino Silva e Allana Lima, pela amizade e por toda a ajuda que me deram aqui em Fortaleza.

Aos amigos Wagner Michilles e Alan Lobo pelos conselhos e apoio.

A todos os professores do curso de matemática da URCA, por terem me ajudado a alcançar este objetivo, em especial ao professor Evandro C. F. dos Santos, pela amizade e por seus diversos incentivos.

Aos professores da PGMAT-UFC, em particular ao professor Abdênago Barros, pelos conhecimentos transmitidos durante várias disciplinas.

A todos os amigos da PGMAT-UFC, em particular aos meus conterrâneos do Cariri, pela amizade e parceria durante todo este periodo.

A CAPES pelo auxílio financeiro.

*Dedico este trabalho aos meus pais Aldenir Alencar e Raimundo Alencar, a meus irmãos Ângela, Anselmo, Marcos Alan e Luciana e em especial ao meu querido sobrinho M. Álamo, que desde seu nascimento tem me proporcionado muitas alegrias.*

# Resumo

Neste trabalho estudaremos uma generalização do Algoritmo de De Casteljaeu, que é um procedimento recursivo para construção de curvas de Bezier em espaços Euclidianos, para grupos de Lie e Esferas  $S^2$ , com ênfase nas curvas de Bezier de grau 3.

# Abstract

In this paper we study a generalization of the De Casteljaun algorithm, which is a recursive procedure for constructing Bezier curves in Euclidean spaces, for Lie Groups and Spheres  $S^2$ , with emphasis on Bezier curves of degree 3.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>14</b>
1.1 Variedades Riemannianas . . . . .	14
1.2 Grupos de Lie . . . . .	16
1.3 Curvas de Bézier e o Algoritmo de De Casteljaeu . . . . .	22
<b>2 Curvas de Bézier de grau 3 em <math>SO(3)</math></b>	<b>30</b>
<b>3 Curvas de Bézier de grau 3 em <math>S^2</math></b>	<b>38</b>
<b>4 Aplicações</b>	<b>47</b>
4.1 Implementação de Curvas de Bézier de Grau 3 no $\mathbb{R}^2$ . . . . .	47
4.2 Implementação de Curvas de Bézier de grau 3 na Esfera $S^2$ . . . . .	50
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>56</b>

# Introdução

Utilizamos o Algoritmo de De Casteljaeu para gerar curvas polinomiais de interpolação no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Tais curvas são chamadas curvas de Bezier, e seus pontos são calculados através da recursão

$$\begin{aligned} x_i^r(t) &= (1-t)x_i^{r-1}(t) + tx_{i+1}^{r-1}(t) \\ &\left\{ \begin{array}{l} r = 1, \dots, n \\ i = 0, \dots, n-r \end{array} \right. \quad \text{e } x_i^0 = x_i \end{aligned}$$

onde  $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$  são chamados pontos de controle da curva e  $t \in [0, 1]$ .

Nos anos atuais tem aumentado o interesse em ferramentas matemáticas que combinam as idéias básicas destas curvas com outras teorias, afim de permitir a resolução de vários tipos de problemas. Como exemplo podemos citar o Planejamento de Trajetórias Suaves de Robôs Móveis, onde, utilizando métodos próprios, gera-se um conjunto de pontos intermediários de passagem, que leva o robô de uma posição inicial a uma posição final, levando em conta certos obstáculos, como mostra a figura 1<sup>1</sup>. A trajetória global resultante é gerada usando um interpolador baseado em curvas de Bezier.

Também podemos citar como exemplo de aplicação A Interpolação de Movimento em Animação, como mostra a figura 2<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>Extraída do artigo: *Planejamento de Trajetória para o Robô Omni Utilizando o Algoritmo Mapa de Rotas Probabilístico*, VII SBAI/ II IEEE LARS. São Luís, setembro de 2005.

<sup>2</sup>Extraída do artigo: *Lie Group Integrators for Animation and Control of Vehicles*, ACM Transactions on Graphics, Vol. 28, No. 2, April 2009.

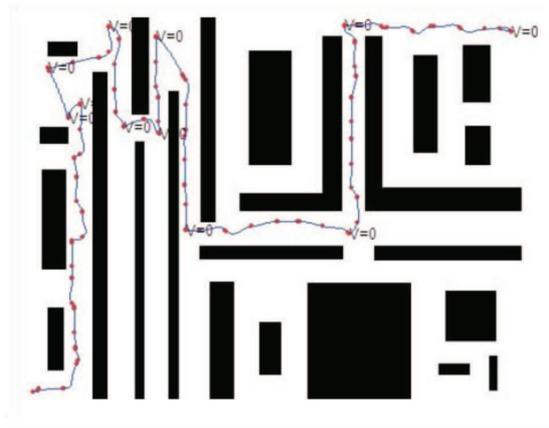


Figura 1: Planejamento em Trajetórias Suaves de Robôs Móveis

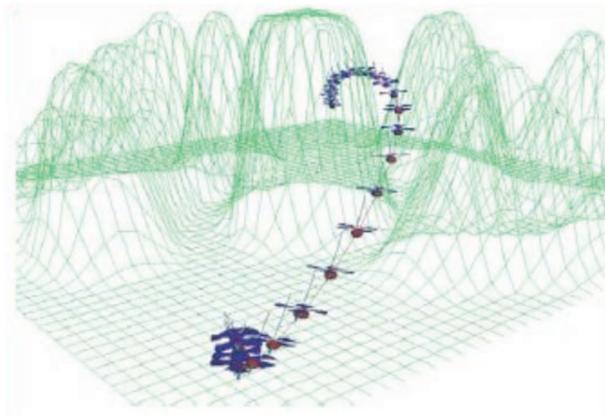


Figura 2: Interpolação de Movimentos em Animação

Faremos um breve estudo dessas curvas no  $\mathbb{R}^n$ , no primeiro capítulo, verificando suas principais propriedades, onde também observamos que podemos generalizar tal idéia para uma variedade Riemanniana, apenas utilizando uma generalização de interpolações lineares, que são as interpolações geodésicas, no processo de recursão, ou seja, sendo  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  um conjunto de pontos distintos em uma variedade Riemanniana  $M$ , que assumiremos ser completa, denote por  $\beta_1(t, x_i, x_{i+1})$  o arco de geodésica que liga

o ponto  $\mathbf{x}_i$  ( $t = 0$ ) ao ponto  $\mathbf{x}_{i+1}$  ( $t = 1$ ), então temos a recursão:

$$\begin{aligned}\beta_0(t, \mathbf{x}_i) &= \mathbf{x}_i \quad \forall i = 0, \dots, \mathbf{n} \\ \beta_k(t, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_{i+k}) &= \beta_1(t, \beta_{k-1}(t, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_{i+k-1}), \beta_{k-1}(t, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+k})) \\ k &= 1, \dots, \mathbf{n}; \quad i = 0, \dots, \mathbf{n} - k.\end{aligned}$$

Nos capítulos posteriores, trabalharemos estas idéias em duas Variedades Riemannianas particulares que são o grupo  $SO(3)$  e a esfera  $S^2$ . Para isso, consideramos inicialmente uma curva de Bézier de grau 3 em um grupo de Lie compacto qualquer que é dada por

$$t \longrightarrow p(t) = \exp(tL_6(t)) \exp(tL_4(t)) \exp(tL_1)\mathbf{x}_0$$

onde o ponto  $\mathbf{x}_0$  pertence ao grupo  $G$  e  $L_6(t)$ ,  $L_4(t)$  e  $L_1$  são geradores infinitesimais de certas curvas geodésicas em  $G$ . Posteriormente mostramos que esta curva satisfaz as condições

$$\begin{aligned}p(0) &= \mathbf{x}_0 & p(1) &= \mathbf{x}_3 \\ \frac{dp}{dt}(0) &= 3L_1\mathbf{x}_0 & \frac{dp}{dt}(1) &= 3L_3\mathbf{x}_3\end{aligned}$$

e baseado neste fato, de acordo com a formulação de curvas de Hermite, utilizamos os dados  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{x}_3$ ,  $\frac{dp}{dt}(0)$  e  $\frac{dp}{dt}(1)$  para chegarmos ao algoritmo de De Casteljaun para a construção de curvas de Bézier em  $SO(3)$ .

Com relação as curvas de Bézier de grau 3 em  $S^2$  utilizamos os arcos de geodésicas que ligam dois pontos, digamos  $\mathbf{x}_i$  ( $t = 0$ ) e  $\mathbf{x}_{i+1}$  ( $t = 1$ ) que é dada pela seguinte fórmula

$$\beta_1(t, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) = \frac{\text{sen}((1-t)\theta_i^1)}{\text{sen}(\theta_i^1)}\mathbf{x}_i + \frac{\text{sen}(t\theta_i^1)}{\text{sen}(\theta_i^1)}\mathbf{x}_{i+1}$$

onde  $\theta_i^1 = \cos^{-1}\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1} \rangle$  é o ângulo entre os vetores  $\mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{x}_{i+1}$ . E com isso considerando

$$\begin{aligned}\theta_i^1 &:= \cos^{-1}\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1} \rangle, \quad i = 0, 1, 2 \\ \theta_i^2(t) &:= \cos^{-1}\langle \beta_1(t, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}), \beta_1(t, \mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_{i+2}) \rangle, \quad i = 0, 1 \\ \theta_0^3(t) &:= \cos^{-1}\langle \beta_2(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \beta_2(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \rangle,\end{aligned}$$

e

$$f(t, \theta(t)) := \frac{\text{sen}(t\theta(t))}{\text{sen}\theta(t)} \quad g(t, \theta(t)) := \frac{\text{sen}((1-t)\theta(t))}{\text{sen}\theta(t)}.$$

temos a curva de Bézier de grau 3 que é dada por

$$\begin{aligned} p(t) &= g(t, \theta_0^3(t))g(t, \theta_0^2(t))g(t, \theta_0^1)x_0 + \{g(t, \theta_0^3(t))g(t, \theta_0^2(t))f(t, \theta_0^1) \\ &+ g(t, \theta_0^3(t))f(t, \theta_0^2(t))g(t, \theta_1^1) + f(t, \theta_0^3(t))g(t, \theta_1^2(t))g(t, \theta_1^1)\} x_1 \\ &+ \{g(t, \theta_0^3(t))f(t, \theta_0^2(t))f(t, \theta_1^1) + f(t, \theta_0^3(t))g(t, \theta_1^2(t))f(t, \theta_1^1) \\ &+ f(t, \theta_0^3(t))f(t, \theta_1^2(t))g(t, \theta_2^1)\} x_2 \\ &+ f(t, \theta_0^3(t))f(t, \theta_1^2(t))f(t, \theta_2^1)x_3 \end{aligned}$$

Também em  $S^2$  mostramos como construir uma curva de Bézier de grau 3 utilizando apenas os dados  $x_0, x_3, \frac{dp}{dt}(0)$  e  $\frac{dp}{dt}(1)$ .

Vale ressaltar que a importância de estudar tais idéias em grupos de Lie e, particularmente, no grupo  $SO(3)$  é que podemos utilizar essa generalização para implementarmos o Algoritmo de De Casteljaun em  $S^2$  de uma maneira mais simples, sem utilizar muitos cálculos, conforme vimos anteriormente. Implementar esse algoritmo desta forma é um objetivo futuro deste trabalho, fazendo necessário neste momento entender a teoria por trás destas idéias.

Por fim mostramos, no último capítulo, os resultados experimentais da implementação das idéias do algoritmo de De Casteljaun, no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^2$  e na esfera  $S^2$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Variedades Riemannianas

Por uma questão de completitude mostraremos algumas definições de Geometria que usaremos nos capítulos posteriores.

**Definição 1.1.** *Uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  é um conjunto  $M$  e uma família de aplicações biunívocas  $\chi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  de abertos  $U_\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$  em  $M$  tais que:*

1.  $\bigcup_\alpha \chi_\alpha(U_\alpha) = M$ ;
2. Para todo par  $\alpha, \beta$ , com  $\chi_\alpha(U_\alpha) \cap \chi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , os conjuntos  $\chi_\alpha^{-1}(W)$  e  $\chi_\beta^{-1}(W)$  são abertos em  $\mathbb{R}^n$  e as aplicações  $\chi_\beta^{-1} \circ \chi_\alpha$  são diferenciáveis;
3. A família  $\{(U_\alpha, \chi_\alpha)\}$  é máxima relativa as condições 1 e 2.

**Definição 1.2.** *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p$  de  $M$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  no espaço tangente  $T_p M$ , que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se  $\chi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  é um sistema de coordenadas locais em torno de  $p$ , com  $\chi(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in \chi(U)$  e  $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \dots, 1, \dots, 0)$ , então  $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$  é uma função diferenciável em  $U$ .*

A definição anterior não depende da escolha do sistema de coordenadas. Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma *Variedade Riemanniana*.

A existência de um produto interno que varia diferenciavelmente em relação à escolha do ponto  $\mathbf{p} \in M$  possibilita definir conceitos como ângulo entre vetores, comprimento de curvas, ângulo entre curvas e isometrias, entre outros.

**Definição 1.3.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades Riemannianas. Um difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  é chamado isometria se:*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{p}} = \langle df_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}), df_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) \rangle_{f(\mathbf{p})}$$

para todo  $\mathbf{p} \in M$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}M$ .

Seguem alguns exemplos de Variedades Riemannianas.

**Exemplo 1.**  $M = \mathbb{R}^n$  com  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  identificado com  $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ . A métrica é dada por  $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ .

**Exemplo 2.** As esferas  $S^n(r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}; \|\mathbf{x}\| = r\}$ , que podem ser munidas de uma métrica induzida de  $\mathbb{R}^{n+1}$  através da projeção estereográfica.

**Exemplo 3.** Os grupos de Lie. Na próxima seção mostraremos a definição de grupos de Lie, e também como definir uma métrica Riemanniana.

**Definição 1.4.** Uma aplicação diferenciável  $c : I \rightarrow M$  de um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  em uma variedade diferenciável  $M$  chama-se uma curva (parametrizada). Um campo vetorial  $V$  ao longo de uma curva  $c : I \rightarrow M$  é uma aplicação que a cada  $t \in I$  associa um vetor tangente  $V(t) \in T_{c(t)}M$ .

Dada uma variedade Riemanniana  $M$ , uma curva  $c$  em  $M$ , seja  $(U, \mathbf{x})$  um sistema de coordenadas em  $M$  em torno de  $c(t_0)$  e  $c(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  as coordenadas locais de  $c$ , então  $c$  é geodésica se e só se

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

**Exemplo 4.** *Seja  $M = \mathbb{R}^n$ . As geodésicas de  $M$  são retas parametrizadas proporcionalmente ao comprimento de arco.*

**Exemplo 5.** *Seja  $M = S^n$ . As geodésicas de  $M$  são os círculos máximos de  $S^n$  parametrizados pelo comprimento de arco.*

**Exemplo 6.** *Em um grupo de Lie compacto  $G$ , as geodésicas são os subgrupos a um parâmetro de  $G$  e suas translações.*

## 1.2 Grupos de Lie

Mostraremos nesta seção as idéias básicas de Grupos de Lie que utilizaremos nos próximos capítulos.

