



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

RONDINELLY OLIVEIRA

SOBRE CÁLCULO DOS MODOS QUASINORMAIS E DEFLEXÃO DE
LUZ DEVIDO A WORMHOLES E BURACOS NEGROS

FORTALEZA

2021

RONDINELLY OLIVEIRA

SOBRE CÁLCULO DOS MODOS QUASINORMAIS E DEFLEXÃO DE LUZ
DEVIDO A WORMHOLES E BURACOS NEGROS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

Coorientador: Prof. Dr. Davi Monteiro Dantas.

FORTALEZA
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- O51s Oliveira, Rondinely.
Sobre cálculo dos modos quasinormais e deflexão de luz devido a wormholes e buracos negros / Rondinely Oliveira. – 2021.
115 f. : il. color.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2021.
Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.
Coorientação: Prof. Dr. Davi Monteiro Dantas.
1. Buracos negros. 2. Wormholes. 3. Modos quasinormais. 4. Lentes gravitacionais. 5. Condições de energia. I. Título.

CDD 530

RONDINELLY OLIVEIRA

SOBRE CÁLCULO DOS MODOS QUASINORMAIS E DEFLEXÃO DE LUZ
DEVIDO A WORMHOLES E BURACOS NEGROS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 10/09/2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida
(Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Davi Monteiro Dantas - (Co-orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Prof. Dr. Carlos Alex Souza da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da
Paraíba (IFPB)

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Aos Meus Pais e

Amigos

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Carlos Alberto Santos de Almeida pela orientação e do mesmo modo ao Davi Monteiro Dantas pela co-orientação e colaboração com os artigos. Gradeço imensamente aos meus amigos e colegas que me ajudaram e apoiaram: Lorena, Yuri, Davi, Rafael, Diego, Adevaldo, Sophia(prima), Pedro, Matheus, Adaias, Victo, Michel, Tio Flávio, Vó Estefânia, Tia Eliete, Tia Eliane, Romário, Rogério, Leonardo, Jamael, Jamille, Celso, Nathanaell, e Max. Ao CNPq pelo fomento à pesquisa, ao departamento de física e a UFC.

RESUMO

Nosso objetivo nesse trabalho é de estudar algumas propriedades importantes sobre buracos negros e *wormholes*. Entre os aspectos mais importantes que estudamos podemos dividir em dois temas principais. O primeiro diz respeito aos modos de oscilações em sistemas como buracos negros e *wormholes*. Estes sistemas devem emitir as oscilações quando são perturbados por algum campo externo. As amplitudes destas oscilações diminuem com tempo. Tipicamente chamamos estas oscilações de modos quasinormais (MQNs). O segundo aspecto que investigamos, que hoje vem despertando muito interesse dos pesquisadores, são as lentes gravitacionais. Então utilizamos o método semi-analítico WKB de terceira ordem e sexta ordem para calcular os MQNs de algumas métricas abordadas nesse trabalho. Para computar o desvio de luz devido a influência da lente gravitacional, utilizamos o teorema de Gauss-Bonnet quando consideramos pequenos desvios dos ângulos das trajetórias. As duas primeiras soluções que tratamos nesta tese foram construídas com base na chamada gravidade *bumblebee*, onde a presença de campo de violação de Lorentz contribui para a solução das equações de Einstein. A primeira descreve uma solução exata de buraco negro do tipo Schwarzschild e a segunda um *wormhole* transponível, ambos dependentes de um parâmetro de violação λ . No caso da solução de *wormhole* em gravidade *bumblebee* determinamos quais condições de energia são preservadas para sustentar esse tipo de *wormhole*. Ainda determinamos os valores que o parâmetro λ deve assumir, de modo a permitirmos calcular os MQNs usando o método WKB. Para solução de Schwarzschild em gravidade *bumblebee* também foi possível determinarmos os MQNs usando o método WKB de terceira e de sexta ordem. Com o teorema de Gauss-Bonnet encontramos uma expressão do desvio de luz para pequenos ângulos dessa vez na gravidade de Kalb-Ramond. Investigamos ainda duas soluções de buracos negros em rotação calculando expressões dos desvios dos ângulos de deflexão usando uma extensão do teorema de Gauss-Bonnet. A primeira solução descreve um buraco negro de Kerr regular e um buraco negro de Einstein-*bumblebee* em baixa rotação.

Palavras-chave: buracos negros; wormholes; modos quasinormais; lentes gravitacionais; condições de energia.

ABSTRACT

Our goal in this work was to study some important properties about black holes and wormholes. Among the most important aspects we study we can divide them in two main topics. The first concerns the oscillation modes in systems such as black holes and wormholes. These systems must emit oscillations when they are disturbed by some external field. The amplitudes of these oscillations decrease with time. We typically call these oscillations quasi-normal modes QNMs. The second aspect we investigated, which has been attracting a lot of interest from researchers today, was gravitational lenses. Then we used the semi-analytical WKB method of third order and sixth order to compute the QNMs of some metrics addressed in this work. To compute the light deflection due to the influence of the gravitational lens, we use the Gauss-Bonnet theorem when we consider small deviations of the angles of the trajectories. The first two solutions we treat in this thesis were constructed based on the so-called bumblebee gravity, where the presence of Lorentz violation field contributes to the solution of Einstein equations. The first describes an exact black hole solution of the Schwarzschild type and the second a traversable wormhole, both dependent on a λ violation parameter. In the case of the wormhole solution in bumblebee gravity we determine which energy conditions are preserved to sustain this type of wormhole. We also determined the values that the parameter λ must assume, in order to allow us to calculate the QNMs using the WKB method. For the Schwarzschild solution in bumblebee gravity it was also possible to determine the QNMs using the WKB method of third and sixth order. With the Gauss-Bonnet theorem we found an expression of the light deviation for small angles this time in Kalb-Ramond gravity. We further investigate two solutions of rotating black holes by calculating expressions of the deflection angle deviations using an extension of the Gauss-Bonnet theorem. The first solution describes a regular Kerr black hole and an Einstein-Bumblebee black hole in low rotation.

Keywords: black holes; wormholes; quasinormal modes; gravitational lens; energy conditions.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Bairra de potencial tipicamente encontrada em problemas envolvendo buracos negros de Schwarzschild. Observe que o potencial se anula em ambos os infinitos.	25
Figura 2 – Quadrilátero $\infty\Box\infty$ embutido em um espaço-tempo curvo.	32
Figura 3 – Potencial de Regge-Wheeler do tipo sino devido as perturbações escalares, equação (3.72), onde l assume os valores 0, 1, 2, 3 e $b_0 = 1$	54
Figura 4 – Potencial de Regge-Wheeler do tipo sino devido as perturbações eletromagnéticas, equação l (3.81), onde l assume os valores 1, 2, 3 4	56
Figura 5 – Potencial de Regge-Wheeler do tipo sino devido as perturbações gravitacionais, equação l (3.88), onde l assume os valores 2, 3, 4, 5	57
Figura 6 – Desvio de $\delta\phi$ de raio de luz medido por um observador devido a presença de um corpo massivo, com parâmetro de impacto R_0	58
Figura 7 – Geometria da lente para deflexão fraca. Duas geodésicas γ_1 e γ_2 saindo da fonte S e indo em direção ao observador O são desviados por uma lente com centro em L . D_1 e D_2 são dois domínios com curvas de limite γ_L e γ_P	61
Figura 8 – Comportamento geral do ângulo de deflexão como uma função da abordagem mais próxima x_0 . O ângulo de deflexão aumenta como x_0 decresce e diverge em $x_0 = x_m$. Cada vez $\alpha(x_0)$ atinge um múltiplo de 2π , o fóton completa uma volta antes emergir [82].	64
Figura 9 – Representação da região onde as condições de energia são satisfeitas. Todas as condições são válidas para a região escura no intervalo $-\frac{1}{3} < w \leq 1$. (a linha tracejada vertical denota $w = -\frac{1}{3}$). Na região cinza, apenas o WEC está garantido.	72
Figura 10 – Representação da região onde os FOC são atendidos (esquerda). A interseção da energia e da condição de <i>flare-out</i> são indicadas à direita. Todas as condições de energia e <i>flare-out</i> são mantidas na região escura. .	73
Figura 11 – A densidade de energia $\rho(r)$ é sempre positiva para $w = -1$ quando $\lambda > 0$ ou $\lambda < -1$ (painel esquerdo). As condições de <i>flare-out</i> são sempre verificadas para $w = -1$ e $\lambda > -1$ (painel direito).	74

Figura 12	Gráfico da função de forma $b(r)$, sua derivada $\dot{b}(r)$ e a densidade de energia $\rho(r)$, com $w = -1$ e $\lambda = 1$. As linhas retas cinza $y = 0$ e $y = 1$ nos ajudam a verificar o WEC e o FOC, respectivamente.	74
Figura 13	Os potenciais escalar (à esquerda) e gravitacional (à direita) da equação de Regge-Wheeler para alguns parâmetros l e $\lambda = 1$. No caso dos potenciais gravitacionais apenas a partir de $l \geq 2$ estes potenciais são relevantes	76
Figura 14	Gráfico de MQNs para perturbações escalares (esquerda) e gravitacionais (direita) com $\lambda = 1$	77
Figura 15	Domínio temporal $\log_{10}(\varphi(t))$ para as perturbações escalares (esquerda) e gravitacionais (direita) com $\lambda = 1$	77
Figura 16	Ângulo de deflexão da luz em função do parâmetro de impacto b para os valores $\lambda = 1$ e $\lambda = \frac{3}{2}$, com $r_0 = 0.1$	83
Figura 17	Comparação dos ângulos desvios de luz em termos do parâmetro de impacto b para os wormholes de Kalb-Ramond ($\lambda = 1$ e $\lambda = \frac{3}{2}$) e para wormholes de <i>bumblebee</i> , ($\lambda = 0.1$ e $\lambda = \frac{1}{2}$). Notamos que os valores de desvio dos ângulos são mais suáveis para os wormholes de <i>bumblebee</i> . . .	83
Figura 18	O potencial de Regge-Wheeler para o campo escalar no buraco negro de Schwarzschild com alguns valores de l	85
Figura 19	Potencial para campo escalar no buraco negro <i>bumblebee</i> para alguns valores de λ	87
Figura 20	Os QNMs de 6ª ordem para spin $s = 0$ com $l = 1, 2, 3, 4$. O modelo na gravidade <i>bumblebee</i> usamos $\lambda = 0.1$. Os círculos brancos representam os MQNs de <i>bumblebee</i> e quadrados pretos são os MQNs de Schwarzschild. Comparando MQNs em gravidade <i>bumblebee</i> com os valores clássicos do buraco negro de Schwarzschild ($\lambda = 0$). Vemos que os pontos praticamente se superpõe, uma vez que os MQNs em gravidade <i>bumblebee</i> são muito próximos dos valores clássicos de Schwarzschild.	89
Figura 21	Potencial para campo gravitacional no buraco negro <i>bumblebee</i> com alguns valores de λ e $l = 1$	89
Figura 22	Os QNMs de 6ª ordem para spin $s = 2$ com $l = 2, 3, 4, 5$. O modelo em gravidade <i>bumblebee</i> é representado por círculos onde $\lambda = 0.1$ e quadrados pretos são os MQNs de Schwarzschild. Comparando MQNs em gravidade <i>bumblebee</i> com os valores clássicos do buraco negro de Schwarzschild ($\lambda = 0$). Vemos que os pontos praticamente se superpõe, do mesmo modo que no caso escalar $s = 0$. uma vez que os MQNs em gravidade <i>bumblebee</i> são muito próximos dos valores clássicos de Schwarzschild.	91

Figura 23 – A comparação dos potenciais para <i>bumblebee</i> e modelo Einstein-aether com $l = 2$ e $\lambda = c_{13} = 0.6$	92
Figura 24 – Amortecimento escalar (painel esquerdo) e amortecimento gravitacional (painel direito) para $\lambda = 0.1$ e alguns valores de l	94
Figura 25 – Correção do ângulo de deflexão $\delta \alpha_D = \alpha_D _{Schw} - \alpha_D$ para o buraco negro de Kerr Regular em unidades de arcsec, onde usamos o parâmetro fixo $a = 0.2M$	99
Figura 26 – Correção do ângulo de deflexão $\delta \alpha_D = \alpha_D _{Schw} - \alpha_D$ para o buraco negro Kerr em baixa rotação em gravidade <i>bumblebee</i> em unidades de arcsec, onde usamos o parâmetro fixo $a = 0.2M$	104

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – QNMs obtidos pelo método de Leaver, sendo A_{lm} são valores da constante de separação angular, onde fixamos $l = 2$ e $m = 0$	29
Tabela 2 – Sumarização das condições t^a e ξ^b são vetores do tipo tempo k^a é um vetor nulo.	49
Tabela 3 – QNMs para perturbações escalares, vetoriais e gravitacionais usando método WKB de terceira ordem	57
Tabela 4 – Coeficientes da lente gravitacional em campo forte e observáveis para wormhole DS	67
Tabela 5 – Condições de energia e flare-out.	72
Tabela 6 – MQNs para as perturbações escalares (4.27) com $w = -1$, $\kappa = r_0 = \lambda = 1$ e alguns l	76
Tabela 7 – MQNs para as perturbações gravitacionais (4.29) com $w = -1$, $\kappa = r_0 = \lambda = 1$ e alguns l	77
Tabela 8 – Os MQNs para $s = 0$, resultante da referência [63].	86
Tabela 9 – Os MQNs para $s = 2$, resultante da referência[63].	86
Tabela 10 – Os MQNs para perturbações escalares na gravidade <i>bumblebee</i> através do método WKB para $\lambda = 0.1$	88
Tabela 11 – Os MQNs para perturbações gravitacionais na gravidade do <i>bumblebee</i> através do método WKB para $\lambda = 0, 1$	90
Tabela 12 – O comparativo dos MQNs (via método 6 ^o WKB) para perturbações escalares e gravitacionais em Schwarzschild, <i>bumblebee</i> e buraco negro de Einstein-eather. Usamos $l = 2$ e $\lambda = c_{13} = 0.6$	93
Tabela 13 – As correções no ângulo de deflexão $\delta\alpha_D = \alpha_D _{\text{Kerr}} - \alpha_D$ para Sgr A* com $b = 10^3 M$, e variando k e a ; $\delta\alpha_D$ está em unidades de arcsec.	100
Tabela 14 – As correções no ângulo de deflexão $\delta\alpha_D = \alpha_D _{\text{Schw}} - \alpha_D$ para Sgr A* com $b = 10^3 M$, e variando k e a ; $\delta\alpha_D$ está em unidades de arcsec	100
Tabela 15 – As correções no ângulo de deflexão $\delta\alpha_D = \alpha_D _{\text{Kerr}} - \alpha_D$ para Sgr A* com $b = 10^4 M$, e variando a e l ; $\delta\alpha_D$ em unidades de arcsec.	103
Tabela 16 – As correções no ângulo de deflexão $\delta\alpha_D = \alpha_D _{\text{Schw}} - \alpha_D$ para Sgr A* with $b = 10^4 M$, e variando a e l ; $\delta\alpha_D$ em unidades de arcsec.	104

LISTA DE SÍMBOLOS

$\eta_{\mu\nu}$	Métrica do espaço de Minkowsky
$g_{\mu\nu}$	Métrica do espaço curvo
Λ_{ν}^{μ}	Matriz das transformações de Lorentz
g	Determinante da métrica de $g_{\mu\nu}$
$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$	Símbolo de Christoffel
$T_{\mu\nu}$	Tensor energia-momento
B_{μ}	Campo Bumblebee

SÚMARIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	BURACOS NEGROS	18
2.1	MQNs de buracos negros	20
2.1.1	<i>MQNs de buracos negros estáticos</i>	24
2.1.2	<i>MQNs de buracos negros em rotação: Método de Leaver</i>	27
2.2	Desvio de luz	28
2.2.1	<i>Desvio em campo fraco: Método de Gauss-Bonett</i>	29
2.2.2	<i>Desvio em campo forte: Método de Bozza</i>	34
3	WORMHOLES	39
3.1	Modelos de wormholes	40
3.1.1	<i>Wormhole de Ellis</i>	43
3.1.2	<i>Wormhole em rotação</i>	44
3.1.3	<i>Wormhole em gravidade $f(R, T)$</i>	45
3.2	Condições de energia	47
3.3	MQNs de wormholes	49
3.3.1	<i>Método WKB de 3^a e 6^a ordem</i>	52
3.4	Desvio de Luz	58
3.4.1	<i>Desvio em campo fraco: Método de Gauss-Bonett</i>	60
3.4.2	<i>Desvio em campo forte: Método de Bozza</i>	63
4	RESULTADOS TEÓRICOS OBTIDOS PARA WORMHOLES	68
4.1	Wormholes em gravidade com violação espontânea da simetria de Lorentz	68
4.1.1	<i>Wormholes em gravidade bumblebee</i>	69
4.1.2	<i>Condições de energia e flare-out do wormhole em gravidade bumblebee</i>	71
4.1.3	<i>Coordenadas tartaruga e as condições de energia e de flare-out</i>	73
4.1.4	<i>Equação de Regge-Wheeler e MQNs</i>	74
4.1.5	<i>MQNs e o domínio temporal</i>	75

4.1.6	<i>Deflexão de luz pelo teorema de Gauss-Bonnet em gravidade Kalb-Ramond</i>	78
5	RESULTADOS TEÓRICOS OBTIDOS PARA BURACOS NEGROS	84
5.1	MQNs em solução do tipo Schwarzschild em gravidade com violação espontânea da simetria de Lorentz	84
5.1.1	<i>MQNs das perturbações de campos escalares</i>	86
5.1.2	<i>MQNs das perturbações do campo gravitacional</i>	88
5.1.3	<i>O buraco negro de Einstein-aether</i>	90
5.1.4	<i>Órbita circular do fóton</i>	92
5.1.5	<i>Perturbações no domínio temporal</i>	93
5.2	Ângulo de deflexão da luz por buraco negro de Kerr regular .	94
5.2.1	<i>Deflexão de luz por buraco negro de Einstein-bumblebee em baixa rotação</i>	99
6	CONCLUSÃO	105
	REFERÊNCIAS	108

1 INTRODUÇÃO

Os buracos negros e os *wormholes* são os mais exóticos e fantásticos objetos previsto pela teoria da relatividade geral de Einstein. Esses objetos estabelecem uma importante ligação entre gravitação, teoria quântica e termodinâmica. Uma vez que essas teorias estejam interligadas através dessas estruturas podemos buscar argumentos para uma teoria quântica da gravitação. Depois da confirmação da detecção de ondas gravitacionais pela primeira vez em 2015 houve um grande interesse no estudo de teorias de correção, as chamadas teorias da gravidade modificadas. As teorias de gravidade modificadas $f(R, T)$ [180] usam com frequência os conceitos de buracos negros e *wormholes* como campo de teste do seu domínio de validade.

Em 1915 Albert Einstein [171] completa sua teoria da relatividade geral, descrevendo a gravitação como uma consequência da curvatura da geometria do espaço-tempo. Einstein pode fazer previsões com sua teoria recém concluída, como no caso do cálculo do periélio anômalo da órbita de Mercúrio. Já no ano seguinte, 1916, a primeira solução das equações de Einstein foi descoberta pelo físico alemão Karl Schwarzschild. Apesar da complexidade das equações, Schwarzschild partiu de uma métrica genérica, estática e esféricamente simétrica. A solução de Schwarzschild descreve a primeira e mais simples solução de buraco negro, onde esta solução apresenta um ponto singular parcial e um ponto singular absoluto. Hans Reissner ainda no ano 1916 propôs uma solução com carga elétrica não nula e Nordström em 1918 generalizou esse trabalho para cargas arbitrárias, essa solução foi chamada de Reissner-Nordström [86, 87]. David Finkelstein mostrou em 1958 a real natureza das soluções das equações de Einstein, interpretando o horizonte de eventos como uma região de não retorno, nem mesmo para a luz. A solução que descreve um espaço-tempo em rotação foi tratada um pouco mais tarde por Roy Kerr. A solução de Kerr se mostrou uma importante descoberta devido ao fato da grande maioria dos corpos no universo terem momento angular não nulo. Ezra Newman foi capaz de obter a solução completa de espaço-tempo em rotação com carga não nula em 1965, conhecida como solução de Kerr-Newman.

Nos anos de 1960 já se constatava que os buracos negros eram estruturas muito simples, sendo necessários poucos parâmetros para caracteriza-los: a massa M , carga Q e momento angular J . Essa constatação foi sintetizada no teorema *no-hair* [177] em analogia ao fato das as pessoas terem muitos tipos de cabelos, portanto podendo ser caracterizados por muitos parâmetros. Além disso, em 1974 [172] Steven Hawking mostrou que pares de partículas geradas por flutuações quânticas aleatórias do vácuo quando acontece próximas

do horizonte de eventos acaba por absolver uma delas e sua parceira é emitida. Esse processo de emissão de partículas devido ao efeito do horizonte de eventos no vácuo quântico leva a perda de massa do próprio buraco negro e consequentemente atribui uma temperatura ao buraco negro. Hawking também mostrou que uma vez que um buraco negro tenha uma temperatura associada, de modo que pode-se construir leis análogas às da termodinâmica clássica.

A solução das equações de Einstein que representa os *wormholes* representa uma solução tão exótica quanto a solução de buracos negros. *wormholes* podem ser definidos comumente como uma estrutura que conecta dois espaços de Minkowski distintos assintoticamente. Mais adiante veremos com mais detalhes a história do conceito de *wormholes*. Previamente, podemos citar o trabalho de Einstein e Rose de 1935 como um dos mais importantes trabalhos precursores da teoria dos *wormholes*, onde a estrutura descrita por eles ficou conhecida como ponte de Einstein-Rose [4]. Contudo, até a década 1980 todos os trabalhos sobre *Wormholes* até então apresentavam instabilidades nas suas soluções. As pontes de Einstein-Rose não são estruturas estáticas, sua região de garganta se contrai e expande mais rápido do que a luz. Apenas em 1988 é que Michael S. Morris e Kip S. Thorne apresentaram uma teoria de um tipo de *wormhole* esfericamente simétrico, estático e transponível sustentado por matéria exótica [3]. Uma vez que *wormholes* transponíveis do tipo Morris-Thorne exigem que as condições de energia sejam violadas a matéria que sustenta o *wormhole* não pode ser nenhum tipo de matéria usual. Existem atualmente muitos trabalhos que exploram *wormholes* em diversos contextos físicos [7, 8, 19, 11, 112, 14]. Veremos no capítulo 3 de modo mais detalhado algumas métricas de *wormholes*, tais como o *wormhole* em gravidade modificada $f(R, T)$ [34, 35] e *wormhole* em rotação [31, 30]. Discutiremos as condições de energia e a condição de transponibilidade e condição de *flare-out*, com mais detalhes.

Quando corpos como os buracos negros e *wormholes* sofrem algum tipo de perturbação em seus campos, acabam por emitir energia em forma de oscilações gravitacionais. Esses modos de vibrações associados a pequenas perturbações são conhecidos como frequências dos modos quasinormais (MQNs). Sistemas onde as oscilações que se propagam com certa frequência ω acabam por sofrer amortecimentos em suas amplitudes e isso caracteriza os MQNs. Muitos autores vem explorando bastante o conceito de MQNs desde anos de 1950, por estes fornecerem muitas informações sobre os mais variados modelos físicos. Regge e Wheeler foram os pioneiros nos estudos de perturbações em buracos negros. Eles identificaram as equações do tipo onda em uma métrica em *background* de Schwarzschild e posteriormente Zerilli generaliza esse trabalho para outros setores perturbativos [50, 51, 53]. Os MQNs representam soluções das equações perturbativas que

satisfazem as condições de contorno no horizonte e no infinito. Em um espaço-tempo de Schwarzschild classicamente o problema pode ser reduzido a uma equação de onda unidimensional com uma barreira de potencial. Chandrasekhar e Detweiler obtiveram os MQNs pela integração numérica da equação de onda [173]. Não há um método geral para tratarmos os MQNs, na verdade temos muitas dificuldades para computarmos esses modos, devido ao fato do lento decaimento do potencial quando $r \rightarrow \infty$. Então, a forma da métrica juntamente com as condições de contorno ditam como devemos tentar determinar os MQNs. Por isso, existem muitos métodos variados para computarmos os MQNs a partir das equações de onda dependendo das condições de contorno. Temos o método de Pöschl-Teller que usa um potencial que decai exponencialmente como aproximação adequada para facilitar a computação dos MQNs [108]. Um dos mais eficientes e simples métodos de se aplicar é o método WKB, inicialmente desenvolvido Mashhoon [55] e por Schutz e Will [54]. O método WKB é aplicado quando o potencial possui dois pontos de retornos e os valores de ω são computados próximos ao ponto de máximo do potencial $\omega^2 \sim V_{max}$. Mais precisamente temos que expandirmos $\omega^2 - V$ em uma série de Taylor ao redor do ponto de máximo x e resolvermos a expressão para ω . Um método variante do método WKB e bastante poderoso para o cálculo dos MQNs no caso da parte imaginária $\omega_I \rightarrow \infty$ é o chamado método de monodromy [174]. A ideia básica da técnica de monodromy está relacionada ao fenômeno de Stokes na teoria das expansões assintóticas [97]. A técnica das frações continuadas, muito amplamente utilizada para o cálculo dos MQNs, foi desenvolvida inicialmente por Jaffé's 1933 [114] para investigar o espectro do átomo de hidrogênio. Essa técnica foi aplicada a problemas no contexto gravitacional por Leaver [110].

Estudaremos o conceito de lente gravitacional, onde calcularemos os ângulos de desvio das trajetórias dos raios de luz devido ao efeito da lente. A técnica frequentemente aplicada na análise dos desvios de luz é o método de Gauss-Bonnet que pode ser usado tanto para métricas estáticas quanto em rotação. O teorema de Gauss-Bonnet foi aplicado pela primeira vez, para cálculo do ângulo de desvio dos raios de luz, por G. W. Gibbons e M. C. Werner em 2008 [79] devido a um buraco-negro de Schwarzschild. Resumidamente o teorema de Gauss-Bonnet conecta a geometria intrínseca de uma superfície com sua topologia. Os desvios das trajetórias dos raios de luz surgem como um efeito topológico do espaço. Como estamos lidando com geodésicas nulas, definimos a métrica óptica de modo que os termos dessa métrica são aplicados diretamente nas expressões que definem o teorema de Gauss-Bonnet. No caso de métricas de ópticas em rotação usaremos o formalismo de Finsler-Randers [118].

Resumidamente essa tese esta organizada em dois grandes temas básicos:

wormholes e buracos negros, onde dividimos esses temas em quatro capítulos de discussão. Veremos dois capítulos sobre definições gerais das métricas que representam os buracos negros e *wormholes*. Em seguida teremos mais dois capítulos que compila os resultados obtidos sobre *wormholes* e buracos negros, no que se refere ao cálculo dos MQNs e do desvio de luz. No capítulo de *wormholes*, capítulo 3, iniciaremos estudando alguns modelos de *wormholes*, investigando as condições de energia e de transponibilidade. Aplicaremos o método WKB para calcular os MQNs usando um modelo bem simplificado de wormhole com função *redshift* nula. Ainda com base nesse modelo simplificado de *wormhole*, calcularemos os valores do ângulo desvio do raios de luz devido a presença de um campo gravitacional fraco, usando o teorema de Gauss Bonnet. No caso do campo ser forte, onde o raios de luz estão muito próximos do centro da lente gravitacional, usaremos o método de Bozza. No capítulo de buracos negros 2 seguiremos a definição clássica de buracos negros, onde iniciaremos apresentando algumas propriedades fundamentais. Na subseções seguintes calcularemos os MQNs no caso de buracos negros estáticos usando o método WKB e usando o método de Leaver em buracos negros em rotação. Calcularemos os desvios de luz de buracos negros para pequenos desvios do ângulo usando o teorema de Gauss-Bonnet e para grandes desvios usando o método de Bozza. No capítulo 4 apresentaremos a definição de campo *bumblebee* e os resultados inéditos sobre a métrica de um *wormhole* em gravidade *bumblebee* e *wormhole* em gravidade Kalb-Ramond. No caso da gravidade *bumblebee*, determinamos os valores dos parâmetros λ e w necessários para obtermos um wormhole transponível que preserva a maioria das condições de energia. Ainda no contexto da gravidade *bumblebee*, definimos os potenciais de Regge-Wheeler, determinamos os MQNs usando o método WKB de terceira ordem e construímos o perfil de domínio temporal. Na gravidade de Kalb-Ramond, com o teorema de Gauss-Bonnet determinaremos uma expressão analítica do ângulo de desvio em termos do parâmetro de Kalb-Ramond λ . No capítulo 5 apresentamos os resultados inéditos para buracos negros de Schwarzschild em gravidade *bumblebee*, do buraco negro de Kerr regular e do buraco negro de Einstein-*bumblebee* em baixa rotação. Construímos o potencial de Regge-Wheeler e calculamos os MQNs com a técnica WKB de terceira e sexta ordem, nos casos das perturbações escalares e gravitacionais. Então, concluímos determinando os valores aproximados dos ângulos de desvio para as métricas de Kerr regular e de Einstein-*bumblebee*.

2 BURACOS NEGROS

Buracos negros são provavelmente, uma das mais fantásticas e enigmáticas estruturas do universo. A grosso modo, um buraco negro pode ser descrito como uma região do espaço-tempo onde a velocidade de escape do campo gravitacional excede a velocidade da luz. Desde o fim do século *XVIII* o conceito de buraco negro vem sendo debatido. John Michell em 1783 e Pierre-Simon Laplace em 1796 de modo independente propuseram com base na mecânica Newtoniana corpos extremamente compactos com velocidade de escape superior da luz [85]. Para que um corpo de massa M seja suficientemente compacto, seu raio deve ser inferior a

$$R = \frac{2G_N M}{c^2} \quad (2.1)$$

Naturalmente esses corpos compactos, também chamados de estrelas negras, ficaram apenas como um conceito exótico sem interesse real dos pesquisadores até o início do século *XX*.

Somente em 1916, apenas um ano após a publicação da teoria da relatividade de Albert Einstein, Karl Schwarzschild descobriu a mais simples das soluções de buraco negro. A chamada solução do buraco negro de Schwarzschild descreve um corpo massivo estático esfericamente simétrico e sem carga. Ainda em 1916 Hans Reissner encontrou uma solução em um espaço-tempo esfericamente simétrico para caso de uma corpo massivo com carga não nula. A solução encontrada por Reissner lida com uma massa quase pontual carregada. Em 1918 Gunnar Nordström estende essa solução para caso de uma massa esfericamente simétrica carregada, então temos a solução completa de Reissner-Nordström [86, 87]. Somente em 1958 que David Finkelstein interpretou corretamente a solução de Reissner-Nordström mostrando que a singularidade de superfície representa uma região, chamada de horizonte de eventos, na qual os eventos internos não influenciam os eventos exteriores [88].

Encontrar uma solução das equações de Einstein que descreva um espaço-tempo em rotação com carga nula foi devido a Roy Kerr em 1963. Essa solução foi um marco importante uma vez que quase todos os corpos no universo possuem alguma rotação diferente de zero [89]. A solução correspondente para um métrica do espaço-tempo em rotação e carregado foi encontrada por *Ezra Newman* em 1965, conhecida como solução de *Kerr-Newman*.

Uma constatação muito interessante que se chegou sobre os buracos negros foi

que aparentemente eles são estruturas muito simples. Essa conclusão vem do fato de que precisamos de poucos parâmetros para descrever os buracos negros, como a massa M , a carga Q e o momento angular J . Isso leva ao chamado teorema *no-hair* dos buracos negros.

Contudo, em 1974, Stephen Hawking mostrou que devido aos efeitos quânticos que ocorrem a uma distância extremamente próxima ao horizonte de eventos, os buracos negros devem perder massa na forma de radiação térmica. Isso implica que os buracos negros devem ter uma temperatura associada ao seu horizonte de eventos e consequentemente isso leva a uma quantidade não nula de entropia [91, 182]. As propriedades térmicas dos buracos negros, de modo análogo as leis da termodinâmica, podem ser descritas por suas propriedades microscópicas. Então, é possível derivar quatro leis termodinâmicas para os buracos negros com base nos seus parâmetros básicos. A primeira lei afirma que qualquer mudança na massa do buraco negro deve provocar mudanças correspondentes aos demais parâmetros

$$\delta M = \frac{1}{8\pi} \kappa \delta A + \Omega \delta J + \Phi \delta Q, \quad (2.2)$$

onde κ é o termo de superfície gravitacional. A segunda Lei da termodinâmica dos buracos negros diz respeito a área de superfície do horizonte de eventos A não decresce com o tempo $\frac{dA}{dt} > 0$. Essa lei é análoga a segunda lei da termodinâmica sobre o crescimento da entropia S de sistemas fechados.

A terceira lei diz que o termo de superfície gravitacional não pode ser reduzido a zero por um número finito de passos. A terceira lei também é análoga a terceira lei da termodinâmica que impossibilita reduzir a entropia S de um sistema a zero através de um número finito de passos [91, 90]. Assim como era de se esperar, a termodinâmica de buracos negros possui uma lei zero que diz que a superfície gravitacional κ permanece constante no caso de buraco negro estático.

Os buracos negros mais comuns no universo, até onde sabemos, são os buracos negros de massa estelar. Buracos negros como esses devem ter massa tipicamente situada no intervalo de massa solar $3M_0$ a $100M_0$. O limite inferior, representa a massa mínima que um estrela deve ter para se converter em um buraco negro, o chamado de limite de Chandrasekhar [94]. O limite superior depende da fração de elementos pesados que compõem a estrela progenitora do buraco negro. Embora vários modelos proponham buracos negros com massa $M > 150M_0$ [85, 92, 93]. Com base nos estudos de evolução da vida das estrelas devemos esperar que a população de buracos negros de massa estelar na Via Láctea estejam em torno de $10^8 - 10^9$ [95, 85]. Os buracos negros de massa intermediária são aqueles que estão compreendidos no intervalo $\sim 10^2M_0 - 10^5M_0$. E naturalmente

essas massas preenchem o intervalo de massa que existe entre os buracos negros de massa estelar e dos buracos negros supermassivos. Embora esses tipos de buracos negros ainda não tenham sido observados, existem alguns prováveis candidatos como sendo as possíveis fontes de raios X ultra-energéticos. Já os buracos negros supermassivos são aqueles com massa em torno de $10^5 M_0 - 10^{10} M_0$ e são encontrados no centro da maioria das galáxias, inclusive na própria Via Láctea com uma massa estimada em $M = 10^6 M_0$. Ao contrário dos buracos negros de massa estelar que têm como origem o colapso de grandes estrelas, os buracos negros supermassivos não tem sua origem ainda bem compreendida. As observações de galáxias muito distantes mostram que antes do primeiro bilhão de anos do início do universo os buracos negros supermassivos já existiam. O que indica que seu mecanismo de formação deve ser bem distinto de outros tipos de buraco negro. Alguns modelos mostram que os precursores dos buracos negros supermassivos foram devido ao colapso de massivas nuvens de gás primordial e depois devem ter crescido e se fundido com outros buracos negros do mesmo tipo [96]. Recentemente os pesquisadores e colaboradores do *Event Horizon Telescope* conseguiram obter uma imagem da sombra do super buraco negro do centro da galáxia M87.

2.1 MQNs de buracos negros

Os modos de vibração podem ser encontrados em qualquer coisa ao nosso redor. Como exemplos temos as vibrações produzidas por instrumentos musicais, sismos produzidos por placas tectônicas, sismos solares, vibrações moleculares etc. Naturalmente até para corpos exóticos como buracos negros devem produzir modos de vibrações devido a perturbações locais.

Na seção 3.3 estudamos os modos quasinormais (MQNs) produzidos por wormholes, mas os (MQNs) foram primeiramente identificados em buracos negros, analisaremos isso com mais detalhes nessa seção. Um sistema como um buraco negro se torna um sistema dissipativo ao sofrer perturbações devido a presença de um horizonte de eventos. Os MQNs como já vimos são geralmente complexos, onde identificamos a parte real como responsável pelas oscilações e a parte imaginária é responsável pelo amortecimento da amplitude dos modos [97]. Em 1957 Regge e Wheeler inauguraram o campo de estudo das perturbações de buracos negros, eles analisaram uma classe especial de perturbações gravitacionais em uma geometria de Schwarzschild [50]. Como já discutimos na seção 3.3 Zerilli em 1970 estende o trabalho de Regge e Wheeler, estudando perturbações gerais na geometria de Schwarzschild. Zerilli mostrou que a equação perturbativa pode ser decomposta como um sistema de duas equações de onda do tipo de Schrödinger [51]. Temos que citar os importantes trabalhos de Teukolsky para o estudo dos MQNs em buracos negros,

onde as equações perturbativas são desacopladas e separadas no espaço-tempo de Kerr usando o formalismo de Newman-Penrose [98, 99]. Chandrasekhar resumizou o estudo das perturbações dos buracos negros e fazendo relações entre os formalismos distintos, sendo esta uma das melhores referências sobre o assunto [100].

