

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Paulo Alexandre Araújo Sousa

HIPERSUPERFÍCIES r -MÍNIMAS NO ESPAÇO
EUCLIDIANO

Fortaleza-Ceará
Junho-2007

Paulo Alexandre Araújo Sousa

HIPERSUPERFÍCIES r -MÍNIMAS NO ESPAÇO
EUCLIDIANO

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

Fortaleza-Ceará
Junho-2007

BANCA:

1. Abdênago Alves de Barros-UFC
2. Antônio Caminha Muniz Neto-UFC
3. Hilário Alencar da Silva-UFAL
4. Jorge Herbert Soares de Lira-UFC
5. Walcy Santos-UFRJ

Suplente1: Levi Lopes de Lima-UFC

Suplente2: Newton Luis Santos-UFPI

DATA DA DEFESA: Dia 21 de Junho de 2007 às 10hs.

Paulo Alexandre Araujo Sousa

Abdênago Alves de Barros-Orientador

S717h Sousa, Paulo Alexandre Araújo
Hipersuperfícies r -Mínimas no Espaço Euclidiano/

Paulo Alexandre Araújo Sousa.-Fortaleza: 2007.
57f.

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.
1- Geometria Diferencial

CDD 516.36

Dedico este trabalho a meus pais José Limar de Sousa e Francisca Macêdo de Araújo Sousa, a meu irmão Francisco José Araújo Sousa e à minha noiva Izália Ferreira Leite.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as pessoas que direta ou indiretamente me ajudaram;

Aos meus pais e a meu irmão pelo apoio e incentivo;

À minha noiva Izália, pelo apoio e confiança;

Ao prof. Abdênago, por todo apoio, incentivo e orientação, imprescindíveis para a realização deste trabalho;

Aos grandes amigos Barnabé, João Xavier e João Benício, cuja amizade foi importante na busca deste meu objetivo;

A todos os amigos da Pós-Graduação em Matemática da UFC, em especial aos meus grandes amigos Juscelino Silva e Henrique Fernandes, pela amizade e pelo incentivo durante todo esse tempo;

A Andréa Dantas, secretária da Pós-Graduação em Matemática da UFC, quero parabenizá-la por toda sua competência e prontidão na assistência a todos os alunos da Pós-graduação;

Agradeço também a todos os amigos do Departamento de Matemática da UFPI – do qual tenho a honra de fazer parte – por todo apoio e disposição em ajudar-me a concluir o quanto antes o Doutorado.

“Embora ninguém possa voltar atrás e fazer um novo começo, qualquer um pode começar agora e fazer um novo fim”.

Chico Xavier

RESUMO

Na primeira parte (capítulos 2, 3 e 4) desta Tese estudaremos as hipersuperfícies de \mathbb{R}^{p+q+2} que são r -mínimas ($S_r = 0$) e invariantes pela ação canônica do grupo $O(p+1) \times O(q+1)$. Obteremos uma classificação completa de todas as hipersuperfícies de \mathbb{R}^{p+q+2} que são $O(p+1) \times O(q+1)$ -invariantes e possuem a r -ésima curvatura média nula ($2 \leq r \leq \min\{p, q\}$), analisando se tais hipersuperfícies são completas, mergulhadas e $(r-1)$ -estáveis. Com isto obteremos o seguinte resultado de existência: “Sejam $p, q, r \in \mathbb{N}$ tais que $p+q \geq r+5$ e $2 \leq r \leq \min\{p, q\}$, então existe uma hipersuperfície $M^{p+q+1} \subset \mathbb{R}^{p+q+2}$ completa, mergulhada, com r -ésima curvatura média nula que é globalmente $(r-1)$ -estável”.

No capítulo 5 estudaremos os cones $C(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ r -mínimos, cuja base $M^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ é uma hipersuperfície compacta tal que $S_r = 0$ e S_{r+1} é constante não nula. Provaremos que: “Se $r+2 \leq n \leq r+5$, então existe $0 < \varepsilon < 1$ tal que o tronco de cone $C(M)_\varepsilon$ não é $(r-1)$ -estável”. Além disso, construiremos um Toro de Clifford com $S_r = 0$ e $S_{r+1} \neq 0$ para mostrarmos que este resultado não é válido quando $n \geq r+6$.

Sumário

1	Introdução	8
2	Classificação das Órbitas das Hipersuperfícies Invariantes	13
2.1	Equação das Hipersuperfícies r -Mínimas	13
2.2	O Campo Vetorial Associado	16
3	Classificação das Hipersuperfícies Completas	33
4	Estabilidade das Hipersuperfícies Completas	38
5	Estabilidade de Cones r-Mínimos em \mathbb{R}^{n+1}	43
5.1	Existência de Cones Instáveis se $n \leq r + 5$	43
5.2	Estabilidade de Cones quando $n \geq r + 6$	50

Capítulo 1

Introdução

Os métodos da geometria equivariante têm sido aplicados com sucesso por muitos matemáticos para obter e classificar exemplos explícitos de hipersuperfícies com uma dada condição sobre a r -ésima curvatura média e invariantes pela ação de um grupo de isometrias. Um dos primeiros trabalhos nesta área é devido a Delaunay em [8], no qual ele classifica as superfícies de rotação do \mathbb{R}^3 com curvatura média constante.

Após a classificação dos grupos de isometrias de baixa cohomogenidade feita por Hsiang e Lawson em [15], vários trabalhos abordando geometria equivariante foram divulgados. Estudando hipersuperfícies de \mathbb{R}^{2m} invariantes por $O(m) \times O(m)$, Hsiang, Teng e Yu em [16] mostraram a existência de imersões de \mathbb{S}^{2m-1} em \mathbb{R}^{2m} ($m \geq 2$), com curvatura média constante que não são esferas redondas. Essas imersões junto com o trabalho de Wente (ver [31]) mostram que a conjectura de Hopf é falsa em qualquer dimensão.

Em [9], do Carmo e Dajczer estenderam a noção clássica de superfície de rotação do \mathbb{R}^3 para uma hipersuperfície de um espaço forma $M^{n+1}(c)$. Neste trabalho, eles realizaram um estudo de classificação das hipersuperfícies de rotação com curvatura média constante.

Uma classificação das hipersuperfícies rotacionais com curvatura escalar nula e invariantes pela ação do grupo $O(n)$, conforme definido em [9], de um espaço forma $M^{n+1}(c)$ foi feita por Leite (ver [18]) e posteriormente generalizada por Palmas para curvatura média de ordem superior constante (ver [20]).

No caso de uma ação com cohomogenidade dois, Alencar (ver [1]) classificou as hipersuperfícies mínimas de \mathbb{R}^{2m} invariantes por $SO(m) \times SO(m)$. Para isto, Alencar usou as técnicas introduzidas no trabalho seminal de Bombieri, De Giorgi e Giusti [6], as quais consistem em fazer uma mudança de coordenadas adequada e reduzir o estudo das curvas geratrizes de tais hipersuperfícies, no espaço de órbitas, ao estudo

de um campo vetorial num aberto de \mathbb{R}^2 . Utilizando as mesmas técnicas, Alencar et all (ver [2]) fizeram um estudo detalhado das hipersuperfícies mínimas de \mathbb{R}^{p+q+2} invariantes por $O(p+1) \times O(q+1)$.

Em relação às hipersuperfícies de curvatura escalar nula, Palmas iniciou o estudo com o caso de dimensão três, ou seja, $M^3 \subset \mathbb{R}^4$ invariante pela ação do grupo $O(2) \times O(2)$, veja [21]. Em seguida, Sato (ver [24]) generalizou o trabalho de Palmas para ações do grupo $O(p+1) \times O(q+1)$, $p = q > 1$, sobre \mathbb{R}^{p+q+2} . Finalmente, em 2006, Sato e Souza Neto obtiveram uma generalização deste resultado para $p, q > 1$ quaisquer, ver[25]. Nosso objetivo principal nesta Tese é classificarmos as hipersuperfícies r -mínimas ($S_r = 0$) de \mathbb{R}^{p+q+2} que são invariantes pela ação canônica do grupo $G = O(p+1) \times O(q+1)$ sobre $\mathbb{R}^{p+q+2} = \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{q+1}$. Para obtermos tal classificação usaremos que toda hipersuperfície invariante por esta ação é caracterizada da seguinte maneira $M^{p+q+1} = \pi^{-1}(\gamma)$, onde $\pi : \mathbb{R}^{p+q+2} = \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{q+1} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é definida por $\pi(z, w) = (|z|, |w|)$ e $\gamma(t)$ é uma curva em $\pi(\mathbb{R}^{p+q+2})$.

Para chegarmos ao resultado desejado tornou-se crucial um estudo detalhado do seguinte polinômio:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{p}{r-i} \binom{q}{i} t^{r-i}, \quad 2 \leq r \leq \min\{p, q\}.$$

Mostraremos que Q tem r raízes reais positivas distintas. Supondo que as raízes de Q são ordenadas da seguinte forma $0 < \beta_1 < \dots < \beta_r$, provaremos que a curva geratriz $\gamma(t)$ de uma hipersuperfície invariante $M = \pi^{-1}(\gamma)$ com $S_r = 0$ é uma dos seguintes tipos:

- (A) $\gamma(t)$ é um dos seguintes raios $l_j(t) = (\cos(\rho_j)t, \sin(\rho_j)t)$ definida para todo $t \geq 0$, onde $\rho_j = \arctan(\sqrt{\beta_j})$ e $j = 1, \dots, r$;
- (B) $\gamma(t)$ é regular, intersecta ortogonalmente um dos semi-eixos $x \geq 0$ ou $y \geq 0$ e assintota um dos raios l_j quando $t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow -\infty$;
- (C) $\gamma(t)$ é a união de duas curvas $\gamma_1 : (-\infty, 0] \rightarrow \Omega$ e $\gamma_2 : [0, +\infty) \rightarrow \Omega$, onde $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ é uma singularidade. Além disso, a curva γ não intersecta o bordo do espaço de órbitas e assintota dois raios l_j e l_{j+1} quando $t \rightarrow \pm\infty$;
- (D) $\gamma(t)$ é regular, não intersecta o bordo do espaço de órbitas e assintota os dois raios l_1 and l_r .

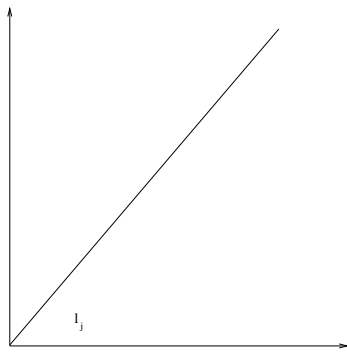


Figura 1.1: Curva Tipo A

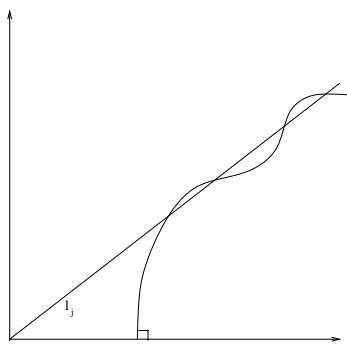


Figura 1.2: Curva Tipo B($p + q \leq r + 4$)

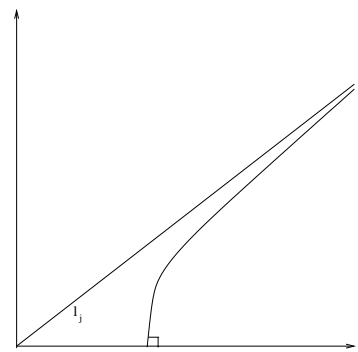


Figura 1.3: Curva Tipo B($p + q \geq r + 5$)

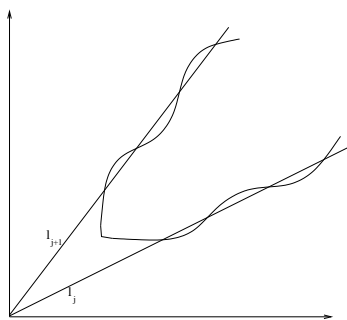


Figura 1.4: Curva Tipo C($p + q \leq r + 4$)

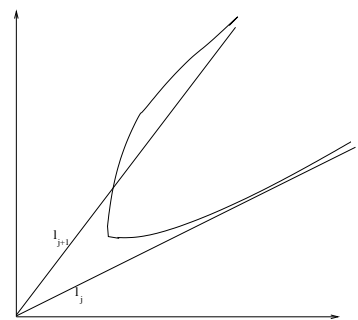


Figura 1.5: Curva Tipo C($p + q \geq r + 5$)

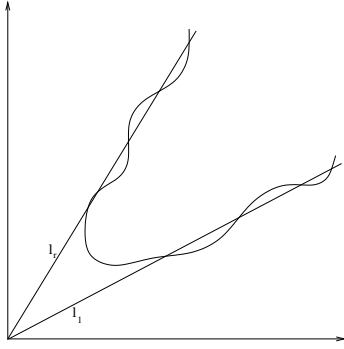


Figura 1.6: Curva Tipo D($p + q \leq r + 4$)

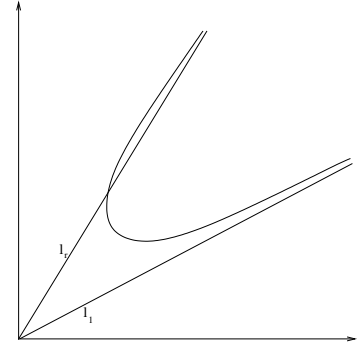


Figura 1.7: Curva Tipo D($p + q \geq r + 5$)

Os cones gerados pelos segmentos Tipo A serão denotados por C_j , $j \in \{1, \dots, r\}$. Com relação aos resultados de classificação provaremos os seguintes teoremas:

Teorema 1 (Teorema de Classificação). *Seja $M^{p+q+1} \subset \mathbb{R}^{p+q+2}$ uma hipersuperfície $O(p+1) \times O(q+1)$ -invariante com $S_r = 0$, onde $p, q > 1$ e $2 \leq r \leq \min\{p, q\}$. Então M^{p+q+1} pertence a uma das seguintes classes:*

1. Cones C_j , $j \in \{1, \dots, r\}$, com uma singularidade na origem (Tipo A);
2. Hipersuperfícies regulares que assintotam um dos cones C_j (Tipo B);
3. Hipersuperfícies que possuem uma órbita de singularidade e assintotam dois cones C_j e C_{j+1} (Tipo C);
4. Hipersuperfícies regulares que assintotam os cones C_1 e C_r (Tipo D).

Teorema 2. *Seja $M^{p+q+1} \subset \mathbb{R}^{p+q+2}$ uma hipersuperfície completa $O(p+1) \times O(q+1)$ -invariante com $S_r = 0$, onde $p, q > 1$ e $2 \leq r \leq \min\{p, q\}$. Então M é gerada por uma curva Tipo B ou D. Além disso,*

1. Se M é Tipo B, então M é mergulhada e assintota um dos cones C_j ;
2. Se M é Tipo D, então M é mergulhada e assintota os cones C_1 e C_r .

Após a classificação das hipersuperfícies invariantes que são completas iremos tratar questões relativas à estabilidade, provando os seguintes teoremas.

Teorema 3. *Seja $M^{p+q+1} \subset \mathbb{R}^{p+q+2}$ uma hipersuperfície completa $O(p+1) \times O(q+1)$ -invariante com $S_r = 0$, onde $p, q > 1$ e $2 \leq r \leq \min\{p, q\}$, gerada por uma curva Tipo B ou D.*

1. Se $p + q \leq r + 4$, então M tem índice $\text{Ind}_{J_{r-1}}(M)$ infinito.
2. Se $p + q \geq r + 5$, então as hipersuperfícies Tipo B são globalmente $(r - 1)$ -estáveis.

