UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ANTONIO FERNANDO PEREIRA DE SOUSA

HIPERSUPERFÍCIES $r-$MÍNIMAS COM DOIS FINS REGULARES

FORTALEZA
2008

ANTONIO FERNANDO PEREIRA DE SOUSA

HIPERSUPERFÍCIES r-MÍNIMAS COM DOIS FINS REGULARES

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial

Orientador: Prof. Dr. Levi Lopes de Lima

Fortaleza
2008

Dedico este trabalho à memória de minha irmã Cristiana.

Agradecimentos

À minha família agradeço pelo incondicional apoio em todos os momentos dessa longa caminhada.

Ao meu orientador, Prof. Levi Lopes de Lima, agradeço pela orientação e pelos sábios conselhos que me encorajaram a prosseguir meus estudos.

Aos professores Abdênago Alves, Jorge Herbert, Miguel Malacarne e Walcy Santos agradeço por terem aceito o convite para compor a banca examinadora e pelas correções nas versões preliminares deste trabalho.

Aos professores Fábio Montenegro, João Lucas Barbosa, Pacelli Bessa, Aldir Brasil e Lev Birbrair, agradeço pela matemática que aprendi durante suas aulas.

À Professora Elizabeth Gasparim agradeço pelo incentivo que me foi essencial no momento inicial dessa feliz jornada.

À Andrea Costa Dantas agradeço por sua eficiência e simpatia.

Ao CNPq e à CAPES agradeço pelo apoio financeiro a mim dispensado durante o curso de doutorado.

Agradeço à Mirele pelos apoios nos momentos difíceis e pelas cobranças nos momentos de tranquilidade, pelas alegrias e tristezas compartilhadas, por ser muito mais do que uma amiga e saber que sempre poderei contar com sua pessoa.

À Arthur agradeço pela amizade, pela força que me foi dada no início dessa jornada e pelos divertidos encontros quando estive em Recife.

Agradeço a Feliciano, Jobson, Marcelo e Silvana, pela amizade e boas conversas sobre matemática e demais assuntos pelos bares de Fortaleza.

Aos meus amigos Cícero, Carpegiani, Celina, Dani, Rafa, Ana Rocilda, Janny, Neto, Juscelino, Allana, Paulo, Jefferson, Marcelinho, Valdiane, Edivam, Ronny, Cris, Laires, Aurineide e Marco agradeço pela amizade, pelo incentivo e por todo *o apoio que recebi.*

À Cíntia pelas longas conversas e trocas de idéias sobre matemática, cinema e literatura que tanto me relaxaram durante o doutorado.

Finalmente, agradeço à Catherine, Djeanne e Socorro, pela amizade, pelos bons momentos de conversa e degustação e por estarem próximos nos momentos finais deste trabalho, me apoiando e incentivando.

Mais uma vez agradeço ao meu pai, Benigno, a minha mãe, Gilva, a minhas irmãs e seus respectivos maridos, Ana e Sérgio, Cristiana e Álvaro, e a meus sobrinhos, Renata, Paula, Bruno e Aninha, por fazerem parte da minha vida.

Antonio Fernando Pereira de Sousa.

Não passava de uma gota na imensa massa de água, que descia das outras casas inundando as ruas.

Caio Fernando Abreu, Mergulho I

Ninguém pode construir em teu lugar as pontes que precisarás passar, para atravessar o rio da vida - ninguém, exceto tu, só tu. Existem, por certo, atalhos sem números, e pontes, e semideuses que se oferecerão para levar-te além do rio; mas isso te custaria a tua própria pessoa; tu te hipotecarias e te perderias. Existe no mundo um único caminho por onde só tu podes passar. Onde leva? Não perguntes, segue-o!

Nietzsche

RESUMO

Seja M^n uma hipersuperfície $r-$mínima de $\mathbb{R}^{n+1}$, ou seja, suponha que M tem curvatura S_{r+1} identicamente nula. M é dita regular se fora de algum compacto M é a união disjunta de um número finito de fins, cada um deles regular, isto é, com o mesmo comportamento assintótico de uma hipersuperfície rotacional. Mostramos que hipersuperfícies r-mínimas elípticas e mergulhadas no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, $\frac{3}{2}(r+1) \leq n < 2(r+1)$, com dois fins, ambos regulares, são catenóides (i.e. hipersuperfícies rotacionais). Isto estende resultados prévios apresentados por Schoen [7] e Hounie-Leite [3].

ABSTRACT

Let M^n be a r-minimal hypersurface in $\mathbb{R}^{n+1}$, i.e., suppose M has curvature S_{r+1} identically zero. M is said regular if out of any compact M is the disjunct union of a finite number of ends, each regular, i.e., with the same assymptotic behavior that a rotational hypersurface. It is shown that embedded, elliptic r-minimal hypersurfaces in Euclidean space $\mathbb{R}^{n+1}$, $\frac{3}{2}(r+1) \leq n < 2(r+1)$, with two ends, both regular, are catenoids (i.e. rotational hypersurfaces). This extends previous results by Schoen [7] and Hounie-Leite [3].

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Em 1956, A. D. Alexandrov provou que uma hipersuperfície fechada mergulhada de curvatura média constante no espaço Euclidiano é uma esfera. O método empregado neste significativo resultado, baseado num Princípio de Tangência para soluções de equações elípticas de segunda ordem, tem sido usado como uma importante ferramenta numa variedade de problemas em equações diferenciais parciais e geometria diferencial.

Em 1983, R. M. Schoen aplicou o método de Alexandrov para hipersuperfícies mínimas. Ele apresentou resultados importantes de simetria e unicidade para superfícies mínimas compactas com bordos simétricos e para superfícies mínimas completas com fins regulares. Em particular, neste trabalho provou-se o seguinte resultado.

Teorema 1.1 *[7] Se $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície mínima completa com dois fins, ambos regulares, então M é rotacional.*

Lembramos que um fim de hipersuperfície mínima é regular se, ao escrevê-lo como gráfico sobre um hiperplano, a função que define o fim tem comportamento assintótico igual ao de um fim uma hipersuperfície mínima rotacional.

Em 1998, J. Hounie e M. L. Leite apresentaram um resultado para hipersuperfícies com curvatura escalar nula, semelhante ao encontrado por Shoen para hipersuperfícies mínimas.

Teorema 1.2 *[3] Se $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície completa, mergulhada, com curvatura escalar nula, sem pontos planos e com dois fins, ambos regulares, então M é rotacional.*

Novamente, que um fim seja regular significa que, quando expresso como gráfico, possui a mesma expansão assintótica que um fim de uma hipersuperficie rotacional com curvatura escalar nula.

Observe que, em comparação ao resultado de Schoen, o resultado de Hounie-Leite tem duas hipóteses adicionais: a hipersuperfície deve ser mergulhada e não deve conter pontos planos. A imposição de não conter pontos planos vem do fato que um certo operador diferencial parcial de segunda ordem sobre M, normalmente denotado na literatura por L_1, e que na verdade é a parte principal do linearizado da curvatura escalar, nem sempre é elíptico. De fato, J. Hounie e M. L. Leite, em uma série de trabalhos [2], [3], [4], [5] estudaram condições necessárias e suficientes para que uma hipersuperfície r-mínima (ou seja, tal que sua $(r+1)$-curvatura média S_{r+1}, que, por definição, é a $(r+1)$-ésima função simétrica elementar em suas curvaturas principais, se anule identicamente) seja *elíptica* no sentido que o operador linearizado correspondente seja elíptico. Note que, como no caso de curvatura escalar zero, este operador, usualmente representado por L_r, é também a parte principal do operador linerizado associado à $(r+1)$-curvatura média, o operador de Jacobi[1]. Eles mostraram que esse é o caso precisamente em pontos onde a aplicação normal de Gauss tem posto pelo menos igual $r+1$ ou, equivalentemente, $S_{r+2} \neq 0$. Já a segunda hipótese adicional, ou seja, que M seja mergulhada, vem da necessidade de se ter uma normal contínua e bem definida quando da comparação de M com sua imagem refletida. Neste contexto, eles obtiveram um princípio de tangência para hipersuperfícies r-mínimas, o que lhes permitiu seguir as mesmas idéias de Shoen, de modo a obter resultados de simetria e unicidade para tais hipersuperfícies, como o acima exposto.

Neste trabalho seguimos os passos dos autores citados acima e estendemos seus resultados para certas classes de hipersuperfícies r-mínimas, $r \geq 2$. Mais precisamente, temos

Teorema 1.3 *Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície $r-$mínima completa e mergulhada, com $\frac{3}{2} \leq \frac{n}{r+1} < 2$. Se M é elíptica e contém exatamente dois fins, ambos regulares, então M é rotacional.*

Este trabalho é organizado da seguinte maneira. No capítulo 1 são apresentadas várias noções básicas sobre hipersuperfícies r-mínimas. Em particular, recordamos a definição de r-minimalidade, as transformações de Newton e o operador L_r, com a corresdente discussão de elipticidade. No capítulo 2 dicutimos hipersuperfícies $r-$mínimas rotacionais e determinamos sua expansão assintótica; a expressão correspondente motiva a definição de fins r-mínimos regulares, que é aí apresentada. Ainda neste capítulo inclui-se o cálculo do fluxo de um tal fim, a partir de sua expansão assintótica, ingrediente fundamental para a demonstração do resultado principal. Este cálculo envolve estimativas delicadas e crucialmente utiliza a hipótese $\frac{3}{2} \leq \frac{n}{r+1} < 2$. Finalmente, no capítulo 3, utilizamos a expressão

[1]Note que hiperfícies r-mínimas em $\mathbb{R}^{n+1}$ são soluções do problema variacional associado ao funcional $\int S_r dM$; veja [6].

para o fluxo anteriormente obtida, juntamente com o método de reflexão desenvolvidos pelos autores acima citados, para concluir a demonstração do teorema.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Curvaturas Intermediárias de Hipersuperfícies

Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientada pelo campo vetorial normal unitário N, e seja $p \in M$. A aplicação $A_p : T_pM \to T_pM$ definida por $A_p(v) = -\nabla_v N$, onde ∇ é a derivada covariante em $\mathbb{R}^{n+1}$, mede o quanto M se curva dentro de $\mathbb{R}^{n+1}$ em p e por essa razão é conhecida como *operador de forma* de M em p. A aplicação linear A_p é simétrica com respeito a primeira forma fundamental I_p, definida como a restrição do produto interno Euclidiano ao espaço tangente T_pM, de modo que existe uma base ortonormal de T_pM consistindo de autovetores de A_p. Estes autovalores, denotados $\lambda_1(p), \ldots, \lambda_n(p)$, são as *curvaturas principais* de M em p.

A forma quadrática associada a A_p é chamada a *segunda forma fundamental de M em p*, e é denotada por II_p. Assim, $II_p(v) = I_p(v, A_p(v)), v \in T_pM$.

Daqui em diante, e sempre que isto não causar confusão, omitiremos o ponto p na notação. Assim, $A = A_p$, $I_p = I$ e $II_p = II$. Fixada uma base em T_pM, a matriz de $[A]$ em p é o produto $[A] = [I]^{-1}[II]$, onde $[I]$ e $[II]$ são as matrizes das primeira e segunda formas fundamentais.

Associado a A temos, para cada $0 \leq k \leq n$, a *k-ésima curvatura média* de M, denotada $S_k = S_k(A)$, e definida por

$$\det(Id + t[A]) = \sum_{k=0}^{n} S_k t^k.$$

Desenvolvento o determinante, obtemos

$$\begin{aligned}
\det(Id + t[A]) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} sgn(\sigma)\prod_{i=1}^{n}(\delta_{i\sigma(i)} + tA_{i\sigma(i)}) \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} sgn(\sigma)\left[\prod_{i=1}^{n}\delta_{i\sigma(i)} + \left(\sum_{i=1}^{n}\delta_{1\sigma(1)}\cdots A_{i\sigma(i)}\cdots\delta_{n\sigma(n)}\right)t + \cdots +\right. \\
&+ \left.\left(\prod_{i=1}^{n}A_{i\sigma(i)}\right)t^n\right] \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} sgn(\sigma)\delta_{1\sigma(1)}\cdots A_{i\sigma(i)}\cdots\delta_{n\sigma(n)}\right)t + \cdots + \det[A]t^n,
\end{aligned}$$

donde

$$S_0 = 1, \qquad S_r = \sum_{|I|=r}\det[A]_I,\, 1 < r \leq n,$$

onde $|I| = r$ significa que $J = \{i_1, \ldots, i_r\}$ é um conjunto de índices tais que $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_r \leq n$ e $[A]_I$ é a submatriz principal $r \times r$ de $[A]$ com linhas e colunas indexadas por I. Noutros termos,

$$S_r = \frac{1}{r!}\sum_I \delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}A_{i_1 j_1}\cdots A_{i_r j_r}, \tag{2.1}$$

onde

$$\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r} = \begin{vmatrix} \delta^{i_1}_{j_1} & \cdots & \delta^{i_1}_{j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{i_1}_{j_1} & \cdots & \delta^{i_1}_{j_1} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_r} sgn(\sigma)\delta^{i_1}_{\sigma(i_1)}\cdots\delta^{i_r}_{\sigma(i_r)}$$

é o delta de Kronecker generalizado.