As equações (3.72), (3.81) e (3.88) representam os potenciais associados as equações de onda, devido as perturbações escalares, eletromagnéticas e gravitacionais sofrida para geometria do wormholes. Agora de modo análogo, temos os potenciais correspondentes na geometria dos buracos negros. Podemos aqui ser um pouco mais genéricos e escrever a ação de Einstein-Hilbert em d dimensões com constante cosmológica Λ

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \int d^d x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad (2.3)$$

onde as equações de movimento são agora escritas como

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

Podemos definir também a métrica estática em d dimensões,

$$ds^2 = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-2}^2 \quad (2.5)$$

onde $f(r) = 1 + r^2/L^2 - r_0^{d-3}/r^{d-3}$ e o termo $d\Omega_{d-2}^2$ representa as componentes da métrica em uma esfera de $d - 2$ dimensões. O quadrado do raio de curvatura da esfera em $d - 2$ dimensões está relacionado com a constante cosmológica pela expressão $L^2 = -(d - 2)(d - 1)/2\Lambda$. Então, as equações de movimento dos campos escalares e gravitacionais são escritos como

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \Phi = \frac{d-2}{4(d-1)} \gamma R \Phi, \quad G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

A métrica perturbada é escrita na forma $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{BG} + h_{\mu\nu}$ e o campo $\Phi = \Phi^{BG} + \phi$, no caso de $\Phi^{BG} = 0$ a equação de Klein-Gordom pode ser escrita como

$$\frac{1}{\sqrt{-g_{GB}}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g_{GB}} g_{GB}^{\mu\nu} \partial_\nu \right) = \frac{d(d-2)\gamma}{4L^2} \phi. \quad (2.7)$$

Para separarmos as variáveis da equação (2.7) adotamos a expressão que aproveita a dependência temporal e simetria esférica

$$\phi(t, r, \theta) = \sum_{lm} e^{-i\omega t} \frac{\Psi_{s=0}(r)}{r^{(d-2)/2}} Y_{lm}(\theta). \quad (2.8)$$

Identificamos $Y_{lm}(\theta)$ como o harmônico esférico em d dimensões onde satisfaz a seguinte relação $\Delta_{\Omega_{d-2}} Y_{lm} = -l(l + d - 3) Y_{lm}$, o termo $\Delta_{\Omega_{d-2}}$ é o operador de Laplace-Beltrami.

Logo substituindo a expressão de separação (2.8) na equação (2.7) e após algumas manipulações algébricas, a equação de onda radial devido as perturbações escalares é dada por

$$f^2 \frac{d^2 \Psi_{s=0}}{dr^2} + f f' \frac{d \Psi_{s=0}}{dr} + (\omega^2 - V_{s=0}) \Psi_{s=0} = 0. \quad (2.9)$$

A coordenada tartaruga é escrita como $dx/dr = 1/f$. Então, reduzimos a equação de onda (2.9) para a forma de uma equação de onda radial do tipo de Schrödinger

$$\frac{d^2 \Psi_s}{dr_*^2} + (\omega^2 - V_s) \Psi_s = 0, \quad (2.10)$$

esse termo de potencial é escrito explicitamente na forma

$$V_{s=0} = f \left[\frac{l(l+d-3)}{r^2} + \frac{d-2}{4} \left(\frac{(d-4)f}{r^2} + \frac{2f'}{r} + \frac{d\gamma}{L^2} \right) \right]. \quad (2.11)$$

Se $d = 4$ e $L = 0$, logo recuperamos o caso do potencial escrito na geometria usual de Schwarzschild.

O próximo caso é deduzir o potencial para o caso das perturbações eletromagnéticas $s = 1$. Em $d = 4$ o potencial assume a mesma forma que no caso das perturbações eletromagnéticas dos wormholes [101]

$$V_{s=1} = f \frac{l(l+1)}{r^2}. \quad (2.12)$$

A generalização para d dimensões arbitrárias fornece o seguinte resultado

$$V_{s=1}^d = f \frac{l(l+p-1)}{r^2} + \frac{p(p-2)f}{4r^2} \frac{1}{h} - \frac{p-2}{4r^2} \frac{f}{hr} \left(\frac{f'}{f} - \frac{h'}{h} \right), \quad (2.13)$$

as funções radiais f e h vem do elemento de linha geral $ds^2 = f(r)dt^2 - h(r)dr^2 - r^2 d\Omega_p$ [103]. Uma vez que identificamos $p = d - 2 = 2$ e $h = f^{-1}$ a equação do potencial (2.13) se reduz a (2.12).

Deduzir os potenciais associados as funções de onda no caso das perturbações gravitacionais $h_{\mu\nu}$ é uma tarefa bem mais complicada do que os demais casos que já vimos até agora. É bem comum tratarmos as perturbações em um *background* com número específico de dimensões ao invés do caso geral de n dimensões, como por exemplo no caso da geometria anti-de Sitter em que $d = 4$. Então, partindo da decomposição tensorial em harmônicos esféricos podemos classificar as perturbações em dois tipos: perturbações *odd* (do tipo de Regge-Wheeler) e *even* (do tipo Zerilli) com as paridades $(-1)^l$ e $(-1)^{l+1}$ respectivamente [104, 103].

Fixando o *gauge* de Regge-Wheeler, as perturbações se tornam $h_{\mu\nu} = e^{-i\omega t} \tilde{h}_{\mu\nu}$.

Logo a decomposição no caso de paridade *odd*

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & h_0(r) \\ 0 & 0 & 0 & h_1(r) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0(r) & h_1(r) & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) Y_{lm}(\theta), \quad (2.14)$$

e no caso de paridade *even*

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} H_0(r)f & H_1(r) & 0 & 0 \\ H_1(r) & H_2(r)/f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2K(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2K(r)\sin^2\theta \end{bmatrix} Y_{lm}(\theta). \quad (2.15)$$

Substituindo ambas decomposições diretamente nas equações de Einstein obteremos equações diferenciais de segunda ordem desacopladas que permite encontrar as equações de ondas. Sendo ao todo dez equações que obteremos: três equações devido perturbações do tipo *odd* e sete do tipo *even*. É possível combinar as três equações do tipo *odd* em uma única equação de Regge-Wheeler radial classicamente representada por $\Psi_{s=2}^-$. As equações do tipo *even* são combinadas em uma única equação de Zerilli, de modo que as funções de onda são identificadas como $\Psi_{s=2}^+$. Com alguns cálculos, podemos provar que os potenciais associados as funções de onda de Regge-Wheeler e Zerilli são dados nas seguintes formas

$$V_{s=2}^- = f(r) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right] \quad (2.16)$$

e

$$V_{s=2}^+ = \frac{2f(r)}{r^3} \frac{9M^3 + 3\lambda^2 Mr^2 + \lambda^2(1+\lambda)r^3 + 9M^2\left(\lambda r + \frac{r^3}{L^2}\right)}{(3M + \lambda r)^2} \quad (2.17)$$

onde $\lambda = (l-1)(l+2)/2$. Os parâmetros h_0 e h_1 estão relacionados com as funções de onda $\Psi_{s=2}^-$ pelas expressões

$$\Psi_{s=2}^- = \frac{f(r)}{r} h_1(r), \quad h_0 = \frac{i}{\omega} \frac{d}{dr_*} \left(r \Psi_{s=2}^- \right). \quad (2.18)$$

No livro do Chandrasekhar podemos encontrar demonstrações alternativas dos potenciais (2.16) e (2.17) [100] usando outro tipo de formalismo para tratar as perturbações gravitacionais e da linearização das equações de Einstein. Podemos escrever uma única expressão para o potencial no *background* de Schwarzschild ou Schwarzschild De Sitter(SAdS) em quatro dimensões em termos do spin das perturbações escalar ($s = 0$),

eletromagnética ($s = 1$) e gravitacional ($s = 2$)

$$V_s = f(r) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + (1-s^2) \left(\frac{2M}{r^3} + \frac{4-s^2}{2L^2} \right) \right]. \quad (2.19)$$

Derivações para spins não inteiros e para o caso de campos de Dirac podem ser encontrados na referência [105, 106]. Moncrief apresenta uma outra forma de decomposição das perturbações através de uma invariante de gauge em uma geometria de Schwarzschild, veja [107].

2.1.1 MQNs de buracos negros estáticos

Nessa seção nos dedicaremos a explorar as técnicas de cálculo dos MQNs de buracos negros nos quais as equações de onda das perturbações são do tipo que estudamos na seção 2.1 acima. A extração dos MQNs a partir da solução das equações de ondas das perturbações, equação (2.10), constitui um problema de autovalor onde devem satisfazer as condições de contorno

$$\Psi \sim e^{-i\omega(t+x)}, \quad x \rightarrow -\infty \quad (r \rightarrow r_+). \quad (2.20)$$

Como cada tipo de métrica de fundo produz equações diferenciais com coeficientes distintos, desse modo exigindo soluções bem diversas. Isso impossibilita de termos uma forma sistemática de calcular os MQNs. Das principais técnicas de cálculo dos MQNs a grande maioria trata-se de soluções numéricas. Porém, as poucas soluções analíticas são uma importante fonte aprendizagem sobre natureza dos modos quasinormais de vibração e vale a pena conhecermos algumas delas. Uma das soluções analíticas que podemos encontrar, acontece quando analisamos o caso do potencial de Pöschl-Teller [108]. O potencial de Pöschl-Teller consegue resolver o problema de decaimento lento usando uma expressão que decai exponencialmente e obedece as condições de contorno semelhante ao do caso do potencial de Schwarzschild. Então, consideremos agora a seguinte equação de onda

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \left[\omega^2 - \frac{V_0}{\cosh^2 \alpha(x - \bar{x})} \right] \Psi = 0. \quad (2.21)$$

O ponto \bar{x} é onde o potencial chega no seu máximo consequentemente devemos ter a seguinte condição $dV/dx|_{x=\bar{x}} = 0$. O termo α esta relacionado diretamente com a derivada de segunda ordem do potencial

$$\alpha^2 \equiv -\frac{1}{2V_0} \frac{d^2 V}{dx^2} \Big|_{x=\bar{x}}. \quad (2.22)$$

Este método é comumente usado para determinar os MQNs para métricas do tipo Schwarzschild e Reissner-Nordström. O potencial $V(x)$ na aproximação de Pöschl-Teller deve ter um comportamento de uma barreira de potencial análoga da figura 1. Para computarmos os MQNs na aproximação do potencial de Pöschl-Teller temos que achar a solução da equação (2.21). Com esse intuito usamos a seguinte variável independente $\xi = \left[1 + e^{-2\alpha(x-\bar{x})}\right]^{-1}$ e substituindo na equação (2.21) e obteremos

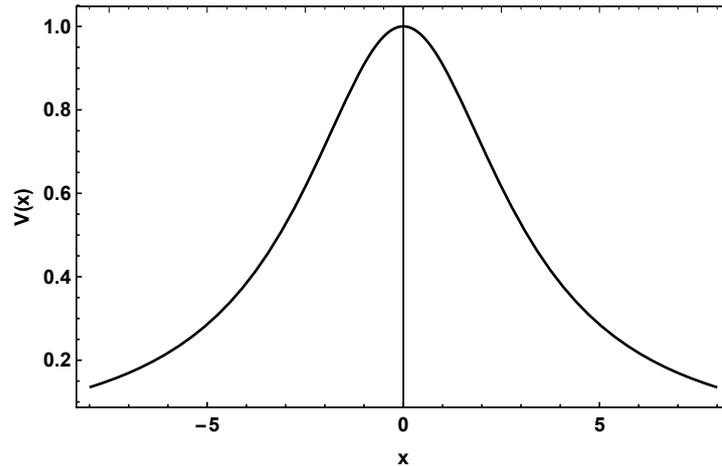


Figura 1: Barreira de potencial tipicamente encontrada em problemas envolvendo buracos negros de Schwarzschild. Observe que o potencial se anula em ambos os infinitos.

$$\xi^2(1-\xi)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - \xi(1-\xi)(2\xi-1) \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \left[\frac{\omega^2}{4\alpha^2} - \frac{V_0}{\alpha^2} \xi(1-\xi) \right] \Psi = 0. \quad (2.23)$$

Na nova variável ξ , as condições de contorno devem satisfazer $1-\xi \sim e^{-2\alpha(x-\bar{x})}$ no infinito e $\xi \sim e^{2\alpha(x-\bar{x})}$ próximo ao horizonte. Agora usamos os seguintes termos $a = \left[\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4V_0} - 2i\omega \right] / (2\alpha)$, $b = \left[\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4V_0} - 2i\omega \right] / (2\alpha)$, $c = 1 - i\omega/\alpha$ e $\Psi = (\xi(1-\xi))^{-i\omega/(2\alpha)} y$ [97] e finalmente obtemos um equação diferencial hipergeométrica

$$\xi(1-\xi) \partial_\xi^2 y + [c - (a+b+1)\xi] \partial_\xi y - aby = 0. \quad (2.24)$$

A equação [59] tem como solução uma combinação de funções hipergeométricas [109, 97]

$$\begin{aligned} \Psi &= A \xi^{i\omega/(2\alpha)} (1-\xi)^{-i\omega/(2\alpha)} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, \xi) \\ &+ B (\xi(1-\xi))^{-i\omega/(2\alpha)} F(a, b, c, \xi), \end{aligned} \quad (2.25)$$

pelas condições de contorno, para se obter os MQNs devemos ter $A = 0$. Após mais algumas manipulações algébricas, finalmente podemos escrever uma expressão analítica

$$\omega = \pm \sqrt{V_0 - \alpha^2/4} - i\alpha(2n+1)/2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

onde n representa os harmônicos mais altos. No caso particular $l = s = 0, 2$ usando a equação (2.26) diretamente obteremos dois exemplos $M\omega = 0.1148 - 0.1148i, 0.3785 - 0.0905i$ [97]. Agora, se olharmos para os valores dos MQNs obtidos através do método numérico, com a mesma configuração $l = s = 0, 2$ encontramos $M\omega = 0.1105 - 0.1049i, 0.3737 - 0.0890i$ [111, 110, 97]. Quando comparamos com o método numérico, o método de Pöschl-Teller se mostra nesse uma boa aproximação. Mesmo no chamado limite *eikonal* onde ($l \rightarrow \infty$), o método ainda apresenta bons resultados. Ainda podemos citar mais uma solução analítica vindo do chamado potencial de Pöschl-Teller duplo, onde temos dois picos de máximos separados por um vale [112].

Um dos mais poderosos e amplos métodos para se determinar os MQNs é o método que se baseia na solução das equações de ondas através de um série de potências, como as series de Frobenius. Por exemplo, em um espaço-tempo do tipo *AdS*, as equações de onda tipicamente exibem dois pontos de singularidades regulares e por isso suas soluções podem ser representadas por uma série de Frobenius. Considerando a equação (2.9) vamos definir a seguinte mudança de função de onda $\Phi = e^{i\omega x}\Psi$

$$f(r)\frac{d^2\Phi}{dr^2} + [f' - 2i\omega]\frac{d\Phi}{dr} - \frac{V}{f}\Phi = 0, \quad (2.27)$$

fazendo em seguida uma mudança de coordenada $y = 1/r$, isso permite lidarmos com um intervalo finito e logo obteremos

$$(y - y_+)s(y)\frac{d^2\Phi}{dy^2} + t(y)\frac{d\Phi}{dy} + \frac{u(y)}{y - y_+}\Phi = 0. \quad (2.28)$$

A solução da equação acima deve ser uma série de Frobenius na forma

$$\Phi(y) = (y - h)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n (y - h)^n, \quad (2.29)$$

sendo o termo $a_n(\omega)$ funções das frequências. E assumindo que possamos escrever as funções $s(y)$, $t(y)$ e $u(y)$ também como séries de potências de y , então substituindo a equação (2.29) na equação (2.28) obteremos a relação de recorrência

$$a_n = -\frac{1}{n(n-1)s_0 + nt_0} \sum_{i=0}^{n-1} [i(i-1)s_{n-i} + it_{n-i} + u_{n-i}] a_i. \quad (2.30)$$

Agora basta computarmos numericamente os coeficientes a_n uma vez feito isso e pela condição de contorno da função de onda Φ ser nula no infinito, podemos escrever

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-h)^n = 0. \quad (2.31)$$

Obteremos os MQNs resolvendo a equação (2.31) em termos de ω até a N -ésima ordem,

onde no trabalho a_0 é um constante de normalização arbitrária. Essa técnica foi usada para computarmos os valores dos MQNs [113].

2.1.2 MQNs de buracos negros em rotação: Método de Leaver

Outro poderoso método de se obter os MQNs é usar o método das frações continuadas. A história de aplicação desse método remonta aos trabalhos de George Jaffé 1933 sobre o espectro da molécula de hidrogênio. As perturbações descritas pelas equações de Teukolsky na geometria de Kerr tem como solução uma equação de onda um tipo equivalente ao encontrado por Jaffé [114]. Leaver aplicou o método de solução em séries tipo de Jeffé diretamente para calcular os MQNs usando a técnica das frações continuadas [110]. Essencialmente o método de Leaver procura definir uma função de onda em termos de uma série que leva em conta as condições de contorno da solução. Desse modo, obteremos os termos de recorrência quando substituimos os termos da série na equação de onda. Como exemplo da aplicação das frações continuadas tomemos a geometria de Kerr, na qual a equação de onda de Teukolsky pode ser separada em uma equação radial e outra angular [99]

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} (1 - u^2) \frac{\partial}{\partial u} \right] {}_s S_{lm} + \left[a^2 \omega^2 u^2 - 2a\omega s u + s + {}_s A_{lm} - \frac{(m + su)^2}{1 - u^2} \right] {}_s S_{lm} = 0 \quad (2.32)$$

$$\Delta_{lm,mm} + (s + 1)(2r - 1)R_{lm,r} + V(r)R_{lm} = 0, \quad (2.33)$$

o potencial é definido como

$$V(r) = \left[(r^2 + a^2)^2 \omega^2 - 2am\omega r + is(am(2r - 1) - \omega(r^2 - a^2)) \right] \Delta^{-1} + [2is\omega r - a^2 \omega^2 - A_{lm}]. \quad (2.34)$$

Partimos de uma solução em série em termos de autofunções angulares

$$S_{lm}(u) = e^{a\omega u} (1 + u)^{k_-} (1 - u)^{k_+} \sum_{p=0}^{\infty} a_p (1 + u)^p, \quad (2.35)$$

onde identificamos o termo $k_{\pm} \equiv |m \pm s|/2$. Substituindo a equação (2.35) na equação (2.33) encontraremos os três termos de recorrência

$$\alpha_0 a_1 + \beta_0 a_0 = 0, \quad \alpha_n a_{n+1} + \beta_n a_n + \gamma_n a_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.36)$$

As constantes α_p , β_p , γ_p são identificadas como diretamente por

$$\begin{aligned}\alpha_n &= -2(n+1)(n+k_1+1) \\ \beta_n &= n(n-1) + 2n(k_1+k_2+1-2a\omega) - [2a\omega(2k_1+s+1) \\ &\quad - (k_1+k_2)(k_1+k_2+1)] - [a^2\omega^2 + s(s+1) + A_{lm}] \\ \gamma_n &= 2a\omega(n+k_1+k_2+s)\end{aligned}\tag{2.37}$$

notamos que o termo de recorrência β_n depende da constante de separação A_{lm} . Nesse caso obteremos os MQNs ω resolvendo a seguinte fração continuada dos termos de recorrência

$$\beta_0 - \frac{\alpha_0\gamma_1}{\beta_1-} \frac{\alpha_1\gamma_2}{\beta_2-} \frac{\alpha_2\gamma_3}{\beta_3-} \dots = 0\tag{2.38}$$

A solução da equação radial poder ser escrita de forma análoga a da equação angular (2.35) levando em conta os pontos singulares regulares da equação de onda. Sendo esses pontos raízes do termo $\Delta \equiv r^2 - r + a^2 = (r - r_+)(r - r_-)$. Usualmente definimos o parâmetro de rotação auxiliar $b = (1 - 4a^2)^{1/2}$ e também o parâmetro $\sigma_+ = (\omega r_+ - am)/b$, com isso escrevemos a solução da radial próximo ao horizonte

$$R_{r_+} = e^{i\omega r} (r - r_-)^{-1-s+i\omega+i\sigma_+} (r - r_+)^{-s-i\sigma_+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^r \left(\frac{r - r_+}{r - r_-} \right)^n.\tag{2.39}$$

Os termos de recorrência podem ser escritos como

$$\alpha_0 d_1 + \beta_0 d_0 = 0, \quad \alpha_n d_{n+1} + \beta_n d_n + \gamma_n d_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots\tag{2.40}$$

Usando agora a equação (2.38) podemos obter os MQNs para equação de onda radial. Sabemos que o método das frações continuadas é bastante poderoso para o cálculo dos harmônicos superiores pois quanto maior o número de recorrência n mais estáveis são as raízes obtidas. Isso torna o método das frações continuadas uma referência para se comparar a precisão dos valores dos MQNs obtidos por outros métodos distintos.

2.2 Desvio de luz

Nas seções (3.4.1) e (3.4.2) analisamos o deflexão de raios de luz devido campo gravitacional na região de campo fraco e em outro extremo o caso do regime de campo de forte. No primeiro caso consideramos que a fonte espalhadora dos raios de luz era um wormhole. Inicialmente observamos regiões onde o campo gravitacional afeta fracamente os raios de luz, de modo que observamos pequenos desvios no ângulo de deflexão. Para esses pequenos ângulos de desvios usamos o teorema de Gauss-Bonnet para computar

a	A_{lm}	ω_1
0.0000	4.00000, 0.00000	0.747343, - 0.177925 i
0.1000	3.99722, 0.00139	0.750248, - 0.177401 i
0.2000	3.98856, 0.00560	0.759363, - 0.175653 i
0.3000	3.97297, 0.01262	0.803835, - 0.171989 i
0.4000	3.94800, 0.02226	0.824009, - 0.164313 i
0.4500	3.93038, 0.02763	0.844509, - 0.156965 i
0.4900	3.91269, 0.03152	0.795319, - 0.147065 i
0.4999	3.90770, 0.03227	0.737985, - 0.143646 i

Tabela 1: QNMs obtidos pelo método de Leaver, sendo A_{lm} são valores da constante de separação angular, onde fixamos $l = 2$ e $m = 0$.

esses valores [79, 76, 78, 115]. No outro caso, vimos como os wormholes afetam os raios que estão suficientemente próximos produzindo grandes desvios na trajetória dos raios. Aplicamos nesse caso o método de bozza que computa os desvios no limite da fotosfera [82, 83, 84]. Ambos os métodos de Gauss-Bonnet como o de Bozza são muito eficientes para aplicações gerais, além de outras vantagens quando comparamos com método padrão de cálculo de trajetórias [74, 116].

Evidente que o teorema de Gauss-Bonnet juntamente com o método de Bozza foram primeiramente aplicados na geometria de buracos negros. Nas próximas duas seções seguintes veremos a aplicação dessas técnicas para algumas métricas de buracos negros. Como já fizemos apresentação do formalismo dos métodos anteriormente podemos, sem prejuízos de definições, aplicar diretamente essas técnicas nesse seção.

2.2.1 *Desvio em campo fraco: Método de Gauss-Bonnet*

Em seu trabalho original Gibbons e Werner aplicaram o teorema de Gauss-Bonnet para uma lente gravitacional devido a um buraco negro. Assumindo que a métrica do buraco negro corresponde a uma métrica estática e esféricamente simétrica composta de um fluido não relativístico perfeito [79]. No caso clássico da métrica de Schwarzschild, o desenvolvimento da equação (3.100) leva a seguinte aproximação

$$\alpha = - \iint_{D_R} K d\sigma \approx \int_0^\pi \int_{b/\sin\phi}^\infty \frac{2M}{r^2} dr d\phi = \frac{4M}{b}, \quad (2.41)$$

esse é o bem conhecido ângulo de deflexão de Schwarzschild no caso de campo fraco.

Vamos agora calcular o ângulo de deflexão devido a outros tipos de métricas diferentes do que já tratamos aqui. Com esse intuito, citamos um trabalho recente de Qi-Ming Fu e seus colaboradores, onde exploram buracos negros carregados eletricamente e magneticamente em uma eletrodinâmica não linear [117]. O elemento de linha estático

e esfericamente simétrico possa ser escrito como

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (2.42)$$

o termo $f(r)$ é definido por

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{aQ^4}{20r^6}. \quad (2.43)$$

Como de costume temos que definir a métrica óptica a partir da métrica original, que aqui pode ser dada na forma genérica

$$dt^2 = dx^2 + \tilde{f}^2(x)d\phi^2, \quad (2.44)$$

agora mudança de coordenada é definida como $dx = \frac{1}{\tilde{f}}dr$ e $\tilde{f}(x) = \sqrt{\frac{r^2}{f}}$. A curvatura Gaussiana pode ser calculada simplesmente substituindo os termos da métrica óptica (2.44) na equação (3.101), logo encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= -\frac{2M}{r^3} \left(1 - \frac{3M}{2r}\right) + \frac{Q^2}{r^4} \left(3 - \frac{6M}{r}\right) + \frac{Q^4}{r^6} \left(2 - \frac{21a}{20r^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{19aM}{10r^3}\right) - \frac{9aQ^6}{10r^{10}} + \frac{3a^2Q^8}{100r^{14}}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Pelos mesmos argumentos que utilizamos na seção 3.4.1 o teorema de Gauss-Bonnet fornece

$$\int \int_{\tilde{D}} \mathcal{K}dS + \int_{C_R} \kappa(C_R)dt = \pi, \quad (2.46)$$

desenvolvendo o termo da curvatura geodésica na mesma forma que foi desenvolvido em [117, 79] é possível escrever

$$\begin{aligned} &\lim_{R \rightarrow \infty} [\kappa(C_R)dt] \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} [-\tilde{f}'(r^*)]d\phi \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{10R^4 (R(R - 3M) + 2Q^2) - 2aQ^4}{R^3 \sqrt{100R^4 (R(R - 2M) + Q^2) - 5aQ^4}} \right) d\phi \\ &= d\phi. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Agora no caso de pequenos desvios do ângulo de deflexão de um buraco negro carregado

no contexto de uma eletrodinâmica não linear é calculada como

$$\begin{aligned}\alpha &= - \int \int_{\tilde{D}} \mathcal{K} dS = - \int_0^\pi \int_{\frac{b}{\sin \phi}}^\infty \mathcal{K} dS \\ &\simeq \frac{4M}{b} - \frac{3\pi Q^2}{4b^2} + \frac{7\pi a Q^4}{128b^6} + \mathcal{O}(M^2, a^2, Q^4),\end{aligned}\quad (2.48)$$

Como vimos antes Gibbons e Werner desenvolveram um método para o cálculo do ângulo de desvio dos raios de luz usando o teorema de Gauss-Bonnet. A técnica consiste de integrações em uma região limitada pelos raios de luz [79]. Posteriormente Werner generalizou a técnica para além das métricas estáticas, empregando um tipo de métrica óptica chamada de Finsler-Randers [118]. Indo mais além, A. Ishihara apresenta as correções finitas do trabalho de Werner em um espaço esfericamente simétrico [119]. Enquanto que T. Ono generaliza para incluir espaços-tempo assimétricos [78]. Usaremos como exemplo do cálculo do ângulo de desvio em métricas ópticas não estáticas um artigo de A. Övgün I. Sakall e J. Saavedraa [121]. A métrica utilizada é definida em um espaço-tempo de Kerr-Newman-Kasuya.

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\Sigma}(dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} [(r^2 + a^2)d\phi - a dt]^2, \quad (2.49)$$

onde o termo Δ

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q_e^2 + Q_m^2, \quad (2.50)$$

e

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (2.51)$$

Aplicando a condição nula $ds^2 = 0$ e resolvendo a métrica KNN em termos de dt

$$dt = \sqrt{\gamma_{ij} dx^i dx^j} + \beta_i dx^i. \quad (2.52)$$

Os índices de γ_{ij} são $(i, j = 1, 2, 3)$, logo obteremos as componentes da métrica óptica no espaço-tempo de KNN na forma

$$d\ell^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = \frac{\Sigma^2}{\Delta(\Sigma - 2Mr)} dr^2 + \frac{\Sigma^2}{(\Sigma - 2Mr)} d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 Mr \sin^2 \theta}{(\Sigma - 2Mr)} \right) \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{(\Sigma - 2Mr)} d\phi^2, \quad (2.53)$$

$$\beta_i dx^i = - \frac{2aMr \sin^2 \theta}{(\Sigma - 2Mr)} d\phi. \quad (2.54)$$

As componentes da métrica $\gamma_{ij} dx^i$ estão definidas ao longo do arco de comprimento l e

considerando que estejamos no plano equatorial ($\theta = \pi/2$)

$$d\ell^2 = \frac{\Sigma^2}{\Delta(\Sigma - 2Mr)} dr^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2Mr}{(\Sigma - 2Mr)} \right) \frac{\Sigma}{(\Sigma - 2Mr)} d\phi^2, \quad (2.55)$$

e o termo

$$\beta_i dx^i = -\omega d\phi, \quad (2.56)$$

onde $\omega = \frac{2aMr}{(\Sigma - 2Mr)} d\phi$. A região definida pelos raios de luz que provem da fonte até receptor encerra uma outra região chamada de quadrilátero ${}^\infty_R \square_S^\infty$. que consiste em uma curva espacial para os raios de luz, duas linhas radiais vindas do receptor R e da fonte S. Um segmento de arco circular C_r de coordenada raio r_C centrado na lente que cruza as linhas radiais através do receptor ou a fonte. Podemos ver a representação da região quadrilátera pela figura 2, este conceito está melhor discutido na referência [120]. O ângulo de deflexão dos raios de luz usando o teorema de Gauss-Bonnet poder ser escrito agora como

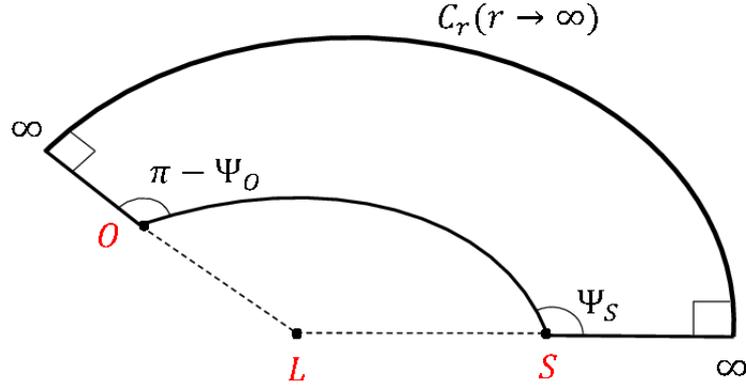


Figura 2: Quadrilátero ${}^\infty_R \square_S^\infty$ embutido em um espaço-tempo curvo.

$$\hat{\alpha} = - \iint_{{}^\infty_R \square_S^\infty} K dS + \int_S^R \kappa_g dl. \quad (2.57)$$

Para determinarmos o valor da integral da equação (2.57) primeiramente devemos determinar o valor da curvatura Gaussiana na aproximação de campo fraco (3.101).

$$K = \frac{R_{r\phi r\phi}}{\det \gamma} = -2 \frac{M}{r^3} - 3 \frac{(-r + 2M) Q_m^2}{r^5} - 3 \frac{(-r + 2M) Q_e^2}{r^5}. \quad (2.58)$$

A curvatura geodésica nesse contexto pode ser determinada por

$$\kappa_g = -\sqrt{\frac{1}{\gamma \gamma^{\theta\theta}}} \beta_{\phi,r} = -\frac{2aM}{r^3}, \quad (2.59)$$

aqui o termo γ é o $\det\gamma$. Logo, podemos computar o termo da contribuição geodésica como se segue

$$\int_S^R \kappa_g d\ell = \int_R^S \frac{2aM}{r^3} d\ell = \frac{4aM}{b^2}, \quad (2.60)$$

onde b é o parâmetro de impacto. Um dos limites do domínio de integração da equação (2.57) é definido pela orbita dos fótons e é comumente obtida pela seguinte relação

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = F(u), \quad (2.61)$$

o termo $u = 1/r$. A função do lado direito da equação (5.26) pode ser escrita na forma geral

$$F(u) = \frac{u^4 \Delta}{(H + Ab)^2 B} [D - 2Hb - Ab^2], \quad (2.62)$$

onde $\Delta = AD + H^2$. Os termos A, B, D e H depende das compontes da métrica (2.49).

Escrevendo os termos diretamente

$$A = \frac{\Delta - a^2}{\Sigma}, \quad B = \frac{\Sigma}{\Delta}, \quad D = \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2}{\Sigma} \quad e \quad H = \frac{a}{2\Sigma}(r^2 + a^2 - a\Delta). \quad (2.63)$$

Para determinarmos o parâmetro u devemos resolver a equação diferencial (2.61) usando uma aproximação na forma

$$u = u_0 + u_1\gamma + u_2\delta + u_3\epsilon + u_4\delta\gamma + u_5\delta\epsilon + u_6\gamma\epsilon + \mathcal{O}(\gamma^2, \delta^2, \epsilon^2) \quad (2.64)$$

os parâmetros são definidos

$$\gamma = \frac{M}{b} \ll 1; \quad \delta = \frac{a}{b} \ll 1; \quad \epsilon = \frac{Q_e^2 + Q_m^2}{b} \ll 1; \quad . \quad (2.65)$$

Substituindo as equações (2.62), (2.63) e (2.64) diretamente na equação (2.61), a solução é encontrada mediante repetidas iterações. Desse modo encontramos a seguinte expressão para a orbita dos fótons

$$u = \frac{\sin\phi}{b} + \frac{M(1 + \cos^2\phi)}{b^2} - \frac{2aM}{b^3}. \quad (2.66)$$

A contribuição da integral da curvatura Gaussiana agora pode ser calculada

$$- \iint_{\mathbb{R}^{\infty} \square_{\mathbb{S}^{\infty}}^{\infty}} K dS = \int_0^{\pi} \int_{\infty}^u K dr d\phi = \frac{4M}{b} - \frac{3Q_e^2}{4b^2} - \frac{3Q_m^2}{4b^2}. \quad (2.67)$$

Finalmente o ângulo de deflexão dos raios de luz no espaço-tempo KNN será obtido pela

soma das contribuições da curvatura Gaussiana, equação (2.60), e da curvatura geodésica, equação (2.67). Isso resulta em na expressão

$$\hat{\alpha} = \frac{4M}{b} - \frac{3Q_e^2}{4b^2} - \frac{3Q_m^2}{4b^2} \pm \frac{4aM}{b^2}. \quad (2.68)$$

O sinal positivo no último termo da equação representa o caso da órbita ser retrógrada e o sinal negativo representa o caso da órbita ser progressiva. O valor do ângulo de deflexão em KNN concorda com o desvio observado para caso do espaço-tempo de Kerr no limite $Q_e = Q_m = 0$. No caso de $a = 0$, os resultados estão de acordo com os do buraco negro não rotativo de dyon [124]. Obteremos o valor para o desvio de Schwarzschild, equação (2.41), quando $a = Q_e = Q_m = 0$.