Teorema 4. *Sejam p, q, r números naturais tais que $p+q \geq r+5$ e $2 \leq r \leq \min\{p, q\}$. Então existe uma hipersuperfície $M^{p+q+1} \subset \mathbb{R}^{p+q+2}$ completa, mergulhada, com $S_r = 0$ que é globalmente $(r - 1)$ -estável. Além disso, M^{p+q+1} é homeomorfa a $\mathbb{S}^p \times \mathbb{R}^{q+1}$ ou a $\mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{S}^q$.*

Finalmente, vamos fazer um estudo dos cones construídos sobre hipersuperfícies r -mínimas da esfera euclidiana \mathbb{S}^n . Inicialmente relembremos que dada uma hipersuperfície $M^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ orientável, compacta e mínima, Simmons provou (ver [26]) que: “Se $n \leq 6$, então existe $0 < \varepsilon < 1$ tal que o tronco de cone $C(M)_\varepsilon$ não é estável”. Simmons também construiu um Toro de Clifford $M^6 = \mathbb{S}^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \mathbb{S}^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \subset \mathbb{S}^7$ mínimo tal que o tronco de cone $C(M)_\varepsilon$ é estável para todo $0 < \varepsilon < 1$. Isto prova que o resultado anterior não vale quando $n = 7$. Barbosa e do Carmo generalizaram estes resultados para o caso da curvatura escalar nula, ver [4]. Mais especificamente, eles provaram: “Seja $M^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ ($n \leq 7$) orientável e compacta. Se $S_2 = 0$ e $S_3 \neq 0$, então existe $0 < \varepsilon < 1$ tal que o tronco de cone $C(M)_\varepsilon$ não é 1-estável”. Além disso, eles mostraram que este resultado não vale quando $n \geq 8$. Para isto, construíram um Toro de Clifford em \mathbb{S}^n ($n \geq 8$) com $S_2 = 0$ e $S_3 \neq 0$ tal que todos os troncos de cone $C(M)_\varepsilon$ são 1-estáveis. Nosso objetivo neste caso é obtermos uma generalização parcial destes resultados. Mais precisamente, provaremos os seguintes resultados:

Teorema 5. *Seja $M^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ orientável e compacta. Suponha $S_r = 0$ e que S_{r+1} é constante não nula, onde $r + 2 \leq n \leq r + 5$. Então, existe $0 < \varepsilon < 1$ tal que o tronco de cone $C(M)_\varepsilon$ não é $(r - 1)$ -estável.*

Teorema 6. *Se $n \geq r + 6$, existe um Toro de Clifford $M^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ com $S_r = 0$ e $S_{r+1} \neq 0$ tal que o tronco de cone $C(M)_\varepsilon$ é $(r - 1)$ -estável para todo $0 < \varepsilon < 1$.*

Capítulo 2

Classificação das Órbitas das Hipersuperfícies Invariantes

2.1 Equação das Hipersuperfícies r -Mínimas

Sejam $G = O(p+1) \times O(q+1)$ e $G \times \mathbb{R}^{p+q+2} \rightarrow \mathbb{R}^{p+q+2}$ a ação canônica do grupo de isometrias G em $\mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{q+1}$, i.é., $(A, B, z, w) \rightarrow (Az, Bw)$, onde p, q são números naturais ≥ 2 . O espaço de órbitas dessa ação pode ser identificado com o subconjunto do plano dado por

$$\Omega = \pi(\mathbb{R}^{p+q+2}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0, y \geq 0\},$$

onde $\pi : \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{q+1} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é definida por $\pi(z, w) = (|z|, |w|)$. Desta maneira, toda hipersuperfície $M^{p+q+1} \subset \mathbb{R}^{p+q+2}$ invariante pela ação de $O(p+1) \times O(q+1)$ é gerada por uma curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, denominada curva geratriz, contida em Ω , isto é, $M = \pi^{-1}(\gamma)$. A métrica orbital coincide com a métrica canônica do \mathbb{R}^2 e as órbitas principais são produtos de esferas $\mathbb{S}^p(x) \times \mathbb{S}^q(y)$, ver [15]. Podemos parametrizar explicitamente a hipersuperfície $M = \pi^{-1}(\gamma)$ pela seguinte aplicação

$$\varphi(t, a, b) = (x(t)\Phi(a), y(t)\Psi(b)),$$

onde Φ e Ψ são parametrizações em coordenadas polares das esferas $\mathbb{S}^p(1) \subset \mathbb{R}^{p+1}$ e $\mathbb{S}^q(1) \subset \mathbb{R}^{q+1}$, respectivamente. Podemos supor, sem perda de generalidade, que γ está parametrizada pelo comprimento de arco t . Então, o vetor normal unitário a M é

$$N(t, a, b) = (-y'(t)\Phi(a), x'(t)\Psi(b)).$$

Portanto, a primeira e a segunda forma fundamental de M , denotadas por I e A respectivamente, são dadas por:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 I_p & 0 \\ 0 & 0 & y^2 I_q \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} -x''y' + x'y'' & 0 & 0 \\ 0 & -xy'I_p & 0 \\ 0 & 0 & yx'I_q \end{bmatrix},$$

onde I_p e I_q denotam as matrizes identidade de dimensões p e q , respectivamente. As curvaturas principais são as raízes da equação $\det(A - kI) = 0$, que são

$$\begin{aligned} k_0 &= x'y'' - x''y'; \\ k_i &= \frac{y'}{x}, \quad i = 1, 2, \dots, p; \\ k_j &= -\frac{x'}{y}, \quad j = p + 1, p + 2, \dots, p + q. \end{aligned}$$

A r -ésima curvatura média da imersão $\psi : M^{p+q+1} \rightarrow \mathbb{R}^{p+q+2}$ é definida por

$$S_r = \sum_{i_1 < \dots < i_r} k_{i_1} \dots k_{i_r}, \quad 1 \leq r \leq p + q + 1.$$

Por motivos que ficarão mais claros posteriormente vamos considerar $r \leq \min\{p, q\}$. Assim, se $M = \pi^{-1}(\gamma)$ é uma hipersuperfície com $S_r = 0$, temos que sua curva geratriz $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ satisfaz a seguinte equação diferencial (a qual será denominada de equação das r -mínimas):

$$(x'y'' - x''y') \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i \left(\frac{y'}{x}\right)^{r-1-i} \left(\frac{x'}{y}\right)^i + \sum_{i=0}^r (-1)^i c_i d_i \left(\frac{y'}{x}\right)^{r-i} \left(\frac{x'}{y}\right)^i = 0,$$

onde $c_j = \binom{p}{r-j}$ e $d_j = \binom{q}{j}$.

É fácil ver que as curvas regulares $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ satisfazendo a equação das r -mínimas são invariantes por homotetias e, portanto, para cada solução $\gamma(t)$ temos uma família M_λ de hipersuperfícies invariantes com a r -ésima curvatura média nula, geradas pelas curvas $\gamma_\lambda(t) = (\lambda x(t), \lambda y(t))$.

Por outro lado, usando que $(x')^2 + (y')^2 = 1$ obtemos as seguintes relações:

$$x'y'' - x''y' = \frac{y''}{x'} \quad \text{e} \quad x'y'' - x''y' = -\frac{x''}{y'}.$$

Portanto,

$$y'' = -x' \frac{\sum_{i=0}^r (-1)^i c_i d_i \left(\frac{y'}{x}\right)^{r-i} \left(\frac{x'}{y}\right)^i}{\sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i \left(\frac{y'}{x}\right)^{r-1-i} \left(\frac{x'}{y}\right)^i}$$

$$x'' = y' \frac{\sum_{i=0}^r (-1)^i c_i d_i \left(\frac{y'}{x}\right)^{r-i} \left(\frac{x'}{y}\right)^i}{\sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i \left(\frac{y'}{x}\right)^{r-1-i} \left(\frac{x'}{y}\right)^i}.$$

Localmente, a curva γ é gráfico sobre o eixo x ou sobre o eixo y . Se $y = y(x)$, temos que $y' = \frac{dy}{dx} x'$ e $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} (x')^2 + \frac{dy}{dx} x''$. Conseqüentemente, $(x')^2 \frac{d^2y}{dx^2} = y'' - \frac{dy}{dx} x''$. Com isto, podemos escrever a primeira equação como se segue

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}{xy} \frac{\sum_{i=0}^r (-1)^i c_i d_i \left(y \frac{dy}{dx}\right)^{r-i} x^i}{\sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i \left(y \frac{dy}{dx}\right)^{r-1-i} x^i}.$$

De maneira similar, se $x = x(y)$ podemos escrever a segunda equação da seguinte forma

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{\left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)}{xy} \frac{\sum_{i=0}^r (-1)^i c_i d_i \left(x \frac{dx}{dy}\right)^i y^{r-i}}{\sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i \left(x \frac{dx}{dy}\right)^i y^{r-1-i}}.$$

Estas igualdades mostram que a curva geratriz tem singularidades que são zeros das seguintes equações

$$\sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i \left(y \frac{dy}{dx}\right)^{r-1-i} x^i = 0 \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i \left(x \frac{dx}{dy}\right)^i y^{r-1-i} = 0. \tag{2.2}$$

2.2 O Campo Vetorial Associado

Seguindo Bombieri, De Giorgi e Giusti (ver [6]) introduziremos os parâmetros

$$u = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \text{ e } v = \arctan\left(\frac{y'}{x'}\right),$$

onde $(u, v) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [-\pi, \pi]$, pois precisamos de informações apenas para $x, y \geq 0$. Sendo $x' \tan(v) = y'$, obtemos que $(x')^2(1 + \tan^2(v)) = 1$. Portanto, $x' = \cos(v)$ e $y' = \sen(v)$. Agora usando $x \cdot \tan(u) = y$, obtemos a seguinte igualdade

$$x^2 + y^2 = y^2 \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) = y^2 \left(1 + \frac{\cos^2(u)}{\sen^2(u)}\right).$$

Então $y^2 = \sen^2(u)(x^2 + y^2)$. Analogamente, $x^2 = \cos^2(u)(x^2 + y^2)$. Vamos introduzir a seguinte notação:

$$F = u' \frac{x^r y^r}{[x^2 + y^2]^{\frac{r}{2}}} \sum_{i=0}^r (-1)^i c_i d_i \left(\frac{y'}{x}\right)^{r-i} \left(\frac{x'}{y}\right)^i$$

$$E = u' \frac{x^r y^r}{[x^2 + y^2]^{\frac{r}{2}}} (x' y'' - x'' y') \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i \left(\frac{y'}{x}\right)^{r-1-i} \left(\frac{x'}{y}\right)^i.$$

Inicialmente, observemos que

$$\begin{aligned} F &= u' \frac{x^r y^r}{[x^2 + y^2]^{\frac{r}{2}}} \sum_{i=0}^r (-1)^i c_i d_i \left(\frac{y'}{x}\right)^{r-i} \left(\frac{x'}{y}\right)^i \\ &= u' \sum_{i=0}^r (-1)^i c_i d_i (y')^{r-i} (x')^i \frac{y^{r-i}}{[x^2 + y^2]^{\frac{r-i}{2}}} \frac{x^i}{[x^2 + y^2]^{\frac{i}{2}}} \\ &= u' \sum_{i=0}^r (-1)^i c_i d_i \sen^{r-i}(v) \cos^i(v) \sen^{r-i}(u) \cos^i(u) \\ &= u' \sum_{i=0}^r (-1)^i c_i d_i (\sen(u) \sen(v))^{r-i} (\cos(u) \cos(v))^i. \end{aligned}$$

Por outro lado, $\tan(u) = \frac{y}{x}$ implica $u' \sec^2(u) = \frac{xy' - x'y}{x^2}$. Logo, $u' = \frac{xy' - x'y}{x^2 + y^2}$. Assim,

$$u' = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} x' - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} y' \right) = -\sen(u - v) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Portanto,

$$u' \frac{x^r y^r}{[x^2 + y^2]^{\frac{r}{2}}} = -\text{sen}(u - v) \frac{x^r y^r}{[x^2 + y^2]^{\frac{r+1}{2}}}.$$

Usando que $v' = x'y'' - x''y'$ obtemos a expressão a seguir para $\bar{E} = -\frac{E}{v'\text{sen}(u-v)}$;

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i (y')^{r-1-i} (x')^i \frac{x^{i+1} y^{r-i}}{[x^2 + y^2]^{\frac{r+1}{2}}} \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i \text{sen}^{r-1-i}(v) \cos^i(v) \frac{x^{i+1}}{[x^2 + y^2]^{\frac{i+1}{2}}} \frac{y^{r-i}}{[x^2 + y^2]^{\frac{r-i}{2}}} \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i \text{sen}^{r-1-i}(v) \cos^i(v) \text{sen}^{r-i}(u) \cos^{i+1}(u) \\ &= \text{sen}(u) \cos(u) g(u, v), \end{aligned}$$

onde $g(u, v) = \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i (\text{sen}(u) \text{sen}(v))^{r-1-i} (\cos(u) \cos(v))^i$. Com isto obtemos que, $E = -v' \text{sen}(u) \cos(u) \text{sen}(u - v) g(u, v)$.

Multiplicando a equação das r -mínimas por $u' \frac{x^r y^r}{[x^2 + y^2]^{\frac{r}{2}}}$ temos $E + F = 0$. Então,

$$u' \sum_{i=0}^r (-1)^i c_i d_i (\text{sen}(u) \text{sen}(v))^{r-i} (\cos(u) \cos(v))^i = v' \text{sen}(u) \cos(u) \text{sen}(u - v) g(u, v).$$

Esta igualdade encontrada é um sistema de EDO nas variáveis u e v . Este sistema está associado ao campo vetorial $X(u, v) = (X_1(u, v), X_2(u, v)) = (u', v')$ definido no plano \mathbb{R}^2 , dado por

$$\begin{aligned} X_1(u, v) &= \text{sen}(u) \cos(u) \text{sen}(u - v) g(u, v), \\ X_2(u, v) &= \sum_{i=0}^r (-1)^i c_i d_i (\text{sen}(u) \text{sen}(v))^{r-i} (\cos(u) \cos(v))^i. \end{aligned}$$

Observe que $X(u, v - \pi) = (-1)^r X(u, v)$, então é suficiente analisar o campo X em $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]$. Começaremos a análise de X determinando suas singularidades, que são descritas nos próximos quatros casos.

Caso 1. Observe que $X_1(0, v) = 0$. Se tivermos $X_2(0, v) = 0$, é necessário que $\cos(v) = 0$. Então, $v = \frac{\pi}{2}$. Isto diz que $(0, \frac{\pi}{2})$ é uma singularidade de X .

Caso 2. Veja que $X_1(\frac{\pi}{2}, v) = 0$. Se $X_2(\frac{\pi}{2}, v) = 0$, é necessário que $\sin(v) = 0$. Daí, $v = 0, \pi$. Concluimos com isto que $(\frac{\pi}{2}, 0)$ e $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ são singularidades de X .