**Definição 1.5.** *Um grupo de Lie é um grupo  $G$  cujo conjunto subjacente possui uma estrutura de variedade diferenciável, de modo que a aplicação*

$$\begin{aligned} p: G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto gh \end{aligned}$$

*é diferenciável.*

Assumimos aqui que  $G$  é de classe  $C^\infty$  assim como a operação produto  $p$ . Dado  $g \in G$  definimos as translações a esquerda e a direita, respectivamente por

$$\begin{aligned} E_g: G &\longrightarrow G & D_g: G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto E_g(h) = gh & h &\longmapsto D_g(h) = hg \end{aligned}$$

Decorre da definição de grupos de Lie que tais aplicações são difeomorfismos.

Temos um vasto número de exemplos de grupos de Lie. Por exemplo tomando qualquer espaço vetorial de dimensão finita  $V$  sobre  $\mathbb{R}$ , com a operação  $+$  em  $V$  temos uma grande classe deles.

A grande força da teoria dos grupos de Lie está baseada na existência das álgebras de Lie associadas aos grupos. As álgebras de Lie possibilitam transportar métodos da álgebra linear ao estudo de objetos não lineares, como são os grupos de Lie.

**Definição 1.6.** Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial  $\mathfrak{g}$  munido de um produto (colchete)  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$  que satisfaz as propriedades

1. O colchete  $[\cdot, \cdot]$  é linear em cada uma das variáveis (bilinear);
2.  $[A, B] = -[B, A]$ , para  $A, B \in \mathfrak{g}$  (Anti-simetria);
3. Identidade de Jacobi: para  $A, B, C \in \mathfrak{g}$ ,

$$[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [C, A]]$$

É importante mencionar que um subespaço  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  é uma subálgebra de Lie se for fechado pelo colchete, e neste caso  $\mathfrak{h}$  é também uma álgebra de Lie.

Um exemplo de álgebra de Lie é dado pelo espaço vetorial dos campos de vetores sobre uma variedade diferenciável ( $C^\infty$ ) munido do colchete de Lie de campos de vetores.

Também teremos uma álgebra de Lie se considerarmos o conjunto  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n}, \mathbb{R})$  de todas as matrizes  $\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}$  reais munido do colchete  $[A, B] = AB - BA$ , onde  $AB$  indica o produto usual de matrizes.

Queremos definir a álgebra de Lie de um grupo de Lie, para isso faz-se necessário o estudo dos campos invariantes.

**Definição 1.7.** Seja  $G$  um grupo de Lie. Um campo de vetores  $X$  em  $G$  é dito

- invariante à direita se,  $d(D_g)_h(X(h)) = X(hg)$ ,  $\forall g, h \in G$ .
- invariante à esquerda se,  $d(E_g)_h(X(h)) = X(gh)$ ,  $\forall g, h \in G$ .

Da condição de invariância a direita, temos  $X(g) = X(1 \cdot g) = d(D_g)_1(X(1))$ . Assim temos que um campo invariante a direita (ou a esquerda) é completamente determinado por seu valor no elemento neutro 1. Com isso podemos associar a cada elemento do espaço tangente  $T_1 G$  um único campo invariante a direita e um único campo invariante a esquerda.

Desta forma, dado  $A \in T_1G$ , denotaremos por  $A^d$  e  $A^e$  os campos invariantes a direita e a esquerda, respectivamente, associados ao campo  $A$ , ou seja

$$A^d(g) = d(D_g)_1(A) \quad e \quad A^e(g) = d(E_g)_1(A)$$

Agora denote por  $Inv^d$  e  $Inv^e$  o conjunto dos campos invariantes à direita e à esquerda, respectivamente. Tais conjuntos são subespaços vetoriais (sobre  $\mathbb{R}$ ), do espaço de todos os campos de vetores em  $G$ , e também temos que as aplicações

$$\begin{array}{ccc} T_1G & \longrightarrow & Inv^d & T_1G & \longrightarrow & Inv^e \\ A & \longmapsto & A^d & A & \longmapsto & A^e \end{array}$$

são isomorfismos entre os espaços vetoriais correspondentes.

Os espaços de campos invariantes  $Inv^d$  ou  $Inv^e$  munidos com o colchete de Lie, são subálgebras de Lie da álgebra de Lie de todos os campos de vetores em  $G$ , pois dados  $X$  e  $Y$  campos invariantes à direita (ou à esquerda) num grupo de Lie  $G$ , temos que o colchete de Lie  $[X, Y]$  é invariante à direita (à esquerda). Este fato é consequência da fórmula geral: Sejam  $M$  uma variedade,  $X, Y$  campos de vetores em  $M$  e  $\phi$  um difeomorfismo de  $M$ . Então<sup>1</sup>  $\phi_*[X, Y] = [\phi_*X, \phi_*Y]$ . Logo basta aplicar esta fórmula a  $\phi = D_g$  (ou  $E_g$ ) e  $X, Y$ , campos invariantes.

Assim ambos os espaços vetoriais  $Inv^d$  ou  $Inv^e$  admitem estruturas de álgebra de Lie. Logo definimos a álgebra de Lie de um grupo de Lie  $G$  como sendo qualquer uma das álgebras de Lie  $Inv^d$  ou  $Inv^e$ .

Essas álgebras de Lie são isomorfas, não havendo ambiguidade na definição acima. Como o espaço tangente  $T_1G$  é isomorfo tanto a  $Inv^d$  quanto a  $Inv^e$ , o colchete de Lie de campos de vetores restrito ao subespaço dos campos invariantes induz, através destes isomorfismos, os colchetes  $[\cdot, \cdot]_d$  e  $[\cdot, \cdot]_e$  em  $T_1G$ , que são dados por  $[A, B]_d = [A^d, B^d](1)$  e  $[A, B]_e = [A^e, B^e](1)$ ,  $A, B \in T_1G$ , e assim com estes colchetes temos uma estrutura de álgebra de Lie em  $T_1G$ . Desta forma temos a definição:

---

<sup>1</sup>O símbolo  $*$  representa um elemento qualquer de  $G$ .

**Definição 1.8.** A álgebra de Lie do grupo de Lie  $G$ , denotada por  $\mathfrak{g}$ , é qualquer uma das álgebras de Lie isomorfas  $\text{Inv}^d$ ,  $\text{Inv}^e$ ,  $(T_1G, [\cdot, \cdot]_d)$  ou  $(T_1G, [\cdot, \cdot]_e)$ .

Dizemos que uma métrica Riemanniana em  $G$  é invariante à esquerda se  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{y}} = \langle d(E_x)_{\mathbf{y}}\mathbf{u}, d(E_x)_{\mathbf{y}}\mathbf{v} \rangle_{E_x(\mathbf{y})}$  para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{y}}G$ , isto é, se  $E_x$  é uma isometria. De maneira análoga definimos uma métrica Riemanniana invariante à direita. Uma métrica Riemanniana invariante a esquerda e a direita é chamada bi-invariante.

Para introduzir em  $G$  uma métrica invariante à esquerda, tome um produto interno qualquer  $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$  em  $\mathfrak{g}$  e defina

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{x}} = \langle (dE_{\mathbf{x}^{-1}})_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}), (dE_{\mathbf{x}^{-1}})_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) \rangle_e$$

Como  $E_x$  depende diferenciavelmente de  $\mathbf{x}$  isso fornece realmente uma métrica Riemanniana, evidentemente invariante a esquerda.

De maneira análoga podemos construir em  $G$  métricas invariantes à direita. Também se  $G$  for compacto,  $G$  possui uma métrica bi-invariante.

Outro conceito muito importante é o da aplicação exponencial  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ , que é o objeto central usado para transportar ao grupo de Lie  $G$  as propriedades de sua álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ .

Por definição, sabemos que os elementos de  $\mathfrak{g}$  são equações diferenciais ordinárias em  $G$  (Campos invariantes), que possuem fluxos, os quais são formados por difeomorfismos locais de  $G$ . Os elementos formadores desses fluxos se identificam naturalmente a elementos de  $G$ , permitindo construir a partir de  $X \in \mathfrak{g}$ , um subspaço de  $G$  parametrizado por  $t \in \mathbb{R}$  (subgrupo a 1-parâmetro). A aplicação exponencial é construída a partir desses grupos, como veremos a seguir.

Seja  $X$  um campo invariante (à esquerda ou à direita de  $G$ ). Denote por  $X_t$  o seu fluxo. Em princípio  $X_t$  é um fluxo local, isto é, para  $t$  fixado, o domínio  $\text{dom}X_t$  de  $X_t$  é o subconjunto aberto de  $G$  das condições iniciais cujas soluções se prolongam até  $t$ .

A invariância de  $X$  acarreta na seguinte simetria do fluxo  $X_t$ . Dado  $X \in \text{Inv}^d$  temos

$$X_t(hg) = X_t(h)g$$

Em particular tomando  $\mathfrak{h} = 1$  temos  $X_t(\mathfrak{g}) = X_t(1)\mathfrak{g}$ . Isto é, a solução que passa por  $\mathfrak{g}$  é obtida por translação à direita da solução que passa pelo elemento neutro.

De maneira análoga dado  $Y \in \text{Inv}^e$  temos

$$\mathfrak{g}Y_t(\mathfrak{h}) = Y_t(\mathfrak{g}\mathfrak{h})$$

e assim  $Y_t(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}Y_t(1)$ .

Um campo invariante (à esquerda ou à direita) é completo, ou seja, suas trajetórias se prolongam sobre todo o  $\mathbb{R}$ . Também se  $A \in T_1G$ , então as trajetórias  $(A^d)_t(1)$  e  $(A^e)_t(1)$ , que passam pelo elemento neutro coincidem para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Além do mais, a aplicação  $t \in \mathbb{R} \mapsto (A^d)_t(1) \in G$  é um homomorfismo do grupo aditivo  $\mathbb{R}$  a valores em  $G$ . Assim com essas descrições das trajetórias dos campos invariantes podemos definir a aplicação exponencial.

**Definição 1.9.** *Seja  $X \in T_1G$ . Então,  $\exp X = (X^d)_{t=1}(1) = (X^e)_{t=1}(1)$ .*

Assim se  $X$  é um campo invariante  $\exp X$  é o valor em  $t = 1$  da solução de  $X$  que passa pelo elemento neutro quando  $t = 0$ .

Segue abaixo algumas propriedades da aplicação exponencial:

1.  $\exp(0) = 1$ ;
2. Para todo  $X \in \mathfrak{g}$  e  $t, s \in \mathbb{R}$ ,

$$\exp[(t + s)X] = \exp(tX) \exp(sX) = \exp(sX) \exp(tX).$$

Com isso temos que  $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$ ;

3. Dados  $X, Y \in \mathfrak{g}$ ,  $[X, Y] = 0$  se, e somente se,  $\exp(tX) \exp(sY) = \exp(sY) \exp(tX)$ .

Assim como vimos anteriormente a aplicação  $t \mapsto \exp(tX)$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ , é um homomorfismo. Portanto

$$\{\exp(tX); t \in \mathbb{R}\}$$

é um subgrupo de  $G$ , denominado de subgrupo a 1-parâmetro gerado por  $X$ . Da segunda propriedade acima temos que os elementos do subgrupo  $\{\exp(tX); t \in \mathbb{R}\}$  comutam entre si.

Se  $G$  é um grupo de Lie compacto, então as geodésicas de  $G$  (com relação a uma métrica bi-invariante) são os subgrupos a 1-parâmetro e suas translações, isto é, se  $X \in \mathfrak{g}$  e  $t \in \mathbb{R}$  então  $\exp tX$  é uma geodésica de  $G$  assim como  $h(\exp tX)$  e  $(\exp tX)h$ , onde  $h \in G$ .

Sejam  $G$  e  $H$  dois grupos de Lie. Um homomorfismo  $\phi : G \rightarrow H$  diferenciável entre  $G$  e  $H$  é chamado de homomorfismo entre grupos de Lie. A mesma terminologia se aplica a isomorfismos e automorfismos de grupos de Lie.

Levando em conta o princípio de que os grupos de Lie devem ser estudados através das álgebras de Lie, os homomorfismos entre grupos de Lie devem ser descritos através dos homomorfismos entre suas álgebras de Lie.

Um homomorfismo entre as álgebras de Lie  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$  é uma aplicação linear  $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  que satisfaz  $\theta[X, Y] = [\theta X, \theta Y]$  para todo  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . A relação entre os homomorfismos de grupos e álgebra de Lie é fornecida pela diferencial no elemento neutro como segue: Sejam  $G$  e  $H$  grupos de Lie com álgebras de Lie  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$ , respectivamente. Seja  $\phi : G \rightarrow H$  um homomorfismo diferenciável e tome  $X \in \mathfrak{g}$ . Então para todo  $g \in G$ , vale

$$d\phi_g(X^d(g)) = Y^d(\phi(g))$$

onde  $Y = d\phi_1(X)$ .

Um caso particular de homomorfismo entre grupos de Lie é dado quando o contradomínio é o grupo linear  $Gl(\mathfrak{n}, \mathbb{R})$ , ou seja, o grupo das transformações lineares inversíveis de  $\mathbb{R}^n$ , ou simplesmente, o grupo das matrizes  $\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}$  inversíveis. Nesse caso, o homomorfismo é chamado de *representação do grupo*. De maneira geral, uma representação de um grupo  $G$  num espaço vetorial  $V$  é uma ação  $\rho$  de  $G$  em  $V$  tal que todas as transformações  $\rho(g)$  são aplicações lineares de  $V$ . Temos que cada  $\rho(g)$  é inversível e que  $\rho : G \rightarrow Gl(V)$  é um homomorfismo, onde  $Gl(V)$  denota o grupo das trans-

formações lineares inversíveis de  $V$ . O espaço  $V$  é chamado de *espaço de representação* e  $\dim V$  sua dimensão.

Seja  $\rho$  uma representação de dimensão finita (diferenciável) de  $G$  em  $V$ . A álgebra de Lie do grupo  $Gl(V)$  é denotada por  $\mathfrak{gl}(V)$ , ela coincide com o espaço das transformações lineares  $V \rightarrow V$  com o colchete dado pelo comutador. A diferencial de  $\rho$  na identidade  $d\rho_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  é um homomorfismo de álgebras de Lie e como tal uma representação em  $V$  da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Essa representação é denominada *representação infinitesimal* associada a  $\rho$ . A fórmula abaixo relaciona as duas representações:

$$\rho(\exp X) = \exp(d\rho_1(X)). \quad (1.1)$$

Existe uma representação natural de um grupo de Lie  $G$  em sua álgebra de Lie. Essa representação é construída da seguinte forma: Um elemento  $g \in G$  define o automorfismo interno  $C_g(x) = gxg^{-1}$ . É claro que  $C_g(1) = 1$ , portanto  $d(C_g)_1$  é uma aplicação linear  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ . Dados  $g, h \in G$ ,

$$C_g \circ C_h(x) = g(hxh^{-1})g^{-1} = C_{gh}(x)$$

o que implica que  $d(C_g)_1 \circ d(C_h)_1 = d(C_{gh})_1$ . Daí que a aplicação  $g \rightarrow d(C_g)_1$  é uma representação de  $G$  em  $\mathfrak{g}$ , isto é um homomorfismo de  $G$  em  $Gl(\mathfrak{g})$ .