2.2.2 Desvio em campo forte: Método de Bozza

A técnica de lentes gravitacionais vêm sendo bastante utilizadas no limite de campo forte de buracos negros em diversos trabalhos, especialmente recentemente devido ao *Event Horizon Telescope* (EHT) [127, 128, 129]. Em grande parte dos trabalhos o método de Bozza para o cálculo do ângulo de deflexão no limite de campo forte é empregado [82]. Usaremos dessa vez como campo de teste do método de Bozza a solução de buraco negro de Kerr–Sen não-singular. A métrica de Kerr–Sen representa uma importante solução exata de buraco negro em rotação assimétrico em uma gravidade do tipo de Einstein–Maxwell–axion–dilaton [126]. Essa solução se mostra bastante interessante por pertencer a uma teoria efetiva de cordas heterótica. Jayawiguna usando a transformação de Hassan–Sen consegue obter um buraco negro de Kerr–Sen não-singular [131, 165, 132]. Então a métrica que corresponde ao buraco negro de Kerr–Sen não singular pode ser escrito como [132]

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(1 - \frac{x e^{-\frac{\tilde{k}}{x}}}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dx^2 + \Sigma d\theta^2 - \frac{2ax e^{-\frac{\tilde{k}}{x}}}{\Sigma} \sin^2 \theta dt d\phi + \\ & + \left[x^2 + a^2 + 2\tilde{b}x e^{-\frac{\tilde{k}}{x}} + \frac{x a^2 e^{-\frac{\tilde{k}}{x}}}{\Sigma} \sin^2 \theta \right] \sin^2 \theta d\phi^2, \end{aligned} \quad (2.69)$$

usando as variáveis adimensionais

$$x \rightarrow \frac{r}{2M}, \quad a \rightarrow \frac{a}{2M}, \quad t \rightarrow \frac{t}{2M}, \quad \tilde{k} = \frac{k}{2M}, \quad \tilde{b} = \frac{b}{2M}, \quad (2.70)$$

onde os termos

$$\Sigma = x^2 + a^2 \cos^2 \theta + 2\tilde{b}xe^{-\frac{\tilde{k}}{x}}, \quad \Delta = x^2 + a^2 + 2\tilde{b}xe^{-\frac{\tilde{k}}{x}} - xe^{-\frac{\tilde{k}}{x}}. \quad (2.71)$$

Para computarmos os desvios das trajetórias no limite de campo forte procedemos de modo usual, consideramos que estamos situados no plano equatorial $\theta = \pi/2$, Isso implica que os raios de luz estão confinados no plano, então podemos reescrever a equação (2.69) na forma mais compacta abaixo

$$ds^2 = -A(x)dt^2 + B(x)dx^2 + C(x)d\phi^2 - D(x)dt d\phi \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} A(x) &= 1 - \frac{xe^{-\frac{\tilde{k}}{x}}}{x^2 + 2\tilde{b}xe^{-\frac{\tilde{k}}{x}}}, & B(x) &= \frac{x^2 + 2\tilde{b}xe^{-\frac{\tilde{k}}{x}}}{\Delta} \\ C(x) &= x^2 + a^2 + x^2 + 2\tilde{b}xe^{-\frac{\tilde{k}}{x}} + \frac{xa^2e^{-\frac{\tilde{k}}{x}}}{x^2 + 2\tilde{b}xe^{-\frac{\tilde{k}}{x}}}, & D(x) &= \frac{2axe^{-\frac{\tilde{k}}{x}}}{x^2 + 2\tilde{b}xe^{-\frac{\tilde{k}}{x}}} \end{aligned} \quad (2.73)$$

onde $\Delta = x^2 + a^2 + 2\tilde{b}xe^{-\frac{\tilde{k}}{x}} - xe^{-\frac{\tilde{k}}{x}}$. Definimos o termo x_0 como sendo a mínima aproximação dos raios de luz até o centro da lente gravitacional sem que estes sejam capturados. O ângulo de deflexão das trajetórias dos raios de luz com máxima aproximação x_0 é escrito como

$$\alpha_D(x_0) = I(x_0) - \pi, \quad (2.74)$$

quando não há fonte gravitacional $I(x_0) = \pi$, logo os raios seguem retos. Definimos o último termo explicitamente como

$$I(x_0) = 2 \int_{x_0}^{\infty} \frac{d\phi}{dx} dx = 2 \int_{x_0}^{\infty} P_1(x, x_0) P_2(x, x_0) dx, \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} P_1(x, x_0) &= \frac{\sqrt{B}(2A_0AL + A_0D)}{\sqrt{CA_0}\sqrt{4AC + D^2}}, \\ P_2(x, x_0) &= \frac{1}{\sqrt{A_0 - A\frac{C_0}{C} + \frac{L}{C}(AD_0 - A_0D)}}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Há um certo valor de $x_0 = x_m$ de tal modo que a integral da equação (2.74) diverge e conseqüentemente o ângulo de deflexão também diverge nessa condição. qualquer órbita de um fóton com valor de x_m é instável. A integral da equação (2.75) como acontece

na maioria das vezes não pode ser resolvida analiticamente, admitindo apenas soluções numéricas. O método de Bozza[82] consiste em expandirmos a integral da expressão (2.75) próximo da órbita do fóton para tratarmos a divergência. O procedimento geral que seguimos quando aplicamos o método de Bozza é separar a parte regular da integral da sua parte divergente, para isso definimos uma nova variável

$$z = 1 - \frac{x_0}{x}. \quad (2.77)$$

Reescrevendo o termo $I(x_0)$ como

$$I(x_0) = \int_0^1 R(z, x_0) f(z, x_0) dz, \quad (2.78)$$

onde

$$R(z, x_0) = \frac{2x^2}{x_0} P_1(x, x_0), \quad (2.79)$$

$$f(z, x_0) = P_2(x, x_0). \quad (2.80)$$

Identificamos $R(z, x_0)$ como sendo regular para quaisquer valores de z e x_0 enquanto que $f(z, x_0)$ é irregular em $z = 0$. Com intuito de lidarmos com a divergência de $f(z, x_0)$ fazemos a expansão em série de Taylor em termos da raiz quadrada do argumento $f(z, x_0)$ até segunda ordem de z ,

$$f(z, x_0) \sim f_0(z, x_0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha z + \gamma z^2}} \quad (2.81)$$

onde os termos α e γ são

$$\alpha = \frac{x_0}{C_0} [(C'_0 A_0 - A'_0 C_0) + L (A'_0 D_0 - A_0 D'_0)] \quad (2.82)$$

$$\gamma = \frac{x_0}{2C_0^2} [2C_0(A_0 C'_0 - A'_0 C_0) + 2x_0 C'_0 (C_0 A'_0 - A_0 C'_0) - x_0 C_0 (C_0 A''_0 - A_0 C''_0)] + L \left[\frac{x_0^2 C'_0 (A_0 D'_0 - D_0 A'_0)}{C_0^2} + \frac{(x_0^2/2)(D_0 A''_0 - A_0 D''_0) + x_0 (D_0 A'_0 - A_0 D'_0)}{C_0} \right] \quad (2.83)$$

O valor de x_m é determinado diretamente pelos termos da equação (2.82) quando $\alpha = 0$, então escrevemos explicitamente

$$\begin{aligned}
& 8\tilde{b}^3(\tilde{k} + x) - 8\tilde{b}^2 \left(\tilde{k} + x - x(\tilde{k} + 2x)e^{\tilde{k}/x} \right) + 2\tilde{b} \left(\tilde{k} + x + x^2(\tilde{k} + 5x)e^{2\tilde{k}/x} \right. \\
& \left. - x(\tilde{k} + 7x)e^{\tilde{k}/x} \right) + e^{\tilde{k}/x} \left(2a^2 e^{\tilde{k}/x}(\tilde{k} - x) + 2ae^{\tilde{k}/x}(-\tilde{k} + x)\sqrt{a^2 + x^2 + (-1 + 2\tilde{b})xe^{-\tilde{k}/x}} \right. \\
& \left. + x(-1 + xe^{\tilde{k}/x}(\tilde{k} + x(-3 + 2xe^{\tilde{k}/x})) \right) = 0
\end{aligned} \tag{2.84}$$

A maior das raízes positivas da equação (2.84) fornece o valor de x_m em termos de a , \tilde{k} and \tilde{b} . Dividindo a integral $I(x_0)$ em uma parte regular e singular

$$I(x_0) = I_D(x_0) + I_R(x_0), \tag{2.85}$$

com

$$I_D(x_0) = \int_0^1 R(0, x_m) f_0(z, x_0) dz, \tag{2.86}$$

$$I_R(x_0) = \int_0^1 [R(z, x_0) f(z, x_0) - R(0, x_0) f_0(z, x_0)] dz. \tag{2.87}$$

A integral da equação (2.86) tem uma divergência logarítmica em $x_0 = x_m$, isso permite que possamos resolver a equação analiticamente

$$I_D(x_0) = \frac{2R(0, x_m)}{\sqrt{\gamma}} \log \left(\frac{\sqrt{\gamma + \alpha} + \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha}} \right), \tag{2.88}$$

Agora a equação (2.87) sem divergência pode ser resolvida pela expansão em série de potências de $(x_0 - x_m)$

$$I_R(x_m) = \int_0^1 [R(z, x_m) f(z, x_m) - R(0, x_m) f_0(z, x_m)] dz. \tag{2.89}$$

Logo devido as equações (2.88) e (2.89) podem ser usadas para determinarmos o ângulo de deflexão

$$\alpha_D(\theta) = -p \log \left(\frac{\theta D_{OL}}{u_m} - 1 \right) + q + \mathcal{O}(u - u_m), \tag{2.90}$$

θD_{OL} é a distância da lente ao observador e os coeficientes p e q no limite de campo forte podem ser escritos como

$$p = \frac{R(0, x_m)}{2\sqrt{\gamma_m}}, \quad \text{and} \quad q = -\pi + I_R(x_m) + p \log \frac{cx_m^2}{u_m^2}. \tag{2.91}$$

O termo p pode ser explicitamente expresso pelas componentes da métrica

$$p = \frac{x_m^{3/2}}{\sqrt{\left(a^2 \frac{e^{\tilde{k}/x_m}}{c_1-1} + x_m\right) \left(a^2(1 + 1/c_1) + x_m c_1 e^{\tilde{k}/x_m}\right) \gamma_m}}, \quad (2.92)$$

onde

$$c_1 = 2b + x_m e^{\tilde{k}/x_m}. \quad (2.93)$$

No limite $a \rightarrow 0$, $\tilde{k} \rightarrow 0$, and $\tilde{b} \rightarrow 0$ devemos recuperar os valores dos coeficientes para o caso particular do buraco negro de Schwarzschild $p = 1$ e $q = -0.4002$. Por outro lado no limite $\tilde{b} \rightarrow 0$ and $\tilde{k} \rightarrow 0$ os valores se tornam $p = 1.090$ e $q = -0.4887$. Se tivermos agora $\tilde{b} \rightarrow 0$ os valores de p e q são 1753 e -0.55412, representando o caso dos buracos negros não-singulares [132]

3 WORMHOLES

Nesse capítulo iremos definir e explorar as principais propriedades dos *wormholes*. Uma vez que as equações de campo gravitacional que descrevem os *wormholes* devem satisfazer condições específicas para que sejam transponíveis. Dentre as principais condições que iremos explorar temos a condição de garganta, a chamada de condição de *flare-out* e as condições de energia. Apesar dos *wormholes* não terem sido confirmados experimentalmente ainda, muitos trabalhos vêm explorando suas propriedades com interesse crescente.

wormholes são um tipo exótico de solução das equações de Einstein, semelhantes às soluções de buracos negros, mas sem a presença de singularidades. *Wormholes* podem ser definidos como uma deformação no espaço-tempo que conecta duas regiões distintas e usualmente distantes uma outra. A primeira concepção de *wormhole* foi atribuída ao físico austríaco Ludwig Flamm em 1916. Flamm encontrou uma solução de buraco negro reversa no tempo, o ainda hipotético buraco branco. Nesse cenário, um buraco branco pode estar conectado a um buraco negro por um túnel no espaço-tempo[6].

Posterior ao trabalho Flamm A. Einstein e N. Rose em um trabalho de 1935, propuseram uma nova solução das equações da gravidade. As equações dessa solução descrevem duas regiões distintas conectadas através de dois pontos. Essa solução ficou conhecida como *ponte de Einstein-Rose* [4]. Posteriormente, C. W. Misner e J. A. Wheeler explorando as equações da ponte de Einstein-Rose no contexto do eletromagnetismo, mostraram que essa solução era instável [5]. Então *wormholes* deste tipo não permitiriam que nada pudesse atravessar seu interior de uma lado para o outro, nem mesmo próprios fótons de luz.

Kip S. Thorne e Michael S. Morris em 1988 foram os primeiros a considerar um *wormhole* atravessável [3]. Eles definiram as condições de energia necessárias para estabilidade da solução. Mais especificamente, as condições de energia usuais são violadas de modo que a matéria com essas condições específicas é chamada de matéria exótica. A matéria exótica tem a propriedade de ter densidade de energia e pressão negativa, ela se repele ao invés de atrair. Embora a existência da matéria exótica ser ainda especulativa, muitos trabalhos foram feitos com base nessa premissa [7]. Alguns fenômenos físicos servem como bom exemplo de possíveis fontes para *wormholes*. Em um desses fenômenos é possível produzir densidade de energia negativa através das flutuações quânticas de vácuo, o chamado efeito Casimir [1]. Dévido as essas flutuações quânticas aleatórias de vácuo, uma infinidade de wormholes, da ordem da escala de Planck, devem ser produzidos e

aniquilados a todo instante. Contudo, é possível que no período inflacionário do universo, alguns desses *wormholes* devem ter expandindo até nas escalas macroscópicas [9].

Atualmente muitos trabalhos têm dedicado a explorar maneiras de detectar diversos tipos de *wormhole*, como emissão de ondas gravitacionais [12, 112], lentes gravitacionais e traços em radiação cósmica de fundo [10, 11, 19]. Outras ferramentas de natureza teórica usadas para explorar propriedades dos *wormholes*, como os modos quasinormais devido a pequenas perturbações locais [16, 18, 17]. Esses modelos serão investigados com mais detalhes ao longo da tese.

3.1 Modelos de wormholes

Como dito anteriormente, os primeiros modelos de *wormholes* não permitiam que nenhuma partícula pudesse atravessar sua região de garganta. Esses wormholes também eram chamados de *wormhole* de Schwarzschild não transponível. Isso era devido ao fato de que a ponte Einstein-Rose possui uma força de maré da mesma ordem da maré gravitacional do horizonte de eventos de um buraco negro de massa estelar. Além disso, a garganta contrai e expande de modo extremamente rápido [3]. Já no caso dos wormholes transponíveis e que além disso tenham força de maré equiparável a intensidade do campo gravitacional da terra, podem ser construídos a partir das métricas predefinidas nos trabalhos [19, 20]. Desse modo, Thorne e Morris definiram a métrica do *wormhole* transponível como:

$$ds^2 = e^{2\phi} dt^2 - \frac{dr^2}{f(r)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \quad (3.1)$$

onde o termo $f(r) = 1 - \frac{b(r)}{r}$, $b(r)$ é a função forma e $\phi(r)$ é a função redshift. A função forma $b(r)$ nos diz as condições da região de garganta, devendo essa função obedecer a seguinte condição $b(r_0) = r_0$, o termo r_0 é o raio mínimo que a garganta pode assumir. Essa condição de raio mínimo de garganta que garante a inexistência de singularidades.

Naturalmente a equação (3.1) se reduz a métrica de Minkowski no caso da coordenada radial r tendendo ao infinito, de modo que podemos escrever

$$\frac{b(r)}{r} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \phi(r) \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

A função redshift $\phi(r)$ regula a força de maré através da garganta do wormhole. Dependendo da escolha da função redshift podemos ter um wormhole de fácil ou de extrema dificuldade de se transpor. Na maioria trabalhos consideramos $\phi(r)$ tendo valor nulo, isso simplifica bastante nossas análises. Uma vez que a função forma $b(r)$ não está diretamente relacionando com a função *redshift* $\phi(r)$.

Para construirmos a função forma e redshift tal que a condição de transponibilidade do *wormole* seja satisfeita, devemos expressar as componentes do tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ em termos de $b(r)$ e $\phi(r)$. Como padrão representamos a distribuição de matéria e energia do *wormole* pelo tensor geral anisotrópico [181]:

$$T_{\nu}^{\mu} = (\rho + P_t)u^{\mu}u_{\nu} - P_t\delta_{\nu}^{\mu} + (P_r - P_t)\eta^{\mu}\eta_{\nu}. \quad (3.3)$$

Considerando a relação $u^{\mu}u_{\mu} = -\eta^{\mu}\eta_{\mu} = 1$, onde o termo η^{μ} é definido como quadrivetor do tipo espaço unitário. Os termos P_r and P_t são as pressões radial e transversal.

Substituindo a equação da métrica (3.1) e as componentes do tensor energia-momento (3.3) nas equações de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (3.4)$$

então obteremos os termos da densidade e pressões em termos das funções forma e redshift

$$8\pi\rho = \frac{b'(r)}{r^2}, \quad (3.5)$$

$$8\pi P_r = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2\phi'(r)}{r}\right) - \frac{1}{r^2}, \quad (3.6)$$

$$8\pi P_t = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \phi''(r) + \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \phi'^2(r) + \frac{1}{2} \left(\frac{b(r)}{r^2} - \frac{b'(r)}{r}\right) \phi'(r) + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \phi'(r) + \frac{1}{2r} \left(\frac{b(r)}{r^2} - \frac{b'(r)}{r}\right). \quad (3.7)$$

Notamos que a densidade de energia está diretamente relacionada com a derivada em r da função forma. Podemos citar alguns trabalhos, onde usam funções densidade de energia para construir seus modelos [22, 23, 21]. Enquanto que as pressão radial e transversal são bem mais complicadas, onde as funções forma, redshift e suas derivadas estão acopladas. Devido às equações (3.6) e (3.7) é possível encontrar uma única equação geral que relaciona as pressões com $b(r)$ e $\phi(r)$,

$$8\pi(P_r - P_t) = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \left[-\phi''(r) - \phi'^2(r) + \frac{\phi'(r)}{r} + \frac{1}{r^2}\right] + \left(\frac{b'(r)}{r} - \frac{b(r)}{r^2}\right) \left(\phi'(r) + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r^2}. \quad (3.8)$$

Devido a equação (3.8) é possível encontrar várias soluções para as métricas do *wormole* transponível, embora essa equação seja uma equação diferencial não linear. Dependendo da escolha de uma das funções (p_r , p_t , $b(r)$, $\phi(r)$) podemos desacoplar a equação diferencial e simplificar bastante o problema. Vamos seguir uma das rotas mais simples possíveis, consideraremos uma distribuição de matéria e energia isotrópicas.

Nessa situação podemos ter $p_r = p_t$ e a função redshift é escolhida como uma função de potências, como por exemplo $\phi(r) = Ar^\alpha + Br^\beta$, com $\alpha \neq \beta$. Então a equação (3.8) pode ser reduzida à uma expressão em termos de potências de r . Trabalhando os parâmetros α, β, A e B podemos tentar uma solução para a $b(r)$ que satisfaça as condições de transponibilidade.

Contudo, de modo geral, para a grande maioria das funções redshift que satisfazem a condição ($\phi \rightarrow 0$, para $r \rightarrow \infty$) encontraremos um $b(r)$ como solução da equação (3.8) que nem sempre condiz com *wormhole* transponível. Dependendo do modelo de gravidade que estamos analisando é possível impor condições de transponibilidade para as soluções analíticas que encontrarmos[16, 24].

Além da condição de garganta ser requerida para existência do wormhole precisamos definir a condição de *flare-out* para garantir a transponibilidade. Para isso, consideremos o espaço-tempo com tempo constante $t = const$. Desse modo a equação da métrica (3.1) pode ser escrita

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} - r^2 d\phi^2, \quad (3.9)$$

considerando que estejamos localizados na região equatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$. Agora, o espaço geométrico que une as duas superfícies Euclidianas pode ser considerado imerso em um espaço Euclidiano tridimensional. Usando coordenadas cilíndricas para descrever a métrica desse espaço Euclidiano

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (3.10)$$

Sendo $z = z(r)$ e o elemento de linha pode ser escrito na forma

$$ds^2 = \left[\left(\frac{dz}{dr} \right)^2 + 1 \right] dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (3.11)$$

comparando a equações (3.10) e (3.11) chegamos a expressão

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left(\frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{-1/2}. \quad (3.12)$$

Da equação (3.12) é fácil ver que uma das condições para que o wormhole seja atravessável é necessário que

$$\frac{r}{b(r)} - 1 > 0, \quad \text{ou} \quad \dot{b}(r) < 1. \quad (3.13)$$

É interessante mostrar que a condição *flare-out* implica diretamente na natureza da matéria fonte que mantém o *wormhole* estável e atravessável. Para isso devemos derivar uma expressão adimensional a partir das equações (3.5) e (3.6) na forma

$$\varsigma = \frac{P_r - \rho}{|\rho|} = \frac{1}{|\dot{b}(r)|} \left(\frac{b(r)}{r} - \dot{b}(r) - 2(r - b(r))\dot{\phi} \right) \quad (3.14)$$

Como dissemos antes, um *wormhole* estável deve satisfazer a condição de *flare-out* e a condição de garganta, o que significa que a coordenada radial r deve aumentar quando z aumenta. Isto é o chamado de alargamento da garganta, para garantir isso devemos ter

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{b(r) - \dot{b}(r)r}{2b(r)^2} > 0, \quad (3.15)$$

comparando as equações (3.15) e (3.14)

$$\varsigma = \frac{2b(r)^2}{r|\dot{b}(r)|} \frac{d^2 r}{dz^2} - 2(r - b(r)) \frac{\dot{\phi}}{|\dot{b}(r)|}. \quad (3.16)$$

Quando consideramos a região do mínimo de garganta r_0 o termo $(r - b(r))$ da equação (3.16) se anula, então logo obteremos

$$\varsigma_0 = \frac{p_r - \rho_0}{|\rho_0|} > 0. \quad (3.17)$$

O parâmetro adimensional, equação (3.17), é estritamente positivo. Logo temos o vínculo $p_r > \rho$, isso mostra que a tensão na região do raio da garganta excede a densidade de matéria e energia. Por isso que a matéria que funciona como fonte para sustentar um *wormhole* transponível deve ser uma matéria ‘exótica’. Esse vínculo também permite a densidade de energia e matéria seja negativa, o que no mínimo é um resultado curioso e problemático[3]. Então, em trabalhos posteriores os pesquisadores se ocuparam em desenvolver modelos de *wormholes* transponíveis sem a necessidade da presença de matéria exótica [28, 102, 27, 14]. Vamos em seguida explorar alguns dos tipos mais pesquisados e que também contornam o problema da matéria exótica

3.1.1 *Wormhole de Ellis*

O *wormhole* de Ellis é um dos tipos de *wormholes* transponíveis obtido a partir de um tipo de campo escalar chamado de campo fantasma ψ na qual os termos da gravidade de Einstein estão acopladas ao campo fantasma, de modo que a ação pode escrita na forma [19, 19, 29]

$$S = \frac{1}{8\pi} \int d^4 x \sqrt{-g} (R + 2g^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi) . \quad (3.18)$$

A variação da ação leva as equações de campo a serem escritas na forma

$$R_{\mu\nu} = -2\partial_\mu\psi\partial_\nu\psi, \quad (3.19)$$

nesse cenário a equação escalar do campo fantasma assume a forma

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\psi) = 0. \quad (3.20)$$

O elemento de linha do *wormhole* de Ellis é simplesmente expresso por

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (a^2 + r^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.21)$$

o termo a é usado para representar o raio da garganta.

3.1.2 Wormhole em rotação

É possível generalizar o *wormhole* de Thorne Morris incluindo um fator temporal. Para isso fazemos uso de um termo conforme $\Omega(t)$ na métrica original (3.1)

$$ds^2 = e^{\Omega(t)} \left[e^{2\phi} - \frac{dr^2}{f(r)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right]. \quad (3.22)$$

Esse fator adicional confere a propriedade de expansão com tempo do wormhole de modo que seria possível que um *wormhole* da ordem da escala de Planck poderia ser expandido para as escalas macroscópicas, durante o período inflacionário do universo [31]. Notavelmente, esse tipo de wormhole exibe a propriedade de alguém que cruze o wormhole acabe não vendo nenhuma condição de energia sendo violada, desde que esse wormhole se expanda rápido o bastante [31, 30]. Contudo podemos ser mais gerais com relação a métrica de *wormhole* em rotação, usando uma métrica geral estacionária e assimétrica

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2g_{t\phi} dt d\phi + g_{\phi\phi} d\phi^2 + g_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.23)$$

onde definimos os índices $i, j = 1, 2$ e assumem r, θ . A métrica (3.1.2) pode ser adaptada dependendo do problema que estamos tratando. Logo, se consideramos um sistema de coordenadas esféricas em que $g_{22} = g_{\theta\theta}/\sin^2(x^2)$. Então, é possível deduzir uma métrica explícita para o *wormhole* em rotação. O primeiro a estudar uma métrica geral estática e axialmente simétrica foi Edward Teo [30]. Ele definiu essa métrica na forma

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b_0}{r}} + r^2 H^2 \left[d\theta^2 + \sin^2\theta (d\phi - \omega dt)^2 \right]. \quad (3.24)$$

As variáveis tem seus limites definidos como se seguem $-\infty < t < +\infty$, $b_0 \leq r < +\infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ e os termos explicitamente são escritos como

$$N = H = 1 + \frac{d(4a \cos \theta)^2}{r}, \quad (3.25)$$

$$\omega = \frac{2a}{r^3}. \quad (3.26)$$

O termo ω é a velocidade angular do *wormhole* e esta diretamente relacionado com o momentum angular a . A métrica (3.24) representa uma extensão para a métrica de *wormhole* de Thorne e Morris, onde recuperamos a equação (3.1) no caso de $N = H = 1$, e $\omega = \text{const.}$ A função forma desse wormhole em rotação ainda deve satisfazer a condição de garganta $b(r_0) = r_0$ e a condição de flare-out. E de modo análogo ao *wormhole* estático, esse tipo de *wormhole* em rotação também viola as condições de energia.

Se *wormholes* ocorrem naturalmente, então é de se esperar que tais estruturas estejam em rotação assim como os buracos negros. Vários artigos vêm explorando muitos outros aspectos dos *wormholes* em rotação [32, 112], embora essa métrica seja bem mais complicada de se trabalhar em comparação a sua versão estática. Como exemplo de trabalho sobre *wormholes* em rotação temos Pablo Bueno e seus colaboradores que exploraram os ecos de ondas gravitacionais produzidos por *wormholes* semelhantes aos buracos de negros de Kerr [112]. Já Elena Caceres, Anderson Seigo Misobuchia e Ming-Lei Xiao definem as propriedades de wormholes em rotação em um cenário AdS. Rajibul Shaikh calcula uma importante propriedade que está presente também em buracos negros, a sombra delimitada pelas órbitas de fótons mais internas ainda estáveis [179].

3.1.3 Wormhole em gravidade $f(R, T)$

Outro campo de estudo sobre *wormholes* transponíveis muito importante é o que usa modelos de gravidade modificada. Muito desses modelos de gravidade modificada são funções de tensor de curvatura R e energia momentum T , geralmente denotados por $f(R, T)$. Modificações no tensor energia momento podem permitir que *wormholes* sejam sustentados sem a necessidade de matéria exótica [14]. A ação que estende a teoria da gravidade usual é escrita como [34, 35]

$$S = S_G + S_m = \frac{1}{16\pi} \int f(R, T) \sqrt{-g} d^4x + \int \sqrt{-g} \mathcal{L} d^4x. \quad (3.27)$$

O tensor energia momento é escrito em termos da densidade Lagrangiana \mathcal{L} da contribuição dos termos de matéria

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}}. \quad (3.28)$$

A variação funcional da ação, equação (3.27), em relação a métrica $g^{\mu\nu}$ obteremos as equações gerais de campo modificadas

$$f_R(R, T)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R, T)g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)f_R(R, T) = 8\pi T_{\mu\nu} - f_T(R, T)T_{\mu\nu} - f_T(R, T)\Theta_{\mu\nu} \quad (3.29)$$

onde o termo $\Theta_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}\frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}}$. Ainda temos que definir os seguintes termos

$$f_R(R, T) \equiv \frac{\partial f(R, T)}{\partial R} \text{ e } f_T(R, T) \equiv \frac{\partial f(R, T)}{\partial T}. \quad (3.30)$$

Note que no caso de $f(R, T) = R$, obteremos as equações da gravidade clássica de Einstein. Podemos selecionar como exemplo um modelo específico e encontrar as equações que relacionam a função forma $b(r)$ com os termos de densidade e das pressões. Nisha Godani e Gauranga C. Samanta usaram em seu artigo o termo $f(R, T) = R + 2\alpha \ln(T)$, sendo α uma constante e naturalmente quando essa constante é zero recuperamos o caso clássico de gravidade de Einstein. Se substituindo os termos da métrica do *wormhole*, equação (3.1), e das equações (3.5), (3.6) e (3.7) na equação de movimento (3.29), após algumas manipulações dos termos, obteremos

$$\frac{b'(r)}{r^2} = 8\pi\rho - 2\alpha - \alpha \ln(-\rho + p_r + 2p_t) \quad (3.31)$$

$$\frac{-b(r)}{r^3} = 8\pi p_r + \frac{4\alpha(p_r + p_t)}{-\rho + p_r + 2p_t} + \alpha \ln(-\rho + p_r + 2p_t) \quad (3.32)$$

$$\frac{b(r) - rb'(r)}{2r^3} = 8\pi p_t + \frac{2\alpha(3p_t + p_r)}{-\rho + p_r + 2p_t} + \alpha \ln(-\rho + p_r + 2p_t). \quad (3.33)$$

O escalar de Ricci R é dado por $R = \frac{2b'(r)}{r^2}$, onde o traço denota derivada com relação a coordenada radial r . Por simplicidade, consideramos a função redshift nula $\phi = 0$, então a função forma depende exclusivamente do modelo de distribuição de densidade e pressão da matéria. Então resolvendo o sistema de equações definido pelas equações (3.31), (3.32) e (3.33) nos permite encontrar muitos tipos de funções forma $b(r)$. Para que essas soluções da função forma nesse modelo particular de gravidade modificada seja transponível temos que impor condições específicas sobre a densidade ρ e as pressões radial P_r e tangencial P_t . No trabalho [35] são escolhidos as seguintes relações $p_t = \omega\rho$ e $p_r = k p_t$, com ω sendo o parâmetro de equação de estado e k é uma função aleatória. Podemos fazer o processo contrário, usamos uma função forma já definida de um *wormhole* transponível e analisar as condições de energia resultante. O artigo produzido por A. K. Mishra e seus colaboradores [38] utiliza a seguinte expressão para a função forma

$$b(r) = \frac{r_0 \log(r + 1)}{\log(r_0 + 1)}, \quad (3.34)$$

onde nesse caso a pressão se relaciona com a densidade de energia na forma $p_r = \omega \rho$. Substituindo a equação (3.34) nas equações (3.31), (3.32) e (3.33) em seguida resolvemos o sistema em termos da densidade e das pressões, de modo que obteremos os resultados

$$\rho = \frac{r_0}{(1+r) \ln(1+r_0) r^2 (8\pi + 2\lambda)}, \quad (3.35)$$

$$p_r = \frac{r_0 \ln(1+r)}{\ln(r_0+1) r^3 (8\pi + 2\lambda)}, \quad (3.36)$$

$$p_t = 1/2 \left(\frac{r_0 \ln(1+r)}{\ln(r_0+1)} - \frac{r_0 r}{(1+r) \ln(1+r_0)} \right) r^{-3} (8\pi + 2\lambda)^{-1}, \quad (3.37)$$

3.2 Condições de energia

A primeira condição de energia descrita na literatura foi a condição de ‘natureza pontual’ e basicamente essa condição restringe a contração do tensor momento energia em cada ponto do espaço-tempo [36]. Aqui vamos citar as quatro principais, sendo elas: a condição de energia fraca (WEC) na sigla em inglês, a condição de energia forte (SEC), a condição de energia dominante (DEC) e a condição de energia nula (NEC). Existe outra condição de energia menos conhecida, mas que vale a pena mencionar, a chamada condição energia traço [39, 36].

A condição fraca de energia (WEC), na versão da forma física, requer que para qualquer quadrivetor do tipo tempo t^a tenhamos a relação

$$T_{ab} t^a t^b \geq 0. \quad (3.38)$$

Podemos interpretar essa condição como, a densidade de energia medida por qualquer observador não pode ser negativa. Isso quer dizer que para um fluido perfeito a densidade de energia deve ser $\rho \geq 0$ e do mesmo modo que a pressão não pode ser negativa

$$\rho + P \geq 0. \quad (3.39)$$

Finalmente para o caso da forma geométrica, podemos escrever

$$G_{ab} t^a t^b \geq 0, \quad (3.40)$$

onde G_{ab} são componentes das equações de Einstein.

A condição de energia nula diz que para qualquer quadrivetor do tipo nulo k^a futuro deve satisfazer

$$T_{ab} k^a k^b \geq 0, \quad (3.41)$$

Para versão da forma do fluido perfeito deve satisfazer a condição,

$$\rho + P \geq 0 \quad (3.42)$$

e na versão geométrica teremos o seguinte resultado

$$R_{ab}k^ak^b \geq 0. \quad (3.43)$$

A condição de energia forte (*SEC*) é formulada de modo um pouco mais complicado como: [37, 41, 40]

$$\left(T_{ab} - \frac{T}{n-2}g_{ab}\right)t^at^b \geq 0, \quad (3.44)$$

o termo n se refere ao número de dimensões onde $n > 2$. (*SEC*) requer que a densidade de energia efetiva seja sempre positiva quando mensurado por um observador. É importante comentar que *SEC* é mais facilmente violada do que *WEC*, embora *SEC* não implica necessariamente em *WEC* [36]. No caso de fluido perfeito podemos escrever na forma geral de dimensão n

$$T^{ab} - \frac{T}{n-2}g^{ab} = (\rho + P)v^av^b + \frac{\rho - P}{n-2}g^{ab}, \quad (3.45)$$

então essa forma do fluido perfeito pode ser escrita como

$$\rho + P \geq 0 \quad \text{e} \quad (n-3)\rho + (n-1)P \geq 0, \quad (3.46)$$

e a *SEC* na forma geométrica é dada por

$$R_{ab}t^at^b \geq 0. \quad (3.47)$$

A condição de energia dominante (*DEC*) é semelhante a (*WEC*) e ainda afirma que

$$T_{ab}t^a\xi^b \geq 0 \quad (3.48)$$

Podemos interpretar essa condição como a restrição do fluxo de energia momento deve ser causal quando medido no tempo próprio do observador. Formulado por outros meios, a componente densidade de energia do tensor momento energia deve dominar sobre as demais componentes do tensor

$$T_{00} \geq |T_{\mu\nu}|, \quad (3.49)$$

o que implica diretamente que no caso do fluido perfeito $\rho > |P|$. Finalmente na forma geométrica podemos escrever

$$G_{ab}t^a\xi^b \geq 0. \quad (3.50)$$

Todas as condições de energia e suas formas que analisamos estão compiladas na tabela 2. Como mencionado no início da seção, existem muitas outras condições de energias que podem ser analisadas, contudo boa parte delas podem ser derivadas das principais [42, 39, 44].

Condição	Forma física	Forma geométrica	Fluido perfeito
WEC	$T_{ab}t^at^b \geq 0$	$G_{ab}t^at^b \geq 0$	$\rho \geq 0$ e $\rho + P \geq 0$
SEC	$(T_{ab} - \frac{T}{n-2}g_{ab})t^at^b \geq 0$	$R_{ab}t^at^b \geq 0$	$\rho + P \geq 0$ e $(n-3)\rho + (n-1)P \geq 0$
DEC	$T_{ab}t^a\xi^b \geq 0$	$G_{ab}t^a\xi^b \geq 0$	$\rho \geq P $
NEC	$T_{ab}k^ak^b \geq 0$	$R_{ab}k^ak^b \geq 0$	$\rho + P \geq 0$

Tabela 2: Sumarização das condições t^a e ξ^b são vetores do tipo tempo k^a é um vetor nulo.

3.3 MQNs de wormholes

Buracos negros são geralmente descritos como estruturas bem simples por necessitarem de poucos parâmetros para sua descrição. Contudo, essa simplicidade só acontece se o buraco negro for um sistema isolado. Se considerarmos um sistema mais realístico teremos interações entre o buraco negro com outros corpos e campos. Desse modo temos que considerar a distribuição de matéria ao redor do buraco negro, como discos de acreção, estrelas, campos magnéticos, etc. Além disso, próximo do horizonte de ventos os buracos negros devem emitir a chamada radiação Hawking. Isso tudo leva a perturbações na métrica do buraco negro, tornando a descrição do sistema muito mais complexo [63]. Naturalmente as métricas que descrevem estruturas como *wormholes* também devem sofrer com os mesmos tipos de perturbações. Nesse contexto, podemos mostrar que *wormholes* apresentam estabilidade em diversos cenários [19, 47, 48]. Em contra partida, há muitos outros cenários que exploram a instabilidade dos *wormholes* [46, 49].

Podemos representar as perturbações de métrica na forma

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + \delta g_{\mu\nu}, \quad (3.51)$$

onde o termo $g_{\mu\nu}^0$ representa os termos da métrica do espaço-tempo sem perturbações, frequentemente chamamos esse termo de fundo. Já o termo $\delta g_{\mu\nu}$ são as componentes que representam as perturbações que afetam a métrica de fundo.

Todas as perturbações que trataremos são de ordem de magnitude muito menor do que as componentes da métrica de fundo $\delta g_{\mu\nu} \ll g_{\mu\nu}^0$. Usamos uma aproximação linear para descrever essas perturbações. Quando perturbações de diversas naturezas estão

presentes em sistemas como os buracos negros e *wormholes*. É possível mostrar que as propagações dessas perturbações são descritas por equações de ondas. Os pioneiros do estudo de perturbações em sistemas como buracos negros foram Tullio Regge e John A. Wheeler na década de 1950 [50]. Eles derivam a forma explícita da equação de onda para as perturbações do tipo *odd* e *even*. Enquanto que Zerilli estendeu as equações Regge e Wheeler para o setor polar das perturbações [51]. Vishveshwara foi o primeiro a descrever as propagações de ondas gravitacionais amortecidas, os chamados modos quase-normais (*MQNs*). Vishveshwara analisou espalhamento de ondas gravitacionais em um buraco negro do tipo de Schwarzschild [53]. Em 1983 Mashhoon sugeriu usar o método aproximado *WKB* para calcular os *MQNs* se aproveitando da conexão dos estados ligados e o potencial efetivo invertido do buraco negro [97, 55]. Alguns anos depois, 1985, Schutz e Will conseguiram de fato desenvolver de modo efetivo o método semi-analítico *WKB* para computar os *MQNs* [54].

A equação de onda dos modos de propagação das perturbações da métrica de fundo deve ser uma equação de movimento covariante do campo. No caso de campo escalar Ψ de massa μ com uma métrica de background $g_{\mu\nu}$ a equação de movimento covariante é a equação de Klein-Gordon [63, 56]

$$\left(\nabla^\nu \nabla_\nu - \mu^2\right) \Psi = 0, \quad (3.52)$$

o termo ∇_ν é a derivada covariante. É conveniente escrever a equação (3.52) na forma explícita

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu \left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\mu \Psi \right) - \mu^2 \Psi = 0 \quad (3.53)$$

Podemos aplicar esse formalismo para caso de campos vetoriais massivos onde usamos as equações de movimento covariante de Proca e escrevemos essa equação na forma

$$\nabla^\nu F_{\mu\nu} - \mu^2 A_\mu = 0, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.54)$$

Então, reescrevendo a equação (3.54) na forma explícita obteremos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (F_{\rho\sigma} g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} \sqrt{-g}) - \mu^2 A^\mu = 0. \quad (s = 1), \quad (3.55)$$

se os campos vetoriais são não massivos $\mu = 0$ encontramos as equações de Maxwell. Generalizamos a equação (3.54) no caso que estamos lidando com partículas massivas carregadas em interação com um campo eletromagnético em um espaço-tempo curvo. Nesse background estamos lidando um campo escalar complexo e a equação de movimento é definida como

$$(D^\nu D_\nu - \mu^2) \Psi = 0, \quad (3.56)$$

onde $D_\nu = \nabla_\nu - ieA_\nu$ é a derivada covariante estendida. Logo expandindo os termos da equação encontramos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu \left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g} (\partial_\mu \Psi - ieA_\mu \Psi) \right) - ieA^\nu \partial_\nu \Psi - (\mu^2 + e^2 A^\nu A_\nu) \Psi = 0. \quad (3.57)$$

As equações de movimento para os *backgrounds* que analisamos permitem encontrarmos a equação de onda dependente da métrica. Nosso objetivo é determinar uma equação de onda do tipo Schrödinger. Com esse objetivo em mente, aplicamos a separação de variáveis da equação diferencial. Essa equação de onda deve depender apenas da variável radial r e dos parâmetros intrínsecos da métrica após a separação de variáveis. No caso particular do campo escalar ($s = 0$) adotamos a clássica expressão de separação de variáveis

$$\Psi(t, r, \theta, \phi) = \sum_{lm} \frac{1}{r} e^{i\omega t} R(r) Y_{lm}(\theta), \quad (3.58)$$

onde os termos $Y_{lm}(\theta)$ são os harmônicos esféricos que satisfazem a equação $\Omega Y_{lm}(\theta) + l(l+1)Y_{lm}(\theta) = 0$. Se considerarmos a métrica possa ser escrita como na forma

$$ds^2 = f dt^2 - \frac{dr^2}{f} - r^2 d\Omega^2, \quad (3.59)$$

onde no caso da métrica ser exatamente de Schwarzschild, podemos escrever explicitamente $f = 1 - \frac{1}{r}$, onde normalizamos $2M = 1$. Substituindo os termos da equação (3.59) na equação (3.53) e usando a expressão para separação de variáveis (3.58) encontramos com relativa facilidade a equação onda para o caso das perturbações escalares

$$f^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + f \dot{f} \frac{dR}{dr} + (\omega^2 - V(r, \omega)) R = 0. \quad (3.60)$$

Usando uma mudança de variável

$$\frac{dx}{dr} = \frac{1}{f}, \quad (3.61)$$

finalmente encontramos a equação de onda do tipo Schrödinger

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + (\omega^2 - V(r, \omega)) R = 0, \quad (3.62)$$

onde x é a bem conhecida coordenada tartaruga [94]. O potencial $V(r, \omega)$ é um potencial em forma de barreira, que possui o seu valor máximo no ponto x_0 . Esse potencial ainda deve satisfazer as condições de contorno $V \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow -\infty$ e $V \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow +\infty$. Com base nisso, as condições de contorno dos MQNs para espaço-tempo assintoticamente plano o termo radial se comporta como

$$R \sim e^{\pm i\omega x}, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (3.63)$$

de modo geral a frequência é um número complexo escrito como $\omega = \omega_R - i\omega_I$.

