



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**ISIS DO VALE MEIRA LIMA**

**ESTUDO DA INTERAÇÃO À DISTÂNCIA ENTRE CANTILÉVER E AMOSTRA EM  
MICROSCOPIA DE FORÇA ATÔMICA**

**FORTALEZA**

**2021**

ISIS DO VALE MEIRA LIMA

ESTUDO DA INTERAÇÃO À DISTÂNCIA ENTRE CANTILÉVER E AMOSTRA EM  
MICROSCOPIA DE FORÇA ATÔMICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jeanlex Soares de Sousa.

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- L698e Lima, Isis do Vale Meira.  
Estudo da interação à distância entre cantiléver e amostra em microscopia de força atômica / Isis do Vale Meira Lima. – 2021.  
45 f. : il. color.
- Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Curso de Física, Fortaleza, 2021.  
Orientação: Prof. Dr. Jeanlex Soares de Sousa.
1. Microscópio de Força Atômica. 2. Interação ponta-amostra. 3. Frequência de Ressonância. 4. Ondas Planas de Pressão. I. Título.

CDD 530

---

ISIS DO VALE MEIRA LIMA

ESTUDO DA INTERAÇÃO À DISTÂNCIA ENTRE CANTILÉVER E AMOSTRA EM  
MICROSCOPIA DE FORÇA ATÔMICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Jeanlex Soares de Sousa. (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Cláudio Lucas Nunes de Oliveira.  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Murilo Pereira de Almeida.  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho à minha mãe, à minha avó,  
ao meu irmão caçula, ao meu namorado e ao  
meu hamster, Sushi.

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de dizer que sou muito grata a todas as pessoas que fizeram deste um caminho possível, mesmo com tantos obstáculos. Ainda que eu tentasse listar cada pessoa importante no meu trajeto, provavelmente, cometeria alguma injustiça por não citar alguém. Mas não custa nada tentar. Primeiramente, agradeço ao apoio inabalável de minha mãe, Verônica, sempre me dizendo que eu posso fazer o que eu quiser e que a única pessoa que pode me parar sou eu mesma. Muito obrigada, mãe, por estar ao meu lado em cada momento, mesmo nos piores. Seria bem mais difícil se eu estivesse sozinha. Meu muito obrigada também ao meu irmão caçula, Lohan, por ser essa pessoa tão especial para mim. Você me dá forças. Agradeço em especial ao meu namorado Otávio e à sua mãe, Jocyrrégia, por todo o carinho que demonstraram ter por mim e pelo apoio inestimável que me foi dado. Alegro os meus dias saber que existem pessoas como vocês no mundo. Agradeço aos meus amigos João Victor, Rômulo, Alessandro e Ingrid.

Agradeço profundamente aos meus professores do Colégio Jenny Gomes: Steve, Amanda, Bruno, Alexandre, Socorro, Neide, Adriano, Ruan, Ely, Valdiana, Chicão, Campelo, Valéria, Marta e Roberto. Vocês são uma inspiração para mim e foram cruciais para que eu buscasse minha própria motivação em busca de realizar meus sonhos. Agradeço por todos os livros que ganhei, pelas palavras de conforto e por me ensinarem tantas coisas. Vocês são incríveis. Também deixo meus sinceros agradecimentos ao meu querido orientador, Professor Dr. Jeanlex Soares de Sousa, por ter me aceitado como bolsista e por ter confiado em mim durante todo esse tempo. Muito obrigada por ter me incentivado a ir apresentar o trabalho da pesquisa em congressos e por estar à disposição. Agradeço por ter me ensinado a operar o Microscópio de Força Atômica e por dizer animado que eu seria a melhor microscopista do Norte e Nordeste. Sempre lembrarei do que o senhor me disse sobre não criar tantas expectativas e buscar ser menos ansiosa, pensando no agora. Agradeço por tudo, professor.

Gostaria de agradecer a todos que integram o Laboratório de Física Biológica da UFC por terem me acolhido e oferecido uma infraestrutura excepcional ao longo da graduação, em especial, sou muito grata ao Professor Dr. Cláudio Lucas, à Professora Dra. Ayrles Brandrão e à Dra. Rosemayre Freire. Agradeço também ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela ajuda financeira, desde o meu segundo semestre, como bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica da Universidade Federal do Ceará (PIBIC/UFC). Por fim, agradeço ao serviço de acolhimento psicológico que a UFC me ofereceu, além do auxílio de inclusão digital durante o período de pandemia.

“Disse a flor para o pequeno príncipe: é preciso que eu suporte duas ou três larvas se quiser conhecer as borboletas.”

(Antoine de Saint-Exupéry)

## RESUMO

No presente trabalho, apresentaremos uma abordagem teórica e experimental acerca das forças de interação de longo alcance entre cantiléver e amostra, em um Microscópio de Força Atômica. Para isso, admitiremos que a dinâmica de um cantiléver pode ser entendida como a de um oscilador harmônico forçado amortecido com uma frequência muito próxima da ressonância. A partir deste tratamento, propomos, então, um modelo que considera o efeito das ondas planas de pressão geradas pelo movimento de um cantiléver, cujas vibrações perturbam o meio no qual o mesmo está imerso. Utilizamos dois cantilêveres retangulares com frequências naturais de 150 kHz e 300 kHz, oscilando, inicialmente, em ar, sobre uma lâmina vidro. Posteriormente, a sonda de 150 kHz foi colocada em água destilada, no intuito de verificar como o meio poderia afetar as medições. Diante disso, conseguimos mostrar, com base nos gráficos dos dados obtidos experimentalmente, que essas ondas de fato alteram a frequência natural de vibração do cantiléver, havendo uma dependência da distância ponta-amostra.

**Palavras-chave:** microscópio de força atômica; interação ponta-amostra; frequência de ressonância; ondas planas de pressão.

## ABSTRACT

In the present work, we will present a theoretical and experimental approach about the long-range interaction forces between cantilever and sample, in an Atomic Force Microscope. For this, we will assume that the dynamics of a cantilever can be understood as that of a damped forced harmonic oscillator that tends to oscillate with a frequency very close to the resonance. From this treatment, we propose, then, a model that considers the effect of plane pressure waves generated by the movement of a cantilever, whose vibrations disturb the environment in which it is immersed. Initially, we used two rectangular cantilevers with natural oscillation frequencies of 150 kHz and 300 kHz oscillating in air over glass. Subsequently, the 150 kHz probe was placed in distilled water, in order to verify how the medium could affect the measurements. Therefore, we were able to show, based on the graphs of the experimentally obtained data, that these waves in fact alter the natural frequency of vibration of the cantilever, with a dependence on the tip-sample distance.

**Keywords:** atomic force microscope; tip-sample interaction; resonance frequency; plane pressure waves.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação esquemática do funcionamento de um microscópio de força atômica. . . . .	14
Figura 2 – Sonda de AFM ampliada, ilustrativamente, da esquerda para a direita: cantiléver, microcantiléver e ponta. . . . .	15
Figura 3 – (a) Segmentos do fotodetector. (b) Campos A e B. (c) Campos C e D. . . . .	16
Figura 4 – Gráfico do potencial de Lennard-Jones. . . . .	16
Figura 5 – Representação da distância ponta-amostra em um AFM. . . . .	17
Figura 6 – Curva de força em função da distância ponta-amostra e os respectivos regimes dos modos de operação. . . . .	18
Figura 7 – Variação da amplitude de oscilação do microcantiléver no modo <i>tapping</i> . Note que, conforme a distância ponta-amostra diminui, a amplitude de oscilação tende a ser reduzida, quando em contato. . . . .	19
Figura 8 – Gráfico da amplitude de oscilação forçada em função da frequência da força externa $\omega$ para três valores distintos da constante de amortecimento $\beta$ . . . . .	24
Figura 9 – Esquema da propagação de ondas planas de pressão ultrassônicas ao incidirem e serem refletidas por uma amostra. . . . .	25
Figura 10 – (a) Parte inferior do microcantiléver retangular com frequência de vibração livre de 150 kHz. (b) Ponta piramidal de 150 kHz com superfície levemente desgastada pelo uso. (c) Parte inferior do microcantiléver retangular com frequência de vibração livre de 300 kHz. (d) Ponta piramidal de 300 kHz. . . . .	27
Figura 11 – (a) Microscópio de força atômica do tipo MFP-3D. (b) Parafuso da cabeça do AFM com graduação micrométrica. . . . .	28
Figura 12 – Regressão não Linear feita para os gráficos da variação da frequência em função da variação de $z_c$ para as pontas de 150 kHz e 300 kHz, oscilando em ar. . . . .	31
Figura 13 – Regressão não Linear feita para o gráfico da variação da frequência em função da variação de $z_c$ para a ponta de 150 kHz, oscilando em líquido (água destilada). . . . .	33
Figura 14 – Resultados experimentais para a ponta com frequência natural de aproximadamente 150 kHz oscilando em líquido (água destilada). . . . .	34

## LISTA DE TABELAS

- Tabela 1 – Parâmetros de ajuste obtidos da Regressão não Linear dos dados, utilizando o modelo teórico proposto, para as pontas de 150 kHz e 300 kHz. . . . . 32
- Tabela 2 – Resultados obtidos para a constante de amortecimento  $\beta$  e para a frequência de vibração livre do cantiléver, por meio da Regressão não Linear dos dados. 32

## LISTA DE SÍMBOLOS

$V$	Potencial de Lennard-Jones
$F_{ts}$	Força de interação entre ponta e amostra
$H$	Constante de Hamaker
$R$	Raio da ponta
$z_c$	Posição de equilíbrio do cantiléver
$z$	Posição instantânea da ponta
$d$	Separação instantânea entre ponta e amostra
$k$	Constante elástica
$m$	Massa efetiva
$\beta$	Constante de amortecimento
$\omega$	Frequência da força externa
$\omega_0$	Frequência de ressonância
$\omega'_0$	Frequência de ressonância afetada pela interação ponta-amostra
$Q$	Fator de mérito
$\mathbf{k}$	Vetor de onda
$\mathbf{r}$	Vetor posição

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	13
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTOS</b>	14
<b>2.1</b>	<b>Microscópio de Força Atômica (AFM)</b>	14
<b>2.1.1</b>	<i>Interação ponta-amostra: forças de curto e longo alcance</i>	16
<b>2.1.2</b>	<i>Modos de operação do AFM: contato, não-contato e contato intermitente</i>	18
<b>2.2</b>	<b>Relação do modo <i>tapping</i> com o oscilador forçado</b>	19
<b>2.2.1</b>	<i>Equação do movimento de um cantiléver no regime atrativo</i>	20
<b>2.2.2</b>	<i>Frequência de ressonância</i>	23
<b>2.2.3</b>	<i>Fator de mérito</i>	24
<b>2.3</b>	<b>Ondas planas de pressão ultrassônicas</b>	24
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	27
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	29
<b>4.1</b>	<b>Modelo teórico do movimento oscilatório de um cantiléver</b>	29
<b>4.2</b>	<b>Análise dos dados experimentais</b>	31
<b>4.2.1</b>	<i>Oscilações em ar sobre vidro</i>	31
<b>4.2.2</b>	<i>Oscilações em líquido sobre vidro</i>	32
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	35
<b>A</b>	<b>APÊNDICE</b>	36
<b>B</b>	<b>APÊNDICE</b>	37
	<b>REFERÊNCIAS</b>	45

## 1 INTRODUÇÃO

Ter uma melhor compreensão sobre as forças de interação existentes entre cantiléver e amostra, em um Microscópio de Força Atômica (AFM), permite-nos desenvolver uma metodologia de medida de força que venha a eliminar a necessidade de contato com o indentador. Para tanto, admitiremos que o cantiléver se comporta como um oscilador forçado amortecido, cuja ponta em sua extremidade é colocada para vibrar nas proximidades de uma amostra, no regime atrativo de longo alcance, com uma frequência muito próxima da natural. A vibração do cantiléver causa, então, uma perturbação no meio, gerando ondas de pressão que interagem com a amostra e são refletidas, alterando sua frequência de ressonância.

Nesse sentido, iniciaremos o capítulo 2 com uma breve motivação histórica sobre o que levou ao surgimento da microscopia de força atômica, onde descreveremos os seus princípios básicos de funcionamento e modos de operação: modo contato, não-contato e contato intermitente. Em seguida, concentraremos nossa atenção no regime atrativo de forças de não contato, utilizando o modo *tapping* para aplicarmos uma força motriz externa ao nosso sistema oscilante.