Seja O uma matriz ortogonal que diagonaliza A. Então

$$\begin{aligned}
\det(I + t[A]) &= \det\left(O(I + t[A])O^{-1}\right) \\
&= \det\left(I + tO[A]O^{-1}\right) \\
&= \det(I + t\mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}) \\
&= \prod_{j=1}^{n}(1 + t\lambda_j) \\
&= 1 + t\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right) + t^2\left(\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j\right) + \cdots + t^n\left(\prod_{j=1}^{n}\lambda_j\right).
\end{aligned}$$

Assim, S_k coincide com k-ésima função simétrica elementar σ_k, avaliada nas curvaturas principais, isto é,

$$S_k = \sigma_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_k}. \tag{2.2}$$

Se M é um gráfico, isto é, $M = \{(x, u(x)) : x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n\}$, onde $u : \Omega \to \mathbb{R}$, então M pode ser orientada da seguinte forma: em cada $p = (x, u(x))$ definimos o vetor normal unitário apontando para cima por

$$N(x) = \frac{(-\nabla^0 u(x), 1)}{W(x)},$$

onde $[W(x)]^2 = 1 + \|\nabla^0 u(x)\|^2$ e $\nabla^0 u$ é o gradiente de u.

Se $\{e_i, i = 1, \ldots, n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$ definimos uma base $\mathcal{B}$ para o espaço tangente T_pM simplesmente tomando o *push-forward* da base canônica de $\mathbb{R}^n$ pela aplicação $x \to (x, u(x))$. Assim, $\mathcal{B} = \{X_i = (e_i, u_i(x)), i = 1, \ldots, n\}$. Com respeito a esta base, $[I]_{ij} = \delta_{ij} + u_i u_j$ e $[II]_{ij} = W^{-1} u_{ij}$. Desta maneira, a matriz do operador de forma é

$$[A] = [I]^{-1}[II] = \left[\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{W^2}\right]\left[\frac{u_{ij}}{W}\right],$$

e após alguns cálculos concluímos que a matriz $[A]$ tem entradas

$$A_{ij} = \frac{u_{ij}}{W} - \frac{u_i c_j}{W^3},$$

onde $c_j = u_1 u_{1j} + \cdots + u_n u_{nj}$.

Nas condições acima descritas temos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [5]:

Proposição 2.1 *A $k-$ésima curvatura média $S_k, 1 \leq k \leq n$, de $M = \mathrm{graf}(u) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ satisfaz*

$$W^{k+2} S_k = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} (W^2 - u_{j_1}^2 - \cdots - u_{j_k}^2) \begin{vmatrix} u_{j_1 j_1} & u_{j_1 j_2} & \cdots & u_{j_1 j_k} \\ u_{j_1 j_2} & u_{j_2 j_2} & \cdots & u_{j_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{j_1 j_k} & u_{j_2 j_k} & \cdots & u_{j_k j_k} \end{vmatrix}$$

$$-2 \sum_{i<l} u_i u_k \left(\sum_{\substack{j_2 < \cdots < j_k \\ j_2, \ldots, j_k \neq i, l}} \begin{vmatrix} u_{il} & u_{ij_2} & \cdots & u_{ij_k} \\ u_{j_2 l} & u_{j_2 j_2} & \cdots & u_{j_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{j_r l} & u_{j_2 j_k} & \cdots & u_{j_k j_k} \end{vmatrix} \right),$$

onde $W^2 = 1 + \|Du\|^2$.

Definição 2.1 *Se* $0 \leq r \leq n-1$, *uma hipersuperfície* $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *é dita ser* $r-$*mínima se vale* $S_{r+1}(M) \equiv 0$.

Assim, em virtude da Proposição 2.1, se $r \geq 1$, a condição de r-minimalidade define localmente uma equação diferencial parcial de segunda ordem do tipo totalmente não-linear.

2.2 Tensor de Newton

Definição 2.2 *Seja* $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *uma hipersuperfície r-mínima. O* $r-$*ésimo tensor de Newton sobre* M, *denotado por* $P_r = P_r[A], 0 \leq r \leq n$, *é a transformação linear definida indutivamente por*

$$P_0 = I, \qquad P_r = S_r I - AP_{r-1}.$$

Equivalentemente,

$$P_r = S_r I - S_{r-1}A + \cdots + (-1)^r A^r.$$

Além disso, uma vez que P_r é um polinômio em A, temos que $P_r A = AP_r$ e que P_r é auto-adjunto. Assim, toda base que diagonaliza A também diagonaliza $P_r, r = 1, \ldots, n$.

Proposição 2.2 *Se* $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, *então*

$$P_r[A] = \operatorname{diag}\left(\frac{\partial \sigma_{r+1}}{\partial \lambda_1}, \ldots, \frac{\partial \sigma_{r+1}}{\partial \lambda_n}\right) = \operatorname{diag}\left(\sigma_r(\hat{\lambda}_1), \ldots, \sigma_r(\hat{\lambda}_n)\right),$$

onde a notação $\hat{\lambda}_i = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, *indica que a coordenada* λ_i *é omitida. Em geral, vale*

$$P_r[A] = \left[\frac{\partial S_{r+1}}{\partial A_{ij}}\right].$$

Demonstração: Se $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, então $S_{r+1} = \sigma_{r+1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_i \sigma_r(\hat{\lambda}_i) + \sigma_r(\hat{\lambda}_i)$, donde $\frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} = \sigma_r(\hat{\lambda}_i)$, para todo i. No caso $r = 0$ temos $P_0 = I$ e $\sigma_0(\hat{\lambda}_i) = 1$ para todo i. Supondo que

$$P_r[A] = \operatorname{diag}\left(\sigma_r(\hat{\lambda}_1), \ldots, \sigma_r(\hat{\lambda}_n)\right),$$

temos

$$\begin{aligned}
P_{r+1} &= S_{r+1}I - AP_r \\
&= \sigma_{r+1}(k)I - \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot \mathrm{diag}\left(\sigma_r(\hat{\lambda}_1), \ldots, \sigma_r(\hat{\lambda}_n)\right) \\
&= \sigma_{r+1}(k)I - \mathrm{diag}\left(\lambda_1\sigma_r(\hat{\lambda}_1), \ldots, \lambda_n\sigma_r(\hat{\lambda}_n)\right) \\
&= \mathrm{diag}\left(\sigma_{r+1}(\lambda) - \lambda_1\sigma_r(\hat{\lambda}_1), \ldots, \sigma_{r+1}(\lambda) - \lambda_n\sigma_r(\hat{\lambda}_n)\right) \\
&= \mathrm{diag}\left(\sigma_{r+1}(\hat{\lambda}_1), \ldots, \sigma_{r+1}(\hat{\lambda}_n)\right),
\end{aligned}$$

que prova a primeira parte da proposição. No caso geral, seja $O = [o_{ij}]$ uma matriz ortogonal que diagonalize A, isto é,

$$O^{-1}AO = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Assim, $\lambda_s = \sum_{i,j} o_{is}A_{ij}o_{js}$. Aplicando a regra da cadeia para $S_{r+1} = \sigma_{r+1}(\lambda)$,

$$\frac{\partial S_{r+1}}{\partial A_{ij}} = \frac{\partial}{\partial A_{ij}}\left(\sigma_{r+1}(\lambda)\right) = \sum_s \frac{\partial \sigma_{r+1}}{\partial \lambda_s}\frac{\partial \lambda_s}{\partial A_{ij}} = \sum_s \frac{\partial \sigma_{r+1}}{\partial \lambda_s} o_{is}o_{js},$$

e obtemos então

$$\left[\frac{\partial S_{r+1}}{\partial A_{ij}}\right] = \left[\sum_s o_{is}\frac{\partial \sigma_{r+1}}{\partial \lambda_s}o_{js}\right] = O \cdot \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \sigma_{r+1}}{\partial \lambda_1}, \ldots, \frac{\partial \sigma_{r+1}}{\partial \lambda_n}\right) \cdot O^{-1},$$

donde

$$O^{-1} \cdot \left[\frac{\partial S_{r+1}}{\partial A_{ij}}\right] \cdot O = \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \sigma_{r+1}}{\partial \lambda_1}, \ldots, \frac{\partial \sigma_{r+1}}{\partial \lambda_n}\right) = P_r(O^{-1}AO).$$

Resta mostrar que $P_r[O^{-1}AO] = O^{-1}P_r[A]O$. Novamente o caso $r = 0$ é trivial. Supondo que a igualdade é válida para $r < n$, temos que

$$\begin{aligned}
O^{-1}P_{r+1}[A]O &= O^{-1}\left(S_{r+1}I - AP_r[A]\right)O \\
&= S_{r+1}I - O^{-1}AP_r[A]O \\
&= S_{r+1}I - AP_r[O^{-1}AO] \\
&= P_{r+1}[O^{-1}AO],
\end{aligned}$$

e a proposição está demonstrada. □

O corolário seguinte nos fornece uma expressão para o operador de Newton que será bastante útil no próximo capítulo.

Corolário 2.1 *Se $A = [A_{ij}]$ é a matriz do operador de forma com respeito a uma base $\mathcal{B} = \{e_i\}$ do espaço tangente T_pM, então a matriz do operador de Newton associado, $P_r[A]$, com respeito a esta mesma base, tem entradas*

$$P_r[A]_{ij} = \frac{1}{r!} \sum_{i_k, j_k = 1}^{n} \delta^{i_1 \cdots i_r i}_{j_1 \cdots j_r j} A_{i_1 j_1} \cdots A_{i_r j_r}, \tag{2.3}$$

onde $\delta^{i_1 \cdots i_r i}_{j_1 \cdots j_r j}$ é o delta de Kronecker generalizado.

Demonstração: Como $P_r[A] = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j S_{r-j} A^j$ com os coeficientes S_{r-j} não dependendo da base escolhida para T_pM, basta verificar a igualdade acima para uma base $\mathcal{B}$ que diagonalize A. Assim, seja $\mathcal{B} = \{e_\alpha\}$ tal que $Ae_\alpha = \lambda_\alpha e_\alpha$.

Pela proposição anterior, nesta base escolhida,

$$P_r[A] = \operatorname{diag}\left(\frac{\partial \sigma_{r+1}}{\partial \lambda_1}, \ldots, \frac{\partial \sigma_{r+1}}{\partial \lambda_n} \right),$$

donde $P_r[A]^i_j = \delta^i_j \frac{\partial \sigma_{r+1}}{\partial \lambda_i} = \delta^i_j \, \sigma_r(\hat{\lambda}_i)$. Logo,

$$\begin{aligned}
P_r[A]_{ij} &= \delta^i_j \sum_{\substack{1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n \\ j_1, \ldots, j_r \neq i}} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_r} \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{j_1, \ldots, j_r \neq i} \delta^{j_1 \cdots j_r i}_{j_1 \cdots j_r j} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_r} \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_r, \\ j_1, \ldots, j_r = 1}}^{n} \delta^{j_1 \cdots j_r i}_{j_1 \cdots j_r j} \delta^{i_1}_{j_1} \cdots \delta^{i_r}_{j_r} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_r} \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_r, \\ j_1, \ldots, j_r = 1}}^{n} \delta^{j_1 \cdots j_r i}_{j_1 \cdots j_r j} A_{i_1 j_1} \cdots A_{i_r j_r},
\end{aligned}$$

e isto conclui a afirmação. □

2.3 O Operador L_r

Definição 2.3 *Seja M uma hipersuperfície r-mínima. Definimos o operador diferencial linear de segunda ordem $L_r : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$, como*

$$L_r(\varphi) = \operatorname{div}(P_r[A] \nabla \varphi),$$

onde div *e* ∇ *são os operadores divergente e grandiente intrínsecos de M, respectivamente.*

Observamos que para $r = 0$, o operador L_0 é simplesmente o operador de Laplace-Bleltrami,

$$L_0(\varphi) = \mathrm{div}(P_0[A]\nabla\varphi) = \mathrm{div}(\nabla\varphi) = \Delta\varphi.$$

O lema a seguir deve-se a Reilly, e ilustra uma das boas propriedades do operador L_r. Mais precisamente, este lema generaliza o fato de que uma função altura, restrita a uma hipersuperfície mínima, é harmônica.