3.3.1 Método WKB de 3ª e 6ª ordem

A equação de Schrödinger, equação (3.62), pode ser reduzida a uma família de equações hipergeométricas. De modo que as soluções são obtidas pelos métodos típicos de solução dessa família de equações [59]. Uma abordagem é usar o método WKB, sendo esse um método semi-analítico para resolver equações do tipo Schrödinger. Muitos outros métodos também foram desenvolvidos e bem aplicados para obter os MQNs, entre eles temos a integração direta da equação de onda no seu domínio de frequências implementado por Chandrasekhar e Detweiler [65]. Podemos destacar também o método aproximado de Pöschl-Teller [66] e dos método das frações continuadas de Lever [110].

O método (*WKB*) foi aplicado pela primeira vez para o cálculo dos MQNs por Schutz, no caso do potencial efetivo ter dois pontos de retorno [54]. Com respeito ao domínio de validade do método (*WKB*), pode é possível mostrar que quanto mais próximo os pontos de retorno estão um do outro mais acurados são os MQNs [60]. Expressando isso em outros termos, essa condição diz que $[V(\omega, r) - \omega^2]_{max} \ll [\omega^2 - V(\pm\infty)]$ [60]. O termo $\omega^2 - V(\omega, r)$ é a energia total do sistema, onde expandimos esse termo em uma série de Taylor próximo do ponto de máximo do potencial efetivo. Em 1987, S. Iyer e C. M. Will deduziram uma expressão melhorada para o cálculo dos modos quasinormais. Esse é hoje o bem conhecido método WKB de terceira ordem. Em 2003 R. A. Konoplya melhora ainda mais o método WKB e determina as correções de sexta ordem [63], levando conseqüentemente a uma melhoria na acurácia. A expressão para correção de sexta ordem pode ser escrita como:

$$\frac{i(\omega^2 - V(\omega, x_0))}{\sqrt{-2V''(\omega, x_0)}} + \sum_{i=2}^6 \Lambda_i = n + \frac{1}{2} \quad (3.64)$$

o termo V'' representa a derivada de segunda ordem do potencial efetivo em relação a coordenada tartaruga x no seu ponto de máximo. Os termos de correções Λ_i são combinações de derivadas de até sexta ordem do potencial no seu ponto de máximo.

No caso específico da correção de terceira ordem do método (*WKB*) podemos resolver a equação (3.64) em termos de ω^2 . Usamos a notação bem comum para método de terceira ordem $\Lambda_2 = \Lambda$ e $\Lambda_3 = \Omega$. E então obtemos a seguinte expressão

$$\omega^2 = [V_0 + (-2V_0'')^{1/2}\tilde{\Lambda}(n)] - i(n + \frac{1}{2})(-2V_0'')^{1/2}[1 + \tilde{\Omega}(n)]. \quad (3.65)$$

onde $\tilde{\Lambda} = \Lambda/i$ e $\tilde{\Omega} = \Omega/(n + \frac{1}{2})$, já os termos Λ and Ω são definidos por

$$\begin{aligned}\Lambda(n) &= \frac{i}{(-2V_0'')^{1/2}} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{V_0^{(4)}}{V_0''} \right) \left(\frac{1}{4} + \nu^2 \right) - \frac{1}{288} \left(\frac{V_0^{(3)}}{V_0''} \right)^2 (7 + 60\nu^2) \right], \\ \Omega(n) &= \frac{(n + \frac{1}{2})}{(-2V_0'')^{1/2}} \left[\frac{5}{6912} \left(\frac{V_0^{(3)}}{V_0''} \right)^4 (77 + 188\nu^2) \right. \\ &\quad - \frac{1}{384} \left(\frac{V_0^{(3)2} V_0^{(4)}}{V_0''^3} \right) (51 + 100\nu^2) + \frac{1}{2304} \left(\frac{V_0^{(4)}}{V_0''} \right)^2 (67 + 68\nu^2) \\ &\quad \left. + \frac{1}{288} \left(\frac{V_0^{(3)} V_0^{(5)}}{V_0''^2} \right) (19 + 28\nu^2) - \frac{1}{288} \left(\frac{V_0^{(6)}}{V_0''} \right) (5 + 4\nu^2) \right].\end{aligned}\quad (3.66)$$

A derivada de ordem n do potencial é definida como $V_0^{(n)} = (d^n V/dx^n)_{x=x_0}$ e $\nu = n + 1/2$. A acurácia do método (*WKB*) depende do número l , do número de 'overtone' n e pode se mostrar que o método tem uma melhor desempenho para $l > n$. Sendo que, para o caso de $l = n$ o método já não é tão preciso e para $l < n$ não é mais aplicável [64, 62].

Uns dos primeiros a estudar a estabilidade de *wormoles* foi S. Kar e D. Sahdev onde os mesmos calculam os coeficientes de reflexão e transmissão da solução de ondas escalares se propagando numa geometria de *wormhole* [68]. Pouco tempo depois o caso de transmissão e reflexão de ondas eletromagnéticas em geometria de *wormoles* estáticos foi bem discutida no trabalho [69]. Para as perturbações gravitacionais de um *wormole* estático foi realizada no trabalho [70]. Sung-Won Kim determinou o potencial efetivo de um *wormole* devido a perturbações de escalares usando o formalismo de Regge-Wheeler. Substituindo os termos da métrica do *wormole*, equação (3.1), na equação de onda sem massa $\mu = 0$ (3.67)

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu \left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\mu \Psi \right) = 0. \quad (3.67)$$

Podemos encontrar, após alguns cálculos, a expressão do potencial efetivo devido a perturbações escalares em termos das funções forma $b(r)$ e redshift $\phi(r)$

$$V(r, l) = e^{2\phi(r)} \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{\dot{b}(r)r - b(r)}{2r^3} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{b(r)}{r} \right) \dot{\phi}(r) \right], \quad (3.68)$$

onde estamos considerando que a coordenada tartaruga é definida aqui na forma

$$\frac{d}{dx} = e^{\phi(r)} r^2 \sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}} \frac{d}{dr}. \quad (3.69)$$

Dependendo da escolha da função redshift $\phi(r)$, o potencial $V(r, l)$ deve se anular para $x \rightarrow \pm\infty$ e a função de onda deve satisfazer $\psi \sim e^{\pm i\omega x}$. Agora no caso particular de $e^{\phi(r)} = 1$ e $b(r) = \frac{b_0^2}{r}$ onde b_0 é o raio mínimo da garganta, então o potencial representado

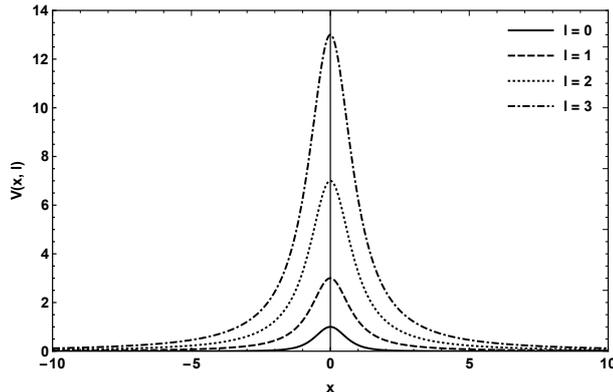


Figura 3: Potencial de Regge-Wheeler do tipo sino devido as perturbações escalares, equação (3.72), onde l assume os valores 0, 1, 2, 3 e $b_0 = 1$

pela equação (3.68) se torna

$$V(r, l) = \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{b_0^2}{r^4}. \quad (3.70)$$

Então, pela expressão que relaciona a coordenada tartaruga com a variável radial, equação (3.69), obteremos

$$x = \sqrt{r^2 - b_0^2}, \quad (3.71)$$

substituindo essa expressão na equação do potencial (3.70) podemos escrever o potencial em termos das coordenadas tartaruga x

$$V(x, l) = \frac{l(l+1)}{x^2 + b_0^2} + \frac{b_0^2}{(x^2 + b_0^2)^2}. \quad (3.72)$$

Ao plotarmos os gráficos do potencial (3.72) para os quatro primeiros valores de l verificamos que todos os potenciais exibem uma forma de sino, como a figura 3. O gráfico 3 é um ótimo exemplo da representação de um potencial que possui dois pontos de retorno e um ponto de máximo bem definidos, como exigido para aplicação do método WKB.

Para descrever as perturbações de natureza eletromagnética sofrida pelo *wormhole*, os autores Bergliaffa e Hibberd [69] partem da definição das equações de Maxwell em geometria curva. Com o intuito de descrever o comportamento das ondas eletromagnéticas na geometria de um *wormhole* de Morris-Thorne. Então escrevemos as equações de Maxwell

$$H^{\mu\nu}_{;\nu} = 4\pi I^\mu, \quad H_{\mu\nu;\sigma} + H_{\nu\sigma;\mu} + H_{\sigma\mu;\nu} = 0. \quad (3.73)$$

os termos I^μ e $H^{\mu\nu}$ são derivados dos termos J^μ e $F^{\mu\nu}$

$$H^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g} F^{\mu\nu}, \quad e \quad I^\mu \equiv \sqrt{-g} J^\mu. \quad (3.74)$$

Adotando a seguinte decomposição dos tensores, encontramos

$$F_{\mu\nu} \rightarrow (\vec{E}, \vec{B}), \quad H^{\mu\nu} \rightarrow (-\vec{D}, \vec{H}), \quad J^\mu \rightarrow (\rho, \vec{J}). \quad (3.75)$$

e agora podemos escrever as equações

$$\vec{F}^\pm \equiv \vec{E} \pm i\vec{H}, \quad \vec{S}^\pm \equiv \vec{D} \pm i\vec{B}. \quad (3.76)$$

Com base nas equações (3.73) podemos deduzir a nova forma das equações de Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}^\pm = \pm i \frac{\partial \vec{S}^\pm}{\partial t} = \pm i n \frac{\partial \vec{F}^\pm}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{S}^\pm = 0, \quad (3.77)$$

onde n é o índice de refração que vem diretamente dos termos da métrica do espaço-tempo curvo do *wormhole*

$$\epsilon_{ik} = \mu_{ik} = -\sqrt{-g} \frac{g_{ik}}{g_{00}} \equiv n \delta_{ik}. \quad (3.78)$$

Agora introduzimos o vetor Hertz e o expandimos em uma série de Taylor

$$\vec{F}^\pm(\vec{\rho}, t) = \sum_{J,M} \vec{F}_{JM}^\pm(\vec{\rho}, t),$$

sendo que

$$\vec{F}_{JM}^\pm(\vec{\rho}, t) = \sum_{\lambda=e,m,o} F_{JM}^\pm(\rho, \omega) \vec{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\hat{\rho}) e^{-i\omega t}. \quad (3.79)$$

Com esses dois últimos termos podemos após mais alguns cálculos chegar na equação de onda devido as perturbações eletromagnéticas

$$\frac{d^2 \chi_{JM}^{\pm(m)}}{dr^2} + [\omega^2 - V(r, l)] \chi_{JM}^{\pm(m)} = 0, \quad (3.80)$$

onde o potencial assume a simples forma

$$V(r, l) = \frac{l(l+1)}{r^2} \quad \text{ou} \quad V(x, l) = \frac{l(l+1)}{x^2 + 1}. \quad (3.81)$$

O potencial devido às perturbações eletromagnéticas, equação (3.81), também satisfaz os requerimentos para aplicação do método *WKB*. Tendo o potencial devido as perturbações eletromagnéticas dois pontos de retorno e um ponto de máximo bem definidos semelhante ao potencial (3.72). O gráfico 4 é quase identico ao gráfico 3, com exceção do valor $l = 0$ onde o potencial devido às perturbações escalares é não nulo, enquanto que para as perturbações eletromagnéticas o potencial é nulo para esse mesmo valor.

Finalmente trataremos de deduzir o potencial devido às perturbações gravitacionais, para isso usaremos o formalismo de Chandrasekhar [94]. Vamos partir de uma

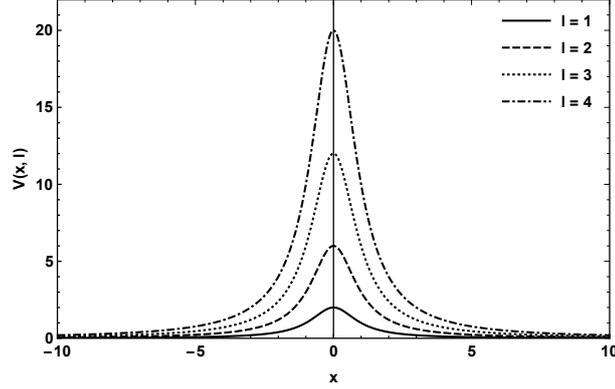


Figura 4: Potencial de Regge-Wheeler do tipo sino devido as perturbações eletromagnéticas, equação 1 (3.81), onde l assume os valores 1, 2, 3 4

métrica estática e assimétrica na forma

$$ds^2 = e^{2\nu}(dt^2)^2 - e^{2\psi} (d\phi - q_2 dx^2 - q_3 dx^3 - q dt)^2 - e^{2\mu_2} (dx^2)^2 - e^{2\mu_3} (dx^3)^2. \quad (3.82)$$

Os termos da métrica do *wormhole* não perturbados são;

$$x^2 = r, x^3 = \theta, e^{2\nu} = e^\Lambda, e^{-2\mu_2} = f(r) = 1 - \frac{b(r)}{r}, e^{\mu_3} = r, e^\psi = r \sin\theta.$$

Quando os termos perturbativos q_2, q_3, q são não nulos, o formalismo Chandrasekhar mostra que as equações de Einstein linearizadas relevantes são

$$\frac{1}{r^4 \sin^3 \theta} \frac{\partial Q}{\partial \theta} = -(q_{,2} - q_{2,0}),_0 \quad (3.83)$$

$$\frac{\Delta}{r^4 \sin^3 \theta} \frac{\partial Q}{\partial r} = (q_{,3} - q_{3,0}),_0. \quad (3.84)$$

O subíndice $(, 0)$ representa a derivada temporal e assumindo que os termos da métrica possuem uma dependência temporal na forma $e^{i\omega t}$. Com base nas equações (3.83) e (3.84) podemos deduzir uma única equação diferencial

$$r^2 \Delta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Delta}{r^2} \frac{\partial Q}{\partial r} \right) + \omega^2 Q - \mu^2 \frac{e^{2\Lambda}}{r^2} Q = 0, \quad (3.85)$$

onde definimos $Q = r^2 \sin^3 \theta \sqrt{f} e^\Lambda Q_{23}$. Para em fim encontrarmos a equação de onda, introduzimos a mudança de função $Q(r) = rZ(r)$ e a coordenada tartaruga escrita na forma $\frac{d}{dx} = e^\Lambda \sqrt{f} \frac{d}{dr}$. Após mais algumas manipulações algébricas obteremos

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} + \omega^2 Z - \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\dot{b}(r)r - 5b(r)}{2r^3} - \frac{1}{r} \left(1 - \frac{b(r)}{r} \right) \dot{\Lambda} \right) Z = 0, \quad (3.86)$$

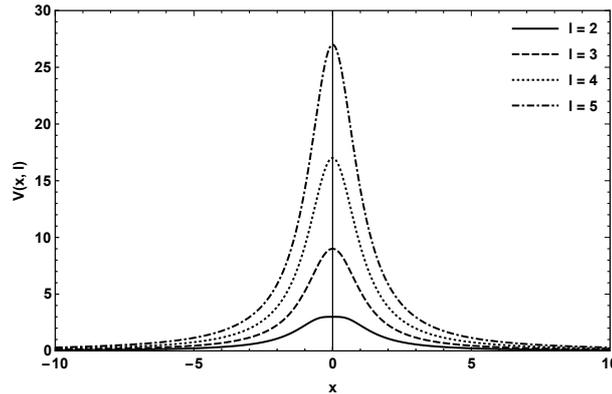


Figura 5: Potencial de Regge-Wheeler do tipo sino devido as perturbações gravitacionais, equação 1 (3.88), onde l assume os valores 2, 3, 4, 5

l, n	MQN_s	MQN_v	MQN_g
$l = 1, n = 0$	0.765231- 0.264486i	0.59803- 0.212461 i	-
$l = 2, n = 0$	1.26659 -0.25532 i	1.16994- 0.237176i	-
$l = 2, n = 1$	1.15060 -0.792934i	1.05154- 0.737046i	-
$l = 3, n = 0$	1.76441 -0.253034i	1.69464- 0.243541 i	1.48444- 0.217543 i
$l = 3, n = 1$	1.68482 -0.770112 i	1.61605- 0.741034i	1.50584- 0.697365 i
$l = 3, n = 2$	0.1.53856-1.31483 i	1.47071 - 1.265100i	1.61297- 1.253160 i
$l = 4, n = 0$	2.26218 -0.251978i	2.20750 - 0.246113i	2.03799 - 0.225213 i
$l = 4, n = 1$	2.20232 -0.7617910i	2.14849- 0.743983i	1.99538- 0.684207 i
$l = 4, n = 2$	2.08794 - 1.287550 i	2.03551- 1.257300i	1.92099- 1.164210 i
$l = 4, n = 3$	1.92774 - 1.834870 i	1.87689- 1.79171i	1.82914- 0.166697 i

Tabela 3: QNMs para perturbações escalares, vetoriais e gravitacionais usando método WKB de terceira ordem

$$V(r, l) = \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\dot{b}(r)r - 5b(r)}{2r^3} - \frac{1}{r} \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \dot{\Lambda}. \quad (3.87)$$

No simples caso dos termos da métrica serem $\Lambda = 0$ $b(r) = \frac{b_0^2}{r}$ podemos escrever o potencial (3.87) tem termos da coordenada tartaruga x

$$V(r, l) = \frac{l(l+1)}{x^2 + 1} - \frac{3}{(x^2 + 1)^2} \quad (3.88)$$

O gráfico representado pela figura 3.88 tem o comportamento de sino como os demais gráficos do potenciais devido as perturbações escalares e eletromagnéticas no caso de $l \geq 1$.

Podemos testar o método WKB e verificar o desempenho do método substituindo diretamente os potenciais representados pelas equações (3.72), (3.81) e (3.88) na equação (3.3.1). Podemos sumarizar alguns dos MQNs para os três tipos de potenciais, tabela 3.

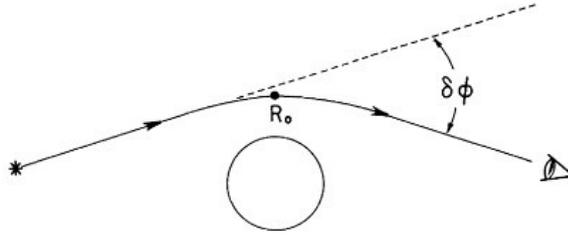


Figura 6: Desvio de $\delta\phi$ de raio de luz medido por um observador devido a presença de um corpo massivo, com parâmetro de impacto R_0

3.4 Desvio de Luz

O desvio das trajetórias dos raios devido a presença de campo um campo gravitacional foi o que levou a comprovação da teoria da gravidade de Albert Einstein em 1919 [73, 71]. A prova experimental da teoria da relatividade coube principalmente ao astrônomo Arthur Stanley Eddington, ao organizar duas expedições para observar o eclipse em 1919. Uma das expedições aconteceu em Sobral no Brasil e a outra na Ilha do Príncipe no oeste da África, em ambos os lugares o desvio foi mensurado. Os observadores esperavam ver um desvio de aproximadamente de 1.75 arco de segundo o dobro do que a teoria Newtoniana previa. Todos os valores medidos foram tabelados e podem serem encontrados em [71].

Podemos derivar o valor do ângulo de desvio dos raios de luz em um espaço-tempo de Schwarzschild usando o formalismo da teoria geral da relatividade. Partindo da equação geodésica [74]

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + \kappa\right) = \frac{1}{2}E^2, \quad (3.89)$$

sendo que os termos $L = r^2 \dot{\phi}$ e E é o momento angular e a energia do sistema. A equação (3.89) descreve o movimento radial da partícula ou descreve o movimento dos raios de luz no caso de $\kappa = 0$.

Como queremos uma expressão para o ângulo de desvio em um espaço-tempo de Schwarzschild temos que resolver a equação (3.89) em termos de r e dividindo por $\dot{\phi}$ podemos encontrar a seguinte equação diferencial ,

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{L}{r^2} \left[E^2 - \frac{L^2}{r^3}(r - 2M) \right]^{-1/2}. \quad (3.90)$$

Considerando que os raios de luz sofram um desvio total de $\Delta\phi = \phi_{+\infty} - \phi_{-\infty}$ com a coordena angular ϕ definida em uma geometria do tipo Schwarzschild, como ilustrada na figura 6. Definimos o ponto de retorno R_0 como o ponto de máxima aproximação

da trajetória dos raios de luz com relação ao centro do corpo massivo. Podemos definir uma expressão para R_0 em termos da massa M do sistema e do parâmetro de impacto b

$$R_0 = \frac{2b}{\sqrt{3}} \cos \left[\frac{1}{3} \cos^{-1} \left(-\frac{3^{3/2}M}{b} \right) \right], \quad (3.91)$$

o parâmetro de impacto é definido como $b \equiv L/E$. Agora por questão de simetria a contribuição da caminho para o ângulo de desvio total da fonte dos raios de luz até o ponto máximo de aproximação R_0 é a mesma do caminho até o observador. Logo podemos escrever o ângulo total de desvio como

$$\Delta\phi = 2 \int_{R_0}^{\infty} \frac{dr}{[r^4 b^{-2} - r(r - 2M)]^{1/2}}. \quad (3.92)$$

É comum usarmos a seguinte mudança de variável $r = 1/u$ na equação 3.92 então obteremos

$$\Delta\phi = 2 \int_0^{1/R_0} \frac{dr}{[b^{-2} - u^2 + 2Mu^3]^{1/2}}. \quad (3.93)$$

No caso em que a massa $M = 0$ os raios de luz da fonte devem caminhar em linha reta [74]

$$\Delta\phi|_{M=0} = 2 \sin^{-1}(b/R_0) = \pi, \quad (3.94)$$

como esperando, na ausência da fonte de campo gravitacional os raios de luz não sofrem desvio.

Em muitos cenários temos que lidar com campos muito fracos, de modo que a expressão 3.92 pode ser aproximada em termos de um série de Taylor de primeira ordem de M . Eliminando o parâmetro b na equação (3.93) redefinimos a equação do desvio angular [74]

$$\Delta\phi = 2 \int_0^{1/R_0} \frac{dr}{[R_0^{-2} - 2MR_0^{-3} - u^2 + 2Mu^3]^{1/2}}. \quad (3.95)$$

Derivando a equação (3.95) com relação a massa M em torno do valor de $M = 0$ e fixando os demais parâmetros

$$\frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial M} = 2 \int_0^{1/b} \frac{b^{-3} - u^3}{(b^{-2} - u^2)^{3/2}} du = \frac{4}{b}. \quad (3.96)$$

Então o ângulo de deflexão em primeira ordem é escrito como

$$\delta\phi = \Delta\phi - \pi \approx M \frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial M} \Big|_{M=0} = \frac{4M}{b}. \quad (3.97)$$

Um raio de luz que passe próximo da superfície do sol deve sofrer um desvio de 1.75" como foi medido em muitas situações, mostrando a validade da equação (3.97)

3.4.1 *Desvio em campo fraco: Método de Gauss-Bonnet*

Apesar do valor do ângulo de desvio calculado diretamente pelas equações da gravitação de Einstein possa ser determinado com uma boa precisão, ainda sim essa técnica não pode ser bem aplicado em todos os contextos. Em escalas galácticas, em que temos que considerar a presença de uma constante cosmológica Λ . Isso resulta uma solução do tipo Schwarzschild–de Sitter, onde o espaço-tempo não é assintoticamente plano em contraste com um espaço-tempo puramente de Schwarzschild. Usando o formalismo do teorema de Gauss–Bonnet é possível resolver esse tipo de problema e além de ser aplicável uma grande quantidade de outras situações no limite do campo gravitacional fraco [78].

Antes de definirmos o teorema de Gauss-Bonnet precisamos definir a métrica ótica, partindo da equação da métrica geral na forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -f(r)dt^2 + \frac{1}{g(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.98)$$

vamos considerar uma curva geodésica nula $ds^2 = 0$ defletida por uma lente gravitacional representada por um corpo massivo esfericamente simétrico constituído de fluido perfeito. Ainda devemos considerar que estejamos localizados no plano equatorial $\theta = \pi/2$, então podemos escrever a métrica ótica que os raios de luz experimentam

$$dt^2 \equiv \bar{g}_{ij} dx^i dx^j = \bar{g}_{rr} dr^2 + \bar{g}_{\phi\phi} d\phi^2 = \frac{1}{f(r)g(r)} dr^2 + \frac{r^2}{f(r)} d\phi^2. \quad (3.99)$$

O teorema de Gauss-Bonnet basicamente conecta a geometria diferencial de uma superfície com sua topologia. Primeiramente vamos considerar que o domínio (D, χ, g) seja um subconjunto de um compacto de superfície orientada com característica de Euler χ e uma métrica g . Com essas definições implicam na curvatura Gaussiana K da superfície. Vamos considerar também que o contorno $\partial D : t \rightarrow D$ define um caminho por partes suave com uma curvatura geodésica κ associada. Ainda seguindo esse caminho definimos um ângulo α_i de i -ésimo vértice. Levando em consideração todas essas informações nos permite definir o teorema de Gauss-Bonnet [72, 75]

$$\iint_{\Sigma^n} K d\sigma + \sum_{p=1}^n \int_{C_p} \kappa_g dt + \sum_{p=1}^n \alpha_i = 2\pi, \quad (3.100)$$

onde primeiro termo representa a contribuição da integral de superfície da curvatura de Gauss K . O segundo termo representa a contribuição integral da curvatura geodésica κ_g . o termo superfície infinitesimal é escrito como $d\sigma = \sqrt{\det|\bar{g}|} dr d\phi$ e $|\bar{g}|$ é o determinante da métrica ótica, equação (3.99).

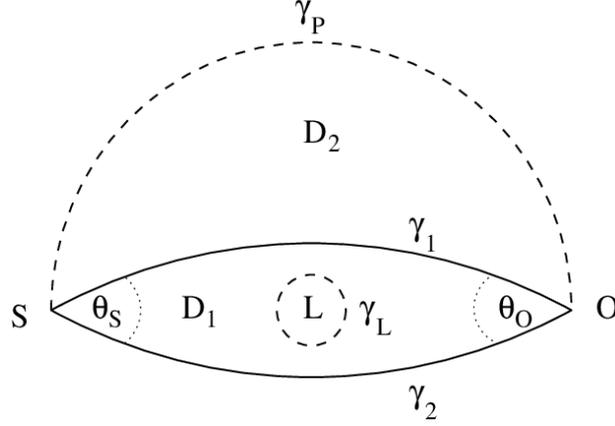


Figura 7: Geometria da lente para deflexão fraca. Duas geodésicas γ_1 e γ_2 saindo da fonte **S** e indo em direção ao observador **O** são desviados por uma lente com centro em **L**. D_1 e D_2 são dois domínios com curvas de limite γ_L e γ_P .

A curvatura Gaussiana pode ser escrita em termos da métrica ótica como

$$K = -\frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{rr}\bar{g}_{\phi\phi}}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{rr}}} \frac{\partial \sqrt{\bar{g}_{\phi\phi}}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{\phi\phi}}} \frac{\partial \sqrt{\bar{g}_{rr}}}{\partial \phi} \right) \right]. \quad (3.101)$$

Enquanto que a curvatura geodésica pode também ser escrita em termos da métrica ótica

$$\kappa_g = \frac{1}{2\sqrt{\bar{g}_{rr}\bar{g}_{\phi\phi}}} \left(\frac{\partial \bar{g}_{\phi\phi}}{\partial r} \frac{d\phi}{dt} - \frac{\partial \bar{g}_{rr}}{\partial \phi} \frac{dr}{dt} \right), \quad (3.102)$$

Dividimos o domínio D em dois subdomínios D_1 e D_2 que englobam a geometria da lente gravitacional no limite de campo fraco, figura 7. A região D_1 é delimitada por duas geodésicas γ_1 e γ_2 do modo que as duas curvas se interceptam em dois pontos, onde estão localizados a fonte e o observador, formando os ângulos θ_O e θ_S . O domínio D_1 além de conter o centro da lente gravitacional L também devemos assumir que a distância entre a fonte de luz e o observador em relação a centro deve ser muito grande. Essa última definição implica que os θ_O e θ_S devem ser pequenos e positivos [79]. Se o centro da lente L for singular, como acontece com a maioria dos modelos de buracos negros, a característica de Euler será $\chi(D_1) = 0$. Logo o teorema de Gauss-Bonnet nos fornece

$$\theta_O + \theta_S = \iint_{D_1} K d\sigma. \quad (3.103)$$

No caso do centro da lente for não-singular, como no caso de métricas de wormholes transponíveis, a característica de Euler será $\chi(D_1) = 1$ e o teorema de Gauss-Bonnet nos diz que

$$\theta_O + \theta_S = 2\pi + \iint_{D_1} K d\sigma + \sum_{p=1}^n \int_{\gamma_L} \kappa_g dt, \quad (3.104)$$

onde o contorno ∂D recebe contribuição da curva γ_L que encerra o centro da lente gravi-

tacional L .

Vamos calcular o ângulo de deflexão usando o teorema Gauss-Bonnet para o caso bem conhecido do *wormhole* de Ellis como exemplo. Como foi definido na seção 3.1 a equação (3.1.1) representa o elemento de linha da métrica da métrica do wormhole de Ellis e então a geodésica nula determinará a métrica ótica do *wormhole* de Ellis como

$$dt^2 = dr^2 + (a^2 + r^2)d\phi^2, \quad (3.105)$$

sendo mais específicos podemos escrever os termos da métrica ótica $\bar{g}_{rr} = 1$ e $\bar{g}_{\phi\phi} = (a^2 + r^2)$. Substituindo os termos da métrica (3.105) na equação (3.101) obteremos a curvatura Gaussiana após alguns cálculos

$$K = -\frac{a^2}{r^2 + a^2}. \quad (3.106)$$

A curvatura geodésica κ_g também pode ser determinada com facilidade a partir da equação (3.102)

$$\kappa_g = \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}} \frac{d\phi}{dt}. \quad (3.107)$$

Quando a região do domínio da lente gravitacional pode ser considerada tão grande que a coordenada radial pode ser feita $R \rightarrow \infty$ e a soma dos ângulos internos devem assumir o valor $\theta_S + \theta_O \rightarrow \pi$. Como já discutido o valor da característica de Euler será $\chi(D_1) = 1$ para uma solução não-singular como é caso da solução de Ellis. Considerando esses últimos argumentos podemos reescrever o teorema de Gauss-Bonnet no limite $R \rightarrow \infty$

$$\iint_{D_R} K d\sigma + \int_{C_R} \kappa_g dt = \iint_{D_\infty} K d\sigma + \int_0^{\pi + \hat{\alpha}} d\phi = \pi, \quad (3.108)$$

a quantidade $\pi + \hat{\alpha}$ é o intervalo angular da curva geodésica γ_L em que $\hat{\alpha}$ é um ângulo bem pequeno. A equação (3.107) no limite de campo fraco será

$$\kappa_g dt = \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}} d\phi \rightarrow d\phi, \quad (3.109)$$

o que resulta da equação (3.108)

$$\hat{\alpha} = - \int_0^\pi \int_{\frac{b}{\sin\theta}}^\infty K d\sigma \quad (3.110)$$

e finalmente obteremos a expressão final para o ângulo de desvio

$$\hat{\alpha} = - \int_0^\pi \int_{\frac{b}{\sin\theta}}^\infty \left(-\frac{a^2}{r^2 + a^2} \right) \sqrt{\det \bar{g}} dr d\phi = \pi - 2 \text{Elliptica}K \left(-\frac{a^2}{b^2} \right), \quad (3.111)$$

aqui o determinante da métrica ótica vale $\sqrt{\det \bar{g}} = \sqrt{r^2 + a^2}$. A equação (3.111) apresenta como solução uma função elíptica do tipo K, mas como estamos no limite de campo fraco

podemos expandir essa função em uma série de Taylor [76]

$$\hat{\alpha} \simeq \frac{\pi a^2}{4b^2} - \frac{9\pi a^4}{64b^4} + \mathcal{O}\left(\frac{a^6}{b^6}\right) \quad (3.112)$$

A equação (3.111) representa a correção de segunda ordem para deflexão do ângulo do *wormhole* de Ellis [77, 80], vemos claramente que quando o espaço é *flat* $a = 0$ a deflexão é nula.

3.4.2 *Desvio em campo forte: Método de Bozza*

Na seção 3.4 estudamos a deflexão de luz devido a uma lente gravitacional do *wormhole* de Ellis no limite de campo fraco, onde também consideramos a função *redshift* como uma constante. Contudo, podemos estudar o desvio de luz no contexto de campo forte para um *wormhole* usando o formalismo de Bozza para métricas de buracos negros [82]. Então nessa seção mostraremos como aplicar o cálculo do desvio de luz no regime de campo forte usando a métrica do wormhole de Damour-Solodukhin [81]. O *wormhole* de Damour-Solodukhin é caracterizado por uma função *redshift* não-nula.

Definindo uma métrica genérica esfericamente simétrica e estática na forma

$$ds^2 = A(x)dt^2 - B(x)dx^2 - C(x)(d\theta^2 + \sin^2\theta\phi^2). \quad (3.113)$$

No limite de campo forte é possível definirmos uma região crítica, onde os raios de são tão defletidos que acabam sendo capturados no limite dessa região chamada de fotosfera. Para que haja uma região de fotosfera devemos esperar que a equação

$$\frac{C'(x)}{C(x)} = \frac{A'(x)}{A(x)}, \quad (3.114)$$

tenha pelo menos uma raiz positiva e a maior delas chamamos de raio da fotosfera x_m . Os raios de luz que vem do infinito ao serem defletidos pelo campo gravitacional atingem a sua máxima aproximação x_0 . Escrevemos o parâmetro de impacto como função de x_0 devido a conservação do momento angular.

$$u = \sqrt{\frac{C_0}{A_0}}, \quad (3.115)$$

onde o índice 0 das funções C_0 e A_0 expressa a dependencia em relação ao termo x_0 e u é usado para denotar o parâmetro de impacto [82]. Devemos esperar que quando diminuimos o parâmetro de impacto u o ângulo de deflexão deve crescer. Então, existe um ponto de mínima aproximação x_m onde o ângulo de deflexão excede 2π fazendo com que os raios de luz executem voltas indefinidamente ao redor do centro da lente gravitacional

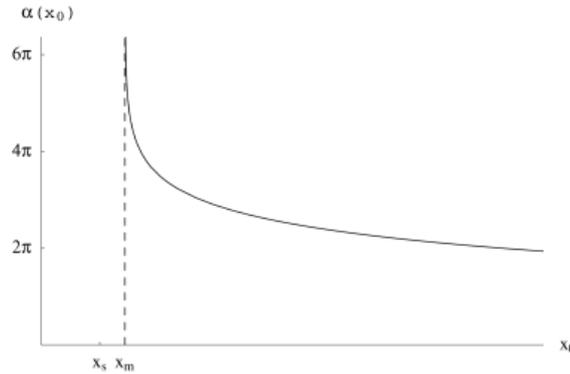


Figura 8: Comportamento geral do ângulo de deflexão como uma função da abordagem mais próxima x_0 . O ângulo de deflexão aumenta como x_0 decresce e diverge em $x_0 = x_m$. Cada vez $\alpha(x_0)$ atinge um múltiplo de 2π , o fóton completa uma volta antes emergir [82].