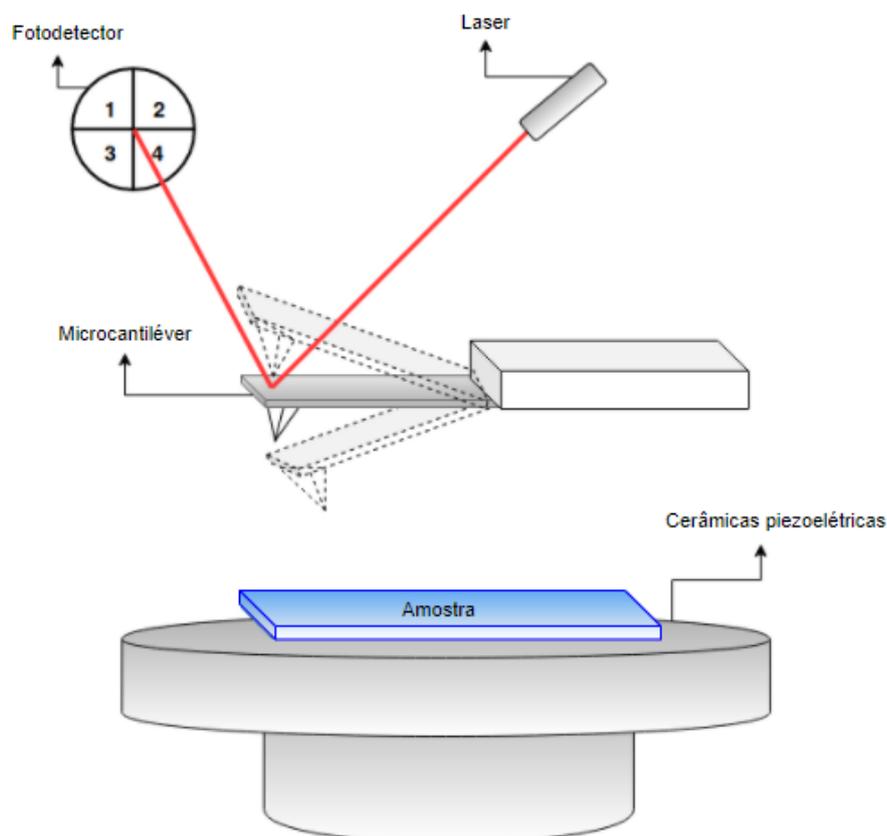
Já no capítulo 3, descreveremos a metodologia experimental adotada para detectarmos de que forma a interação ponta-amostra pode afetar a frequência natural do cantiléver. Para finalizar, no capítulo 4, iremos dispor o modelo teórico proposto, além dos resultados obtidos, experimentalmente, ao medirmos como a frequência natural varia ao aumentarmos a distância ponta-amostra. Veremos ainda a importância desse modelo para que, posteriormente, seja possível extrair informações reológicas dos materiais de forma menos invasiva, tomando como base argumentos hidrodinâmicos.

## 2 FUNDAMENTOS

### 2.1 Microscópio de Força Atômica (AFM)

Há relatos da utilização de lentes para observações do universo macroscópico e microscópico que datam de 750 a.C., como é o caso das lentes Nimrud (também conhecidas como lentes Layard) dos povos assírios, um dos objetos mais antigos já descobertos (ULUÇ *et al.*, 2009). Desse modo, ao longo dos anos, diversas técnicas de microscopia foram desenvolvidas, dentre as quais está a invenção do microscópio óptico, que se utiliza da luz visível, mas que possui uma desvantagem por ter sua resolução limitada por cerca de 300 nm, de acordo com o critério de difração de Rayleigh. Considerando ainda que a maioria dos nanomateriais têm dimensões entre 1 e 100 nm, estes não seriam visualizados em um microscópio óptico, fazendo-se necessário buscar outras alternativas, por exemplo, a utilização de elétrons, com o desenvolvimento dos microscópios eletrônicos. Entretanto, essa técnica de observação requer que as amostras sejam condutoras, semicondutoras ou metalizadas com algum material condutor, podendo danificar, assim, amostras biológicas e não condutoras (ZANETTE, 2010).

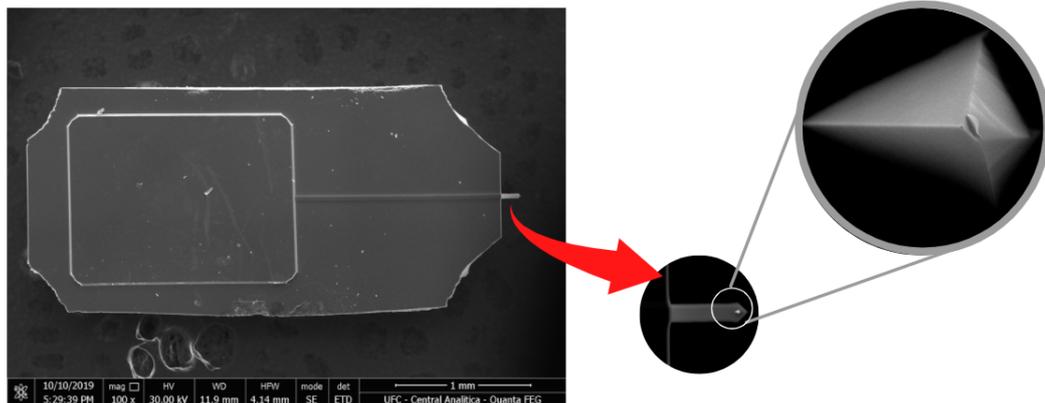
Figura 1 – Representação esquemática do funcionamento de um microscópio de força atômica.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tendo em vista as dificuldades em se estudar os materiais não condutores de forma menos invasiva, em 1986, Binnig, Quate e Gerber desenvolveram o Microscópio de Força Atômica (AFM - *Atomic Force Microscope*, do inglês), o qual tem como princípio medir as deflexões de uma haste sujeita a forças atrativas e repulsivas intermoleculares resultantes da interação com a amostra (ZANETTE, 2010). Conforme o mostrado na **Figura 1**, vemos que esse tipo de equipamento é constituído por uma sonda muito fina (em geral feita de silício), que varre a superfície de uma amostra guiada por um sistema mecânico, cujas bases são cerâmicas piezoelétricas. Na **Figura 2**, é possível notar que essa sonda é constituída por um cantiléver (também chamado de braço da sonda), que possui em sua extremidade um microcantiléver, no qual se encontra a ponta que efetivamente interage com a amostra.

Figura 2 – Sonda de AFM ampliada, ilustrativamente, da esquerda para a direita: cantiléver, microcantiléver e ponta.

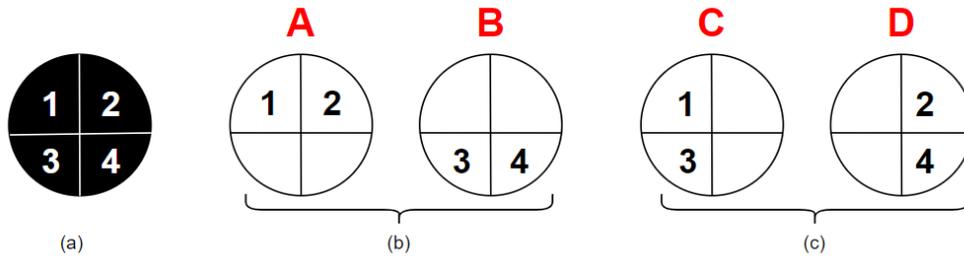


Fonte: Elaborado pelo autor, a partir de imagens obtidas pela Dra. Rosemayre Freire por meio do microscópio eletrônico de varredura (MEV) do laboratório da Central Analítica da UFC.

Além disso, o AFM possui um feixe de laser (em geral, de HeNe) que incide sobre o cantiléver, sendo refletido até atingir o fotodetector. Analisando a **Figura 3**, percebemos que o fotodetector possui quatro segmentos, sendo a diferença de sinal entre os campos A e B responsáveis pelo deslocamento do cantiléver na direção vertical  $z$ , enquanto que a diferença de sinal entre os campos C e D fornece informação sobre a torção do cantiléver na direção horizontal. Dessa forma, quando a amostra é deslocada, a diferença de sinal deve se anular entre os campos do fotodetector, restabelecendo a condição inicial.

Os dados assim adquiridos acerca da deflexão do cantiléver são então tratados por um sistema de realimentação (*feedback*, do inglês), em conjunto com o software do próprio equipamento, permitindo que seja feito um sensoriamento e controle da distância ponta-amostra. Conseqüentemente, torna-se possível realizar o imageamento de amostras varridas pela sonda,

Figura 3 – (a) Segmentos do fotodetector. (b) Campos A e B. (c) Campos C e D.



Fonte: Elaborado pelo autor.

além de obter informações reológicas dos materiais em estudo (RESEARCH, 2008).

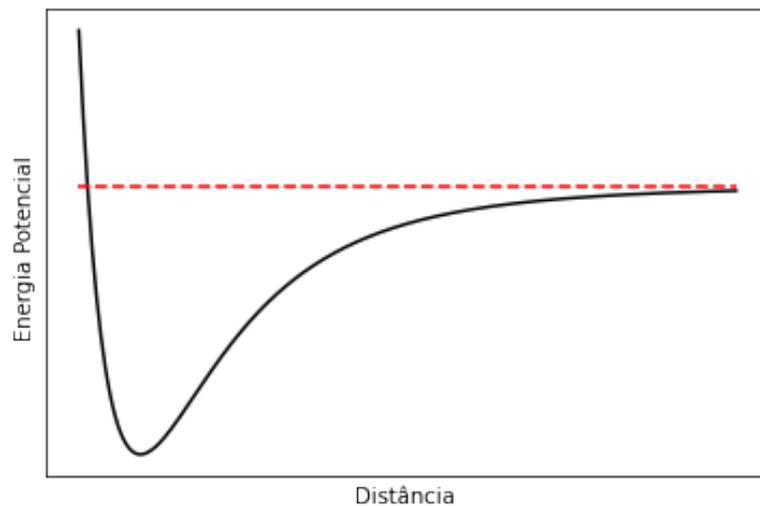
### 2.1.1 Interação ponta-amostra: forças de curto e longo alcance

Podemos utilizar o potencial de Lennard-Jones, apresentado na **Figura 4**, para explicar a existência de forças interativas entre átomos ou moléculas, em dois regimes fundamentais: o atrativo e o repulsivo. Vemos ainda que há uma dependência da distância,  $r$ , entre os átomos interagentes da ponta e da amostra, descrita da seguinte forma:

$$V(r) = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}, \quad (2.1)$$

onde A e B são constantes.

Figura 4 – Gráfico do potencial de Lennard-Jones.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Quando a ponta se encontra nas proximidades da amostra, mas sem contato efetivo entre ambas, o regime atrativo prevalece com forças negativas de longo alcance (também chamadas de forças de Van der Waals), sendo a força atuante em cada molécula afetada pelas

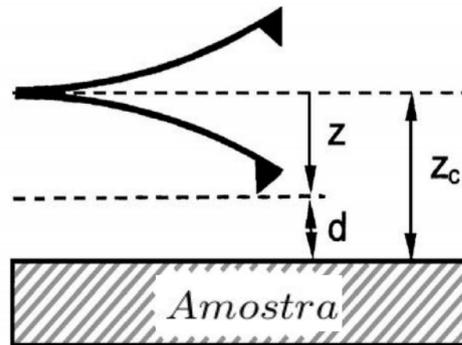
moléculas vizinhas. Conforme ponta e amostra se aproximam, atinge-se uma determinada configuração, com força nula, em que os átomos estão a uma distância tão pequena que, ao superar esse limite, pelo Princípio da Exclusão de Pauli, os orbitais eletrônicos tendem a se repelir eletrostaticamente. A partir dessa configuração, passa a prevalecer o regime repulsivo, com forças positivas de curto alcance (ZANETTE, 2010).

Como sugere a **Figura 5**, de acordo com García e Pérez (2002, p. 205), ao tratarmos a geometria da ponteira como a de uma esfera (ou parabolóide), a força de interação entre ponta e amostra  $F_{ts}$ , no caso das forças atrativas do tipo coulombiano de longo alcance, pode ser obtida ao integrarmos sobre as forças de todas as moléculas que constituem a ponta:

$$F_{ts} = -\frac{HR}{6(z_c + z(t))^2} \quad , \quad (2.2)$$

onde  $H$  é a constante de Hamaker,  $R$  é o raio da ponta,  $z_c$  é a posição de equilíbrio do cantiléver em relação à superfície da amostra,  $z$  é a posição instantânea da ponta e  $d$  é a separação instantânea entre ponta-amostra (GARCIA; PEREZ, 2002).

Figura 5 – Representação da distância ponta-amostra em um AFM.



Fonte: (GARCIA; PEREZ, 2002).