Caso 3. Como $X_1(u, u) = 0$, temos que os pontos do conjunto K , definido abaixo, são singularidades de X .

$$K := X_2^{-1}(0) \cap \{(u, u); u \in [0, \frac{\pi}{2}]\}.$$

Caso 4. Suponha que $g(u, v) = X_2(u, v) = 0$. Se $\sin(u)\sin(v) = 0$, obtemos que $\cos(u)\cos(v) = 0$. Da mesma forma, $\cos(u)\cos(v) = 0$ implica $\sin(u)\sin(v) = 0$. Com isto temos que os pontos $(0, \frac{\pi}{2})$; $(\frac{\pi}{2}, 0)$ e $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ são singularidades de X . Agora suponha $\sin(u)\sin(v) \neq 0$ e $\cos(u)\cos(v) \neq 0$, então

$$\begin{aligned} \frac{g(u, v)}{(\cos(u)\cos(v))^{r-1}} &= \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i [\tan(u)\tan(v)]^{r-1-i} \\ \frac{X_2(u, v)}{(\cos(u)\cos(v))^r} &= \sum_{i=0}^r (-1)^i c_i d_i [\tan(u)\tan(v)]^{r-i}. \end{aligned}$$

Considere os seguintes polinômios:

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \binom{p}{r-1-i} \binom{q}{i} t^{r-1-i} \\ Q_2(t) &= \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{p}{r-i} \binom{q}{i} t^{r-i}. \end{aligned}$$

Supondo $r \leq \min\{p, q\}$ mostraremos que os polinômios Q_1 e Q_2 não possuem raízes em comum. Isto implica que não existem pontos (u, v) tais que $Q_1(\tan(u)\tan(v)) = Q_2(\tan(u)\tan(v)) = 0$.

Observação 1. Na definição dos polinômios Q_1 e Q_2 estamos adotando que: se $m > n$, então

$$\binom{n}{m} = 0.$$

Como consequência dos casos analisados anteriormente obtemos o seguinte lema.

Lema 1. As singularidades do campo $X = (X_1, X_2)$ em $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]$ ocorrem nos pontos $P_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, $P_2 = (\frac{\pi}{2}, 0)$, $P_3 = (\frac{\pi}{2}, \pi)$ e nos pontos do conjunto K .

Antes de fazermos uma análise dos polinômios Q_1 e Q_2 vamos introduzir algumas notações.

Notação 1. *Seja $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio.*

1. R_P^+ representará o conjunto das raízes reais positivas do polinômio P ;
2. $|P|$ denotará o número de elementos de R_P^+ ;
3. $R_P^+ = \{t_1, \dots, t_k\}$ indicará que P tem k raízes reais positivas distintas, e as raízes de P satisfazem $t_1 < \dots < t_k$;
4. $m_P(a)$ denotará a multiplicidade de $a \in R_P^+$ como raiz de P .

Teorema 7. *Sejam Q_1 e Q_2 os polinômios previamente definidos, onde $r \geq 2$. Denotando por Q'_1 e Q'_2 suas derivadas, respectivamente, temos que:*

1. $R_{Q_2}^+ \cap R_{Q_1}^+ = \emptyset$; $R_{Q_2}^+ \cap R_{Q'_2}^+ = \emptyset$ e $R_{Q_1}^+ \cap R_{Q'_1}^+ = \emptyset$;
2. *Sejam $\alpha_{j+1} > \alpha_j > 0$ raízes consecutivas do polinômio Q_1 , então existe $\beta_i \in (\alpha_j, \alpha_{j+1})$ tal que $Q_2(\beta_i) = 0$. Reciprocamente, se $\beta_{i+1} > \beta_i > 0$ são raízes consecutivas de Q_2 , então existe $\alpha_j \in (\beta_i, \beta_{i+1})$ tal que $Q_2(\alpha_j) = 0$;*
3. *Se $r \leq \min\{p, q\}$, então:*
 - (a) $r = |Q_2| = |Q_1| + 1$;
 - (b) *Escrevendo $R_{Q_1}^+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}\}$ e $R_{Q_2}^+ = \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ vale que:*

$$0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{r-1} < \alpha_{r-1} < \beta_r.$$
4. *Quando $\min\{p, q\} < r \leq 2 \min\{p, q\} - 1$, temos que $|Q_2| > 0$.*

Demonstração. A demonstração do teorema está separada em etapas, numeradas de acordo com o enunciado.

1. Considere os polinômios auxiliares,

$$T_1(t) : = tQ_1(t) + Q_2(t) = \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{p+1}{r-i} \binom{q}{i} t^{r-i}$$

$$T_2(t) : = Q_2(t) - Q_1(t) = \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{p}{r-i} \binom{q+1}{i} t^{r-i}.$$

Não é difícil verificar que $(p + 1)Q_1(t) = T_1'(t) = Q_1(t) + tQ_1'(t) + Q_2'(t)$. Portanto,

$$pQ_1(t) = tQ_1'(t) + Q_2'(t).$$

Derivando o polinômio $P_2(t) := t^r T_2\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{p}{r-i} \binom{q+1}{i} t^i$ obtemos que

$$P_2'(t) = \sum_{i=1}^r (-1)^i \binom{p}{r-i} \binom{q+1}{i} \cdot i \cdot t^{i-1} = (q+1) \sum_{i=1}^r (-1)^i \binom{p}{r-i} \binom{q}{i-1} t^{i-1}.$$

Fazendo $i = j + 1$, onde $0 \leq j \leq r - 1$, e substituindo no último somatório encontramos a igualdade

$$P_2'(t) = (q + 1) \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^{j+1} \binom{p}{r-1-j} \binom{q}{j} t^j.$$

Portanto, $P_2'(t) = -(q + 1)t^{r-1}Q_1\left(\frac{1}{t}\right)$. Daí, $t^{r-1}P_2'\left(\frac{1}{t}\right) = -(q + 1)Q_1(t)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} P_2(t) &= t^r T_2\left(\frac{1}{t}\right) \Rightarrow t^r P_2\left(\frac{1}{t}\right) = T_2(t) \\ &\Rightarrow r t^{r-1} P_2\left(\frac{1}{t}\right) - t^{r-2} P_2'\left(\frac{1}{t}\right) = T_2'(t) \\ &\Rightarrow r t^r P_2\left(\frac{1}{t}\right) - t^{r-1} P_2'\left(\frac{1}{t}\right) = t T_2'(t) \\ &\Rightarrow r T_2(t) + (q + 1) Q_1(t) = t T_2'(t) \\ &\Rightarrow r Q_2(t) + (q - r + 1) Q_1(t) = t Q_2'(t) - t Q_1'(t). \end{aligned}$$

Com isto obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} pQ_1(t) &= tQ_1'(t) + Q_2'(t); \\ tQ_2'(t) &= tQ_1'(t) + rQ_2(t) + (q - r + 1)Q_1(t). \end{aligned}$$

Donde concluímos que,

$$(t + 1)Q_2'(t) = rQ_2(t) + (p + q - r + 1)Q_1(t) \quad (2.3)$$

$$ptQ_1(t) = rQ_2(t) + (q - r + 1)Q_1(t) + t(t + 1)Q_1'(t). \quad (2.4)$$

Seja a raiz de Q_1 (ou de Q_2), uma análise do polinômio Q_j ($j = 1, 2$) nos diz que $a \geq 0$, e $a = 0$ se somente se $r - 1 > q$ (ou $r > q$). Agora suponha que existe $a \in R_{Q_2}^+ \cap R_{Q_1}^+$. As equações (2.3) e (2.4) implicam que $m_{Q_1}(a) \geq 2$ e $m_{Q_2}(a) \geq 2$. Novamente usando as equações (2.3) e (2.4) obtemos que $m_{Q_1}(a) \geq 3$ e $m_{Q_2}(a) \geq 3$. Usando as equações (2.3) e (2.4) e repetindo o argumento concluímos que $m_{Q_1}(a) = \text{grau}[Q_1]$ e $m_{Q_2}(a) = \text{grau}[Q_2]$. Então,

$$Q_1(t) = C_1(t - a)^{\text{grau}[Q_1]} \text{ e } Q_2(t) = C_2(t - a)^{\text{grau}[Q_2]}.$$

onde C_1 e C_2 são constante que dependem de p, q e r . Como conseqüência temos que $r \leq q$, pois o termo independente do polinômio Q_2 é diferente de zero. Temos dois casos a considerar, $r \leq p$ e $r > p$. Primeiro suponha que $r \leq p$, neste caso temos que $\text{grau}[Q_1] = r - 1$ e $\text{grau}[Q_2] = r$. Logo,

$$a^r = \frac{\binom{q}{r}}{\binom{p}{r}} \text{ e } a^{r-1} = \frac{\binom{q}{r-1}}{\binom{p}{r-1}}.$$

Então, $a = \frac{q-r+1}{p-r+1}$. Por outro lado, $a \cdot r = \frac{\binom{p-1}{r-1} \binom{q}{1}}{\binom{p}{r}} = q \frac{r}{p-r+1}$. Daí, $a = \frac{q}{p-r+1}$. Isto implica $r = 1$, que nos conduz a um absurdo, pois $r \geq 2$.

Agora suponha $r > p$, não é difícil verificar que $\text{grau}[Q_1] = \text{grau}[Q_2] = p$. Portanto, temos as seguinte expressões para os polinômios Q_1 e Q_2 :

$$Q_1(t) = \sum_{i=r-1-p}^{r-1} (-1)^i \binom{p}{r-1-i} \binom{q}{i} t^{r-1-i}$$

$$Q_2(t) = \sum_{i=r-p}^r (-1)^i \binom{p}{r-i} \binom{q}{i} t^{r-i}.$$

Como conseqüência imediata temos que,

$$a^p = \frac{\binom{q}{r}}{\binom{q}{r-p}} = \frac{\binom{q}{r-1}}{\binom{q}{r-1-p}}.$$

Um cálculo direto mostra que esta igualdade implica $p(q+1) = 0$, que é um absurdo. Com isto concluímos que não existe $a \in R_{Q_1}^+ \cap R_{Q_2}^+$. Sendo $R_{Q_2}^+ \cap R_{Q_1}^+ = \emptyset$, concluímos usando as equações (2.3) e (2.4) que $R_{Q_2}^+ \cap R_{Q_2'}^+ = \emptyset$ e $R_{Q_1}^+ \cap R_{Q_1'}^+ = \emptyset$.

2. Sejam $\beta_{i+1} > \beta_i > 0$ duas raízes consecutivas de Q_2 , usando o item (1) podemos afirmar que $Q_2'(\beta_{i+1})Q_2'(\beta_i) < 0$. A equação (2.3) implica $Q_1(\beta_{i+1})Q_1(\beta_i) < 0$, então existe $\alpha_j \in (\beta_i, \beta_{i+1})$ tal que $Q_1(\alpha_j) = 0$. Analogamente, se $\alpha_{i+1} > \alpha_i > 0$ são duas raízes consecutivas do polinômio Q_1 , temos que $Q_1'(\alpha_{j+1})Q_1'(\alpha_j) < 0$. A equação (2.4) implica $Q_2(\alpha_{j+1})Q_2(\alpha_j) < 0$, então existe $\beta_i \in (\alpha_j, \alpha_{j+1})$ tal que $Q_2(\beta_i) = 0$.
3. Suponha que $r \leq \min\{p, q\}$, $R_{Q_1}^+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ e $R_{Q_2}^+ = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$. É claro que $Q_1'(\alpha_n) > 0$ e $\text{signal}[Q_1'(\alpha_1)] = (-1)^r$. Usando a equação (2.4) obtemos que $\min R_{Q_2}^+ < \min R_{Q_1}^+$ e $\max R_{Q_1}^+ < \max R_{Q_2}^+$. Como entre duas raízes do polinômio Q_1 existe uma raiz do polinômio Q_2 , e vice-versa, concluímos que $m = n + 1$ e $0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{m-1} < \alpha_{m-1} < \beta_m$.

A hipótese de $r \leq \min\{p, q\}$ está sendo fortemente usada para garantir que $\min R_{Q_2}^+ < \min R_{Q_1}^+$ e $\max R_{Q_1}^+ < \max R_{Q_2}^+$, pois no caso de $r > \min\{p, q\}$ estes dois fatos podem não são verdadeiros. Isto se reflete no estudo das órbitas do campo X , isto é, o caso $r > \min\{p, q\}$ aumenta consideravelmente a dificuldade de classificação das órbitas do campo.

Os argumentos acima podem ser usados para um $2 \leq s \leq \min\{p, q\}$ arbitrário, então usaremos a notação Q_1^s para indicar o polinômio Q_1 de grau $s - 1$ e Q_2^s para indicar o polinômio Q_2 de grau s . Observe também que $Q_2^{s-1} = Q_1^s$ e $|Q_1^3| = 2$. Portanto,

$$|Q_1^3| = 2 \Rightarrow |Q_2^3| = |Q_1^4| = 3 \Rightarrow \dots \Rightarrow |Q_2^{r-1}| = |Q_1^r| = r - 1 \Rightarrow |Q_2^r| = r.$$

4. Agora suponha $r > \min\{p, q\}$. Considere a seguinte notação $d := \min\{p, q\}$. Como $|Q_2^d| = |Q_1^{d+1}| = d$, temos pelo item (2) que

$$|Q_2^{d+1}| = |Q_1^{d+2}| \geq d-1 \Rightarrow |Q_2^{d+2}| = |Q_1^{d+3}| \geq d-2 \Rightarrow \dots \Rightarrow |Q_2^{2d-1}| = |Q_1^{2d}| \geq 1.$$

Isto conclui a demonstração. □

Consideremos as funções $v_j : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $v_j(u) = \arctg(\alpha_j \cotg(u))$, onde $j = 1, \dots, r - 1$. Se J_j é o gráfico de v_j , então $g^{-1}(0) = \bigcup J_j$. Denotaremos por D_{j+1} o domínio delimitado por J_j e J_{j+1} , para $j = 1, \dots, r - 2$. Chamaremos de D_1 o domínio delimitado por J_1 e pelas retas $u = v = 0$ enquanto D_r será o domínio delimitado por J_{r-1} e pelas retas $u = v = \frac{\pi}{2}$.

Agora seja $q_1 : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $q_1(u) = \frac{g(u, u)}{(\cos^2(u))^{r-1}}$, isto é, $q_1(u) = Q_1(\tan^2(u))$. Seja $u_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $g(u_0, u_0) = 0$, então $q_1(u_0) = 0$.

Derivando q_1 obtemos $q'_1(u) = 2\tan(u)\sec^2(u)Q'_1(\tan^2(u))$. Logo $q'_1(u_0) \neq 0$, pois $R_{Q_1}^+ \cap R_{Q'_1}^+ = \emptyset$. Isto diz que a função $g(u, u)$ muda de sinal em u_0 . Veja também que $g(0, 0) = (-1)^{r-1} \binom{p}{r-1}$ e $g(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \binom{p}{r-1} > 0$. Portanto, $\text{ sinal}(g|D_j) = (-1)^{r-j}$.

Denotando por D_j^+ o conjunto dos pontos de D_j tais que $v > u$, e por D_j^- o conjunto dos pontos de D_j tais que $v < u$, obtemos o seguinte lema.

Lema 2. *A primeira coordenada X_1 do campo X satisfaz:*

1. X_1 se anula ao longo do gráfico das funções $u = 0$, $u = \frac{\pi}{2}$, $v = u$ e v_j ;
2. $X_1(u, 0) = (-1)^{r-1} \binom{q}{r-1} \text{sen}^2(u) \text{cos}^r(u)$;
3. $X_1(u, \frac{\pi}{2}) = -\binom{p}{r} \text{sen}^r(u) \text{cos}^2(u)$;
4. $\text{ sinal}(X_1|D_j^+) = -(-1)^{r-j}$ e $\text{ sinal}(X_1|D_j^-) = (-1)^{r-j}$.