(3.116). A figura 8 mostra o ponto de mínima aproximação x_m .

$$u_m = \sqrt{\frac{C_m}{A_m}}. \quad (3.116)$$

O ângulo de deflexão $\alpha(x_0)$ pode ser escrito como função do valor de aproximação dos raios de luz x_0 [84, 83]

$$\alpha(x_0) = I(x_0) - \pi, \quad (3.117)$$

$$I(x_0) = \int_{x_0}^{\infty} \frac{2\sqrt{B}dx}{\sqrt{C}\sqrt{\frac{C}{C_0}\frac{A_0}{A} - 1}}. \quad (3.118)$$

No limite em que a distância de aproximação x_0 assume o valor crítico x_m a integral da expressão (3.118) diverge e os raios de luz são capturados pela fotosfera indefinidamente. Pode se mostrar que a divergência no limite de aproximação mínima é de natureza logarítmica. Bozza [82] mostrou que a divergência do ângulo de deflexão para qualquer métrica esféricamente simétrica é escrita na forma

$$\alpha(x_0) = -a \log\left(\frac{x_0}{x_m} - 1\right) + b + O(x_0 - x_m). \quad (3.119)$$

Os coeficientes a e b depende dos termos da métrica no ponto x_m e é evidente que a divergência do ângulo de deflexão acontece quando $x_0 \rightarrow x_m$. Agora temos que determinar os coeficientes com base na equação (3.118) para isso introduzir duas novas variáveis

$$y = A(x), \quad (3.120)$$

$$z = \frac{y - y_0}{1 - y_0}, \quad (3.121)$$

onde $y_0 = A_0$. Então a integral da equação (3.118) se torna

$$I(x_0) = \int_0^1 R(z, x_0) f(z, x_0) dz, \quad (3.122)$$

$$R(z, x_0) = \frac{2\sqrt{By}}{CA'} (1 - y_0) \sqrt{C_0}, \quad (3.123)$$

$$f(z, x_0) = \frac{1}{\sqrt{y_0 - [(1 - y_0)z + y_0] \frac{C_0}{C}}}. \quad (3.124)$$

A variável x esta relacionada a raviável z pela seguinte expressão $x = A^{-1} [(1 - y_0)z + y_0]$, enquanto que a $f(z, x_0)$ diverge para $z \rightarrow 0$. Logo, considerando que a função $R(z, x_0)$ seja regular para todos os valores de z e x_0 podemos escrever as seguintes relações

$$f(z, x_0) \sim f_0(z, x_0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha z + \beta z^2}} \quad (3.125)$$

$$\alpha = \frac{1 - y_0}{C_0 A'_0} (C'_0 y_0 - C_0 A'_0), \quad (3.126)$$

$$\begin{aligned} \beta = & \frac{(1 - y_0)^2}{2C_0^2 A_0'^3} [2C_0 C'_0 A_0'^2 + \\ & + (C_0 C''_0 - 2C_0'^2) y_0 A'_0 - C_0 C'_0 y_0 A_0''], \end{aligned} \quad (3.127)$$

os traços representam as derivadas com respeito a x . Agora se considerarmos o ponto crítico $x_0 = x_m$ onde fótons são capturados o ângulo de desvio nesse ponto é reescrito como

$$\alpha(\theta) = -\bar{a} \log \left(\frac{u}{u_m} - 1 \right) + \bar{b} \quad (3.128)$$

onde os termos agora são

$$\bar{a} = \frac{a}{2} = \frac{R(0, x_m)}{2\sqrt{\beta_m}}, \quad (3.129)$$

$$\bar{b} = -\pi + b_R + \bar{a} \log \frac{2\beta_m}{y_m}, \quad (3.130)$$

$$y_m = A(x_m), \quad (3.131)$$

$$\beta_m = \beta|_{x_0=x_m}, \quad (3.132)$$

$$b_R = \int_0^1 g(z, x_m) dz, \quad (3.133)$$

$$g(z, x_m) = R(z, x_m) f(z, x_m) - R(0, x_m) f_0(z, x_m). \quad (3.134)$$

Como exemplo, utilizaremos a métrica de *wormole* Damour-Solodukhin [81] para calcular o valor do ângulo de deflexão da equação (3.128). Logo, escrevendo explicitamente a métrica Damour-Solodukhin

$$ds^2 = -(g(r) + \lambda^2)dt^2 + \frac{dr^2}{g(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.135)$$

onde $g(r) = 1 - \frac{1}{r}$ é o termo padrão da métrica de Schwarzschild e λ é um parâmetro adimensional. Se substituirmos os termos da métrica do *wormole* Damour-Solodukhin, equação (3.135), nas equações (3.123), (3.125) e (3.127) obteremos as seguintes expressões

$$R(z, x_0) = \left(\frac{2M - \lambda^2 x_0}{M} \right) \left(\sqrt{\frac{1 + 2z - z\lambda^2 + \lambda^2}{1 + 2z - z\lambda^2 - 2\lambda^2}} \right), \quad (3.136)$$

$$f(z, x_0) \sim f_0(z, x_0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha z + \beta z^2}}, \quad (3.137)$$

$$\alpha = \frac{(\lambda^2 x_0 - 2M)(3M - x_0(1 + \lambda^2))}{M x_0} \quad (3.138)$$

$$\beta = \frac{(\lambda^2 x_0 - 2M)^2 (6M - x_0(1 + \lambda^2))}{4M^2 x_0}. \quad (3.139)$$

O próximo passo será determinar o raio da fotosfera, com base na equação (3.116) encontraremos

$$x_m = \frac{3M}{1 + \lambda^2}, \quad (3.140)$$

e o parâmetro de impacto crítico é imediatamente determinado pela equação (3.116)

$$u_m = 3\sqrt{3}M(1 + \lambda^2)^{3/2}. \quad (3.141)$$

Logo as demais equações no ponto mínimo serão

$$R(z, x_m) = \left(\frac{2 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \right) \left(\sqrt{\frac{1 + 2z - z\lambda^2 + \lambda^2}{1 + 2z - z\lambda^2 - 2\lambda^2}} \right) \quad (3.142)$$

$$\alpha_m = \alpha|_{x_0=x_m} = 0, \beta_m = \beta|_{x_0=x_m} = \frac{(\lambda^2 - 2)^2}{4(1 + \lambda^2)}, y_m = A(x_m) = \frac{1 + \lambda^2}{3}, \quad (3.143)$$

$$g(z, x_m) = \frac{2}{z} \left[\sqrt{\frac{3 \{(1 + \lambda^2) - z(\lambda^2 - 2)\}}{\{(1 - 2\lambda^2) - z(\lambda^2 - 2)\} \{z(\lambda^2 - 2) + 3(1 + \lambda^2)\}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda^2}}} \right]. \quad (3.144)$$

k. Nandi e seus colaboradores calcularam numericamente alguns valores dos coeficientes

das equações (3.140), (3.141), (3.142) e (3.143) e com isso podemos determinar como o ângulo de deflexão varia em termos do parâmetro λ . Os valores foram tabelados em [84] onde eles usam como campo de teste o buraco negro do centro da Via-Láctea, Sagitário A*, como podemos ver na tabela 4

Lens	λ	\bar{a}	\bar{b}	$u_m \times 10^{12}$ cm	θ_∞ (μ as)	s (μ as)	r (mag)
DS wh	0.05	1.0025	-0.4163	3.0876	25.8054	0.0323	6.8048
	0.04	1.0016	-0.4105	3.0835	25.7707	0.0322	6.8109
	0.03	1.0009	-0.4046	3.0802	25.7436	0.0322	6.8157
	0.02	1.0004	-0.4028	3.0779	25.7244	0.0321	6.8191
	0.01	1.0001	-0.4008	3.0765	25.7128	0.0321	6.8212
	0.001	1.0000	-0.4002	3.0761	25.7089	0.0321	6.8218
Sch bh	0	1.0000	-0.4002	3.0761	25.7089	0.0321	6.8218

Tabela 4: Coeficientes da lente gravitacional em campo forte e observáveis para wormhole DS

4 RESULTADOS TEÓRICOS OBTIDOS PARA WORMHOLES

Neste capítulo, nós calcularemos as frequências dos modos quasinormais de um *wormhole* transponível em gravidade *bumblebee*. O modelo de *wormhole bumblebee* é baseado na gravidade *bumblebee*, que exhibe uma quebra espontânea da simetria de Lorentz. Apoiado no parâmetro de violação de Lorentz λ , este modelo permite o cumprimento das condições de *flare-out* e energia, garantindo que matéria não exótica sustente o *wormhole*. Analisaremos os parâmetros do *bumblebee wormhole* para obter uma equação de Reege-Wheeler com potencial em forma de sino. Uma vez possamos mostrar que as barreiras de potenciais tenham um formato de sino, um comportamento muito semelhante ao caso de Schwarzschild, podemos calcular os QNMs por meio do método aproximado WKB tanto para as perturbações escalares quanto para as gravitacionais.

4.1 Wormholes em gravidade com violação espontânea da simetria de Lorentz

A teoria de supercordas exige 10 dimensões para ser consistente, sendo quatro delas as dimensões usuais e as seis demais dimensões compactas. Nesse cenário a simetria de Poincaré é naturalmente violada [133]. Isso implica que vácuo na teoria de supercordas naturalmente viola a simetria de Lorentz. Algum ponto do vácuo acaba por adquirir um valor esperado não nulo e por isso qualquer invariância no Lagrangiano não é satisfeita e isso leva a quebra espontânea de simetria de Lorentz [134, 135]. Tais violações são incorporadas ao chamado de modelo padrão de partículas estendidos (SME). Modelos de violação de Lorentz podem ser definidos a partir da dinâmica de um campo vetorial B_μ chamado de campo *bumblebee*. Vamos considerar um espaço-tempo de Riemann-Cartan de modo que podemos definir um campo de força que pode ser escrito na forma [135]

$$B_{\mu\nu} \equiv D_\mu B_\nu - D_\nu B_\mu + T_{\mu\nu}^\lambda B_\lambda = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (4.1)$$

Considerando por exemplo que um modelo simples que estejamos analisando seja descrito pela a seguinte ação

$$S_B = \int d^4x \left[\frac{1}{2\kappa} (eR + \xi e B^\mu B^\nu R_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} e B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - eV(B^\mu B_\mu \pm b^2) \right], \quad (4.2)$$

o termo ξ é uma constante de acoplamento não-mínimo e b^2 é uma constante. O termo V é um potencial em que podemos escolher que tenha um valor de mínimo em $B^\mu B_\mu \pm b^2 = 0$. Em certas regiões onde a torção e a curvatura são nulas, o potencial assume um valor não nulo $B^\mu = b^\mu$ tal que $b^\mu b_\mu = \mp b^2$. Esse resultado ainda é verdadeiro mesmo no caso limite

de um espaço-tempo assintoticamente plano de Minkowski.

Da equação (4.2) podemos derivar o tensor momento-energia em termos do campo de bumblebee

$$T_{\mu\nu}^B = -B_{\mu\alpha}B_\nu^\alpha - \frac{1}{4}B_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - Vg_{\mu\nu} + 2V'B_\mu B_\nu, \quad (4.3)$$

onde a derivada é tomada em relação ao argumento. As equações de movimento com relação as equações de Einstein estendida podem ser explicitamente escritas como

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \kappa T_{\mu\nu}^B + \xi \left[\frac{1}{2}B^\alpha B^\beta R_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - B_\mu B^\alpha R_{\alpha\nu} - B_\nu B^\alpha R_{\alpha\mu} + \frac{1}{2}D_\alpha D_\mu (B^\alpha B_\nu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}D_\alpha D_\nu (B^\alpha B_\mu) - \frac{1}{2}D^2(B_\mu B_\nu) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}D_\alpha D_\beta (B^\alpha B^\beta) \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

A derivada covariante do campo *bumblebee* nessa gravidade é definida como

$$D_\mu B^{\mu\nu} = 2V'B^\nu - \frac{\xi}{\kappa}B_\mu R^{\mu\nu}. \quad (4.5)$$

4.1.1 Wormholes em gravidade bumblebee

Vamos agora apresentar a solução de um *wormhole* em gravidade *bumblebee* sem a necessidade de matéria exótica. Soluções em gravidade *bumblebee* como a solução exata de um *wormhole* foi primeiramente resolvida no contexto de um buraco negro de Schwarzschild com o trabalho do Casana [136]. Posteriormente Övgun e seus colaboradores apresentam uma solução exata de um *wormhole* transponível em gravidade *bumblebee* [24]. Agora reescrevemos a equação (4.2) considerando a contribuição da matéria para a ação

$$S_B = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2\kappa} + \frac{1}{2\kappa} \xi B^\mu B^\nu R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - V(B_\mu B^\mu \pm b^2) \right] + \int dx^4 \mathcal{L}_m. \quad (4.6)$$

Podemos, a partir da ação, escrever as equações de Einstein modificadas, (4.4), em termos do escalar de curvatura R e do traço do tensor energia-momento T [24, 136]

$$R_{\mu\nu} - \kappa \left[T_{\mu\nu}^M + T_{\mu\nu}^B - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} (T^M + T^B) \right] = 0, \quad (4.7)$$

onde $T^M = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}^M$ e $\kappa = 8\pi G$. O tensor de energia-momento em gravidade *bumblebee* $T_{\mu\nu}^B$ agora é diretamente escrito como

$$T_{\mu\nu}^B = -B_{\mu\alpha}B_\nu^\alpha - \frac{1}{4}B_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - Vg_{\mu\nu} + 2V'B_\mu B_\nu + \frac{\xi}{\kappa} \left[\frac{1}{2}B^\alpha B^\beta R_{\alpha\beta} - g_{\mu\nu} \right. \\ \left. - B_\mu B^\alpha R_{\alpha\nu} - B_\nu B^\alpha R_{\alpha\mu} + \frac{1}{2}\nabla_\alpha \nabla_\mu (B^\alpha B_\nu) - \frac{1}{2}\nabla^2 (B_\mu B_\nu) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta (B^\alpha B^\beta) \right]. \quad (4.8)$$

Escrevemos explicitamente as equações de Einstein modificadas com base na equação do tensor energia-momento (4.8) e da equação (4.7) obteremos a seguinte expressão

$$E_{\mu\nu}^{in\,stein} = R_{\mu\nu} - \kappa \left(T_{\mu\nu}^M - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^M \right) - \kappa T_{\mu\nu}^B - 2\kappa g_{\mu\nu}V + \kappa B_\alpha B^\alpha g_{\mu\nu}V' \\ - \frac{\xi}{4}g_{\mu\nu}\nabla^2 (B_\alpha B^\alpha) - \frac{\xi}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\alpha \nabla_\beta (B^\alpha B^\beta) = 0. \quad (4.9)$$

Neste ponto, os autores da Ref. [24] escolhem uma solução de *wormhole* atravessável, estático e esfericamente simétrica na seguinte forma [24, 3]

$$ds^2 = e^{2\Lambda} dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4.10)$$

aqui a função *redshift* é feita nula ($\Lambda = 0$) e o vetor *bumblebee* b_μ é definido para ser correlacionado à função de forma do *wormhole* $b(r)$ como a seguir [24]

$$b_\mu = \left(0, \sqrt{\frac{a}{1 - \frac{b(r)}{r}}}, 0, 0 \right), \quad (4.11)$$

o termo a é uma constante positiva associada ao termo de violação de Lorentz. As componentes da equação (4.11) são escolhidas de modo a satisfazer a condição $b^\mu b_\mu = a$. Escolhemos nosso vetor de campo *bumblebee* de modo que apenas componente radial ser não nula. Além disso, seguindo a referência [24], o tensor de energia-momento é considerado isotrópico e pode ser decomposto como um fluido perfeito $(T_\nu^\mu)^M = (\rho, -P, -P, -P)$ onde

$$P = w\rho, \quad (4.12)$$

assumindo $\rho \geq 0$. O $-\frac{1}{3} < w \leq 1$ é uma constante adimensional responsável por manter as condições de energia. Substituindo a métrica do *wormhole*, equação (4.10), na equação de Einstein (4.9) obteremos as seguintes novas equações de Einstein com a dependência $b(r)$ e w

$$E_{tt}^{in\,stein} = -\kappa\rho r^3(1+3w) + \lambda r\dot{b}(r) - \lambda b(r) = 0, \quad (4.13)$$

$$E_{rr}^{in\,stein} = \kappa\rho r^3(w-1) + (2+3\lambda)r\dot{b} - (2+3\lambda)b(r) = 0, \quad (4.14)$$

$$E_{\theta\theta}^{in\,stein} = \kappa\rho r^3(w-1) + r\dot{b}(r) + (2\lambda+1)b(r) - 2\lambda r = 0, \quad (4.15)$$

onde $\lambda = a\xi$ é definido como o parâmetro de quebra de simetria de Lorentz (LSB) e o ponto denota a derivada relativa à coordenada r . A densidade de energia ρ pode ser obtida a partir do sistema de equações (4.13 – 4.15). Resolvendo diretamente ρ da equação (4.13) obteremos:

$$\rho = \frac{\lambda(r\dot{b}(r) - b(r))}{\kappa r^3(1+3w)}. \quad (4.16)$$

A função $b(r)$ pode ser encontrado multiplicanda $(w-1)$ pela Eq. (4.13) e somando com $(1+3w)$ multiplicado pela equação (4.15). Além disso, a condição na garganta do *wormhole* $b(r_0) = r_0$ leva às soluções

$$b(r) = \frac{\lambda r}{\lambda+1} + \frac{r_0}{\lambda+1} \left(\frac{r_0}{r}\right)^\gamma, \quad (4.17)$$

onde $\gamma(w, \lambda) = \frac{\lambda(5w+3)+3w+1}{\lambda(w-1)+3w+1}$. A derivada $\dot{b}(r)$ pode ser obtida diretamente como

$$\dot{b}(r) = \frac{\lambda}{\lambda+1} \left[1 - \frac{\gamma}{\lambda} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\gamma+1} \right]. \quad (4.18)$$

Finalmente, da equação (4.17) e da equação (4.18), a densidade de energia da equação (4.16) pode ser escrita na forma

$$\rho(r) = -\frac{2\lambda r_0^{\gamma+1}}{\kappa(\lambda(w-1)+3w+1)} r^{-(\gamma+3)}. \quad (4.19)$$

Na próxima subseção, analisamos os parâmetros λ e w para obter um caso especial de um *wormhole* Övgün, onde todas as condições de energia e *flare-out* são válidas. Definiremos também a configuração dos parâmetros para obter um potencial Regge-Wheeler com uma curva em forma de sino.

4.1.2 Condições de energia e flare-out do wormhole em gravidade bumblebee

Nesta subseção, analisamos as condições de energia impostas no *wormhole*. Resumimos as condições na Tabela 5. O NEC é a condição de energia Nula (na sigla inglesa), WEC é a condição de energia Fraca, SEC é a condição de energia Forte, DEC é as condições de energia dominante e FOC é a condição de *flare-out*.

NEC	WEC	SEC	DEC	FOC
$P + \rho \geq 0$	$\rho \geq 0$ and NEC	$\rho + 3P \geq 0$ and NEC	$\rho \geq P $	$\dot{b}(r) < 1$

Tabela 5: Condições de energia e flare-out.

Para limitar o parâmetro w , vamos supor que $\rho \geq 0$. Uma vez que $P = w\rho$ o DEC vale para $\rho \geq |w\rho|$ então $-1 \leq w \leq 1$. Por outro lado, o SEC é verificado para $(1 + 3w)\rho \geq 0$ então $w \geq -\frac{1}{3}$. O NEC é expresso como $(1 + w)\rho \geq 0$, então $w \geq -1$. Portanto, para obedecer a NEC, SEC e DEC, o parâmetro w deve ser tal que

$$-\frac{1}{3} \leq w \leq 1. \quad (4.20)$$

A partir de agora, definimos $\kappa = r_0 = 1$. A energia (4.19) é positiva quando $-\frac{2\lambda}{(\lambda(w-1)+3w+1)} > 0$ e se anula quando $r \rightarrow \infty$ para $\gamma > -3$. A região onde as condições são válidas é mostrada na Fig. 9.

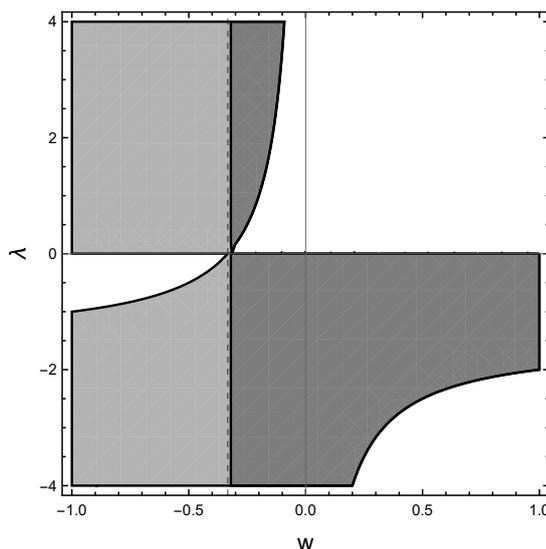


Figura 9: Representação da região onde as condições de energia são satisfeitas. Todas as condições são válidas para a região escura no intervalo $-\frac{1}{3} < w \leq 1$. (a linha tracejada vertical denota $w = -\frac{1}{3}$). Na região cinza, apenas o WEC está garantido.

Por outro lado, a condição flare-out (FOC) é necessária para manter a estrutura do *wormhole* atravessável [24, 138, 3, 137]. O FOC é escrito como

$$b(r) - r \leq 0 \quad \text{e} \quad r\dot{b}(r) - b(r) < 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{b}(r) < 1. \quad (4.21)$$

Considerando a equação (4.18), o FOC e a anulação da energia (4.19) quando $r \rightarrow \infty$, plotamos na figura 10 as regiões onde o FOC e as condições de energia são válidos.

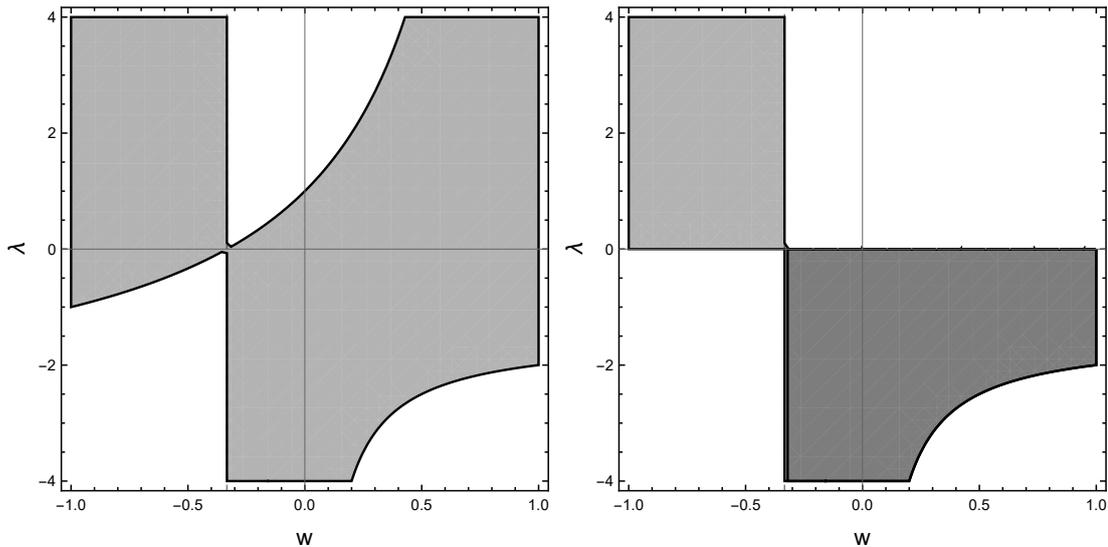


Figura 10: Representação da região onde os FOC são atendidos (esquerda). A interseção da energia e da condição de *flare-out* são indicadas à direita. Todas as condições de energia e *flare-out* são mantidas na região escura.

4.1.3 Coordenadas tartaruga e as condições de energia e de *flare-out*

Nessa subseção 4.1.4 obteremos a equação de Regge-Wheeler para o *wormhole* em gravidade *bumblebee* do mesmo tipo obtido por Övgün. Para este objetivo, uma transformação da variável radial r em uma nova variável x (coordenada tartaruga) é necessária. Esta transformação, para $\Lambda = 0$, é dada pela seguinte integral: [69, 70]

$$x = \int dr \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}}}. \quad (4.22)$$

Para obter uma função analítica na coordenada x , escolhamos $w = -1$ e $r_0 = 1$, que transformam a função forma da equação (4.17) em

$$b(r) = \alpha r + \frac{\beta}{r}, \quad (4.23)$$

onde $\alpha = \frac{\lambda}{\lambda+1}$ e $\beta = \frac{1}{\lambda+1} = (1 - \alpha)$.

Portanto, resolvendo a equação (4.22) inserindo a equação (4.23), a coordenada tartaruga pode ser expressa como

$$x = \beta^{-1} \sqrt{\beta(r^2 - 1)} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\beta x^2 + 1}. \quad (4.24)$$

Para esta escolha particular de $w = -1$, a SEC é violada. No entanto, a energia da equação (4.19) torna-se $\rho(r, \lambda) = \frac{\lambda}{\lambda+1} r^{-4}$ que é positivo quando $\lambda > 0$ ou $\lambda < -1$. Portanto, o DEC, NEC e WEC ainda se mantêm. O FOC obtido por $\dot{b}(r)$ da equação. (4.23) lê $\frac{\lambda}{(\lambda+1)} - \frac{r^{-2}}{(\lambda+1)} < 1$, que é válido para $\lambda > -1$. A figura. 11 mostra o comparecimento de

DEC, NEC, WEC e FOC para $w = -1$ e $\lambda > 0$.

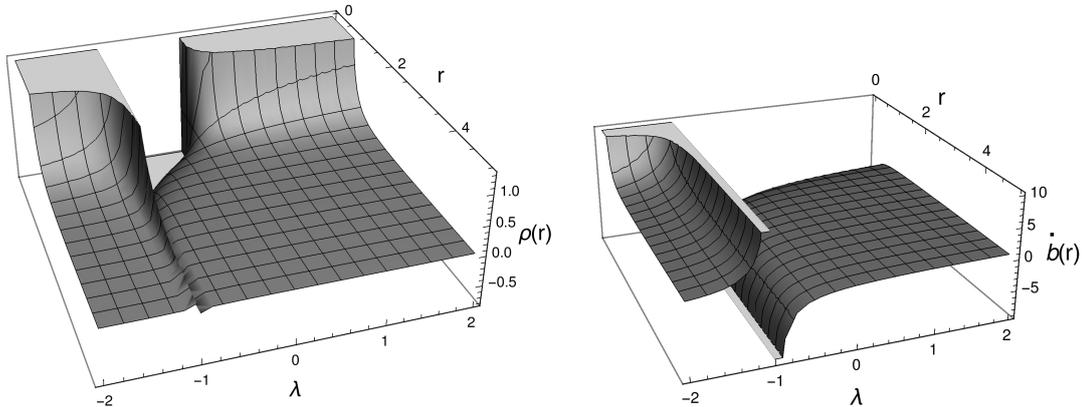


Figura 11: A densidade de energia $\rho(r)$ é sempre positiva para $w = -1$ quando $\lambda > 0$ ou $\lambda < -1$ (painel esquerdo). As condições de *flare-out* são sempre verificadas para $w = -1$ e $\lambda > -1$ (painel direito).

Além disso, na subseção 4.1.4, precisamos definir um valor para λ para calcular os modos quasinormais. Para uma análise qualitativa, vamos escolher $\lambda = 1$. A Figura 12 mostra a densidade de energia $\rho(r)$, a função de forma $b(r)$ e sua derivada $\dot{b}(r)$ com $w = -1$ e $\lambda = 1$ fixo. Portanto, observamos que, exceto a SEC, todas as outras condições acima mencionadas são satisfeitas.

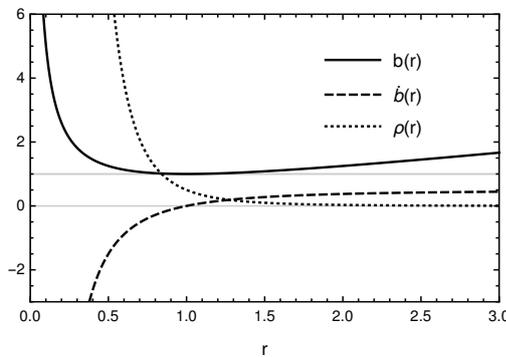


Figura 12: Gráfico da função de forma $b(r)$, sua derivada $\dot{b}(r)$ e a densidade de energia $\rho(r)$, com $w = -1$ e $\lambda = 1$. As linhas retas cinza $y = 0$ e $y = 1$ nos ajudam a verificar o WEC e o FOC, respectivamente.

4.1.4 Equação de Regge-Wheeler e MQNs

Nesta seção, obteremos a equação de onda para o wormhole bumblebee. Vamos considerar uma perturbação externa, ignorando a *back-reaction*, e seguindo todo procedimento detalhado de linearização para as perturbações escalar e axial gravitacional das referências [69, 70, 139, 140, 141]. Considerando uma solução estacionária na forma $\Psi(x, t) = \varphi(x)e^{-i\omega t}$, uma versão simplificada da chamada equação de Regge-Wheeler pode ser representada por

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 - V(r, l) \right) \varphi(x) = 0, \quad (4.25)$$

sendo $\varphi(x)$ é a função de onda (para as perturbações escalares ou gravitacionais) com x sendo a coordenada tartaruga (4.24), ω é a frequência e $V(r, l)$ é o potencial de Regge-Wheeler onde l é o número quântico azimutal, relacionado ao momento angular.

Para as perturbações escalares, o potencial $V(r, l)$ é escrito na forma [70, 140]

$$V_s(r, l) = e^{2\Lambda} \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{\dot{b}r - b}{2r^3} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{b}{r} \right) \dot{\Lambda} \right]. \quad (4.26)$$

Uma vez que $\Lambda = 0$ e pela substituição de $b(r)$, equação(4.23), no potencial (4.26), o potencial fica

$$V_s(r, l) = \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\beta}{r^4} \text{ em coordenadas } x, \text{ segunda a equação (4.24) se torna}$$

$$V_s(x, l) = \frac{l(l+1)}{\left(\frac{x^2}{\lambda+1} + 1 \right)} + \left(\frac{1}{\lambda+1} \right) \left(\frac{x^2}{\lambda+1} + 1 \right)^{-2}. \quad (4.27)$$

Para as perturbações gravitacionais, o potencial $V(r, l)$ tem a forma a baixo

$$V_g(r, l) = e^{2\Lambda} \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\dot{b}r - 5b}{2r^3} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{b}{r} \right) \dot{\Lambda} \right]. \quad (4.28)$$

Com $b(r)$ dado pela equação (4.23), o potencial $V_g(r, l) = \frac{l(l+1)-2\alpha}{r^2} - \frac{3\beta}{r^4}$ na coordenada x (4.22) se torna

$$V_g(x, l) = \left(l(l+1) - 2\frac{\lambda}{\lambda+1} \right) \left(\frac{x^2}{\lambda+1} + 1 \right)^{-1} - \frac{3}{\lambda+1} \left(\frac{x^2}{\lambda+1} + 1 \right)^{-2}. \quad (4.29)$$

A figura 13 mostra os gráficos do potencial escalar da equação (4.27) e o potencial gravitacional da equação (4.29). Observe que ambos os potenciais são potenciais simétricos em forma de sino centrados na origem. O aumento do momento angular aumenta os picos de potenciais. Para a perturbação escalar, todos os potenciais são repulsivos. No entanto, para a perturbação tensorial, os primeiros dois valores de l conduzem a potenciais atrativos. A altura dos picos muda o comportamento dos MQNs, conforme discutido na próxima subseção.

4.1.5 MQNs e o domínio temporal

Para calcular os MQNs da equação de Regge-Wheeler (4.25), aplicamos o método semianalítico da aproximação WKB de terceira ordem apresentada na referência[61]. Esse método requer um potencial positivo em forma de sino, mas as frequências confiáveis são obtidos apenas para $n < l$ [18]. Portanto, impomos $l \geq 4$ para o cálculo dos primeiros

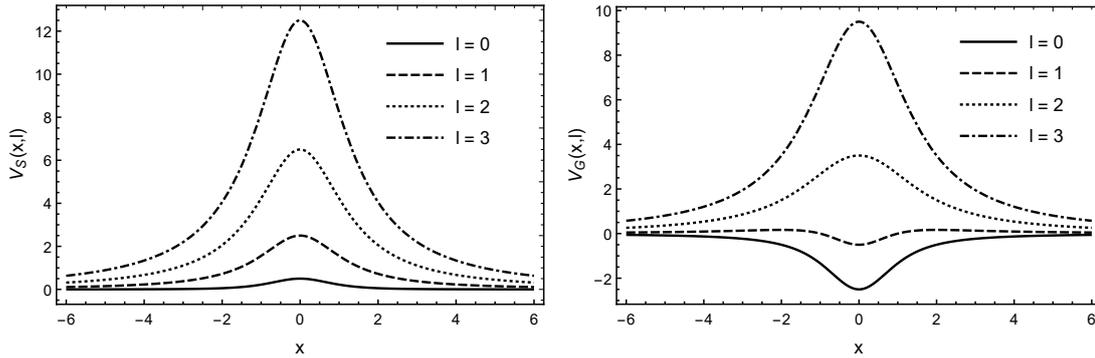


Figura 13: Os potenciais escalar (à esquerda) e gravitacional (à direita) da equação de Regge-Wheeler para alguns parâmetros l e $\lambda = 1$. No caso dos potenciais gravitacionais apenas a partir de $l \geq 2$ estes potenciais são relevantes

quatro modos ($n = 0, 1, 2, 3$) para as perturbações escalar e tensorial.

Resumidamente, os MQNs podem ser encontrados na fórmula [61, 18, 141]

$$\frac{i(\omega_n^2 - V_0)}{\sqrt{-2\ddot{V}_0}} - \sum_{i=2}^6 \Lambda_i = n + \frac{1}{2}, \quad (4.30)$$

onde \ddot{V}_0 é a segunda derivada do potencial no máximo x_0 e Λ_i são coeficientes que depende de combinações das revidas do potencial. O termo n denota os valores dos modos mais altos. Como resultado, os modos quasinormais para as perturbações escalares são escritos na Tabela 6. Todas as frequências encontradas têm parte imaginária negativa, denotando oscilações de amortecimento [142, 143, 141].

ω_n	$l = 4$	$l = 5$	$l = 6$
$n = 0$	$\pm 4.499130 - 0.355065 i$	$\pm 5.499520 - 0.354591 i$	$\pm 6.499710 - 0.354307 i$
$n = 1$	$\pm 4.441050 - 1.068920 i$	$\pm 5.452660 - 1.066160 i$	$\pm 6.460380 - 1.064590 i$
$n = 2$	$\pm 4.327290 - 1.793450 i$	$\pm 5.360180 - 1.784700 i$	$\pm 6.382470 - 1.779780 i$
$n = 3$	$\pm 4.162200 - 2.534190 i$	$\pm 5.224440 - 2.514160 i$	$\pm 6.267380 - 2.502820 i$

Tabela 6: MQNs para as perturbações escalares (4.27) com $w = -1$, $\kappa = r_0 = \lambda = 1$ e alguns l .

Da mesma forma, os modos quasinormais para as perturbações gravitacionais estão escritos na Tabela 7. Começamos com $l = 4$, para garantir potenciais positivos e $n < l$. Novamente, todas as frequências têm parte imaginária negativa. Além disso, a figura 14 mostra os pontos das Tabelas MQNs 6 e 7. Observe que todos os modos têm curvas suaves onde o aumento de l aumenta o módulo da parte real de cada modo. A parte imaginária muda ligeiramente com l , mas aumenta com n . Contudo, o aumento do número de modos para $n > l$ pode levar a resultados não confiáveis por meio do método WKB, exigindo uma abordagem numérica.

Observando a figura 15, o domínio temporal do *wormhole* de *bumblebee* é ava-

ω_n	$l = 4$	$l = 5$	$l = 6$
$n = 0$	$\pm 4.156050 - 0.335541 i$	$\pm 5.221450 - 0.341988 i$	$\pm 6.26571 - 0.345476 i$
$n = 1$	$\pm 4.101510 - 1.010760 i$	$\pm 5.175990 - 1.028450 i$	$\pm 6.227100 - 1.038130 i$
$n = 2$	$\pm 3.995510 - 1.697660 i$	$\pm 5.086450 - 1.722130 i$	$\pm 6.15064 - 1.735770 i$
$n = 3$	$\pm 3.843440 - 2.401700 i$	$\pm 4.955440 - 2.427030 i$	$\pm 6.037830 - 2.441370 i$

Tabela 7: MQNs para as perturbações gravitacionais (4.29) com $w = -1$, $\kappa = r_0 = \lambda = 1$ e alguns l .

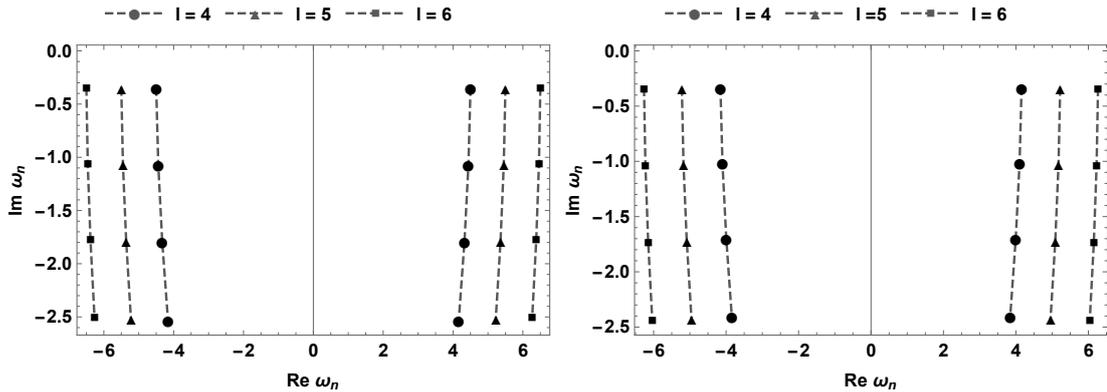


Figura 14: Gráfico de MQNs para perturbações escalares (esquerda) e gravitacionais (direita) com $\lambda = 1$.

liado pelo método de Gundlach [144]. Observe que ambas as perturbações exibem perfis de amortecimento, sendo a diminuição dos modos escalares mais lenta do que os modos gravitacionais. Além disso, o parâmetro l acelera o decaimento dessas soluções.