Proposição 2.3 *[6] Se M é $r-$mínima e φ é uma componente do seu vetor posição, então φ satisfaz $L_r(\varphi) = 0$.*

Como observado na Introdução, pode-se verificar que L_r é a parte principal do operador linearizado associado à $(r+1)$-curvatura média. Assim, na formulação e demonstração do Princípio de Tangência para hipersuperfícies r-mínimas é crucial determinar onde o operador L_r é elíptico. Esta questão foi completamente elucidada por J. Hounie e M. L. Leite, que demonstraram o seguinte resultado.

Proposição 2.4 *[2],[3] Se M é r-mínima, $1 \leq r \leq n-2$, então o operador L_r é elíptico em $p \in M$ se, e somente se, $S_{r+2}(p) \neq 0$. Equivalentemente,* $\mathrm{posto}(A_p) \geq r+1$.

Definição 2.4 *Diremos que M r-mínima é elíptica se L_r é elíptico em todo ponto de M.*

Neste contexto, Hounie e Leite [3] estabeleceram um Princípio de Tangência, em versão geométrica, para a $r+1$-curvatura média, conforme o teorema a seguir.

Teorema 2.1 *Valem as proposições a seguir:*

(a) (Ponto Interior) Sejam M e M' hipersuperfícies orientadas em $\mathbb{R}^{n+1}$ satisfazendo $S_{r+1}(M) \leq 0 \leq S_{r+1}(M')$, para algum r, $1 \leq r < n-1$. Suponha que M e M' têm o mesmo vetor normal num ponto de tangência p, com $S_j(M') \geq 0$, $j = 1, \ldots, r$. Se M ou M' é elíptica então M não pode permanecer sobre M' numa vizinhança de p, a não ser que as hipersuperfícies coincidam localmente.

(b) (Ponto de Bordo) Sejam M e M' hipersuperfícies orientadas em $\mathbb{R}^{n+1}$ com bordos ∂M e $\partial M'$, respectivamente, satisfazendo $S_{r+1}(M) \leq 0 \leq S_{r+1}(M')$, para algum r, $1 \leq r < n-1$. Suponha que M e M' bem como os seus bordos são tangentes em $p \in \partial M \cap \partial M'$, tendo o mesmo vetor normal no ponto de tangência, com $S_j(M') \geq 0$, $j = 1, \ldots, r$. Se M ou M' é elíptica então M não pode permanecer sobre M' em uma vizinhança de p, a não ser que as hipersuperfícies coincidam localmente.

De posse destes resultados, conclui-se a versão geométrica do Teorema 4.1 em [2], conforme observado em [3]. Para enunciar este resultado, precisamos introduzir mais notação. Seja $B^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma subvariedade compacta, mergulhada, sem fronteira, de classe C^2 (não necessariamente conexa) e M uma subvariedade mergulhada com $\partial M = B$. Consideremos $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ com coordenadas $X = (x, x_{n+1})$ e $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ a projeção ortogonal $X \mapsto x$. Seja ainda $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira conexa. Mais ainda, se $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $t \in \mathbb{R}$ é fixado, então pomos $\Sigma_{t^\pm} = \{X \in \Sigma; \pm x_{n+1} \geq \pm t\}$ e $\Sigma_t^* = \{(x, 2t - x_{n+1}); (x, x_{n+1} \in \Sigma_t)\}$, o refletido de Σ_t relativamente a $\Pi_t = \{(x, t); x \in \mathbb{R}^n\}$; note que $\Pi_0 = \mathbb{R}^n$. Além disso, se $A, B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ diremos que $A \geq B$ se para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ tem-se $x_{n+1} \geq x'_{n+1}$ para quaisquer $(x, x_{n+1}) \in A$, $(x, x'_{n+1}) \in B$. Finalmente, diremos que uma subvariedade S, de classe C^2, possui *inclinação localmente limitada* se seus planos tangentes não contém o vetor vertical $(0, 1)$.

Teorema 2.2 *Sejam B e Ω como acima e suponha que: i) $B \subset \partial\Omega \times \mathbb{R}$; ii) B_{0^+} é gráfico de inclinação localmente limitada com $B_{0^+}^* \geq B_{0^-}$; iii)M é r-mínima, elíptica e com seus pontos interiores contidos em $\Omega \times \mathbb{R}$ e iv) $S_j(M) \geq 0$, para $j = 1, \ldots, r$. Então, M_{0^+} é gráfico com inclinação localmente limitada satisfazendo $M_{0^+}^* \geq M_{0^-}$.*

Capítulo 3

O Fluxo de Fins r-mínimos Regulares

3.1 Hipersuperfícies Rotacionais $r-$Mínimas

Nesta seção, descreveremos as hipersuperfícies rotacionais em $\mathbb{R}^{n+1}$ que são $r-$mínimas; veja [4]. Para tanto, considere α uma curva no plano x_1x_{n+1} que é gráfico de uma função positiva $x_{n+1} = f(x_1)$. Girando a curva α em torno do eixo x_1 obtemos uma hipersuperfície rotacional M, de dimensão n, que pode ser parametrizada localmente por

$$X(t,\theta) = (t, f(t)\theta),$$

onde $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^n)$ é uma parametrização local de $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, e $\mathbb{R}^n$ é visto como o hiperplano vertical de $\mathbb{R}^{n+1}$ que passa pela origem e é perpendicular ao eixo x_1.

Desta forma, os coeficientes da métrica de M são

$$\begin{aligned}
g_{tt} &= \langle X_t, X_t\rangle \\
&= \langle (1, f'(t)\theta), (1, f'(t)\theta)\rangle \\
&= 1 + [f'(t)]^2, \\
g_{ti} &= \langle X_t, X_i\rangle \\
&= \langle (1, f'(t)\theta), (0, f(t)\theta_i)\rangle \\
&= 0, \\
g_{ij} &= \langle X_t, X_i\rangle \\
&= \langle (0, f(t)\theta_i), (0, f(t)\theta_j)\rangle \\
&= f^2(t)\sigma_{ij},
\end{aligned}$$

onde σ_{ij} são os coeficientes da métrica canônica de $\mathbb{S}^{n-1}$ na parametrização θ. Portanto, a matriz da primeira forma fundamental de M é

$$I = \begin{pmatrix} 1 + f'^2 & 0 \\ 0 & f^2\sigma_{ij} \end{pmatrix}.$$

Tomaremos

$$N(t,\theta) = \frac{1}{W}(f'(t), -\theta),$$

onde $W = \sqrt{1 + f'^2}$, como campo normal unitário a M. Com esta orientação a segunda forma fundamental de M tem coeficientes

$$\begin{aligned} \langle N, X_{tt}\rangle &= \frac{1}{W}\langle (f'(t), -\theta), (0, f''(t)\theta)\rangle \\ &= \frac{-f''}{W}, \\ \langle N, X_{ti}\rangle &= \frac{1}{W}\langle (f'(t), -\theta), (0, f'(t)\theta_i)\rangle \\ &= 0, \\ \langle N, X_{ij}\rangle &= \langle \frac{1}{W}(f'(t), -\theta), (0, f(t)\theta_{ij})\rangle \\ &= \frac{-f}{W}\langle \theta, \theta_{ij}\rangle \\ &= \frac{f}{W}\sigma_{ij}, \end{aligned}$$

e sua matriz é

$$II = \frac{1}{W}\begin{pmatrix} -f'' & 0 \\ 0 & f\sigma_{ij} \end{pmatrix}.$$

Portanto, o operador de forma é

$$I^{-1}II = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

e as curvaturas principais de M são

$$\lambda_1 = \tfrac{-f''}{(1+f'^2)^{3/2}},\ \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \tfrac{1}{f(1+f'^2)^{1/2}}.$$

Segue-se que a $(r+1)-$ésima curvatura média de M é

$$\begin{aligned} S_{r+1} &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_{r+1} \le n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{r+1}} \\ &= \binom{n-1}{r+1}\left(\frac{1}{f(1+f'^2)^{1/2}}\right)^{r+1} - \binom{n-1}{r}\left(\frac{1}{f(1+f'^2)^{1/2}}\right)^{r} \frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

de modo que, se M é $r-$mínima, obtemos a equação diferencial para f:

$$ff'' = \left(\frac{n}{r+1} - 1\right)(1 + f'^2). \tag{3.1}$$

Mais geralmente, se $k \neq r+1$,, tem-se

$$\begin{aligned}
S_k &= \binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{f(1+f'^2)^{1/2}}\right)^k + \\
&+ \binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{f(1+f'^2)^{1/2}}\right)^{k-1}\frac{1}{(1+f'^2)^{3/2}}\left(1 - \frac{n}{r+1}\right)\frac{1+f'^2}{f} \\
&= \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k}\left(1 - \frac{n}{r+1}\right)\right]\left(\frac{1}{f(1+f'^2)^{1/2}}\right)^k \\
&= \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k}\frac{n}{r+1}\right]\left(\frac{1}{f(1+f'^2)^{1/2}}\right)^k \\
&= \left[\binom{n}{k} - \binom{n}{k}\frac{k}{r+1}\right]\left(\frac{1}{f(1+f'^2)^{1/2}}\right)^k \\
&= \left(1 - \frac{k}{r+1}\right)\binom{n}{k}\left(\frac{1}{f(1+f'^2)^{1/2}}\right)^k.
\end{aligned}$$

Temos assim,

Proposição 3.1 *Nas condições anteriores, se $k < r+1$ então*

$$S_{r+2} < 0 < S_k. \tag{3.2}$$

Em particular, hipersuperfícies rotacionais r-mínimas são elípticas.

Note que, quando $n = r+1$, (3.1) reduz-se a $ff'' = 0$. Neste caso as soluções são da forma $f(x_1) = ax_1 + b$.

Informações mais precisas sobre o comportamento global das soluções maximais de (3.1), com valores iniciais $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$, foram obtidas por Hounie e Leite.

Proposição 3.2 *([4]) Nas condições acima, se f é a solução maximal de (3.1) determinada por $f(0) = \rho_0 > 0$ e $f'(0) = 0$ então é par, positiva, convexa e seu crescimento depende da razão $\frac{n}{2(r+1)}$ da seguinte forma:*

(i) *Se $n \leq 2(r+1)$, então f é definida em $(-\infty, +\infty)$ e tem crescimento superlinear, com $f(x_1) = O(|x_1|^{\frac{r+1}{2(r+1)-n}})$, quando $|x_1| \to \infty$.*

(ii) *Se $n > 2(r+1)$, então f explode em um intervalo finito $(-L, L)$, onde $L \nearrow \infty$ quando $\frac{n}{2(r+1)} \searrow 2$.*

Multiplicando ambos os lados de (3.1) por $2f'$ e integrando chegamos a

$$\frac{2f'f''}{1+f'^2} = q\frac{f'}{f},$$

ou seja,

$$\frac{f^q}{1+f'^2} = K,$$

para alguma constante $K \in \mathbb{R}$, onde $q = q_{n,r} = 2\left(\frac{n}{r+1} - 1\right)$. Se $f(0) = \rho_0$ e $f'(0) = 0$, então $K = \rho_0^q$ e

$$f' = \frac{\sqrt{f^q - \rho_0^q}}{\sqrt{\rho_0^q}}$$

Pela Proposição 3.2, f é invertível e a sua inversa $x_1 = f^{-1}(x_{n+1}) = u(x_{n+1})$ satisfaz

$$u' = \frac{\sqrt{\rho_0^q}}{\sqrt{x^q - \rho_0^q}}, \quad u(\rho_0) = 0,$$

e integrando obtemos

$$\frac{u(x)}{\sqrt{\rho_0^q}} = \int_{\rho_0}^{x} \frac{1}{\sqrt{t^q - \rho_0^q}}dt,$$

o que fornece uma parametrização da hipersuperfície rotacional r-mínima M como gráfico radial, a saber,

$$\frac{u(|x|)}{\sqrt{\rho_0^q}} = \int_{\rho_0}^{|x|} \frac{1}{\sqrt{t^q - \rho_0^q}}dt, \quad q = 2\left(\frac{n}{r+1} - 1\right). \tag{3.3}$$

A partir desta expressão, é possível obter uma expansão assimptótica para $u = u(x)$ quando $|x| \to +\infty$, pelo menos no caso especial em que $1 \leq q < 2$ ou, equivalentemente, $\frac{3}{2}(r+1) \leq n < 2(r+1)$.

Proposição 3.3 *Seja $u(x)$ definida por (3.3) com $1 \leq q < 2$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Quando $|x| \to \infty$, $u(x - x_0)$ tem a seguinte expansão:*

$$\frac{u(|x - x_0|)}{\sqrt{\rho_0^q}} = A + \frac{2}{2-q}|x|^{1-\frac{q}{2}} - \frac{x_0 \cdot x}{|x|^{1+\frac{q}{2}}} + \frac{\rho_0^q}{2-3q}|x|^{1-\frac{3q}{2}} + O\left(|x|^{-1-\frac{q}{2}}\right),$$

ou equivalentemente,

$$\frac{u(x-x_0)}{\sqrt{\rho_0^q}} = A + \frac{2}{2-q}|x|^{2-\frac{n}{r+1}} - \frac{x_0\cdot x}{|x|^{\frac{n}{r+1}}} + \frac{\rho_0^q}{2-3q}|x|^{4-\frac{3n}{r+1}} + O\left(|x|^{-\frac{n}{r+1}}\right)$$

Antes de começarmos a demonstração da proposição relembremos algumas propriedades da notação assimptótica Grande-O. Dada uma função real positiva $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, definimos

$O(f) = \{g : \exists M > 0$ tal que $g(x) \le M\cdot f(x)\ \ \forall\ \ x$ com $|x|$ suficientemente grande$\}$.