Como  $z_c \gg z(t)$ , a amplitude de oscilação do cantiléver é muito menor do que a posição de equilíbrio do mesmo. Em vista disso, podemos fazer uma boa aproximação ao calcular a expansão em série de Taylor da equação acima (consultar o **Apêndice A**), considerando apenas os dois primeiros termos da expansão, resultando na seguinte forma:

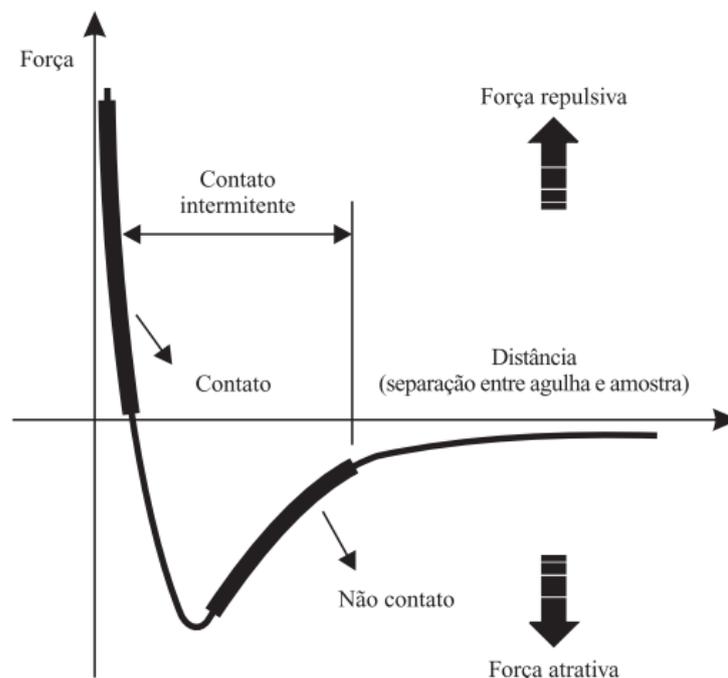
$$F_{ts} \approx -\frac{HR}{6z_c^2} + \frac{HR}{3z_c^3}z(t) \quad . \quad (2.3)$$

Portanto, a medida de  $z_c$  é o que de fato iremos considerar quando nos referirmos, neste trabalho, à distância ponta-amostra.

### 2.1.2 Modos de operação do AFM: contato, não-contato e contato intermitente

É possível utilizar o AFM em três diferentes modos de operação: contato, não-contato e contato intermitente (*tapping mode*, do inglês). Na **Figura 6**, observamos os regimes das interações intermoleculares que prevalecem em cada um desses modos, a partir do gráfico da força em função da distância ponta-amostra. No **modo contato**, a sonda se mantém continuamente na zona de forças repulsivas com a amostra, enquanto que, no **modo não-contato**, a ponta não toca a amostra durante toda a varredura, e as interações existentes são essencialmente atrativas. Por outro lado, o **modo contato intermitente** é aquele no qual um sinal de excitação é aplicado à sonda, fazendo com que a mesma vibre e toque a superfície da amostra uma vez por oscilação (HERRMANN *et al.*, 1997).

Figura 6 – Curva de força em função da distância ponta-amostra e os respectivos regimes dos modos de operação.



Fonte: (HOWLAND; BENATAR, 2000).

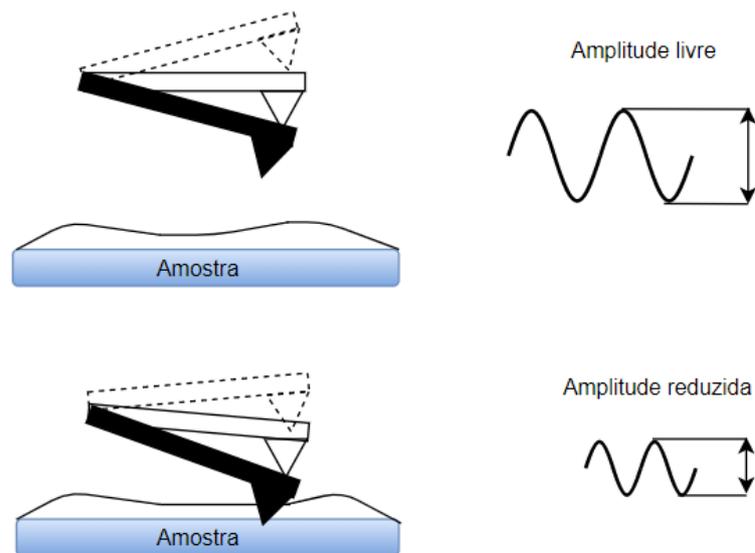
Tais modos são escolhidos, dentre outros fatores, ao serem considerados os graus de rigidez e rugosidade de determinada amostra, além das propriedades geométricas e composicionais da ponteira utilizada. Com base nisso, quando visamos obter imagens da topografia de um material macio, como células biológicas, por exemplo, costuma-se escolher pontas que tenham uma menor constante de mola, associadas ao uso do modo *tapping*, por ser uma técnica bem menos invasiva. Portanto, essa análise inicial das configurações do experimento se faz necessária,

pois a aplicação de forças da ordem de nanonewtons são suficientes para causar danos a esse tipo de amostra, produzindo resultados imprecisos ou diferentes do esperado.

## 2.2 Relação do modo *tapping* com o oscilador forçado

De acordo com o que foi apresentado na seção anterior, vimos que o modo *tapping* nos permite controlar a tensão aplicada à haste, que por sua vez é convertida em uma força mecânica externa, modulando, assim, a amplitude de oscilação (AM - *amplitude modulation*, do inglês) do microcantiáver. Consequentemente, a dinâmica de um cantiléver pode ser interpretada como a de um oscilador harmônico forçado com amortecimento (LOPES *et al.*, 2015).

Figura 7 – Variação da amplitude de oscilação do microcantiáver no modo *tapping*. Note que, conforme a distância ponta-amostra diminui, a amplitude de oscilação tende a ser reduzida, quando em contato.



Fonte: Adaptado de (ZANETTE, 2010)

Em conformidade com o apresentado na **Figura 7**, podemos notar que a amplitude de oscilação do microcantiáver tende a ser reduzida ao haver contato com a amostra, pois esta atua como uma barreira que dificulta o movimento, devido ao impacto mecânico sofrido. Entretanto, se for mantida uma determinada distância em que ponta e amostra não se tocam, a amplitude de oscilação ocorrerá livremente. Outro fator importante que também afeta essa amplitude é o arrasto do meio, ou seja, a resistência do ar ou líquido, em que o sistema se encontra.

### 2.2.1 Equação do movimento de um cantiléver no regime atrativo

A dinâmica de um cantiléver vibrando livremente no modo *tapping*, em um meio homogêneo, pode ser entendida como equivalente ao movimento oscilatório de uma mola, com constante elástica  $k$  e massa efetiva  $m$ , que se desloca, periodicamente, na direção vertical  $z$ . Assim, de acordo com a lei de Hooke, há uma força restauradora da forma:

$$F = -kz . \quad (2.4)$$

Precisamos ainda considerar que, à medida que o cantiléver vibra, sua amplitude de oscilação é afetada por uma força de atrito, com sentido contrário ao seu deslocamento e diretamente proporcional à velocidade (TAYLOR, 2013). Tal força surge em consequência do arrasto hidrodinâmico do meio, dependendo da **constante de amortecimento**  $\beta$ , definida como:

$$2\beta = \frac{b}{m} = \frac{\omega_0}{Q} \implies b = \frac{m\omega_0}{Q} , \quad (2.5)$$

sendo  $b$  o coeficiente de arrasto, que depende da viscosidade do meio,  $Q$  é o fator de qualidade do equipamento, e  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  é a frequência natural de vibração do cantiléver.

Quando operamos um AFM com a ponta suficientemente afastada da amostra, observamos que a excitação aplicada à haste atua como uma força motriz periódica, tendo como função principal fornecer energia ao sistema, permitindo que as oscilações forçadas persistam (NUSSENZVEIG, 2002), mesmo após a parte das oscilações livres desaparecer. Logo, pela segunda lei de Newton, diversos autores tendem a considerar a seguinte equação como a que melhor explica a dinâmica de um cantiléver sujeito às condições especificadas nesta seção:

$$m\ddot{z} + \frac{m\omega_0}{Q}\dot{z} + kz = F_{ts} + F_0 \cos(\omega t) , \quad (2.6)$$

onde  $\omega$  é a frequência da força externa aplicada ao cantiléver pelo próprio equipamento, e  $F_0$  representa a amplitude da força motriz correspondente (GARCIA; PEREZ, 2002).

Nessas circunstâncias, dispomos de um sistema descrito por uma equação diferencial de segunda ordem não homogênea, cuja solução obedece ao **Princípio de Superposição** para equações lineares inhomogêneas, ou seja, a solução geral será dada pela soma da solução homogênea com as soluções particulares. É importante salientar que, quando há dissipação de energia, as oscilações livres tendem a decair rapidamente, sendo, por isso, chamadas de um transiente, devido a sua característica transitória, prevalecendo apenas as oscilações forçadas, as quais constituem a solução estacionária (NUSSENZVEIG, 2002).

A partir do que foi apresentado acima, pode-se tomar a seguinte solução homogênea  $z_h$  para descrever as oscilações livres do cantiléver:

$$z_h = C e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos(\omega t + \phi) , \quad (2.7)$$

onde  $C$  e  $\phi$  são constantes arbitrárias determinadas pelas condições iniciais.

Analisando agora a solução estacionária, nota-se que teremos duas soluções particulares possíveis. Primeiro, calcularemos a solução  $z_{p1}$  da equação inhomogênea devido às forças de interação intermoleculares:

$$m\ddot{z} + \frac{m\omega_0}{Q}\dot{z} + kz = F_{ts} . \quad (2.8)$$

Substituindo agora (2.3) na equação (2.8) e dividindo ambos os lados por  $m$ , obtemos a seguinte expressão:

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \left( \omega_0^2 - \frac{HR}{3mz_c^3} \right) z = -\frac{HR}{6mz_c^2} . \quad (2.9)$$

A equação acima nos permite afirmar que há uma modificação na frequência de vibração livre do cantiléver, devido às forças de interação de longo alcance, da forma:

$$\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{HR}{3mz_c^3}} . \quad (2.10)$$

Assim, podemos reescrever a equação (2.9) como:

$$\ddot{z} + \frac{\omega'_0}{Q}\dot{z} + \omega_0'^2 z = -\frac{HR}{6mz_c^2} . \quad (2.11)$$

A solução de (2.11) deve ser uma constante, então, segue que:

$$z_{p1}(t) = C \implies \dot{z}_{p1}(t) = 0 \implies \ddot{z}_{p1}(t) = 0 . \quad (2.12)$$

Substituindo (2.12) na equação (2.11), obtemos a primeira solução particular:

$$z_{p1}(t) = -\frac{HR}{6mz_c^2 \omega_0'^2} . \quad (2.13)$$

Por fim, queremos obter a solução  $z_{p2}$  da equação inhomogênea devido à força motriz, já considerando a variação da frequência de ressonância:

$$\ddot{z} + \frac{\omega'_0}{Q}\dot{z} + \omega_0'^2 z = \frac{F_0 \cos(\omega t)}{m} . \quad (2.14)$$

Para isso, admitimos que, para qualquer solução de (2.14), existe uma solução para a mesma equação, ao substituirmos o cosseno pelo seno, pois o que distingue essas funções é apenas uma diferença de fase de  $\frac{\pi}{2}$  na origem (TAYLOR, 2013). Assim, segue que:

$$\ddot{y} + \frac{\omega_0'}{Q}\dot{y} + \omega_0'^2 y = \frac{F_0 \text{sen}(\omega t)}{m} . \quad (2.15)$$

Vamos agora definir a função complexa  $\eta$  que tem  $z(t)$  como sua parte real e  $y(t)$  como sua parte imaginária:

$$\eta = z + iy . \quad (2.16)$$

Substituindo as equações (2.14) e (2.15) na equação (2.16), chegamos na expressão:

$$\dot{\eta} + \frac{\eta \omega_0'}{Q} + \eta \omega_0'^2 = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} . \quad (2.17)$$

Podemos, então, supor uma solução de (2.17) da forma:

$$\eta = A e^{i\omega t} . \quad (2.18)$$

Sabendo que  $A$  é uma constante a ser determinada, obtemos sua expressão ao substituirmos (2.18) em (2.17):

$$A = \frac{F_0 Q}{m[(\omega_0'^2 - \omega^2)Q + i\omega_0'\omega]} = |A| e^{\delta i} , \quad (2.19)$$

onde  $\delta$  é o ângulo de fase, dado por:

$$\delta = \tan^{-1} \left[ \frac{-\omega_0'\omega}{Q(\omega_0'^2 - \omega^2)} \right] . \quad (2.20)$$

Tomando o módulo quadrado de  $A$ , podemos obter a parte real que representa a amplitude de oscilação:

$$|A| = \sqrt{AA^*} = AA^* . \quad (2.21)$$

Ao multiplicarmos  $A$  por seu conjugado e simplificarmos a expressão, vem que:

$$|A| = \frac{F_0 Q}{m \sqrt{(\omega_0'^2 - \omega^2)Q^2 + \omega_0'^2 \omega^2}} . \quad (2.22)$$

Nesse sentido, a solução da equação (2.17) pode ser dada como:

$$\eta = |A| e^{i\delta} e^{i\omega t} \implies \eta = |A| e^{i(\omega t + \delta)} . \quad (2.23)$$

Considerando que apenas a parte real da solução descreve o que observamos na natureza,  $z_{p2}(t) = \text{Re}\{\eta\}$ , a segunda solução particular é a seguinte:

$$z_{p2}(t) = \frac{F_0 Q \cos(\omega t + \delta)}{m \sqrt{(\omega_0'^2 - \omega^2) Q^2 + \omega_0'^2 \omega^2}} . \quad (2.24)$$

Finalmente, chegamos na solução geral da equação (2.6) do movimento oscilatório de um cantiléver com dissipação de energia, ou seja, apenas as soluções particulares prevalecem:

$$z(t) = \frac{F_0 Q \cos(\omega t + \delta)}{m \sqrt{(\omega_0'^2 - \omega^2) Q^2 + \omega_0'^2 \omega^2}} - \frac{HR}{6mz_c^2 \omega_0'^2} . \quad (2.25)$$

### 2.2.2 Frequência de ressonância

No regime atrativo, as forças intermoleculares tendem a ser menos intensas que aquelas na região de curto alcance (ZANETTE, 2010). Detectar as deflexões sofridas pelo cantiléver devido a forças de longo alcance consideravelmente mais fracas se torna, dessa forma, um empecilho para a microscopia de força atômica. Por isso, quando não há contato entre ponta e amostra, o sistema impõe que a sonda vibre com uma frequência muito próxima da sua frequência de ressonância, medindo, então, a variação da frequência natural de vibração do cantiléver como outro parâmetro.