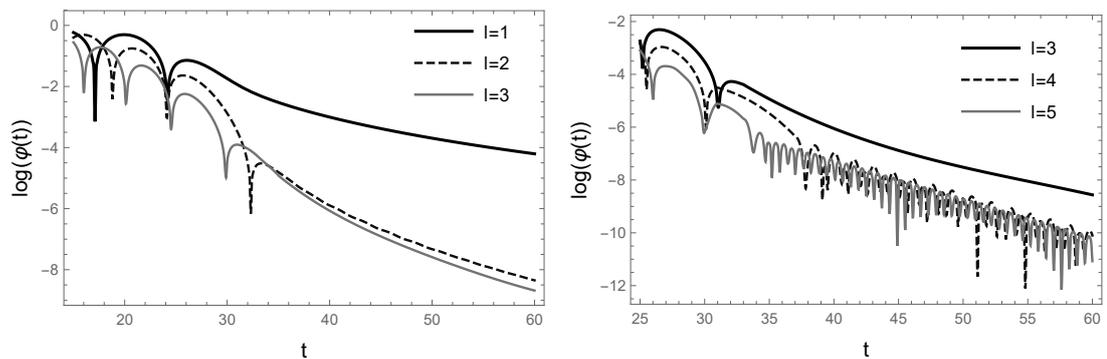


Figura 15: Domínio temporal $\log_{10}(\varphi(t))$ para as perturbações escalares (esquerda) e gravitacionais (direita) com $\lambda = 1$.

Nessa seção, estudamos o *wormhole* de *bumblebee*. Este cenário possui um parâmetro de violação de Lorentz λ , que permite a preservação das condições de energia, levando a um *wormhole* gerado por matéria não exótica [24]. Estudamos as possíveis escolhas dos parâmetros λ e w (associados à relação $P = w\rho$) que satisfazem a condição de *flare-out* e as condições de energia, conforme mostrado na figura 9. Para obter uma transformação analítica e simplificada das coordenadas da tartaruga da equação 4.24,

renunciamos à condição SEC. No entanto, todos os outros, nomeadamente, NEC, WEC, DEC e FOC permanecem válidos. Além disso, as perturbações escalar e tensorial do wormhole de *bumblebee* foram obtidas. Usamos as expressões gerais para o potencial escalar e gravitacional. Ambos os potenciais admitem formato de sino positivo (ver figura 13). Portanto, avaliamos as frequências MQNs para ambas as perturbações usando o método WKB. Os MQNs são confiáveis para $n < l$ (conforme denotado nas tabelas 6 e 7) e exibem curvas suaves (ver figura 14). Também, calculamos o perfil no domínio temporal para ambas as perturbações na figura 15, de onde notamos que todos os MQNs estudados realizam perfis de oscilação de amortecimento.

4.1.6 Deflexão de luz pelo teorema de Gauss-Bonnet em gravidade Kalb-Ramond

Nesta subsecção, analisamos a deflexão da luz por um *wormhole* estático esfericamente simétrico de gravidade não minimamente acoplado a um VEV do campo Kalb-Ramond. Trataremos de calcular o ângulo de deflexão da luz no caso da intensidade do campo gravitacional ser fraco, ou seja, estamos distantes do centro espalhador da lente. Então, é conveniente usar o teorema de Gauss-Bonnet porque leva em consideração a natureza topológica do espaço-tempo do *wormhole* e simplifica o cálculo [24, 76, 79].

Vale descrever a dinâmica do campo de Kalb-Ramond (KB) acoplado aos termos usuais da ação de Einstein-Hilbert. O campo de Kalb-Ramond (KR) é um campo tensor antissimétrico $B_{\mu\nu}$ que surge no espectro da teoria das cordas bosônicas, que assume um valor esperado de vácuo [183, 184]. A interação dos termos de Kalb-Ramond com alguns termos de outros campos leva quebra espontânea da simetria de Lorentz. Logo, podemos escrever a ação do campo de KB não minimamente acoplado a gravidade como

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{KR} = \int e \, d^4x \left[\frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{12} H_{\lambda\mu\nu} H^{\lambda\mu\nu} - V(B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \pm b_{\mu\nu} b^{\mu\nu}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2\kappa} \left(\xi_2 B^{\lambda\nu} B^\mu{}_\nu R_{\lambda\mu} + \xi_3 B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} R \right) + \mathcal{L}^M \right], \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde ξ_2 e ξ_3 são constantes de acoplamento não mínimas e e é o determinante da métrica e $\kappa = 8\pi G$ é a constante de acoplamento gravitacional. O potencial de auto-interação $V = V(B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \pm b_{\mu\nu} b^{\mu\nu})$ assume um valor esperado não nulo no vácuo (VEV) $\langle B_{\mu\nu} \rangle = b_{\mu\nu}$. De modo semelhante ao que fizemos com a violação de Lorentz na dinâmica de *bumblebee*, vamos considerar o campo KB na sua configuração de vácuo $B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} = b_{\mu\nu} b^{\mu\nu}$.

As equações de movimento modificadas no contexto do campo KR podem ser

escritas como [186, 185, 184]

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}^{\xi_2} + \kappa T_{\mu\nu}^M, \quad (4.32)$$

onde $T_{\mu\nu}^M$ é campo de matéria e $T_{\mu\nu}^{\xi_2}$ é definido por

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\xi_2} = \frac{\xi_2}{\kappa} & \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu} B^{\alpha\gamma} B^\beta{}_\gamma R_{\alpha\beta} - B^\alpha{}_\mu B^\beta{}_\nu R_{\alpha\beta} \right. \\ & - B^{\alpha\beta} B_{\mu\beta} R_{\nu\alpha} - B^{\alpha\beta} B_{\nu\beta} R_{\mu\alpha} \\ & + \frac{1}{2} D_\alpha D_\mu (B_{\nu\beta} B^{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} D_\alpha D_\nu (B_{\mu\beta} B^{\alpha\beta}) \\ & \left. - \frac{1}{2} D^2 (B^\alpha{}_\mu B_{\alpha\nu}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} D_\alpha D_\beta (B^{\alpha\gamma} B^\beta{}_\gamma) \right]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Com base na métrica do *wormhole*, equação (3.1), substituindo nas equações (4.33) após uma série de cálculos encontraremos a métrica de um *wormhole* no contexto de KB

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{2}{1-2\lambda}}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (4.34)$$

Para uma dedução detalhada veja [184]. Comparando a função forma do wormhole de KR, equação (4.23), com a função forma do *wormhole* em gravidade *bumblebee*, equação (4.34), vemos ambas as soluções são potencias da variável radial. Além disso, notamos que a no caso da equação (4.23) quando o termo de violação λ é nulo obteremos como caso particular ainda um *wormhole* transponível. Porém no caso da função forma da equação (4.34), quando fator λ é nulo não obteremos um *wormhole* transponível como caso particular.

Considerando uma superfície orientada, vamos definir um domínio (D, χ, g) como um subconjunto de um conjunto compacto com um limite (\mathcal{D}_R, χ, g) com um fator característico de Euler χ e métrica g [79]. Portanto, o teorema de Gauss-Bonnet, que nos dá o ângulo de deflexão,

$$\int \int_{\mathcal{D}_R} K dS + \oint_{\partial\mathcal{D}_R} k dt + \sum_i \theta_i = 2\pi\chi(\mathcal{D}_R), \quad (4.35)$$

onde \mathcal{D}_R é uma região que contém a fonte dos raios de luz, o referencial do observador e o centro da lente. Esta região é limitada pelos raios externos, representados pelo limite $\partial\mathcal{D}_R$. O termo k é identificado como uma curvatura geodésica. Para simplificar, podemos considerar que para o observador, a soma dos ângulos externos θ_i torna-se π , desde que a distância radial seja $R \rightarrow \infty$ [119]. A solução do wormhole não é singular, então a característica de Euler $\chi(\mathcal{D}_R)$ é diferente de zero é, para nossos propósitos, igual a 1 [79]. Logo, a equação (4.35) torna-se

$$\int \int_{\mathcal{D}_R} K dS + \oint_{\partial \mathcal{D}_R} \kappa dt = \pi. \quad (4.36)$$

Agora vamos considerar nossa métrica escrita na forma geral

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 - g_{rr} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4.37)$$

aqui a configuração dos termos métrica são $g_{tt} = 1$ e $g_{rr} = \frac{1}{1-r^{1-2\lambda}}$. Se considerarmos o fóton se movendo no plano equatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$ e segundo a equação (4.37), a métrica do caminho óptico é escrita na forma

$$dt^2 = \frac{dr^2}{1-r^{1-2\lambda}} + r^2 d\phi^2. \quad (4.38)$$

Os termos da métrica do caminho óptico são identificados como $\bar{g}_{rr} = \frac{1}{1-r^{1-2\lambda}}$ e $\bar{g}_{\phi\phi} = r^2$.

A curvatura geodésica é definida por [145]:

$$\kappa(C_R) = | \nabla_{\dot{C}_R} \dot{C}_R |. \quad (4.39)$$

Escrevendo o componente radial da equação (4.39)

$$\left(\nabla_{\dot{C}_R} \dot{C}_R \right)^r = \dot{C}_R^\phi \left(\partial_\phi \dot{C}_R^r \right) + \Gamma_{\phi\phi}^r \left(\dot{C}_R^\phi \right)^2, \quad (4.40)$$

o termo $\Gamma_{\phi\phi}^r$ é o símbolo de Christoffel que se refere ao caminho óptico da equação (4.38), que resulta em

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = \frac{1}{2} \bar{g}^{rr} \frac{\partial \bar{g}_{\phi\phi}}{\partial r} = -r \left(1 - r^{1-2\lambda} \right). \quad (4.41)$$

A distância radial pode ser considerada uma constante muito grande, de modo que podemos escrever $r \equiv R \rightarrow \infty$. Como \dot{C}_R não depende de ϕ , então apenas o último termo da equação (4.40) contribui. Devido ao termo $\dot{C}_R = 1/R$ [146], e a equação (4.39) nos diz que

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} k(C_R) &= \lim_{R \rightarrow \infty} | \nabla_{\dot{C}_R} \dot{C}_R | = \frac{\left(1 - R^{1-2\lambda} \right)}{R} \\ &\rightarrow \frac{1}{R}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Observe que, se considerarmos todo λ que verifica a relação $\frac{2}{1-2\lambda} < 0$, então o último termo da equação (4.42) é obtido.

Agora a curvatura de Gauss K pode ser calculada pela expressão encontrada nas referências [147, 148]. No caso de $g_{tt}(r) = 1$ e levando em consideração que \bar{g}_{rr} e $\bar{g}_{\phi\phi}$

são independentes de ϕ , então da equação toma a forma

$$K = \frac{1}{\bar{g}_{rr}} \frac{1}{r} \frac{d \ln(\sqrt{\bar{g}_{rr}})}{dr}. \quad (4.43)$$

O elemento de superfície infinitesimal é definido pela expressão,

$$dS = \sqrt{\bar{g}_{rr}} r dr d\phi, \quad (4.44)$$

onde

$$\bar{g}_{rr} = \frac{1}{1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{2}{1-2\lambda}}}. \quad (4.45)$$

Substituindo a equação (4.43) na equação (4.44) obteremos

$$K dS = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{rr}}} \frac{d \ln(\sqrt{\bar{g}_{rr}})}{dr} dr d\phi = -\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{rr}}} \right) dr d\phi. \quad (4.46)$$

Agora, da equação (4.38) obtemos para $R = \text{const}$ a expressão

$$dt = R d\phi. \quad (4.47)$$

Substituindo as equações (4.42) e (4.47) na equação (4.36), simplificamos nossos cálculos e assim obtemos

$$\int \int_{\mathcal{D}_\infty} K dS + \int_0^{\pi+\alpha} \frac{1}{R} R d\phi = \pi. \quad (4.48)$$

Como os raios de luz provêm de uma fonte no infinito até uma certa distância radial tal que campo gravitacional seja suficientemente fraco, então os raios são aproximadamente retos e podemos usar uma condição $r = \frac{\sigma}{\sin(\phi)}$ [149]. Onde σ é o parâmetro de impacto. Se substituirmos as equações (4.45) e (4.46) na equação (4.48), encontramos

$$\alpha = - \int_0^\pi \int_{\frac{\sigma}{\sin(\phi)}}^\infty K dS = \int_0^\pi \int_{\frac{\sigma}{\sin(\phi)}}^\infty \frac{d}{dr} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{2}{1-2\lambda}}} dr d\phi, \quad (4.49)$$

que integrando em relação à variável r se transforma em

$$\alpha = \int_0^\pi \sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{2}{1-2\lambda}}} \Big|_{\frac{\sigma}{\sin(\phi)}}^\infty d\phi \Rightarrow \alpha = \int_0^\pi \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{r_0 \sin \phi}\right)^{\frac{2}{1-2\lambda}}} \right) d\phi. \quad (4.50)$$

Apesar da complexidade da equação (4.50), expressões analíticas ainda podem ser encontradas para $\lambda = \frac{3}{2}$ e $\lambda = 1$. Para o valor $\lambda = \frac{3}{2}$, o ângulo de deflexão assume a forma

$$\alpha = \pi - \frac{4\sqrt{\sigma - r_0}\sqrt{\sigma} E\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{2r_0}{\sigma - r_0}\right)}{\sigma}, \quad (4.51)$$

onde $E(x, y)$ se refere à função elíptica do segundo tipo. Podemos escrever a nova variável $z = \frac{r_0}{\sigma} \ll 1$ e expandindo a equação (4.51) em termos de z e encontramos,

$$\alpha = \frac{r_0}{\sigma} + \pi \left(\frac{r_0}{4\sigma}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{r_0}{\sigma}\right)^3. \quad (4.52)$$

No segundo caso, para o valor $\lambda = 1$, o último termo da equação (4.50) nos diz que o ângulo de deflexão é

$$\alpha = \pi - 2E\left(\frac{r_0^2}{\sigma^2}\right). \quad (4.53)$$

Expandindo a equação (4.53) em termos de $z = \frac{r_0}{\sigma}$ encontramos

$$\alpha = \pi \left(\frac{r_0}{2\sigma}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{r_0}{\sigma}\right)^3. \quad (4.54)$$

A figura 16 descreve o comportamento do ângulo de deflexão α em relação ao parâmetro de impacto σ para $\lambda = 1$ e $\lambda = 3/2$. Da mesma forma que o *wormhole* de *bumblebee* [24], o KR apresenta uma dependência da violação de Lorentz na deflexão da luz. Notamos ao observar a figura 16 que para um valor maior de λ teremos uma suavização no valor do ângulo de desvio em função do parâmetro de impacto b . Quando comparamos os desvios dos ângulos de deflexão gerados por *wormholes* de *bumblebee* com os dos *wormholes* de KR teremos que os valores produzidos *wormholes* de *bumblebee* variam de modo mais suave que de KR, como mostrado pela figura. Concluimos também que quando λ cresce ambos os *wormholes* *bumblebee* e KB tende a reduzir a taxa de decrescimento dos ângulos de desvio em função do parâmetro de impacto b .

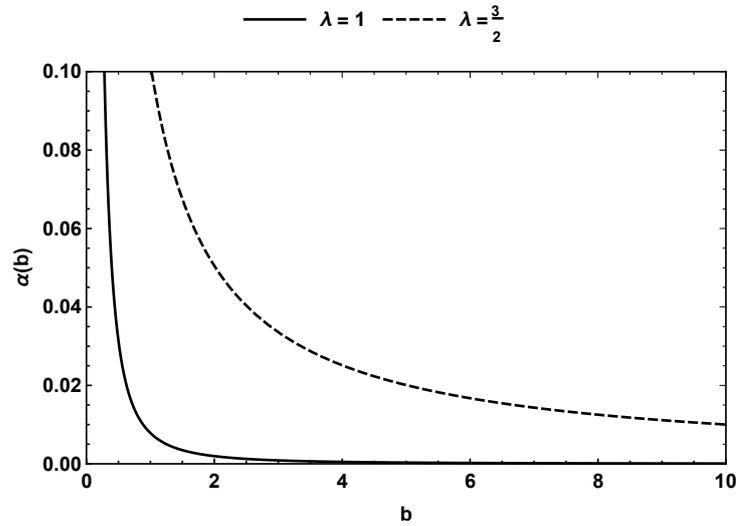


Figura 16: Ângulo de deflexão da luz em função do parâmetro de impacto b para os valores $\lambda = 1$ e $\lambda = \frac{3}{2}$, com $r_0 = 0.1$.

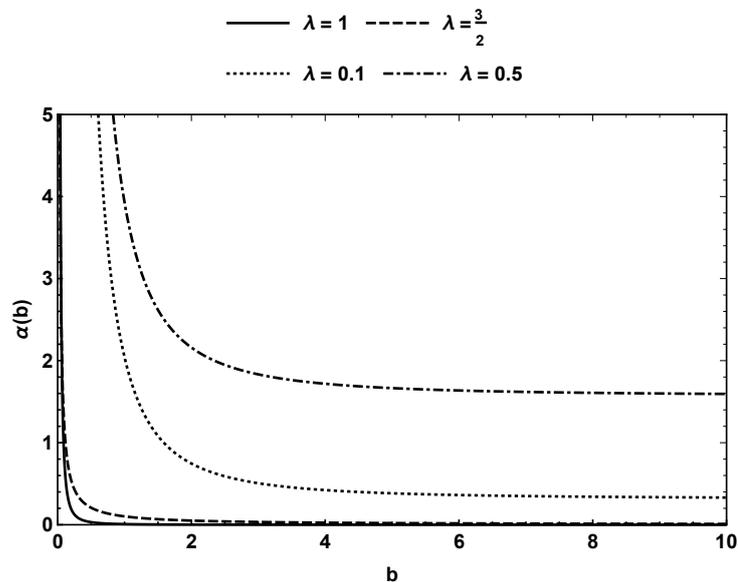


Figura 17: Comparação dos ângulos desvios de luz em termos do parâmetro de impacto b para os wormholes de Kalb-Ramond ($\lambda = 1$ e $\lambda = \frac{3}{2}$) e para *wormholes* de *bumblebee*, ($\lambda = 0.1$ e $\lambda = \frac{1}{2}$). Notamos que os valores de desvio dos ângulos são mais suáveis para os *wormholes* de *bumblebee*.

5 RESULTADOS TEÓRICOS OBTIDOS PARA BURACOS NEGROS

Nesse capítulo exploramos os resultados obtidos em algumas métricas novas de buracos negros, como os MQNs e desvio de luz. Primeiramente calcularemos os MQNs devido a uma solução do tipo de Schwarzschild em gravidade *bumblebee* e além de explorarmos o domínio temporal dos modos. Em seguida determinaremos o desvio de luz por lente gravitacional devido um buraco negro em rotação regular e um buraco negro em baixa rotação em gravidade Einstein-*bumblebee*.

5.1 MQNs em solução do tipo Schwarzschild em gravidade com violação espontânea da simetria de Lorentz

Uma solução de um buraco negro no contexto da gravidade do *bumblebee* foi proposta na referência [150]. A métrica desta solução do tipo Schwarzschild com a violação espontânea de Lorentz é representada por [150]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - (1 + \lambda) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (5.1)$$

definimos a massa $M = 1/2$ e $\lambda \ll 1$ é o parâmetro LV (para $\lambda = 0$ o buraco negro de Schwarzschild usual é obtido). Na verdade, os limites superiores do parâmetro LV são muito pequenos e podem ser ajustados pelas mudanças no periélio dos planetas, por exemplo. Conforme presente na referência [150], para que a violação de Lorentz não seja verificada (ser menor que o erro observacional), o parâmetro adimensional $\lambda < 10^{-12}$ para o periélio de Mercúrio.

Para calcular MQNs, o método WKB será aplicado. Uma vez que a solução da Eq. (5.1) compartilha muitas semelhanças com a métrica Schwarzschild, esperamos encontrar uuns MQNs semelhantes ligeiramente alterados pelo parâmetro LV. Para tanto, as perturbações do buraco negro são descritas pela equação de onda semelhante a Schrödinger, a chamada equação de Regge-Wheeler [61, 63]:

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + Q(x) \psi(x) = 0, \quad (5.2)$$

onde x é a coordenada da tartaruga. O termo $Q(x) = \omega^2 - V(x)$ depende do potencial $V(x)$ e das frequências ω . Além disso, a função de onda ψ é imposta a seguir as condições:

$$\psi(x) \sim C_{\pm} e^{\mp i\omega t} \quad \text{when } x \rightarrow \pm\infty. \quad (5.3)$$

O potencial $V(x)$ deve ter um máximo centrado em x_0 e dois pontos de retorno x_1 e x_2 .

O potencial nos limites ($x = -\infty$) e ($x = +\infty$) assumem valores constantes. Portanto, o potencial deve apresentar um perfil em forma de sino.

Vamos usar como exemplo o buraco negro de Schwarzschild usual. A solução Schwarzschild tem o seguinte potencial na coordenada original r [63]:

$$\mathcal{V}(x(r)) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{1-s^2}{r^3}\right), \quad (5.4)$$

o parâmetro l é o momento angular orbital e s é o spin das perturbações de campo. Para $s = 0$ o potencial para um campo escalar é mostrado na figura 18, onde o potencial de barreira em forma de sino é verificado. Observe que para os demais spins exibem um perfil semelhante, uma vez que a única modificação ocorre no termo $(1 - s^2)$. Uma vez que a perturbação com spin mais alta estudada aqui é o gravitacional ($s = 2$).

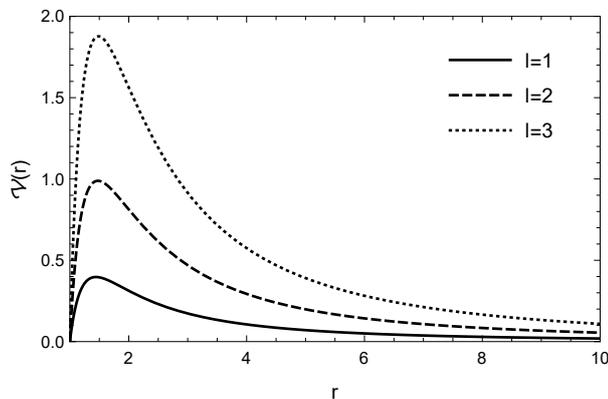


Figura 18: O potencial de Regge-Wheeler para o campo escalar no buraco negro de Schwarzschild com alguns valores de l .

Com essas condições, Iyer e Will [61] encontraram a expressão dos MQNs por meio do método WKB como sendo

$$\frac{i Q_0}{\sqrt{2 Q_0''}} - \Lambda(n) - \Omega(n) = n + \frac{1}{2}, \quad (5.5)$$

onde Q_0 é o valor do potencial em x_0 e os traços denotam derivadas relativas às coordenadas x . As correções compõem os termos $\Lambda(n)$ e $\Omega(n)$ até terceira ordem [16, 61]. Uma versão melhorada do método WKB foi apresentada na referência [63], onde as correções de alta ordem foram estudadas. Para a sexta ordem, o método WKB pode ser escrito como [63]

$$\frac{i Q_0}{\sqrt{2 Q_0''}} - \Lambda_2(n) - \Lambda_3(n) - \Lambda_4(n) - \Lambda_5(n) - \Lambda_6(n) = n + \frac{1}{2}. \quad (5.6)$$

A tabela 8 e a tabela 9 mostram os resultados da referência [63] do método WKB (terceira e sexta ordens) para as perturbações escalares e gravitacionais no buraco negro de Schwarzschild. Observe que os resultados da 6ª ordem são mais bem aproximados dos

valores numéricos do que a 3ª ordem do método WKB.

l, n	numerical	3rd order WKB	6th order WKB
$l = 0, n = 0$	$0.1105 - 0.1049i$	$0.1046 - 0.1152i$	$0.1105 - 0.1008i$
$l = 1, n = 0$	$0.2929 - 0.0977i$	$0.2911 - 0.0980i$	$0.2929 - 0.0977i$
$l = 1, n = 1$	$0.2645 - 0.3063i$	$0.2622 - 0.3074i$	$0.2645 - 0.3065i$
$l = 2, n = 0$	$0.4836 - 0.0968i$	$0.4832 - 0.0968i$	$0.4836 - 0.0968i$
$l = 2, n = 1$	$0.4639 - 0.2956i$	$0.4632 - 0.2958i$	$0.4638 - 0.2956i$
$l = 2, n = 2$	$0.4305 - 0.5086i$	$0.4317 - 0.5034i$	$0.4304 - 0.5087i$

Tabela 8: Os MQNs para $s = 0$, resultante da referência [63].

l, n	numerical	3rd order WKB	6th order WKB
$l = 2, n = 0$	$0.3737 - 0.0890i$	$0.3732 - 0.0892i$	$0.3736 - 0.0890i$
$l = 2, n = 1$	$0.3467 - 0.2739i$	$0.3460 - 0.2749i$	$0.3463 - 0.2735$
$l = 2, n = 2$	$0.3011 - 0.4783i$	$0.3029 - 0.4711i$	$0.2985 - 0.4776i$
$l = 3, n = 0$	$0.5994 - 0.0927i$	$0.5993 - 0.0927i$	$0.5994 - 0.0927i$
$l = 3, n = 1$	$0.5826 - 0.2813i$	$0.5824 - 0.2814i$	$0.5826 - 0.2813i$
$l = 3, n = 2$	$0.5517 - 0.4791i$	$0.5532 - 0.4767i$	$0.5516 - 0.4790i$
$l = 3, n = 3$	$0.5120 - 0.6903i$	$0.5157 - 0.6774i$	$0.5111 - 0.6905i$

Tabela 9: Os MQNs para $s = 2$, resultante da referência[63].

Nesta seção, calculamos a equação de Regge-Wheeler da equação (5.2) usando a métrica dada na equação (5.1), para ambas as perturbações dos campos escalar (spin $s = 0$) e gravitacional (spin $s = 2$). Como resultado, os modos quasinormais serão obtidos da equação (5.6), e a influência do parâmetro *bumblebee* sobre as frequências será analisada. Além disso, comparamos as diferenças na 3ª e 6ª ordem do método WKB.

5.1.1 MQNs das perturbações de campos escalares

Nesta subseção, o primeiro caso de spin $s = 0$, campo escalar será descrito. A equação de Klein-Gordon sem massa na presença da gravidade leva à seguinte equação de movimento

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu \Phi) = 0. \quad (5.7)$$

Aplicando a decomposição das coordenadas, as variáveis podem ser separadas da seguinte forma:

$$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{R(r, t)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (5.8)$$

onde $Y_{lm}(\theta, \phi)$ são os harmônicos esféricos.

Substituindo esta decomposição da equação (5.8) na equação (5.2) com a

métrica da equação (5.1) obteremos:

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + (\omega^2 - V_s(l, x, \lambda)) \phi(x) = 0, \quad (5.9)$$

onde para a equação (5.9) a transformação da coordenada da tartaruga x é dada por

$$\frac{dx}{dr} = \frac{\sqrt{1+\lambda}}{\left(1 - \frac{1}{r}\right)}, \quad \Rightarrow \quad x(r) = \sqrt{1+\lambda} [r + \ln(r-1)]. \quad (5.10)$$

O potencial de Regge-Wheeler para o campo escalar no contexto da gravidade *bumblebee* tem a fórmula definida como

$$V_s(r) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{[1+\lambda]^{-1}}{r^3}\right). \quad (5.11)$$

Observe que pela equação (5.11), o parâmetro *bumblebee* LV (λ) modifica o potencial do buraco negro de Schwarzschild usual na equação (5.4) pelo termo $[1+\lambda]^{-1}$. Como esperado, para $\lambda = 0$ o potencial usual é obtido. O parâmetro LV diminui os picos de potencial, como pode ser mostrado na figura 19. É importante enfatizar que aqui estamos considerando que o fator de violação l é de ordem de magnitude de $l \sim 10^{-1}$. Um fator muito mais intenso que os tratados na referência [150], isso se deve ao fato de estar considerando que os MQNs são gerados por fenômenos extremos. Como é caso do buracos negros *ewormholes*.

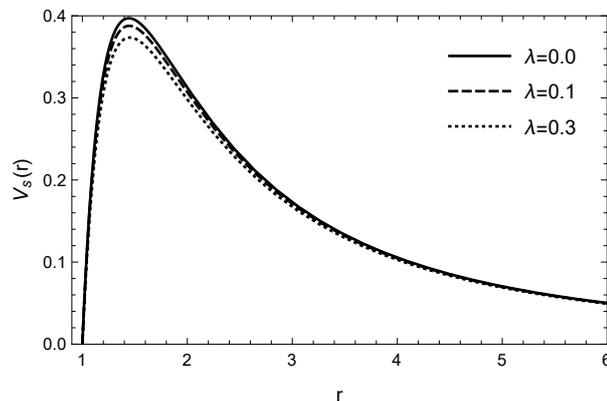


Figura 19: Potencial para campo escalar no buraco negro *bumblebee* para alguns valores de λ .

Invertendo $r(x)$ na equação (5.10) obteremos o $V(x)$ na Eq. (5.11), logo os termos de WKB de 3ª ordem na equação (5.5) e 6ª ordem na equação (5.6) podem ser calculados. Os resultados do MQNs para perturbação escalar na gravidade *bumblebee* são mostrados na Tabela 10, para a 3ª e 6ª ordem, respectivamente. Vale ressaltar que $n \leq l$ precisa ser imposto.

Os MQNs para o campo escalar na gravidade *bumblebee* também é denotado

l, n	3rd order WKB	6rd order WKB
$l = 1, n = 0$	0.291644 - 0.089100i	0.289044 - 0.097382i
$l = 2, n = 0$	0.483357 - 0.088035i	0.481314 - 0.096615i
$l = 2, n = 1$	0.466639 - 0.268196i	0.461409 - 0.295206i
$l = 2, n = 2$	0.429044 - 0.502784i	0.427762 - 0.508103i
$l = 3, n = 0$	0.675267 - 0.087756i	0.673701 - 0.096422i
$l = 3, n = 1$	0.662979 - 0.265386i	0.658965 - 0.292061i
$l = 3, n = 2$	0.641291 - 0.447758i	0.63181 - 0.495662i
$l = 4, n = 0$	0.867373 - 0.087646i	0.866120 - 0.096344i
$l = 4, n = 1$	0.857714 - 0.264225i	0.854492 - 0.290737i
$l = 4, n = 2$	0.839892 - 0.444019i	0.801780 - 0.697192i
$l = 4, n = 3$	0.815917 - 0.627569i	0.765748 - 0.913890i
$l = 5, n = 0$	1.05960 - 0.0877264i	1.05961 - 0.096337i
$l = 5, n = 1$	1.05183 - 0.263979i	1.050040 - 0.290154i
$l = 5, n = 2$	1.03709 - 0.442350i	1.03150 - 0.487343i
$l = 5, n = 3$	1.01659 - 0.623493i	1.005170 - 0.689918i

Tabela 10: Os MQNs para perturbações escalares na gravidade *bumblebee* através do método WKB para $\lambda = 0.1$

na figura 20. Observe as diferenças entre nossos resultados, apresentados na Tabela 10 (denotados por círculos) com os resultados para a solução de Schwarzschild usual na mesma Tabela 8, mas denotados por triângulos da figura 20 concluímos que o parâmetro LV diminui ligeiramente tanto para a parte real quanto para a parte imaginária das frequências.

Na próxima subseção, aplicamos a mesma metodologia para as perturbações gravitacionais ($s = 2$), onde comparamos os resultados com a perturbação escalar.

5.1.2 MQNs das perturbações do campo gravitacional

Para estudar as perturbações gravitacionais, o formalismo Chandrasekhar [94] foi aplicado. Como esperado, da mesma forma que as perturbações escalares, a equação de Regge-Wheeler é semelhante ao caso de Schwarzschild. O potencial de Regge-Wheeler no contexto da gravidade *bumblebee* diz que

$$V_g(r, l, \lambda) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2}{r^2} + [1 + \lambda]^{-1} \left[\frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^3}\right]\right). \quad (5.12)$$

Observe que o potencial gravitacional na equação (5.12) difere do potencial gravitacional ($s = 2$) para a solução de Schwarzschild na equação (5.4) pelo termo $[1 + \lambda]^{-1} \left[\frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^3}\right]$, que para $\lambda = 0$ recupera o resultado usual. O gráfico do potencial gravitacional está presente na figura 21. Observe que a amplitude do potencial gravitacional é menor que o potencial escalar da figura 19 quando o mesmo parâmetros são considerados.

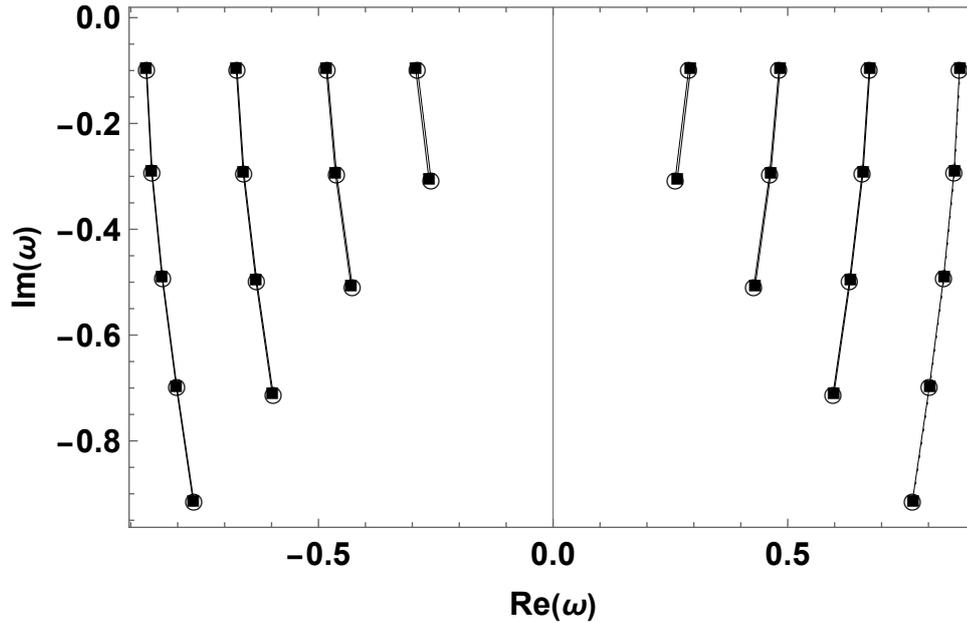


Figura 20: Os QNMs de 6ª ordem para spin $s = 0$ com $l = 1, 2, 3, 4$. O modelo na gravidade *bumblebee* usamos $\lambda = 0.1$. Os círculos brancos representam os MQNs de *bumblebee* e quadrados pretos são os MQNs de Schwarzschild. Comparando MQNs em gravidade *bumblebee* com os valores clássicos do buraco negro de Schwarzschild ($\lambda = 0$). Vemos que os pontos praticamente se superpõem, uma vez que os MQNs em gravidade *bumblebee* são muito próximos dos valores clássicos de Schwarzschild.

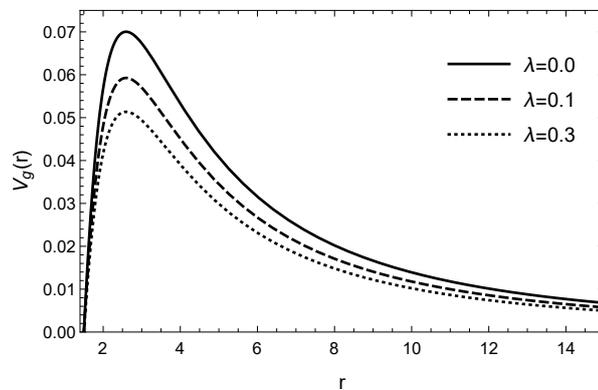


Figura 21: Potencial para campo gravitacional no buraco negro *bumblebee* com alguns valores de λ e $l = 1$.

A mesma transformação $x(r)$ para a coordenada da tartaruga apresentada na equação (5.10) e mesmas construções para os MQNs de (5.5) e (5.6), nos leva ao novo MQN para o campo gravitacional que é apresentado na tabela 11 para $\lambda = 0.1$. Mais uma vez, comparamos nossos resultados na gravidade *bumblebee* (tabela 9) com o buraco negro de Schwarzschild (9) na figura 22, agora para as perturbações gravitacionais. Como também verificado para perturbações escalares, o LV modifica ligeiramente os MQNs do cenário de Schwarzschild. A parte real dos MQNs é diminuída pelo parâmetro λ , mas ao contrário do que ocorre no campo escalar, o módulo da parte imaginária é aumentado pelo parâmetro LV.

l, n	3rd orde WKB	6rd orde WKB
$l = 2, n = 0$	0.365938 - 0.0978269i	0.366563 - 0.0974589i
$l = 2, n = 1$	0.336038 - 0.303413i	0.335226 - 0.302403i
$l = 2, n = 2$	0.291557 - 0.520674i	0.284058 - 0.535037i
$l = 3, n = 0$	0.60087 - 0.0846012i	0.599221 - 0.092926i
$l = 3, n = 1$	0.586885 - 0.25624 i	0.582443 - 0.281986i
$l = 3, n = 2$	0.562304 - 0.433172i	0.551488 - 0.480268i
$l = 3, n = 3$	0.509545 - 0.708311i	0.505286 - 0.72212i
$l = 4, n = 0$	0.810376 - 0.0857977i	0.809084 - 0.094306i
$l = 4, n = 1$	0.799958 - 0.258791i	0.796545 - 0.284766i
$l = 4, n = 2$	0.780779 - 0.435239i	0.772636 - 0.480641i
$l = 4, n = 3$	0.755005 - 0.615642i	0.739674 - 0.684973i
$l = 4, n = 4$	0.703298 - 0.903914i	0.697271 - 0.921761i

Tabela 11: Os MQNs para perturbações gravitacionais na gravidade do *bumblebee* através do método WKB para $\lambda = 0, 1$.