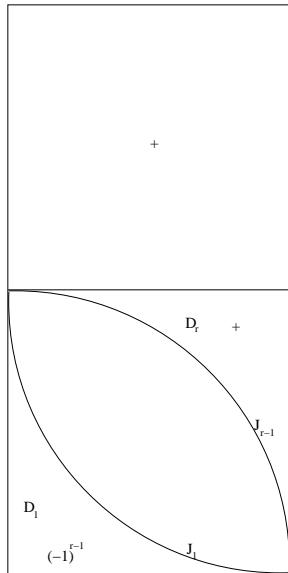


Figura 2.1: Sinal-g

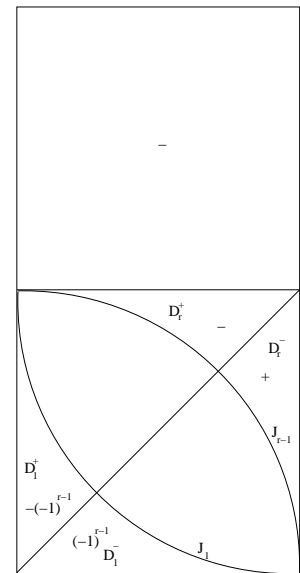


Figura 2.2: Sinal-X1

Seja $q_2 : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $q_2(u) = \frac{X_2(u, u)}{(\text{cos}^2(u))^r}$, isto é, $q_2(u) = Q_2(\tan^2(u))$. Seja $u_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $X_2(u_0, u_0) = 0$, então $q_2(u_0) = 0$. Derivando q_2 temos $q'_2(u) = 2\tan(u)\sec^2(u)Q'_2(\tan^2(u))$. Então $q'_2(u_0) \neq 0$, pois $R_{Q_2}^+ \cap R_{Q'_2}^+ = \emptyset$. Isto diz que a função $X_2(u, u)$ muda de sinal em u_0 .

Considere as funções $w_j : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $w_j(u) = \text{arctg}(\beta_j \cotg(u))$, onde $j = 1, \dots, r$. Seja I_j o gráfico de w_j , então $X_2^{-1}(0) = \bigcup I_j$. Denotaremos por R_j o domínio delimitado por I_j e I_{j+1} , para $j = 1, \dots, r-1$. Chamaremos de R_0 o domínio delimitado por I_1 e pelas retas $u = v = 0$ e de R_r o domínio delimitado por I_r e pelas retas $u = v = \frac{\pi}{2}$. A coordenada X_2 satisfaz $X_2(0,0) = (-1)^r \binom{p}{r}$ e $X_2(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \binom{p}{r} > 0$. Portanto, $\text{senal}(X_2|_{R_j}) = (-1)^{r-j}$. Destas observações obtemos o próximo lema.

Lema 3. *A segunda coordenada X_2 do campo X satisfaz:*

1. X_2 se anula ao longo do gráfico das funções w_j ;
2. $X_2(u, 0) = (-1)^r \binom{q}{r} \cos^r(u)$, $X_2(u, \frac{\pi}{2}) = \binom{p}{r} \text{sen}^r(u)$;
3. $X_2(0, v) = (-1)^r \binom{q}{r} \cos^r(v)$, $X_2(\frac{\pi}{2}, v) = \binom{p}{r} \text{sen}^r(v)$;
4. $\text{senal}(X_2|_{R_j}) = (-1)^{r-j}$, $0 \leq j \leq r$.

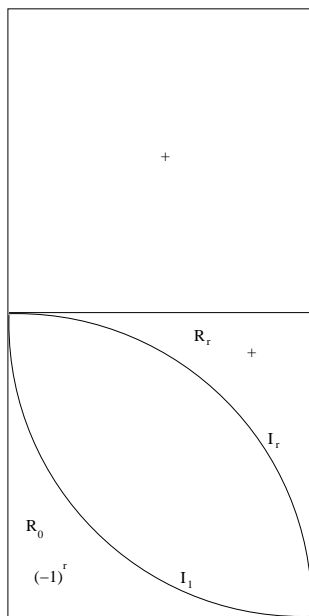


Figura 2.3: Sinal da coordenada X_2

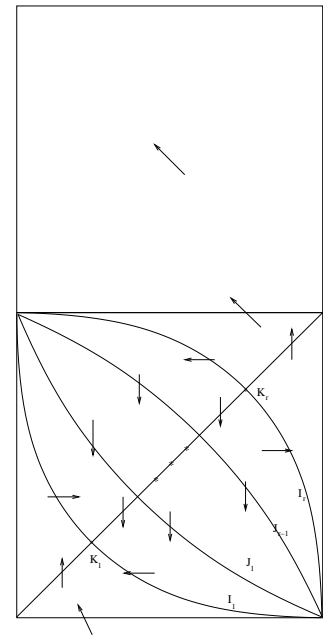


Figura 2.4: Transversalidade de X (r par)

Observação 2. Denotaremos por $K_j = (\arctan(\sqrt{\beta_j}), \arctan(\sqrt{\beta_j}))$, $j \in \{1, \dots, r\}$, os pontos de K . É claro que $K_j \in D_j$ é a única singularidade de X no domínio D_j .

Para classificarmos as singularidades do campo X precisamos calcular sua matriz Jacobiana $DX(u, v) = (A_{ij})$. No que segue usaremos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} L_i(u, v) &= (\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v))^{r-1-i}(\operatorname{cos}(u)\operatorname{cos}(v))^i \\ M_i(u, v) &= (\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v))^{r-i}(\operatorname{cos}(u)\operatorname{cos}(v))^{i-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{11}(u, v) &= \frac{\partial X_1}{\partial u}(u, v) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen}(2u)\operatorname{sen}(u-v) \right] g(u, v) + \operatorname{sen}(u)\operatorname{cos}(u)\operatorname{sen}(u-v) \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \\ &= [\operatorname{cos}(2u)\operatorname{sen}(u-v) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2u)\operatorname{cos}(u-v)] g(u, v) \\ &\quad + \operatorname{sen}(u)\operatorname{cos}(u)\operatorname{sen}(u-v) \frac{\partial g}{\partial u}(u, v); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{22}(u, v) &= \frac{\partial X_2}{\partial v}(u, v) \\ &= \sum_{i=0}^r (-1)^i c_i d_i (r-i) \operatorname{sen}(u)\operatorname{cos}(v) L_i(u, v) \\ &\quad - \sum_{i=0}^r (-1)^i c_i d_i \cdot i \cdot \operatorname{cos}(u)\operatorname{sen}(v) M_i(u, v); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{12}(u, v) &= \frac{\partial X_1}{\partial v}(u, v) \\ &= \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen}(2u)\operatorname{sen}(u-v) \right] g(u, v) + \operatorname{sen}(u)\operatorname{cos}(u)\operatorname{sen}(u-v) \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{sen}(2u)\operatorname{cos}(u-v) g(u, v) + \operatorname{sen}(u)\operatorname{cos}(u)\operatorname{sen}(u-v) \frac{\partial g}{\partial v}(u, v); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{21}(u, v) &= \frac{\partial X_2}{\partial u}(u, v) \\ &= \sum_{i=0}^r (-1)^i c_i d_i (r-i) \operatorname{cos}(u)\operatorname{sen}(v) L_i(u, v) \\ &\quad - \sum_{i=0}^r (-1)^i c_i d_i \cdot i \cdot \operatorname{sen}(u)\operatorname{cos}(v) M_i(u, v). \end{aligned}$$

Pelas expressões obtidas acima temos que as singularidades P_1 , P_2 e P_3 são degeneradas. Agora precisamos classificar as singularidades pertencentes ao conjunto K . Então é suficiente conhecer $DX(u, u)$.

Usando as expressões encontradas para $A_{11}(u, v)$ e $A_{22}(u, v)$ concluímos que,

$$A(u, u)_{11} = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2u) \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i L_i(u, u),$$

$$A(u, u)_{22} = \operatorname{sen}(u) \cos(u) \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_i d_i (r-i) L_i(u, u) - \operatorname{sen}(u) \cos(u) \sum_{i=1}^r (-1)^i c_i d_i \cdot i \cdot M_i(u, u).$$

Observe que $A(u, u)_{12} = -A(u, u)_{11}$ e $A(u, u)_{21} = A(u, u)_{22}$. Usando a igualdade $M_{j+1}(u, v) = L_j(u, v)$ obtemos

$$A_{22}(u, u) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2u) \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \left[c_i d_i (r-i) + c_{1+i} d_{1+i} (i+1) \right] L_i(u, u).$$

Um cálculo direto nos fornece

$$\frac{\binom{p}{r-i} (r-i)}{\binom{p}{r-1-i}} = p - r + 1 + i \quad \text{e} \quad \frac{\binom{q}{i+1} (i+1)}{\binom{q}{i}} = q - i.$$

Com isto concluímos que $A(u, u)_{22} = (p+q-r+1)A(u, u)_{11}$. Usando as identidades $\operatorname{sen}(u - \pi) = -\operatorname{sen}(u)$ e $\cos(u - \pi) = -\cos(u)$ conclui-se que $DX(u, u - \pi) = (-1)^r DX(u, u)$. Assim, obtemos a seguinte igualdade

$$DX(u, u) = A_{11}(u, u)A(p, q, r) = A_{11}(u, u) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ p+q-r+1 & p+q-r+1 \end{bmatrix}.$$

Considere a seguinte notação: $\sigma_0 = 0$, $\sigma_r = \frac{\pi}{2}$ e $\sigma_j = \arctan(\sqrt{\alpha_j})$, para todo $1 \leq j \leq r-1$. Usando a igualdade $A_{11}(u) := A_{11}(u, u) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2u)g(u, u)$ concluímos que $\operatorname{senal}(A_{11} | (\sigma_j, \sigma_{j+1})) = (-1)^{r-1-j}$, para todo $0 \leq j \leq r-1$.

Como consequência obtemos a seguinte proposição.

Proposição 1. *As singularidades $P_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, $P_2 = (\frac{\pi}{2}, 0)$ e $P_3 = (\frac{\pi}{2}, \pi)$ do campo X são degeneradas. Se $p+q \leq r+4$, os pontos K_j com $(r-1-j)$ -ímpar são focos atratores e os pontos K_j onde $(r-1-j)$ é par são focos repulsores. Se $p+q \geq r+5$, os pontos K_j onde $(r-1-j)$ é ímpar são nós atratores e os pontos K_j com $(r-1-j)$ -par são nós repulsores.*

Demonstração. A primeira parte é óbvia. Para a segunda parte considere o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} [\operatorname{tr}A(p, q, r)]^2 - 4\det.A(p, q, r) &= [p + q - (r - 1) + 1]^2 - 8[p + q - (r - 1)] \\ &= [p + q - (r - 1)]^2 - 6[p + q - (r - 1)] + 1 \\ &= [p + q - (r - 1) - 3 + 2\sqrt{2}][p + q - (r - 1) - 3 - 2\sqrt{2}] \\ &= [p + q - r - 2 + 2\sqrt{2}][p + q - r - 2 - 2\sqrt{2}]. \end{aligned}$$

Estamos usando que os zeros do polinômio $t^2 - 6t + 1$ são $3 + 2\sqrt{2}$ e $3 - 2\sqrt{2}$. Lembremos que os autovalores da matriz $A(p, q, r)$ são dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}A(p, q, r) \pm \frac{1}{2}\sqrt{[\operatorname{tr}A(p, q, r)]^2 - 4\det.A(p, q, r)}.$$

Como $r \leq \min\{p, q\}$, temos que $r + 2 - 2\sqrt{2} < r + 2 - 2 = r < 2r \leq p + q$. Portanto,

$$p + q - r - 2 + 2\sqrt{2} > 0.$$

Supondo $p + q \leq r + 4$ e usando que $4 < 2 + 2\sqrt{2}$ obtemos $p + q < r + 2 + 2\sqrt{2}$. Assim, $p + q - r - 2 - 2\sqrt{2} < 0$. Então os autovalores de $A(p, q, r)$ são complexos com parte real positiva.

Agora supondo $p + q \geq r + 5$ e usando $5 > 2 + 2\sqrt{2}$ temos que $p + q > r + 2 + 2\sqrt{2}$. Logo, $p + q - r - 2 - 2\sqrt{2} > 0$. Então os autovalores de $A(p, q, r)$ são números reais positivos. Analisando o sinal da função f obtemos as conclusões sobre os pontos do conjunto K . \square

Para classificarmos as órbitas do campo X será importante saber onde X não pode ter órbitas periódicas. Para isto, usaremos o critério de Bendixson. Então é necessário conhecermos o divergente de X , o qual calcularemos agora. Novamente usaremos a notação

$$L_i(u, v) = (\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v))^{r-1-i}(\operatorname{cos}(u)\operatorname{cos}(v))^i.$$

Por cálculos anteriores temos que,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} X &= A_{11}(u, v) + A_{22}(u, v) \\
 &= [\cos(2u)\operatorname{sen}(u - v) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2u)\cos(u - v)]g(u, v) \\
 &+ \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2u)\operatorname{sen}(u - v) \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i (r - 1 - i) \frac{\cos(u)\operatorname{sen}(v)}{\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v)} L_i(u, v) \\
 &- \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2u)\operatorname{sen}(u - v) \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i \cdot i \cdot \frac{\operatorname{sen}(u)\cos(v)}{\cos(u)\cos(v)} L_i(u, v) \\
 &+ \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_i d_i (r - i) \operatorname{sen}(u)\cos(v) L_i(u, v) \\
 &- \sum_{i=1}^r (-1)^i c_i d_i \cdot i \cdot \cos(u)\operatorname{sen}(v) (\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v))^{r-i} (\cos(u)\cos(v))^{i-1}
 \end{aligned}$$

Fazendo $i = j + 1$, onde $0 \leq j \leq r - 1$, no último somatório temos a igualdade abaixo

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} X &= [\operatorname{sen}(u)\cos(v)(2 - 3\operatorname{sen}^2(u)) + \cos(u)\operatorname{sen}(v)(2 - 3\cos^2(u))]g(u, v) \\
 &+ \cos^2(u)[\operatorname{sen}(u)\cos(v) - \cos(u)\operatorname{sen}(v)] \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i (r - 1 - i) L_i(u, v) \\
 &- \operatorname{sen}^2(u)[\operatorname{sen}(u)\cos(v) - \cos(u)\operatorname{sen}(v)] \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i \cdot i \cdot L_i(u, v) \\
 &+ \operatorname{sen}(u)\cos(v) \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_i d_i (r - i) L_i(u, v) \\
 &- \cos(u)\operatorname{sen}(v) \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^{j+1} c_{1+j} d_{1+j} (j + 1) L_j(u, v)
 \end{aligned}$$

Trocando j por i no último somatório obtemos,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} X &= [\operatorname{sen}(u)\cos(v)(2 - 3\operatorname{sen}^2(u)) + \cos(u)\operatorname{sen}(v)(2 - 3\cos^2(u))]g(u, v) \\
 &+ (1 - \operatorname{sen}^2(u))\operatorname{sen}(u)\cos(v) \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i (r - 1 - i) L_i(u, v) \\
 &- \cos^2(u) [\cos(u)\operatorname{sen}(v)] \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i (r - 1 - i) L_i(u, v) \\
 &- \operatorname{sen}^2(u) [\operatorname{sen}(u)\cos(v)] \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i \cdot i \cdot L_i(u, v) \\
 &+ (1 - \cos^2(u))\cos(u)\operatorname{sen}(v) \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i \cdot i \cdot L_i(u, v) \\
 &+ \operatorname{sen}(u)\cos(v) \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_i d_i (r - i) L_i(u, v) \\
 &+ \cos(u)\operatorname{sen}(v) \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_{1+i} (i + 1) L_i(u, v)
 \end{aligned}$$