Segue facilmente da definição que

1. Se $g_1 \in O(f_1)$ e $g_2 \in O(f_2)$, então $g_1 + g_2 \in O(\max\{f_1, f_2\})$;
2. se $f_1(x) \le f_2(x)$ para x suficientemente grande, então $O(f_1) \subset O(f_2)$;
3. $O(f_1)\cdot O(f_2) = O(f_1\cdot f_2)$, onde

$$O(f_1)\cdot O(f_2) = \{g_1\cdot g_2 : g_1 \in O(f_1), g_2 \in O(f_2)\}.$$

Voltemos à demonstração da Proposição 3.3.

Demonstração: Expandindo o integrando em (3.3) obtemos

$$\begin{aligned}\left(t^q-\rho_0^q\right)^{-\frac{1}{2}} &= t^{-\frac{q}{2}}\left[1-\left(\frac{\rho_0}{t}\right)^q\right]^{-\frac{1}{2}}\\ &= t^{-\frac{q}{2}}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{t}\right)^q + O\left(t^{-2q}\right)\right]\\ &= t^{-\frac{q}{2}} + \frac{1}{2}\rho_0^q\, t^{-\frac{3q}{2}} + O\left(t^{-\frac{5q}{2}}\right),\end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos que

$$\frac{1}{\sqrt{1-s}} = 1 + \frac{1}{2}s + O\left(s^2\right),$$

com $s = (\frac{\rho_0}{t})^q \to 0$ quando $t\to\infty$. Desta forma,

$$\begin{aligned}\frac{u(|x|)}{\sqrt{\rho_0^q}} &= \int_{\rho_0}^{|x|} t^{-\frac{q}{2}}dt + \frac{1}{2}\rho_0^q\int_{\rho_0}^{|x|} t^{-\frac{3q}{2}}dt + \int_{\rho_0}^{|x|} O\left(t^{-\frac{5q}{2}}\right)dt\\ &= A + \frac{2}{2-q}|x|^{1-\frac{q}{2}} + \frac{1}{2}\rho_0^q\frac{2}{2-3q}|x|^{1-\frac{3q}{2}} + O\left(|x|^{1-\frac{5q}{2}}\right).\end{aligned}$$

Assim, se $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{u(|x-x_0|)}{\sqrt{\rho_0^q}} = A + \frac{2}{2-q}|x-x_0|^{1-\frac{q}{2}} + \frac{1}{2}\rho_0^q\frac{2}{2-3q}|x-x_0|^{1-\frac{3q}{2}} + O\left(|x|^{1-\frac{5q}{2}}\right). \quad (3.4)$$

Precisaremos do lema a seguir.

Lema 3.1 *Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{R}$, vale a seguinte expansão:*

$$|x-x_0|^k = |x|^k\left[1 - k\frac{x_0 \cdot x}{|x|^2} + O\left(|x|^{-2}\right)\right].$$

Demonstração: Temos

$$|x-x_0|^2 = |x|^2 - 2x_0\cdot x + |x_0|^2 = |x|^2\left(1 - 2\frac{x_0\cdot x}{|x|^2} + \frac{|x_0|^2}{|x|^2}\right),$$

donde

$$|x-x_0| = |x|\left(1 - 2\frac{x_0\cdot x}{|x|^2} + \frac{|x_0|^2}{|x|^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

ou seja,

$$|x-x_0|^k = |x|^k\left[1 - 2\frac{x_0\cdot x}{|x|^2} + O\left(|x|^{-2}\right)\right]^{\frac{k}{2}}.$$

Por outro lado, $(1-s)^k = 1 - ks + O\left(s^2\right), k \in \mathbb{R}$, donde

$$|x-x_0|^k = |x|^k\left[1 - k\frac{x_0\cdot x}{|x|^2} + O\left(|x|^{-2}\right)\right],$$

conforme queríamos. □

Continuamos com a demonstração da Proposição 3.3 aplicando o lema anterior com $k = 1 - \frac{q}{2}$ e $k = 1 - \frac{3q}{2}$ em (3.4), de modo a obter

$$\begin{aligned}
\frac{u(|x-x_0|)}{\sqrt{\rho_0^q}} &= A + \frac{2}{2-q}|x|^{1-\frac{q}{2}}\left[1 - \left(1-\frac{q}{2}\right)\frac{x_0\cdot x}{|x|^2} + O(|x|^{-2})\right] + \\
&+ \frac{1}{2}\rho_0^q\frac{2}{2-3q}|x|^{1-\frac{3q}{2}}\left[1 - \left(1-\frac{3q}{2}\right)\frac{x_0\cdot x}{|x|^2} + O(|x|^{-2})\right] + O(|x|^{1-\frac{5q}{2}}) \\
&= A + \frac{2}{2-q}|x|^{1-\frac{q}{2}} - \frac{x_0\cdot x}{|x|^{1+\frac{q}{2}}} + O\left(|x|^{-1-\frac{q}{2}}\right) + \\
&+ \frac{\rho_0^q}{2-3q}|x|^{1-\frac{3q}{2}} - \frac{1}{2}\rho_0^q\frac{x_0\cdot x}{|x|^{1+\frac{3q}{2}}} + O\left(|x|^{-1-\frac{3q}{2}}\right) + O\left(|x|^{1-\frac{5q}{2}}\right). \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Observe agora que

$$\left|\frac{1}{2}\rho_0^q \frac{x_0 \cdot x}{|x|^{1+\frac{3q}{2}}}\right| \leq C|x|^{\frac{-3q}{2}},$$

e $O\left(|x|^{\frac{-3q}{2}}\right) \subset O\left(|x|^{-1-\frac{q}{2}}\right)$, pois $\frac{-3q}{2} \leq -1 - \frac{q}{2}$, que equivale à hipótese $q \geq 1$, e pela mesma razão,

$$O\left(|x|^{-1-\frac{3q}{2}}\right) \subset O\left(|x|^{-\frac{3q}{2}}\right) \subset O\left(|x|^{-1-\frac{q}{2}}\right), \qquad O\left(|x|^{1-\frac{5q}{2}}\right) \subset O\left(|x|^{-1-\frac{q}{2}}\right).$$

Assim, (3.5) torna-se

$$\frac{u(|x - x_0|)}{\sqrt{\rho_0^q}} = A + \frac{2}{2-q}|x|^{1-\frac{q}{2}} - \frac{x_0 \cdot x}{|x|^{1+\frac{q}{2}}} + \frac{\rho_0^q}{2-3q}|x|^{1-\frac{3q}{2}} + O\left(|x|^{-1-\frac{q}{2}}\right),$$

o que conclui a demonstração. □

Em vista da expressão explícita de uma hipersuperfície rotacional $r-$mínima em $\mathbb{R}^{n+1}$ obtida acima, é natural considerarmos fins de uma hipersuperfície r-mínima tendo o mesmo comportamento assimptótico que um fim rotacional. Assim, a expansão acima obtida motiva a seguinte definição.

Definição 3.1 *Um fim de uma hipersuperfície $r-$mínima M em $\mathbb{R}^{n+1}$, $\frac{3}{2}(r+1) \leq n < 2(r+1)$, é* regular *com razão de crescimento $a \neq 0$ se pode ser escrito como gráfico de uma função $u(x)$ definida no exterior de uma bola limitada em algum hiperplano Π de $\mathbb{R}^n$, tal que para $x \in \Pi$, com $|x|$ grande, vale a expansão assimptótica*

$$u(x) = \frac{a}{|x|^{\frac{n}{r+1}-2}} + a_1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j \cdot x_j}{|x|^{\frac{n}{r+1}}} + \frac{a_2}{|x|^{\frac{3n}{r+1}-4}} + O(|x|^{-\frac{n}{r+1}}), \tag{3.6}$$

onde a, a_1, a_2, c_j são constantes reais.

3.2 O Tensor de Newton de Fins Regulares

Nesta seção efetuaremos o cálculo do tensor de Newton de um fim r-mínimo como na Definição 3.1.

Proposição 3.4 *Seja M^n um fim $r-$mínimo regular. Então,*

$$P_r[A]_{ij} = \frac{c_r a^r}{|x|^{n-\frac{q}{2}-1}}\left[[\omega_0]_{ij} - \frac{n}{r+1}\frac{1}{|x|^2}[\omega_1]_{ij}\right] + O\left(|x|^{-n+\frac{q}{2}}\right),$$

onde

$$c_r = \frac{1}{r!}\binom{n}{r}\left(2 - \frac{n}{r+1}\right)^r, \qquad [\omega_0]_{ij} = \binom{n}{r}\delta^i_j,$$

e

$$[\omega_1]_{ij} = \binom{n}{r-1} r\left[\delta^i_j\left(|x|^2 - x_i^2\right) - \left(1 - \delta^i_j\right)x_i x_j\right].$$

Demonstração: Para simplificar os cálculos, escreveremos

$$u(x) = a|x|^{2-\frac{n}{r+1}} + \varphi(x),$$

de modo que as derivadas de u satisfazem

$$u_i(x) = \left(2 - \frac{n}{r+1}\right)a\frac{x_i}{|x|^{\frac{n}{r+1}}} + \varphi_i(x)$$

e

$$u_{ij}(x) = \left(2 - \frac{n}{r+1}\right)\frac{a}{|x|^{\frac{n}{r+1}}}\left(\delta^i_j - \frac{n}{r+1}\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right) + \varphi_{ij}.$$

onde as primeiras e segundas derivadas de φ estão em $O(|x|^{-\frac{n}{r+1}})$ e $O(|x|^{-\frac{n}{r+1}-1})$, respectivamente.

Conforme já sabemos, o operador de forma é $[A_{ij}] = [\delta^i_j + u_i u_j]^{-1}\left[\frac{u_{ij}}{W}\right]$ onde $W = \sqrt{1 + |\nabla^0 u|^2}$. Agora, usando que $[\delta^i_j + u_i u_j]^{-1} = \left[\delta^i_j - \frac{u_i u_j}{W^2}\right]$, obtemos

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \left[\delta^i_j - \frac{u_i u_j}{W^2}\right]\cdot\left[\frac{u_{ij}}{W}\right] \\ &= \frac{u_{ij}}{W} - \frac{1}{W^3}\left[u_i u_j \cdot u_{ij}\right] \\ &= u_{ij} + O(|x|^{-\frac{3n}{r+1}+2}), \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos que $W^{-1} = 1 - \frac{1}{2}|\nabla^0 u|^2 + O(|\nabla^0 u|^4) = 1 + O(|x|^{-2\frac{n}{r+1}+2})$.