5.1.3 O buraco negro de *Einstein-aether*

Outro modelo importante para explorar o LV é o buraco negro de Einstein-aether [151, 152, 153, 154, 155]. Na teoria de Einstein-aether os campos de tensores de *background* acabam por violar a simetria de Lorentz. Nesta teoria, a simetria de Lorentz é quebrada em apenas um subgrupo de rotação pela existência de uma direção de tempo preferencial em cada ponto do espaço-tempo. Isso leva a inferir que há uma referencial preferencial devido a um vetor de aether u^a [189, 187]. Este campo vetorial unitário pode ser interpretado como a quadri-velocidade do meio de algum substrato (aether, vácuo, fluido escuro). É notável que para um universo em expansão acelerada a dinâmica de auto-interação dos campos pode produzir os mesmos efeitos cosmológicos da energia escura [188].

A ação envolvendo métrica e o aether é altamente vinculada pela invariância do difeomorfismo localmente vinculado a u^a . A ação pode ser construído em termos de derivadas covariantes,

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} (R + K_{mn}^{ab} \nabla_a u^m \nabla_b u^n) d^4x. \quad (5.13)$$

onde R é o escalar de Ricci e tensor K_{mn}^{ab} é definido

$$K_{mn}^{ab} = c_1 g^{ab} g_{mn} + c_2 d_m^a d_n^b + c_3 d_n^a d_m^b + c_4 u^a u^b g_{mn}. \quad (5.14)$$

Os termos c_i são constantes adimensionais. A solução de buraco negro na teoria de Einstein-aether é bem discutida em [189].

Alguns trabalhos desenvolvem o formalismo dos MQNs para os buracos negros

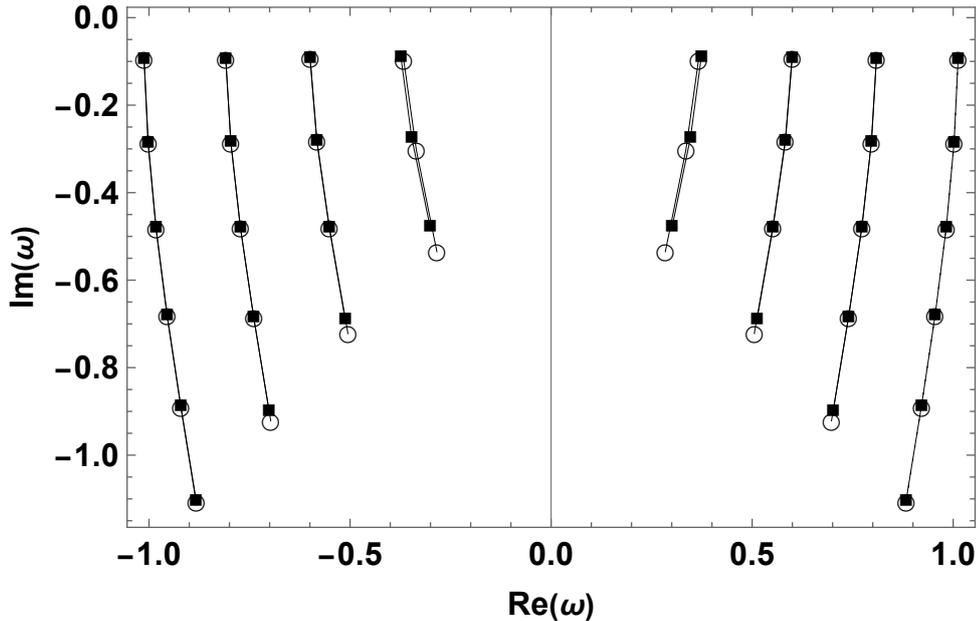


Figura 22: Os QNMs de 6ª ordem para spin $s = 2$ com $l = 2, 3, 4, 5$. O modelo em gravidade *bumblebee* é representado por círculos onde $\lambda = 0.1$ e quadrados pretos são os QNMs de Schwarzschild. Comparando QNMs em gravidade *bumblebee* com os valores clássicos do buraco negro de Schwarzschild ($\lambda = 0$). Vemos que os pontos praticamente se superpõe, do mesmo modo que no caso escalar $s = 0$. uma vez que os QNMs em gravidade *bumblebee* são muito próximos dos valores clássicos de Schwarzschild.

na teoria de Einstein-aether. A referência [153] mostra os QNMs para os campos escalares e eletromagnéticos, enquanto o trabalho [154] obtém os QNMs para a gravidade, os resultados são comparados a outros modelos com LV e Schwarzschild usual. Portanto, vale a pena comparar nossos resultados no buraco negro *bumblebee* com os resultados do buraco negro Einstein-aether. O potencial para o campo escalar de primeiro tipo do buraco negro de Einstein-aether, para a massa $M = 1/2$, é dado por [153]:

$$V_s^a(r, l, \lambda) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{I}{r^6} \left[4 - \frac{5}{r} - 2\frac{I}{r^4} - l(l+1)\right]\right). \quad (5.15)$$

onde $I = \frac{27c_{13}}{256(1-c_{13})}$ sendo o coeficiente $0 < c_{13} < 1$ associado ao parâmetro LV. Claramente, para $c_{13} = 0$, a solução usual de Schwarzschild é obtida.

Contudo, o potencial gravitacional de primeiro tipo do buraco negro de aether é dado por [154]:

$$V_g^a(r, l, \lambda) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{3}{r^2} + \frac{I}{r^6} \left[\frac{9}{r} + 6\frac{I}{r^4} - l(l+1) - 6\right]\right). \quad (5.16)$$

A figura 23 mostra que os potenciais para Einstein-aether são bastante semelhantes aos potenciais *bumblebee*. Fixando $l = 2$ e $\lambda = c_{13} = 0, 6$, calculamos e compara-

mos os MQNs, para ambas as perturbações, na Tabela. 12. Para o campo escalar, observe que a parte real das frequências decai em ordem: de Schwarzschild para *bumblebee* aether, enquanto o módulo da parte imaginária de MQNs aumenta em ordem: de *bumblebee* para Schwarzschild e para aether. Para a gravidade, verifica-se o mesmo decaimento do campo escalar para a parte real, mas a parte imaginária aumenta na ordem: Schwarzschild para aether para *bumblebee*.

Além disso, focando no modelo *bumblebee*, notamos da Tabela 8, Tabela 9, Tabela 10, Tabela 11 e Tabela 12 para $\lambda = 0$ (Schwarzschild), $\lambda = 0,1$ e $\lambda = 0,6$ que o aumento do parâmetro LV diminui a parte real da frequência para ambos os campos escalar e gravitacional. O λ também diminui o módulo das partes imaginárias para o campo escalar, mas o módulo das partes imaginárias é aumentado em λ no caso gravitacional.

Esses comportamentos são semelhantes a outros modelos com violação da simetria de Lorentz. Para campos escalares, eletromagnéticos e gravitacionais na primeira torção dos buracos negros de eather e nos MQNs de Dirac com parâmetro LV [153], a parte real dos MQNs diminui quando o LV está aumentando, enquanto o módulo da parte imaginária é aumentado.

Para modelos tal como o chamado “*non-reduced aether hole*”, tanto a parte real quanto o valor absoluto da parte imaginária dos MQNs aumentam com o aumento do parâmetro LV [153, 154]. Para os buracos negros de eather de segundo tipo e buracos negros de Einstein-Born-Infeld, ambas as partes (reais e imaginárias) diminuem com o fator LV [153, 154].

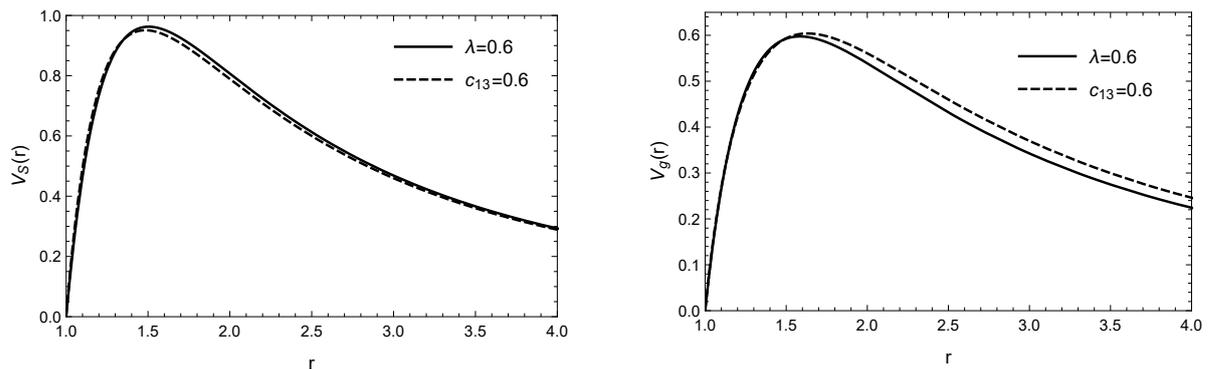


Figura 23: A comparação dos potenciais para *bumblebee* e modelo Einstein-aether com $l = 2$ e $\lambda = c_{13} = 0.6$.

5.1.4 Órbita circular do fóton

Outro aspecto importante dos MQNs é sua relação com a órbita esférica do fóton em buracos negros [156, 157, 158]. O trabalho [156], mostrou que os MQNs podem ser determinados pelos parâmetros das geodésicas circulares nulas. A ligação entre os

Scalar	$l = 2, n = 0$	$l = 2, n = 1$	$l = 2, n = 2$
Schwarzschild	0.483642 - 0.096766i	0.463847 - 0.29563i	0.430386 - 0.508729i
Bumblebee	0.473988 - 0.096133i	0.453735 - 0.29386i	0.419492 - 0.506188i
Aether	0.463995 - 0.102821i	0.453232 - 0.29997i	0.413209 - 0.517426i
Gravity	$l = 2, n = 0$	$l = 2, n = 1$	$l = 2, n = 2$
Schwarzschild	0.3736 - 0.0890i	0.3463 - 0.2735i	0.2985 - 0.4776i
Bumblebee	0.367009 - 0.096281i	0.337799 - 0.297663i	0.289936 - 0.522845i
Aether	0.355804 - 0.094916i	0.309342 - 0.275322i	0.274830 - 0.482159i

Tabela 12: O comparativo dos MQNs (via método 6^o WKB) para perturbações escalares e gravitacionais em Schwarzschild, *bumblebee* e buraco negro de Einstein-eather. Usamos $l = 2$ e $\lambda = c_{13} = 0.6$.

modos geodésicos nulos e os MQNs (apresentado na referência [156]) é violada. Além disso, para o buraco negro na gravidade *bumblebee*, a órbita circular é calculada na referência [158] e não exibe alterações em comparação com a solução de Schwarzschild usual.

$$r_{co} = \frac{(\sqrt{1 + 8\vartheta^2} + 4\vartheta - 1) M}{2\vartheta^2} \quad (5.17)$$

onde ϑ é a velocidade da partícula, para o fóton $\vartheta = c = 1$.

Para a gravidade *bumblebee* [150, 16] o parâmetro LV está presente apenas na componente dr^2 da métrica (5.1), de uma forma diferente das modificações dt^2 presentes no buraco negro de Einstein-Lovelock [157] ou modelo de Einstein-aether [151, 152, 153, 154, 155] onde a ligação dos MQNs e a órbita circular é violada. Claramente para o nosso modelo, o λ presente na gravidade *bumblebee* não apresenta mudanças na órbita circular do fóton se comparado ao buraco negro de Schwarzschild usual [158], e sua relação com MQNs é preservada [156]

5.1.5 Perturbações no domínio temporal

Na subseção 4.1.5 investigamos o comportamento da amplitude dos MQNs em gravidade *bumblebee* no tempo. Verificamos que estes modos são amortecidos com o tempo, figura 15, semelhante ao caso clássico de Schwarzschild. Nessa subseção vamos fazer essa análise para os MQNs em gravidade de *bumblebee*.

Um espalhamento dependente do tempo pode ser analisado pelo domínio temporal, conforme presente no método desenvolvido por Gundlach [159]. A equação completa (5.2) com a dependência temporal (sem o ansatz da equação(5.3)) pode ser escrita como $(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x, t)\Psi = 0)$. Aplicando a mudança da variável $u = tx$ e $v = t + x$, esta equação pode ser reescrita como $(4\frac{\partial^2}{\partial_u \partial_v} + V(u, v)) \Psi(u, v) = 0$ [159, 161, 160]

A abordagem de Gundlach é resolvida numericamente por um método de dife-

renças finitas [159, 161]. O resultado dessas perturbações pode ser descrito por um perfil Gaussiano centrado em $v = v_c$, com largura σ em $u = u_0$ como segue [159, 161].

$$\Psi(u_0, v) = \exp\left(-\frac{(v - v_0)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (5.18)$$

com a condição inicial $\Psi(u, v_0) = \Psi_0 = 0$ [159, 161, 160].

Depois de resolver a equação de Gundlach e retornar às variáveis originais (x, t) , o gráfico da figura 24 mostra o domínio do tempo para a perturbação escalar e gravitacional no buraco negro com o parâmetro *bumblebee*. Observe que ambas as perturbações exibem perfis de amortecimento, diminuindo os modos escalares mais lentamente do que os modos gravitacionais. O parâmetro momento angular l acelera a decadência das oscilações conforme verificado nas referências [16, 162, 152, 161]. Além disso, o domínio do tempo para o modelo de Einstein-eather está presente na referência [152].

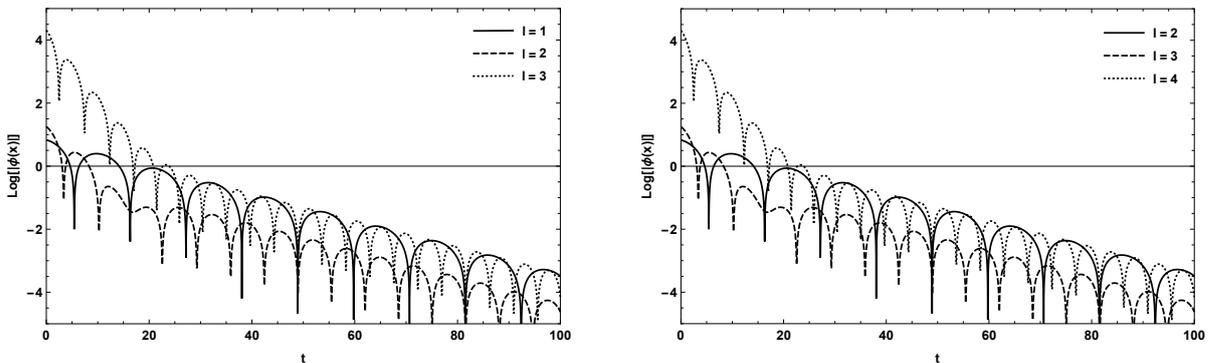


Figura 24: Amortecimento escalar (painel esquerdo) e amortecimento gravitacional (painel direito) para $\lambda = 0.1$ e alguns valores de l

5.2 Ângulo de deflexão da luz por buraco negro de Kerr regular

Nessa seção usaremos o teorema de Gauss-Bonnet para calcular o ângulo de desvio dos raios de luz entre uma fonte e um observador, no limite de campo fraco. Onde o centro espalhador da lente gravitacional é aqui um buraco negro de Kerr regular

Em complemento ao que dissemos na seção 2.2.1 ângulo geral de deflexão pode ser definido em termos do ângulo feito entre os raios tangentes e a direção radial que liga a fonte (O) ao observador (S) com as respectivas posições Ψ_O e Ψ_S [163, 2, 164]. De modo que a separação angular esta relacionada com α_D pela expressão

$$\alpha_D = \Psi_O - \Psi_S + \Phi_{OS}, \quad (5.19)$$

onde definimos $\Phi_{OS} = \Phi_O - \Phi_S$, sendo Φ_O e Φ_S a coordenada angular do observador e da fonte. Vale mencionar que essas coordenadas angulares são associadas ao rotacional

do vetor de Killing do espaço-tempo [119].

A lente gravitacional acontece quando os raios de luz são defletido pelo campo gravitacional entre o trajeto da fonte até o observador, onde o obseador e a fonte estão separados por um distância finita L . Podemos usar a geometria Riemanniana em 3 dimensões para descrever um espaço ${}^{(3)}\mathcal{M}$ contendo as curvas dos raios de luz através de uma métrica óptica γ_{ij} [79]

A solução do buraco negro Kerr regular em coordenadas de Boyer-Lindquist é escrito como [131]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr e^{-k/r}}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{4a M r e^{-k/r} \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \Sigma \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 M r e^{-k/r} \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (5.20)$$

o termo $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ e $\Delta = r^2 + a^2 - 2 M r e^{-k/r}$. O parâmetro k esta associado a regularidade do buraco negro e é assumido ser positivo [165]. No primeiro caso calculares os valores dos termos necessários que permitam determinar uma expressão analítica do ângulo de desvio do desse tipo de buraco negro regular de Kerr (5.20). Usando a condição de geodésica nula $ds^2 = 0$ podemos resolver a equação (5.20) em termos de dt [166]

$$dt = \pm \sqrt{\gamma_{ij} dx^i dx^j} + N_i dx^i, \quad (5.21)$$

onde os termos γ_{ij} e N_i são definidos como

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} dx^i dx^j &= \frac{\Sigma^2}{\Delta(\Sigma - 2m(r)r)} dr^2 + \frac{\Sigma^2}{\Sigma - 2m(r)r} d\theta^2 \\ &+ \left(r^2 + a^2 + \frac{2m(r)r a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma - 2m(r)r} \right) \frac{\Sigma \sin^2 \theta d\phi^2}{\Sigma - 2m(r)r}, \\ N_i dx^i &= - \frac{2m(r) a r \sin^2 \theta}{\Sigma - 2m(r)r} d\phi, \end{aligned} \quad (5.22)$$

aqui o termo $m(r) = M e^{-k/r}$. Se definirmos uma região de integração quadrilateral $\infty \square_S^\infty$ contida no espaço ${}^{(3)}\mathcal{M}$ podemos calcular o ângulo de deflexão. Usando para isso o teorema de Gauss-Bonnet definido pela expressão seguinte [2, 75]:

$$\alpha_D = - \int \int_{\infty \square_S^\infty} K dS + \int_S^O k_g dl, \quad (5.23)$$

de modo que podemos calcular K aproximadamente por

$$K = M \left(-\frac{2}{r^3} + \frac{6k}{r^4} - \frac{6a^2}{r^5} - \frac{6k^2}{r^5} + \frac{16a^2k}{r^6} \right) + M^2 \left(-\frac{6a^2}{r^6} + \frac{19k^2}{r^6} - \frac{12k}{r^5} + \frac{3}{r^4} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{a^3}{r^5}, \frac{M a^2 k^2}{r^6}, \frac{M^2 a k^2}{r^6} \right). \quad (5.24)$$

Agora podemos reescrever o primeiro termo da equação (5.23), no limite de campo fraco a região quadrilateral se torna

$$\int \int_{\infty \square_{\infty}^{\infty}} K dS = \int_{\phi_S}^{\phi_O} \int_{\infty}^{r_0} K \sqrt{\gamma} dr d\phi, \quad (5.25)$$

interpretamos r_0 como sendo o ponto de menor aproximação do raios de luz com o centro da lente. No geral a coordenada radial r é uma função de ϕ e temos que obter essa relação. Para isso, introduzimos a seguinte mudança de variável $u = 1/r$ [2, 122, 167]. A equação da órbita dos raios de luz em termos de u é escrita como:

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 = F(u), \quad (5.26)$$

onde a função $F(u)$ é escrita em função dos termos da métrica do buraco negro de Kerr regular, equação (5.20), logo obteremos

$$F(u) = \frac{e^{-ku} \left((a^2 u^2 + 1) e^{ku} - 2mu \right)^2 \left(e^{ku} (a^2 u^2 - b^2 u^2 + 1) + 2mu^3 (a - b)^2 \right)}{(2amu + b (e^{ku} - 2mu))^2} \quad (5.27)$$

Para resolvermos a equação (5.26) no regime de campo fraco usaremos o método iterativo. Com esse intuito introduzimos os seguintes parâmetros

$$\gamma = \frac{M}{b} \ll 1; \quad \delta = \frac{a}{b} \ll 1; \quad \epsilon = \frac{k}{b} \ll 1; \quad (5.28)$$

Aqui queremos que nossa função $u(\phi)$ seja expressa em termos de até segunda ordem dos parâmetros acima, de modo que podemos escrever [122],

$$\bar{u} = u_0 + u_1 \gamma + u_2 \delta + u_3 \epsilon + u_4 \delta \gamma + u_5 \delta \epsilon + u_6 \gamma \epsilon + \mathcal{O}(\gamma^2, \delta^2, \epsilon^2). \quad (5.29)$$

Substituindo os parâmetros da expressão (5.28) e a equação (5.29) na equação (5.26) encontraremos a seguinte solução aproximada [24]

$$\begin{aligned} \bar{u} = & \frac{\sin(\phi)}{b} + \frac{M}{b^2} (1 + \cos^2(\phi)) - \frac{2aM}{b^3} - \frac{Mk}{b^3} \cos(\phi) \left(-\frac{3\phi}{2} + \frac{\sin(2\phi)}{4} + \tan(\phi) \right) \\ & + \mathcal{O}(\gamma^2, \delta^2, \epsilon^2). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Então o domínio de integração, equação (5.25), fica definido como

$$\int \int_{\infty \square \infty} K dS = \int_{\phi_S}^{\phi_O} \int_0^{\bar{u}} -\frac{K}{u^2} \sqrt{\gamma} du d\phi. \quad (5.31)$$

Sendo que o termo $\sqrt{\gamma}$ pode ser dado de modo aproximado pela seguinte expressão:

$$\sqrt{\gamma} = r + 3M + \mathcal{O}\left(\frac{Mk}{r}\right), \quad (5.32)$$

agora a expressão (5.31) é escrita de modo explícito como

$$\begin{aligned} \int \int K dS = & \left(\frac{6a^2M^2}{b^4} + \frac{117k^2M^2}{32b^4} - \frac{3kM}{2b^2} + \frac{15M^2}{4b^2} \right) (\cos^{-1} u_O b + \cos^{-1} u_S b) + \\ & \left(\frac{2k^2M}{b^3} + \frac{a^2M}{2b^3} - \frac{8kM^2}{b^3} + \frac{2M}{b} \right) (\sqrt{1 - u_O^2 b^2} + \sqrt{1 - u_S^2 b^2}) + \\ & \left(\frac{3a^2M^2}{b^4} + \frac{21k^2M^2}{32b^4} - \frac{3kM}{4b^2} - \frac{M^2}{8b^2} \right) (u_O b \sqrt{1 - u_O^2 b^2} + u_S b \sqrt{1 - u_S^2 b^2}) + \\ & \left(\frac{2a^2M}{3b^3} - \frac{2k^2M}{3b^3} - \frac{4kM^2}{3b^3} \right) ((1 - u_O^2 b^2) \sqrt{1 - u_O^2 b^2} + (1 - u_S^2 b^2) \sqrt{1 - u_S^2 b^2}) + \\ & \left(\frac{25k^2M^2}{16b^4} \right) (u_O b (1 - u_O^2 b^2) \sqrt{1 - u_O^2 b^2} + u_S b (1 - u_S^2 b^2) \sqrt{1 - u_S^2 b^2}) + \\ & \mathcal{O}\left(\frac{aM^2}{b^3}, \frac{a^2M^2k}{b^5}\right) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Na equação (5.33) usamos como limite de integração as seguintes expressões $\cos \phi_o = -\sqrt{1 - b^2 u_o^2} + \mathcal{O}(M/b)$ e $\cos \phi_s = \sqrt{1 - b^2 u_s^2} + \mathcal{O}(M/b)$, onde o sinal negativo dica que a fonte e o obsevador estão em pontos opostos do centro da lente [164, 167].

O segundo termo do lado direito da equação (5.23) representa a curvatura geodésica da orbita do fóton no plano equatorial no contexto de um espaço-tempo estacionário assimétrico [167]. Logo podemos escrever a curvatura geodésica em termos da métrica de caminho ótico geral

$$k_g = -\frac{1}{\sqrt{\gamma \gamma^{\theta\theta}}} N_{\phi,r}. \quad (5.34)$$

Substituindo os termos da expressão (5.22) na equação (5.34) obteremos a expansão em

série de k_g

$$k_g = -\frac{2aM}{r^3} - \frac{2aM^2}{r^4} + \frac{4akM}{r^4} - \frac{3ak^2M}{r^5} + \frac{6akM^2}{r^5} - \frac{8ak^2M^2}{r^6} + \mathcal{O}\left(\frac{aM^2}{r^5}, \frac{aM^2k^2}{r^6}\right) \quad (5.35)$$

Agora para computarmos a contribuição da curvatura geodésica para o desvio angular total, temos que usar a integral de caminho da orbita dos raios de luz do observador até a fonte. Para isso usaremos a expressão geral para diferencial de caminho,

$$dl = \sqrt{\left(\gamma_{rr} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \gamma_{\phi\phi}\right)} d\phi, \quad (5.36)$$

onde podemos usar a seguinte aproximação para $dl = (b/\cos(\phi)^2 + \mathcal{O}(M)) d\phi$ e também $r = b/\cos(\phi) + \mathcal{O}(M)$. Então, encontramos a seguinte contribuição da curvatura geodésica

$$\int_S^O k_g dl = \int_S^O \left(-\frac{2aM}{b^2} \cos(\phi) + \frac{\cos^2(\phi)}{b^3} (4akM - 2aM^2) + \frac{\cos^3(\phi)}{b^4} (-3ak^2M + 6akM^2) - \frac{\cos^4(\phi)}{b^5} (8ak^2M^2) + \mathcal{O}\left(\frac{aM^3}{b^4}\right) \right) d\phi \quad (5.37)$$

De modo semelhante a equação (5.33) a expressão (5.37) se reduz a

$$\begin{aligned} \int_S^O k_g dl &= (\cos^{-1} u_O b + \cos^{-1} u_S b) \left(-\frac{3ak^2M^2}{b^4} + \frac{2akM}{b^3} - \frac{aM^2}{b^3} \right) \\ &+ \left(-\frac{2aM}{b^2} - \frac{3ak^2M}{2b^4} + \frac{6akM^2}{b^4} \right) \left(\sqrt{1 - u_O^2 b^2} + \sqrt{1 - u_S^2 b^2} \right) \\ &+ \left(-\frac{ak^2M}{b^4} - \frac{2akM^2}{b^4} \right) \left((1 - u_O^2 b^2) \sqrt{1 - u_O^2 b^2} + (1 - u_S^2 b^2) \sqrt{1 - u_S^2 b^2} \right) \\ &+ \frac{2ak^2M^2}{b^5} \left(u_O b(1 - u_O^2 b^2) \sqrt{1 - u_O^2 b^2} + u_S b(1 - u_S^2 b^2) \sqrt{1 - u_S^2 b^2} \right) \quad (5.38) \end{aligned}$$

Existem duas possibilidades para contribuição da curvatura geodésica, uma em que $dl > 0$, chamado de caso progressivo, onde o momento angular orbital dos fótons esta alinhado com a rotação do buraco negro. E o caso do $dl < 0$, chamado de caso retrógrado, onde o momento angular da orbita dos fótons esta no sentido contrário da rotação do buraco negro. No caso retrógrado temos que acrescentar um sinal negativo nos valores obtidos em (5.38) [163, 2, 164, 168, 166].

Considerando que o buraco negro esta muito distante da fonte de luz e do observador de modo que podemos usar os limites assintóticos $u_O \rightarrow 0$ e $u_S \rightarrow 0$. Então, substituindo a equação (5.38) e a equação (5.33) na equação (5.23) obteremos uma expressão que permite determinarmos o ângulo de deflexão da luz devido ao buraco negro

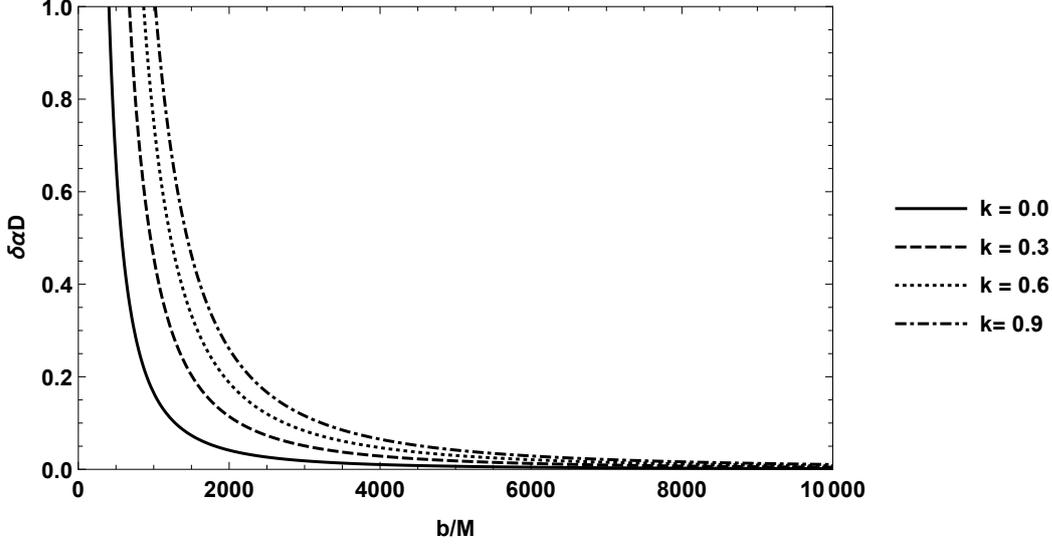


Figura 25: Correção do ângulo de deflexão $\delta \alpha_D = \alpha_D |_{Schw} - \alpha_D$ para o buraco negro de Kerr Regular em unidades de arcsec, onde usamos o parâmetro fixo $a = 0.2M$

de Kerr regular,

$$\alpha_D = \alpha_D |_{Kerr} - \left(\frac{3\pi k}{2b^2} - \frac{2\pi a k}{b^3} - \frac{8k^2}{3b^3} + \frac{8ak^2}{b^4} \right) M - \left(\frac{56k}{3b^3} - \frac{8ak}{b^4} + \frac{3ak^2}{b^5} - \frac{117k^2\pi}{32b^4} \right) M^2 + \mathcal{O} \left(\frac{M^3}{b^3}, \frac{a^2 M^2}{b^4}, \frac{M^3 k}{b^4} \right) \quad (5.39)$$

onde o termo $\alpha_D |_{Kerr}$ representa o ângulo de deflexão para limite de Kerr [2, 167]. Que neste caso é escrita na forma

$$\alpha_D |_{Kerr} = \left(\frac{4}{b} - \frac{4a}{b^2} + \frac{7a^2}{3b^3} \right) M + \left(\frac{15\pi}{4b^2} - \frac{\pi a}{b^3} + \frac{6a^2\pi}{b^4} \right) M^2 + \mathcal{O} \left(\frac{M^3}{b^3}, \frac{M^3 a}{b^4} \right). \quad (5.40)$$

É fácil ver que a equação (5.39) se reduz a equação (5.40) quando o parâmetro k é nulo. E naturalmente, no caso de ambos os termos $a = 0$ e $k = 0$ obteremos o já bem conhecido ângulo de deflexão do buraco negro de Schwarzschild [169]

$$\alpha_D |_{Schw} = \frac{4M}{b} + \frac{15\pi M^2}{4b^2} + \mathcal{O} \left(\frac{M^3}{b^3} \right) \quad (5.41)$$

5.2.1 Deflexão de luz por buraco negro de Einstein-bumblebee em baixa rotação

A solução do buraco negro em baixa rotação em gravidade *bumblebee* em coordenadas Boyer-Lindquist é definido pela métrica [170]:

k/M	$a/M = 0$	$a/M = 0.2$	$a/M = 0.4$	$a/M = 0.6$
0.1	0.097580	0.097554	0.097528	0.097501
0.2	0.195148	0.195096	0.195044	0.194992
0.3	0.292706	0.292628	0.292550	0.292472
0.4	0.390252	0.390148	0.390045	0.389941
0.5	0.487787	0.487658	0.487528	0.487398
0.6	0.585312	0.585156	0.585001	0.584845

Tabela 13: As correções no ângulo de deflexão $\delta\alpha_D = \alpha_D|_{\text{Kerr}} - \alpha_D$ para Sgr A* com $b = 10^3 M$, e variando k e a ; $\delta\alpha_D$ está em unidades de arcsec.

k/M	$a/M = 0$	$a/M = 0.2$	$a/M = 0.4$	$a/M = 0.6$
0.1	0.0975796	0.262676	0.427733	0.592752
0.2	0.195148	0.360218	0.525250	0.690243
0.3	0.292706	0.457750	0.622756	0.787722
0.4	0.390252	0.555271	0.720250	0.885191
0.5	0.487787	0.652780	0.817734	0.982649
0.6	0.585312	0.750278	0.915206	1.080100

Tabela 14: As correções no ângulo de deflexão $\delta\alpha_D = \alpha_D|_{\text{Schw}} - \alpha_D$ para Sgr A* com $b = 10^3 M$, e variando k e a ; $\delta\alpha_D$ está em unidades de arcsec

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \frac{4Ma \sin^2 \theta}{r} dt d\varphi + \frac{(1+\lambda)r}{r-2M} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (5.42)$$

Os termos γ_{ij} que representam a geodésica nula nesse caso são escritos como

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} dx^i dx^j &= \frac{(1+\lambda)}{A^2} dr^2 + \frac{r^2}{A} d\theta^2 + \left(\frac{Ar^4 + 4M^2 a^2 \sin^2 \theta}{r^2 A^2} d\phi^2 \right) \sin^2 \theta, \\ N_i dx^i &= -\frac{2M a \sin^2 \theta}{Ar} d\phi, \end{aligned} \quad (5.43)$$

onde $A = 1 - 2M/r$. Com base na métrica do buraco negro Einstein-*bumblebee* em baixa rotação com parâmetro de *bumblebee*, dada pela equação (5.43), a curvatura de Gauss é calculada como,

$$\begin{aligned} K &= M \left(-\frac{2\lambda^2}{r^3} + \frac{2\lambda}{r^3} - \frac{2}{r^3} \right) + M^2 \left(-\frac{24a^2\lambda^2}{r^6} + \frac{24a^2\lambda}{r^6} - \frac{24a^2}{r^6} + \frac{3\lambda^2}{r^4} - \frac{3\lambda}{r^4} + \frac{3}{r^4} \right) \\ &+ \mathcal{O} \left(\frac{M^3}{r^3}, \frac{M\lambda^3}{r^3}, \frac{a^3 M^2}{r^7} \right). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Precisamos determinar agora a equação de orbita de luz dentro do domínio de integração do quadrilátero $\infty \square_{\mathcal{S}}^{\infty}$, então usando a mudança de variável $u = 1/r$ obteremos com base

na equação (5.26) a seguinte equação de orbita

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = -\frac{(2Mu - \lambda)(4a^2M^2u^4 - 2Mu + \lambda)(-4abMu^3 + b^2u^2(2Mu - 1) + \lambda)}{(\lambda + 1)(2aMu - 2bMu + b)^2}. \quad (5.45)$$

Identificamos os parâmetros M , a , e λ como sendo muito menores que o parâmetro de impacto b no regime de campo fraco. Desse modo expandindo a equação (5.45) em termos dos parâmetros e usando a equação (5.29) obteremos a seguinte solução para equação de orbita dos raios de luz:

$$u = \frac{\sin(\phi)}{b} + \frac{M}{b^2} (1 + \cos^2(\phi)) - \frac{2aM}{b^3} - \frac{\phi \cos(\phi)}{2b} \lambda + \mathcal{O}\left(\frac{M\lambda}{b^2}, \frac{M\lambda a}{b^2}, \frac{M\lambda^2 a}{b^2}\right). \quad (5.46)$$

Podemos computar uma expressão analítica para contribuição do termo de curvatura de Gauss mediante a equação (5.31) e considerando que $\sqrt{\gamma} = r + 3M + \mathcal{O}(Mx, \lambda x, Mx\lambda)$, logo obteremos

$$\begin{aligned} \iint K dS &= \left(\frac{9a^2M^2}{4b^4} - \frac{15\lambda M^2}{4b^2} + \frac{15M^2}{4b^2} - \frac{9a^2\lambda M^2}{4b^4} + \frac{9a^2\lambda^2 M^2}{4b^4} + \frac{15\lambda^2 M^2}{4b^2}\right) \\ &\quad (\cos^{-1} u_O b + \cos^{-1} u_S b) + \\ &\quad \left(\frac{2\lambda^2 M}{6b} - \frac{2\lambda M}{b} + \frac{2M}{b}\right) \left(\sqrt{1 - u_O^2 b^2} + \sqrt{1 - u_S^2 b^2}\right) \\ &\quad + \left(\frac{15a^2 M^2}{4b^4} + \frac{\lambda M^2}{4b^2} - \frac{M^2}{4b^2} - \frac{6a^2\lambda M^2}{b^4} + \frac{15a^2\lambda^2 M^2}{b^4} - \frac{\lambda^2 M^2}{4b^2}\right) \\ &\quad \left(u_O b\sqrt{1 - u_O^2 b^2} + u_S b\sqrt{1 - u_S^2 b^2}\right) + \\ &\quad + \left(-\frac{3a^2 M^2}{2b^4} + \frac{3a^2\lambda M^2}{2b^4} - \frac{3a^2\lambda^2 M^2}{2b^4}\right) \left(u_O b(1 - u_O^2 b^2)\sqrt{1 - u_O^2 b^2} + \right. \\ &\quad \left. u_S b(1 - u_S^2 b^2)\sqrt{1 - u_S^2 b^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{M^3}{b^3}, \frac{a^2 M^3 \lambda}{b^5}, \frac{a^2 M^2 \lambda^3}{b^4}\right) \end{aligned} \quad (5.47)$$

Semelhante ao que fizemos após obtermos a equação (5.33) usamos para os limites de integração as expressões aproximadas $\cos \phi_o = -\sqrt{1 - b^2 u_o^2} + \mathcal{O}(M/b)$ e $\cos \phi_s = \sqrt{1 - b^2 u_s^2} + \mathcal{O}(M/b)$, na equação (5.47). Computamos a curvatura geodésica para métrica do buraco negro de Einstein-*bumblebee* com o parâmetro de *bumblebee*, substituindo os termos da métrica óptica representada pela equação (5.43) na equação geodésica (5.34), de modo

que encontramos

$$k_g = -\frac{2aM}{r^3} + \frac{a\lambda M}{r^3} - \frac{2aM^2}{r^4} - \frac{3a\lambda^2 M^2}{4r^4} - \frac{3a\lambda^2 M}{4r^3} + \frac{aM^2}{r^4} + \mathcal{O}\left(\frac{aM^3}{r^5}, \frac{aM\lambda^3}{r^3}\right). \quad (5.48)$$

Usando a aproximação da equação (5.36) e também tomando a variável $r = b/\cos(\phi) + \mathcal{O}(M)$ encontramos a expressão aproximada para a contribuição da curvatura geodésica [167, 2]

$$\begin{aligned} \int_S^O k_g dl &= \left(-\frac{aM^2}{b^3} + \frac{a\lambda M^2}{2b^3} - \frac{3a\lambda^2 M^2}{8b^3}\right) (\cos^{-1} u_O b + \cos^{-1} u_S b) + \\ &\quad \left(-\frac{3a\lambda^2 M}{4b^2} + \frac{a\lambda M^2}{4b^3} + \frac{a\lambda M}{b^2} - \frac{aM^2}{2b^3} - \frac{2aM}{b^2}\right) \left(\sqrt{1 - u_O^2 b^2} + \sqrt{1 - u_S^2 b^2}\right) + \\ &\quad \left(-\frac{3a\lambda^2 M^2}{16b^3} + \frac{a\lambda M^2}{4b^3} - \frac{aM^2}{2b^3}\right) \left(u_O^2 b^2 \sqrt{1 - u_O^2 b^2} + u_S^2 b^2 \sqrt{1 - u_S^2 b^2}\right) + \\ &\quad \mathcal{O}\left(\frac{aM^3}{b^4}, \frac{aM\lambda^3}{b^2}\right) \end{aligned} \quad (5.49)$$

Aqui novamente usamos o caso progressivo $dl > 0$ para contribuição da curvatura geodésica do ângulo de deflexão.

