UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Juscelino Pereira Silva

SOBRE HIPERSUPERFÍCIES r-MÍNIMAS COM FINS PLANARES NO ESPAÇO EUCLIDIANO

Fortaleza

2007

Juscelino Pereira Silva

SOBRE HIPERSUPERFÍCIES r-MÍNIMAS COM FINS PLANARES NO ESPAÇO EUCLIDIANO

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Levi Lopes de Lima.
Co-Orientador:
Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira.

Fortaleza
2007

Silva, J. P.

S58s Sobre Hipersuperfícies r-Mínimas com Fins Planares no Espaço Euclidiano.

Juscelino Pereira Silva – Fortaleza: 2007.

Orientador: Prof. Dr. Levi Lopes de Lima.

Co-Orientador: Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira.

1. Geometria Diferencial

CDD 516.36

Dedico este trabalho a minha esposa Allana Kellen, ao meu filho Victor Hugo e ao meu irmão Joseli Pereira Silva (In memoriam).

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, pela disposição, coragem e serenidade a mim concedidas.

Agradeço a Allana Kellen, minha esposa, pelo amor, compreensão e companheirismo em toda essa longa e árdua jornada durante todos esses anos.

Agradeço a Victor Hugo, meu filho, por todos os momentos, doados por ele, nos quais não pude estar ao seu lado em suas brincadeiras e acompanhando o seu crescimento, momentos os quais estavam sendo ocupados com a matemática.

Agradeço a meu orientador, Levi Lima, pelo trabalho de orientação, prestatividade, paciência com a minha pessoa, devido às minhas deficiências e às minhas ausências, pela amizade e companheirismo durante todos esse anos nesse curso de pós-graduação e ainda pelo enfadonho trabalho de revisão desta tese.

Agradeço a meu co-orientador, Jorge Herbert Lira, pela paciência e acompanhamento durante a elaboração desse trabalho e ainda pelas descontraídas conversas nas horas de almoço.

Agradeço ao professor Abdênago Barros pelas valorosas sugestões e correções neste trabalho e ainda por todo o apoio nestes vários anos neste programa de pós-graduação.

Agradeço a meu irmão Júnior, pela amizade e companheirismo doados a mim por todos esses anos que passei afastado. E a minha mãe, Maria Lucy, pela dedicação e preocupação com a minha pessoa.

Agradeço a meus amigos do Cariri: Jorge Fernandes, Cícero (Calcinha), Evandro Carlos, Mário de Assis, Carlos Alberto, Wilson Hugo, Zildembergue, Elenilda Correia, Rogério e Valdeir, pelo apoio e amizade.

Agradeço a todos os meus amigos da pós-graduação em matemática da UFC, em especial a Paulo Alexandre, Antonio Caminha, Henrique Fernandes, Flávio França, Jocel Faustino, Damião Junio, Antonio Fernando (Tony), Jorge Hinojosa, Valberto Rômulo, Francisco Andrade, Marcos Melo, Onofre Campos, Jefferson Leite, Davi Máximo, Darlan Girão, Frederico Girão, Ivy Girão, Feliciano Vitório, Silvana Costa, Marcelo Carvalho, Emanuel Carneiro e Yuri Lima, pela amizade em todos esses anos na PGMAT da UFC.

A Andrea Dantas, secretária da Pós-graduação em Matemática da UFC. Quero aproveitar e destacar toda sua competência e prontidão na assistência a todos os alunos da Pós-graduação;

Agradeço ao CEFETCE, unidade de ensino de Juazeiro do Norte.

Agradeço a CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

"A juventude envelhece,

a imaturidade pode ser superada,

a ignorância pode ser educada,

a embriaguez passa,

mas a estupidez dura para sempre."

Aristófanes.

Resumo

Uma hipersuperfície $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é r-mínima se sua $(r+1)$-curvatura (a $(r+1)$-ésima função simétrica elementar de suas curvaturas principais) é identicamente nula. Se $n > 2(r+1)$ mostramos que a hipersuperfície r-mínima rotacionalmente invariante en $\mathbb{R}^{n+1}$, a saber, o n-catenóide, descrito em [HL1], é não-degenerado no sentido que não possui campos de Jacobi que decaem suficientemente rápido no infinito. Combinando isto com a teoria de deformação em espaços de Hölder com peso desenvolvida por Mazzeo, Pacard, Pollack, Uhlenbeck e outros, obtemos novos resultados sobre a estrutura de hipersuperfícies r-mínimas com fins planares. Por exemplo, mostramos que o espaço moduli $\mathcal{M}_{r,k}$ de hipersuperfícies completas r-mínimas elípticas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, $n > 2(r+1)$, com $k \geqslant 2$ fins planares, tem a estrutura de variedade analítica de dimensão formal $k(n+1)$, que é realizada na vizinhança de um elemento não-degenerado. Mais ainda, produzimos novos exemplos de famílias de dimensão infinita de hipersuperfícies r-mínimas obtidas por perturbações de catenóides truncados.

Abstract

A hypersurface $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ is r-minimal if its $(r+1)^{th}$-curvature (the $(r+1)^{th}$ elementary symmetric function of its principal curvatures) vanishes identically. If $n > 2(r+1)$ we show that the rotationally invariant r-minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$ (catenoids) first described in [HL1] are nondegenerate in the sense that they do not carry Jacobi fields which decay rapidly enough at infinity. Combining this with the deformation theory in weighted Hölder spaces developed by Kusner, Mazzeo, Pacard, Pollack, Uhlenbeck and others, we obtain new results on the structure of r-minimal hypersurfaces with ends of planar type. For example, we show that the moduli space $\mathcal{M}_{r,k}$ of complete r-minimal hypersurfaces in Euclidean space $\mathbb{R}^{n+1}$, $n > 2(r+1)$, with $k > 2$ ends of planar type has the structure of an analytic manifold of virtual dimension $k(n+1)$, which is attained in a neighborhood of a nondegenerate element. Also, we produce new infinite dimensional families of examples of r-minimal hypersurfaces obtained by perturbing noncompact portions of the catenoids. These seem to be the first known families of examples of noncompact elliptic r-minimal hypersurfaces without symmetries.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientada. Recordemos que existe uma única aplicação $N : \Sigma \to \mathbb{S}^n$ globalmente definida, a aplicação normal de Gauss, bem determinada a menos de um sinal, que fixa uma orientação para Σ, e define o endomorfismo de Weingarten $A : T\Sigma \to T\Sigma$, $A(v) = -DN(v)$, onde D é a derivada (covariante) em $\mathbb{R}^{n+1}$. Os n autovalores reais do operador A, considerado como endomorfismo simétrico de $T\Sigma$, digamos $\kappa_1, ..., \kappa_n$, são as *curvaturas principais* da imersão. Para cada $r = 0, 1, ..., n$, seja $S_r = S_r(\kappa)$ a r-ésima função simétrica nas entradas $\kappa = (\kappa_1, ..., \kappa_n)$, conhecida também como r-ésima *curvatura* da imersão.

Dizemos que Σ é r-mínima se $S_{r+1} = 0$ identicamente. Dessa forma, em nossa terminologia, hipersuperfícies mínimas são 0-mínimas e hipersuperfícies com curvatura escalar nula são 1-mínimas. É um fato bem conhecido, veja [Ro], que hipersuperfícies r-mínimas são pontos críticos, sob variações de suporte compacto, do problema variacional associado ao funcional

$$\mathcal{A}_r(\Sigma) = \int_\Sigma S_r \; d\Sigma,$$

onde $d\Sigma$ é o elemento de volume Riemanniano de Σ. Conseqüentemente, a construção de exemplos de hipersuperfícies r-mínimas produz soluções globais para este problema variacional.

Existem pelo menos duas famílias bem conhecidas de hipersuperfícies completas r-mínimas. Primeiramente, se $M^r \subset \mathbb{R}^{r+1}$ é qualquer hipersuperfície segue-se que o cilindro $M \times \mathbb{R}^{n-r} \subset \mathbb{R}^{r+1} \oplus \mathbb{R}^{n-r}$ é r-mínima. Mas note que estes exemplos tem várias simetrias e ainda mais não são elípticos, no sentido que seu operador de Jacobi é não elíptico; veja Definição 5 e Observação 3. Recentemente foram ainda descristos exemplos invariantes sob a ação canônica do grupo $O_p \times O_q$ em $\mathbb{R}^{n+1}$, $p + q = n + 1$ (para isso veja [SdSN] para $r = 1$ e [S] para $r \geqslant 2$; O caso $q = 1$ corresponde aos catenóides primeiramente descrito em [HL1], que iremos usar de forma crucial neste trabalho). Mesmo estes exemplos sendo elípticos, eles, por construção, apresentam simetrias. Assim, uma questão básica é se existem exemplos (completos ou não), elípticos e não-simétricos. Um dos objetivos aqui é precisamente exibir uma novas famílias de dimensão infinita de tais exemplos. Frizamos que estes exemplos são obtidos por perturbações de partes não-compactas de um catenóide r-mínimo, não sendo portanto completos. Na verdade, a maneira correta de interpretar tais exemplos é considerá-los como soluções do Problema de Plateau em que são prescristos o bordo e o comportamento no infinito.