Efetuando algumas somas e reorganizando os termos temos que,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} X &= [\operatorname{sen}(u)\cos(v)(2 - 3\operatorname{sen}^2(u)) + \cos(u)\operatorname{sen}(v)(2 - 3\cos^2(u))]g(u, v) \\
 &+ \operatorname{sen}(u)\cos(v) \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_i d_i (r - i) L_i(u, v) \\
 &+ \operatorname{sen}(u)\cos(v) \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i (r - 1 - i) L_i(u, v) \\
 &- \operatorname{sen}^2(u) [\operatorname{sen}(u)\cos(v)] \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i (r - 1) L_i(u, v)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \cos(u)\operatorname{sen}(v) \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_{1+i} (i+1) L_i(u, v) \\
 & + \cos(u)\operatorname{sen}(v) \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i \cdot i \cdot L_i(u, v) \\
 & - \cos^2(u) [\cos(u)\operatorname{sen}(v)] \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i (r-1) L_i(u, v)
 \end{aligned}$$

Veja que, $c_i d_i (r-i) + c_{1+i} d_i (r-1-i) = p \cdot c_{1+i} d_i$ e $c_{1+i} d_{1+i} (i+1) + c_{1+i} d_i \cdot i = q \cdot c_{1+i} d_i$. Portanto,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} X & = [\operatorname{sen}(u)\cos(v)(2 - 3\operatorname{sen}^2(u)) + \cos(u)\operatorname{sen}(v)(2 - 3\cos^2(u))]g(u, v) \\
 & + p\operatorname{sen}(u)\cos(v)g(u, v) - (r-1)\operatorname{sen}^2(u)[\operatorname{sen}(u)\cos(v)]g(u, v) \\
 & + q\cos(u)\operatorname{sen}(v)g(u, v) - (r-1)\cos^2(u)[\cos(u)\operatorname{sen}(v)]g(u, v).
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} X & = \operatorname{sen}(u)\cos(v)[p+2 - (r+2)\operatorname{sen}^2(u)]g(u, v) \\
 & + \cos(u)\operatorname{sen}(v)[q+2 - (r+2)\cos^2(u)]g(u, v).
 \end{aligned}$$

Proposição 2. *O campo X não tem órbita periódica em $D := \bigcup_{j=0}^r D_j$.*

Demonstração. Como $\operatorname{sen}^2(u) = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2}$ e $\cos^2(u) = 1 \Leftrightarrow u = 0$, temos que $p+2 - (r+2)\operatorname{sen}^2(u) > p+2 - r - 2 \geq 0$ e $q+2 - (r+2)\cos^2(u) > p+2 - r - 2 \geq 0$. Veja também que $\operatorname{sen}(u)\cos(v) > 0$ e $\cos(u)\operatorname{sen}(v) > 0$ em $(0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})$. Como $g(u, v) \neq 0$, $\forall (u, v) \in D$, temos que $\operatorname{div} X(u, v) \neq 0$ em D . Então, o resultado segue pelo critério de Bendixson. \square

No que segue, denotaremos por $D_j^{-\pi}$, $1 \leq j \leq r$, a translação do domínio D_j por $(0, -\pi)$. E por $K_j^{-\pi}$ a mesma translação dos pontos do conjunto K .

Proposição 3. *As órbitas do campo $X = (X_1, X_2)$ estão definidas em toda a reta real. Na região $R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} \text{ e } -\pi \leq v \leq \pi\}$ elas se comportam de uma das seguintes formas.*

1. $\phi(t)$ é uma órbita vertical com α -limite $(\frac{\pi}{2}, 0)$ e ω -limite $(\frac{\pi}{2}, \pi)$; ou, se r é par, uma órbita vertical com α -limite $(0, -\frac{\pi}{2})$ e ω -limite $(0, \frac{\pi}{2})$, ou uma órbita vertical com α -limite $(\frac{\pi}{2}, -\pi)$ e ω -limite $(\frac{\pi}{2}, 0)$; ou, se r é ímpar, uma órbita vertical com α -limite $(0, \frac{\pi}{2})$ e ω -limite $(0, -\frac{\pi}{2})$, ou uma órbita vertical com α -limite $(\frac{\pi}{2}, 0)$ e ω -limite $(\frac{\pi}{2}, -\pi)$;

2. $\phi(t)$ é uma semi-órbita vertical com α -limite $(0, \frac{\pi}{2})$; ou, se r é par, uma semi-órbita vertical com ω -limite $(0, -\frac{\pi}{2})$; ou, se r é ímpar, uma semi-órbita vertical com α -limite $(0, -\frac{\pi}{2})$;
3. $\phi(t)$ é uma órbita contida em $(0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})$, passando por um ponto de J_j para algum $1 \leq j \leq r-1$, tal que o α -limite é K_j enquanto o ω -limite é K_{j+1} (ou ao contrário);
4. se r é par, $\phi(t)$ é uma órbita contida em $D_1 \cup \{[0, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, 0]\} \cup D_r^{-\pi}$ com ω -limite K_1 e α -limite $K_r^{-\pi}$; ou, se r é ímpar, $\phi(t)$ é uma órbita contida em $D_1 \cup \{[0, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, 0]\} \cup D_r^{-\pi}$ com α -limite K_1 e ω -limite $K_r^{-\pi}$;
5. se j é par, $\phi(t)$ é uma ligação de sela contida em D_j com α -limite $(0, \frac{\pi}{2})$ e ω -limite K_j ; ou, se j é ímpar, $\phi(t)$ é uma ligação de sela contida em D_j com ω -limite $(0, \frac{\pi}{2})$ e α -limite K_j ;
6. se j é par, $\phi(t)$ é uma ligação de sela contida em D_j com α -limite $(\frac{\pi}{2}, 0)$ e ω -limite K_j ; ou, se j é ímpar, $\phi(t)$ é uma ligação de sela contida em D_j com ω -limite $(\frac{\pi}{2}, 0)$ e α -limite K_j ;
7. $\phi(t)$ é uma órbita singular K_j , onde $1 \leq j \leq r$;
8. $\phi(t)$ é uma órbita, ou parte de uma, obtida por uma translação, acompanhada de uma mudança de orientação se r é ímpar, de uma das órbitas dos itens (1)-(7).

Demonstração. Como X é limitado suas órbitas estão definidas em toda a reta real. Suponha que $\phi(t) = (u_0, v(t))$, onde u_0 é uma constante, é uma órbita de X . Daí, $X(\phi(t)) = (0, v'(t))$. Logo, $u_0 = 0, \frac{\pi}{2}$. Pelos lemas 2 e 3 obtemos os itens (1) e (2).

Sejam $P \in J_j$ ($j = 0, \dots, r$) e $\phi(t) = \varphi(t, P)$, onde $\varphi(t, P)$ é o fluxo do campo X . A transversalidade de X impõe que $\phi(t) \in D_j$, para $\forall t < 0$, e $\phi(t) \in D_{j+1}$, se $\forall t > 0$ (ou ao contrário). Como $K_i \in D_i$ é a única singularidade de X neste domínio, temos pelo Teorema de Poincaré-Bendixson que o α -limite é K_j e o ω -limite é K_{j+1} . Este tipo de argumento mostra que as órbitas que passam por pontos do segmento $\{(u, \frac{\pi}{2}); 0 < u < \frac{\pi}{2}\}$ possuem K_r como α -limite. Um argumento análogo vale para as órbitas que passam por pontos do segmento $\{(u, 0); 0 < u < \frac{\pi}{2}\}$. Juntando isto ao fato que $X(u, v - \pi) = (-1)^r X(u, v)$ obtemos o item (4).

Seja $c : [0, 1] \rightarrow D_{j+1}$ uma curva suave, fechada, simples tal que o ponto K_{j+1} pertence ao interior da região delimitada pelo traço de c e o fluxo do campo X é transversal ao longo c . Podemos supor que a órbita $\varphi(t, c(0))$ passa por J_j e que c

está orientada no sentido anti-horário. Pelo Teorema do Fluxo Tubular, existe $a > 0$ tal que $\varphi(t, c(s))$ passa por $J_j \forall s \in [0, a)$. Seja

$$\delta := \sup\{a; \varphi(t, c(s)) \text{ passe por } J_j, \forall s \in [0, a)\}.$$

Usando novamente o Teorema do Fluxo Tubular concluímos que $\delta < 2\pi$. Afirmamos que $\varphi(t, c(\delta))$ é uma ligação de sela entre K_{j+1} e $(\frac{\pi}{2}, 0)$. De fato, do contrário $\varphi(t, c(\delta))$ teria que passar por J_j (ou J_{j+1}) e concluiríamos que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $\varphi(t, c(s))$ passa por J_j (ou J_{j+1}) para todo $s \in (\delta - \epsilon_0, \delta + \epsilon_0)$, o que contradiz a definição de δ . Considerando $\bar{\delta} := \inf\{a < 0; \varphi(t, c(s)) \text{ passe por } J_j, \forall s \in (a, 0]\}$ e usando um argumento análogo concluímos que existem ligações de sela entre K_{j+1} e $(0, \frac{\pi}{2})$.

Trabalhamos com a hipótese de $\phi(t) \in D_{j+1}$, para $\forall t > 0$. Se $\phi(t) \in D_j$, para $\forall t > 0$, procede-se de modo análogo. Isto prova os itens (5) e (6).

Por fim, usando novamente que $X(u, v - \pi) = (-1)^r X(u, v)$ e os Lemas 2 e 3 obtemos o item (8) e concluímos a demonstração. \square

Nota 1. Na demonstração da Proposição 3, J_0 denota o segmento $\{(u, 0); 0 < u < \frac{\pi}{2}\}$ e J_r representa o segmento $\{(u, \frac{\pi}{2}); 0 < u < \frac{\pi}{2}\}$.

O diagrama abaixo apresenta as órbitas do campo para o caso $p + q \geq r + 5$, quando $r = 3$. No caso $p + q \leq r + 4$, a diferença é que as órbitas do campo X assintotaram as singularidades de forma espiral.

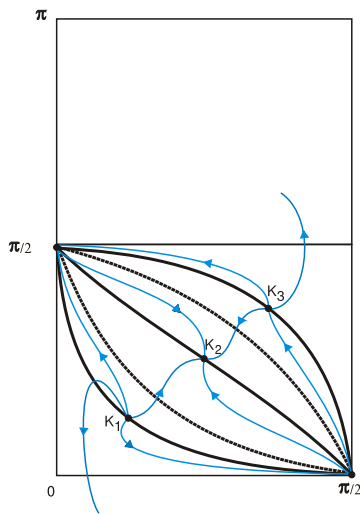


Figura 2.5: Órbitas- X para $p + q \geq r + 5$ ($r = 3$).

Capítulo 3

Classificação das Hipersuperfícies Completas

No teorema a seguir caracterizaremos as curvas geratrizes que estão associadas a órbitas verticais. Chamaremos tais curvas geratrizes de curvas Tipo A.

Teorema 8. *A menos de homotetia, a equação abaixo (eq. das r -mínimas) possui exatamente r soluções $\gamma_j(t) = (x(t), y(t))$, $j \in \{1, \dots, r\}$, com $u' = \frac{d}{dt} \arctg\left(\frac{y}{x}\right) = 0$.*

$$\sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_{1+i} d_i (x' y'' - x'' y') \left(\frac{y'}{x}\right)^{r-1-i} \left(\frac{x'}{y}\right)^i + \sum_{i=0}^r (-1)^i c_i d_i \left(\frac{y'}{x}\right)^{r-i} \left(\frac{x'}{y}\right)^i = 0.$$

Além disso, essas soluções são dadas por $\gamma_j(t) = (\cos(\rho_j)t, \sin(\rho_j)t)$, onde $t \geq 0$ e $\rho_j = \arctan \sqrt{\beta_j}$, $j = 1, \dots, r$.

Demonstração. Observe que, $u' = \frac{d}{dt} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \Rightarrow \exists \rho \in \mathbb{R}$ tal que $y = \tan(\rho)x$. Por uma substituição direta na equação obtemos que,

$$\left(\tan(\rho) \frac{x'}{x}\right)^r \sum_{i=0}^r (-1)^r c_i d_i \left(\frac{1}{\tan(\rho)}\right)^{2i} = \sum_{i=0}^r (-1)^r c_i d_i \left(\frac{\tan(\rho)x'}{x}\right)^{r-i} \left(\frac{x'}{\tan(\rho)x}\right)^i = 0.$$

Portanto, $[\tan^2(\rho)]^{-r} \sum_{i=0}^r (-1)^r c_i d_i [\tan^2(\rho)]^{r-i} = \sum_{i=0}^r (-1)^r c_i d_i [\tan^2(\rho)]^{-i} = 0$. Como consequência temos que $\tan^2(\rho) \in R_{Q_2}^+$. Isto conclui a prova do teorema. \square

A proposição a seguir nos fornece uma condição necessária e suficiente para que uma hipersuperfície invariante seja mergulhada.

Proposição 4. *Uma hipersuperfície $M^{p+q+1} \subset \mathbb{R}^{p+q+2}$ invariante pela ação do grupo $O(p+1) \times O(q+1)$ é mergulhada se, e somente se, sua curva geratriz $\gamma(t)$ é mergulhada. Em particular, se $\gamma(t)$ é gráfico de uma função, então M é mergulhada.*

Demonstração. Como M é invariante, então M só pode se auto-intersectar ao longo de uma ou mais de suas órbitas. \square

Observação 3. *Convém ressaltar que as órbitas do campo X estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, se $\gamma(t)$ é uma curva geratriz regular e está associada a uma órbita não singular, então γ tem comprimento infinito. Logo, a hipersuperfície gerada por γ é completa.*

Lema 4. *Seja $\phi(t)$ uma órbita do campo X dada no item (4) da Proposição 3. Considere $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma curva geratriz associada. Então $\phi(t)$ intersecta o segmento $L_j = \{(\sigma_j, v); \sigma_j - \pi < v < \sigma_j \text{ e } \sigma_j = \arctg(\sqrt{\alpha_j}), j = 1, \dots, r - 1\}$ uma única vez.*

Demonstração. Suponha inicialmente que r é par. Então $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = \rho_r$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \rho_1$, onde $\rho_j = \arctg(\sqrt{\beta_j})$, $\beta_j \in R_{Q_2}^+$ e $1 \leq j \leq r$. Como $\rho_1 < \sigma_j < \rho_r$, existe t_0 tal que $u(t_0) = \sigma_j$. Observe que $\phi(t_0) \in D_1 \cup \{[0, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, 0]\} \cup D_r^{-\pi}$. Seja $t_2 > t_0$ o primeiro valor do parâmetro t tal que $\phi(t_2)$ seja um ponto do segmento $v = u$. As ligações de sela de $(0, \frac{\pi}{2})$ e $(\frac{\pi}{2}, 0)$ a K_1 mostram que $u(t_2) \leq \rho_1 < \sigma_j$ e que $\phi(t)$, $t > t_2$, não pode intersectar a reta $u = \arctg(\sqrt{\alpha_j})$.

Seja $t_1 < t_0$ o primeiro valor do parâmetro t tal que $\phi(t_1)$ seja um ponto do segmento $v = u - \pi$. As ligações de sela $(0, -\frac{\pi}{2})$ e $(\frac{\pi}{2}, -\pi)$ a $K_r^{-\pi}$ mostram que $u(t_1) \geq \rho_r > \sigma_j$ e que $\phi(t)$, $t < t_1$, não pode intersectar a reta $u = \arctg(\sqrt{\alpha_j})$.

Agora, o Lema 2 nos diz que $u(t)$ é injetiva em $[t_1, t_2]$. Portanto, existe um único t_0 tal que $u(t_0) = \sigma_j$.