Analisando a amplitude quadrada  $A^2(\omega)$  como a forma de um pico de ressonância, a equação (2.22) resulta em:

$$A^2(\omega) = |A|^2 = \frac{F_0^2 Q^2}{m^2 [(\omega_0'^2 - \omega^2) Q^2 + \omega_0'^2 \omega^2]} . \quad (2.26)$$

Isso significa dizer que o fenômeno da ressonância é resultado do crescimento da amplitude, conforme a frequência da força motriz tende à frequência das oscilações livres. No caso ideal, em que não há dissipação da energia, a amplitude cresce indefinidamente, isto é,  $A \rightarrow \infty$  quando  $\omega \rightarrow \omega_0'$ , havendo uma descontinuidade (NUSSENZVEIG, 2002). Já ao considerarmos a situação em que o sistema cede energia para o meio, a amplitude irá crescer até atingir um valor máximo  $A_{max}$  quando  $\omega \approx \omega_0'$ , dado por:

$$A_{max} \approx \frac{F_0 Q}{m \omega_0'^2} = \frac{F_0}{2\beta m \omega_0'} . \quad (2.27)$$

### 2.2.3 Fator de mérito

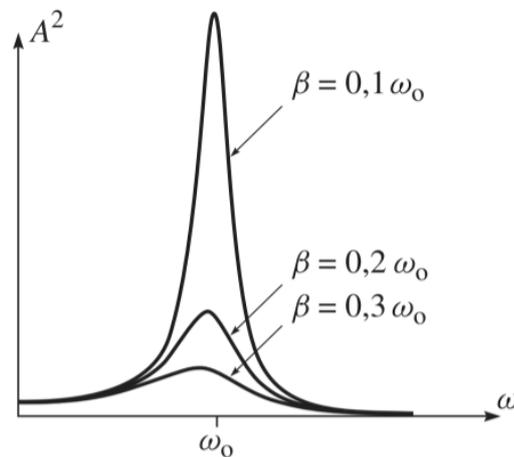
Segundo diversos autores, o fator mérito, também conhecido como fator de qualidade, fator de amplificação ou ainda fator Q representa a largura do pico de ressonância na meia altura (TAYLOR, 2013). Em termos do balanço de energia de um oscilador harmônico forçado amortecido, podemos interpretar o fator Q como:

$$Q = 2\pi \left( \frac{\bar{E}}{\bar{P}_d} \right) , \quad (2.28)$$

onde  $\bar{E}$  representa a energia média armazenada e  $\bar{P}_d$  é a energia média dissipada por ciclo.

Com base ainda na equação (2.5) e na expressão encontrada para amplitude máxima apresentada na seção anterior, somos capazes de afirmar que quanto maior for a constante de amortecimento, menores serão a amplitude das oscilações e o fator  $Q$ , ou seja, estas duas grandezas são inversamente proporcionais a  $\beta$ , como sugere a **Figura 8**.

Figura 8 – Gráfico da amplitude de oscilação forçada em função da frequência da força externa  $\omega$  para três valores distintos da constante de amortecimento  $\beta$ .



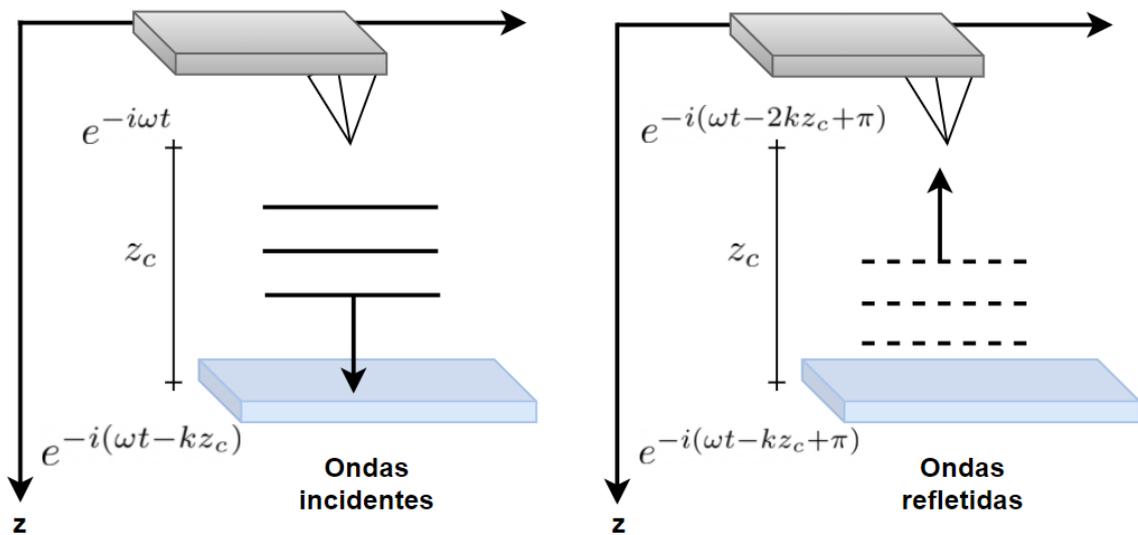
Fonte: (TAYLOR, 2013).

## 2.3 Ondas planas de pressão ultrassônicas

Quando o cantiléver oscila, ocorre uma perturbação no meio em que ele se encontra, em decorrência da formação de ondas de pressão. Essas ondas vibram em um espectro muito próximo ao da frequência natural de oscilação da sonda, propagando-se com frequências ultrassônicas, ou seja, maiores que 20 kHz. Consideramos, como uma primeira aproximação, que essas ondas são idealmente planas, pois apesar de ser um formalismo matemático mais simples, o entendimento do fenômeno físico não é comprometido.

A partir do esquema mostrado na **Figura 9**, observamos que, na origem, as ondas geradas oscilam em fase com o cantilêver e, conforme essas ondas são irradiadas, elas percorrem uma distância  $z_c$  até incidirem sobre a amostra. As ondas incidentes são, então, parcialmente absorvidas e refletidas. Como vimos, a absorção das ondas tende a ser menor para materiais com uma maior dureza, conseqüentemente, mais ondas são refletidas, percorrendo novamente distância fixa  $z_c$ , agora, com uma menor amplitude de oscilação, incidindo sobre o cantilêver.

Figura 9 – Esquema da propagação de ondas planas de pressão ultrassônicas ao incidirem e serem refletidas por uma amostra.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Podemos, portanto, descrever o deslocamento das ondas incidentes e refletidas utilizando a forma geral da equação de ondas planas:

$$f(\mathbf{r}, t) = Ae^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} , \quad (2.29)$$

onde  $\mathbf{k}$  é o vetor de onda,  $A$  é amplitude da onda incidente, e  $\mathbf{r}$  representa o vetor posição.

Considerando que a frente de onda não se desloca, no instante em que é gerada,  $\mathbf{r} = 0$ , então, a equação (2.29) resulta que:

$$f(0, t) = Ae^{-i\omega t} . \quad (2.30)$$

Já na posição em que a onda se deslocou uma distância  $z_c$ , partindo da fonte emissora até alcançar a superfície da amostra,  $\mathbf{r} = z_c$ , e a equação (2.29) fica:

$$f(z_c, t) = Ae^{-i(\omega t - kz_c)} . \quad (2.31)$$

As ondas são, então, refletidas por uma diferença de fase  $\pi$ , de modo que, no instante em que a reflexão começa, temos a seguinte configuração:

$$f(z_c, t) = ae^{-i(\omega t - kz_c + \pi)} , \quad (2.32)$$

onde a amplitude das ondas refletidas  $a$  tende a ser menor que  $A$ .

Assim, as ondas regidas pela equação (2.32) percorrem novamente a diferença de caminho  $z_c$ , incidindo no cantiléver com a forma:

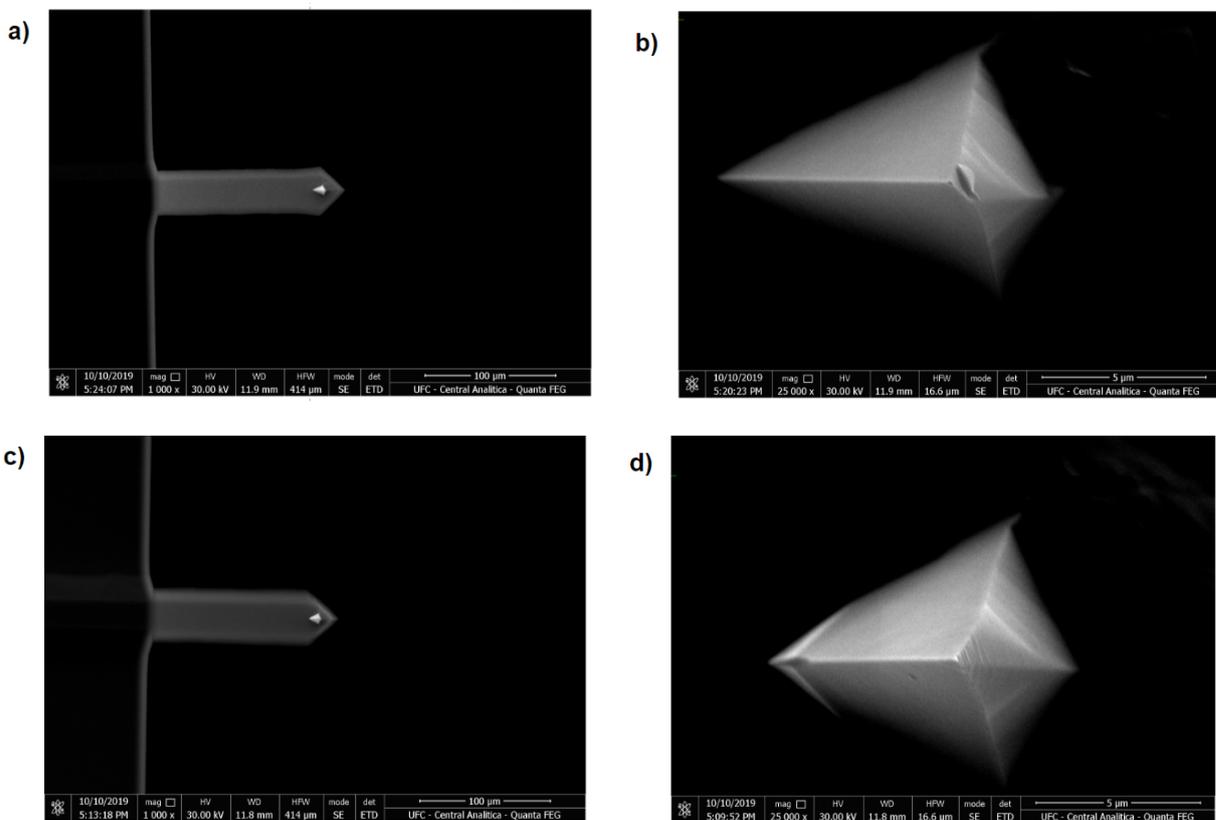
$$f(2z_c, t) = ae^{-i(\omega t - 2kz_c + \pi)} . \quad (2.33)$$

Portanto, as ondas planas de pressão ultrassônicas do tipo mostrado na equação (2.33) podem causar uma variação na frequência de ressonância do cantiléver, de acordo com as propriedades viscoelásticas da amostra interagente (GAVARA; CHADWICK, 2010).