A técnica ultilizada nesse trabalho aplica-se a uma classe de hipersuperfícies r-mínimas cujos fins são modelados por catenóides. Um problema crucial neste contexto é checar que estes catenóides são não-degenerados no sentido de que, em coordenadas convenientes, não possuem campos de Jacobi que decaem suficientemente rápido no infinito. Sob a hipótese $n > 2(r+1)$, que corresponde exatamente aos casos em que os catenóides possuem fins planares (veja Observação 5), isto é provado na Proposição 4. Este propriedade básica dos catenóides, juntamente com o cálculo da expansão da $(r+1)$-ésima curvatura de um gráfico normal (veja Capítulo 5), é o ponto de partida para a otenção de novos resultados estabelecidos sobre a estrutura de hipersuperfícies r-mínimas com fins do planares, que é o objeto desta tese.

Consideremos inicialmente o espaço moduli $\mathcal{M}_{r,k}$ de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n > 2(r+1)$, com k fins, $k \geqslant 2$, cada um dos quais sendo assintótico ao catenóide no sentido que, a menos de movimentos rígidos e dilatações, o fim pode ser escrito como um gráfico normal sobre o catenóide por meio de funções que decrescem exponencialmente próximo do infinito (veja o início da Seção 4.1 para uma discussão precisa deste ponto, que envolve considerações sobre espaços de Hölder com pesos convenientes). Admitamos ainda que os elementos de $\mathcal{M}_{r,k}$ são elípticos no sentido do operador de Jacobi correspondente ser elíptico (veja a Definição 5). Apoiando-se na teoria de deformação desenvolvida por R. Mazzeo, F. Paccard, D. Pollack, K. Uhlenbeck e outros (veja [MPU], [KMP], [MPo],[FP], [P]) provamos o seguinte teorema.

Teorema 1. *Se $n > 2(r+1)$ então $\mathcal{M}_{r,k}$ é uma variedade analítica com dimensão formal $k(n+1)$, que é realizada na vizinhança de um elemento não-degenerado.*

Dimensão formal significa naturalmente a dimensão calculado usando um teorema do índice. O método de demonstração baseia-se no Teorema da Função Implícita aplicado à $(r+1)$-ésima curvatura de gráficos normais atuando em espaços de Hölder com pesos apropriados. Enfatizamos que este método é geralmente aplicado a equações semi-lineares ou quase-lineares (métricas conformes, hipersuperfícies CMC, etc) e uma conseqüência deste trabalho é a confirmação da flexibilidade do método, pois mostramos que o mesmo pode ser adaptado para lidar com hipersuperfícies r-mínimas, que é o caso bastante desafiador devido ao caráter totalmente não-linear da equação $S_{r+1} = 0$ se $r \geqslant 1$.

Embora este resultado calcule a dimensão esperada de $\mathcal{M}_{r,k}$, ele não produz novos exemplos de superfícies r-mínimas completas. De fato, para $k = 2$, a dimensão $2(n-1)$ corresponde precisamente às deformações induzidas pelos movimentos rígidos e dilatações, e para $k \geqslant 3$ não foram construídos até agora exemplos não-degenerados. Todavia, combinando os resultados previamente mencionados sobre a não-degenerescência do catenóide com a teoria de deformação é possível construir, como mencionado acima, novos exemplos de hipersuperfícies r-mínimas obtidas por perturbações de catenóides truncados. Para descrever tais resultados, consideremos a seguinte notação. Como sempre, $n > 2(r+1)$. Decompomos $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ nos subepaços correspondentes aos autovalores inferiores $(0 \leqslant \lambda_j \leqslant n-1)$ e superiores $(\lambda_j \geqslant 2n)$ do Laplaciano em $\mathbb{S}^{n-1}$ e denotemos por π_I e π_{II}, respectivamente, as projeções de $\mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^{n-1})$ sobre estes subespaços. Do mesmo modo, se $g \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^{n-1})$, escreveremos $g = g_I + g_{II}$ para a decomposição correspondente.

Agora, seja $\mathcal{C}$ o catenóide r-mínimo descrito na Seção 3.1 e $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$ o catenóide trucado definido por $x_{n+1} \geqslant 0$. Claramente, $\partial\mathcal{C}_0 \approx \mathbb{S}^{n-1}$. Se $||.||_{C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^{n-1})}$ é a norma de Hölder de $C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^{n-1})$,

Teorema 2. *Existe $\epsilon > 0$ tal que se $g_{II} \in \pi_{II}\left(C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^{n-1})\right)$ satisfaz*

$$||g_{II}||_{C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^{n-1})} < \epsilon,$$

então existe um único gráfico normal r-mínimo sobre $\mathcal{C}_0$, assintótico a $\mathcal{C}_0$ no infinito, e associado a uma função $u : \mathcal{C}_0 \to \mathbb{R}$ que coincide com g_{II} em $\partial\mathcal{C}_0$.

Isto pode ser pensado como um tipo de problema de Dirichlet sobre $\mathcal{C}_0$ com comportamento prescrito no infinito e com pequenos dados de fronteira forçados a permanecer em $\pi_{II}\left(C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^{n-1})\right)$ ou ainda como um tipo de problema de Plateau em que o bordo e o comportamento no infinito são prescritos, o bordo sendo uma pequena perturbação normal de $\partial\mathcal{C}_0$. Mas note que a perturbação normal no bordo restringe-se a funções em $\pi_{II}\left(C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^{n-1})\right)$.

Este trabalho é organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 apresentamos algumas ferramentas, conhecidas na literatura, necessárias para o manuseio da teoria posterior. No Capítulo 3 é apresentada a caracterização dos catenóides e explicitamente calculadas todas as suas formas fundamentais, inclusive os coeficientes do endomorismo de Weingarten. Neste capítulo são ainda determinados o operador de Jacobi e os campos de Jacobi do catenóide No Capítulo 4 é apresentada a teoria analítica do operador de Jacobi em espaços de Hölder com pesos, e é demonstrada ainda a não-degenerescência do catenóide. No Capítulo 5 é determinada a expansão da curvatura $(r+1)$-curvatura de gráficos normais sobre hipersuperfícies r-mínimas e finalmente, no Capítulo 6 são apresentadas as demonstrações dos teoremas acima descritos.

Capítulo 2

Noções Preliminares

Neste capítulo introduziremos algumas definições básicas sobre hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$, tais como o endomorfismo de Weingarten, r-minimalidade, o operador de Jacobi, campos de Jacobi e elipticidade.

2.1 Algumas definições básicas

Seja $\Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável no espaço euclidiano. Neste caso existe uma aplicação globalmente definida $N : \Sigma \to \mathbb{S}^n$, conhecida como aplicação normal de Gauss, que é unicamente determinada a menos de um sinal e fixa uma orientação para Σ. Definimos então o *endomorfismo de Weingarten*, $A_p : T_p\Sigma \to T_p\mathbb{S}^n \cong T_p\Sigma$, $p \in \Sigma$, por $A_p(v) = -D_vN(p)$, onde D denota a conexão de Levi-Civita usual em $\mathbb{R}^{n+1}$. Como cada A_p é um operador auto-adjunto em $T_p\Sigma$, existem n funções $\kappa_i : \Sigma \to \mathbb{R}$, conhecidas como as *curvaturas principais* da imersão, que são exatamente os auto-valores de A_p.

Lembremos que o polinômio característico de A é

$$\det(tI_n - A) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l S_l t^{n-l}, \tag{2.1}$$

onde S_l é a l-*curvatura* da imersão, ou seja, S_l é a l-ésima função simétrica elementar nas curvaturas principais $\{\kappa_i\}_{i=1}^n$, de modo que

$$S_r(\kappa_1, \ldots, \kappa_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} \kappa_{i_1} \ldots \kappa_{i_r}.$$

Definição 1. *Uma hipersuperfície* $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *é r-mínima se* $S_{r+1} \equiv 0$.

Definição 2. *A r-*ésima transformação de Newton *de* $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *é definida indutivamente por*

$$P_0 = I_n, \qquad P_r = S_r I_n - A P_{r-1}. \tag{2.2}$$

Equivalentemente,

$$P_r = \sum_{i=1}^{r} (-1)^i S_{r-i} A^i.$$

Obs 1. *Note que se* $\{e_i\}_{i=1}^n$ *é uma base de* $T_p\Sigma$ *que diagonaliza* A_p *então tal base também diagonaliza* $(P_r)_p$.

As seguintes propriedades das tranformações de Newton podem ser encontradas em [BC].

Lema 1. *Para cada* $1 \leqslant r \leqslant n-1$*, temos*

1. $P_r(e_i) = S_r(\widehat{e}_i)e_i$*, onde* $S_r(\widehat{e}_i) = S_r(\kappa_1, ..., \widehat{\kappa_i}, ..., \kappa_n) = \partial_{\kappa_i} S_{r+1}(\kappa_1, ..., \kappa_n)$*;*
2. $\mathrm{tr}\ P_r = (n-r)S_r$*;*
3. $\mathrm{tr}\ AP_r = (r+1)S_{r+1}$*;*
4. $\mathrm{tr}\ A^2P_r = S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}$.

Definição 3. *O operador linear* $L_r : C^2(\Sigma) \to C^0(\Sigma)$ *é definido por*

$$L_r(f) = \mathrm{tr}\ \left(D^2 f \circ P_r\right) = \mathrm{div}\, P_r(\nabla f) \tag{2.3}$$

onde $D^2 f$ *é a matriz da Hessiana de* f.

Obs 2. *A segunda igualdade acima é válida apenas em espaços de curvatura seccional constante, veja [Ro].*

2.2 O operador de Jacobi

Como mencionamos na Introdução, hipersuperfícies r-mínimas são pontos críticos de um certo problema variacional. É natural, por conseguinte, considerar o operador de Jacobi correspondente.