Por fim, o caso r ímpar prova-se de modo análogo e concluímos a prova do lema. \square

Lema 5. *A curva geratriz γ dada no lema anterior não possui auto-intersecção.*

Demonstração. A demonstração desta Proposição é idêntica à prova da Proposição 4.1 de [25]. Por esta razão omitiremos sua prova. \square

O lema abaixo, cuja demonstração é bem simples, será útil para provarmos o teorema de classificação.

Lema 6. *As seguintes relações entre as coordenadas (x, y) da curva geratriz e as coordenadas (u, v) da órbita do campo X , são verdadeiras:*

1. $u = 0 \Leftrightarrow y = 0$;
2. $v = 0, \pm\pi \Leftrightarrow y' = 0$;
3. $u = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 0$;
4. $v = \pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x' = 0$;
5. $v = u \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$;
6. $v = \frac{\pi}{2} - u \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{y'}{x'}$.

Observação 4. Para $0 < v < \frac{\pi}{2}$ temos que $x' \neq 0$ e $y' \neq 0$, então podemos ver a curva geratriz $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ como gráfico (ou uma união de gráficos quando γ apresentar singularidade) de uma função $y = y(x)$ ou $x = x(y)$. Lembremos que as singularidades das curvas geratrizes ocorrem nas coordenadas (x, y) que zeram as equações (2.1) e (2.2).

As coordenadas (x, y) , de uma curva geratriz, associadas a coordenadas (u, v) tais que $v = \arctan(\alpha_j \cotan(u))$, onde $j \in \{1, \dots, r-1\}$, satisfazem:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y'}{x'} = \tan(v) = \cotan(u)\alpha_j = \frac{x}{y}\alpha_j \Rightarrow y \frac{dy}{dx} = x\alpha_j \text{ ou} \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{x'}{y'} = \cotan(v) = \tan(u)\frac{1}{\alpha_j} = \frac{y}{x}\frac{1}{\alpha_j} \Rightarrow x \frac{dx}{dy} = y\frac{1}{\alpha_j}. \end{aligned}$$

Como α_j é raiz de Q_1 , temos que as singularidades das curvas geratrizes $\gamma = (x, y)$ estão em correspondência com as coordenadas (u, v) que satisfazem a relação $v = \arctan(\alpha_j \cotan(u))$.

Agora provaremos o teorema de classificação. Na prova do teorema de classificação denotaremos por C_j , $j \in \{1, \dots, r\}$, o cone gerado pela semi-reta

$$l_j = \gamma(t) = (\cos(\rho_j)t, \sin(\rho_j)t), t \geq 0.$$

Teorema 9 (Teorema de Classificação). *Seja $M^{p+q+1} \subset \mathbb{R}^{p+q+2}$ uma hipersuperfície $O(p+1) \times O(q+1)$ -invariante com $S_r = 0$, onde $p, q > 1$ e $2 \leq r \leq \min\{p, q\}$. Então M^{p+q+1} pertence a uma das seguintes classes:*

1. Cones C_j com uma singularidade na origem (Tipo A);

2. *Hipersuperfícies que possuem uma órbita de singularidade e assintotam dois cones C_j e C_{j+1} (Tipo C);*
3. *Hipersuperfícies regulares que assintotam um dos cones C_j (Tipo B);*
4. *Hipersuperfícies regulares que assintotam os cones C_1 e C_r (Tipo D).*

Demonstração. A Proposição 3 é a ferramenta principal para a demonstração.

1. Estas são as hipersuperfícies geradas pelas curvas dadas no Teorema 8;
2. Seja $\phi(t) = (u(t), v(t))$ uma órbita de X que intersecta J_j , no ponto P , e tem α -limite K_j e ω -limite K_{j+1} (ou ao contrário). O ponto P corresponde à singularidade da curva geratriz (ver Observação 4). Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ a curva geratriz associada. Como $x^2 = \cos^2(u)(x^2 + y^2)$ e $y^2 = \sin^2(u)(x^2 + y^2)$, temos que γ não intersecta o bordo do espaço de órbitas. Além disso, γ assintota as semi-retas l_j e l_{j+1} . Portanto, a hipersuperfície gerada por γ assintota os cones C_j e C_{j+1} ;
3. Seja $\phi(t)$ uma órbita classificada nos itens (5) e (6) da Proposição 3. Pelo Lema 6, $(u, v) \rightarrow (0, \frac{\pi}{2})$ implica $y \rightarrow 0$; $x' \rightarrow 0$, e $(u, v) \rightarrow (\frac{\pi}{2}, 0)$ implica $x \rightarrow 0$; $y' \rightarrow 0$. Seja $\gamma(t)$ uma curva geratriz associada a $\phi(t)$. Então, $\gamma(t)$ intersecta ortogonalmente ou o eixo x ou o eixo y . Além disso, $\gamma(t)$ assintota a curva l_j geratriz do cone C_j . Isso mostra que $M = \pi^{-1}(\gamma)$ assintota o cone C_j ;
4. Seja $\gamma(t)$ uma curva geratriz associada a uma órbita do campo X dada no item(4) da Proposição 3. Novamente usando as igualdades $x^2 = \cos^2(u)(x^2 + y^2)$ e $y^2 = \sin^2(u)(x^2 + y^2)$ temos que γ não intersecta o bordo do espaço de órbitas. Além disso, γ assintota as semi-retas l_1 e l_r . Isso mostra que a hipersuperfície gerada por γ assintota os cones C_1 e C_r .

□

Para finalizarmos este capítulo, obteremos no teorema a seguir a classificação das hipersuperfícies completas.

Teorema 10. *Seja $M^{p+q+1} \subset \mathbb{R}^{p+q+2}$ uma hipersuperfície completa $O(p+1) \times O(q+1)$ -invariante com $S_r = 0$, onde $p, q > 1$ e $2 \leq r \leq \min\{p, q\}$. Então M é gerada por uma curva Tipo B ou D. Além disso,*

1. Se M é gerada por uma curva tipo B , então M é mergulhada e assintota um dos cones C_j ;
2. Se M é gerada por uma curva tipo D , então M é mergulhada e assintota os cones C_1 e C_r .

Demonstração. Se γ é Tipo B , então γ está associada a uma órbita de X que é ligação de sela. Daí, $0 < v < \frac{\pi}{2}$. Portanto, podemos ver γ como gráfico de uma função $y = y(x)$ ou $x = x(y)$, isto implica que M é mergulhada. Se $\gamma \subset D_j$, então γ assintota o cone C_j ; Se γ é Tipo D , então está associada a uma órbita dada no item (4) da Proposição 3. Portanto, pela Proposição 4 e pelo Lema 5 temos que M é mergulhada. O Teorema de Classificação nos diz M assintota os cones C_1 e C_r . \square

Capítulo 4

Estabilidade das Hipersuperfícies Completas

Sejam M^n uma variedade Riemanniana conexa, orientável e $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ uma imersão isométrica. Denotaremos por \langle, \rangle a métrica Riemanniana de M e por A a segunda forma fundamental da imersão x associada ao campo normal uniário N . A segunda forma fundamental possui uma base de autovetores cujos autovalores associados denotaremos por k_1, \dots, k_n .

As transformações de Newton T_r são os operadores definidos indutivamente da seguinte maneira

$$\begin{aligned} T_0 &= I \\ T_r &= S_r I - AT_{r-1}, \end{aligned}$$

onde S_r é a r -ésima curvatura média da imersão, definida anteriormente. Cada um desses operadores é auto-adjunto e possui os mesmos autovetores de A . Associado ao operador T_r temos o operador diferencial linear de segunda ordem L_r dado por (ver [22] e [23])

$$L_r(f) = \text{Div}[T_r \text{grad}(f)] = \text{traço}[T_r \text{Hess}(f)].$$

Seja $D \subset M$ um domínio, é conhecido que L_r é um operador linear auto-adjunto relativo ao produto interno de $L^2(D)$ agindo nas funções de $H_0^1(D)$, onde $H_0^1(D)$ é o complemento de $C_c^\infty(D)$ com relação à norma $\|\cdot\|_{H_0^1}$.

Seja $D \subset M$ um domínio com fecho compacto em M . Uma variação de D é uma aplicação $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \overline{D} \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $X_t : D \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$, dada por $X_t(p) := X(t, p)$, é uma imersão;
2. $X_0 = x$ e $X_t|_{\partial D} = x|_{\partial D}, \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Definimos o campo variacional e a componente normal da variação X , respectivamente, por

$$E(t, p) = \frac{\partial X}{\partial t}(t, p) \text{ e } f(t, p) = \langle E(t, p), N_t(p) \rangle,$$

onde N_t é o campo unitário normal a $X_t(D)$. O volume associado à variação X é a função

$$V(t) = \int_{[0,t] \times D} X^* d\overline{M}, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

onde $X^* d\overline{M}$ denota o pull-back do elemento de volume $d\overline{M}$ de \overline{M} , por meio de X . Dizemos que X preserva volume se $V(t) = V(0), \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

É fato conhecido (ver [3]) que as imersões com S_{r+1} constante são pontos críticos do problema variacional de minimizar a integral

$$A_r(t) = \int_{X_t(D)} F_r(S_1, \dots, S_r) dM_t$$

para variações que preservam volume e cuja componente normal possui suporte compacto (variação com suporte compacto). As funções F_r são definidas indutivamente por

$$\begin{aligned} F_0 &= 1 \\ F_1 &= S_1 \\ F_r &= S_r + \frac{c(n-r+1)}{r-1} F_{r-2}, \quad 2 \leq r \leq n-1. \end{aligned}$$

Um fato conhecido do estudo de estabilidade (ver [3] e [22]) é a fórmula da segunda variação da r -área A_r , dada de acordo com a seguinte proposição.

Proposição 5 (Fórmula da Segunda Variação). *Seja $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ uma imersão isométrica com $S_{r+1} = cte$. Para variações com suporte compacto e que preservam volume a segunda derivada de A_r em $t = 0$ é dada por*

$$A_r''(0) = -(r+1) \int_D f[L_r(f) + (S_1 S_{r+1} - (r+2) S_{r+2})f + c(n-r) S_r f],$$

onde f é a componente normal da variação.

Associado à segunda variação temos o operador diferencial linear auto-adjunto denominado Operador de Jacobi:

$$J_r = L_r + [S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2} + c(n-r)S_r],$$

o qual nos permite definir a forma bilinear simétrica I_r por

$$I_r(g, f) = - \int_D g J_r(f) dM.$$

Definição 1. *Sejam $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ uma imersão com S_{r+1} constante e $D \subset M$ um domínio com fecho compacto em M . Dizemos que D é r -estável se $I_r(f, f) \geq 0$ para toda função $f \in C_c^\infty(D)$. Quando a restrição $x|_D : D \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ é r -estável, para todo domínio $D \subset M$, dizemos que M é r -estável.*

Definição 2. *Definimos o índice $Ind_{J_r}(D)$ do operador de Jacobi J_r em D como sendo a dimensão máxima do subespaço de $C_c^\infty(D)$ onde a forma bilinear I_r é negativa definida. O índice $Ind_{J_r}(M)$ de J_r em M é definido por*

$$Ind_{J_r}(M) = \sup_{D \subset M} Ind_{J_r}(D).$$

Os resultados que apresentaremos abaixo são conhecidos na literatura, por isso omitiremos suas demonstrações.

Proposição 6. *Seja L_r , definido anteriormente, o operador associado a uma imersão isométrica $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$. Se uma das seguintes condições é verdadeira*

- (a) $S_{r+1} > 0$, $r > 1$, e existe um ponto $p \in M$ onde todas as curvaturas principais de x são positivas;
- (b) $S_{r+1} = 0$ e $posto(A) > r$, onde A é a segunda forma fundamental de x ,

então L_r é elíptico.

Demonstração. A demonstração dos itens (a) e (b) podem ser encontradas no Lema 2.2 de [10] e no Corolário 2.3 de [13], respectivamente. \square

Corolário 1. *O operador L_{r-1} associado às hipersuperfícies $M^{p+q+1} \subset \mathbb{R}^{p+q+2}$ r -mínimas ($S_r = 0$), onde $2 \leq r \leq \min\{p, q\}$, que são $O(p+1) \times O(q+1)$ -invariantes é um operador elíptico.*

Demonstração. Como as curvas geratrizes $\gamma(t)$ destas hipersuperfícies estão parametrizadas pelo comprimento de arco, as expressões das curvaturas principais mostram que o posto da segunda forma fundamental é maior ou igual a r . Portanto, usando a Proposição 6 obtemos o resultado. \square

Proposição 7. *Seja $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ uma imersão isométrica com $(r + 1)$ -curvatura média constante, onde M é uma variedade Riemanniana completa não compacta. A imersão é r -estável se, e somente se, existe uma função positiva suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a equação de Jacobi $J_r(f) = 0$.*

Demonstração. Ver [24], Proposições 4.1 e 4.2. \square

Lema 7. *Sejam $M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana conexa e orientável M^n em \mathbb{R}^{n+1} , e $h = \langle x, N \rangle$ a função suporte da imersão. Suponha que x possui S_{r+1} constante. Então h satisfaz a equação de Jacobi.*

Demonstração. Ver [23], Lema 4.3. \square

Teorema 11. *Seja $M^{p+q+1} \subset \mathbb{R}^{p+q+2}$ uma hipersuperfície r -mínima, completa e $O(p + 1) \times O(q + 1)$ -invariante, onde $p, q > 1$ e $2 \leq r \leq \min\{p, q\}$, gerada por uma curva Tipo B ou D .*

1. *Se $p + q \leq r + 4$, então M tem índice $Ind_{J_{r-1}}(M)$ infinito.*
2. *Se $p + q \geq r + 5$, então as hipersuperfícies geradas pelas curvas Tipo B são globalmente $(r - 1)$ -estáveis.*

Demonstração. Seja $h = \langle x, N \rangle$ a função suporte da imersão $x : M^{p+q+1} \rightarrow \mathbb{R}^{p+q+2}$. Usando o Lema 7 temos que h satisfaz a equação de Jacobi $T_{r-1}(h) = 0$ em todo domínio $D \subset M$ com fecho compacto e, pelo Corolário 1, temos que L_{r-1} é um operador elíptico. Lembremos que a parametrização e o vetor normal à imersão são dados por $\varphi(t, a, b) = (x(t)\Phi(a), y(t)\Psi(b))$ e $N(t, a, b) = (-y'(t)\Phi(a), x'(t)\Psi(b))$, respectivamente. Agora usando que $(x^2 + y^2)u' = xy' - x'y$, obtemos a seguinte expressão para a função suporte: $h(t, a, b) = -u'(t)[x^2(t) + y^2(t)]$. Isto mostra que h só depende da curva geratriz, então é suficiente analisar o caso $u' = 0$.

Quando $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ é uma curva Tipo B , temos que γ está associada a uma órbita $\phi(t) = (u(t), v(t))$ que tem um dos pontos K_j como α -limit ou ω -limit. Quando γ é do Tipo D , ela está associada a uma órbita que tem ω -limit K_1 e α -limit $K_r^{-\pi}$ (ou ao contrário, dependendo se r é par ou ímpar).

Se $p + q \leq r + 4$, a Proposição 1 diz que as singularidades K_j tem estrutura de foco. Então existe uma sequência monótona $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ com $u'(t_i) = X_1(\phi(t_i)) = 0$,

onde ϕ está associada à curva geratriz γ Tipo B ou D . Isto permite construir uma sequência de domínios

$$D_1 \subsetneq D_2 \subsetneq \cdots \subsetneq D_i \subsetneq \cdots \subset M$$

com $h|_{\partial D_i} = 0$, onde ∂D_i é a órbita de $\gamma(t_i)$ sob a ação de $O(p+1) \times O(q+1)$. Assim, segue do Teorema do Índice de Morse aplicado ao operador J_{r-1} (ver [27] e [30]) que as hipersuperfícies M geradas por γ possuem $Ind_{J_{r-1}}(M)$ infinito.