### 3 METODOLOGIA

No presente trabalho, foi utilizado um microscópio de força atômica do tipo MFP-3D Manual fabricado pela Asylum Research Corporate Office (Instrumentos Digitais, Santa Bárbara, CA). Os experimentos foram, então, conduzidos com dois diferentes cantilêveres retangulares de pontas piramidais (Companhia Oxford Instrumentos, Asylum Research), conforme o apresentado nas imagens dispostas, na **Figura 10**, a seguir:

Figura 10 – (a) Parte inferior do microcantilêver retangular com frequência de vibração livre de 150 kHz. (b) Ponta piramidal de 150 kHz com superfície levemente desgastada pelo uso. (c) Parte inferior do microcantilêver retangular com frequência de vibração livre de 300 kHz. (d) Ponta piramidal de 300 kHz.

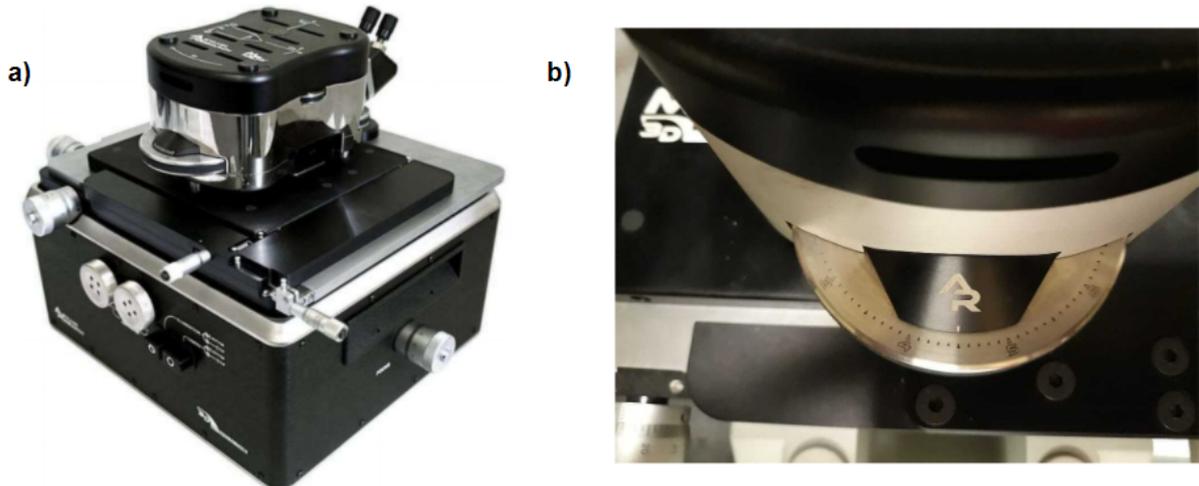


Fonte: Elaborado pelo autor, a partir de imagens obtidas pela Dra. Rosemayre Freire por meio do microscópio eletrônico de varredura (MEV) do laboratório da Central Analítica da UFC.

O primeiro cantilêver utilizado foi do modelo Econo-LTESP-Au, com uma frequência de ressonância de aproximadamente  $150 \pm 75$  kHz, em condições ambiente, no modo *tapping* fora do contato, oscilando em ar sobre uma lâmina de vidro. A princípio, adotamos como referência uma distância ponta-amostra coincidente com as marcações do *Z-voltage* de 43,25 V e *Set Point* de 600 mV. Admitindo essa configuração, conseguimos medir o respectivo pico de ressonância do cantilêver, através do software IGOR Pro implementado no próprio equipamento.

Em seguida, aumentamos, manualmente, a distância ponta-amostra em  $1\mu\text{m}$  para cada nova medição da frequência de natural, pelo manuseio do parafuso mostrado na **Figura 11**, o qual é responsável por controlar o movimento vertical do cantiléver.

Figura 11 – (a) Microscópio de força atômica do tipo MFP-3D. (b) Parafuso da cabeça do AFM com graduação micrométrica.



Fonte: (RESEARCH, 2008)

Analogamente, reproduzimos o procedimento para o segundo cantiléver, cujo modelo foi Econo-TESP, com frequência de ressonância de  $300 \pm 100$  kHz. Aqui, adotamos uma altura inicial coincidente com as marcações do *Z-voltage* de 52,20 V e do *Set Point* de 600 mV.

Por fim, repetimos o experimento alterando o meio no qual o cantiléver estava imerso, somente para a ponta de 150 kHz, mergulhando a sonda em líquido, a fim de compararmos os efeitos hidrodinâmicos nas oscilações e, conseqüentemente, analisar como a frequência natural é afetada. Para isso, foi utilizada uma placa de Petri de vidro, cujas dimensões são 60x15mm, a qual foi preenchida com 4 mL de água destilada, por causa da baixa quantidade de impurezas em sua composição, tendo pouco efeito nas informações acerca da interação entre ponta e amostra. É importante ressaltar que as mesmas pontas foram utilizadas durante todo o estudo.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 4.1 Modelo teórico do movimento oscilatório de um cantiléver

De acordo com o que foi exposto na equação (2.33), devemos ainda considerar o efeito da interação do cantiléver com as ondas planas de pressão provenientes da reflexão parcial pela superfície de uma amostra. Esse tratamento tem como objetivo desenvolver um modelo teórico que nos forneça uma melhor descrição da dinâmica de um cantiléver. Em vista disso, adicionamos essa contribuição de forças à expressão (2.6), resultando que:

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_0'^2 z = \frac{F_0}{m} e^{-i\omega t} - a e^{-i(\omega t - 2kz_c)} - \frac{HR}{6mz_c^2} . \quad (4.1)$$

Nós escrevemos a expressão acima em termos de  $\omega_0'$ , pois constatamos que a frequência natural de vibração é alterada pelas forças de interação entre ponta e amostra de forma semelhante ao discutido na equação (2.10). Além disso, sabemos que a solução homogênea desse tipo de equação é um transiente, decaindo muito rapidamente, de modo que apenas prevalecem as soluções particulares, dadas por:

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0'}{Q}\dot{z} + \omega_0'^2 z = -\frac{HR}{6mz_c^2} \quad (4.2)$$

e

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0'}{Q}\dot{z} + \omega_0'^2 z = \frac{F_0}{m} e^{-i\omega t} - a e^{-i(\omega t - 2kz_c)} . \quad (4.3)$$

A solução particular da equação (4.2) exatamente a mesma encontrada em (2.13) para  $z_{p1}(t)$ . Já no caso da (4.3), podemos chutar uma solução do tipo:

$$z_{p2}(t) = A e^{-i\omega t} . \quad (4.4)$$

Nesse sentido, pelo **Princípio da Superposição**, a solução geral da equação (4.1) deve assumir a seguinte forma:

$$z(t) = -\frac{HR}{6mz_c^2 \omega_0'^2} + A e^{-i\omega t} . \quad (4.5)$$

Entretanto, como apenas a parte real da solução complexa nos interessa, iremos manipular a solução particular (4.4), substituindo suas derivadas de primeira e segunda ordem na

equação (4.3), o que nos dá informação sobre a amplitude de oscilação. Realizando, em seguida, alguns desenvolvimentos e aproximações (consultar o **Apêndice B**), obtemos  $A^2$ :

$$A^2(\omega) = \frac{\left(\frac{F_0}{m} - a\right)^2 + \frac{4\omega^2 z_c^2 F_0}{mv^2}}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]} , \quad (4.6)$$

onde  $v$  é a velocidade do som no meio em que ele se encontra.

Sabendo que o pico de ressonância corresponde ao ponto de amplitude máxima, podemos derivar  $A^2$  em relação à frequência da força motriz  $\omega$ , igualando a zero, a fim de verificar onde ocorre o máximo da amplitude:

$$\frac{dA^2}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left\{ \frac{\left(\frac{F_0}{m} - a\right)^2 + \frac{4\omega^2 z_c^2 F_0}{mv^2}}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]} \right\} = 0 . \quad (4.7)$$

Derivamos, então, a equação (4.7), desenvolvendo as expressões subsequentes (consultar o **Apêndice B**), o que resulta na seguinte equação para a frequência de oscilação de um cantiléver em função da distância ponta-amostra:

$$f(z_c) = \sqrt{-\frac{c'_0}{z_c^2} + \left\{ \frac{c_0'^2}{z_c^4} + \frac{\xi}{z_c^2} - \frac{8\pi^2 \sqrt{\sigma} M}{z_c^3} - \frac{8\pi^2 c'_0 M}{z_c^5} + \frac{16\pi^4 M^2}{z_c^6} + \sigma \right\}^{\frac{1}{2}}} , \quad (4.8)$$

sendo  $c'_0$ ,  $\xi$ ,  $\sigma$  e  $M$  parâmetros independentes de  $z_c$ , dados por:

$$c'_0 = \frac{v^2 l}{4\pi^2}; \quad \xi = \frac{v^2 (\omega_0^2 - 2\beta^2) l}{8\pi^4}; \quad \sigma = \frac{\omega_0^4}{16\pi^4}; \quad M = \frac{HR}{16\pi^4 3m} , \quad (4.9)$$

onde  $l$  é definido como:

$$l = \left[ \frac{(F_0 - ma)^2 + m^2 a^2}{4maF_0} \right] .$$

Dispondo dos parâmetros apresentados em (4.9), podemos encontrar uma expressão que estime o valor da constante de amortecimento  $\beta$ , ao dividirmos  $\xi$  por  $c'_0$ :

$$\frac{\xi}{c'_0} = \frac{(\omega_0^2 - 2\beta^2)}{2\pi^2} \implies \beta = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{\xi}{c'_0} \pi^2} . \quad (4.10)$$

Já a expressão de  $\sigma$  nos permite estimar a frequência natural de vibração do cantiléver:

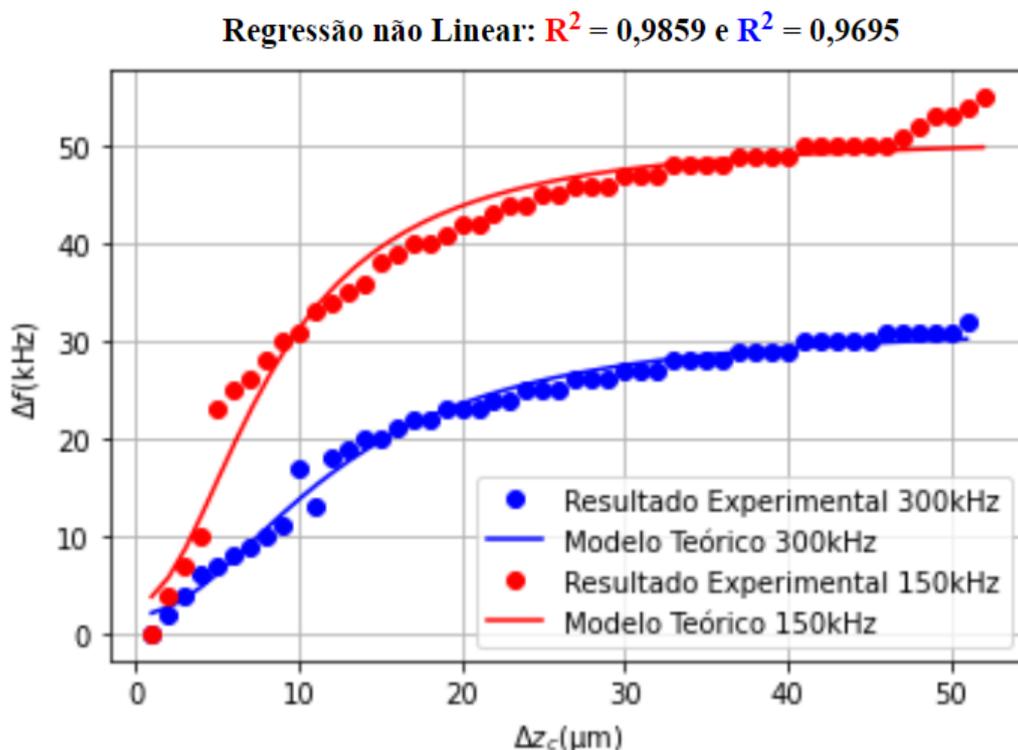
$$\sigma = \frac{\omega_0^4}{16\pi^4} \implies \omega_0 = 2\pi \sqrt[4]{\sigma} . \quad (4.11)$$

## 4.2 Análise dos dados experimentais

### 4.2.1 Oscilações em ar sobre vidro

Diante do gráfico mostrado na **Figura 12**, faremos uma primeira análise qualitativa sobre o que foi observado experimentalmente. Nota-se que ambas as pontas, tanto a de 150 kHz quanto a de 300 kHz, têm sua frequência de ressonância levemente aumentada, conforme as afastamos da amostra, tendendo a um valor constante, que equivale às suas respectivas frequências de vibração livre  $f_0$ . Essa alteração da frequência natural da ponta pode ser melhor entendida ao considerarmos a pressão exercida pelas ondas sonoras sobre o nosso oscilador. Portanto, conforme  $z_c$  aumenta, menores serão as amplitudes das ondas de pressão que chegam no cantiléver, pois, à medida que se propagam, elas dissipam energia para o ambiente.