Definição 4. *Se* $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ *é* r*-mínima, o* operador de Jacobi $\mathcal{L}_r : C^2(\Sigma) \to C^0(\Sigma)$ *é dado por*

$$\mathcal{L}_r u = L_r u - (r+2)S_{r+2}u. \tag{2.4}$$

Definição 5. *Uma hipersuperfície* $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ r*-mínima é* elíptica *se seu operador de Jacobi é elíptico.*

Obs 3. *Resultados em [HL1, HL2, HL3] demonstram que uma hipersuperfície* r*-mínima* Σ *é elíptica se satisfaz* $S_{r+2} \neq 0$ *em todos os seus pontos. Uma maneira equivalente de expressar essa condição é que valha* $\text{posto}(A) > r$ *em todos os pontos de* Σ*.*

Definição 6. *Uma função* $u \in C^2(\Sigma)$ *é um* campo de Jacobi *se* $\mathcal{L}_r u = 0$*.*

Capítulo 3

As hipersuperfícies r-mínimas rotacionais

Neste capítulo apresentamos uma descrição detalhada das hipersuperfícies r-mínimas de rotação em $\mathbb{R}^{n+1}$, doravante denominadas de *catenóides*. Após introduzir coordenadas adequadas nestes catenóides, calculamos explicitamente seus invariantes geométricos e campos de Jacobi, e determinamos suas propriedades assintóticas.

3.1 O catenóide r-mínimo

Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de rotação em torno do eixo x_{n+1} com curva perfil $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada por $\alpha(t) = (0, \ldots, 0, \rho(t), t)$. Assim, $\mathcal{C}$ pode ser parametrizada como

$$\mathbb{S}^{n-1} \times I \ni (\theta, t) \mapsto (\rho(t)\theta, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{3.1}$$

com campos coordenados dados por

$$e_\alpha = (\rho(t)\theta_\alpha, 0), \quad e_t = (\rho'(t)\theta, 1), \quad \alpha = 1, ..., n-1. \tag{3.2}$$

Aqui, a linha denota derivação com respeito a t. Daí, se $\langle\, , \rangle$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^{n+1}$, a métrica induzida em $\mathcal{C}$ é

$$g_{\alpha\beta} = \langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \rho^2 \sigma_{\alpha\beta}, \quad g_{tt} = \langle e_t, e_t \rangle = \rho'^2 + 1, \quad g_{\alpha t} = 0,$$

onde $\sigma_{\alpha\beta}$ é a métrica em $\mathbb{S}^{n-1}$. Assim, se escrevemos

$$w^2 = \rho'^2 + 1, \tag{3.3}$$

a matriz (g_{ij}) da métrica covariante em $\mathcal{C}$ assume a forma

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \rho^2\sigma_{ij} & 0 \\ 0 & w^2 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Note que estamos usando a seguinte convenção para índices: $1 \leqslant \alpha, \beta, \ldots \leqslant n-1$, $1 \leqslant i, j, \ldots \leqslant n$. Note ainda que a matriz (g^{ij}) da métrica contravariante é

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \rho^{-2}\sigma^{ij} & 0 \\ 0 & w^{-2} \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Obviamente, $N = w^{-1}(\theta, -\rho'(t))$ é um campo normal unitário a $\mathcal{C}$, de forma que $N_\alpha = w^{-1}(\theta_\alpha, 0)$, e usando que $e_{tt} = (\theta\rho'', 0)$, os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$b_{\alpha\beta} = -\langle N_\beta, e_\alpha\rangle = -w^{-1}\rho\sigma_{\alpha\beta}, \quad b_{tt} = \langle e_{tt}, N\rangle = w^{-1}\rho'', \quad b_{\alpha t} = 0,$$

ou seja,

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} -\rho w^{-1}\sigma_{ij} & 0 \\ 0 & \rho'' w^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Desse modo, a matriz (a_i^j) do endomorfismo de Weingarten é

$$(a_i^j) = (g^{ik}) \cdot (b_{kj}) = \begin{pmatrix} -\rho^{-1}w^{-1}I_{n-1} & 0 \\ 0 & \rho'' w^{-3} \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

e as curvaturas principais correspondentes são

$$\kappa = \kappa_1 = ... = \kappa_{n-1} = -\rho^{-1}w^{-1}, \quad \kappa_t = \rho'' w^{-3}. \tag{3.8}$$

O resultado a seguir encontra-se em [HL1].

Proposição 1. *Se $\mathcal{C}$ é uma hipersuperfície r-mínima de revolução (*catenóide*) então a curva perfil $\rho = \rho(t)$ com $\rho(0) = 1$ e $\rho'(0) = 0$ satisfaz a equação diferencial ordinária*

$$\rho'^2 + 1 = \rho^{q_{n,r}}, \tag{3.9}$$

onde $q_{n,r} = 2(n-r-1)/(r+1)$.

Demonstração. Vejamos inicialmente que, devido a (3.8),

$$S_{r+1} = \binom{n-1}{r+1}\kappa^{r+1} + \binom{n-1}{r}\kappa^r\kappa_t.$$

Como Σ é r-mínima teremos, após algumas simplificações,

$$-\frac{\kappa}{r+1}=\frac{\kappa_t}{n-r-1}.$$

Daí, usando a expressão das curvaturas principais em (3.8), temos

$$\frac{\rho^{-1}w^{-1}}{r+1}=\frac{\rho'' w^{-3}}{n-r-1},$$

donde, usando (3.3), temos[1]

$$q_{n,r}\frac{1}{\rho}=\frac{2\rho''}{1+\rho'^2}.$$

Multiplicando isto por ρ' resulta

$$\frac{d}{dt}(\ln\rho^{q_{n,r}})=\frac{d}{dt}(\ln(1+\rho'^2)),$$

donde

$$\rho^{q_{n,r}}=c(1+\rho'^2).$$

Usando as condições iniciais em ρ conclui-se que $c=1$, como queríamos. $\square$

Obs 4. *A proposição anterior classifica, a menos de movimentos rígidos e dilatações, as hipersuperfícies r-mínimas de rotação (catenóides) em $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Obs 5. *Note que, como a função perfil ρ é par, ela está definida num intevalo maximal $(-T,T)$, $0<T\leqslant+\infty$. Mais ainda, $T<+\infty$ se, e somente se, a* condição de planaridade

$$n>2(r+1) \tag{3.10}$$

se verifica. A terminologia deve-se ao fato de que esta condição distingue precisamente aqueles catenóides que possuem fins planares, ou seja, que são assintóticos a hiperplanos.

3.2 O operador de Jacobi dos catenóides

No sentido de determinar o operador de Jacobi dos catenóides, será conveniente reparametrizá-los, introduzindo um novo sistema de coordenadas. Em conformidade com a Observação 5, suporemos a partir de agora que todos os catenóides considerados possuem fins planares, ou seja, que seja válida a condição de planaridade (3.10).

[1] Note que (3.9) implica que ρ nunca se anula.

Seja $\chi : \mathbb{R} \to (-T, T)$ um difeomorfismo crescente que será escolhido convenientemente. Então, se $\psi(s) = (\rho \circ \chi)(s)$, temos

$$\dot{\psi}^2(s) + \dot{\chi}^2(s) = \psi^2(s)c_{n,r},$$

onde o ponto denota a derivada com respeito a s e $c_{n,r}$ é uma constante positiva a ser escolhida. Segue-se que

$$\dot{\psi}(s) = \rho'(t)\dot{\chi}(s) \Rightarrow \dot{\psi}^2(s) = \rho'(t)^2\dot{\chi}^2(s),$$

implicando assim que

$$\psi(s)^2c_{n,r} = \dot{\psi}^2(s) + \dot{\chi}^2(s) = \dot{\chi}^2(s)(\rho'(t)^2 + 1) = \dot{\chi}^2(s)\psi(s)^{q_{n,r}},$$

donde

$$\dot{\chi}(s) = \sqrt{c_{n,r}}\psi(s)^{1-\frac{1}{2}q_{n,r}} = \sqrt{c_{n,r}}\psi(s)^{p_{n,r}}, \tag{3.11}$$

onde

$$p_{n,r} = 1 - \frac{1}{2}q_{n,r} = \frac{2(r+1) - n}{r+1} < 0,$$

em virtude da hipótese de planaridade $n > 2(r + 1)$.

É natural agora exigir que χ satisfaça a equação (3.11) e a condição inicial $\chi(0) = 0$. Por simplicidade escreveremos $\psi(s) = \rho(s)$ e $\chi(s) = t(s)$, de modo que (3.11) tomará a forma

$$\dot{t}(s) = \sqrt{c_{n,r}}\rho^{p_{n,r}}. \tag{3.12}$$

É fácil verificar agora que, em termos do parâmetro s, a curva perfil satisfaz

$$\dot{\rho}^2 = c_{n,r}\left(\rho^2 - \rho^{2p_{n,r}}\right). \tag{3.13}$$

Esta equação diferencial permite determinar precisamente o comportamento assintótico de ρ. Com efeito, note que, como $n > 2(r + 1)$, segue que $p_{n,r} < 0$ e portanto para s suficientemente grande, tem-se que $\rho^{2p_{n,r}} \sim 0$ e então

$$\dot{\rho} \sim \pm\sqrt{c_{n,r}}\rho$$

sendo $\dot{\rho} \sim \sqrt{c_{n,r}}\rho$ para $s > 0$ e $\dot{\rho} \sim -\sqrt{c_{n,r}}\rho$ para $s < 0$, acarretando que a função ρ tem o comportamento assintótico da função exponencial $e^{\pm\sqrt{c_{n,r}}s}$, o que será representado por $\rho \sim e^{\pm\sqrt{c_{n,r}}s}$. Lembrando-se ainda que

$$\begin{aligned}\ddot{\rho} &= c_{n,r}\rho - p_{n,r}c_{n,r}\rho^{2p_{n,r}-1} \\ &= c_{n,r}\rho - p_{n,r}c_{n,r}\rho^{k_{n,r}},\end{aligned}$$

temos os seguinte resultado.