Quando $p+q \geq r+5$, as singularidades K_j ($j \in \{1, \dots, r\}$) possuem estrutura de nó (ver Proposição 1). Isto mostra que $u'(t) \neq 0$ para toda órbita associada a uma curva geratriz Tipo B. Neste caso, h ou $-h$ é positiva em M , satisfazendo a equação de Jacobi. Segue da Proposição 7 que a hipersuperfície gerada por γ é globalmente $(r-1)$ -estável. \square

Corolário 2 (Teorema 12). *Sejam p, q, r números naturais tais que $p+q \geq r+5$ e $2 \leq r \leq \min\{p, q\}$. Então existe uma hipersuperfície $M^{p+q+1} \subset \mathbb{R}^{p+q+2}$ completa mergulhada com $S_r = 0$ que é globalmente $(r-1)$ -estável. Além disso, M^{p+q+1} é homeomorfa a $\mathbb{S}^p \times \mathbb{R}^{q+1}$ ou a $\mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{S}^q$.*

Capítulo 5

Estabilidade de Cones r -Mínimos em \mathbb{R}^{n+1}

5.1 Existência de Cones Instáveis se $n \leq r + 5$

Seja M^{n-1} uma hipersuperfície orientável, compacta, imersa na esfera euclidiana $\mathbb{S}^n(1)$. O cone $C(M)$ em \mathbb{R}^{n+1} com base M é, por definição, a união dos segmentos de linha reta começando na origem e passando pelos pontos de M . É claro que $C(M) \cap \mathbb{S}^n(1) = M$ e que $C(M) \setminus \{0\}$ é uma hipersuperfície suave de \mathbb{R}^{n+1} . A parte do cone que está contida no fecho de $B_1(0) \setminus B_\varepsilon(0)$, $0 < \varepsilon < 1$, é chamada de tronco de cone e será denotada por $C(M)_\varepsilon$. A hipersuperfície suave $C(M) \setminus \{0\}$ é descrita pela aplicação

$$\begin{aligned} M \times (0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (m, t) &\rightarrow tm. \end{aligned}$$

O tronco de cone é uma hipersuperfície compacta com fronteira de \mathbb{R}^{n+1} que é descrita pela mesma aplicação acima restrita a $M \times [\varepsilon, 1]$. Se X descreve parametricamente a imersão de M sobre a esfera, então $Y = tX$ descreve parametricamente o cone $C(M)$. De fato, se a métrica de M é ds^2 então a métrica de $C(M)$ é

$$d\sigma^2 = dt^2 + t^2 ds^2,$$

isto diz que o elemento de volume de $C(M)$ é dado por $d\bar{M} = t^{n-1} dt \wedge dM$.

Observação 5. *No que segue, A , S_r e T_r denotarão a segunda forma fundamental, a r -ésima curvatura média e o r -ésimo Tensor de Newton de M , e \bar{A} , \bar{S}_r e \bar{T}_r*

denotarão a segunda forma fundamental, a r -ésima curvatura média e o r -ésimo Tensor de Newton do cone $C(M)$.

Proposição 8. *Valem as seguintes igualdades:*

1. $\bar{S}_r = \frac{1}{t^r} S_r$;
2. $|\bar{A}| = \frac{1}{t} |A|$;
3. $\bar{T}_r = \frac{1}{t^r} \begin{bmatrix} S_r & 0 \\ 0 & T_r \end{bmatrix}$.

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [4].

Seja $F : C(M) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Para cada $t > 0$, considere a seguinte função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(m) = F(m, t)$. Também podemos encontrar em [4] a prova da proposição abaixo.

Proposição 9. *Com as notações introduzidas temos a fórmula a seguir para o operador $\bar{L}_r : C^\infty(C(M)) \rightarrow C^\infty(C(M))$:*

$$\bar{L}_r F = \frac{1}{t^r} S_r \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{n-r-1}{t^{r+1}} S_r \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{t^{r+2}} L_r f.$$

Suponha que M satisfaz $S_r = 0$ e $S_{r+1} \neq 0$. Isto implica que L_{r-1} é elíptico, ver [13] e [14]. Vamos supor que $S_{r-1} > 0$, quando r é par podemos escolher uma orientação de modo que isto aconteça. Seja $F \in C_c^\infty(C(M)_\varepsilon)$, usando as notações do capítulo anterior e as Proposições 8 e 9 obtemos que

$$\begin{aligned} \bar{I}_{r-1}(F, F) &= - \int_{M \times [\varepsilon, 1]} F(\bar{L}_{r-1} F - (r+1)\bar{S}_{r+1} F) t^{n-1} dt \wedge dM \\ &= - \int_{M \times [\varepsilon, 1]} f \left(\frac{1}{t^{r+1}} L_{r-1} f - \frac{r+1}{t^{r+1}} S_{r+1} f \right) t^{n-1} dt \wedge dM \\ &\quad - \int_{M \times [\varepsilon, 1]} F \left(\frac{1}{t^{r-1}} S_{r-1} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{n-r}{t^r} S_{r-1} \frac{\partial F}{\partial t} \right) t^{n-1} dt \wedge dM \\ &= - \int_{M \times [\varepsilon, 1]} f \left(L_{r-1} f - (r+1) S_{r+1} f \right) t^{n-r-2} dt \wedge dM \\ &\quad - \int_{M \times [\varepsilon, 1]} F \left(t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + (n-r)t \frac{\partial F}{\partial t} \right) S_{r-1} t^{n-r-2} dt \wedge dM. \end{aligned}$$

Sendo $S_{r-1} > 0$, temos que $S_{r-1}t^{n-r-2}dt \wedge dM$ ($n \geq r + 2$) é um elemento de volume em $C(M)_\varepsilon$. Podemos escrever tal elemento de volume como o produto de duas medidas $ds = t^{n-r-2}dt$ e $dS = S_{r-1}dM$. Com isto escrevemos a igualdade encontrada como segue abaixo

$$\begin{aligned} \bar{I}_{r-1}(F, F) = & - \int_{M \times [\varepsilon, 1]} f \left(\frac{1}{S_{r-1}} L_{r-1} f - (r+1) \frac{S_{r+1}}{S_{r-1}} f \right) ds \wedge dS \\ & - \int_{M \times [\varepsilon, 1]} F \left(t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + (n-r)t \frac{\partial F}{\partial t} \right) ds \wedge dS \end{aligned}$$

Baseado nesta igualdade consideraremos os seguintes operadores

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_1 : C^\infty(M) &\rightarrow C^\infty(M) \text{ dado por } \mathfrak{L}_1 f = -\frac{1}{S_{r-1}} L_{r-1} f + (r+1) \frac{S_{r+1}}{S_{r-1}} f \\ \mathfrak{L}_2 : C_c^\infty[\varepsilon, 1] &\rightarrow C_c^\infty[\varepsilon, 1] \text{ dado por } \mathfrak{L}_2 g = -t^2 g'' - (n-r)tg'. \end{aligned}$$

Como L_{r-1} é elíptico e M é compacta, então L_{r-1} e \mathfrak{L}_1 são fortemente elípticos. Sejam $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty$ os autovalores do operador \mathfrak{L}_1 . Estamos considerando os espaços $C^\infty(M)$ e $C_c^\infty[\varepsilon, 1]$ com os seguintes produtos internos

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_M f_1 f_2 dS \quad \text{e} \quad \langle g_1, g_2 \rangle = \int_\varepsilon^1 g_1 g_2 ds.$$

Lema 8. *O operador $\mathfrak{L}_2 : C_c^\infty[\varepsilon, 1] \rightarrow C_c^\infty[\varepsilon, 1]$ é autoadjunto.*

Demonstração. Dadas $f, g \in C_c^\infty[\varepsilon, 1]$ temos que,

$$\begin{aligned} \langle f, \mathfrak{L}_2 g \rangle &= - \int_\varepsilon^1 [g''(t)t^2 f(t) + (n-r)g'(t)tf(t)] ds \\ &= - \int_\varepsilon^1 [g''(t)t^{n-r} f(t) + (n-r)g'(t)t^{n-r-1} f(t)] dt. \end{aligned}$$

Usando integração por partes obtemos a igualdade abaixo,

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 g''(t)[t^{n-r} f(t)] dt &= \left[g'(t)t^{n-r} f(t) \right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 g'(t)[(n-r)t^{n-r-1} f(t) + t^{n-r} f'(t)] dt \\ &= - \int_\varepsilon^1 (n-r)g'(t)t^{n-r-1} f(t) dt - \int_\varepsilon^1 g'(t)t^{n-r} f'(t) dt. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle f, \mathfrak{L}_2 g \rangle &= \int_{\varepsilon}^1 g'(t) [t^{n-r} f'(t)] dt \\
&= \left[g(t) t^{n-r} f'(t) \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 g(t) [t^{n-r} f''(t) + (n-r)t^{n-r-1} f'(t)] dt \\
&= - \int_{\varepsilon}^1 [g(t) t^2 f''(t) + (n-r)g(t) t f'(t)] ds \\
&= \langle \mathfrak{L}_2 f, g \rangle.
\end{aligned}$$

□

Calcularemos os autovalores do operador \mathfrak{L}_2 e obteremos uma estimativa superior para o primeiro autovalor do operador \mathfrak{L}_1 .

Lema 9. *Os autovalores do operador \mathfrak{L}_2 são*

$$\delta_k = \left(\frac{n-r-1}{2} \right)^2 + \left(\frac{k\pi}{\ln(\varepsilon)} \right)^2.$$

Demonstração. Encontramos $g \in C_0^\infty[\varepsilon, 1]$ e $\delta \in \mathbb{R}$ tais que $\mathfrak{L}_2 g = \delta g$ é equivalente a resolvermos a seguinte EDO

$$t^2 g''(t) + (n-r) t g'(t) + \delta g(t) = 0. \quad (5.1)$$

Para determinarmos a solução geral da equação (5.1) é suficiente conhecermos duas soluções linearmente independentes. Tentaremos obter soluções linearmente independentes da forma $g(t) = t^\alpha \operatorname{sen} \varphi(t)$ e $h(t) = t^\alpha \operatorname{cos} \varphi(t)$. Analisaremos primeiro o caso $g(t) = t^\alpha \operatorname{sen} \varphi(t)$. Um cálculo direto mostra que,

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \alpha t^{\alpha-1} \operatorname{sen} \varphi(t) + t^\alpha \varphi'(t) \operatorname{cos} \varphi(t); \\
g''(t) &= \alpha(\alpha-1) t^{\alpha-2} \operatorname{sen} \varphi(t) + 2\alpha t^{\alpha-1} \varphi'(t) \operatorname{cos} \varphi(t) \\
&\quad + t^\alpha \varphi''(t) \operatorname{cos} \varphi(t) - t^\alpha [\varphi'(t)]^2 \operatorname{sen} \varphi(t).
\end{aligned}$$

Como consequência obtemos que,

$$\begin{aligned}
&\alpha(\alpha-1) t^\alpha \operatorname{sen} \varphi(t) + 2\alpha t^{\alpha+1} \varphi'(t) \operatorname{cos} \varphi(t) \\
&+ t^{\alpha+2} \varphi''(t) \operatorname{cos} \varphi(t) - t^{\alpha+2} [\varphi'(t)]^2 \operatorname{sen} \varphi(t) \\
&+ \alpha(n-r) t^\alpha \operatorname{sen} \varphi(t) + (n-r) t^{\alpha+1} \varphi'(t) \operatorname{cos} \varphi(t) \\
&+ \delta t^\alpha \operatorname{sen} \varphi(t) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \left(\alpha(\alpha - 1) - t^2[\varphi'(t)]^2 + \alpha(n - r) + \delta \right) t^\alpha \operatorname{sen}\varphi(t) + \\ & + \left(2\alpha t\varphi'(t) + t^2\varphi''(t) + (n - r)t\varphi'(t) \right) t^\alpha \operatorname{cos}\varphi(t) = 0. \end{aligned}$$

Como estamos interessados em soluções linearmente independentes vamos supor que os coeficientes das funções $\operatorname{sen}\varphi(t)$ e $\operatorname{cos}\varphi(t)$, na equação acima, são nulos. Sendo $2\alpha t\varphi'(t) + t^2\varphi''(t) + (n - r)t\varphi'(t) = 0$ obtemos que $\varphi'(t) = ct^{-[2\alpha+(n-r)]}$, para algum $c \in \mathbb{R}$. Agora, igualando o outro coeficiente a zero obtemos

$$\alpha(\alpha - 1) - t^2[\varphi'(t)]^2 + \alpha(n - r) + \delta = 0. \quad (5.2)$$

Isto diz que as funções do tipo $g(t) = t^\alpha \operatorname{sen}\varphi(t)$, onde $\varphi'(t) = ct^{-[2\alpha+(n-r)]}$, são autofunções do operador \mathfrak{L}_2 . Substituindo $\varphi'(t) = ct^{-[2\alpha+(n-r)]}$ na equação (5.2) obtemos

$$2\alpha - 1 + (n - r) = 0 \quad (5.3)$$

$$\alpha(\alpha - 1) - c^2 + \alpha(n - r) + \delta = 0. \quad (5.4)$$

Agora substituindo (5.3) em (5.4) temos que,

$$\begin{aligned} \delta &= c^2 - \alpha[(\alpha - 1) + (n - r)] \\ &= c^2 + \alpha^2 \\ &= c^2 + \left(\frac{n - r - 1}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Veja que $\varphi(t) = c \ln(t)$, e usando o fato que a função g se anula na fronteira de $[\varepsilon, 1]$ obtemos que $\varphi(\varepsilon) = c \ln(\varepsilon) = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Com isto temos que as funções

$$g_k(t) = t^{-\frac{n-r-1}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\ln(\varepsilon)} \ln(t) \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

são autofunções do operador \mathfrak{L}_2 associadas, respectivamente, aos autovalores

$$\delta_k = \left(\frac{n - r - 1}{2} \right)^2 + \left(\frac{k\pi}{\ln(\varepsilon)} \right)^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Trabalhando agora o caso $h(t) = t^\alpha \operatorname{cos}\varphi(t)$ obtemos que as funções

$$h_k(t) = t^{-\frac{n-r-1}{2}} \operatorname{cos}\left(\frac{k\pi}{\ln(\varepsilon)} \ln(t) \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

também são autofunções do operador \mathfrak{L}_2 associadas, respectivamente, aos autovalores

$$\delta_k = \left(\frac{n-r-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{\ln(\varepsilon)}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Não é difícil verificar que as funções g_k e h_k são linearmente independentes. Então toda solução de (5.1) é da forma

$$\psi(t) = a \cdot t^{-\frac{n-r-1}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\ln(\varepsilon)} \ln(t)\right) + b \cdot t^{-\frac{n-r-1}{2}} \operatorname{cos}\left(\frac{k\pi}{\ln(\varepsilon)} \ln(t)\right),$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Isto diz que os δ_k 's obtidos acima são todos os autovalores de \mathfrak{L}_2 . Isto conclui a demonstração. \square

Para obtermos a estimativa superior para o primeiro autovalor do operador \mathfrak{L}_1 precisamos da seguinte fórmula (ver [7])

$$\begin{aligned} L_r S_r &= L_{r-1} S_{r+1} + S_r [\Delta S_r - L_{r-1} S_1] \\ &+ \sum_k |T_{r-1} D_{e_k} A|^2 - |\nabla S_r|^2 \\ &+ \operatorname{tr}(A T_{r-1}) \{S_r [|A|^2 - c(n-1)] - [\operatorname{tr}(A^2 T_r) - c \cdot \operatorname{tr}(T_r)]\} \\ &- \operatorname{tr}(A^2 T_{r-1}) [\operatorname{tr}(A^2 T_{r-1}) - c \cdot \operatorname{tr}(T_{r-1})], \end{aligned}$$

válida para toda imersão isométrica $M^{n-1} \rightarrow \overline{M}^n(c)$. Supondo $S_r = 0$ obtemos que,

$$L_{r-1} S_{r+1} + \sum_k |T_{r-1} D_{e_k} A|^2 - \operatorname{tr}(A^2 T_{r-1}) [\operatorname{tr}(A^2 T_{r-1}) - c \cdot \operatorname{tr}(T_{r-1})] = 0. \quad (5.5)$$

Teorema 12. *Seja $M^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ uma hipersuperfície orientável e compacta. Se $S_r = 0$ e S_{r+1} é constante não nula, então o primeiro autovalor de \mathfrak{L}_1 satisfaz $\lambda_1 \leq -(n-r)$.*

Demonstração. Inicialmente observemos que $\operatorname{tr}(A^2 T_{r-1}) = -(r+1)S_{r+1}$. Usando que T_{r-1} é positivo definido obtemos $-(r+1)S_{r+1} > 0$. Sendo $L_{r-1} S_{r+1} = 0$, a equação (5.5) nos diz que,

$$(r+1)S_{r+1} [-(r+1)S_{r+1} - (n-r)S_{r-1}] \leq 0.$$

Lembrando que $S_{r-1} > 0$, multiplicamos a desigualdade encontrada por $-\frac{S_{r+1}}{S_{r-1}}$ para obtermos

$$(r + 1) \frac{S_{r+1}}{S_{r-1}} S_{r+1}^2 + (n - r) S_{r+1}^2 \leq 0.$$

Portanto,

$$S_{r+1} \mathfrak{L}_1 S_{r+1} = (r + 1) \frac{S_{r+1}}{S_{r-1}} S_{r+1}^2 \leq -(n - r) S_{r+1}^2.$$

Consequentemente,

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_M S_{r+1} \mathfrak{L}_1 S_{r+1}}{\int_M S_{r+1}^2} \leq -(n - r).$$

□

A prova do lema a seguir pode ser encontrada em [26] ou em [4].