Podemos agora calcular $P_r[A]$ usando a expressão (2.3), a saber,

$$P_r[A]_{ij} = \frac{1}{r!}\sum_{i_\alpha, j_\alpha = 1}^{n} \delta^{i_1\cdots i_r i}_{j_1\cdots j_r j} A_{i_1 j_1}\cdots A_{i_r j_r}. \tag{3.7}$$

Calculemos incialmente o produto dos $A_{i_\alpha j_\alpha}, \alpha = 1, \ldots, r$, separadamente. Temos,

$$\begin{aligned}
\prod_{\alpha=1}^{r} A_{i_\alpha j_\alpha} &= \left(u_{i_1 j_1} + O(|x|^{-\frac{3n}{r+1}+2})\right) \cdots \left(u_{i_r j_r} + O(|x|^{-\frac{3n}{r+1}+2})\right) \\
&= \prod_{\alpha=1}^{r} u_{i_\alpha j_\alpha} + \sum_{k=1}^{r} \left[u_{i_1 j_1} \cdots u_{i_{k-1} j_{k-1}} O(|x|^{-\frac{3n}{r+1}+2}) u_{i_{k+1} j_{k+1}} \cdots u_{i_r j_r}\right] + \cdots + \\
&+ \left[O(|x|^{-\frac{3n}{r+1}+2})\right]^{r-1} \sum_{k=1}^{r} u_{i_k j_k} + \left[O(|x|^{-\frac{3n}{r+1}+2})\right]^{r}.
\end{aligned}$$

Como $u_{i_k j_k} \in O(|x|^{-\frac{n}{r+1}})$ e

$$-\frac{3n}{r+1} + 2 = -\frac{n}{r+1} - q$$

temos

$$\begin{aligned}
\prod_{\alpha=1}^{r} A_{i_\alpha j_\alpha} &= \prod_{\alpha=1}^{r} u_{i_\alpha j_\alpha} + \left(O(|x|^{-\frac{n}{r+1}})\right)^{r} \cdot O(|x|^{-q}) + \cdots + \\
&+ \left(O(|x|^{-\frac{n}{r+1}})\right)^{r} \cdot (O(|x|^{-q}))^{r-1} + \left(O(|x|^{-\frac{n}{r+1}})\right)^{r} \cdot (O(|x|^{-q}))^{r}
\end{aligned}$$

Observando que

$$(O(|x|^{-q}))^{r} \subset (O(|x|^{-q}))^{r-1} \subset \cdots \subset O(|x|^{-q}),$$

para $|x|$ grande, concluímos que

$$\begin{aligned}
A_{i_1 j_1} \cdots A_{i_r j_r} &= u_{i_1 j_1} \cdots u_{i_r j_r} + \left(O(|x|^{-\frac{n}{r+1}})\right)^{r} \cdot O(|x|^{-q}) \\
&= u_{i_1 j_1} \cdots u_{i_r j_r} + O\left(|x|^{-\frac{n}{r+1}r-q}\right)
\end{aligned}$$

Mas

$$-\frac{n}{r+1}r - q = \frac{-n(r+1-1)}{r+1} - q = -n + \frac{n}{r+1} - q = -n - \frac{q}{2} + 1,$$

logo,

$$A_{i_1 j_1} \cdots A_{i_r j_r} = u_{i_1 j_1} \cdots u_{i_r j_r} + O(|x|^{-n-\frac{q}{2}+1}).$$

Substituindo em (3.9), obtemos

$$P_r[A]^i_j = \frac{1}{r!} \sum_{i_\alpha, j_\alpha = 1}^{n} \delta^{i_1 \cdots i_r i}_{j_1 \cdots j_r j} u_{i_1 j_1} \cdots u_{i_r j_r} + O(|x|^{-n-\frac{q}{2}+1}). \qquad (3.8)$$

Devemos então calcular o produto das segundas derivadas $u_{i_\alpha j_\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots, n$,

Para facilitar os cálculos, para cada $\alpha = 1, \ldots, n$, escreveremos $u_{i_\alpha j_\alpha} = \psi_{i_\alpha j_\alpha} + \varphi_{i_\alpha j_\alpha}$, onde

$$\psi_{i_\alpha j_\alpha} = \left(2 - \frac{n}{r+1}\right) \frac{a}{|x|^{\frac{n}{r+1}}} \left(\delta^{i_\alpha}_{j_\alpha} - \frac{n}{r+1} \frac{x_{i_\alpha} x_{j_\alpha}}{|x|^2}\right),$$

e os $\varphi_{i_\alpha j_\alpha}$ são como antes. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\prod_{\alpha=1}^{r} u_{i_\alpha j_\alpha} &= \left(\psi_{i_1 j_1} + \varphi_{i_1 j_1}\right) \cdots \left(\psi_{i_r j_r} + \varphi_{i_r j_r}\right) \\
&= \prod_{\alpha=1}^{r} \psi_{i_\alpha j_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{r} \psi_{i_1 j_1} \cdots \psi_{i_{\alpha-1} j_{\alpha-1}} \varphi_{i_\alpha j_\alpha} \psi_{i_{\alpha+1} j_{\alpha+1}} \cdots \psi_{i_r j_r} + \cdots + \prod_{\alpha=1}^{r} \varphi_{i_\alpha j_\alpha}
\end{aligned}$$

Mas, uma vez que $\psi_{i_\alpha j_\alpha} \in O\left(|x|^{-\frac{n}{r+1}}\right)$, e $\varphi_{i_\alpha j_\alpha} \in O\left(|x|^{-\frac{n}{r+1}-1}\right) = O\left(|x|^{-1}\right) \cdot O\left(|x|^{-\frac{n}{r+1}}\right)$, temos

$$\begin{aligned}
\prod_{\alpha=1}^{r} u_{i_\alpha j_\alpha} &= \prod_{\alpha=1}^{r} \psi_{i_\alpha j_\alpha} + O\left(|x|^{-\frac{n}{r+1}}\right)^r \cdot O\left(|x|^{-1}\right) + \cdots + O\left(|x|^{-\frac{n}{r+1}}\right)^r \cdot O\left(|x|^{-1}\right)^r \\
&= \prod_{\alpha=1}^{r} \psi_{i_\alpha j_\alpha} + O\left(|x|^{-\frac{n}{r+1}}\right)^r \cdot \left[O\left(|x|^{-1}\right) + \cdots + O\left(|x|^{-1}\right)^r\right] \\
&= \prod_{\alpha=1}^{r} \psi_{i_\alpha j_\alpha} + O\left(|x|^{-\frac{n}{r+1}}\right)^r O\left(|x|^{-1}\right),
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos que

$$\left(O\left(|x|^{-1}\right)\right)^r \subset \left(O\left(|x|^{-1}\right)\right)^{r-1} \subset \cdots \subset O\left(|x|^{-1}\right),$$

para $|x|$ grande. Além disso, como

$$-\frac{n}{r+1} r - 1 = \frac{-n(r+1-1)}{r+1} - 1 = -n + \frac{n}{r+1} - 1 = -n + \frac{q}{2},$$

segue que

$$\begin{aligned}
u_{i_1 j_1} \cdots u_{i_r j_r} &= \psi_{i_1 j_1} \cdots \psi_{i_r j_r} + O\left(|x|^{-n+\frac{q}{2}}\right) \\
&= \prod_{\alpha=1}^{r} \left(2 - \frac{n}{r+1}\right) \frac{a}{|x|^{\frac{n}{r+1}}} \left(\delta^{i_\alpha}_{j_\alpha} - \frac{n}{r+1} \frac{x_{i_\alpha} x_{j_\alpha}}{|x|^2}\right) + O\left(|x|^{-n+\frac{q}{2}}\right) \\
&= \left(2 - \frac{n}{r+1}\right)^r \frac{a^r}{|x|^{\frac{nr}{r+1}}} \prod_{\alpha=1}^{r} \left(\delta^{i_\alpha}_{j_\alpha} - \frac{n}{r+1} \frac{x_{i_\alpha} x_{j_\alpha}}{|x|^2}\right) + O\left(|x|^{-n+\frac{q}{2}}\right) \\
&= \left(2 - \frac{n}{r+1}\right)^r \frac{a^r}{|x|^{n-\frac{q}{2}-1}} \prod_{\alpha=1}^{r} \left(\delta^{i_\alpha}_{j_\alpha} - \frac{n}{r+1} \frac{x_{i_\alpha} x_{j_\alpha}}{|x|^2}\right) + O\left(|x|^{-n+\frac{q}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Substituindo a última igualdade em (3.8), obtemos

$$\begin{aligned}
P_r[A]_{ij} &= \frac{1}{r!}\left(2-\frac{n}{r+1}\right)^r \frac{a^r}{|x|^{n-\frac{q}{2}-1}} \sum_{i_\alpha,j_\alpha=1}^{n} \delta^{i_1\cdots i_r i}_{j_1\cdots j_r j} \prod_{k=1}^{r}\left(\delta^{i_k}_{j_k} - \frac{n}{r+1}\frac{x_{i_k}x_{j_k}}{|x|^2}\right) + \\
&+ O\left(|x|^{-n+\frac{q}{2}}\right) + O\left(|x|^{-n-\frac{q}{2}+1}\right) \\
&= \frac{1}{r!}\left(2-\frac{n}{r+1}\right)^r \frac{a^r}{|x|^{n-\frac{q}{2}-1}} \sum_{i_\alpha,j_\alpha=1}^{n} \delta^{i_1\cdots i_r i}_{j_1\cdots j_r j} \prod_{k=1}^{r}\left(\delta^{i_k}_{j_k} - \frac{n}{r+1}\frac{x_{i_k}x_{j_k}}{|x|^2}\right) + \\
&+ O\left(|x|^{-n+\frac{q}{2}}\right), \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

onde novamente usamos que $q \geq 1$.

Para concluir o cálculo de $P_r[A]_{ij}$ vamos precisar de um lema algébrico.

Lema 3.2 *Dado $C \in \mathbb{R}$, vale*

$$\sum_{i_\alpha,j_\alpha=1}^{n} \delta^{i_1\cdots i_r i}_{j_1\cdots j_r j} \prod_{k=1}^{r}\left(\delta^{i_k}_{j_k} - C\frac{x_{i_k}x_{j_k}}{|x|^2}\right) = [\omega_0]_{ij} - \frac{C}{|x|^2}[\omega_1]_{ij},$$

onde

$$[\omega_0]_{ij} = \binom{n}{r}\delta^i_j, \qquad [\omega_1]_{ij} = \binom{n}{r-1} r\left[\delta^i_j\left(|x|^2 - x_i^2\right) - \left(1-\delta^i_j\right)x_i x_j\right].$$

Demonstração: Seja

$$\omega_{ij} = \sum_{i_\alpha,j_\alpha=1}^{n} \delta^{i_1\cdots i_r i}_{j_1\cdots j_r j} \prod_{k=1}^{r}\left(\delta^{i_k}_{j_k} - C\frac{x_{i_k}x_{j_k}}{|x|^2}\right).$$

Então

$$
\begin{aligned}
\omega_{ij} &= \sum_{i_\alpha, j_\alpha=1}^{n} \delta^{i_1\cdots i_r i}_{j_1\cdots j_r j} \left(\delta^{i_1}_{j_1} \cdots \delta^{i_r}_{j_r} - \frac{C}{|x|^2} \sum_{k=1}^{r} \delta^{i_1}_{j_1} \cdots x_{i_k} x_{j_k} \cdots \delta^{i_r}_{j_r} + \right. \\
&+ \left. \frac{C^2}{|x|^4} \sum_{1\leq k<l\leq r} \delta^{i_1}_{j_1} \cdots x_{i_k} x_{j_k} \cdots x_{i_l} x_{j_l} \cdots \delta^{i_r}_{j_r} + \cdots + (-1)^{r+1} \frac{C^r}{|x|^{2r}} x_{i_1} x_{j_1} \cdots x_{i_r} x_{j_r} \right) \\
&= \underbrace{\sum_{i_\alpha, j_\alpha=1}^{n} \delta^{i_1\cdots i_r i}_{j_1\cdots j_r j}\, \delta^{i_1}_{j_1} \cdots \delta^{i_r}_{j_r}}_{[\widetilde{\omega_0}]_{ij}} - \frac{C}{|x|^2} \underbrace{\sum_{i_\alpha, j_\alpha=1}^{n} \delta^{i_1\cdots i_r i}_{j_1\cdots j_r j} \sum_{k=1}^{r} \delta^{i_1}_{j_1} \cdots x_{i_k} x_{j_k} \cdots \delta^{i_r}_{j_r}}_{[\widetilde{\omega_1}]_{ij}} + \\
&+ \frac{C^2}{|x|^4} \underbrace{\sum_{i_\alpha, j_\alpha=1}^{n} \delta^{i_1\cdots i_r i}_{j_1\cdots j_r j} \sum_{1\leq k<l\leq r} \delta^{i_1}_{j_1} \cdots x_{i_k} x_{j_k} \cdots x_{i_l} x_{j_l} \cdots \delta^{i_r}_{j_r}}_{[\widetilde{\omega_2}]_{ij}} + \cdots + \\
&+ (-1)^{r+1} \frac{C^r}{|x|^{2r}} \underbrace{\sum_{i_\alpha, j_\alpha=1}^{n} \delta^{i_1\cdots i_r i}_{j_1\cdots j_r j} x_{i_1} x_{j_1} \cdots x_{i_r} x_{j_r}}_{[\widetilde{\omega_r}]_{ij}}. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

Vamos calcular cada somatório separadamente. Temos

$$
[\widetilde{\omega_0}]_{ij} = \sum_{i_\alpha, j_\alpha=1}^{n} \delta^{i_1\cdots i_r i}_{j_1\cdots j_r j}\, \delta^{i_1}_{j_1} \cdots \delta^{i_r}_{j_r} = \sum_{i_\alpha=1}^{n} \delta^{i_1\cdots i_r i}_{i_1\cdots i_r j},
$$

e

$$
[\widetilde{\omega_0}]_{ij} = \binom{n}{r} \delta^i_j, \qquad (3.11)
$$

onde a última igualdade segue do fato que existem exatamente $\binom{n}{r}$ escolhas para $i_1 \cdots i_r$ tais que $\delta^{i_1\cdots i_r i}_{i_1\cdots i_r j}$ é não-nulo. Mais ainda,