Proposição 2. *A expansão assintótica da função perfil é*

$$\rho(s) \sim a e^{\pm\sqrt{c_{n,r}}s} + \mathcal{O}\left(e^{\pm\sqrt{c_{n,r}}k_{n,r}s}\right) \tag{3.14}$$

onde $k_{n,r} = 2p_{n,r} - 1 = 3 - 2n/(r+1) < 0$ *e* a *é uma constante positiva dependendo de* n *e* r*.*

Feito isto, consideremos a nova parametrização

$$(\theta, s) \mapsto (\rho(s)\theta, t(s)), \quad (\theta, s) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R},$$

cujos campos coordenadas são

$$e_i(\theta, s) = (\rho(s)\theta_i, 0), \quad e_s(\theta, s) = (\dot{\rho}(s)\theta, \dot{t}(s)).$$

Os invariantes diferenciais de $\mathcal{C}$ podem ser facilmente calculados em termos das novas coordenadas. Assim, a métrica g é

$$(g_{ij}) = \rho^2 \begin{pmatrix} \sigma_{ij} & 0 \\ 0 & c_{n,r} \end{pmatrix}$$

e o vetor normal unitário é

$$N(\theta, s) = \frac{1}{\sqrt{c_{n,r}}\rho(s)}(\dot{t}(s)\theta, -\dot{\rho}(s)).$$

Como $e_{ss} = (\ddot{\rho}\theta, \ddot{t})$ temos

$$b_{ss} = \langle e_{ss}, N\rangle = \frac{1}{\sqrt{c_{n,r}}\rho}(\dot{t}\ddot{\rho} - \ddot{t}\dot{\rho}),$$

e ainda

$$N_\alpha = \frac{1}{\sqrt{c_{n,r}}\rho}(\dot{t}\theta_\alpha, 0)$$

leva a

$$b_{\alpha\beta} = -\langle e_\beta, N_\alpha\rangle = -c_{n,r}^{-1/2}\dot{t}\sigma_{\alpha\beta} = -\rho^{p_{n,r}}\sigma_{\alpha\beta}.$$

Note também que $b_{s\alpha} = 0$.

Lembrando agora que (3.9) implica

$$\rho'' = \frac{1}{2}q_{n,r}\rho^{q_{n,r}-1},$$

e que $\dot{\rho} = \rho'\dot{t}$ implica $\dot{t}\ddot{\rho} = \rho''\dot{t}^3 + \dot{\rho}\ddot{t}$, temos

$$\frac{\dot{t}\ddot{\rho} - \dot{\rho}\ddot{t}}{\sqrt{c_{n,r}}\rho} = c_{n,r}^{-1/2}\rho^{-1}\rho''\dot{t}^3 = \frac{1}{2}q_{n,r}c_{n,r}\rho^{q_{n,r}-2+3p_{n,r}} = \frac{1}{2}q_{n,r}c_{n,r}\rho^{p_{n,r}},$$

donde a segunda forma fundamental de $\mathcal{C}$ é

$$(b_{ij}) = -\rho^{p_{n,r}} \begin{pmatrix} \sigma_{ij} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}q_{n,r}c_{n,r} \end{pmatrix}.$$

Por outro lado,

$$(g^{ij}) = \frac{1}{\rho^2} \begin{pmatrix} \sigma^{ij} & 0 \\ 0 & c_{n,r}^{-1} \end{pmatrix}$$

e assim a matriz do endomorfismo de Weingarten de Σ é

$$(a_i^j) = (g^{ik})(b_{kj}) = -\rho^{p_{n,r}-2} \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{n-1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}q_{n,r} \end{pmatrix}.$$

Para futura referência, mencionamos ainda que a *terceira forma fundamental* de Σ, definida por $\tau_{\alpha\beta} = \langle N_\alpha, N_\beta \rangle$, é dada por

$$\tau_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(\kappa^2, \ldots, \kappa^2, \kappa_s^2). \tag{3.15}$$

Obs 6. *Note que como os invariantes diferenciais do catenóide dependem de ρ, função cujo comportamento assintótico é completamente determinado pela Proposição 2, segue que o comportamento assintótico destes invariantes também o é.*

A determinação da constante $c_{n,r}$ introduzida acima está vinculada à simplicação da expressão do operador de Jacobi. Para esse fim, note que, se $m_{n,r} = p_{n,r} - 2$,

$$P_r(e_s) = S_r(\widehat{e}_s)e_s = \binom{n-1}{r}(-\rho^{m_{n,r}})^r e_s = (-1)^r \binom{n-1}{r} \rho^{m_{n,r}r} e_s,$$

e, além disso,

$$\begin{aligned} P_r(e_i) = S_r(\widehat{e}_i)e_i &= \left[\binom{n-2}{r}(-\rho^{m_{n,r}})^r - \frac{1}{2}q_{n,r}\binom{n-2}{r-1}(-\rho^{m_{n,r}})^r\right] e_i \\ &= \frac{(-1)^r}{r+1}\binom{n-2}{r}\rho^{m_{n,r}r}e_i. \end{aligned}$$

Seja agora $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathcal{C}$ é aberto. Se ∇ é o gradiente em $\mathcal{C}$, temos

$$\nabla u = \sum_{i=1}^{n-1} u_i g^{ii} e_i + u_s g^{ss} e_s = \sum_{i=1}^{n-1} u_i \rho^{-2} \sigma^{ii} e_i + u_s c_{n,r}^{-1} \rho^{-2} e_s,$$

donde

$$\begin{aligned} P_r(\nabla u) &= \sum_{i=1}^{n-1} u_i g^{ii} e_i + u_s g^{ss} e_s \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} u_i \rho^{-2} \sigma^{ii} P_r(e_i) + u_s c_{n,r}^{-1} \rho^{-2} P_r(e_s), \end{aligned}$$

implicando assim que

$$P_r(\nabla u) = \frac{(-1)^r}{r+1}\binom{n-2}{r}\sum_{i=1}^{n-1} u_i \rho^{m_{n,r}r-2}\sigma^{ii}e_i + (-1)^r\binom{n-1}{r}u_s c_{n,r}^{-1}\rho^{m_{n,r}r-2}e_s.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
L_r(u) &= \frac{(-1)^r}{r+1}\binom{n-2}{r}\frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}}\sum_{i=1}^{n-1}\partial_i\left(\sqrt{\det(g_{ij})}u_i\rho^{m_{n,r}r-2}\sigma^{ii}\right)\\
&\quad +(-1)^r\binom{n-1}{r}c_{n,r}^{-1}\frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}}\partial_s\left(\sqrt{\det(g_{ij})}u_s\rho^{m_{n,r}r-2}\right)\\
&= \frac{(-1)^r}{r+1}\binom{n-2}{r}\rho^{m_{n,r}r-2}\frac{1}{\sqrt{\det(\sigma_{ij})}}\sum_{i=1}^{n-1}\partial_i\left(\sqrt{\det(\sigma_{ij})}u_i\sigma^{ii}\right)\\
&\quad +(-1)^r\binom{n-1}{r}\frac{c_{n,r}^{-1}}{\rho^n}\partial_s\left(u_s\rho^{m_{n,r}r-2+n}\right)\\
&= \frac{(-1)^r}{r+1}\binom{n-2}{r}\rho^{m_{n,r}r-2}\Delta u + (-1)^r\binom{n-1}{r}\frac{c_{n,r}^{-1}}{\rho^n}\partial_s\left(\rho^{-p_{n,r}}u_s\right)\\
&= \frac{(-1)^r q_{n,r}}{2(n-1)}\binom{n-1}{r}\rho^{m_{n,r}r-2}\Delta u + (-1)^r\binom{n-1}{r}\frac{c_{n,r}^{-1}}{\rho^n}\partial_s\left(\rho^{-p_{n,r}}u_s\right),
\end{aligned}$$

onde Δ é o Laplaciano em $\mathbb{S}^{n-1}$. Escolhamos agora $c_{n,r}$ pondo

$$c_{n,r} = \frac{2(n-1)}{q_{n,r}} = \frac{(n-1)(r+1)}{n-(r+1)},$$

de modo que

$$L_r u = \frac{(-1)^r q_{n,r}}{2(n-1)}\binom{n-1}{r}\rho^{m_{n,r}r-2}\Delta u + \frac{(-1)^r q_{n,r}}{2(n-1)}\binom{n-1}{r}\frac{1}{\rho^n}\partial_s\left(\rho^{-p_{n,r}}u_s\right).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
S_{r+2} &= \left[\binom{n-1}{r+2} - \frac{1}{2}q_{n,r}\binom{n-1}{r+1}\right](-1)^r\rho^{m_{n,r}(r+2)}\\
&= \frac{(-1)^{r+1}n(n-r-1)}{(r+1)^2(r+2)}\binom{n-1}{r}\rho^{m_{n,r}(r+2)},
\end{aligned}$$

donde

$$-(r+2)S_{r+2} = \frac{(-1)^r n q_{n,r}}{2(r+1)}\binom{n-1}{r}\rho^{m_{n,r}(r+2)}.$$