Lema 10. *Para toda função teste $F \in C_c^\infty(C(M)_\varepsilon)$ temos que*

$$\bar{I}_{r-1}(F, F) \geq (\lambda_1 + \delta_1) \int_{M \times [\varepsilon, 1]} F^2 ds \wedge dS.$$

Além disso, se $\lambda_1 + \delta_1 < 0$ existe uma função teste F_1 tal que $\bar{I}_{r-1}(F_1, F_1) < 0$.

Agora analisaremos o sinal de $\lambda_1 + \delta_1$, para toda hipersuperfície $M^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ com $S_r = 0$ e que S_{r+1} é uma constante não nula. Usando o Lema 9 e o Teorema 12 obtemos,

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \delta_1 &\leq -(n - r) + \left(\frac{n - r - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{\ln(\varepsilon)}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}[(n - r)^2 - 6(n - r) + 1] + \left(\frac{\pi}{\ln(\varepsilon)}\right)^2. \end{aligned}$$

Usando que os zeros do polinômio $t^2 - 6t + 1$ são $3 + 2\sqrt{2}$ e $3 - 2\sqrt{2}$ concluimos que

$$-(n - r) + \left(\frac{n - r - 1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}[(n - r) - 3 - 2\sqrt{2}][(n - r) - 3 + 2\sqrt{2}].$$

Como $3 - 2\sqrt{2} < 1 < n - r$, pois $r + 2 \leq n$, temos que $(n - r) - 3 + 2\sqrt{2} > 0$. Sendo $5 < 3 + 2\sqrt{2} < 6$, obtemos as seguintes conclusões:

$$-(n - r) + \left(\frac{n - r - 1}{2}\right)^2 < 0, \text{ se } n \leq r + 5; \tag{5.6}$$

$$-(n - r) + \left(\frac{n - r - 1}{2}\right)^2 > 0, \text{ se } n \geq r + 6. \tag{5.7}$$

Portanto, se $n \leq r + 5$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda_1 + \delta_1 < 0$. Pelo Lema 10 temos o seguinte teorema.

Teorema 13. *Seja $M^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ orientável e compacta. Suponha que $S_r = 0$, S_{r+1} é constante não nula e $r + 2 \leq n \leq r + 5$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que o tronco de cone $C(M)_\varepsilon$ não é $(r - 1)$ -estável.*

5.2 Estabilidade de Cones quando $n \geq r + 6$

Seja $M^{n-1} = \mathbb{S}^p(r_1) \times \mathbb{S}^q(r_2) \subset \mathbb{S}^n$ um Toro de Clifford, isto é, $r_1^2 + r_2^2 = 1$ e $p + q + 1 = n$. Neste caso, temos que a segunda forma fundamental de M é

$$A = \begin{bmatrix} \frac{r_2}{r_1} I_p & 0 \\ 0 & -\frac{r_1}{r_2} I_q \end{bmatrix}.$$

Em [7], Caminha construiu uma família de Toros de Clifford com curvatura escalar constante prescrita $R \in [1, 2)$. Na proposição abaixo mostraremos a existência de Toros de Clifford com $S_r = 0$ e $S_{r+1} \neq 0$, para todo $1 \leq r \leq n - 3$.

Proposição 10. *Dados $n, r \in \mathbb{N}$ tais que $1 \leq r \leq n - 3$, existem $p, q \in \mathbb{N}$ e $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ de modo que o Toro de Clifford $M^{n-1} = \mathbb{S}^p(r_1) \times \mathbb{S}^q(r_2) \subset \mathbb{S}^n$ satisfaz $S_r = 0$ e $S_{r+1} \neq 0$.*

Demonstração. Temos dois casos a considerar, quando n é par ou quando n é ímpar. Primeiro suponha n ímpar. Escolha $p = q = \frac{n-1}{2}$, pelo Teorema 7 temos que para todo $1 \leq r \leq n - 2$ o polinômio

$$Q(t) = \sum_{i=0}^r \binom{p}{r-i} \binom{q}{i} t^{r-i}$$

possui pelo menos uma raiz real positiva. Agora suponha que n é par, neste caso escolha $p = \frac{n}{2}$ e $q = \frac{n-2}{2}$. Novamente pelo Teorema 7, temos que para todo $1 \leq r \leq n - 3$ o polinômio Q possui pelo menos uma raiz real positiva.

Pela definição da r -ésima curvatura média obtemos que,

$$S_r = \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{p}{r-i} \binom{q}{i} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{r-i} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^i.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{S_r}{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^r} &= \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{p}{r-i} \binom{q}{i} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{r-i} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{-r+i} \\ &= \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{p}{r-i} \binom{q}{i} \left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right]^{r-i} \\ &= Q\left(\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right), \end{aligned}$$

Então, $S_r = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \in R_Q^+ = \{\beta_1, \dots, \beta_k\}$. Supondo $r_1^2 + r_2^2 = 1$ obtemos que,

$$r_1 = \sqrt{\frac{1}{1 + \beta_l}} \quad \text{e} \quad r_2 = \sqrt{\frac{\beta_l}{1 + \beta_l}}, \quad 1 \leq l \leq k.$$

Pelo Teorema 7 também concluímos que $S_{r+1} \neq 0$. Isto conclui a prova da Proposição. \square

Lema 11. *Se $M^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ é um Toro de Clifford com $S_r = 0$ e $S_{r+1} \neq 0$, então*

$$-(r+1)S_{r+1} = (n-r)S_{r-1}.$$

Demonstração. Sendo M^{n-1} um Toro de Clifford obtemos pelo Lema 4.1 de [7] que $tr(AT_{r-1})\{S_r(|A|^2 - n) - [tr(A^2T_r) - tr(T_r)]\} - tr(A^2T_{r-1})[tr(A^2T_{r-1}) - tr(T_{r-1})] = 0$.

Como $S_r = 0$ e $S_{r+1} \neq 0$ concluímos que $tr(A^2T_{r-1}) - tr(T_{r-1}) = 0$. Portanto, $(r+1)S_{r+1} = -(n-r)S_{r-1}$. \square

Neste caso, temos que o operador $\mathfrak{L}_1 : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ é dado por

$$\mathfrak{L}_1 = -\frac{1}{S_{r-1}}L_{r-1} - (n-r).$$

Corolário 3. *Seja $M^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ um Toro de Clifford com $S_r = 0$ e $S_{r+1} \neq 0$, então o primeiro autovalor do operador \mathfrak{L}_1 é dado por $\lambda_1 = -(n-r)$.*

Demonstração. Como S_{r-1} é constante e T_{r-1} é positivo definido concluímos que

$$-\int_M \frac{f}{S_{r-1}}L_{r-1}f = -\frac{1}{S_{r-1}} \int_M fL_{r-1}f \geq 0,$$

para toda função $f \in C^\infty(M)$. Considerando f uma função constante obtemos que,

$$\inf \left\{ \frac{-\int_M \frac{f}{S_{r-1}} L_{r-1} f}{\int_M f^2}; f \in C^\infty(M) \right\} = 0.$$

Por este fato e pelo Teorema 12 temos que,

$$\begin{aligned} -(n-r) \geq \lambda_1 &= \inf \frac{\int_M \frac{f}{S_{r-1}} \mathfrak{L}_1 f}{\int_M f^2} = \inf \left\{ \frac{-\int_M \frac{f}{S_{r-1}} L_{r-1} f}{\int_M f^2} - (n-r) \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{-\int_M \frac{f}{S_{r-1}} L_{r-1} f}{\int_M f^2} \right\} - (n-r) = -(n-r). \end{aligned}$$

□

Como consequência temos que,

$$\lambda_1 + \delta_1 = -(n-r) + \left(\frac{n-r-1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{\ln(\varepsilon)} \right)^2.$$

Pela Proposição 10, pelo Lema 10, por (5.7) e pelo Corolário 3 temos o seguinte teorema.

Teorema 14. *Se $n \geq r + 6$, existe um Toro de Clifford $M^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ com $S_r = 0$ e $S_{r+1} \neq 0$ tal que o tronco de cone $C(M)_\varepsilon$ é $(r-1)$ -estável para todo $\varepsilon > 0$.*

Referências Bibliográficas

- [1] Alencar, H.: Minimal Hypersurfaces in \mathbb{R}^{2m} invariant by $SO(m) \times SO(m)$, Transl. Amer. Math. Soc. 337 (1) (1993), 129-141.
- [2] Alencar, H., Barros, A., Guadalupe, J., Palmas, O. and Santos W.: $O(m) \times O(n)$ -invariant minimal Hypersurfaces in \mathbb{R}^{m+n} , Ann. Global Anal. Geom., 27 (2005), 179-199.
- [3] Barbosa, J. L. and Colares, A. G.: Stability of hypersurfaces with constant r-mean curvature, Ann. Global Anal. Geom. 15 (1997), 277-297.
- [4] Barbosa, J. L. M. and Do Carmo, M. P.: On Stability of Cones in \mathbb{R}^{n+1} with zero scalar curvature, Ann. of Global Anal. and Geom., 28 (2005), 107-122.
- [5] Barbosa, J. L., Do Carmo, M. P. and Eschenburg, J.: Stability of Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in Riemannian Manifolds, Math. Z., 197 (1988), 123-138.
- [6] Bombieri, E., de Giorgi, E. and Giusti, E.: Minimal cones and Bernstein problem, Invent. Math., 7 (1969), 243-269.
- [7] Caminha, A.: On Hypersurfaces into Riemannian spaces of constant sectional curvature, Kodai Math J., 29 (2006), 185-210.
- [8] Delaunay, C.: Sur la surface de revolution dont la moyenne est constante, J. Math. Pure and Appl., 16 (1841), 309-321.
- [9] Do Carmo, M. P. and Dajczer, M.: Rotational hypersurfaces in spaces of constant curvature, Transl. Amer. Math. Soc., 277-2 (1983), 685-709.
- [10] Elbert, M. F.: Sobre Hipersuperfícies com r-curvatura média constante, Doctor Thesis, IMPA-Brazil, 1998.

- [11] Fischer-Colbrie, D.: On complete minimal surfaces with finite Morse index in three-manifolds, *Invent. Math.*, 85 (1985), 121-132.
- [12] Hartaman, P.: *Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York, 1964.
- [13] Hounie, J. and Leite, M. L.: The maximum principle for hypersurfaces with vanishing curvaturue functions, *J. Diff. Geom.*, 41 (1995) 247-258.
- [14] Hounie, J. and Leite, M. L.: Two-ended hypersurfaces with zero scalar curvature, *Indiana Univ. Math.*, 48 (1999), 867-882.
- [15] Hsiang, W. Y. and Lawson, H. B.: Minimal submanifolds of low cohomogeneity, *J. Diff. Geom.*, 5 (1971), 1-38.
- [16] Hsiang, W. Y., Teng, Z. H. and Yu, W. C.: New examples of constant mean curvature immersions of $(2k-1)$ -spheres into Euclidian $2k$ -space, *Ann. Math.*, 117 (1983), 609-625.
- [17] Hsiang, W. Y.: Generalized rotational hypersurfaces of constant mean curvature in the Euclidian spaces I, *J. Diff. Geom.*, 17 (1982), 337-356.
- [18] Leite, M. L.: Rotational hypersurfaces of space forms with constant scalar curvature, *Manuscripta Math.*, 67 (1990), 285-304.
- [19] Okayasu, T.: $O(2) \times O(2)$ -invariant hypersurfaces with constant negative scalar curvature in E^4 , *Proc. Amer. Math. Soc.*, 107 (1989), 1045-1050.
- [20] Palmas, O.: Complete rotational hypersurfaces with H_k constant in space forms, *Bol. Soc. Brasileira Mat. (N.S.)*, 30 (2) (1999), 139-161.
- [21] Palmas, O.: $O(2) \times O(2)$ -invariant hypersurfaces with zero scalar curvature, *Archiv Math.*, 74 (3) (2000), 226-233.
- [22] Reilly, R. C.: Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms, *J. Diff. Geom.*, 8 (1973), 465-477.
- [23] Rosenberg, H.: Hypersurfaces of constant curvatures in space forms, *Bull. Sci. Math.*, 117 (1993), 211-239.
- [24] Sato, J.: Stability of $O(p+1) \times O(p+1)$ -invariant hypersurfaces with zero scalar curvature in Euclidian Space, *Ann. Global Anal. Geom.*, 22 (2002), 135-153.

- [25] Sato, J. and de Souza Neto, V. F.: Complete and Stable $O(p+1) \times O(q+1)$ -Invariant Hypersurfaces with zero scalar curvature in Euclidian space \mathbb{R}^{p+q+2} , Ann. Global Anal. Geom., 29 (2006), 221-240.
- [26] Simmons, J.: Minimal varieties in Riemannian manifolds, Ann. of Math., 88 (1968), 62-105.
- [27] Smale, S.: On the Morse index theorem, J. Math. Mech., 14 (1965), 1049-1056.
- [28] Sotomayor, J.: Lições de equações diferenciais ordinárias, Projeto Euclides, IMPA, Brazil.
- [29] Traizet, M.: On the stable surfaces of constant Gauss curvature in space forms, Ann. Global Anal. Geom., 13 (1995), 141-148.
- [30] Uhlenbeck, K.: The Morse theorem in Hilbert space, J. Diff. Geom., 8 (1973), 555-564.
- [31] Wente, H. C.: Counterexample to a conjecture of H. Hopf, Pacific J. Math., Volume 121, Number 1 (1986), 193-243.