### 1.3 Curvas de Bézier e o Algoritmo de De Casteljau

O algoritmo de De Casteljau é um procedimento recursivo para gerar curvas polinomiais de interpolação de grau  $n$  no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Tais curvas são conhecidas como curvas de Bézier.

Iniciaremos o estudo do algoritmo de De Casteljau com o seguinte problema: *Dado um conjunto de pontos  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$  construir uma curva que tenha início no ponto  $x_0$ , fim no ponto  $x_n$  e tenha sua forma controlada pelos demais pontos, no sentido de que se alterarmos a posição destes, a curva terá um novo esboço.* Uma curva com

estas características pode ser construída usando seguidas interpolações lineares. Para exemplificar considere o caso de uma parábola no plano, ou seja, uma curva que inicia em um ponto  $x_0$ , termina em um ponto  $x_2$  e tem a sua forma controlada por um ponto  $x_1$ . Logo temos

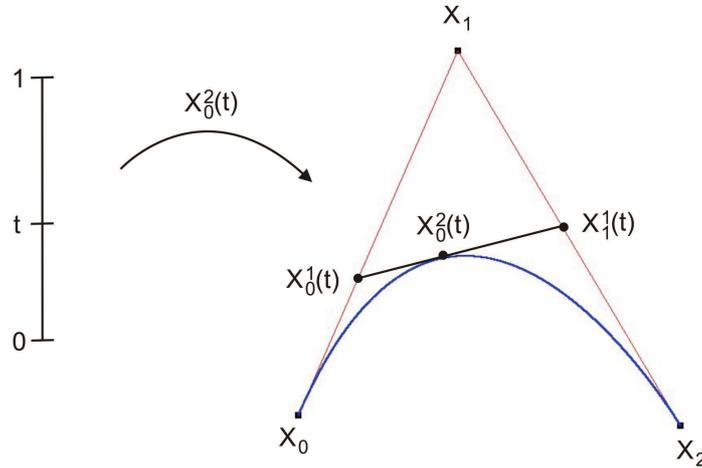


Figura 1.1: Curva de Bézier construída com Interpolações Lineares

$$x_0^1(t) = (1-t)x_0 + tx_1 \quad \text{e} \quad x_1^1(t) = (1-t)x_1 + tx_2$$

$$x_0^2(t) = (1-t)x_0^1(t) + tx_1^1(t) \Rightarrow$$

$$x^2(t) = x_0^2(t) = (1-t)^2x_0 + 2t(1-t)x_1 + t^2x_2$$

Embora simples o caso acima é muito útil para entendermos como funciona o algoritmo de De Casteljaeu que possui uma generalização bem natural para uma curva de grau  $n$  qualquer no  $\mathbb{R}^n$ .

Dados  $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$  e  $t \in [0, 1]$  temos

$$x_i^r(t) = (1-t)x_i^{r-1}(t) + tx_{i+1}^{r-1}(t)$$

$$\begin{cases} r = 1, \dots, n \\ i = 0, \dots, n-r \end{cases} \quad \text{e} \quad x_i^0 = x_i$$

Como percebemos no exemplo anterior, os pontos da forma  $x^n(t) = x_0^n(t)$  são os pontos pertencentes a curva de Bézier.

Faremos agora algumas considerações sobre curvas de Bézier.

1. O polígono formado pelos pontos  $x_0, \dots, x_n$  é chamado Polígono de Bézier ou Polígono de Controle da curva de Bézier. Similarmente os vértices do polígono são chamados de Pontos de Bézier ou Pontos de Controle.
2. Curvas de Bézier são invariantes por aplicações afins. Ou seja, calcular os pontos  $x^n(t)$  e depois aplicar esses pontos em uma transformação afim terá o mesmo efeito que aplicar a transformação afim no polígono de controle e depois calcular os pontos  $x^n(t)$ . Isto é consequência do fato de ser o algoritmo de De Casteljau composto por interpolações lineares que são invariantes por aplicações afins.
3. Curvas de Bézier são invariantes por mudanças de parametrização. Isto quer dizer que a curva não precisa necessariamente ser definida sobre o intervalo  $[0, 1]$ , bastando aplicar a mudança de parametrização  $t = \frac{u - a}{b - a}$  onde temos  $a \leq u \leq b$  para definirmos a curva sobre um intervalo arbitrário  $[a, b]$ .
4. Para  $t \in [0, 1]$ ,  $x^n(t)$  pertence ao fecho convexo do polígono de controle. Isto ocorre porque todo ponto intermediário  $b_i^r$  é obtido através de uma combinação baricêntrica convexa de pontos anteriores  $b_j^{r-1}$ . Assim nenhum passo do algoritmo De Casteljau produz pontos fora do fecho convexo de  $x_i$ .
5. A curva de Bézier satisfaz as seguintes condições  $x^n(0) = x_0$ ,  $x^n(1) = x_n$ ,  $\left. \frac{d}{dt}x^n(t) \right|_{t=0} = n(x_1 - x_0)$  e  $\left. \frac{d}{dt}x^n(t) \right|_{t=1} = n(x_n - x_{n-1})$ . Na formulação de curvas de Hermite utilizamos os dados  $x_0, x_n, \left. \frac{d}{dt}x^n(t) \right|_{t=0}$  e  $\left. \frac{d}{dt}x^n(t) \right|_{t=1}$  para obtermos o conjunto de pontos  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ . Veremos mais sobre este tipo de curva nos próximos capítulos.

Muitas vezes é necessário exibir uma representação explícita de uma curva de Bézier, ou seja, expressar uma curva de Bézier através de uma fórmula não recursiva sem a necessidade de um algoritmo.

Podemos encontrar tal representação usando os polinômios de Bernstein, que são dados por

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

onde

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} & \text{se } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Os polinômios de Bernstein satisfazem a seguinte recursão

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$$

com

$$B_0^0(t) = 1 \text{ e } B_j^n(t) = 0 \text{ para } j \notin \{0, \dots, n\}$$

Para verificar tal fato basta observar que pela relação de Stifel temos

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$$

e assim

$$\begin{aligned} B_i^n(t) &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) \end{aligned}$$

Outra propriedade importante dos polinômios de Bernstein é que

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$$

De fato basta observar que

$$\begin{aligned}
 1 &= (t + (1 - t))^n \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i} \\
 &= \sum_{i=0}^n B_i^n(t)
 \end{aligned}$$

Estabelecendo a relação entre curvas de Bézier e os polinômios de Bernstein, temos primeiramente que os pontos intermediários do algoritmo de De Casteljau  $x_i^r$  podem ser expressados em termos dos polinômios de Bernstein de grau  $r$ , da forma

$$x_i^r(t) = \sum_{j=0}^r x_{i+j} B_j^r(t)$$

onde

$$r \in \{0, \dots, n\} \quad \text{e} \quad i \in \{0, \dots, n - r\}$$

Tal fato pode ser mostrado por indução em  $r$  da seguinte forma: Para  $r = 1$  temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^1 x_{i+j} B_j^1(t) &= x_i B_0^1(t) + x_{i+1} B_1^1(t) \\
 &= x_i (1 - t) + x_{i+1} t \\
 &= x_i^0 (1 - t) + x_{i+1}^0 t \\
 &= x_i^1(t)
 \end{aligned}$$

Agora suponha que o resultado é válido para  $r - 1$ , ou seja

$$x_i^{r-1}(t) = \sum_{j=0}^{r-1} x_{i+j} B_j^{r-1}(t)$$

Assim temos

$$x_i^r(t) = (1 - t)x_i^{r-1}(t) + tx_{i+1}^{r-1}(t)$$

logo usando a hipótese de indução segue que

$$\begin{aligned}
x_i^r(t) &= (1-t) \sum_{j=0}^{r-1} x_{i+j} B_j^{r-1}(t) + t \sum_{j=0}^{r-1} x_{i+1+j} B_j^{r-1}(t) \\
&= (1-t) \sum_{j=i}^{i+r-1} x_j B_{j-i}^{r-1}(t) + t \sum_{j=i+1}^{i+r} x_j B_{j-i-1}^{r-1}(t) \\
&= (1-t) \left\{ \sum_{j=i}^{i+r-1} x_j B_{j-i}^{r-1}(t) + x_{i+r} \underbrace{B_r^{r-1}(t)}_0 \right\} \\
&\quad + t \left\{ \sum_{j=i+1}^{i+r} x_j B_{j-i-1}^{r-1}(t) + x_i \underbrace{B_{-1}^{r-1}(t)}_0 \right\} \\
&= (1-t) \sum_{j=i}^{i+r} x_j B_{j-i}^{r-1}(t) + t \sum_{j=i}^{i+r} x_j B_{j-i-1}^{r-1}(t) \\
&= \sum_{j=i}^{i+r} x_j \left\{ (1-t) B_{j-i}^{r-1}(t) + t B_{j-i-1}^{r-1}(t) \right\} \\
&= \sum_{j=i}^{i+r} x_j B_{j-i}^r(t) \\
&= \sum_{j=0}^r x_{j+i} B_j^r(t)
\end{aligned}$$

Terminando assim nossa verificação. A importância deste fato é que quando  $r = n$  e  $i = 0$  temos os pontos da curva de Bézier escritos em função dos polinômios de Bernstein, ou seja,

$$x^n(t) = x_0^n(t) = \sum_{j=0}^n x_j B_j^n(t)$$

Chegando assim a nossa representação explícita de uma curva de Bézier.

Uma propriedade muito interessante das curvas de Bézier, que podemos verificar facilmente com esta representação é que elas são simétricas com relação a  $t$  e  $1-t$ , ou seja

$$\sum_{j=0}^n x_j B_j^n(t) = \sum_{j=0}^n x_{n-j} B_j^n(1-t)$$

Este fato segue da igualdade

$$B_j^n(t) = B_j^n(1-t)$$

Assim podemos tomar os pontos de Bézier da forma  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ou  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_0$ .

Na figura abaixo temos mais exemplos de curvas de Bézier.

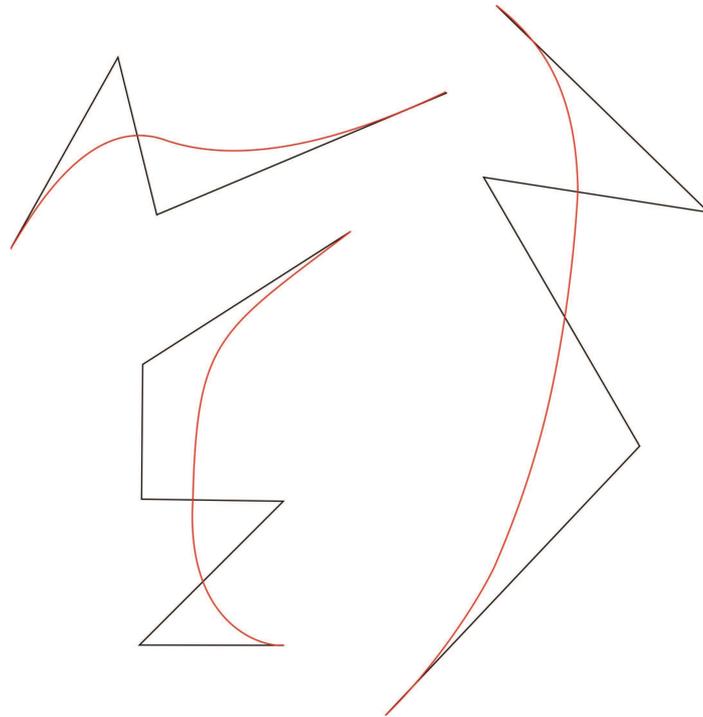


Figura 1.2: Curvas de Bézier

A idéia do algoritmo de De Casteljaun pode ser generalizada para uma variedade Riemanniana  $M$  da seguinte forma. Seja  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  um conjunto de pontos distintos em uma variedade Riemanniana  $M$ , que assumiremos ser completa. Uma curva suave em  $M$ , denotada por  $t \rightarrow \beta_n(t, x_0, \dots, x_n)$ , que liga o ponto  $x_0$ , quando  $t = 0$ , ao ponto  $x_n$ , quando  $t = 1$ , pode ser construída utilizando interpolação geodésica da seguinte forma. Denote por  $\beta_1(t, x_i, x_{i+1})$  o arco de geodésica que liga o ponto  $x_i$  ( $t = 0$ ) ao ponto  $x_{i+1}$  ( $t = 1$ ), então temos a recursão:

$$\begin{aligned} \beta_0(t, x_i) &= x_i \quad \forall i = 0, \dots, n \\ \beta_k(t, x_i, \dots, x_{i+k}) &= \beta_1(t, \beta_{k-1}(t, x_i, \dots, x_{i+k-1}), \beta_{k-1}(t, x_{i+1}, \dots, x_{i+k})) \quad (1.2) \\ k &= 1, \dots, n; \quad i = 0, \dots, n - k. \end{aligned}$$

Observe que no caso em que a variedade é o espaço Euclidiano as geodésicas são as

retas, e assim esta recursão é equivalente ao caso que já trabalhamos, necessitando apenas adaptar a notação ao caso anterior.

Nos proximos capítulos estenderemos nossos estudos do algoritmo de De Casteljaun a casos particulares de variedades, que são os grupos de Lie e a esfera  $S^n$ .

## Capítulo 2

# Curvas de Bézier de grau 3 em $SO(3)$

Vimos no capítulo anterior que uma curva de Bézier de grau  $n$  no  $\mathbb{R}^n$  pode ser obtida através de uma família de segmentos de linhas retas usando o algoritmo de De Casteljaou.

Em um grupo de Lie, podemos aplicar a mesma idéia, porém, ao invés de segmentos de linhas retas, devemos utilizar segmentos de geodésicas. Consideraremos apenas grupos de Lie compactos, com relação a uma métrica bi-invariante, pois assim dados dois pontos arbitrários garantimos a existência de uma geodésica ligando eles. Nosso objetivo neste capítulo é mostrar como obter tais curvas polinomiais de grau 3 em  $SO(3)$ .

Antes de chegarmos ao objetivo principal, consideraremos uma curva de Bézier de grau 3 em um grupo de Lie qualquer.

Inicialmente considere os pontos distintos  $x_i, i = 0, 1, 2, 3$  pertencentes ao grupo  $G$  e  $L_{i+1}, i = 0, 1, 2$  os geradores infinitesimais<sup>1</sup> das curvas geodésicas em  $G$  que ligam os pontos  $x_i$ , quando  $t = 0$ , e  $x_{i+1}$ , quando  $t = 1$ .