Como conseqüência, temos a seguinte expressão para o operador de Jacobi:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_r u &= \frac{(-1)^r q_{n,r}}{2(n-1)}\binom{n-1}{r}\rho^{m_{n,r}r-2}\Delta u + \frac{(-1)^r q_{n,r}}{2(n-1)}\binom{n-1}{r}\frac{1}{\rho^n}\partial_s\left(\rho^{-p_{n,r}}u_s\right)\\
&\quad +\frac{(-1)^r n q_{n,r}}{2(r+1)}\binom{n-1}{r}\rho^{m_{n,r}(r+2)}u,
\end{aligned}$$

Note que, após algumas simplificações,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_J u &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{(-1)^r 2(n-1)}{q_{n,r}} \binom{n-1}{r}^{-1} \rho^n \mathcal{L}_r u \\ &= \rho^{-p_{n,r}} \Delta u + \partial_s(\rho^{-p_{n,r}} u_s) + \frac{n(n-1)}{(r+1)} \rho^{\frac{-n}{r+1}} u. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Consideremos agora o *operador de Jacobi normalizado*

$$\mathcal{L}_N \stackrel{\text{def}}{=} \rho^{\frac{p_{n,r}}{2}} \mathcal{L}_J \left(\rho^{\frac{p_{n,r}}{2}} \right), \tag{3.17}$$

donde

$$\mathcal{L}_N u = \rho^{\frac{p_{n,r}}{2}} \partial_s \left(\rho^{-p_{n,r}} \partial_s \left(\rho^{\frac{p_{n,r}}{2}} u \right) \right) + \Delta u + \frac{n(n-1)}{r+1} \rho^{2 - \frac{2n}{r+1}} u. \tag{3.18}$$

Desenvolvendo o primeiro termo de (3.18), temos

$$\rho^{\frac{p_{n,r}}{2}} \partial_s \left(\rho^{-p_{n,r}} \partial_s \left(\rho^{\frac{p_{n,r}}{2}} u \right) \right) = -\frac{p_{n,r}}{2} \left[\left(\frac{p_{n,r}}{2} + 1 \right) \rho^{-2} \dot{\rho}^2 + \rho^{-1} \ddot{\rho} \right] u + \partial_{ss} u.$$

Recordemos agora que (3.13) implica

$$\rho^{-2} \dot{\rho}^2 = c_{n,r}(1 - \rho^{2p_{n,r} - 2})$$

e ainda $\ddot{\rho} = c_{n,r}(\rho - p_{n,r} \rho^{2p_{n,r} - 1})$, donde

$$\rho^{-1} \ddot{\rho} = c_{n,r}(1 - p_{n,r} \rho^{2p_{n,r} - 2}),$$

seguindo-se assim que

$$\rho^{\frac{p_{n,r}}{2}} \partial_s \left(\rho^{-p_{n,r}} \partial_s \left(\rho^{\frac{p_{n,r}}{2}} u \right) \right) = \frac{p_{n,r}}{2} \, c_{n,r} \left(-\frac{p_{n,r}}{2} + 1 \right) \rho^{2 - \frac{2n}{r+1}} u - \frac{c_{n,r} p_{n,r}^2}{4} u + \partial_{ss} u.$$

Desta forma,

$$\mathcal{L}_N u = \partial_{ss} u + \Delta u - \frac{p_{n,r}^2}{4} c_{n,r} u + e_{n,r} \rho^{2 - \frac{2n}{r+1}} u, \tag{3.19}$$

onde

$$e_{n,r} = \frac{n c_{n,r} p_{n,r}}{4(r+1)} + \frac{n(n-1)}{r+1}.$$

Proposição 3. *O operador de Jacobi normalizado $\mathcal{L}_N$ ao longo do catenóide é dado por*

$$\mathcal{L}_N = \mathcal{D} + e_{n,r} \rho^{-q_{n,r}}, \tag{3.20}$$

onde

$$\mathcal{D} = \partial_{ss} + \Delta - c_{n,r} d_{n,r}^2, \quad d_{n,r} = -p_{n,r}/2. \tag{3.21}$$

Obs 7. *Veja que a condição de planaridade (3.10) implica $\rho^{-q_{n,r}} = \rho^{2 - \frac{2n}{r+1}} \to 0$ quando $\rho \to \infty$, o que acontece quando $s \to \infty$. Desta forma, as soluções da equação $\mathcal{D}u = 0$ têm o mesmo comportamento assintótico das soluções da equação $\mathcal{L}_N u = 0$, os chamados* campos de Jacobi normalizados.

3.3 Raízes indiciais e campos de Jacobi normalizados

A Proposição 3 e a Observação 7 reduzem o problema de determinar o comportamento assintótico das soluções da equação $\mathcal{L}_N u = 0$, ou seja, campos de Jacobi normalizados, ao problema correspondente para $\mathcal{D}u = 0$. Para tanto, seja χ_j uma auto-função de Δ correspondente ao autovalor λ_j, isto é, $\Delta\chi_j = -\lambda_j\chi_j$. Se $u = e^{\gamma s}\chi_j$ é solução de $\mathcal{D}u = 0$ temos que

$$(\gamma^2 - \lambda_j - c_{n,r}d_{n,r}^2)e^{\gamma s}\chi_j = 0, \tag{3.22}$$

donde

$$\gamma^2 = \lambda_j + c_{n,r}d_{n,r}^2.$$

Com base nisso definiremos as *raízes indiciais* pondo

$$\gamma_j^{\pm} = \pm\sqrt{\lambda_j + c_{n,r}d_{n,r}^2}. \tag{3.23}$$

Como $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = ... = \lambda_n = n - 1$ e $\lambda_{n+1} = 2n$ as raízes indiciais tomarão a forma

$$\gamma_0^{\pm} = \pm\sqrt{c_{n,r}}d_{n,r}, \quad \gamma_1^{\pm} = \pm\frac{n}{2(r+1)}\sqrt{c_{n,r}} \ \text{ e } \ \gamma_{n+1}^{\pm} = \pm\sqrt{2n + c_{n,r}d_{n,r}^2},$$

e assim por diante. Conclui-se que o comportamento assintótico das soluções da equação homogênea $\mathcal{D}u = 0$, e portanto dos campos de Jacobi normalizados, é determinado por funções da forma $e^{\gamma_j^{\pm} s}$.

Observe agora que se X é um campo vetorial em $\mathbb{R}^{n+1}$ que deixa invariante[2] a equação $S_{r+1} = 0$, então $u = \langle X, N\rangle$ é campo de Jacobi, donde $v = \rho^{-\frac{p_{n,r}}{2}}u$ é campo de Jacobi normalizado. Determinaremos agora o comportamento assintótico destes objetos para os casos a seguir.

1. Considere o campo vetorial $X = (0, ..., 0, 1)$ que gera uma translação ao longo do eixo de revolução de $\mathcal{C}$. Temos $N = w^{-1}(\theta\dot{t}, -\dot{\rho})$, onde $w^2 = t^2 + \dot{\rho}^2 = c_{n,r}\rho^2$, e portanto,

$$u = -w^{-1}\dot{\rho} \Rightarrow v = \rho^{-\frac{p_{n,r}}{2}}u = -c_{n,r}^{-1/2}\rho^{-1-\frac{p_{n,r}}{2}}\dot{\rho}.$$

Lembrando o comportamento assintótico de $\dot{\rho}$ segue que

$$v \sim \rho^{-\frac{p_{n,r}}{2}} \sim e^{\pm\sqrt{c_{n,r}}d_{n,r}s} = e^{\gamma_0^{\pm}s},$$

e assim

$$v \sim e^{\gamma_0^{\pm}s}.$$

[2]A invariância é no sentido de a equação $S_{r+1} = 0$ ser invariante ao longo do fluxo local do campo X.

2. Tome agora $X = (\rho\theta, t)$, o vetor posição associado a dilatações. Teremos

$$u = w^{-1}(\rho\dot{t} - \dot{\rho}t),$$

implicando

$$v = \rho^{-\frac{p_{n,r}}{2}} u = c_{n,r}^{-1/2} \rho^{-\frac{p_{n,r}}{2}} (\rho\sqrt{c_{n,r}}\rho^{p_{n,r}} - \dot{\rho}t).$$

Note agora que $\dot{t} = \sqrt{c_{n,r}}\rho^{p_{n,r}}$ e assim $\dot{t} \sim \sqrt{c_{n,r}} e^{p_{n,r}\sqrt{c_{n,r}}s}$, o que confirma o fato de t ser limitado como função de s. Assim, com base nas últimas afirmações o comportamento assintótico de v é da forma

$$v \sim \rho^{\frac{p_{n,r}}{2}} = \rho^{-d_{n,r}} \sim e^{\mp d_{n,r}\sqrt{c_{n,r}}s} = e^{\gamma_0^{\mp} s}.$$

Note que o sinal no expoente da exponencial é $\mp$ e não $\pm$ como nos outros casos, em virtude de $v \sim e^{\gamma_0^- s}$ quando $s \to +\infty$ e $v \sim e^{\gamma_0^+ s}$ quando $s \to -\infty$.