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{\omega_1}]_{ij} &= \sum_{i_\alpha, j_\alpha=1}^{n} \delta^{i_1\cdots i_r i}_{j_1\cdots j_r j} \sum_{k=1}^{r} \delta^{i_1}_{j_1} \cdots x_{i_k} x_{j_k} \cdots \delta^{i_r}_{j_r} \\
&= \sum_{k=1}^{r} \sum_{i_\alpha, j_\alpha=1}^{n} \delta^{i_1\cdots i_k \cdots i_r i}_{i_1\cdots j_k \cdots i_r j} x_{i_k} x_{j_k} \\
&= \binom{n}{r-1} \sum_{k=1}^{r} \sum_{i_k, j_k=1}^{n} \delta^{i_k i}_{j_k j} x_{i_k} x_{j_k}.
\end{aligned}
$$

Vamos dividir em dois casos:

1.° Caso: $i = j$

Neste caso, para que $\delta^{i_k i}_{j_k i}$ seja não-nulo, devemos ter $i_k = j_k$, porém, com $i_k \neq i$. Assim,

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{\omega_1}]_{ii} &= \binom{n}{r-1}\sum_{k=1}^{r}\sum_{i_k=1;i_k\neq i}^{n}\delta^{i_k i}_{i_k i}x_{i_k}^2\\
&= \binom{n}{r-1}r\left[x_1^2+\cdots+x_{i-1}^2+x_{i+1}^2+\cdots+x_n^2\right]\\
&= \binom{n}{r-1}r\left[|x|^2-x_i^2\right].
\end{aligned}
$$

2.° Caso: $i \neq j$

Aqui, observe que $\delta^{i_k i}_{j_k j}$ é não-nulo apenas quando $i_k = j$, juntamente com $j_k = i$. Assim,

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{\omega_1}]_{ij} &= \binom{n}{r-1}\sum_{k=1}^{r}\delta^{ji}_{ij}x_i x_j\\
&= -\binom{n}{r-1}r x_i x_j.
\end{aligned}
$$

Portanto, temos

$$
[\widetilde{\omega_1}]_{ij} = \binom{n}{r-1}r\left[\delta^i_j\left(|x|^2-x_i^2\right)-\left(1-\delta^i_j\right)x_i x_j\right]. \tag{3.12}
$$

A prova do lema estará completa se mostrarmos que $[\widetilde{\omega_l}]_{ij} = 0$ para $l \geq 2$, onde

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{\omega_l}]_{ij} &= \sum_{i_\alpha,j_\alpha=1}^{n}\delta^{i_1\cdots i_r i}_{j_1\cdots j_r j}\sum_{1\leq k_1<\cdots<k_r\leq r}\delta^{i_1}_{j_1}\cdots x_{i_{k_1}}x_{j_{k_1}}\cdots x_{i_{k_l}}x_{j_{k_l}}\cdots\delta^{i_r}_{j_r}\\
&= \binom{n}{r-l}\sum_{i_\alpha,j_\alpha=1}^{n}\sum_{1\leq k_1<\cdots<k_r\leq r}\delta^{i_{k_1}\cdots i_{k_l} i}_{j_{k_1}\cdots j_{k_l} j}x_{i_{k_1}}x_{j_{k_1}}\cdots x_{i_{k_l}}x_{j_{k_l}}.
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

Novamente considere dois casos. Se $i = j$ então $[\omega_l]^i_i$ é equivalente a

$$
\sum_{i_\alpha,j_\alpha=1}^{n}\sum_{1\leq k_1<\cdots<k_l\leq r;k_m\neq i}\delta^{i_{k_1}\cdots i_{k_l}}_{j_{k_1}\cdots j_{k_l}}x_{i_{k_1}}x_{j_{k_1}}\cdots x_{i_{k_l}}x_{j_{k_l}},
$$

e já que $\delta^{i_{k_1}\cdots i_{k_l}}_{j_{k_1}\cdots j_{k_l}}$ é anti-simétrica nos índices $j_{k_1}, \cdots, j_{k_l}$ e o produto $x_{i_{k_1}} x_{j_{k_1}} \cdots x_{i_{k_l}} x_{j_{k_l}}$ é simétrico nesses mesmos índices, esta soma claramente se anula, como desejado. Agora fixe i e j tais que $i \neq j$. Vamos olhar inicialmente o caso $l = 2$. Assim $\delta^{i_{k_1} i_{k_2} i}_{j_{k_1} j_{k_2} j} \neq 0$ apenas se $j = i_{k_1}$ ou $j = i_{k_2}$. Vamos assumir, por exemplo, que $j = i_{k_1}$ e tomar $i_{k_2} = k$ por simplicidade. Então a correspondente soma é claramente um múltiplo de

$$x_i x_j \sum_{k; k \neq i,j} x_k^2 \left(\delta^{jki}_{ikj} + \delta^{jki}_{kij}\right) = x_i x_j \sum_{k; k \neq i,j} x_k^2 \left(\delta^{jki}_{ikj} - \delta^{jki}_{ikj}\right) = 0,$$

e isto prova que $\widetilde{\omega_2} = 0$.

Um cancelamento similar ocorre quando temos $l \geq 3$ e $i \neq j$. Ilustraremos o argumento considerando apenas o caso $l = 3$, uma vez que no caso geral a dificuldade é apenas notacional. Novamente $\delta^{i_{k_1} i_{k_2} i_{k_3} i}_{j_{k_1} j_{k_2} j_{k_3} j} \neq 0$ apenas se j é igual a um dos índices i_{k_1}, i_{k_2} ou i_{k_3}. A soma (3.13) se divide e consequentemente podemos supor, sem perda de generalidades, que $j = i_{k_1}$. Tomando $i_{k_2} = k$ e $i_{k_3} = m$ a correspondente soma é

$$x_i x_j \sum_{k,m \neq i,j} x_k^2 x_m^2 \left(\delta^{jkmi}_{ikmj} + \delta^{jkmi}_{imkj} + \delta^{jkmi}_{kimj} + \delta^{jkmi}_{kmij} + \delta^{jkmi}_{mkij} + \delta^{jkmi}_{mikj}\right) = 0.$$

Isto completa a prova do lema.

Finalmente, a demonstração da Proposição 3.4 encerra-se após aplicar-se o Lema 3.2 com $C = n/(r+1)$ em (3.9). □

3.3 O Fluxo de um Fim Regular

Um ponto crucial na demonstração do resultado principal deste trabalho é o cálculo do fluxo de um fim r-mínimo regular. Precisamos então recordar a definição a seguir.

Definição 3.2 *Dado um $(n-1)-$ciclo orientado α em uma imersão $r-$mínima $X : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, o fluxo em α na direção de um vetor unitário $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, é definido por*

$$Flux(\alpha; v) = \int_\alpha \langle P_r[A]\nabla h, \xi \rangle d\sigma, \tag{3.14}$$

onde ξ é a co-normal exterior ao ciclo α e h é a função altura com respeito a v, isto é, $h(X) = \langle v, X \rangle$.

Observamos que o fluxo depende apenas da classe de homologia do ciclo α. De fato, se α' é um ciclo homólogo a α, então $\alpha - \alpha' = \partial\Omega$, onde Ω é um domínio regular em M. Assim, pelo Lema 2.3,

$$\int_\Omega \operatorname{div}(P_r[A]\nabla h)\, d\mu = \int_\Omega L_r(h)\, d\mu = 0.$$

Aplicando o teorema da divergência, temos

$$\int_{\partial\Omega=\alpha-\alpha'} \langle P_r[A]\nabla h, \xi\rangle d\sigma = 0,$$

donde

$$\int_\alpha \langle P_r[A]\nabla h, \xi\rangle d\sigma = \int_{\alpha'} \langle P_r[A]\nabla h, \xi\rangle d\sigma,$$

como queríamos.

Proposição 3.5 *Seja C_R o ciclo orientado dado por $\{(x, u(x)), |x| = R\}$, em um fim $r-$mínimo regular com razão de crescimento $a \neq 0$ sobre um hiperplano Π; veja Definição 3.1 Se $\frac{3}{2}(r+1) \leq n < 2(r+1)$, então*

$$Flux(C_R; v) = \langle v, \eta\rangle\ \gamma_r\ Vol(\mathbb{S}^{n-1})\ a^{r+1}, \tag{3.15}$$

onde $\gamma_r = c_r\left(2 - \frac{n}{r+1}\right)\binom{n}{r}$, c_r é como na Proposição 3.4 e η é a normal unitária positiva de Π.

Demonstração: Suponha que o fim é um gráfico sobre o hiperplano horizontal em $\mathbb{R}^{n+1}$. Assim, se ξ é a co-normal exterior unitária de C_R, temos $\xi = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}$, onde $\mathbf{N}$ satisfaz

$$\left(\frac{x}{R}, 0\right) = \mathbf{N} + \langle\left(\frac{x}{R}, 0\right), \frac{1}{W}\left(-\nabla^0 u, 1\right)\rangle \frac{1}{W}\left(-\nabla^0 u, 1\right),$$

onde $\nabla^0 u = (u_1, \ldots, u_n)$ e $W^2 = 1 + |\nabla^0 u|^2$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathbf{N} &= \left(\frac{x}{R}, 0\right) + \frac{1}{W^2}\ \nabla^0 u \cdot \frac{x}{R}\left(-\nabla^0 u, 1\right)\\
&= \left(\frac{x}{R}, 0\right) + du(x) \cdot \frac{x}{R}\left(\frac{-\nabla^0 u}{W^2}, \frac{1}{W^2}\right)\\
&= \left(\frac{x}{R}, du(x)\cdot\frac{x}{R}\right) + du(x)\cdot\frac{x}{R}\left[(0,-1) + \left(\frac{-\nabla^0 u}{W^2}, \frac{1}{W^2}\right)\right]\\
&= \left(\frac{x}{R}, du(x)\cdot\frac{x}{R}\right) - \frac{1}{W^2} du(x)\cdot\frac{x}{R}\ \left(\nabla^0 u, |\nabla^0 u|^2\right).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{W^2} du(x) \cdot \frac{x}{R} \left(\nabla^0 u, |\nabla^0 u|^2 \right) \right\| &\leq \frac{|\nabla^0 u|}{W^2} \sqrt{|\nabla^0 u|^2 + |\nabla^0 u|^4} \\
&= \frac{|\nabla^0 u|^2}{W} = |\nabla^0 u|^2 \left(1 - \frac{1}{2} |\nabla^0 u|^2 + O(|\nabla^0 u|^4) \right) \\
&= O(|x|^{-q}),
\end{aligned}$$

de modo que

$$\mathbf{N}(x, u(x)) = \left(\frac{x}{R}, du(x) \cdot \frac{x}{R} \right) + O(|x|^{-q}).$$

Se $p = (x, u(x))$ é um ponto de M, e $T_p M$ o seu espaço tangente, então a aplicação definida por $\widetilde{u}(x) = (x, u(x))$ determina naturalmente uma base em $T_p M$. De fato, basta tomar $\mathcal{B} = \{d\widetilde{u}(x) e_i = (e_i, du(x) \cdot e_i)\}, i = 1, \ldots n$, onde $\{e_i\}, i = 1, \ldots n$, é a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Assim, nesta base, o vetor coordenadas de $\mathbf{N}$ será

$$[\mathbf{N}]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{|x|} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + O(|x|^{-q}) \, .$$

Seja $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ um vetor unitário. Para calcular $\mathrm{Flux}(C_R; v)$ devemos, por (3.14), calcular $\langle P_r[A](\nabla h), \xi \rangle_{T_p M}$. Usando que $P_r[A]$ é simétrico e que ∇h é a componente tangencial do vetor v, segue que

$$\begin{aligned}
\langle P_r[A](\nabla h), \xi \rangle_{T_p M} &= \langle P_r[A](v^T), \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} \rangle_{T_p M} \\
&= \frac{1}{|\mathbf{N}|} \langle v^T, P_r[A](\mathbf{N}) \rangle_{T_p M} \\
&= \frac{1}{|\mathbf{N}|} \langle v, P_r[A](\mathbf{N}) \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}.
\end{aligned}$$

A matriz de $P_r[A]$ na base $\mathcal{B}$ tem coeficientes dados pela Proposição 3.4, logo a $i-$ésima coordenada, $1 \leq i \leq n$, de $P_r[A](\mathbf{N})$ é

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} P_r[A]_{ij} \mathbf{N}^j &= \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{c_r a^r}{|x|^{n - \frac{q}{2} - 1}} \left[[\omega_0]_{ij} - \frac{n}{r+1} \frac{1}{|x|^2} [\omega_1]_{ij} \right] + O\left(|x|^{-n + \frac{q}{2}} \right) \right\} \mathbf{N}^j \\
&= \frac{c_r a^r}{|x|^{n - \frac{q}{2} - 1}} \left[\underbrace{\sum_{j=1}^{n} [\omega_0]_{ij} \mathbf{N}^j}_{I} - \frac{n}{r+1} \frac{1}{|x|^2} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} [\omega_1]_{ij} \mathbf{N}^j}_{II} \right] + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} O\left(|x|^{-n + \frac{q}{2}} \right) \mathbf{N}^j}_{III}.
\end{aligned}$$