O primeiro passo para chegarmos a nossa curva é construir os arcos de geodésicas

---

<sup>1</sup>A álgebra de Lie é um objeto linear que aproxima o grupo de Lie, assim também chamamos esta estrutura de *Grupo infinitesimal*.

que ligam  $x_i$  a  $x_{i+1}$  que são dados por

$$t \longrightarrow \exp(L_{i+1})x_i$$

e assim

$$\begin{aligned} x_1 &= \exp(L_1)x_0 \\ x_2 &= \exp(L_2)x_1 \\ x_3 &= \exp(L_3)x_2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Desta forma observe que

$$x_3 = \exp(L_3) \exp(L_2) \exp(L_1)x_0 \tag{2.2}$$

O segundo passo é definirmos  $L_4(t)$  e  $L_5(t)$ .  $L_4(t)$  é o gerador infinitesimal da curva geodésica em  $G$ , que liga um ponto qualquer, determinado por  $t$ , da curva  $t \longrightarrow \exp(tL_1)x_0$  a um ponto qualquer, determinado pelo mesmo  $t$ , da curva  $t \longrightarrow \exp(tL_2)x_1$  e  $L_5(t)$  é o gerador infinitesimal da curva geodésica em  $G$ , que liga um ponto qualquer, determinado por  $t$ , da curva  $t \longrightarrow \exp(tL_2)x_1$  a um ponto qualquer, determinado pelo mesmo  $t$ , da curva  $t \longrightarrow \exp(tL_3)x_2$ . Desta forma segue que

$$\begin{aligned} \exp(L_4(t)) &= \exp(tL_2) \exp((1-t)L_1) \\ \exp(L_5(t)) &= \exp(tL_3) \exp((1-t)L_2) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Assim temos as curvas polinomiais quadráticas

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow \exp(tL_4(t)) \exp(tL_1)x_0 \\ t &\longrightarrow \exp(tL_5(t)) \exp(tL_2)x_1 \end{aligned} \tag{2.4}$$

O último passo é definir  $L_6(t)$  que é o gerador infinitesimal da curva geodésica em  $G$ , que liga um ponto qualquer, determinado por  $t$ , da curva  $t \longrightarrow \exp(tL_4(t))x_0$  a um ponto qualquer, determinado pelo mesmo  $t$ , da curva  $t \longrightarrow \exp(tL_5(t))x_1$ . Temos

$$\exp(L_6(t)) = \exp(tL_5(t)) \exp((1-t)L_4(t)) \tag{2.5}$$

E assim a nossa curva de Bézier de grau 3 será

$$t \longrightarrow p(t) = \exp(tL_6(t)) \exp(tL_4(t)) \exp(tL_1)x_0 \tag{2.6}$$

Os campos  $L_4(t)$ ,  $L_5(t)$  e  $L_6(t)$  satisfazem as condições

$$\begin{aligned} L_4(0) &= L_1 & L_4(1) &= L_2 \\ L_5(0) &= L_2 & L_5(1) &= L_3 \\ L_6(0) &= L_1 & L_6(1) &= L_3 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Nossa próxima tarefa é mostrar que a curva definida em (2.6) tem propriedades análogas as curvas de Bézier no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ .

**Lema 1.** *Seja  $A(t)$  uma curva de classe  $C^1$  na álgebra de Lie de  $G$ . Então, se*

$$\left. \frac{d}{dt} \exp(A(t)) \right|_{t=t_1} = \Omega \exp(A(t_1)),$$

para algum campo constante  $\Omega$ , então vale

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \exp(tA(t)) \right|_{t=0} &= A(0), \\ \left. \frac{d}{dt} \exp(tA(t)) \right|_{t=1} &= (\Omega + A(1)) \exp(A(1)). \end{aligned}$$

**Prova:**

Note que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \exp(tA(t)) \right|_{t=t_1} &= \left. \exp(tA(t))(A(t) + t\dot{A}(t)) \right|_{t=t_1} \\ &= \exp(t_1A(t_1))A(t_1) + \exp(t_1A(t_1))(t_1\dot{A}(t_1)) \\ &= \exp(t_1A(t_1))A(t_1) + \left. \frac{d}{dt} \exp(t_1A(t)) \right|_{t=t_1} \end{aligned}$$

fazendo  $t_1 = 0$  temos

$$\left. \frac{d}{dt} \exp(tA(t)) \right|_{t=0} = A(0)$$

fazendo  $t_1 = 1$

$$\left. \frac{d}{dt} \exp(tA(t)) \right|_{t=1} = A(1) \exp(A(1)) + \Omega \exp(A(1))$$

■

**Teorema 1.** *O polinômio cúbico  $t \rightarrow p(t)$  em  $G$ , dado por (2.6) satisfaz as seguintes condições*

$$\begin{aligned} p(0) &= x_0 & p(1) &= x_3 \\ & & & \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\frac{dp}{dt}(0) = 3L_1x_0 \quad \frac{dp}{dt}(1) = 3L_3x_3$$

**Prova:**

Temos

$$\begin{aligned} p(0) &= \exp(0 \cdot L_6(0)) \exp(0 \cdot L_4(0)) \exp(0 \cdot L_1)x_0 \\ &= x_0 \end{aligned}$$

Também usando (2.7) segue que

$$\begin{aligned} p(1) &= \exp(1 \cdot L_6(1)) \exp(1 \cdot L_4(1)) \exp(1 \cdot L_1)x_0 \\ &= \exp(L_3) \exp(L_2) \exp(L_1)x_0 \\ &= x_3 \end{aligned}$$

Como  $\exp(L_4(t)) = \exp(tL_2) \exp((1-t)L_1) = \exp(tL_2) \exp(-tL_1) \exp(L_1)$ , usando a fórmula de Campbell-Hausdorff<sup>2</sup>, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \exp(L_4(t)) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \{ \exp(tL_2) \exp(-tL_1) \exp(L_1) \} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \{ \exp(t(L_2 - L_1) + O(t^2)) \} \exp(L_1) \Big|_{t=0} \\ &= \left\{ \exp(t(L_2 - L_1) + O(t^2)) \cdot \frac{d}{dt} (t(L_2 - L_1) + O(t^2)) \right\} \exp(L_1) \Big|_{t=0} \\ &= (L_2 - L_1) \exp(L_1) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \exp(L_4(t)) \Big|_{t=1} &= \frac{d}{dt} \{ \exp(L_2) \exp((t-1)L_2) \exp((1-t)L_1) \} \Big|_{t=1} \\ &= -\frac{d}{ds} \{ \exp(L_2) \exp(-sL_2) \exp(sL_1) \} \Big|_{s=0} \\ &= -\exp(L_2) \frac{d}{ds} \{ \exp(s(L_1 - L_2) + O(s^2)) \} \Big|_{s=0} \\ &= -\exp(L_2)(L_1 - L_2) \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup> $\exp(A) \exp(B) = \exp \left( A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}([A, [A, B]] - [B, [B, A]]) + \dots \right).$

$$\begin{aligned}
&= \exp(L_2)(L_2 - L_1) \\
&= \exp(L_2)(L_2 - \exp(0)L_1) \\
&= \exp(L_2)(L_2 - \exp(L_2 - L_2)L_1) \\
&= \exp(L_2)(L_2 - \exp(L_2) \exp(-L_2)L_1) \\
&= \Omega_4 \exp(L_2)
\end{aligned}$$

De maneira análoga, desde que

$$\exp(L_5(t)) = \exp(tL_3) \exp((1-t)L_2) = \exp(tL_3) \exp(-tL_2) \exp(L_2)$$

temos

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt} \exp(L_5(t)) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \{ \exp(tL_3) \exp(-tL_2) \exp(L_2) \} \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} \{ \exp(t(L_3 - L_2) + O(t^2)) \} \exp(L_2) \right|_{t=0} \\
&= \left\{ \exp(t(L_3 - L_2) + O(t^2)) \cdot \frac{d}{dt} (t(L_3 - L_2) + O(t^2)) \right\} \exp(L_2) \Big|_{t=0} \\
&= (L_3 - L_2) \exp(L_2)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt} \exp(L_5(t)) \right|_{t=1} &= \left. \frac{d}{dt} \{ \exp(L_3) \exp((t-1)L_3) \exp((1-t)L_2) \} \right|_{t=1} \\
&= \left. -\frac{d}{ds} \{ \exp(L_3) \exp(-sL_3) \exp(sL_2) \} \right|_{s=0} \\
&= -\exp(L_3) \left. \frac{d}{ds} \{ \exp(s(L_2 - L_3) + O(s^2)) \} \right|_{s=0} \\
&= -\exp(L_3)(L_2 - L_3) \\
&= \exp(L_3)(L_3 - \exp(L_3)L_2 \exp(-L_3)) \\
&= \Omega_5 \exp(L_3)
\end{aligned}$$

Também

$$\exp(L_6(t)) = \exp(tL_5(t)) \exp((1-t)L_4(t)) = \exp(tL_5(t)) \exp(L_4(t)) \exp(-tL_4(t)),$$

e usando (2.7), e o Lema 1, temos

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt} \exp(\mathbf{L}_6(t)) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \{ \exp(t\mathbf{L}_5(t)) \exp(\mathbf{L}_4(t)) \exp(-t\mathbf{L}_4(t)) \} \right|_{t=0} \\
&= \left\{ \frac{d}{dt} \{ \exp(t\mathbf{L}_5(t)) \} \exp(\mathbf{L}_4(t)) \exp(-t\mathbf{L}_4(t)) + \exp(t\mathbf{L}_5(t)) \cdot \right. \\
&\quad \left. \left[ \frac{d}{dt} (\exp(\mathbf{L}_4(t))) \exp(-t\mathbf{L}_4(t)) + \exp(\mathbf{L}_4(t)) \frac{d}{dt} (\exp(-t\mathbf{L}_4(t))) \right] \right\} \Big|_{t=0} \\
&= \mathbf{L}_5(0) \exp(\mathbf{L}_4(0)) + (\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1) \exp(\mathbf{L}_1) - \mathbf{L}_4(0) \exp(\mathbf{L}_4(0)) \\
&= \mathbf{L}_2 \exp(\mathbf{L}_1) + (\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1) \exp(\mathbf{L}_1) - \mathbf{L}_1 \exp(\mathbf{L}_1) \\
&= 2(\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1) \exp(\mathbf{L}_1)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt} \exp(\mathbf{L}_6(t)) \right|_{t=1} &= (\mathbf{\Omega}_5 + \mathbf{L}_5(1)) \exp(\mathbf{L}_5(1)) + \exp(\mathbf{L}_5(1)) \cdot \\
&\quad \{ (-\mathbf{L}_4(1) - \mathbf{\Omega}_4) \exp(-\mathbf{L}_4(1)) \exp(\mathbf{L}_4(1)) + \exp(-\mathbf{L}_4(1)) \exp(\mathbf{L}_2) \mathbf{\Omega}_4 \} \\
&= (\mathbf{\Omega}_5 + \mathbf{L}_5(1)) \exp(\mathbf{L}_5(1)) - \exp(\mathbf{L}_5(1)) \mathbf{L}_4(1) \\
&= \{ \mathbf{L}_3 - \exp(\mathbf{L}_3) \mathbf{L}_2 \exp(-\mathbf{L}_3) + \mathbf{L}_3 \} \exp(\mathbf{L}_3) - \exp(\mathbf{L}_3) \mathbf{L}_2 \\
&= 2\mathbf{L}_3 \exp(\mathbf{L}_3) - \exp(\mathbf{L}_3) \mathbf{L}_2 \exp(-\mathbf{L}_3) \exp(\mathbf{L}_3) \\
&\quad - \exp(\mathbf{L}_3) \mathbf{L}_2 \exp(-\mathbf{L}_3) \exp(\mathbf{L}_3) \\
&= \{ 2\mathbf{L}_3 - 2 \exp(\mathbf{L}_3) \mathbf{L}_2 \exp(-\mathbf{L}_3) \} \exp(\mathbf{L}_3) \\
&= \mathbf{\Omega}_6 \exp(\mathbf{L}_3)
\end{aligned}$$

Assim, novamente utilizando o Lema 1, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathbf{p}(0) &= \left\{ \frac{d}{dt} [\exp(t\mathbf{L}_6(t))] \exp(t\mathbf{L}_4(t)) \exp(t\mathbf{L}_1) \mathbf{x}_0 + \exp(t\mathbf{L}_6(t)) \cdot \right. \\
&\quad \left. \left[ \frac{d}{dt} (\exp(t\mathbf{L}_4(t))) \exp(t\mathbf{L}_1) \mathbf{x}_0 + \exp(t\mathbf{L}_4(t)) \frac{d}{dt} (\exp(t\mathbf{L}_1) \mathbf{x}_0) \right] \right\} \Big|_{t=0} \\
&= \mathbf{L}_6(0) \mathbf{x}_0 + \mathbf{L}_4(0) \mathbf{x}_0 + \mathbf{L}_1 \mathbf{x}_0 \\
&= \mathbf{L}_1 \mathbf{x}_0 + \mathbf{L}_1 \mathbf{x}_0 + \mathbf{L}_1 \mathbf{x}_0 = 3\mathbf{L}_1 \mathbf{x}_0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}p(1) &= (\Omega_6 + L_6(1)) \exp(L_6(1)) \exp(L_4(1)) \exp(L_1)x_0 + \\
&\quad \exp(L_6(1))(\Omega_4 + L_4(1)) \exp(L_4(1)) \exp(L_1)x_0 + \\
&\quad \exp(L_6(1)) \exp(L_4(1))L_1 \exp(L_1)x_0 \\
&= (\Omega_6 + L_3) \exp(L_3) \exp(L_2) \exp(L_1)x_0 + \\
&\quad \{\exp(L_3)(\Omega_4 + L_2)\} \exp(-L_3) \exp(L_3) \exp(L_2) \exp(L_1)x_0 + \\
&\quad \exp(L_3) \exp(L_2)L_1 \exp(-L_2) \exp(-L_3) \exp(L_3) \exp(L_2) \exp(L_1)x_0 \\
&= \{(\Omega_6 + L_3) + \exp(L_3)(\Omega_4 + L_2) \exp(-L_3) + \\
&\quad \exp(L_3) \exp(L_2)L_1 \exp(-L_2) \exp(-L_3)\} x_3 \\
&= \{2L_3 - 2 \exp(L_3)L_2 \exp(-L_3) + L_3 + \exp(L_3)\Omega_4 \exp(-L_3) + \\
&\quad \exp(L_3)L_2 \exp(-L_3) + \exp(L_3) \exp(L_2)L_1 \exp(-L_2) \exp(-L_3)\} x_3 \\
&= \{2L_3 - 2 \exp(L_3)L_2 \exp(-L_3) + L_3 + \exp(L_3)L_2 \exp(-L_3) - \\
&\quad \exp(L_3) \exp(L_2)L_1 \exp(-L_2) \exp(-L_3) + \exp(L_3)L_2 \exp(-L_3) + \\
&\quad \exp(L_3) \exp(L_2)L_1 \exp(-L_2) \exp(-L_3)\} x_3 \\
&= 3L_3x_3
\end{aligned}$$

■

O Teorema anterior é muito importante para tratarmos o problema de encontrar uma curva de Bézier utilizando apenas os dados de fronteira (curvas de Hermite).