3. Considere translações ao longo das direções e_j, $j = 1, ..., n-1$, ortogonais ao eixo de rotação de $\mathcal{C}$, gerando

$$u = w^{-1}\dot{t} = c_{n,r}^{-1/2}\rho\sqrt{c_{n,r}}\rho^{p_{n,r}} = \rho^{p_{n,r}-1},$$

donde

$$v = \rho^{-\frac{p_{n,r}}{2}} = \rho^{\frac{p_{n,r}}{2}-1}. \tag{3.24}$$

Usando que $\frac{p_{n,r}}{2} - 1 = -\frac{n}{2(r+1)}$ segue que

$$v \sim e^{\pm\frac{n}{2(r+1)}\sqrt{c_{n,r}}s} = e^{\gamma_1^{\pm} s}.$$

4. Finalmente, considere rotações de $\mathcal{C}$ em torno das direções ortogonais ao eixo e_{n+1}. Temos

$$u = w^{-1}(t\dot{t} + \rho\dot{\rho}),$$

donde

$$v = \rho^{-\frac{p_{n,r}}{2}} u \sim \rho^{-\frac{p_{n,r}}{2}} \rho^{-1} c_{n,r}^{-1/2} (t\sqrt{c_{n,r}}\rho^{p_{n,r}} + \rho\sqrt{c_{n,r}}\rho).$$

Como $\dot{\rho} \sim \sqrt{c_{n,r}}\rho$ e $\dot{t} = \sqrt{c_{n,r}}\rho^{p_{n,r}}$ tem-se

$$v \sim \rho^{\frac{p_{n,r}}{2}-1}t + \rho^{-\frac{p_{n,r}}{2}+1} \sim \rho^{-\frac{p_{n,r}}{2}+1} \sim e^{\pm\frac{n}{2(r+1)}\sqrt{c_{n,r}}s} = e^{\gamma_1^{\pm} s}.$$

Aqui foi usado que $\rho^{\frac{p_{n,r}}{2}-1}t$ é limitado.

Obs 8. *Note que é crucial a hipótese de planaridade (3.10) nesta análise, pois a mesma depende do fato de* $t = t(s)$ *ser uma função limitada.*

Obs 9. *Note que temos um campo de Jacobi no item* 1*, outro no item* 2*,* n *campos no item* 3 *e* n *campos no item* 4*, totalizando uma família de* $2(n+1)$ *campos de Jacobi. Pela análise prévia, os campos de Jacobi normalizados correspondentes possuem comportamento assintótico determinado pelas raízes indiciais* γ_0^- *e* γ_1^-.

Capítulo 4

Análise do Operador de Jacobi

Neste capítulo discutiremos as propriedades analíticas do operador de Jacobi normalizado $\mathcal{L}_N$, definido em hipersuperfícies r-mínimas com fins planares, em certos espaços de Hölder com peso.

4.1 Análise do operador de Jacobi no catenóide

Sejam $\alpha \in (0,1)$ e $m \geqslant 0$ um inteiro. Se $\mathcal{C}_0$ é o catenóide truncado definido por $s \geqslant 0$ então, para cada $\delta \in \mathbb{R}$, podemos considerar o espaço de Hölder $\mathcal{E}_\delta^{m,\alpha}(\mathcal{C}_0)$ formado pelas funções w em $\mathcal{C}_0$ tais que a norma

$$\| w \|_{m,\alpha,\delta} = \sup_{s \geqslant 0} |e^{-\delta s} w|_{C^{m,\alpha}([s,s+1]\times\mathbb{S}^{n-1})}$$

é finita. Aqui, $|.|_{C^{m,\alpha}}$ é a norma de Hölder padrão. Consideremos agora hipersuperfícies r-mínimas $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ que podem ser decompostas em uma parte compacta, digamos Σ_c, e k fins, $E_1, ..., E_k$, $k \geqslant 2$. Admitamos ainda que cada fim E_i, a menos de movimentos rígidos e dilatações, pode ser escrito como um gráfico normal X_i sobre $\mathcal{C}_0$, significando que

$$X_i = X_0 + \rho^{\frac{p_{n,r}}{2}} w N,$$

com $w \in \mathcal{E}_\delta^{m,\alpha}(\mathcal{C}_0)$, $\delta \in (\gamma_{n+1}^-, \gamma_1^-)$. Aqui, X_0 é a parametrização de $\mathcal{C}_0$. Mais ainda, suponhamos que Σ é elíptica; veja Definição 5.

Definição 7. *O espaço de todas as hipersuperfícies r-mínimas $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ cumprindo as condições acima será denotado por $\mathcal{M}_{r,k}$.*

Se $\Sigma \in \mathcal{M}_{r,k}$ e $\delta \in \mathbb{R}$ podemos definir o espaço de Hölder com peso $\mathcal{E}_{\delta}^{m,\alpha}(\Sigma)$, requerendo a finitude da norma

$$\| w \|_{m,\alpha,\delta} = |w_{|\Sigma_c}|_{C^{m,\alpha}} + \sum_{i=1}^{k} \| w_{|E_i} \|_{m,\alpha,\delta} .$$

Note que, se $\delta < \delta'$, a inclusão

$$\mathcal{E}_{\delta}^{m,\alpha} \hookrightarrow \mathcal{E}_{\delta'}^{m,\alpha}$$

é contínua. Mais ainda, usando a identificação dada pela representação gráfica, a função ρ pode ser transplantada para cada fim e então estendida para Σ como uma função positiva. Como resultado, o operador de Jacobi normalizado $\mathcal{L}_N$ pode ser similarmente estendido e define um operador limitado

$$\mathcal{L}_N : \mathcal{E}_{\delta}^{m,\alpha}(\Sigma) \to \mathcal{E}_{\delta}^{m-2,\alpha}(\Sigma).$$

Definição 8. *Uma hipersuperfície* $\Sigma^n \in \mathcal{M}_{r,k}$ *é* não-degenerada *se o operador de Jacobi normalizado* $\mathcal{L}_N : \mathcal{E}_{\delta}^{2,\alpha}(\Sigma^n) \to \mathcal{E}_{\delta}^{0,\alpha}(\Sigma^n)$ *é injetivo para* $\delta < \gamma_1^-$.

Proposição 4. *O catenóide* $\mathcal{C}$ *é não-degenerado.*

Demonstração. Aqui, adaptamos um argumento de [KP]. Seja $w = \sum_j w_j$ a decomposição em auto-funções das soluções de $\mathcal{L}_N w = 0$, que por hipótese são limitadas por $e^{\delta s}$. Então cada w_j é solução de $\mathcal{L}_N^{(j)} w_j = 0$, onde $\mathcal{L}_N^{(j)}$ é a projeção de $\mathcal{L}_N$ sobre o j-ésimo auto-espaço de $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Para cada $0 \leqslant j \leqslant n$, w_j deve ser então uma combinação linear dos campos de Jacobi discutidos no final do capítulo anterior, de modo que, pela nossa escolha de δ, temos $w_j = 0$. Mais ainda, w_j decai no máximo como $e^{\gamma_j^- s}$ para $j \geqslant n+1$. Temos ainda por (3.24) que $v = \rho^{\frac{-n}{2(r+1)}} \varphi_1$ é solução de

$$\mathcal{L}_N^{(1)}(v) = 0.$$

Note ainda que v tem comportamento assintótico do tipo $e^{\gamma_1^- s}$ e, além disso, que a função $v_\xi = v - \xi w_j$, $\xi \in \mathbb{R}$, torna-se positiva no infinito, uma vez que w_j se anula aí mais rapidamente que v. Agora, se ξ_0 é o supremo dos números reais ξ tais que $v_\xi \geqslant 0$, segue que v_{ξ_0} tem um ponto mínimo, no qual v_{ξ_0} se anula. Entretanto, a equação $\mathcal{L}_N^{(j)} w_j = 0$ fornece

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{ss} w_j - \lambda_j w_j - c_{n,r} d_{n,r}^2 w_j + e_{n,r} \rho^{-q_{n,r}} w_j \\ &= \partial_{ss} w_j - (\gamma_j^-)^2 w_j + e_{n,r} \rho^{-q_{n,r}} w_j, \end{aligned}$$

donde,

$$\partial_{ss} w_j = (\gamma_j^-)^2 w_j - e_{n,r} \rho^{-q_{n,r}} w_j.$$

Temos ainda

$$\mathcal{L}_N^{(1)} v \quad = \quad \partial_{ss} v - \lambda_1 v - c_{n,r} d_{n,r}^2 v + e_{n,r} \rho^{-q_{n,r}} v = 0,$$

implicando que

$$\partial_{ss} v = (\gamma_1^-)^2 v - e_{n,r} \rho^{-q_{n,r}} v.$$

Usando que $\partial_{ss} v_{\xi_0} = \partial_{ss} v - \xi_0 \partial_{ss} w_j$, temos

$$\partial_{ss} v_{\xi_0} - (\gamma_j^-)^2 v_{\xi_0} + e_{n,r} \rho^{-q_{n,r}} v_{\xi_0} = [(\gamma_1^-)^2 - (\gamma_j^-)^2] v,$$

implicando assim que $\partial_{ss} v_{\xi_0} < 0$, o que contradiz a existência do ponto de mínimo para a escolha de ξ_0. Logo, $w = 0$, como desejado. $\square$

4.2 O espaço de deficiência

Como vimos na Seção 3.3, sobre o catenóide existe uma família de dimensão $2(n+1)$ de campos de Jacobi. Logo, se $E_i \subset \Sigma$, $\Sigma \in \mathcal{M}_{r,k}$, é um fim, podemos transplantar para E_i estes campos de Jacobi, de forma a obter campos que são assintoticamente de Jacobi. Estes serão denotados por $\Psi_i^{j,\pm}$, $j = 1, ..., 2(n+1)$. Sobre cada fim considere a função de corte $\chi^{(i)}$ que vale 1 na parte infinita contendo E_i e 0 na região de E_i próxima de Σ_c, sendo estendida como zero no complementar de E_i.