Calculemos I, II e III separadamente. Temos inicialmente

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j=1}^{n} [\omega_0]_{ij}\, \mathbf{N}^j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{r} \delta^i_j \left(\frac{x_j}{|x|} + O(|x|^{-q}) \right) \\ &= \binom{n}{r} \frac{x_i}{|x|} + O(|x|^{-q}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} II &= \sum_{j=1}^{n} [\omega_1]_{ij}\, \mathbf{N}^j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{r-1} r \left[\delta^i_j \left(|x|^2 - x_i^2 \right) - \left(1 - \delta^i_j \right) x_i x_j \right] \left(\frac{x_j}{|x|} + O(|x|^{-q}) \right) \\ &= \binom{n}{r-1} r \left[\sum_{j=1}^{n} \delta^i_j \left(|x|^2 - x_i^2 \right) \frac{x_j}{|x|} - \sum_{j=1}^{n} \left(1 - \delta^i_j \right) x_i \frac{x_j^2}{|x|} \right] + O\left(|x|^{-q+2} \right) \\ &= \binom{n}{r-1} r \left[x_i |x| - \frac{x_i^3}{|x|} - x_i |x| + \frac{x_i^3}{|x|} \right] + O\left(|x|^{-q+2} \right) \\ &= O\left(|x|^{-q+2} \right), \end{aligned}$$

e finalmente,

$$\begin{aligned} III &= \sum_{j=1}^{n} O\left(|x|^{-n+\frac{q}{2}} \right) \mathbf{N}^j \\ &= \sum_{j=1}^{n} O\left(|x|^{-n+\frac{q}{2}} \right) \left(\frac{x_j}{|x|} + O(|x|^{-q}) \right) \\ &= O\left(|x|^{-n+\frac{q}{2}} \right) + O\left(|x|^{-n-\frac{q}{2}} \right) = O\left(|x|^{-n+\frac{q}{2}} \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} P_r[A]_{ij} \mathbf{N}^j &= \frac{c_r a^r}{|x|^{n-\frac{q}{2}-1}} \left[\binom{n}{r} \frac{x_i}{|x|} + O(|x|^{-q}) - \frac{n}{r+1} \frac{1}{|x|^2} O\left(|x|^{-q+2} \right) \right] + O\left(|x|^{-n+\frac{q}{2}} \right) \\ &= c_r a^r \binom{n}{r} \frac{x_i}{|x|^{n-\frac{q}{2}}} + O\left(|x|^{-n-\frac{q}{2}+1} \right) + O\left(|x|^{-n-\frac{q}{2}+1} \right) + O\left(|x|^{-n+\frac{q}{2}} \right) \\ &= \binom{n}{r} \frac{c_r a^r x_i}{|x|^{n-\frac{q}{2}}} + O\left(|x|^{-n+\frac{q}{2}} \right), \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a hipótese $\frac{3}{2}(r+1) \leq n$.

Resta calcular a coordenada $n+1$ de $P_r[A](\mathbf{N})$, que é dada por

$$\begin{aligned}
du(x) \cdot P_r[A](\mathbf{N}) &= \left[\left(2 - \frac{n}{r+1}\right) \frac{a}{|x|^{\frac{n}{r+1}}} x + O(|x|^{-\frac{n}{r+1}})\right]\left[\binom{n}{r}\frac{c_r a^r x}{|x|^{n-\frac{q}{2}}} + O\Big(|x|^{-n+\frac{q}{2}}\Big)\right] \\
&= \left(2 - \frac{n}{r+1}\right)\binom{n}{r}\frac{c_r a^{r+1}}{|x|^{n-1}} + O\Big(|x|^{-\frac{q}{2}}\Big) O\Big(|x|^{-n+\frac{q}{2}}\Big) + \\
&+ O\Big(|x|^{-\frac{n}{r+1}}\Big) O\Big(|x|^{-n+\frac{q}{2}+1}\Big) + O\Big(|x|^{-\frac{n}{r+1}}\Big) O\Big(|x|^{-n+\frac{q}{2}}\Big) \\
&= \left(2 - \frac{n}{r+1}\right)\binom{n}{r}\frac{c_r a^{r+1}}{|x|^{n-1}} + O(|x|^{-n}) + O(|x|^{-n}) + O\Big(|x|^{-n-1}\Big) \\
&= \left(2 - \frac{n}{r+1}\right)\binom{n}{r}\frac{c_r a^{r+1}}{|x|^{n-1}} + O(|x|^{-n})\,.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle v, P_r[A](\mathbf{N})\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} &= \binom{n}{r}\frac{c_r a^r}{|x|^{n-\frac{q}{2}}}\sum_{i=1}^{n} v_i x_i + O\Big(|x|^{-n+\frac{q}{2}}\Big) + \\
&+ \left(2 - \frac{n}{r+1}\right)\binom{n}{r}\frac{c_r a^{r+1}}{|x|^{n-1}} v_{n+1} + O(|x|^{-n}) \\
&= \binom{n}{r}\frac{c_r a^r}{|x|^{n-\frac{q}{2}}}\sum_{i=1}^{n} v_i x_i + \left(2 - \frac{n}{r+1}\right)\binom{n}{r}\frac{c_r a^{r+1}}{|x|^{n-1}} v_{n+1} + O\Big(|x|^{-n+\frac{q}{2}}\Big),
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Flux}(C_R, v) &= \int_{C_R} \frac{1}{|\mathbf{N}|}\left\{c_r a^r \binom{n}{r}\frac{1}{|x|^{n-\frac{q}{2}}}\sum_{i=1}^{n} v_i x_i + \right. \\
&+ \left. c_r a^{r+1}\left(2 - \frac{n}{r+1}\right)\binom{n}{r}\frac{1}{|x|^{n-1}} v_{n+1} + O\Big(|x|^{-n+\frac{q}{2}}\Big)\right\}\, d\sigma \\
&= c_r a^r \binom{n}{r}\int_{C_R}\frac{1}{|\mathbf{N}|}\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i x_i}{R^{n-\frac{q}{2}}}\, d\sigma + \\
&+ c_r a^{r+1}\left(2 - \frac{n}{r+1}\right)\binom{n}{r}\int_{C_R}\frac{1}{|\mathbf{N}|}\frac{v_{n+1}}{R^{n-1}}\, d\sigma + \int_{C_R}\frac{1}{|\mathbf{N}|} O\Big(R^{-n+\frac{q}{2}}\Big)\, d\sigma.
\end{aligned}$$

Fazendo $R \to \infty$ (pois o fluxo depende apenas da classe de homologia) temos que $|\mathbf{N}| \to 1$ e $d\sigma$ converge para $d\omega_R = R^{n-1} d\omega$, o elemento de volume da concha esférica $|x| = R$ em $\mathbb{R}^n = \Pi$. Aqui, $d\omega$ é o elemento de volume de $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Como $q < 2$ e

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \, d\omega = 0,$$

devido à simetria do integrando, a primeira integral acima se anula no limite $R \to +\infty$. Por outro lado,

$$\int_{|x|=R} O(R^{-n+\frac{q}{2}}) \, dV_R \longrightarrow 0,$$

quando $R \to +\infty$, pois a concha esférica C_R em $\mathbb{R}^n$ tem área $O(R^{n-1})$ enquanto o integrando é $O(R^{-n+\frac{q}{2}})$. Note que aqui usamos novamente a hipótese $n < 2(r+1)$. Portanto,

$$\mathrm{Flux}(C_R, \mathrm{v}) = c_r a^{r+1} \left(2 - \frac{n}{r+1}\right) \binom{n}{r} \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1}{|N|} \frac{v_{n+1}}{R^{n-1}} \, d\sigma,$$

ou seja,

$$\mathrm{Flux}(C_R, \mathrm{v}) = \gamma_r a^{r+1} v_{n+1} \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}),$$

onde $\gamma_r = c_r \left(2 - \frac{n}{r+1}\right) \binom{n}{r}$, como queríamos □

Capítulo 4

Hipersuperfícies $r-$Mínimas com Dois Fins Regulares

Neste capítulo final, usaremos os resultados desenvolvidos até agora para demonstar o principal resultado deste trabalho. Começaremos com o seguinte lema

Lema 4.1 *Seja $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ um hipersuperfície completa, mergulhada, r−mínima e orientada, com $\frac{3}{2}(r+1) \leq n < 2(r+1)$. Se M é elíptica e tem dois fins, ambos regulares, então eles são paralelos com a mesma razão de crescimento.*

Demonstração: Como M tem dois fins regulares, existem planos Π_1 e Π_2 tais que cada fim é um gráfico sobre um dos planos. Seja R suficientemente grande tal que a interseção dos cilindros de raio R com base sobre cada um dos planos contenha a parte compacta de M complementar aos fins, digamos, M_R. Note que o bordo de M_R é constituido por dois gráficos, $\partial M_R = C_R^1 \cup C_R^2$, onde

$$C_R^1 = \{(x, u^1(x)) : x \in \Pi_1, |x| = R\}, \qquad C_R^2 = \{(y, u^2(y)) : y \in \Pi_2, |y| = R\},$$

com u^1 e u^2 possuindo razões de crescimento $a \neq 0$ e $b \neq 0$, respectivamente.

Ora, C_R^1 e C_R^2 têm orientações definidas pela orientação induzida no bordo de M_R, de modo que orientamos Π_1 e Π_2 de tal forma que a orientação induzida nas esferas $|x| = R$ e $|y| = R$ como bordos de discos em Π_1 e Π_2, coincidam com as orientações de C_R^1 e C_R^2, respectivamente. Em particular, estas escolhas determinam os sinais das razões de crescimento.

Seja v um vetor unitário em $\mathbb{R}^{n+1}$, e h a função altura com respeito a v, isto é, $h(x) = \langle v, x\rangle$. Como $S_{r+1} = 0$, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{M_R} L_r(h)\, d\mu \\
&= \int_{M_R} \text{div}\, P_r[A](\nabla h)\, d\mu \\
&= \int_{\partial M_R} \langle P_r[A](\nabla h), \xi\rangle\, d\sigma \\
&= \int_{C_R^1} \langle P_r[A](\nabla h), \xi\rangle\, d\sigma + \int_{C_R^2} \langle P_r[A](\nabla h), \xi\rangle\, d\sigma \\
&= \text{Flux}(C_R^1, v) + \text{Flux}(C_R^2, v)
\end{aligned}$$

Assim, pela fórmula do fluxo (3.15), obtemos a equação

$$a^{r+1}\langle v, \eta_1\rangle + b^{r+1}\langle v, \eta_2\rangle = 0, \tag{4.1}$$

onde η_i, é a normal unitária positivamente orientada de $\Pi_i, i = 1, 2$. Aqui, a e b são as razões de crecimento dos fins.

Agora vamos considerar dois sistemas de coordenadas ortogonais em $\mathbb{R}^{n+1}$ tomando as seguintes decomposições em soma direta

$$(x, x_{n+1}) \in \Pi_1 \oplus [\eta_1], \quad (y, y_{n+1}) \in \Pi_2 \oplus [\eta_2],$$

e seja $O : \Pi_1 \oplus [\eta_1] \to \Pi_2 \oplus [\eta_2]$ uma transformação ortogonal sobrejetiva, que preserve orientação, com $O\eta_1 = \eta_2$. Usando isto em (4.1), obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= a^{r+1}\langle v, \eta_1\rangle + b^{r+1}\langle v, O\eta_1\rangle \\
&= \langle a^{r+1}v + b^{r+1}O^T v, \eta_1\rangle \\
&= \langle a^{r+1}v + b^{r+1}O^T v, \eta_1\rangle,
\end{aligned}$$

donde $a^{r+1}v + b^{r+1}O^T v \in \Pi_1$, ou seja, O^T aplica Π_1 sobre si mesmo e, conseqüentemente, devemos ter $\eta_2 = \eta_1$ ou $\eta_2 = -\eta_1$. Em qualquer um dos casos, concluímos que os fins são paralelos.

Voltando a (4.1), obtemos $(a^{r+1} \pm b^{r+1})\langle v, \eta_1\rangle = 0$, e tomando $v = \eta_1$ concluímos que $a^{r+1} \pm b^{r+1} = 0$. Se r é ímpar, então $a^{r+1} \pm b^{r+1} = 0$ ocorre apenas com o sinal negativo, donde $|a| = |b|$, ou seja o que significa que os fins têm razões de crescimento com mesma magnitude. Além disso, o sinal negativo nos informa que $\eta_2 = -\eta_1$, assim $y_{n+1} = -x_{n+1}$ e $|y| = |x|$, o que significa que O restrito a Π_1 é uma transformação ortogonal que inverte orientação. Se compararmos os dois fins em um mesmo sistema de coordenadas, segue de $y_{n+1} = -x_{n+1}$ e $|y| = |x|$ que

$u^2(y)$ transforma-se em $-u^2(x)$, de modo que b transforma-se em $-b$. Assim, se $b = -a$, os fins são assimptóticos entre si. Como M é mergulhada, podemos então deslocar um hiperplano a partir do infinito na direção oposta aos fins. Este hiperplano tocará pela primeira vez M num ponto em que todas as curvaturas principais possuem o mesmo sinal. Mas a elipticidade de M implica que existem pelo menos $r + 1$ curvaturas principais não-nulas, e isso contraria a r-minimalidade de M. Logo, neste caso, $a = b$, como queríamos.