Quando  $G = \mathbf{SO}(3)$ , podemos encontrar curvas de Bezier, de maneira mais fácil do que no caso geral, devido ao fato de que, neste caso podemos escrever explicitamente a exponencial dos elementos da álgebra de Lie  $\mathcal{L} = \mathfrak{so}(3)$  de  $G$  e o logaritmo dos elementos em  $G$ . De fato, se  $S_a \in \mathfrak{so}(3)$  denota a matriz anti-simétrica definida por  $S_a b = a \times b$ , para  $a$  e  $b$  vetores em  $\mathbb{R}^3$  e  $\times$  o produto vetorial em  $\mathbb{R}^3$ , temos

$$\exp(S_a) = I \cos \|a\| + \frac{\text{sen } \|a\|}{\|a\|} S_a + \frac{1 - \cos \|a\|}{\|a\|^2} a a^T \quad (2.9)$$

Também, se  $\mathbf{x} = \exp S \in \text{SO}(3)$ , então

$$S = \log \mathbf{x} = \frac{\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^T) \quad (2.10)$$

onde  $\cos \alpha = \frac{\operatorname{tr}(\mathbf{x}) - 1}{2}$  (Quando  $\operatorname{tr}(\mathbf{x}) = -1$ ,  $\log$  não é definido de maneira única).

Assim com base no algoritmo de De Casteljaeu para um grupo de Lie qualquer, podemos obter uma curva de Bezier de grau 3 em  $\text{SO}(3)$  que satisfaz as condições de fronteira (2.8), seguindo os passos abaixo:

Dados  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_3 \in \text{SO}(3)$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbb{T}_{\mathbf{x}_0} \text{SO}(3)$ ,  $\mathbf{W} \in \mathbb{T}_{\mathbf{x}_3} \text{SO}(3)$ ,

1. Calcule  $\mathbf{L}_1 = \frac{1}{3} \mathbf{V} \mathbf{x}_0^{-1}$ ,  $\mathbf{L}_3 = \frac{1}{3} \mathbf{W} \mathbf{x}_3^{-1}$ .
2. Use (2.9) para calcular  $\exp(\mathbf{L}_1)$ ,  $\exp(\mathbf{L}_3)$ .
3. Calcule os pontos intermediários  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  de  $\mathbf{x}_1 = \exp(\mathbf{L}_1) \mathbf{x}_0$ , e  $\mathbf{x}_2 = \exp(-\mathbf{L}_3) \mathbf{x}_3$ .
4. Use o item anterior e fato de que  $\mathbf{x}_2 = \exp(\mathbf{L}_2) \mathbf{x}_1$  para calcular  $\exp(\mathbf{L}_2) = \exp(-\mathbf{L}_3) \mathbf{x}_3 \mathbf{x}_0^{-1} \exp(-\mathbf{L}_1)$ .
5. Use (2.10) para obter  $\mathbf{L}_2$ .
6. Use (2.9) para calcular  $\exp(t\mathbf{L}_2)$ ,  $\exp(t\mathbf{L}_3)$ ,  $\exp((1-t)\mathbf{L}_1)$  e  $\exp((1-t)\mathbf{L}_2)$ .
7. Use o item anterior e as igualdades em (2.7) para obter  $\exp(\mathbf{L}_4)$  e  $\exp(\mathbf{L}_5)$ .
8. Calcule  $\mathbf{L}_4$  e  $\mathbf{L}_5$  usando (2.10).
9. Calcule  $\exp(t\mathbf{L}_5)$  e  $\exp((1-t)\mathbf{L}_4)$ .
10. Calcule  $\exp(\mathbf{L}_6) = \exp(t\mathbf{L}_5) \exp((1-t)\mathbf{L}_4)$ .
11. Calcule  $\mathbf{L}_6$ .
12. Calcule  $\exp(t\mathbf{L}_4)$  e  $\exp(t\mathbf{L}_6)$ .
13. Calcule  $\mathbf{p}(t) = \exp(t\mathbf{L}_6) \exp(t\mathbf{L}_4) \exp(t\mathbf{L}_1) \mathbf{x}_0$

## Capítulo 3

# Curvas de Bézier de grau 3 em $S^2$

Trabalharemos agora com curvas de Bézier de grau 3 em  $S^2$ , considerando duas abordagens. Na primeira simplesmente tratamos  $S^2$  como uma variedade Riemmaniana, com a métrica induzida pela métrica Euclidiana em  $\mathbb{R}^3$ , e neste caso, utilizar o algoritmo De Casteljaou está relacionado a habilidade de calcular curvas geodésicas na variedade que ligam dois pontos, digamos  $x_i$  (para  $t = 0$ ) e  $x_{i+1}$  (para  $t = 1$ ). Em  $S^2$  tal curva é dada pela seguinte fórmula

$$\beta_1(t, x_i, x_{i+1}) = \frac{\text{sen}((1-t)\theta_i^1)}{\text{sen}(\theta_i^1)} x_i + \frac{\text{sen}(t\theta_i^1)}{\text{sen}(\theta_i^1)} x_{i+1} \quad (3.1)$$

onde  $\theta_i^1 = \cos^{-1}\langle x_i, x_{i+1} \rangle$  é o ângulo entre os vetores  $x_i$  e  $x_{i+1}$ .

De fato, para encontrar a fórmula acima consideramos o plano do grande círculo que passa por  $x_i$  e  $x_{i+1}$ , que é definido por  $x_i$ ,  $x_{i+1}$  e a origem, e com isso basta resolver o problema neste plano.

De acordo com a Figura 3.1 temos

$$\begin{aligned} x_i &= (\cos \theta_0, \text{sen} \theta_0) \\ x_{i+1} &= (\cos(\theta_0 + \theta_i^1), \text{sen}(\theta_0 + \theta_i^1)) \end{aligned}$$

e assim a curva que liga os pontos  $x_i$  e  $x_{i+1}$  em termo dos ângulos é dada por

$$\beta_1(t, x_i, x_{i+1}) = (\cos(\theta_0 + t\theta_i^1), \text{sen}(\theta_0 + t\theta_i^1)).$$

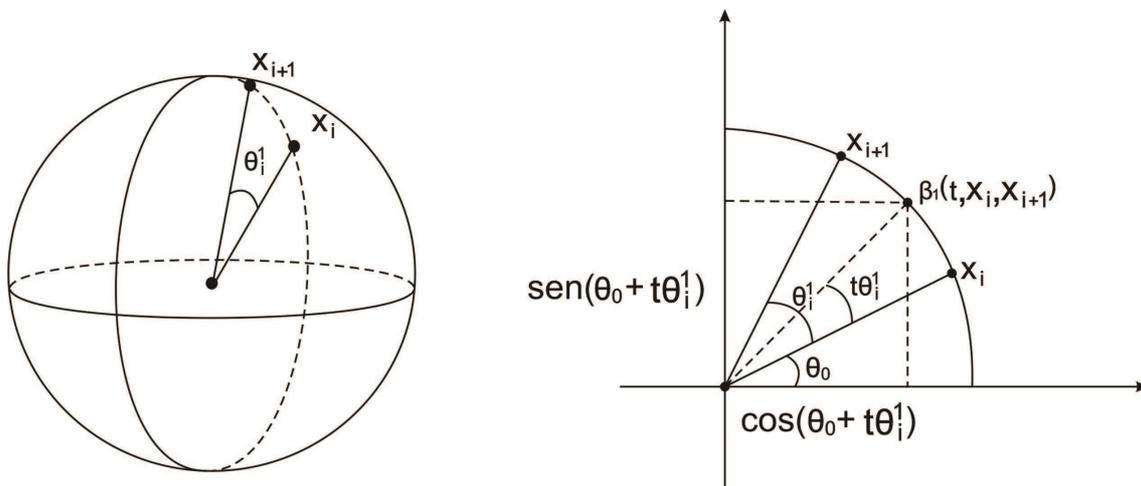


Figura 3.1: Plano que contém o grande círculo que passa por  $x_i$  e  $x_{i+1}$

Vamos escrever a curva acima em função dos pontos  $x_i$  e  $x_{i+1}$ . Consideraremos o ponto  $(x, y)$  como o vetor coluna  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , assim temos

$$\beta_1(t, x_i, x_{i+1}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_0 + t\theta_i^1) \\ \text{sen}(\theta_0 + t\theta_i^1) \end{pmatrix}$$

o que implica em

$$\begin{aligned} \beta_1(t, x_i, x_{i+1}) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) \cos(t\theta_i^1) - \text{sen}(\theta_0) \text{sen}(t\theta_i^1) \\ \text{sen}(\theta_0) \cos(t\theta_i^1) + \cos(\theta_0) \text{sen}(t\theta_i^1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\cos(\theta_0)[\text{sen}(\theta_i^1) \cos(t\theta_i^1) - \cos(\theta_i^1) \text{sen}(t\theta_i^1)] + [\cos(\theta_0) \cos(\theta_i^1) - \text{sen}(\theta_0) \text{sen}(\theta_i^1)] \text{sen}(t\theta_i^1)}{\text{sen}(\theta_i^1)} \\ \frac{\text{sen}(\theta_0)[\text{sen}(\theta_i^1) \cos(t\theta_i^1) - \cos(\theta_i^1) \text{sen}(t\theta_i^1)] + [\text{sen}(\theta_0) \cos(\theta_i^1) + \cos(\theta_0) \text{sen}(\theta_i^1)] \text{sen}(t\theta_i^1)}{\text{sen}(\theta_i^1)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\cos(\theta_0) \text{sen}((1-t)\theta_i^1) + \cos(\theta_0 + \theta_i^1) \text{sen}(t\theta_i^1)}{\text{sen}(\theta_i^1)} \\ \frac{\text{sen}(\theta_0) \text{sen}((1-t)\theta_i^1) + \text{sen}(\theta_0 + \theta_i^1) \text{sen}(t\theta_i^1)}{\text{sen}(\theta_i^1)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\text{sen}((1-t)\theta_i^1)}{\text{sen}(\theta_i^1)} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) \\ \text{sen}(\theta_0) \end{pmatrix} + \frac{\text{sen}(t\theta_i^1)}{\text{sen}(\theta_i^1)} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta_0 + \theta_i^1) \\ \text{sen}(\theta_0 + \theta_i^1) \end{pmatrix} \\
&= \frac{\text{sen}((1-t)\theta_i^1)}{\text{sen}(\theta_i^1)} \cdot \mathbf{x}_i + \frac{\text{sen}(t\theta_i^1)}{\text{sen}(\theta_i^1)} \cdot \mathbf{x}_{i+1}
\end{aligned}$$

e assim chegamos em (3.1). Logo, nesta primeira abordagem, basta aplicar o método visto nas preliminares para Variedades Riemannianas, que é mostrado mais adiante.

Na segunda abordagem utilizamos o fato de que para dois pontos quaisquer  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}_1$  em  $S^2$ , representados como vetores unitários em  $\mathbb{R}^3$ , existe um elemento  $A$  de  $SO(3)$ , uma matriz de rotação  $3 \times 3$ , tal que  $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$ . Além disso sabemos que geodésicas em  $S^2$  são arcos de grande círculos e que cada arco pode ser expressado como uma única curva no grupo de rotação (Desde que os pontos  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}_1$  não sejam antípodas). De fato podemos escrever o arco de geodésica  $\beta_1(t, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1})$  em  $S^2$  como a curva  $t \rightarrow \exp(t\theta_i^1 S_{v_i})\mathbf{x}_i$  onde  $t \rightarrow \exp(t\theta_i^1 S_{v_i})$  é uma geodésica em  $SO(3)$ . Com base nestes fatos podemos mostrar o resultado abaixo.

**Lema 2.** *Suponha que temos o conjunto de pontos  $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$  em  $S^2$  e a curva de Bezier de grau 3,  $\mathbf{p}(t) \in S^2$ , obtido destes pontos através do algoritmo De Casteljaou. Então existe um conjunto de pontos  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$  em  $SO(3)$ , tal que a curva de Bezier de grau 3,  $\mathbf{g}(t) \in SO(3)$ , obtido pelo algoritmo De Casteljaou, em  $SO(3)$ , do conjunto de pontos  $\{\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ , onde  $\mathbf{g}_0 = \mathbf{e} = \text{identidade}$ , satisfaz*

$$\mathbf{g}_0\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0, \mathbf{g}_1\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1, \mathbf{g}_2\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_2 \text{ e } \mathbf{g}_3\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_3$$

e

$$\mathbf{g}(t)\mathbf{x}_0 = \mathbf{p}(t), t \in [0, 1].$$

Segue que dados os pontos  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  em  $S^2$  podemos obter o polinômio  $\mathbf{p}(t)$  em  $S^2$ , simplesmente resolvendo o problema para os pontos  $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$  no lema 2 e aplicando o algoritmo De Casteljaou em  $SO(3)$ . Note que  $\mathbf{g}_k, 1 \leq k \leq 3$ , não são elementos

arbitrários satisfazendo  $\mathbf{g}_k \mathbf{g}_{k-1}^{-1} \mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{x}_k$ ,  $1 \leq k \leq 3$ . De fato  $\mathbf{g}_k \mathbf{g}_{k-1}^{-1}$  são as rotações do  $\mathbb{R}^3$  sobre o eixo  $\mathbf{x}_{k-1} \times \mathbf{x}_k$ . Isto é,

$$\mathbf{g}_k \mathbf{g}_{k-1}^{-1} = \exp(\theta_{k-1}^1 \mathbf{S}_{\mathbf{x}_{k-1} \times \mathbf{x}_k})$$

onde,  $0 \leq \theta_{k-1}^1 \leq \pi$ ,  $\theta_{k-1}^1 = \cos^{-1} \langle \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k \rangle$ .