Definição 9. *O* espaço de deficiência *é*

$$W_\Sigma = \left[\chi^{(i)} \Psi_i^{j,\pm}\right]_{i=1,\ldots,k; j=0,1,\ldots,2(n+1)},$$

donde

$$\dim W_\Sigma = 2k(n+1).$$

A importância de W_Σ aparece na seguinte proposição; veja [FP],[KMP], [MPU], [MPo], [P].

Proposição 5. *Se* $\Sigma \in \mathcal{M}_{r,k}$ *é não-degenerada e* $\delta \in (\gamma_{n+1}^-, \gamma_1^-)$ *existe um* operador de Jacobi estendido

$$\widetilde{\mathcal{L}}_N : \mathcal{E}_\delta^{2,\alpha}(\Sigma) \oplus W_\Sigma \longrightarrow \mathcal{E}_\delta^{0,\alpha}(\Sigma),$$

que é limitado e sobrejetivo. Mais ainda,

$$\dim \ker \widetilde{\mathcal{L}}_N = \frac{1}{2} \dim W_\Sigma = k(n+1). \tag{4.1}$$

Demonstração. Daremos aqui um esboço da demonstração, bastante conhecida, deste resultado. A não-degenerescência e dualidade implicam que

$$\mathcal{L}_N : \mathcal{E}^{2,\alpha}_{-\delta}(\Sigma) \to \mathcal{E}^{0,\alpha}_{-\delta}(\Sigma)$$

é sobrejetivo. Então, se $f \in \mathcal{E}^{0,\alpha}_{\delta}(\Sigma) \hookrightarrow \mathcal{E}^{0,\alpha}_{-\delta}(\Sigma)$, existe $u \in \mathcal{E}^{2,\alpha}_{-\delta}(\Sigma)$ tal que $\mathcal{L}_N(u) = f$. Agora, pelo Lema da Decomposição Linear [MPU], [KMP], [P], $u = u_\delta + u_{W_\Sigma}$, com $u_\delta \in \mathcal{E}^{2,\alpha}_{\delta}(\Sigma)$ e $u_{W_\Sigma} \in W_\Sigma$, o que prova a existência de $\widetilde{\mathcal{L}}_N$. A prova de (4.1) consiste em identificar $\dim \ker \widetilde{\mathcal{L}}_N$ com a metade do índice relativo de um certo par de operadores, o qual pode ser localmente calculados em cada fim, que contribui com $2(n+1)$ para este índice relativo, como queríamos. □

Obs 10. *Esta análise depende crucialmente da hipótese de planaridade $n > 2(r+1)$, visto que, neste caso, Σ é uma hipersuperfície do tipo Assintoticamente Localmente Euclidiana, uma classe de espaços para os quais a teoria de deformação mencionada acima se aplica.*

Capítulo 5

A $(r+1)$-curvatura de gráficos normais

Nesse capítulo, calculamos a $(r+1)$-curvatura média de gráficos normais sobre uma hipersuperfície r-mínima.

5.1 As formas fundamentais de gráficos normais

Seja $X : \Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersurperfície e consideremos $\{x^i\}_{i=1}^n$ coordenadas locais em Σ^n. Representemos por $\{e_i\}_{i=1}^n$ o referencial coordenado oriundo destas coordenadas. Denotaremos por N o campo vetorial normal unitário definido em Σ^n, que lhe confere uma orientação. Consideremos então coordenadas para uma vizinhança tubular $\mathcal{T}\Sigma$ definidas por

$$q \in \mathcal{T}\Sigma \mapsto (t, x^1, \ldots., x^n) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

onde

$$q = X(x^1, \ldots, x^n) + tN(X(x^1, \ldots, x^n))$$

para $X(x^1, \ldots, x^n) \in \Sigma$. Teremos, em virtude disto, que os campos coordenados na vizinhança tubular são

$$E_i = e_i + tN_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

e ainda

$$E_0 = N.$$

A métrica Euclidiana $(\widehat{g}_{ij})$ em $\mathcal{T}\Sigma$ é

$$\begin{aligned} \widehat{g}_{ij} = \langle E_i, E_j \rangle &= \langle e_i, e_j \rangle + t\left(\langle e_i, N_j \rangle + \langle e_j, N_i \rangle\right) + t^2 \langle N_i, N_j \rangle \\ &= g_{ij} - 2tb_{ij} + t^2 \tau_{ij}, \end{aligned}$$

e ainda, $\widehat{g}_{i0} = 0$ e $\widehat{g}_{00} = 1$. Se $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\Sigma^n)$ tem norma suficientemente pequena, o *gráfico normal* sobre Σ é a hipersuperfície cuja parametrização é

$$X_u = X + uN.$$

Seu espaço tangente será gerado pelos campos

$$\widetilde{e}_i = D_{e_i} X_u = e_i + u_i N + u N_i,$$

de modo que

$$\widetilde{e}_i = u_i E_0 + E_i.$$

Denotaremos por Λ o $(1,1)$-tensor $I_n - uA$, com matriz de coeficientes

$$\Lambda^i_j = \delta^i_j - u a^i_j,$$

ou ainda, após baixar índice, temos o $(0,2)$-tensor correspondente

$$\Lambda_{ij} = g_{ik} \Lambda^k_j = g_{ij} - u b_{ij}.$$

Com esta notação,

$$\widetilde{e}_i = \Lambda^j_i e_j + u_i N.$$

Note que nesta seção estaremos usando as notações clássicas do Cálculo Tensorial, incluindo a convenção da soma de Einstein.

Denotaremos os coeficientes da matriz inversa de Λ, $\Lambda^{-1} = (I_n - uA)^{-1}$ por h^i_j. Uma direção normal a X_u pode ser escrita como

$$\widetilde{N} = \frac{1}{\beta} N + \alpha^k e_k,$$

com α^k e β a determinar. Mas

$$0 = \langle \widetilde{N}, \widetilde{e}_i \rangle = \frac{1}{\beta} u_i + \Lambda^j_i \alpha^k g_{jk} = \frac{1}{\beta} u_i + \Lambda_{ik} \alpha^k,$$

donde

$$\alpha^m = -\frac{1}{\beta} u_i h^i_l g^{lm} = -\frac{1}{\beta} u_i h^{im},$$

onde $h^{im} = g^{ml} h^i_l$. Segue que

$$\widetilde{N} = \frac{1}{\beta}(N - h^{lm} u_l e_m),$$

e escolhendo β de sorte que $\langle \widetilde{N}, \widetilde{N} \rangle = 1$ teremos

$$\beta^2 = 1 - h^i_l g^{lk} h^j_k u_i u_j. \tag{5.1}$$

A métrica sobre o gráfico normal X_u tem como coeficientes

$$\widetilde{g}_{ij} = \langle \widetilde{e}_i, \widetilde{e}_i \rangle = g_{ij} - 2ub_{ij} + u^2\tau_{ij} + u_i u_j,$$

onde $\tau_{ij} = \langle N_i, N_j \rangle$ são os coeficientes da terceira forma fundamental de X.

Calcularemos agora os coeficientes da segunda forma fundamental $\widetilde{b}_{ij}$ associada ao gráfico normal X_u. Temos inicialmente

$$\begin{aligned} D_{\widetilde{e}_i}\widetilde{e}_j = \partial_i(\Lambda^k_j \partial_k X + u_j N) &= \partial_i(\Lambda^k_j) e_k + \Lambda^k_j \partial_i \partial_k X + u_{ij} N + u_j N_i \\ &= \partial_i(\Lambda^k_j) e_k + \Lambda^k_j D_{e_i} e_k + u_{ij} N + u_j N_i, \end{aligned}$$

donde

$$\langle D_{\widetilde{e}_i}\widetilde{e}_j, N \rangle = \Lambda^k_j b_{ik} + u_{ij} = b_{ij} - ua^k_j b_{ik} + u_{ij},$$

e ainda,

$$\begin{aligned} \langle D_{\widetilde{e}_i}\widetilde{e}_j, e_m \rangle &= \partial_i(\Lambda^k_j) g_{km} + \Lambda^k_j \langle D_{e_i} e_k, e_m \rangle - u_j a^k_i g_{km} \\ &= \partial_i(\Lambda^k_j) g_{km} + \Lambda^k_j \Gamma^r_{ik} g_{rm} - u_j a^k_i g_{km}, \end{aligned}$$

o que fornece

$$\begin{aligned} \langle D_{\widetilde{e}_i}\widetilde{e}_j, h^{lm} u_l e_m \rangle &= \partial_i(\Lambda^k_j) h^{lm} g_{km} u_l + \Lambda^k_j \Gamma^r_{ik} h^{lm} g_{rm} u_l \\ &\quad - u_j a^k_i h^{lm} g_{km} u_l \\ &= \partial_i(\Lambda^k_j) h^l_k u_l + \Lambda^k_j \Gamma^r_{ik} h^l_r u_l - u_j a^k_i h^l_k u_l, \end{aligned}$$

e de mão desse resultado segue que

$$\beta \langle D_{\widetilde{e}_i}\widetilde{e}_j, \widetilde{N} \rangle = b_{ij} - ua^k_j b_{ik} + u_{ij} - \partial_i(\Lambda^k_j) h^l_k u_l - \Lambda^k_j \Gamma^r_{ik} h^l_r u_l + a^k_i h^l_k u_j u_l.$$