Figura 12 – Regressão não Linear feita para os gráficos da variação da frequência em função da variação de  $z_c$  para as pontas de 150 kHz e 300 kHz, oscilando em ar.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Trazendo agora uma interpretação quantitativa do gráfico acima, vemos que a regressão não linear se ajustou bem ao resultado experimental, de modo que o modelo teórico concorda com o medido em laboratório, permitindo-nos estimar os valores dos parâmetros de ajuste  $c'_0$ ,  $\xi$ ,  $\sigma$  e  $M$ , expressos na equação (4.9) da seção anterior (**Tabela 1**).

Tabela 1 – Parâmetros de ajuste obtidos da Regressão não Linear dos dados, utilizando o modelo teórico proposto, para as pontas de 150 kHz e 300 kHz.

Parâmetros de ajuste	Medidas em ar		Medidas em líquido
	150 kHz	300 kHz	150 kHz
$c'_0 (\mu Hz^2 m^2)$	$2,8929 \times 10^6$	$6,5248 \times 10^6$	$6,0432 \times 10^5$
$\xi (Hz^4 m^2)$	$1,0848 \times 10^{11}$	$1,1932 \times 10^{12}$	$4,5896 \times 10^9$
$\sigma (THz^4)$	$3,5184 \times 10^8$	$8,3661 \times 10^9$	$1,4556 \times 10^7$
$M (pHz^2 m^3)$	$6,0955 \times 10^{-32}$	$3,3376 \times 10^{-32}$	$1,0562 \times 10^{-30}$

Com base nas estimativas numéricas do parâmetro  $\sigma$  correspondentes a cada regressão nos gráficos, foi possível calcular as frequências de vibração livre  $f_0$  das pontas utilizadas, além das respectivas constantes de amortecimento  $\beta$ , em ar ou em água destilada (**Tabela 2**).

Tabela 2 – Resultados obtidos para a constante de amortecimento  $\beta$  e para a frequência de vibração livre do cantiléver, por meio da Regressão não Linear dos dados.

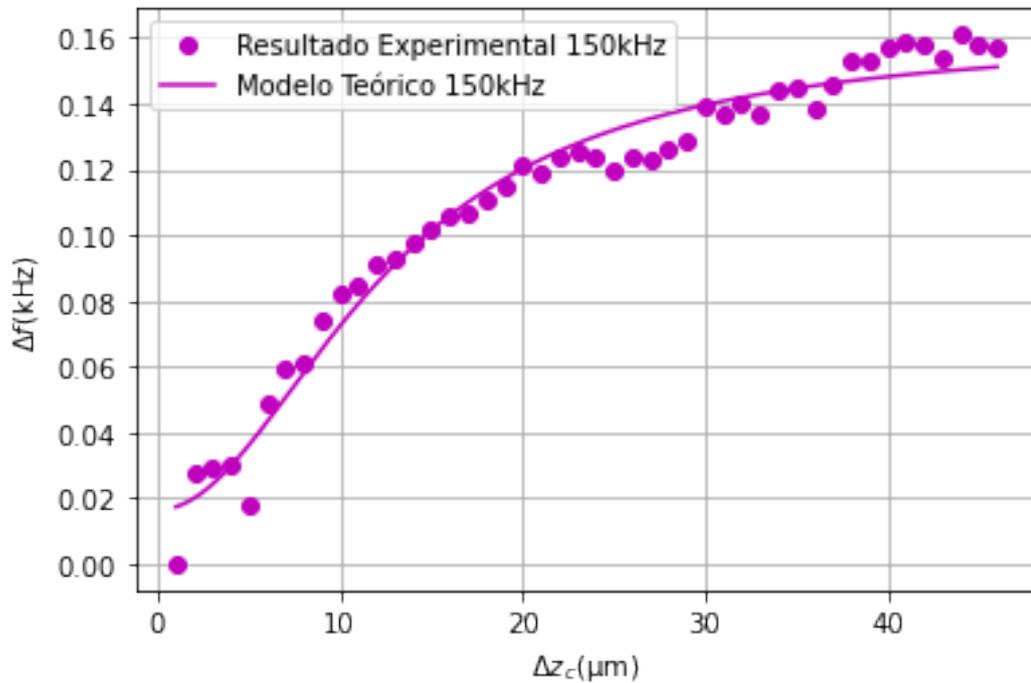
Resultados teóricos	Medidas em ar		Medidas em líquido
	150 kHz	300 kHz	150 kHz
$f_0$ (kHz)	136,9579	302,4341	61,7676
$\beta$ (kHz)	12,6029	24,5906	18,8006

Analisando ainda a curva referente à ponta de 150 kHz (em vermelho), constatamos que quando a variação da distância ponta-amostra atinge cerca de  $5 \mu m$ , ocorre uma descontinuidade no gráfico, havendo um salto da frequência de ressonância. Analogamente, para a ponta de 300 kHz (em azul), verificaremos novamente o padrão de ruptura no gráfico, ocorrendo agora na região em que a variação da distância está em torno de  $10 \mu m$ . Diante do que foi exposto, vimos que esse salto se repete para as duas pontas diferentes, onde a proximidade com a amostra é maior, o que nos leva a supor que se trata de algum fenômeno físico devido às forças intermoleculares envolvidas. Entretanto, para melhor explicar o que ocorre nessa região, seria necessário repetir os experimentos com um maior número de pontas distintas, considerando uma escala ainda menor da variação da distância, por exemplo, em nanômetros.

#### 4.2.2 Oscilações em líquido sobre vidro

Observando a **Figura 13**, vemos que, assim como em ar, a variação da frequência de ressonância da ponta de 150 kHz tende a aumentar, conforme a ponta se afasta da amostra, tendendo a sua frequência de vibração livre, em líquido, da ordem de  $f_0 \approx 61,7676$  kHz, estimada

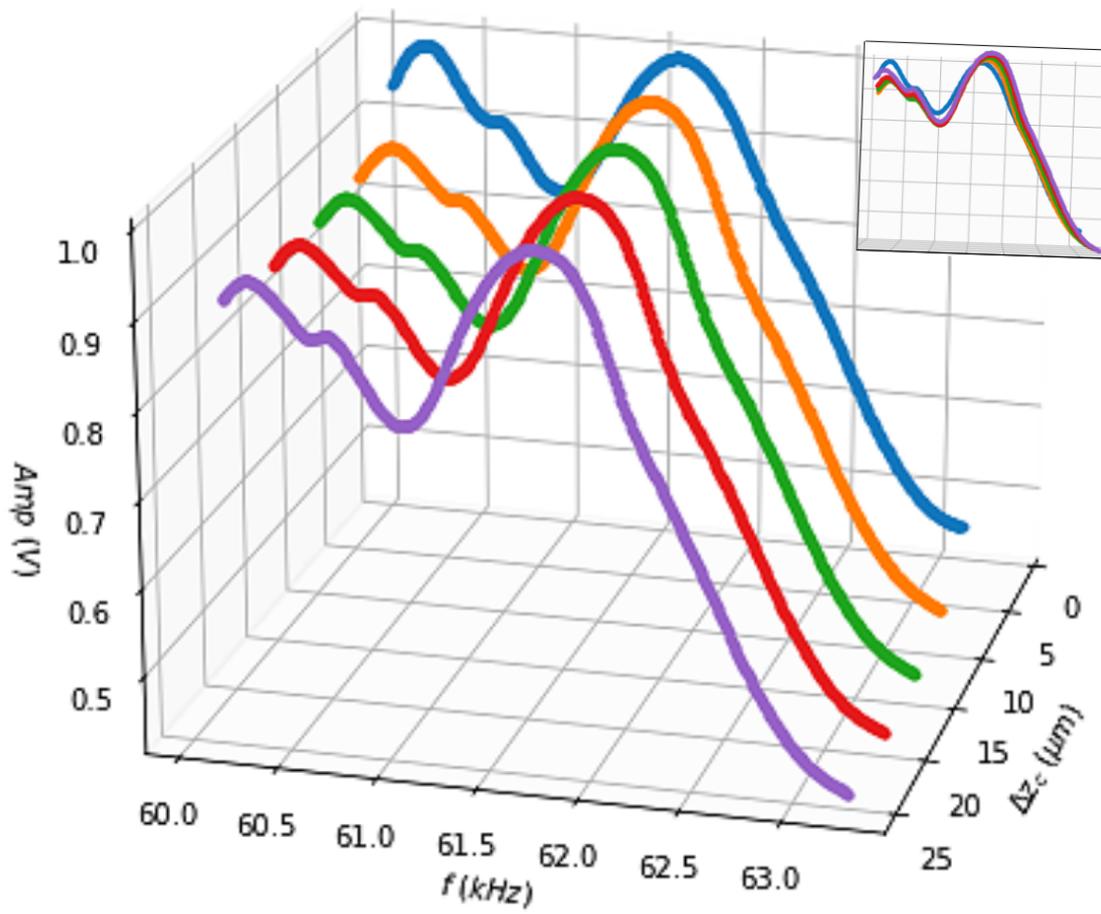
Figura 13 – Regressão não Linear feita para o gráfico da variação da frequência em função da variação de  $z_c$  para a ponta de 150 kHz, oscilando em líquido (água destilada).



Fonte: Elaborado pelo autor.

pelo parâmetro  $\sigma$  da regressão não linear (**Tabela 2**). Essa diminuição da frequência natural pode ser entendida como consequência da massa efetiva deslocada pelo cantiléver e do arrasto hidrodinâmico serem maiores em água do que em ar, resultando em uma menor frequência de oscilação. Ademais, é interessante mencionar que, em líquido, não foi possível observar tão claramente o padrão de ruptura verificado nas medidas em ar. Complementando esse resultado, na **Figura 14**, vemos que, em líquido, não há medidas geradas para o fator Q pelo equipamento, pois o fator de mérito representa a largura na metade da altura do pico de ressonância. Também fizemos esse mesmo gráfico em duas dimensões, a fim de verificar claramente que a frequência de ressonância sofre um deslocamento, em dependência da distância ponta-amostra.

Figura 14 – Resultados experimentais para a ponta com frequência natural de aproximadamente 150 kHz oscilando em líquido (água destilada).



Fonte: Elaborado pelo autor.

## 5 CONCLUSÕES

Tomando como base os resultados expostos no capítulo 4, podemos afirmar que o modelo proposto se ajusta muito bem ao que foi observado em laboratório, pois os parâmetros estimados pela regressão não linear dos dados nos forneceu informação sobre a frequência natural de oscilação livre  $f(z_c)$  das diferentes pontas de AFM em estudo.

A dinâmica de um cantiléver pode, assim, ser melhor descrita ao considerarmos o efeito das ondas ultrassônicas de pressão que incidem sobre ele, após serem refletidas de uma determinada superfície. Apesar de simples, este resultado funciona como uma prova de conceito e abre caminho para as próximas etapas desta pesquisa. Para isso, iremos repetir os experimentos utilizando amostras viscoelásticas de diferentes graus de rigidez, além de modelar fisicamente a variação de frequência com a rigidez da amostra e a altura na qual a medida foi realizada.

A teoria física que explica esta interação é bastante complexa, misturando conceitos de hidrodinâmica, deformação dos sólidos e de física básica, como o o modelo do oscilador harmônico forçado amortecido. Não foi medido nenhum parâmetro da amostra neste trabalho, entretanto, nas próximas etapas, concentraremos esforços na determinação de um modelo físico que permita extrair dados quantitativos da elasticidade dos materiais.

Outro ponto importante é entender como se dá a descontinuidade nos gráficos da frequência versus distância. Em vista disso, iremos repetir as medidas considerando uma variação da distância ainda mais precisa, da ordem de nanômetros.