Seguimos agora com a construção da Curva de Bézier de grau 3 usando o algoritmo De Casteljau em  $S^2$ , seguindo as idéias da primeira abordagem. Usando (3.1) para o arco de geodésica que liga dois pontos, a curva de Bézier de grau 3 na esfera pode ser definida como segue. Considere

$$\begin{aligned} \theta_i^1 &:= \cos^{-1} \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1} \rangle, \quad i = 0, 1, 2 \\ \theta_i^2(t) &:= \cos^{-1} \langle \beta_1(t, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}), \beta_1(t, \mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_{i+2}) \rangle, \quad i = 0, 1 \\ \theta_0^3(t) &:= \cos^{-1} \langle \beta_2(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \beta_2(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \rangle, \end{aligned} \quad (3.2)$$

e

$$f(t, \theta(t)) := \frac{\text{sen}(t\theta(t))}{\text{sen}\theta(t)} \quad g(t, \theta(t)) := \frac{\text{sen}((1-t)\theta(t))}{\text{sen}\theta(t)}. \quad (3.3)$$

De acordo com (1.2) a nossa curva polinomial cúbica é dada por

$$\mathbf{p}(t) = \beta_3(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \beta_1(t, \beta_2(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \beta_2(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3))$$

mas temos que

$$\beta_2(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \beta_1(t, \beta_1(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1), \beta_1(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2))$$

$$\beta_2(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \beta_1(t, \beta_1(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \beta_1(t, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)).$$

Logo utilizando a equação (3.1) segue que

$$\begin{aligned} \beta_2(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= g(t, \theta_0^2(t)) [g(t, \theta_0^1) \mathbf{x}_0 + f(t, \theta_0^1) \mathbf{x}_1] \\ &+ f(t, \theta_0^2(t)) [g(t, \theta_1^1) \mathbf{x}_1 + f(t, \theta_1^1) \mathbf{x}_2] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\beta_2(t, x_1, x_2, x_3) &= g(t, \theta_1^2(t)) [g(t, \theta_1^1) x_1 + f(t, \theta_1^1) x_2] \\ &+ f(t, \theta_1^2(t)) [g(t, \theta_2^1) x_2 + f(t, \theta_2^1) x_3]\end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned}p(t) = \beta_3(t, x_0, x_1, x_2, x_3) &= g(t, \theta_0^3(t)) \{g(t, \theta_0^2(t)) [g(t, \theta_0^1) x_0 + f(t, \theta_0^1) x_1] \\ &+ f(t, \theta_0^2(t)) [g(t, \theta_1^1) x_1 + f(t, \theta_1^1) x_2]\} \\ &+ f(t, \theta_0^3(t)) \{g(t, \theta_1^2(t)) [g(t, \theta_1^1) x_1 + f(t, \theta_1^1) x_2] \\ &+ f(t, \theta_1^2(t)) [g(t, \theta_2^1) x_2 + f(t, \theta_2^1) x_3]\}\end{aligned}$$

Então temos

$$\begin{aligned}p(t) &= g(t, \theta_0^3(t)) g(t, \theta_0^2(t)) g(t, \theta_0^1) x_0 + \{g(t, \theta_0^3(t)) g(t, \theta_0^2(t)) f(t, \theta_0^1) \\ &+ g(t, \theta_0^3(t)) f(t, \theta_0^2(t)) g(t, \theta_1^1) + f(t, \theta_0^3(t)) g(t, \theta_1^2(t)) g(t, \theta_1^1)\} x_1 \\ &+ \{g(t, \theta_0^3(t)) f(t, \theta_0^2(t)) f(t, \theta_1^1) + f(t, \theta_0^3(t)) g(t, \theta_1^2(t)) f(t, \theta_1^1) \\ &+ f(t, \theta_0^3(t)) f(t, \theta_1^2(t)) g(t, \theta_2^1)\} x_2 \\ &+ f(t, \theta_0^3(t)) f(t, \theta_1^2(t)) f(t, \theta_2^1) x_3\end{aligned} \quad (3.4)$$

Observe que as funções  $f$  e  $g$  definidas em (3.3) satisfazem

$$f(0, \theta(0)) = 0, \quad g(0, \theta(0)) = 1, \quad f(1, \theta(1)) = 1, \quad g(1, \theta(1)) = 0 \quad (3.5)$$

e também temos

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt}(0, \theta(0)) &= \frac{(\cos(0 \cdot \theta(0))(\theta(0) + 0 \cdot \dot{\theta}(0))) \operatorname{sen} \theta(0) - \operatorname{sen}(0 \cdot \theta(0)) \cos(\theta(0)) \dot{\theta}(0)}{(\operatorname{sen} \theta(0))^2} \\ &= \frac{\theta(0) \operatorname{sen} \theta(0)}{(\operatorname{sen} \theta(0))^2} \\ &= \frac{\theta(0)}{\operatorname{sen} \theta(0)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt}(1, \theta(1)) &= \frac{(\cos(1 \cdot \theta(1))(\theta(1) + 1 \cdot \dot{\theta}(1)))\text{sen}\theta(1) - \text{sen}(1 \cdot \theta(1)) \cos(\theta(1))\dot{\theta}(1)}{(\text{sen}\theta(1))^2} \\ &= \frac{\cos(\theta(1))\theta(1)}{\text{sen}\theta(1)}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dt}(0, \theta(0)) &= \frac{(\cos \theta(0)(-\theta(0) + \dot{\theta}(0)))\text{sen}\theta(0) - \text{sen}\theta(0) \cos \theta(0)\dot{\theta}(0)}{(\text{sen}\theta(0))^2} \\ &= \frac{-\theta(0) \cos \theta(0)}{\text{sen}\theta(0)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dt}(1, \theta(1)) &= \frac{(\cos(0 \cdot \theta(1))(-\theta(1) + 0 \cdot \dot{\theta}(1)))\text{sen}\theta(1) - \text{sen}(0 \cdot \theta(1)) \cos \theta(1)\dot{\theta}(1)}{(\text{sen}\theta(1))^2} \\ &= \frac{-\theta(1)}{\text{sen}\theta(1)}\end{aligned}$$

Com isso podemos provar o resultado abaixo.

**Teorema 2.** *O polinômio cúbico  $t \rightarrow p(t)$  em  $S^2$  definido por (3.4) satisfaz as seguintes condições de fronteira*

$$\begin{aligned}p(0) = x_0 \quad \frac{dp}{dt}(0) &= 3 \frac{d}{dt} \beta_1(t, x_0, x_1) \Big|_{t=0}, \\ p(1) = x_3 \quad \frac{dp}{dt}(1) &= 3 \frac{d}{dt} \beta_1(t, x_2, x_3) \Big|_{t=1}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

**Prova:**

As condições

$$p(0) = x_0 \quad \text{e} \quad p(1) = x_3$$

são consequência direta das igualdades (3.5) aplicadas em  $p(t)$ . Temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}p(t) &= \left\{ \frac{dg}{dt}(t, \theta_0^3(t)) \{g(t, \theta_0^2(t))g(t, \theta_0^1)\} \right. \\ &\quad \left. + g(t, \theta_0^3(t)) \left\{ \frac{dg}{dt}(t, \theta_0^2(t))g(t, \theta_0^1) + g(t, \theta_0^2(t)) \frac{dg}{dt}(t, \theta_0^1) \right\} \right\} x_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{dg}{dt}(t, \theta_0^3(t)) \{g(t, \theta_0^2(t))f(t, \theta_0^1)\} \right. \\
& + g(t, \theta_0^3(t)) \left\{ \frac{dg}{dt}(t, \theta_0^2(t))f(t, \theta_0^1) + g(t, \theta_0^2(t)) \frac{df}{dt}(t, \theta_0^1) \right\} \\
& + \frac{dg}{dt}(t, \theta_0^3(t)) \{f(t, \theta_0^2(t))g(t, \theta_1^1)\} \\
& + g(t, \theta_0^3(t)) \left\{ \frac{df}{dt}(t, \theta_0^2(t))g(t, \theta_1^1) + f(t, \theta_0^2(t)) \frac{dg}{dt}(t, \theta_1^1) \right\} \\
& + \frac{df}{dt}(t, \theta_0^3(t)) \{g(t, \theta_1^2(t))g(t, \theta_1^1)\} \\
& + f(t, \theta_0^3(t)) \left\{ \frac{dg}{dt}(t, \theta_1^2(t))g(t, \theta_1^1) + g(t, \theta_1^2(t)) \frac{dg}{dt}(t, \theta_1^1) \right\} \left. \right\} x_1 \\
& + \left\{ \frac{dg}{dt}(t, \theta_0^3(t)) \{f(t, \theta_0^2(t))f(t, \theta_1^1)\} \right. \\
& + g(t, \theta_0^3(t)) \left\{ \frac{df}{dt}(t, \theta_0^2(t))f(t, \theta_1^1) + f(t, \theta_0^2(t)) \frac{df}{dt}(t, \theta_1^1) \right\} \\
& + \frac{df}{dt}(t, \theta_0^3(t)) \{g(t, \theta_1^2(t))f(t, \theta_1^1)\} \\
& + f(t, \theta_0^3(t)) \left\{ \frac{dg}{dt}(t, \theta_1^2(t))f(t, \theta_1^1) + g(t, \theta_1^2(t)) \frac{df}{dt}(t, \theta_1^1) \right\} \\
& + \frac{df}{dt}(t, \theta_0^3(t)) \{f(t, \theta_1^2(t))g(t, \theta_2^1)\} \\
& + f(t, \theta_0^3(t)) \left\{ \frac{df}{dt}(t, \theta_1^2(t))g(t, \theta_2^1) + f(t, \theta_1^2(t)) \frac{dg}{dt}(t, \theta_2^1) \right\} \left. \right\} x_2 \\
& + \left\{ \frac{df}{dt}(t, \theta_0^3(t)) \{f(t, \theta_1^2(t))f(t, \theta_2^1)\} \right. \\
& + f(t, \theta_0^3(t)) \left\{ \frac{df}{dt}(t, \theta_1^2(t))f(t, \theta_2^1) + f(t, \theta_1^2(t)) \frac{df}{dt}(t, \theta_2^1) \right\} \left. \right\} x_3
\end{aligned}$$

Substituindo as igualdades (3.5) e as expressões para as derivadas de  $f(t, \theta(t))$  e  $g(t, \theta(t))$ , e também observando que  $\theta_0^3(0) = \theta_0^2(0) = \theta_0^1$  e  $\theta_0^3(1) = \theta_1^2(1) = \theta_2^1$  temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}p(0) &= \left\{ -\frac{\theta_0^3(0) \cos \theta_0^3(0)}{\text{sen} \theta_0^3(0)} - \frac{\theta_0^2(0) \cos \theta_0^2(0)}{\text{sen} \theta_0^2(0)} - \frac{\theta_0^1 \cos \theta_0^1}{\text{sen} \theta_0^1} \right\} x_0 \\
&+ \left\{ \frac{\theta_0^3(0)}{\text{sen} \theta_0^3(0)} + \frac{\theta_0^2(0)}{\text{sen} \theta_0^2(0)} + \frac{\theta_0^1}{\text{sen} \theta_0^1} \right\} x_1 \\
&= 3 \left\{ -\frac{\theta_0^1 \cos \theta_0^1}{\text{sen} \theta_0^1} \right\} x_0 + 3 \left\{ \frac{\theta_0^1}{\text{sen} \theta_0^1} \right\} x_1 \\
&= 3 \frac{d}{dt} \beta_1(t, x_0, x_1) \Big|_{t=0}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}p(1) &= \left\{ -\frac{\theta_0^3(1)}{\text{sen}\theta_0^3(1)} - \frac{\theta_1^2(1)}{\text{sen}\theta_1^2(1)} - \frac{\theta_2^1(1)}{\text{sen}\theta_2^1(1)} \right\} x_2 \\
&+ \left\{ \frac{\theta_0^3(1) \cos \theta_0^3(1)}{\text{sen}\theta_0^3(1)} + \frac{\theta_1^2(1) \cos \theta_1^2(1)}{\text{sen}\theta_1^2(1)} + \frac{\theta_2^1(1) \cos \theta_2^1(1)}{\text{sen}\theta_2^1(1)} \right\} x_3 \\
&= 3 \left\{ -\frac{\theta_2^1(1)}{\text{sen}\theta_2^1(1)} \right\} x_2 + 3 \left\{ \frac{\theta_2^1(1) \cos \theta_2^1(1)}{\text{sen}\theta_2^1(1)} \right\} x_3 \\
&= 3 \frac{d}{dt} \beta_1(t, x_2, x_3) \Big|_{t=1}
\end{aligned}$$

o que conclui a prova do teorema. ■

Discutiremos agora as idéias da segunda abordagem, que é bastante útil quando estamos considerando Curvas de Hermite, em que não são dados os pontos  $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$  em  $S^2$ , mas somente os pontos inicial e final, junto com suas derivadas. Ou seja, se os dados de fronteiras são  $x_0, x_3, \frac{dp}{dt}(0)$  e  $\frac{dp}{dt}(1)$ , onde  $x_0$  e  $x_3$  são vetores unitários em  $\mathbb{R}^3$  e

$$\frac{dp}{dt}(0) = \hat{V}_0, \quad \frac{dp}{dt}(1) = \hat{V}_1$$

são vetores em  $\mathbb{R}^3$ , com  $\hat{V}_0$  tangente a  $S^2$  no ponto  $x_0$  e  $\hat{V}_1$  tangente a  $S^2$  no ponto  $x_3$ , de modo que  $\langle \hat{V}_0, x_0 \rangle = \langle \hat{V}_1, x_3 \rangle = 0$ , estamos querendo encontrar um polinômio cúbico  $p(t)$  que satisfaz as seguintes condições

$$\begin{aligned}
p(0) &= x_0, & p(1) &= x_3 \\
\frac{dp}{dt}(0) &= \hat{V}_0, & \frac{dp}{dt}(1) &= \hat{V}_1
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Observe que para usarmos o Lema 2 precisamos inicialmente identificar os pontos  $g_1, g_2$  e  $g_3$  em  $SO(3)$  e os pontos  $x_1$  e  $x_2$  em  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  tal que  $g_1 x_0 = x_1$ ,  $g_2 x_0 = x_2$ ,  $g_3 x_0 = x_3$ ,  $\frac{dg}{dt}(0)x_0 = \frac{dp}{dt}(0) = \hat{V}_0$  e  $\frac{dg}{dt}(1)x_0 = \frac{dp}{dt}(1) = \hat{V}_1$ . Do Teorema 1 aplicado a  $g(t)$  em  $SO(3)$  temos  $\frac{dg}{dt}(0) = 3L_1$  e  $\frac{dg}{dt}(1) = 3L_3 g_3$ , portanto  $\frac{dg}{dt}(0)x_0 = 3L_1 x_0 = \hat{V}_0$  e  $\frac{dg}{dt}(1)x_0 = 3L_3 g_3 x_0 = 3L_3 x_3 = \hat{V}_1$ . Assim precisamos determinar a solução do sistema de equações

$$L_1 x_0 = \frac{1}{3} \hat{V}_0 \quad L_3 x_3 = \frac{1}{3} \hat{V}_1 \tag{3.8}$$

Observe que  $L_1$  e  $L_3$  são elementos da álgebra de Lie de  $SO(3)$  e portanto são matrizes anti-simétricas  $3 \times 3$ . Desde que  $\langle \hat{V}_0, \mathbf{x}_0 \rangle = \langle \hat{V}_1, \mathbf{x}_3 \rangle = 0$  temos que o sistema (3.8) é possível pois

$$\langle \mathbf{x}_0, L_1 \mathbf{x}_0 \rangle = \frac{1}{3} \langle \hat{V}_0, \mathbf{x}_0 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{x}_3, L_3 \mathbf{x}_3 \rangle = \frac{1}{3} \langle \hat{V}_1, \mathbf{x}_3 \rangle = 0.$$

Contudo as equações (3.8) não determinam  $L_1$  e  $L_3$  de forma única. Mas segue do Teorema 2 que  $\mathbf{x}_0$  é ligado a  $\mathbf{x}_1$  por uma geodésica em  $S^2$ , com vetor tangente  $\frac{1}{3}\hat{V}_0$  (para  $\mathbf{x}_0$ ). Assim sabemos que  $L_1$  precisa ser uma rotação infinitesimal sobre um eixo perpendicular a  $\mathbf{x}_0$  e  $\hat{V}_0$ . Da mesma forma,  $L_3$  precisa ser uma rotação infinitesimal sobre um eixo perpendicular a  $\mathbf{x}_3$  e  $\hat{V}_1$ . Assim  $L_1 = \theta_0 S_{\mathbf{x}_0 \times \hat{V}_0}$  e  $L_3 = \theta_1 S_{\mathbf{x}_3 \times \hat{V}_1}$ . Assim as equações (3.8) resultam em

$$\theta_0 S_{\mathbf{x}_0 \times \hat{V}_0} \mathbf{x}_0 = \frac{1}{3} \hat{V}_0 \quad \theta_1 S_{\mathbf{x}_3 \times \hat{V}_1} \mathbf{x}_3 = \frac{1}{3} \hat{V}_1. \quad (3.9)$$

Essas equações definem  $\theta_0, \theta_1$ ,  $0 \leq \theta_0, \theta_1 \leq \pi$  de maneira única, e assim  $L_1$  e  $L_3$ .