Se r é par, então temos duas opções. Primeiramente, pode ocorrer $a^{r+1} - b^{r+1} = 0$, donde conclui-se imediatamente que $a = b$ e $\eta_1 = -\eta_2$, como queríamos. Por outro lado, se $a^{r+1} + b^{r+1} = 0$, então teremos $a = -b$ calculados no mesmo sistema de coordenadas, pois $\eta_1 = \eta_2$. Isto significa que se recalcularmos a expansão de u^2 no sistema determinados por $-\eta_2$, temos que as razões de crecimento são iguais, e a proposição está demonstrada. $\square$

Agora estamos aptos a demonstrar o resultado principal deste trabalho.

Teorema 4.1 *Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície $r-$mínima completa e mergulhada, com $\frac{3}{2} \leq \frac{n}{r+1} < 2$. Se M é elíptica e contém exatamente dois fins, ambos regulares, então M é rotacional.*

Demonstração: Pelo lema anterior, se escrevermos os fins em relação ao sistema determinado por x_{n+1}, e após eventualmente transladar o plano Π_1 verticalmente, eles terão expansão assimptótica com razões de crecimento opostos e com termos constantes de sinais opostos, ou seja,

$$u^1(x) = \frac{a}{|x|^{\frac{n}{r+1}-2}} + a_1 + O(|x|^{-\frac{n}{r+1}+1})$$

e

$$u^2(x) = -\frac{a}{|x|^{\frac{n}{r+1}-2}} - a_1 + O(|x|^{-\frac{n}{r+1}+1}).$$

A partir deste ponto, podemos usar o conhecido argumento de reflexão de R. Schoen (veja [7], [3]), de modo que apenas esboçaremos as diversas etapas. Em relação ao sistema de coordenadas das expansões acima, considere o hiperplano $\Pi_t = \{(x, t); x \in \mathbb{R}^n$, onde $t > 0$ é fixado. Escolha $R > 0$ talque $|x| > R$ implica $u^1(x) + u_2(x) < 2t$, o que é possível em vista das expansões. Na notação explicada no parágrafo que precede o Teorema 2.2, isto significa que $B^*_{t^+} \geq B_{t^-}$, onde $B = M \cap \partial C$ e C é o cilindro infinito tendo como base a bola $|x| < R$. Pela Proposição 3.1 e Teorema 2.2, temos $(M \cap C)^*_{t^+} \geq (M \cap C)_{t^-}$, e fazendo $t \to 0$ concluímos que $M^*_{0^+} \geq M_{0^-}$. Trocando x_{n+1} por $-x_{n+1}$ e repetindo o argumento segue-se que $M^*_{0^-} \geq M_{0^+}$, de modo que de fato vale $M^*_{0^+} = M_{0^-}$, ou seja, M é simétrica relativamente à reflexão gerada por $\Pi_1 = \mathbb{R}^n$.

Para mostrar que M é rotacionalmente simétrica precisamos determinar seu eixo de simetria. Já sabemos que a expansão de M no infinito é

$$u(x) = \frac{a}{|x|^{\frac{n}{r+1}-2}} + a_1 + \frac{\langle c, x\rangle}{|x|^{\frac{n}{r+1}}} + \frac{a_2}{|x|^{\frac{3n}{r+1}-4}} + O\left(|x|^{-\frac{n}{r+1}}\right) \tag{4.2}$$

de modo que fazendo $x = y - \beta$ e utilizando o Lema 3.1, temos

$$\begin{aligned}
\frac{a}{|x|^{\frac{n}{r+1}-2}} &= \frac{a}{|y-\beta|^{\frac{n}{r+1}-2}}\\
&= \frac{a}{|y|^{\frac{n}{r+1}-2}}\left[1 - \left(2 - \frac{n}{r+1}\right)\frac{\langle \beta, y\rangle}{|y|^2} + O\left(|y|^{-2}\right)\right]\\
&= \frac{a}{|y|^{\frac{n}{r+1}-2}} - a\left(2 - \frac{n}{r+1}\right)\frac{\langle \beta, y\rangle}{|y|^{\frac{n}{r+1}}} + O\left(|y|^{-\frac{n}{r+1}}\right).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{\langle c, x\rangle}{|x|^{\frac{n}{r+1}}} &= \frac{\langle c, y-\beta\rangle}{|y-\beta|^{\frac{n}{r+1}}}\\
&= \frac{\langle c, y\rangle}{|y-\beta|^{\frac{n}{r+1}}} - \frac{\langle c, \beta\rangle}{|y-\beta|^{\frac{n}{r+1}}}\\
&= \frac{\langle c, y\rangle}{|y|^{\frac{n}{r+1}}}\left[1 + \frac{n}{r+1}\frac{\langle \beta, y\rangle}{|y|^2} + O\left(|y|^{-2}\right)\right] -\\
&\qquad -\frac{\langle c, \beta\rangle}{|y|^{\frac{n}{r+1}}}\left[1 + \frac{n}{r+1}\frac{\langle \beta, y\rangle}{|y|^2} + O\left(|y|^{-2}\right)\right]\\
&= \frac{\langle c, y\rangle}{|y|^{\frac{n}{r+1}}} + \frac{n}{r+1}\frac{\langle c, y\rangle\langle \beta, y\rangle}{|y|^{\frac{n}{r+1}+2}} + O\left(|y|^{-\frac{n}{r+1}-1}\right) -\\
&\qquad -\frac{\langle c, \beta\rangle}{|y|^{\frac{n}{r+1}}} - \frac{n}{r+1}\frac{\langle c, \beta\rangle\langle \beta, y\rangle}{|y|^{\frac{n}{r+1}+2}} + O\left(|y|^{-\frac{n}{r+1}-2}\right)\\
&= \frac{\langle c, y\rangle}{|y|^{\frac{n}{r+1}}} + O\left(|y|^{-\frac{n}{r+1}}\right).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Vale ainda que

$$\begin{aligned}
\frac{a_2}{|x|^{\frac{3n}{r+1}-4}} &= \frac{a_2}{|y-\beta|^{\frac{3n}{r+1}-4}}\\
&= \frac{a_2}{|y|^{\frac{3n}{r+1}-4}}\left[1 - \left(4 - \frac{3n}{r+1}\right)\frac{\langle \beta, y\rangle}{|y|^2} + O\left(|y|^{-2}\right)\right]\\
&= \frac{a_2}{|y|^{\frac{3n}{r+1}-4}} - a_2\left(4 - \frac{3n}{r+1}\right)\frac{\langle \beta, y\rangle}{|y|^{\frac{3n}{r+1}-2}} + O\left(|y|^{2-\frac{3n}{r+1}}\right)\\
&= \frac{a_2}{|y|^{\frac{3n}{r+1}-4}} + O\left(|y|^{3-\frac{3n}{r+1}}\right),
\end{aligned} \tag{4.5}$$

e

$$O\left(|x|^{-\frac{n}{r+1}}\right) = O\left(|y|^{-\frac{n}{r+1}}\right). \tag{4.6}$$

Substituindo (4.3), (4.4), (4.5) e (4.6) em (4.2) chegamos à seguinte expansão para $u(y-\beta)$:

$$\begin{aligned} u(y-\beta) &= \frac{a}{|y|^{\frac{n}{r+1}-2}} - a\left(2-\frac{n}{r+1}\right)\frac{\langle\beta,y\rangle}{|y|^{\frac{n}{r+1}}} + \frac{\langle c,y\rangle}{|y|^{\frac{n}{r+1}}} + \\ &\quad + O\left(|y|^{-\frac{n}{r+1}}\right) + \frac{a_2}{|y|^{\frac{3n}{r+1}-4}} + O\left(|y|^{3-\frac{3n}{r+1}}\right). \end{aligned}$$

Mas $O\left(|y|^{3-\frac{3n}{r+1}}\right) \subset O\left(|y|^{-\frac{n}{r+1}}\right)$, pois $\frac{3}{2} \le \frac{n}{r+1}$, e assim,

$$u(y-\beta) = \frac{a}{|y|^{\frac{n}{r+1}-2}} + \frac{\langle a\left(2-\frac{n}{r+1}\right)\beta + c, y\rangle}{|y|^{\frac{n}{r+1}}} + \frac{a_2}{|y|^{\frac{3n}{r+1}-4}} + O\left(|y|^{-\frac{n}{r+1}}\right)$$

Escolhendo $\beta = \frac{c}{a\left(\frac{n}{r+1}-2\right)}$ e trocando y por x, temos finalmente

$$u(x) = \frac{a}{|x|^{\frac{n}{r+1}-2}} + a_1 + \frac{a_2}{|x|^{\frac{3n}{r+1}-4}} + O\left(|x|^{-\frac{n}{r+1}}\right). \tag{4.7}$$

Como esta expansão involve somente termos invariantes por rotações na coordenada x, para concluir que M é rotacionalmente simétrica, é suficiente verificar sua simetria em relação a qualquer hiperplano que contenha o eixo x_{n+1},. Faremos isto para o o hiperplano $\Pi_0 : \{x_1 = 0\}$. Para tanto, seja $B = M \cap \{|x_{n+1}| = \Lambda\} = B^+ \cup B^-$, onde $B^\pm = M \cap \{x_{n+1} = \pm\Lambda\}$ e $\Lambda \gg 0$. Aplicaremos o método da reflexão a B, relativamente à família de hiperplanos $\Pi_t : \{x_1 = t\}$.

Calculando a derivada de (4.7) com respeito a variável x_1, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = a\left(2-\frac{n}{r+1}\right)\frac{x_1}{|x|^{\frac{n}{r+1}}} + a_2\left(4-\frac{3n}{r+1}\right)\frac{x_1}{|x|^{\frac{3n}{r+1}-2}} + O\left(|x|^{-\frac{n}{r+1}-1}\right),$$

que é positiva para $x_1 \ge t > 0$ e $|x|$ suficientemente grande. Assim, B_{t^+} é um gráfico sobre Π_t com inclinação limitada. Mais ainda, como $B^\pm$ converge para uma esfera quando $R \to +\infty$, vê-se sem dificuldade que $B^*_{t^+} \ge B_{t^-}$. Novamente pelo Teorema 2.2, $(M \cap \{|x_{n+1}| \le \Lambda\})^*_{t^+} \ge (M \cap \{|x_{n+1}| \le \Lambda\})_{t^-}$ e fazendo $t \to 0$ temos $(M \cap \{|x_{n+1}| \le \Lambda\})^*_{0^+} \ge (M \cap \{|x_{n+1}| \le \Lambda\})_{0^-}$. Novamente, trocando x_1 por $-x_1$ e repetindo o argumento temos $(M \cap \{|x_{n+1}| \le \Lambda\})^*_{0^-} \ge (M \cap \{|x_{n+1}| \le \Lambda\})_{0^+}$. Assim, de fato temos $(M \cap \{|x_{n+1}| \le \Lambda\})^*_{0^+} = (M \cap \{|x_{n+1}| \le \Lambda\})_{0^-}$, e isto prova que M é rotacional.

□

Referências Bibliográficas

[1] Leite, M. L., *Rotacional Hypersurfaces on Space Forms With Constante Scalar Curvature,* Manuscripta Math. 67 (1990),289-304.

[2] Hounie, J. and Leite, M. L., *The Maximun principle for Hypersurfaces with Vanishing Curvature Functions,* J. Differential Geom. 41 (1995), 247-258.

[3] Hounie, J. and Leite, M. L., *Two-ended Hypersurfaces with Zero Scalar Curvature,* Indiana Univ. Math. J. 47 (1998), .

[4] Hounie, J. and Leite, M. L., *Uniqueness and non-existence theorems for hypersurfaces with* $H_r = 0$, Annals Global Anal. Geom. 17, 397-407 (1999).

[5] Leite, M. L., *The Tangency Principle for Hypersurfaces with a null Intermediate Curvature,* XI Escola de Geometria Diferencial. Universidade Federal Fluminense - Instituto de Matemática, 2000.

[6] R. Reilly, *Variacional properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms,* J. Diff. Geom. 8 (1973), 465-477.

[7] R. Shoen, *Uniqueness, Symmetry and Embeddedness of Minimal Surfaces,* J. Diff. Geom. 18 (1983), 791-809.