## A APÊNDICE

Como foi discutido na seção 2.2.1 do capítulo 2, vimos que a expressão mais aceita na literatura para descrever as forças de interação intermoleculares de longo alcance entre ponta e amostra é dada pela equação (2.2) a seguir:

$$F_{ts} = -\frac{HR}{6(z_c + z(t))^2} . \quad (\text{A.1})$$

Colocando o termo  $z_c$  em evidência no denominador da equação (A.1), vem que:

$$F_{ts} = -\frac{HR}{6\left[z_c\left(1 + \frac{z}{z_c}\right)\right]^2} = -\frac{HR}{6z_c^2\left(1 + \frac{z}{z_c}\right)^2} . \quad (\text{A.2})$$

A partir da **Figura 5**, vemos que  $z \ll z_c$  o que resulta que  $\frac{z}{z_c} \rightarrow 0$ . Isso nos permite aproximar  $F_{ts}$  por uma expansão em série de Taylor, cujos primeiros dois termos são:

$$F_{ts}(0) = -\frac{HR}{6z_c^2} . \quad (\text{A.3})$$

Derivando agora a equação (A.2) e aplicando  $\frac{z}{z_c} = 0$ , temos:

$$F'_{ts}(0) = \frac{HR}{3z_c^3}z . \quad (\text{A.4})$$

Dessa forma, chegamos na expressão exposta em (2.3) com uma boa aproximação:

$$F_{ts} \approx -\frac{HR}{6z_c^2} + \frac{HR}{3z_c^3}z(t) . \quad (\text{A.5})$$

Esse é um resultado que utilizamos no decorrer de todo o trabalho aqui apresentado.

## B APÊNDICE

Ao incluirmos o efeito das ondas planas de pressão na equação (2.6), já considerando a aproximação feita para caso das forças de interação intermoleculares entre ponta e amostra, e empregarmos a notação complexa, teremos a seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \left(\omega_0^2 - \frac{HR}{3mz_c^3}\right)z = \frac{F_0}{m}e^{-i\omega t} - ae^{-i(\omega t - 2kz_c)} - \frac{HR}{6mz_c^2} . \quad (\text{B.1})$$

Substituindo  $\omega_0'^2 = \omega_0^2 - \frac{HR}{3mz_c^3}$ , conseguimos expressar que de fato há uma dependência da frequência de ressonância do cantiléver em relação à distância a uma amostra, devido às forças atrativas. Chegamos, assim, na equação (4.1) apresentada no capítulo 4:

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_0'^2 z = \frac{F_0}{m}e^{-i\omega t} - ae^{-i(\omega t - 2kz_c)} - \frac{HR}{6mz_c^2} . \quad (\text{B.2})$$

A solução homogênea da equação (B.2) decai muito rapidamente, prevalecendo apenas as soluções particulares da equação, dadas por:

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0'}{Q}\dot{z} + \omega_0'^2 z = -\frac{HR}{6mz_c^2} \quad (\text{B.3})$$

e

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0'}{Q}\dot{z} + \omega_0'^2 z = \frac{F_0}{m}e^{-i\omega t} - ae^{-i(\omega t - 2kz_c)} . \quad (\text{B.4})$$

A primeira solução particular de (B.3) é a mesma obtida na equação (2.13) abaixo:

$$z_{p1}(t) = -\frac{HR}{6mz_c^2\omega_0'^2} . \quad (\text{B.5})$$

Enquanto que a solução da equação (B.4) pode ser vista como uma exponencial decrescente, de acordo com o mostrado em (4.4):

$$z_{p2}(t) = Ae^{-i\omega t} . \quad (\text{B.6})$$

Considerando o **Princípio da Superposição**, melhor explicado na seção 2.2.1 do capítulo 2, a solução geral de (B.2) será dada pela soma das soluções particulares, como segue:

$$z(t) = -\frac{HR}{6mz_c^2\omega_0'^2} + Ae^{-i\omega t} . \quad (\text{B.7})$$

A solução (B.6) é complexa, porém nos interessa apenas a parte real. Para tanto, calculamos as derivadas de primeira e segunda ordem de  $z_{p2}(t)$  da forma:

$$z_{p2}(t) = Ae^{-i\omega t} \implies \dot{z}_{p2}(t) = -Ai\omega e^{-i\omega t} \implies \ddot{z}_{p2}(t) = -A\omega^2 e^{-i\omega t} . \quad (\text{B.8})$$

Em seguida, substituiremos (B.8) na equação (B.4), resultando em:

$$-A\omega^2 e^{-i\omega t} - 2\beta Ai\omega e^{-i\omega t} + A\omega_0'^2 e^{-i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{-i\omega t} - ae^{-i(\omega t - 2kz_c)} . \quad (\text{B.9})$$

Multiplicando a expressão (B.9) por  $e^{i\omega t}$  e isolando a amplitude  $A$ , obtemos:

$$A(-\omega^2 - 2\beta i\omega + \omega_0'^2) = \frac{F_0}{m} - ae^{2kz_c i} \implies A = \frac{\frac{F_0}{m} - ae^{2kz_c i}}{(\omega_0'^2 - \omega^2) - 2\beta i\omega} . \quad (\text{B.10})$$

Com base no que foi discutido na seção 2.2.2, o pico de amplitude máxima  $A^2$  coincide com a frequência de ressonância. Assim, ao multiplicarmos,  $A$  por seu conjugado complexo  $A^*$ , queremos chegar em uma expressão real para a amplitude quadrada:

$$A^2 = A \cdot A^* = \frac{\left(\frac{F_0}{m} - ae^{2kz_c i}\right)}{[(\omega_0'^2 - \omega^2) - 2\beta i\omega]} \cdot \frac{\left(\frac{F_0}{m} - ae^{-2kz_c i}\right)}{[(\omega_0'^2 - \omega^2) + 2\beta i\omega]} \implies \quad (\text{B.11})$$

$$\implies A^2 = \frac{\left(\frac{F_0}{m}\right)^2 - \frac{F_0}{m}ae^{-2kz_c i} - \frac{F_0}{m}ae^{2kz_c i} + a^2}{[(\omega_0'^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]} \implies \quad (\text{B.12})$$

$$\implies A^2 = \frac{\left(\frac{F_0}{m}\right)^2 - a\frac{F_0}{m}(e^{-2kz_c i} + e^{2kz_c i}) + a^2}{[(\omega_0'^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]} . \quad (\text{B.13})$$

Queremos, agora, simplificar o numerador da equação (B.13). Seja então:

$$\left(\frac{F_0}{m}\right)^2 - a\frac{F_0}{m}(e^{-2kz_c i} + e^{2kz_c i}) + a^2 ,$$

reescrevemos a soma das exponenciais complexas com base na sua definição:

$$e^{-2kz_c i} + e^{2kz_c i} = \cos(-2kz_c) + i\sin(-2kz_c) + \cos(2kz_c) + i\sin(2kz_c) . \quad (\text{B.14})$$

Como o cosseno é uma função par, ele tem a seguinte propriedade:

$$\cos(-2kz_c) = \cos(2kz_c) . \quad (\text{B.15})$$

Analogamente, o seno é uma função ímpar, valendo que:

$$\sin(-2kz_c) = -\sin(2kz_c) . \quad (\text{B.16})$$

Dessa forma, ao substituírmos as expressões (B.15) e (B.16) em (B.14):

$$e^{-2kz_c i} + e^{2kz_c i} = 2\cos(2kz_c) . \quad (\text{B.17})$$

É importante considerar ainda que a onda sonora se propaga com uma velocidade  $v$ , de acordo com o meio no qual se encontra, dada por:

$$v = \lambda f \implies f = \frac{v}{\lambda} , \quad (\text{B.18})$$

onde  $f$  é a frequência,  $\lambda$  o comprimento de onda,  $\omega$  é a frequência angular, e  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  representa o número de onda. Multiplicando, agora, ambos os lados da equação (B.18) por  $2\pi$ , teremos:

$$2\pi f = 2\pi \frac{v}{\lambda} \implies \omega = kv .$$

Obtemos, portanto,  $k$  em função da frequência angular  $\omega$ , como segue abaixo:

$$k = \frac{\omega}{v} . \quad (\text{B.19})$$

Substituindo o  $k$  dado por (B.19) na expressão do  $\cos(2kz_c)$  e, em seguida, fazendo uma aproximação por série de Taylor do cosseno, resulta que:

$$\cos(2kz_c) = \cos\left(\frac{2\omega z_c}{v}\right) \approx 1 - \frac{4\omega^2 z_c^2}{2v^2} . \quad (\text{B.20})$$

Com isso, podemos substituir a forma aproximada do cosseno de (B.20) na equação (B.17), de modo que obtemos uma expressão real para a soma das exponenciais complexas:

$$e^{-2kz_c i} + e^{2kz_c i} = 2 - \frac{4\omega^2 z_c^2}{v^2} . \quad (\text{B.21})$$

Tendo feito a aproximação exposta em (B.21), substituiremos esse resultado na equação (B.13), o que nos dá:

$$A^2 = \frac{\left(\frac{F_0}{m}\right)^2 - a\frac{F_0}{m}\left(2 - \frac{4\omega^2 z_c^2}{v^2}\right) + a^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]} = \frac{\left(\frac{F_0}{m}\right)^2 - 2a\frac{F_0}{m} + \frac{4\omega^2 z_c^2 F_0}{mv^2} + a^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]} \implies \quad (\text{B.22})$$

$$\implies A^2 = \frac{\left(\frac{F_0}{m} - a\right)^2 + \frac{4\omega^2 z_c^2 F_0}{mv^2}}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]} . \quad (\text{B.23})$$

Para encontrar o ponto de máxima amplitude, derivamos  $A^2(\omega)$  em relação à frequência  $\omega$  e igualamos a zero, como foi visto na equação (4.7):

$$\frac{dA^2}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left\{ \frac{\left(\frac{F_0}{m} - a\right)^2 + \frac{4\omega^2 z_c^2 F_0}{mv^2}}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]} \right\} = 0 . \quad (\text{B.24})$$

Derivando (B.24) pela regra do quociente, temos que:

$$\Rightarrow \frac{\frac{8\omega_c^2 F_0}{mv^2} [(\omega_0'^2 - \omega^2) + 4\beta^2 \omega^2] - [2(\omega_0'^2 - \omega^2)2\omega + 8\beta^2 \omega] \left[ \left( \frac{F_0}{m} - a \right)^2 + \frac{4\omega_c^2 z_c^2 F_0}{mv^2} \right]}{[(\omega_0'^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]^2} = 0 .$$

Aplicando a propriedade distributiva e agrupando os termos de acordo com a potência de  $\omega$  que os multiplicam, resulta que:

$$\begin{aligned} & \omega^5 \left( 8a \frac{F_0}{m} \frac{z_c^2}{v^2} - 16a \frac{F_0}{m} \frac{z_c^2}{v^2} \right) + \omega^3 \left[ -4 \left( \frac{F_0}{m} \right)^2 + 8a \frac{F_0}{m} - 4a^2 \right] + \quad (B.25) \\ & + \omega \left[ 8a \frac{F_0}{m} \frac{z_c^2}{v^2} \omega_0'^4 + 4\omega_0'^2 \left( \frac{F_0}{m} \right)^2 - 8a\omega_0'^2 \frac{F_0}{m} + 4a^2 \omega_0'^2 - 8\beta^2 \left( \frac{F_0}{m} \right)^2 + 16a\beta^2 \frac{F_0}{m} - 8\beta^2 a^2 \right] = 0 \end{aligned}$$

No intuito de simplificar a expressão acima, vamos renomear os termos constantes, ou seja, independentes de  $z_c$ , conforme o mostrado abaixo:

$$B = -4 \left( \frac{F_0}{m} \right)^2 + 8a \frac{F_0}{m} - 4a^2 \quad (B.26)$$

$$S = 4\omega_0'^2 \left( \frac{F_0}{m} \right)^2 - 8a\omega_0'^2 \frac{F_0}{m} + 4a^2 \omega_0'^2 - 8\beta^2 \left( \frac{F_0}{m} \right)^2 + 16a\beta^2 \frac{F_0}{m} - 8\beta^2 a^2 \quad (B.27)$$

Dividindo ambos os lados da equação (B.25) por  $\omega$  e escrevendo na forma reduzida, em termos de  $B$  e  $S$  definidos nas equações (B.26) e (B.27), vem que:

$$\omega^4 \left( 8a \frac{F_0}{m} \frac{z_c^2}{v^2} - 16a \frac{F_0}{m} \frac{z_c^2}{v^2} \right) + \omega^2 B + 8a \frac{F_0}{m} \frac{z_c^2}{v^2} \omega_0'^4 + S = 0 \quad (B.28)$$

Tomando  $x = \omega^2$  na equação (B.28), encontramos a seguinte equação de segundo grau, cuja solução nos fornecerá uma expressão para a frequência de oscilação:

$$x^2 \left( 8a \frac{F_0}{m} \frac{z_c^2}{v^2} - 16a \frac{F_0}{m} \frac{z_c^2}{v^2} \right) + xB + 8a \frac{F_0}{m} \frac{z_c^2}{v^2} \omega_0'^4 + S = 0$$