Finalmente podemos determinar o ângulo de deflexão do buraco negro Einstein-*bumblebee* em baixa rotação. Substituindo as equações (5.47) e (5.49) na equação (5.23) e considerando que o buraco negro esta a uma distância tão grande da fonte e do observador que podemos usar os limites assintóticos $u_O \rightarrow 0$ e $u_S \rightarrow 0$ de modo que obteremos

$$\begin{aligned} \alpha_D = \alpha_D |_{Kerr} &- \left(\frac{4\lambda}{b} - \frac{2\lambda^2}{3b} - \frac{2a\lambda}{b^2} + \frac{3a\lambda^2}{2b^2}\right) M - \\ &\quad \left(-\frac{a\lambda}{2b^3} - \frac{a\lambda\pi}{2b^3} + \frac{3a\lambda^2\pi}{8b^3} + \frac{15\lambda\pi}{4b^2} + \frac{9a^2\lambda\pi}{4b^4} - \frac{9a^2\lambda^2\pi}{4b^4} - \frac{15\lambda^2\pi}{4b^2}\right) M^2 \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\frac{M^3}{b^3}, \frac{aM\lambda^3}{b^2}, \frac{a^2M^3\lambda}{b^5}, \frac{a^2M^2\lambda^3}{b^4}\right). \end{aligned} \quad (5.50)$$

O termo do buraco negro de Kerr $\alpha_D |_{Kerr}$ nesse caso é definido como:

$$\begin{aligned} \alpha_D |_{Kerr} &= \left(\frac{4}{b} - \frac{4a}{b^2} + \frac{8a^2}{3b^3}\right) M + \left(\frac{15\pi}{4b^2} - \frac{\pi a}{b^3} + \frac{9a^2\pi}{4b^4}\right) M^2 \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\frac{M^3}{b^3}, \frac{M^3 a}{b^4}\right), \end{aligned} \quad (5.51)$$

quando o termo de *bumblebee* λ é nulo teremos apenas o ângulo de deflexão para o buraco negro de Kerr.

Uma vez que consideramos que as distâncias do observador e da fonte luminosa

l	$a/M = 0$	$a/M = 0.2$	$a/M = 0.4$	$a/M = 0.6$
0.001	0.0825517	0.082516	0.082515	0.082514
0.002	0.165006	0.165004	0.165002	0.165001
0.003	0.247467	0.247465	0.247462	0.247460
0.004	0.329901	0.329898	0.329895	0.329892
0.005	0.412308	0.412304	0.412300	0.412296
0.006	0.494687	0.494682	0.494677	0.494672

Tabela 15: As correções no ângulo de deflexão $\delta\alpha_D = \alpha_D|_{\text{Kerr}} - \alpha_D$ para Sgr A* com $b = 10^4 M$, e variando a e l ; $\delta\alpha_D$ em unidades de arcsec.

até o centro da lente são finitas pudemos deduzir expressões analíticas para pequenos ângulos de desvio dos raios luminosos. Utilizando a métrica de um buraco negro de Kerr regular (5.20) e a métrica de Einstein-*bumblebee* em baixa rotação (5.42) conseguimos obter as expressões dadas pelas equações (5.40) e (5.51). As expressões do ângulo de desvio como vimos podem ser organizadas em termos que representam o ângulo desvio de Kerr somada com os termos de correções do buraco negro de Kerr regular e de *bumblebee*. Os termos de correção das equações (5.40) e (5.51) tendem a reduzir os valores dos desvios de Kerr.

Como exemplo prático podemos usar alguns corpos celestes bem conhecidos para observarmos as correções que o ângulo de desvio deve sofrer. Computamos os valores do ângulo desvio usando o buraco negro do centro da Via Láctea, Sagitário A*, como centro espalhador da lente. O gráfico 25 mostra as correções dos ângulos de deflexão para o caso do buraco negro de Kerr Regular em unidades de arcsec, onde fixamos o parâmetro $a = 0.2M$. Enquanto que o gráfico 26 mostra as correções dos ângulos de deflexão para o caso do buraco negro Einstein-*bumblebee* em baixa rotação. As tabelas (13) e (14) resumem valores de correção dos ângulos de desvio de Kerr e Schwarzschild para caso do buraco negro em rotação regular. Então, as tabelas (15) e (16) resumem valores de correção dos ângulos de desvio de Kerr e Schwarzschild para caso do buraco negro em gravidade de Einstein-*bumblebee*. Os trabalhos [175, 176] mostram resultados das correções dos ângulos de desvios em gravidade de Kalb-Ramond e para o buraco negro regular em rotação carregado. No caso do artigo [175] os valores tabelados são da mesma ordem de magnitude dos valores das tabelas 13, 14, 15 e 16.

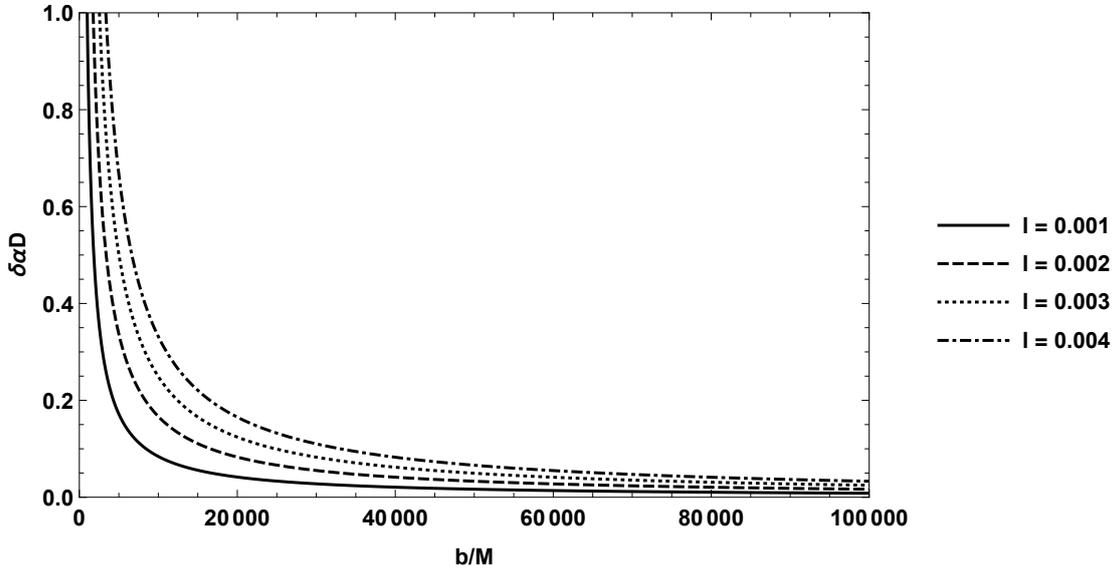


Figura 26: Correção do ângulo de deflexão $\delta \alpha_D = \alpha_D|_{Schw} - \alpha_D$ para o buraco negro Kerr em baixa rotação em gravidade *bumblebee* em unidades de arcsec, onde usamos o parâmetro fixo $a = 0.2M$

l	$a/M = 0$	$a/M = 0.2$	$a/M = 0.4$	$a/M = 0.6$
0.001	0.0825165	0.084166	0.085816	0.087465
0.002	0.165005	0.166654	0.168303	0.169951
0.003	0.247467	0.249115	0.250763	0.25241
0.004	0.329901	0.329898	0.329895	0.329892
0.005	0.412307	0.413953	0.415599	0.417246
0.006	0.494686	0.496331	0.497977	0.499622

Tabela 16: As correções no ângulo de deflexão $\delta \alpha_D = \alpha_D|_{Schw} - \alpha_D$ para Sgr A* with $b = 10^4 M$, e variando a e l ; $\delta \alpha_D$ em unidades de arcsec.

6 CONCLUSÃO

Nos capítulos 2 e 4 usamos nossas métricas de buracos negros e *wormholes* para calcularmos os MQNs e as correções dos ângulos de desvio dos raios de luz usando o teorema de Guass-Bonnet. No capítulo 4, analisamos o *wormhole* em gravidade *bumblebee*. Nesse cenário existe um parâmetro de violação de Lorentz λ , que permite a preservação das condições de energia, conseqüentemente temos um *wormhole* que é sustentado por matéria não exótica [24]. Analisamos as possíveis escolhas dos parâmetros λ e w , onde obedece a seguinte relação $P = w\rho$, que satisfazem a condição de *flare-out* e as condições de energia. Devido a necessidade de obtermos uma transformação analítica e simplificada das coordenadas da tartaruga da equação 4.24, tivemos que sacrificar à condição SEC. Porém as demais condições de energia, NEC, WEC, DEC e FOC permanecem válidas. Além disso, as perturbações escalar e tensorial do *wormhole* de *bumblebee* foram obtidas. Usamos as expressões gerais para o potencial escalar e gravitacional. Ambos os potenciais admitem formato de sino positivo (ver figura 13). Portanto, avaliamos as frequências dos MQNs para ambas as perturbações usando o método WKB. Os MQNs são confiáveis para $n < l$ (como podemos ver nas tabelas 6 e 7) e mostram curvas suaves (ver figura 14). Além do mais, calculamos o perfil no domínio do temporal para ambas as perturbações na figura 15, de onde notamos que todos os MQNs estudados realizam perfis de oscilação de amortecimento.

Na subseção 4.1.6, utilizando o teorema de Gauss-Bonnet, analisamos os efeitos na deflexão da luz devido a presença de um *wormhole* na presença de um campo de Kalb-Ramond que viola a simetria de Lorentz. Foi possível encontramos apenas dois valores do parâmetro ($\lambda = 1, 3/2$) que permitem determinarmos expressões analíticas. Os gráficos das equações (4.52) e (4.54) podem visualizados na figura 16. O comportamento do ângulo defletido α em relação ao parâmetro de impacto é semelhante ao encontrado no campo *bumblebee* [24]. No entanto, nosso resultado indica que a presença de campo que viola Lorentz do tipo de Kalb-Ramond aumenta a taxa com que o ângulo de deflexão diminui. Além disso, quando λ cresce ambos os *wormholes* *bumblebee* e KB tende a reduzir a taxa de decrescimento dos ângulos de desvio em função do parâmetro de impacto b .

Na seção 5.1 iniciamos o estudo das métricas de buracos negros, onde primeiramente exploramos a métrica de Schwarzschild-Bumblebee. Aplicamos o método WKB para calcular os MQNs para um buraco negro na gravidade *bumblebee*, e os resultados foram comparados com os buracos negros puramente de Schwarzschild (e com o Einstein-aether). Consideramos ambas as perturbações escalares e gravitacionais do bu-

raco negro de Schwarzschild-*bumblebee*. A equação de Regge-Wheeler foi obtida, e o termo de correção responsável pela violação de Lorentz foi abordado. Uma vez que o potencial modificado ainda exibe uma forma de sino, o método WKB foi aplicado para a 3ª e 6ª ordem. O parâmetro de violação de Lorentz gerou pequenas variações em relação aos MQNs das soluções de Schwarzschild e aether. O aumento do parâmetro LV aumenta a parte real da frequência e diminui o módulo das partes imaginárias. Este comportamento é semelhante à primeira dobra dos buracos negros do eather. Para a gravidade de *bumblebee*, a órbita circular do fóton é idêntica à do Schwarzschild e a ligação da órbita do fóton e dos MQNs é preservada. Além disso, o domínio do tempo para ambas as perturbações foi analisado e representa perfis de amortecimento.

Usamos o formalismo do teorema Gauss-Bonnet para métricas em rotação, seções 5.2 e 5.2.1, pudemos deduzir expressões analíticas para pequenos ângulos de desvio dos raios luminosos. Considerando as métricas de um buraco negro de Kerr regular (5.20) e a métrica de Einstein-*bumblebee* em baixa rotação (5.42) as expressões são representadas pelas equações (5.40) e (5.51). Concluímos que as expressões do ângulo de desvio podem ser escritas termos de uma série. Sendo que os primeiros termos representando puramente o ângulo desvio de Kerr mais os termos de correções do buraco negro de Kerr regular e de *bumblebee*. Analisando as equações (5.40) e (5.51) concluímos que os termos de correções tendem a reduzir os valores do ângulo de desvio clássico de Kerr. Considerando o buraco negro do centro da Via Láctea, Sagitário A* como centro espalhador da lente, computamos os valores dos ângulos de desvio 8, 9, 10 e 11. O gráfico 25 mostra as correções dos ângulos de deflexão para o caso do buraco negro de Kerr Regular em unidades de arcsec, onde fixamos o parâmetro de rotação $a = 0.2M$. Já o gráfico 26 mostra as correções dos ângulos de deflexão para o caso do buraco negro Einstein-*bumblebee* em baixa rotação. Olhando as tabelas (8) e (9) temos os valores de correção dos ângulos de desvio de Kerr e Schwarzschild para caso do buraco negro em rotação regular. Enquanto que, as tabelas (10) e (11) resumen valores de correção dos ângulos de desvio de Kerr e Schwarzschild para caso do buraco negro em gravidade de Einstein-*bumblebee*.

Dando sequência ao estudo de gravidade *bumblebee*, 4.1.1, pretendemos encontrar novos *backgrounds* de wormholes transponíveis que permita encontrarmos funções forma $b(r)$ analíticas. Uma vez que tenhamos novas *wormholes* para explorarmos, sempre podemos determinar os MQNs por métodos diferentes do WKB que usamos nesse trabalho. Outro campo de teste que vem amplamente sendo investigado que também iremos incorporar é o da técnica de determinar a sombra de buracos negros e *wormholes* [178, 179]. Por exemplo, se tivermos que lidar com métricas em rotação podemos aplicar de preferência o método de Leave, como vimos na subseção 2.1.2. No contexto da

solução do buraco negro de Einstein-*bumblebee* em baixa rotação é possível investigarmos os ecos das oscilações gravitacionais do sistema pós-fusão [112]. No caso das correções dos ângulos de deflexão, usamos como centro espalhado Sagitário A*, então podemos usar outros modelos como o da galáxia *M87* para compararmos com o nossos valores já tabelados.

REFERÊNCIAS

- [1] H. Casimir, D. Polder, Phys. Rev. 73 (1948) 360.
- [2] T. Ono, A. Ishihara and H. Asada, Phys. Rev. D **96**, 104037 (2017).
- [3] M. S. Morris and K. S. Thorne, Am. J. Phys. **56**, 395 (1988).
- [4] A. Einstein and N. Rosen, Phys. Rev. 48, 73 (1935).
- [5] C. W. Misner and J. A. Wheeler, Annals Phys. 2, 525 (1957).
- [6] Flamm, L. Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie. Physikalisches Zeitschrift **XVII**, 448–454 (1916).
- [7] M. Visser, Phys. Rev. D **41**, 1116, (1990).
- [8] S. W. Hawking Phys. Rev. D **37**, 904 (1988).
- [9] B. J. Carr, T. Harada, H. Maeda, Class. Quant. Grav. **27**, 183101 (2010).
- [10] K. Jusufi, A. Övgün, A. Banerjee Phys. Rev. D **96**, 084036 (2017).
- [11] S. Sushkov Phys. Rev. D **71**, 043520 (2005).
- [12] S. Aneesh, S. Bose, S. Kar Phys. Rev. D **97**, 124004 (2018).
- [13] P. Bueno, P. A. Cano, F. Goelen, T. Hertog, B. Verhocke Phys. Rev. D **97**, 024040 (2018).
- [14] T. Harko, F. S. N. Lobo, M. K. Mak, S. V. Sushkov Phys. Rev. D **87**, 067504 (2013).
- [15] M. G. Richarte, C. Simeone Phys. Rev. D **76**, 087502 (2007).
- [16] R. Oliveira, D. M. Dantas, V. Santos and C. A. S. Almeida, Class. Quant Grav. **36**, no.10, 105013 (2019).
- [17] S. H. Völkel, K. D. Kokkotas Class. Quant. Grav. **35** 105018 (2018).
- [18] R. A. Konoplya, Phys. Lett. **B** 784 (2018) 43.
- [19] F. S. N. Lobo, Phys. Rev. D **71**, 084011 (2005).
- [20] J. Maldacena, A. Milekhin Phys. Rev. D **103**, 066007 (2021).
- [21] S. Sarkar, N. Sarkar, F. Rahaman, Eur. Phys. J. C **80**(9), 882 (2020).
- [22] F. Rahaman, P. Salucci, P. K. F. Kuhfittig, S. Ray and M. Rahaman, Annals Phys. **350**, 561 (2014).
- [23] Garattini, R. Casimir wormholes. Eur. Phys. J. C **79**, 951 (2019).
- [24] A. Övgün, K. Jusufi, İ. Sakallı, Phys. Rev. D **99**, 024042 (2019).

- [25] S. Chandrasekhar, “The Mathematical Theory Of Black Holes,” Oxford U.P. (1985).
- [26] M. S. Morris, K. S. Thorne, U. Yurtsever Phys. Rev. Lett. **61**, 1446 (1988).
- [27] K. A. Bronnikov and A. M. Galiakhmetov, Wormholes without exotic matter in EinsteinCartan theory, Grav. Cosmol. **21**, 283 (2015).
- [28] G. C. Samanta, N. Godani, Mod. Phys. Lett. A **34**, 1950224 (2019).
- [29] B. Kleihaus, J. Kunz Phys. Rev. D **90**, 121503(R) (2014).
- [30] E. Teo, Phys. Rev. D **58**, 024014 (1998).
- [31] T. A. Roman, Phys. Rev. D **47**, 1370 (1993).
- [32] P. E. Kashargin, S. V. Sushkov, Grav. Cosmol. **14**, 80 (2008).
- [33] R. Shaikh Phys. Rev. D **98**, 024044 (2018).
- [34] Azizi, T. “Wormhole geometries in $f(R, T)$ gravity”, Int. J. Theor. Phys. **52** (2013), 3486.
- [35] N. Godani, G. C. Samanta, “Static Traversable Wormholes in $f(R, T) = R + 2\ln T$ Gravity,” Chin. J. Phys. **62**, 161-171 (2019).
- [36] E. -A. Kontou and K. Sanders, Class. Quantum Gravity **37**, 193001 (2020).
- [37] R. Q. Yang Phys. Rev. D **95**, 086017 (2017).
- [38] A. K. Mishra, U. K. Sharma, V. C. Dubey, A. Pradhan, ”Traversable wormholes in $f(R, T)$ gravity”, Astrophysics and Space Science 365, **34** (2020).
- [39] Towards a theory of spacetime theories E Curiel, D Lehmkuhl, G Schiemann, E Scholz - 2017 - Springer
- [40] D. Hochberg, C. Molina-París M. Visser Phys. Rev. D **59**, 044011 (1999).
- [41] C. S. Santos, J. Santos, S. Capozziello and J. S. Alcaniz, Gen. Rel. Grav. **49**, 50 (2017).
- [42] P. Martín-Moruno and M. Visser. Classical and Semi-classical Energy Conditions, pages 193– 213. Springer International Publishing, Cham, 2017.
- [43] E. Curiel. A primer on energy conditions. In D. Lehmkuhl, G. Schiemann, and E. Scholz, editors, Towards a Theory of Spacetime Theories, volume 13, pages 43–104. Birkhauser, Basel, ” 2017.
- [44] S. M. Carroll. Spacetime and geometry. Cambridge University Press, 2019.
- [45] R. A. Konoplya, A. Zhidenko Rev. Mod. Phys. **83**, 793 (2011).
- [46] J. A. Gonzalez, F. S. Guzman and O. Sarbach, Class. Quantum Grav. **26**, 015010 (2009).
- [47] Eric Poisson and Matt Visser Phys. Rev. D **52**, 7318 – Published 15 December 1995

- [48] charged thin-shell wormholes,” *Gen. Rel. Grav.* **36**, 651 (2004),
- [49] K. A. Bronnikov, R. A. Konoplya, A. Zhidenko *Phys. Rev. D* **86**, 024028 2012.
- [50] T. Regge, J. A. Wheeler *Phys. Rev.* **108**, 1063–1069, (1957).
- [51] F. J. Zerilli *Phys. Rev. D* **2**, 2141–2160, (1970).
- [52] E. Berti, V. Cardoso, and A. O. Starinets, *Classical Quantum Gravity* **26**, 163001 (2009).
- [53] C.V. Vishveshwara *Nature*, **227**, 936–938, (1970).
- [54] B. F. Schutz and C. M. Will, *Astrophys. J.* **L291**, 33 (1985).
- [55] B. Mashhoon, in *Proceedings of the Third Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments of General Relativity*, edited by H. Ning, p. 599, Amsterdam, 1983, North-Holland.
- [56] Landau, L. D., Lifshitz, E. M., “The Classical Theory of Fields”.
- [57] Proca, A., *J. Phys. Radium*, **7**, 347 (1936).
- [58] Hawking, S. W. and Ellis, F. R. , “The large scale structure of space-time
- [59] D. P. Du, B. Wang, R. Keng. Su *Phys. Rev. D* **70**, 064024 (2004).
- [60] B. Toshmatov, A. Abdujabbarov, Z. Stuchlík, B. Ahmedov *Phys. Rev. D* **91**, 083008 (2015).
- [61] S. Iyer, C. M. Will, *Phys. Rev. D* **35**, 3621 (1987).
- [62] Cardoso, V. , Lemos, J. P. S. Yoshida, S.: *Phys. Rev. D* **69**, 044004 (2004).
- [63] R. A. Konoplya, *J. Phys Stud.* **8**, 93 (2004).
- [64] S. K. Chakrabarti, *Gen. Rel. Grav.* **39**, 567 (2007).
- [65] Chandrasekhar, S. Detweiler, S.: *Proc. Roy. Soc. (London)* **A344**, 441 (1975).
- [66] Ferrari, V. , Mashhoon, B.: *Phys. Rev.* **D30**, 295 (1984).
- [67] Leaver, E. W.: *Proc. R. Soc. (London)* **A402**, 285 (1985).
- [68] S. Kar, D. Sahdev, B. Bhawal, *Phys. Rev. D* **49** 853 (1994).
- [69] S. E. P. Bergliaffa, K. E. Hibberd, *Phys. Rev. D* **62** 044045 (2000).
- [70] Sung-Won Kim, *J. Korean Phys. Soc.* **45** (2004), S193.
- [71] F. W. Dyson et al. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A* **220**, 291–333; 1920.
- [72] Klingenberg, W.: *A Course in Differential Geometry*, Springer Verlag, New York (1978)
- [73] Kennefick, Daniel. *No shadow of a doubt: the 1919 eclipse that confirmed Einstein’s theory of relativity*. Princeton University Press, 2019.

- [74] Wald, Robert M. General relativity. University of Chicago press, 2010.
- [75] do Carmo, M. P.: Differential Geometry of Curves and Surfaces, 2nd ed., Dover Publications, Mineola, New York (2016)
- [76] K. Jusufi, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **14**, 1750179 (2017).
- [77] Amrita Bhattachary, Alexander Potapov, Mod. Phys. Lett. A **25**, 2399 (2010).
- [78] H. Arakida, Gen. Rel. Grav. **50**, no. 5, 48 (2018).
- [79] G. W. Gibbons and M. C. Werner, Class. Quant. Grav. **25**, 235009 (2008).
- [80] K. Nakajima, H. Asada Phys. Rev. D **85**, 107501 (2012).
- [81] T. Damou, S. N. Solodukhin Phys. Rev. D **76**, 024016 (2007).
- [82] V. Bozza, Phys. Rev. D **66**, 103001 (2002).
- [83] R. Zhang, J. Jing, S. Chen Phys. Rev. D **95**, 064054 (2017).
- [84] K. K. Nandi, R. N. Izmailov, E. R. Zhdanov, A. Bhattacharya, JCAP **1807**, 027 (2018).
- [85] C. Bambi. "Astrophysical black holes: a review."arXiv preprint arXiv:1906.03871 (2019).
- [86] H. Reissner, Ann. Phys. **59**, 106 (1916).
- [87] G. Nordström, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. **20**, 1238 (1918).
- [88] D. Finkelstein, Phys. Rev. **110**, 965 (1958).
- [89] R. P. Kerr, Phys. Rev. Lett. **11**, 237 (1963).
- [90] W. Israel, Phys. Rev. Lett. **57**, 397 (1971).
- [91] S. W. Hawking, "Particle creation by black holes" Commun. Math. Phys. **43** 199 (1975).
- [92] K. Belczynski, T. Bulik, C. L. Fryer, A. Ruitter, J. S. Vink and J. R. Hurley, Astrophys. J. **714**, 1217 (2010).
- [93] A. Heger and S. E. Woosley, Astrophys. J. **567**, 532 (2002).
- [94] S. Chandrasekhar, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **95** (1935), pp. 207–225.
- [95] E. P. J. van den Heuvel, Endpoints of stellar evolution: The incidence of stellar mass black holes in the galaxy, in "Environment Observation and Climate Modelling Through International Space Projects", **29** (1992)
- [96] M. Volonteri, Astron. Astrophys. Rev. **18**, 279 (2010).
- [97] E. Berti, V. Cardoso, and A. O. Starinets, Classical Quantum Gravity **26**, 163001 (2009).

- [98] E. Newman and R. Penrose, *J. Math. Phys.* **3**, 566 (1962).
- [99] S. A. Teukolsky, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 1114 (1972).
- [100] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford University Press, New York, 1983).
- [101] H.-P. Nollert, *Class. Quant. Grav.* **16**, R159 (1999).
- [102] K. S. Thorne, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 299 (1980).
- [103] L. C. B. Crispino, A. Higuchi and G. E. A. Matsas, *Phys. Rev.* **D63**, 124008 (2001).
- [104] A. Nagar and L. Rezzolla, *Class. Quant. Grav.* **22**, R167 (2005).
- [105] H. Kodama and A. Ishibashi, *Prog. Theor. Phys.* **110**, 701 (2003), [hep-th/0305147].
- [106] S. Chandrasekhar, *Proc. R. Soc. Lond.* **A392**, 1 (1984).
- [107] V. Moncrief, *Ann. Phys.* **88**, 323 (1974).
- [108] V. Ferrari and B. Mashhoon, *Phys. Rev. D* **30**, 295 (1984)
- [109] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas*
- [110] E. W. Leaver, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A402**, 285 (1985).
- [111] E. Berti, V. Cardoso and C. M. Will, *Phys. Rev.* **D73**, 064030 (2006).
- [112] P Bueno, PA Cano, F Goelen, T Hertog, B Vercnocke *Phys. Rev.D* **97**, 024040 (2018).
- [113] V. Cardoso and J. P. S. Lemos, *Phys. Rev.* **D64**, 084017 (2001).
- [114] Baber, W.G., Hasse, H.R. 1935 ´ *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **25**, 564.
- [115] X. T. Cheng, Y. Xie, *Phys. Rev. D* **103**, 064040 (2021).
- [116] Weinberg, Steven, and R. H. Dicke. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. New York: Wiley, 1973.
- [117] QM Fu, L Zhao, and YX Liu, arXiv preprint arXiv:2101.08409 (2021).
- [118] M. C. Werner, *Gen. Rel. Grav.* **44**, 3047 (2012).
- [119] A. Ishihara, Y. Suzuki, T. Ono and H. Asada, *Phys. Rev. D* **95**, no. 4, 044017 (2017).
- [120] T. Ono, A. Ishihara and H. Asada, *Phys. Rev. D* **96**, no. 10, 104037 (2017).
- [121] A. Övgun, I. Sakalli and J. Saavedra, *JCAP* **1810**, no. 10, 041 (2018).
- [122] G. Crisnejo, E. Gallo, K. Jusufi, *Phys. Rev. D* **100**, 104045 (2019).
- [123] R. P. Kerr, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 237 (1963).

- [124] G. Clément, D. Gal'tsov, and C. Leygnac, Phys. Rev. D **67**, 024012 (2003).
- [125] M. Rogatko, Phys. Rev. D **82**, 044017 (2010).
- [126] A. Sen, Phys. Rev. Lett. **69**, 1006 (1992).
- [127] K. Akiyama *et al.*, Astrophys. J. **875**, L1 (2019).
- [128] K. Akiyama *et al.*, Astrophys. J. **875**, L2 (2019).
- [129] K. Akiyama *et al.*, Astrophys. J. **875**, L3 (2019).
- [130] S. G. Ghosh, Eur. Phys. J. C **75**, 532 (2015).
- [131] B. N. Jayawiguna, arXiv:2010.14612 [gr-qc].
- [132] S. G. Ghosh, R. Kumar and S. U. Islam, [arXiv:2011.08023]
- [133] V. A. Kostelecky and S. Samuel, Phys. Rev. D **39**, 683 (1989).
- [134] D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998).
- [135] V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **69**, 105009 (2004).
- [136] R. Casana, A. Cavalcante, F. P. Poulis and E. B. Santos, Phys. Rev. D **97**, no. 10, 104001 (2018).
- [137] M. Kord Zangeneh, F. S. N. Lobo and M. H. Dehghani, Phys. Rev. D **92**, no. 12, 124049 (2015).
- [138] D. Hochberg and M. Visser, Phys. Rev. D **56**, 4745 (1997).
- [139] S. W. Kim, "Gravitational perturbation of traversable wormhole," gr-qc/0401007.
- [140] S. W. Kim, Prog. Theor. Phys. Suppl. **172**, 21 (2008).
- [141] V. Santos, R. V. Maluf and C. A. S. Almeida, Phys. Rev. D **93**, no. 8, 084047 (2016)
- [142] R. A. Konoplya and C. Molina, Phys. Rev. D **71**, 124009 (2005).
- [143] R. A. Konoplya and A. Zhidenko, JCAP **1612**, no. 12, 043 (2016).
- [144] C. Gundlach, R. H. Price and J. Pullin, Phys. Rev. D **49**, 883 (1994)
- [145] K. Jusufi and A. Övgün, Phys. Rev. D **97**, no. 2, 024042 (2018).
- [146] A. Övgün, K. Jusufi and I. Sakalli, Annals Phys. **399**, 193 (2018).
- [147] H. Arakida, Gen. Rel. Grav. **50**, no. 5, 48 (2018).
- [148] K. Jusufi, A. Övgün, and A. Banerjee, Phys. Rev. D, **96**, 8, 084036 (2017).
- [149] A. Övgün, Phys. Rev. D **99**, 104075 (2019).
- [150] R. Casana, A. Cavalcante, F. P. Poulis, E. B. Santos, Phys. Rev. D **97**, 104001, (2018).

- [151] R. Bluhm, N. L. Gagne, R. Potting and A. Vrublevskis, Phys. Rev. D **77**, 125007 (2008) [erratum: Phys. Rev. D **79**, 029902 (2009)]
- [152] M. S. Churilova, Phys. Rev. D **102**, 024076 (2020).
- [153] C. Ding, Phys. Rev. D **96**, no.10, 104021 (2017)
- [154] C. Ding, Chin. Phys. Lett. 2018, Vol. **35** Issue (10): 100401
- [155] C. Ding and X. Chen, Chin. Phys. C **45**, no.2, 025106 (2021)
- [156] V. Cardoso, A. S. Miranda, E. Berti, H. Witek and V. T. Zanchin, Phys. Rev. D **79**, 064016 (2009)
- [157] Y. Heydarzade and F. Darabi, Phys. Lett. B **771**, 365-373 (2017)
- [158] Z. Li, G. Zhang and A. Övgün, Phys. Rev. D **101**, no.12, 124058 (2020)
- [159] C. Gundlach, R. H. Price and J. Pullin, Phys. Rev. D **49**, 883-889 (1994)
- [160] R. A. Konoplya and A. Zhidenko, Rev. Mod. Phys. **83**, 793-836 (2011)
- [161] V. Santos, R. V. Maluf, and C. A. S. Almeida, Phys. Rev. D **93**, 084047 (2016).
- [162] R. A. Konoplya, A. Zhidenko, Phys. Rev. D **88**, 024054 (2013).
- [163] R. Kumar, SG. Ghosh, A. Wang, Phys. Rev. D **100**, 124024 (2019).
- [164] R. Kumar, SG. Ghosh, A. Wang, Phys. Rev. D **101**, 104001 (2020).
- [165] S. G. Ghosh, Eur. Phys. J. C **75**, 532 (2015).
- [166] S. Haroon, M. Jamil, K. Jusufi, K. Lin, RB. Mann, Phys. Rev. D **99**, 044015 (2019).
- [167] T. Ono, H. Asada, Universe **5**, no. 11, 218 (2019).
- [168] T. Ono, A. Ishihara, H. Asada, Phys. Rev. D **98**, 044047 (2018).
- [169] K. S. Virbhadra, G. F. R. Ellis, Phys. Rev. D **62**, 084003 (2000).
- [170] C. Ding and X. Chen arXiv:2008.10474 [gr-qc]
- [171] A. Einstein, Annalen Phys. **49**, 769 (1916) [Annalen Phys. **14**, 517 (2005)].
- [172] S.W. Hawking, "Particle Creation by Black Holes", Commun. Math. Phys. **43**, 199-220 (1975).
- [173] S. Chandrasekhar and S. L. Detweiler, Proc. R. Soc. A **344**, 441 (1975).
- [174] L. Motl and A. Neitzke, Adv. Theor. Math. Phys. **7**, 307 (2003).
- [175] R. Kumar, S. G. Ghosh, and A. Wang, Phys. Rev. D **101**, 104001 (2020).
- [176] R. Kumar, S. G. Ghosh, A. Wang Phys. Rev. D **100**, 124024 (2019).
- [177] R. Ruffini, J. A. Wheeler, Introducing the Black Hole, Physics Today 24 (1971) 30.

- [178] F. Atamurotov, A. Abdujabbarov, B. Ahmedov Phys. Rev. D **88**, 064004 r 2013
- [179] R. Shaikh Phys. Rev. D **98**, 024044 2018.
- [180] T. Harko, F. S. N. Lobo, S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rev. D **84**, 024020 (2011) doi:10.1103/PhysRevD.84.024020 [arXiv:1104.2669 [gr-qc]].
- [181] Pawar, D. D., V. R. Patil, and S. N. Bayaskar, International Scholarly Research Notices 2012 (2012).
- [182] J. D. Bekenstein Phys. Rev. D *12*, 3077 (1975)
- [183] M. Kalb and P. Ramond, Phys. Rev. **D 9**, 2273(1974).
- [184] L. A. Lessa, R. Oliveira, J. E. G Silva, C. A. S.Almeida (2021), Annals of Physics, 168604.
- [185] L. A. Lessa, J. E. G. Silva, R. V. Maluf, and C. A. S. Almeida, Eur. Phys. J. C **80**, 335 (2020).
- [186] B. Altschul, Q. G. Bailey, and A. Kostelecký Phys. Rev. D **81**, 065028 (2010).
- [187] T. Jacobson and A. J. Speranza, arXiv:1503.08911 (2015).
- [188] A. B. Balakin and H. Dehnen, Phys. Lett. B681, 113 (2009).
- [189] C. Eling and T. Jacobson, Class. Quant. Grav. **23**, 5625 (2006) [arXiv:gr-qc/0603058].