Tendo obtido  $L_1$  e  $L_3$ , podemos agora calcular  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  das expressões

$$\mathbf{x}_1 = \exp(L_1) \mathbf{x}_0 \quad \mathbf{x}_2 = \exp(-L_3) \mathbf{x}_3$$

Com isso os pontos intermediários  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$  e  $\mathbf{g}_3$  podem ser obtidos, como antes, por  $\mathbf{g}_i \mathbf{g}_{i-1}^{-1} = \exp(\theta_i^1 S_{\mathbf{x}_{i-1} \times \mathbf{x}_i})$ ,  $\theta_i^1 = \cos^{-1}(\langle \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i \rangle)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Posteriormente basta utilizar o Lema 2 para calcular a curva. Assim finalizamos o problema de encontrar o polinômio cúbico  $\mathbf{p}(t) \in S^2$  com os dados de fronteira em (3.7).

# Capítulo 4

## Aplicações

Neste capítulo mostraremos as implementações feitas em linguagem C, com base nas idéias teóricas vista nos capítulos anteriores, usando a API<sup>1</sup> gráfica OpenGL juntamente com algumas bibliotecas como a GLUT<sup>2</sup>.

### 4.1 Implementação de Curvas de Bézier de Grau 3 no $\mathbb{R}^2$

Nossa implementação para este caso desenha, a cada clique na tela, um quadrado centrado neste ponto, e a partir do segundo clique, desenha também o segmento de reta que liga os respectivos centros de cada par de quadrados. Ao final do quarto quadrado é desenhado nossa Curva de Bezier de grau 3.

Uma vez construída a nossa curva podemos clicar em um dos pontos, aqui representados pelos quadrados, e arrastá-lo pela tela, afim de gerarmos novas curvas de Bezier de uma maneira interativa.

Na proxima página segue a parte do código implementado que desenha os objetos descritos acima.

---

<sup>1</sup>Application Programming Interface

<sup>2</sup>OpenGL Utility Toolkit

```

void Desenha(void) {
    glClearColor(GL_COLOR_BUFFER_BIT);
    glBegin(GL_QUADS);
    for(int i=0;i<=N-1;i++){
        glColor3f (0.0, 0.0, 0.0);
        glVertex2f(p[i][0]-0.01, p[i][1]-0.01);
        glVertex2f(p[i][0]+0.01, p[i][1]-0.01);
        glVertex2f(p[i][0]+0.01, p[i][1]+0.01);
        glVertex2f(p[i][0]-0.01, p[i][1]+0.01);
    }
    glEnd();
    if(N>1){
        glPointSize(2.0);
        glBegin(GL_LINES);
        glColor3f (1.0, 0.0, 0.0);
        for(int i=0;i< N-1;i++){
            glVertex2f(p[i][0], p[i][1]);
            glVertex2f(p[i+1][0], p[i+1][1]);
        }
        glEnd();
    }
    if(N==4){
        glColor3f(0.0f,0.0f,1.0f);
        glPointSize(2.0);
        glBegin(GL_POINTS);
        for (float u=0.0;u<=1.0;u+=0.0001)
        {
            float x=0.0,y=0.0;
            x=p[0][0]*(1-u)*(1-u)*(1-u)+3*u*(1-u)*(1-u)*
            p[1][0]+3*u*u*(1-u)*p[2][0]+p[3][0]*u*u*u;
            y=p[0][1]*(1-u)*(1-u)*(1-u)+3*u*(1-u)*(1-u)*
            p[1][1]+3*u*u*(1-u)*p[2][1]+p[3][1]*u*u*u;
            glVertex2f(x,y);
        }
        glEnd();
    }
    glFlush();
}

```

As figuras ilustram as idéias descritas anteriormente.

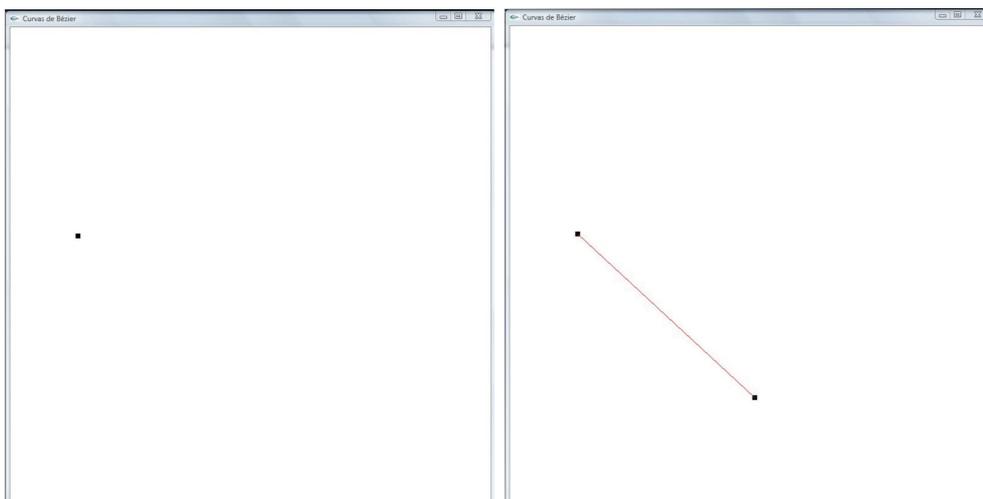


Figura 4.1: Ilustração dos dois primeiros cliques

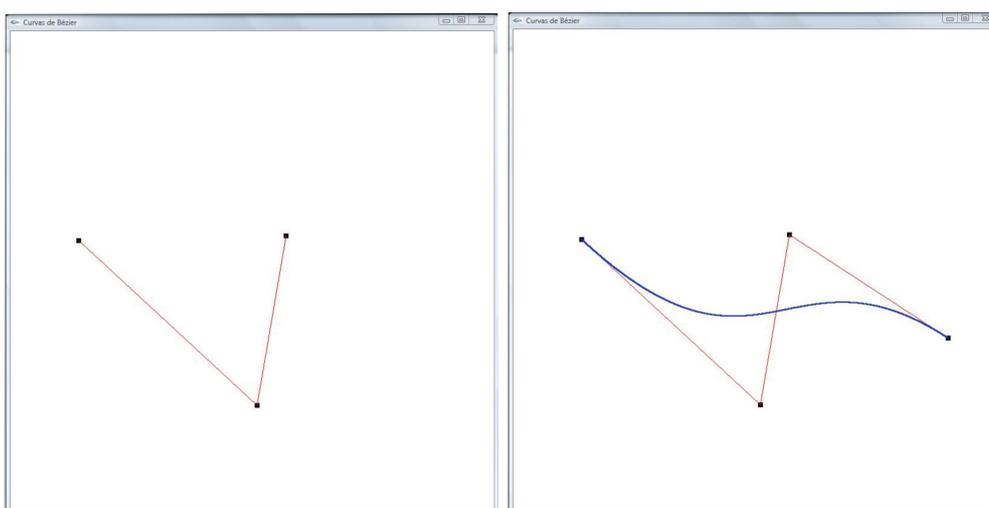


Figura 4.2: Ilustração do terceiro e quarto cliques

As próximas figuras ilustram a modificação da curva após arrastarmos um dos pontos de controle, obtendo assim novas curvas de Bezier.

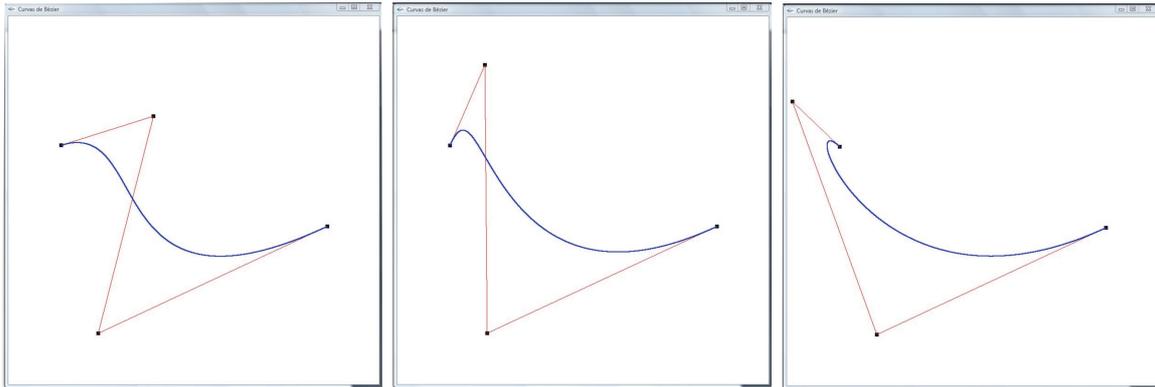


Figura 4.3: Gerando Novas curvas de Bezier de Forma Interativa

## 4.2 Implementação de Curvas de Bézier de grau 3 na Esfera $S^2$

Neste caso, começamos desenhando a esfera  $S^2$  (raio 1 e centrada na origem). Nossa câmera virtual localiza-se inicialmente na posição  $(2, 2, 2)$ , direcionada para origem e o topo da cena é orientado pelo vetor  $z$ , representado pela cor amarela na figura abaixo.

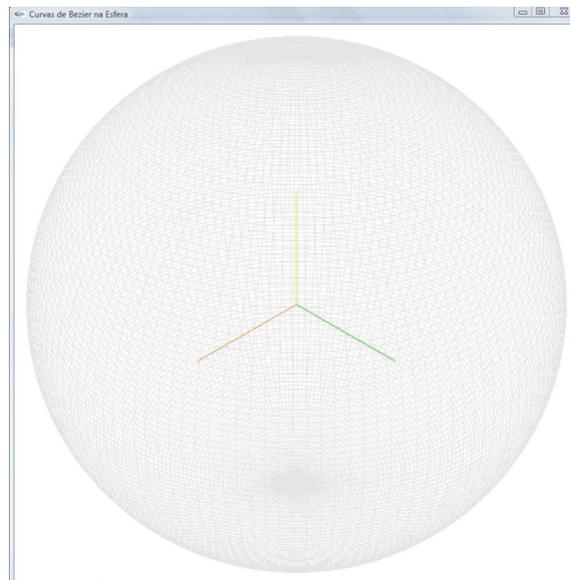


Figura 4.4: Tela Inicial

Quando clicamos na esfera nossa aplicação desenha um ponto, que corresponde a projeção do ponto da tela na esfera. Seguindo a mesma idéia do caso anterior, a partir do segundo ponto, é desenhado também o arco de geodésica que liga cada par de pontos. Ao final do quarto ponto é desenhado a nossa curva de Bézier de grau 3.

Nesta aplicação também temos implementado um trackball virtual que permite girar a esfera na tela, afim de melhorar a visualização da curva de Bézier.

Abaixo segue a parte do código que desenha os objetos.

```
void Desenha(void)
{
    glClearColor(GL_COLOR_BUFFER_BIT);
    glColor3f(0.9f, 0.9f, 0.9f);
    if (trackballMove) {
        glRotatef(angle, axis[0], axis[1], axis[2]);
    }
    glutWireSphere(1.0f,150.0f,150.0f);
    glBegin(GL_LINES);
    {
        glColor3f (1.0, 0.5, 0.0);
        glVertex3f(0,0,0);
        glVertex3f(0.5,0,0);
    }
    glEnd();
    glBegin(GL_LINES);
    {
        glColor3f (0.0, 1.0, 0.0);
        glVertex3f(0,0,0);
        glVertex3f(0,0.5,0);
    }
    glEnd();
    glBegin(GL_LINES);
    {
        glColor3f (1.0, 1.0, 0.0);
        glVertex3f(0,0,0);
        glVertex3f(0,0,0.5);
    }
    glEnd();
    glPointSize(5.0);
    glBegin(GL_POINTS);
```

```

    for(int i=0;i<=N-1;i++){
        glColor3f (0.0, 0.0, 1.0);
        glVertex3f(p[i][0],p[i][1],p[i][2]);
    }
    glEnd();
    if(N>1){
        glPointSize(1.0);
        glBegin(GL_POINTS);
        glColor3f (1.0, 0.0, 0.0);
        for(int i=0;i< N-1;i++){
            theta[1][i]=acos(p[i][0]*p[i+1][0]+p[i][1]*p[i+1][1]+p[i][2]*p[i+1][2]);
            for(float u=0.0;u<=1.0;u+=0.001)
            {
                float x=0.0,y=0.0,z=0.0;
                x=p[i][0]*(sin((1-u)*(theta[1][i]))/sin(theta[1][i]))+
                    p[i+1][0]*(sin(u*(theta[1][i]))/sin(theta[1][i]));
                y=p[i][1]*(sin((1-u)*(theta[1][i]))/sin(theta[1][i]))+
                    p[i+1][1]*(sin(u*(theta[1][i]))/sin(theta[1][i]));
                z=p[i][2]*(sin((1-u)*(theta[1][i]))/sin(theta[1][i]))+
                    p[i+1][2]*(sin(u*(theta[1][i]))/sin(theta[1][i]));
                glVertex3f(x,y,z);
            }}
        glEnd();
        if(N==4){
            for (float u=0.0;u<=1.0;u+=0.001)
            {
                V[0][0]=p[0][0]*(sin((1-u)*(theta[1][0]))/sin(theta[1][0]))+
                    p[1][0]*(sin(u*(theta[1][0]))/sin(theta[1][0]));
                V[0][1]=p[0][1]*(sin((1-u)*(theta[1][0]))/sin(theta[1][0]))+
                    p[1][1]*(sin(u*(theta[1][0]))/sin(theta[1][0]));
                V[0][2]=p[0][2]*(sin((1-u)*(theta[1][0]))/sin(theta[1][0]))+
                    p[1][2]*(sin(u*(theta[1][0]))/sin(theta[1][0]));
                V[1][0]=p[1][0]*(sin((1-u)*(theta[1][1]))/sin(theta[1][1]))+
                    p[2][0]*(sin(u*(theta[1][1]))/sin(theta[1][1]));
                V[1][1]=p[1][1]*(sin((1-u)*(theta[1][1]))/sin(theta[1][1]))+
                    p[2][1]*(sin(u*(theta[1][1]))/sin(theta[1][1]));
                V[1][2]=p[1][2]*(sin((1-u)*(theta[1][1]))/sin(theta[1][1]))+
                    p[2][2]*(sin(u*(theta[1][1]))/sin(theta[1][1]));
                V[2][0]=p[2][0]*(sin((1-u)*(theta[1][2]))/sin(theta[1][2]))+
                    p[3][0]*(sin(u*(theta[1][2]))/sin(theta[1][2]));
                V[2][1]=p[2][1]*(sin((1-u)*(theta[1][2]))/sin(theta[1][2]))+
                    p[3][1]*(sin(u*(theta[1][2]))/sin(theta[1][2]));
            }
        }
    }
}