Resolvendo a equação acima, temos as raízes:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4 \left( 8a \frac{F_0}{m} \frac{z_c^2}{v^2} - 16a \frac{F_0}{m} \frac{z_c^2}{v^2} \right) \left( 8a \frac{F_0}{m} \frac{z_c^2}{v^2} \omega_0'^4 + S \right)}}{-16a \frac{F_0}{m} \frac{z_c^2}{v^2}} \\ \Rightarrow x &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 32a \frac{F_0}{m} \frac{z_c^2}{v^2} S + 256a^2 \left( \frac{F_0}{m} \right)^2 \frac{z_c^4}{v^4} \omega_0'^4}}{-16a \frac{F_0}{m} \frac{z_c^2}{v^2}} \end{aligned}$$

Como a solução negativa dessa equação de segundo grau não tem significado físico, pois se refere a uma frequência negativa, consideramos apenas a solução positiva. Isso nos diz que a frequência depende da distância ponta-amostra:

$$\omega(z_c) = \sqrt{-\frac{c_0}{z_c^2} + \left(\frac{c_0^2}{z_c^4} + \frac{c_1}{z_c^2} + c_2\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{B.29})$$

onde definimos  $c_0$ ,  $c_1$  e  $c_2$ , para auxiliar a nossa análise:

$$c_0 = \frac{-B}{16a \frac{F_0}{m} \frac{1}{v^2}} \quad (\text{B.30})$$

$$c_1 = \frac{32a \frac{F_0}{m} \frac{1}{v^2} S}{\left(16a \frac{F_0}{m} \frac{1}{v^2}\right)^2} \quad (\text{B.31})$$

$$c_2 = \frac{256a^2 \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \frac{1}{v^4} \omega_0'^4}{\left(16a \frac{F_0}{m} \frac{1}{v^2}\right)^2} \quad (\text{B.32})$$

Agora, estudaremos cada uma dessas constantes listadas acima, visando obter uma relação mais simplificada para a frequência e, conseqüentemente, a amplitude. Nesse sentido, substituindo (B.26) em (B.30), temos que:

$$c_0 = \frac{4\left(\frac{F_0}{m}\right)^2 - 8a \frac{F_0}{m} + 4a^2}{16a \frac{F_0}{m} \frac{1}{v^2}} = \frac{F_0 v^2}{4ma} - \frac{v^2}{2} + \frac{amv^2}{2F_0}$$

$$\implies c_0 = \frac{v^2}{2} \left( \frac{F_0}{2ma} - 1 + \frac{am}{F_0} \right) = \frac{v^2}{2} \left( \frac{F_0^2 - 2maF_0 + 2m^2 a^2}{2maF_0} \right)$$

Completando quadrado, obtemos uma expressão mais compacta para  $c_0$ :

$$c_0 = v^2 \left[ \frac{(F_0 - ma)^2 + m^2 a^2}{4maF_0} \right] \quad (\text{B.33})$$

Analogamente, vamos substituir (B.27) em (B.31):

$$c_1 = \frac{S}{8a \frac{F_0}{m} \frac{1}{v^2}} = \frac{4\omega_0'^2 \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 - 8a\omega_0'^2 \frac{F_0}{m} + 4a^2 \omega_0'^2 - 8\beta^2 \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 + 16a\beta^2 \frac{F_0}{m} - 8\beta^2 a^2}{8a \frac{F_0}{m} \frac{1}{v^2}}$$

$$\implies c_1 = \frac{F_0 \omega_0'^2 v^2}{2ma} - \omega_0'^2 v^2 + \frac{\omega_0'^2 mav^2}{2F_0} - \frac{\beta^2 F_0 v^2}{ma} + 2\beta^2 v^2 - \frac{\beta^2 mav^2}{F_0}$$

$$\begin{aligned}
\implies c_1 &= v^2 \left[ (2\beta^2 - \omega_0'^2) + \frac{F_0}{2ma}(\omega_0'^2 - 2\beta^2) + \frac{ma}{2F_0}(\omega_0'^2 - 2\beta^2) \right] \\
\implies c_1 &= v^2 \left[ -(\omega_0'^2 - 2\beta^2) + \frac{F_0}{2ma}(\omega_0'^2 - 2\beta^2) + \frac{ma}{2F_0}(\omega_0'^2 - 2\beta^2) \right] \\
\implies c_1 &= v^2(\omega_0'^2 - 2\beta^2) \left[ -1 + \frac{F_0}{2ma} + \frac{ma}{2F_0} \right] \\
\implies c_1 &= v^2(\omega_0'^2 - 2\beta^2) \left[ \frac{2F_0^2 - 4maF_0 + 4m^2a^2}{4maF_0} \right]
\end{aligned}$$

Completando quadrado, obtemos uma expressão mais compacta para  $c_1$ :

$$c_1 = 2v^2(\omega_0'^2 - 2\beta^2) \left[ \frac{(F_0 - ma)^2 + m^2a^2}{4maF_0} \right] \quad (\text{B.34})$$

Logo, podemos reescrever  $c_1$  em função de  $c_0$ , substituindo (B.33) em (B.34):

$$c_1 = 2(\omega_0'^2 - 2\beta^2)c_0 \quad (\text{B.35})$$

Por fim, simplificando a equação (B.32), temos a seguinte expressão para  $c_2$ :

$$c_2 = \omega_0'^4 \implies \omega_0'^2 = \sqrt{c_2} \quad (\text{B.36})$$

Considerando que queremos estudar a variação da frequência em relação à distância ponta-amostra com base nas unidades do SI (Sistema Internacional de Unidades), e que  $\omega = 2\pi f$ , podemos reescrever (B.29) como:

$$f(z_c) = \sqrt{-\frac{c'_0}{z_c^2} + \left( \frac{c_0'^2}{z_c^4} + \frac{c'_1}{z_c^2} + c'_2 \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{B.37})$$

onde podemos escrever  $c'_0$ ,  $c'_1$  e  $c'_2$  em termos das anteriormente definidas em (B.33), (B.34) e (B.36), respectivamente:

$$c'_0 = \frac{c_0}{4\pi^2} = \frac{v^2}{4\pi^2} \left[ \frac{(F_0 - ma)^2 + m^2a^2}{4maF_0} \right] \quad (\text{B.38})$$

$$c'_1 = \frac{c_1}{16\pi^4} = \frac{v^2}{8\pi^4} (\omega_0'^2 - 2\beta^2) \left[ \frac{(F_0 - ma)^2 + m^2 a^2}{4maF_0} \right] \quad (\text{B.39})$$

$$c'_2 = \frac{c_2}{16\pi^4} = \frac{\omega_0'^4}{16\pi^4} \quad (\text{B.40})$$

Substituindo a definição dada em (2.10) para a frequência de ressonância devido aos efeitos das forças intermoleculares,  $\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{HR}{3mz_c^3}}$ , em (B.39) e (B.40), resulta que:

$$c'_1 = \frac{v^2}{8\pi^4} \left( \omega_0^2 - \frac{HR}{3mz_c^3} - 2\beta^2 \right) \left[ \frac{(F_0 - ma)^2 + m^2 a^2}{4maF_0} \right] \quad (\text{B.41})$$

$$\implies c'_1 = \left( \omega_0^2 - \frac{HR}{3mz_c^3} - 2\beta^2 \right) \frac{c'_0}{2\pi^2} \quad (\text{B.42})$$

$$c'_2 = \frac{\left( \omega_0^2 - \frac{HR}{3mz_c^3} \right)^2}{16\pi^4} \quad (\text{B.43})$$

Como vimos em (B.38),  $c'_0$  não depende de  $z_c$ , podendo ser tratado como um parâmetro constante. Por outro lado, em (B.41) e (B.43), notamos que tanto  $c'_1$  quanto  $c'_2$  dependem de  $z_c$ . Dessa forma, substituiremos esses dois termos na equação da frequência (B.37), para que possamos considerar todas as possíveis potências de  $z_c$ :

$$f(z_c) = \sqrt{-\frac{c'_0}{z_c^2} + \left\{ \frac{c_0'^2}{z_c^4} + \frac{v^2}{8\pi^4} \left( \omega_0^2 - \frac{HR}{3mz_c^3} - 2\beta^2 \right) \left[ \frac{(F_0 - ma)^2 + m^2 a^2}{4maF_0} \right] + \frac{1}{16\pi^4} \left( \omega_0^2 - \frac{HR}{3mz_c^3} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

Para simplificar as contas, vamos dizer que  $l = \left[ \frac{(F_0 - ma)^2 + m^2 a^2}{4maF_0} \right]$ :

$$= \sqrt{-\frac{c'_0}{z_c^2} + \left\{ \frac{c_0'^2}{z_c^4} + \frac{v^2 (\omega_0^2 - 2\beta^2) l}{8\pi^4 z_c^2} - \frac{v^2 HR l}{8\pi^4 3mz_c^5} + \frac{\omega_0^4}{16\pi^4} - \frac{2\omega_0^2 HR}{16\pi^4 3mz_c^3} + \frac{H^2 R^2}{9m^2 z_c^6 16\pi^4} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Podemos, assim, rearranjar a expressão acima da seguinte forma:

$$f(z_c) = \sqrt{-\frac{c'_0}{z_c^2} + \left\{ \frac{c_0'^2}{z_c^4} + \frac{\xi}{z_c^2} + \frac{\gamma}{z_c^3} + \frac{\alpha}{z_c^5} + \frac{\zeta}{z_c^6} + \sigma \right\}^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{B.44})$$

onde definimos os termos independentes de  $z_c$  como:

$$c'_0 = \frac{v^2 l}{4\pi^2}, \quad \xi = \frac{v^2 (\omega_0^2 - 2\beta^2) l}{8\pi^4}, \quad \gamma = -\frac{2\omega_0^2 HR}{16\pi^4 3m}, \quad \alpha = -\frac{v^2 HRl}{8\pi^4 3m}, \quad \zeta = \frac{H^2 R^2}{9m^2 16\pi^4}, \quad \sigma = \frac{\omega_0^4}{16\pi^4}$$

Para reduzir o número de parâmetros da equação (B.44), faremos algumas manipulações matemáticas. Assim, podemos reescrever  $\gamma$ ,  $\alpha$  e  $\zeta$  em termos de  $M = \frac{HR}{16\pi^4 3m}$ :

$$\gamma = -8\pi^2 \sqrt{\sigma} M, \quad \alpha = -8\pi^2 c'_0 M, \quad \zeta = 16\pi^4 M^2$$

Finalmente, obtemos a seguinte expressão da frequência de oscilação do cantiléver em função da distância  $z_c$ , da posição de equilíbrio da sonda até a amostra:

$$f(z_c) = \sqrt{-\frac{c'_0}{z_c^2} + \left\{ \frac{c_0'^2}{z_c^4} + \frac{\xi}{z_c^2} - \frac{8\pi^2 \sqrt{\sigma} M}{z_c^3} - \frac{8\pi^2 c'_0 M}{z_c^5} + \frac{16\pi^4 M^2}{z_c^6} + \sigma \right\}^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{B.45})$$

## REFERÊNCIAS

- GARCIA, R.; PEREZ, R. Dynamic atomic force microscopy methods. **Surface Science Reports**, v. 47, n. 6-8, p. 197–301, 2002.
- GAVARA, N.; CHADWICK, R. S. Noncontact microrheology at acoustic frequencies using frequency-modulated atomic force microscopy. **Nature Methods**, v. 7, n. 8, p. 650–654, 2010.
- HERRMANN, P. S. P.; SILVA, M. A. P. da; FRANCISCO, R. B.; JOB, A. E.; COLNAGO, L. A.; FROMMER, J. E.; MATTOSO, L. H. Microscopia de varredura por força: uma ferramenta poderosa no estudo de polímeros. **Polímeros: ciência e tecnologia**, v. 7, p. 51–61, 1997.
- HOWLAND, R.; BENATAR, L. **A practical guide to scanning probe microscopy**. [S.l.: s.n.], 2000. 87 p.
- LOPES, G. A. C.; COTTA, E.; FILHO, H. D. F. Equações diferenciais aplicadas à microscopia de força atômica: Uma Estratégia para o Ensino de Mecânica Clássica na Graduação. **Latin-American Journal of Physics Education**, v. 9, n. 3, p. 8, 2015.
- NUSSENZVEIG, H. **Curso de Física Básica 2: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor**. [S.l.]: Editora Edgard Blücher, 2002. 77 p.
- RESEARCH, A. **MFP-3D Manual**. [S.l.: s.n.], 2008. 270 p.
- TAYLOR, J. R. **Mecânica Clássica**. [S.l.]: Bookman, 2013. 190 p.
- ULUÇ, K.; M.D.; KUJOTH, G. C.; PH.D.; BAŞKAYA, M. K. Operating microscopes: past, present, and future. **Neurosurg Focus**, v. 27, n. 3, p. E4, 2009.
- ZANETTE, S. I. **Introdução à Microscopia de Força Atômica**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2010. 101 p.