```

```

V[2][2]=p[2][2]*(sin((1-u)*(theta[1][2]))/sin(theta[1][2]))+
    p[3][2]*(sin(u*(theta[1][2]))/sin(theta[1][2]));
alfa[0][0]=acos(V[0][0] * V[1][0] + V[0][1] * V[1][1] + V[0][2] * V[1][2]);
alfa[1][0]=acos(V[1][0] * V[2][0] + V[1][1] * V[2][1] + V[1][2] * V[2][2]);
K1=(sin((1-u)*alfa[0][0])/sin(alfa[0][0]));
K2=(sin(u*alfa[0][0])/sin(alfa[0][0]));
K3=(sin((1-u)*alfa[1][0])/sin(alfa[1][0]));
K4=(sin(u*alfa[1][0])/sin(alfa[1][0]));
alfa[2][0]=acos((K1*V[0][0]+K2*V[1][0])*(K3*V[1][0]+
    K4*V[2][0])+(K1*V[0][1]+K2*V[1][1])*(K3*V[1][1]+K4*V[2][1])+
    (K1*V[0][2]+K2*V[1][2])*(K3*V[1][2]+K4*V[2][2]));
glColor3f(0.0f,0.0f,0.0f);
B1=(sin((1-u)*alfa[2][0])/sin(alfa[2][0]))*
    (sin((1-u)*alfa[0][0])/sin(alfa[0][0]))*
    (sin((1-u)*theta[1][0])/sin(theta[1][0]));
B2=(sin((1-u)*alfa[2][0])/sin(alfa[2][0]))*
    (sin((1-u)*alfa[0][0])/sin(alfa[0][0]))*
    (sin(u*theta[1][0])/sin(theta[1][0]))+(sin((1-u)*alfa[2][0])/sin(alfa[2][0]))*
    (sin(u*alfa[0][0])/sin(alfa[0][0]))*
    (sin((1-u)*theta[1][1])/sin(theta[1][1]))+(sin(u*alfa[2][0])/sin(alfa[2][0]))*
    (sin((1-u)*alfa[1][0])/sin(alfa[1][0]))*
    (sin((1-u)*theta[1][1])/sin(theta[1][1]));
B3=(sin((1-u)*alfa[2][0])/sin(alfa[2][0]))*(sin(u*alfa[0][0])/sin(alfa[0][0]))*
    (sin(u*theta[1][1])/sin(theta[1][1]))+(sin(u*alfa[2][0])/sin(alfa[2][0]))*
    (sin((1-u)*alfa[1][0])/sin(alfa[1][0]))*(sin(u*theta[1][1])/sin(theta[1][1]))+
    (sin(u*alfa[2][0])/sin(alfa[2][0]))*(sin(u*alfa[1][0])/sin(alfa[1][0]))*
    (sin((1-u)*theta[1][2])/sin(theta[1][2]));
B4=(sin(u*alfa[2][0])/sin(alfa[2][0]))*(sin(u*alfa[1][0])/sin(alfa[1][0]))*
    (sin(u*theta[1][2])/sin(theta[1][2]));
glPointSize(2.0);
glBegin(GL_POINTS);{
    float r=0.0,s=0.0,w=0.0;
    r=p[0][0]*B1+p[1][0]*B2+p[2][0]*B3+p[3][0]*B4;
    s=p[0][1]*B1+p[1][1]*B2+p[2][1]*B3+p[3][1]*B4;
    w=p[0][2]*B1+p[1][2]*B2+p[2][2]*B3+p[3][2]*B4;
    glVertex3f(r,s,w);
}
glEnd();
}}
glutSwapBuffers();
}

```

A construção da curva de Bézier de grau 3 na esfera é ilustrada pelas figuras abaixo.

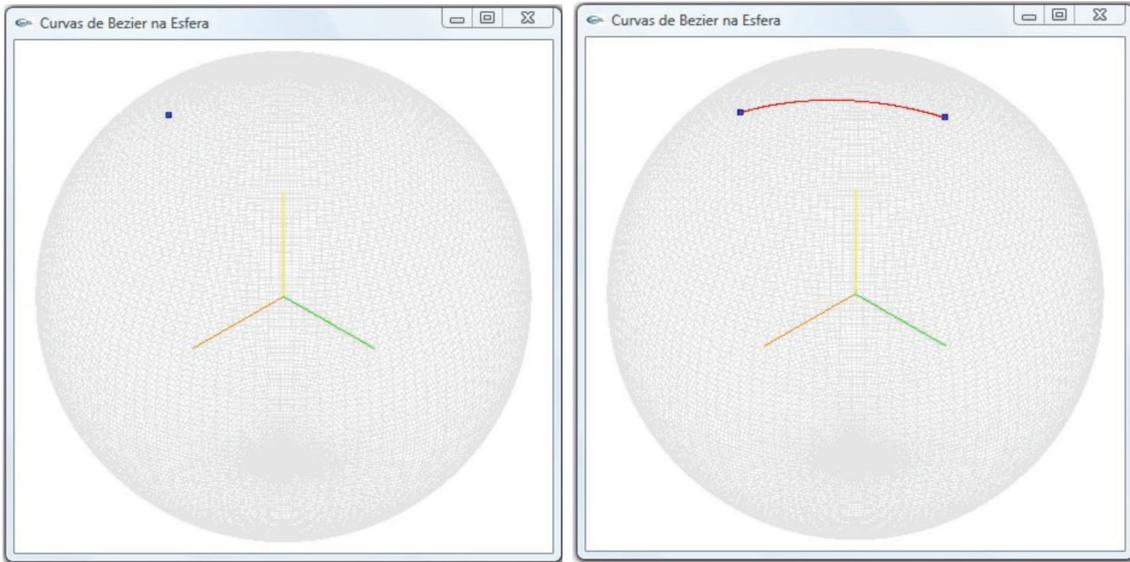


Figura 4.5: Ilustração dos dois primeiros cliques

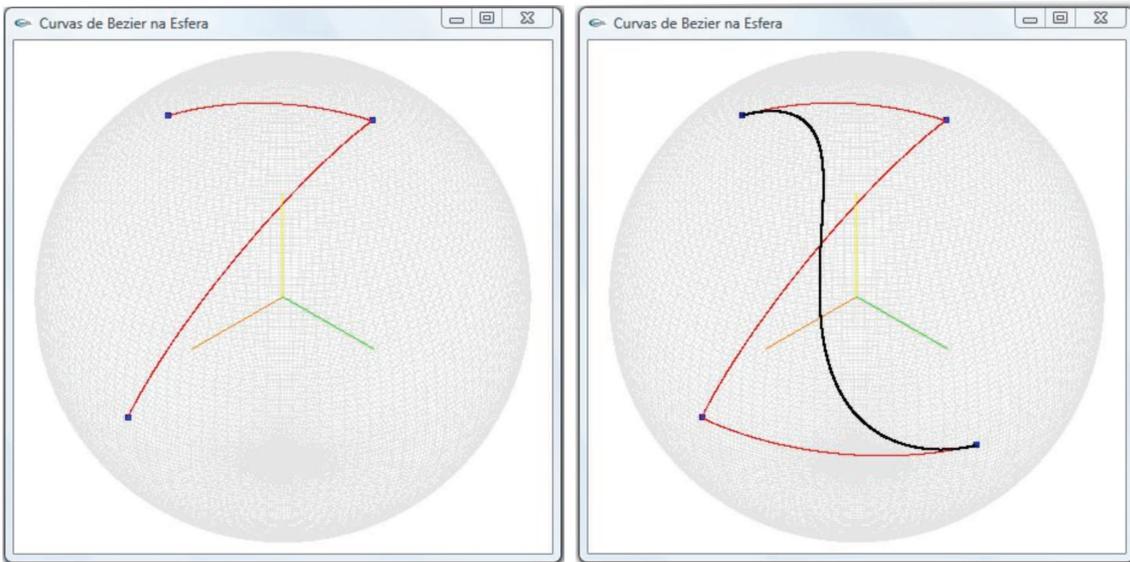


Figura 4.6: Ilustração do terceiro e quarto cliques

As próximas figuras ilustram o funcionamento do trackball virtual, que serve para girar a esfera e assim permitir o acesso a todas as partes dela.

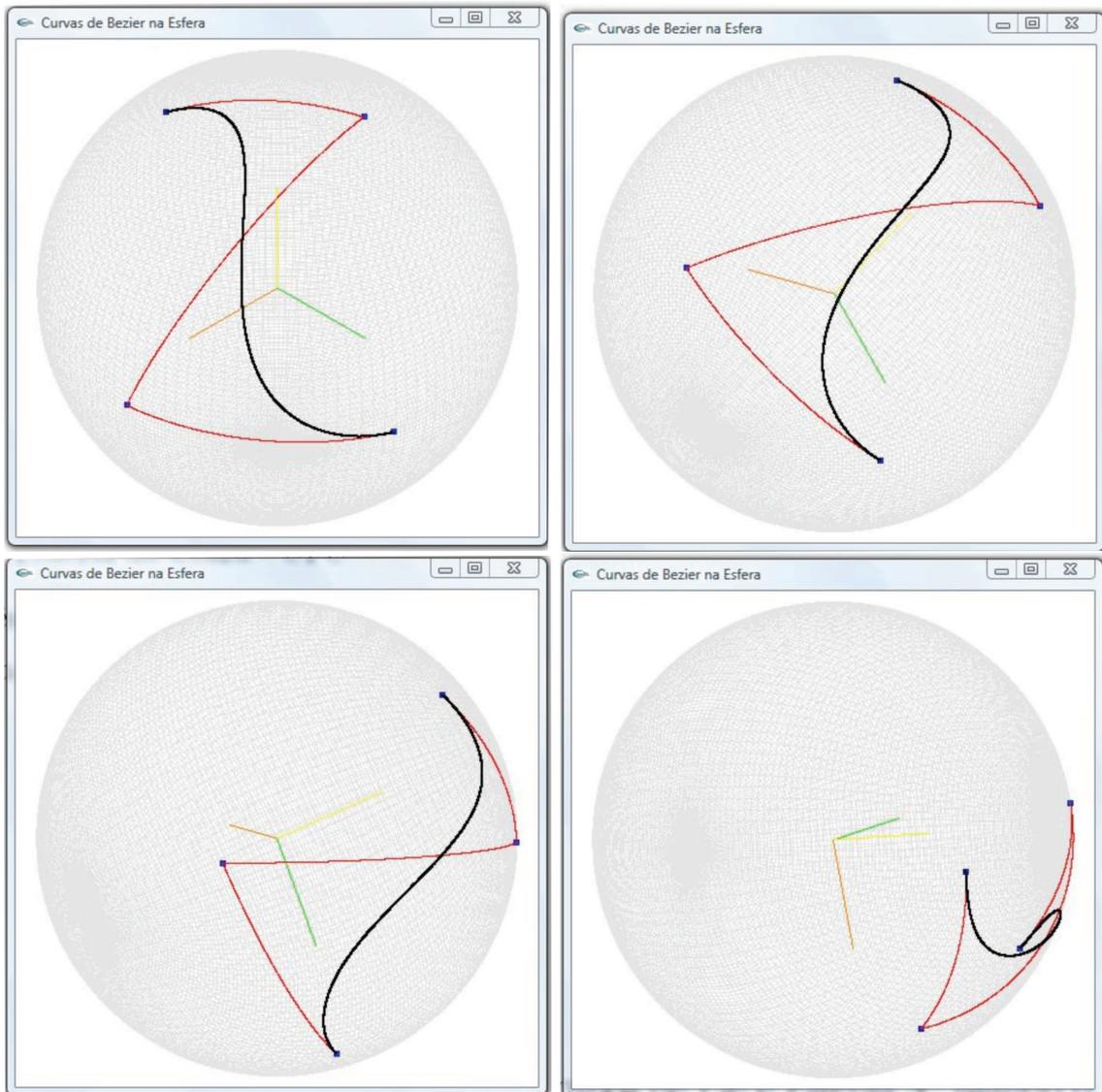


Figura 4.7: Trackball Virtual

E com isso finalizamos as aplicações dos conhecimentos teóricos estudados.

# Referências Bibliográficas

- [1] CARMO, M. do. *Geometria riemanniana*. 3<sup>rd</sup> ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. 331 p. (Projeto Euclides)
- [2] CROUCH, P.; KUN, g.; LEITE, F. Silva. De Casteljau algorithm for cubic polynomials on the rotation group. *Proc. CONTROLLO-96*, v. 2, p. 547-552, 1996.
- [3] CROUCH, P.; KUN, g.; LEITE, F. Silva. The De Casteljau algorithm on Lie group and spheres. *Journal of Dynamical and Control System*. v. 5, n° 3, p. 397-409, 1999.
- [4] CROUCH, P.; KUN, g.; LEITE, F. Silva. Geometric splines. *Proc. 14° IFAC World Congress*, p. 5-9, Beijing: P.R. China, 1999.
- [5] FARIN,g. *Curves and surfaces for CAGD*. 3<sup>rd</sup> ed. San Diego: Academic Press, 1993. 334p.
- [6] GOMES, jonas; VELHO, Luiz. *Fundamentos de computação gráfica*. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. 603 p. (Série de Computação e Matemática)
- [7] PARK, f.; RAVANI, b. Bézier curves on riemannian manifolds and Lie groups with kinematic applications. *ASME J. Mechan. Design* v. 117, p. 36-40, 1995.
- [8] SAN MARTIN, Luiz Antonio Barrera. *Grupos de Lie*. Campinas: Unicamp, 2006. 220 p. (Notas de Aula)

- [9] SATTINGER, d.; WEAVER, o. *Lie groups and algebras with applications to physics, geometry and mechanics*. New York: Springer-Verlag, 1986. 215 p. (Applied Math. Sciences, 61)