Se

$$K \overset{\text{def}}{=} \det(I_n - uA) = \sum_{l=0}^{n} (-u)^l S_l \tag{5.2}$$

e $M^i_j = K h^i_j$ é o co-fator de Λ, temos

$$\begin{aligned} K\beta \langle D_{\widetilde{e}_i}\widetilde{e}_j, \widetilde{N} \rangle &= K(b_{ij} - ua^k_j b_{ik} + u_{ij}) - \partial_i(\Lambda^k_j) M^l_k u_l \\ &\quad - \Lambda^l_j \Gamma^r_{ik} M^l_r u_l + a^k_i M^l_k u_j u_l \\ &= K(b_{ij} - ua^k_j b_{ik} + u_{ij}) + \partial_i(a^k_j) M^l_k u u_l + a^k_j M^l_k u_i u_l \\ &\quad - \Gamma^r_{ij} M^l_r u_l + a^k_j \Gamma^r_{ik} M^l_r u u_l + a^k_i M^l_k u_j u_l, \end{aligned}$$

e utilizando a conhecida expressão da derivada covariante do endomorfismo de Weingarten $A = (a_j^k)$, qual seja,

$$a_{j,i}^k = \partial_i(a_j^k) + a_j^l \Gamma_{il}^k - a_l^k \Gamma_{ij}^l,$$

a última expressão tornar-se-á

$$\begin{aligned}
K\beta\langle D_{\widetilde{e}_i}\widetilde{e}_j, \widetilde{N}\rangle &= K(b_{ij} - u a_j^k b_{ik} + u_{ij}) + (a_{j,i}^k - a_j^r \Gamma_{ir}^k + a_r^k \Gamma_{ij}^r) M_k^l u_l u + \\
&\quad + a_j^k M_k^l u_i u_l - \Gamma_{ij}^r M_r^l u_l + a_j^k \Gamma_{ik}^r M_r^l u u_l + a_i^k M_k^l u_j u_l \\
&= K(b_{ij} - u a_j^k b_{ik} + u_{ij}) + a_{j,i}^k M_k^l u u_l \\
&\quad + a_r^k \Gamma_{ij}^r M_k^l u u_l + a_j^k M_k^l u_i u_l - \Gamma_{ij}^r M_r^l u_l \\
&= K(b_{ij} - u a_j^k b_{ik} + u_{ij}) \\
&\quad + (a_{j,i}^k u - \Gamma_{ij}^k + a_r^k \Gamma_{ij}^r u + a_j^k u_i + a_i^k u_j) M_k^l u_l,
\end{aligned}$$

onde as componentes M_k^l são dadas por

$$M_k^l = (-1)^{k+l} \det \Lambda_k^l,$$

com Λ_k^l sendo uma matriz obtida de Λ removendo-se a k-ésima linha e a l-ésima coluna. Assim, a soma

$$M_k^l u_l = u_l (-1)^{k+l} \det \Lambda_k^l$$

é a expansão de Laplace, com respeito à k-ésima linha, do determinante D_k obtido da matriz Λ substituindo-se a k-ésima linha da mesma pelo vetor

$$(u_1, \ldots, u_l, \ldots, u_n).$$

Mais explicitamente, numa base ortornormal principal, o determinante D_k é calculado como

$$D_k \stackrel{\text{def}}{=} M_k^l u_l = \det \begin{pmatrix} 1 - u\kappa_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_l & \cdots & u_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 - u\kappa_n \end{pmatrix},$$

implicando dessa forma que

$$D_k = u_k(1 - uS_{1,k} + u^2 S_{2,k} + \cdots + (-1)^n u^n S_{n-1,k}),$$

onde $S_{i,k} = S_i(\kappa_1, \ldots, \widehat{\kappa_k}, \ldots, \kappa_n)$. Aqui, o sinal sobre a curvatura indica que a mesma foi omitida. Temos ainda que

$$K = 1 - uS_1 + u^2S_2 + \ldots + (-1)^n u^n S_n.$$

Lembrando-se que os cálculos acima não dependem de coordenadas, obtemos

$$\begin{aligned}
K\beta\widetilde{b}_{ij} &= K(b_{ij} - ua_j^k b_{ik} + u_{ij}) + (a_{j,i}^k u - \Gamma_{ij}^k + a_r^k\Gamma_{ij}^r u + a_j^k u_i + a_i^k u_j)D_k \\
&= (1 - uS_1 + u^2S_2 + \ldots + (-1)^n u^n S_n)(b_{ij} - ua_j^k b_{ik} + u_{ij}) + \\
&\quad u_k(a_{j,i}^k u - \Gamma_{ij}^k + a_r^k\Gamma_{ij}^r u + a_j^k u_i + \\
&\quad + a_i^k u_j)(1 - uS_{1,k} + u^2S_{2,k} + \ldots + (-1)^n u^n S_{n-1,k})
\end{aligned}$$

e separando os termos do lado direito em sua parte linear e parte pelo menos quadrática tem-se

$$\begin{aligned}
K\beta\widetilde{b}_{ij} &= (1 - uS_1)b_{ij} - ua_j^k b_{ik} + u_{ij} - \Gamma_{ij}^k u_k + \mathcal{P}_{ij}(u, u_k, u_{kl}) \\
&= (1 - uS_1)b_{ij} - ua_j^k b_{ik} + u_{i,j} + \mathcal{P}_{ij}(u, u_k, u_{kl})
\end{aligned}$$

onde $u_{i,j} = u_{ij} - u_k\Gamma_{ij}^k$, são os coeficientes da hessiana intrínseca enquanto u_k e u_{kl} representam, respectivamente, a derivada da função u com respeito a k-ésima coordenada do sistema de coordenadas $\{(x^i)\}_{1=i}^n$, e u_{kl}, as derivadas de segunda ordem de u em relação as mesmas coordenadas.

A expressão de $\mathcal{P}_{ij}$ é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{ij} &= (u^2S_2 + \ldots + (-1)^n u^n S_n)b_{ij} + (-uS_1 + u^2S_2 + \ldots \\
&\quad \ldots + (-1)^n u^n S_n)(-ua_j^k b_{ik} + u_{ij}) + \\
&\quad u_k(a_{j,i}^k u - \Gamma_{ij}^k + a_r^k\Gamma_{ij}^r u + a_j^k u_i + a_i^k u_j)(1 - uS_{1,k} + u^2S_{2,k} + \ldots \\
&\quad \ldots + (-1)^n u^n S_{n-1,k}),
\end{aligned}$$

ou ainda, levantando o índice i,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_j^i &= (u^2S_2 + \ldots + (-1)^n u^n S_n)a_j^i + (-uS_1 + u^2S_2 + \ldots \\
&\quad \cdots + (-1)^n u^n S_n)(-ua_j^k a_k^i + g^{ik}u_{kj}) + \\
&\quad g^{is}u_k(a_{j,s}^k u - \Gamma_{sj}^k + a_r^k\Gamma_{sj}^r u + a_j^k u_s + a_s^k u_j)(1 - uS_{1,k} + u^2S_{2,k} + \ldots \\
&\quad \ldots + (-1)^n u^n S_{n-1,k}).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Vemos daí que $\mathcal{P}_j^i$ é um polinômio de grau $n+1$ nas variáveis u, u_k, u_{kl} cujos coeficientes dependem dos invariantes geométricos g^{kl}, a_k^l, $a_{k,l}^m$, Γ_{kl}^m.

Obs 11. *Pondo $u = \phi v$, onde ϕ será escolhida de forma conveniente a posteriori, teremos*

$$u_i = \phi_i v + \phi v_i = \phi\left(\frac{\phi_i}{\phi}v + v_i\right),$$

e ainda

$$u_{ij} = \phi_{ij}v + \phi_i v_j + \phi_j v_i + \phi v_{ij} = \phi\left(\frac{\phi_{ij}}{\phi} + \frac{\phi_i}{\phi}v_j + \frac{\phi_j}{\phi}v_i + v\right),$$

e dessa forma o polinômio $\mathcal{P}^i_j$ pode ser descrito como

$$\mathcal{P}^i_j = \sum_{k=2}^{n+1} \phi^k \mathcal{P}^i_{j,(k)}(v, v_l, v_{lm}),$$

onde $\mathcal{P}^i_{j,(k)}$ é um polinômio homogêneo de grau k, nas variáveis v, v_l, v_{lm} cujos coeficientes dependem de g^{kl}, a^l_k, $a^k_{k,l}$, Γ^m_{kl}, $\frac{\phi_k}{\phi}$ e $\frac{\phi_{kl}}{\phi}$.

5.2 A linearização da $(r+1)$-curvatura

Pelos cálculos anteriores, já sabemos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}_{ij} &= g_{ij} - 2ub_{ij} + u^2 r_{ij} + u_i u_j \\
&= g_{ik}(\delta^k_j - 2ua^k_j + u^2 r^k_j + u^k u_j) \\
&= g_{ik} G^k_j,
\end{aligned}$$

onde

$$G^k_j = \delta^k_j - 2ua^k_j + u^2 r^k_j + u^k u_j, \tag{5.4}$$

e ainda,

$$\begin{aligned}
K\beta\widetilde{b}_{ij} &= (1 - uS_1)b_{ij} - ua^l_j b_{il} + u_{i;j} + \mathcal{P}_{ij}(u, u_i, u_{ij}) \\
&= g_{ik}\left((1 - uS_1)a^k_j - ua^l_j a^k_l + u^k_{;j} + \mathcal{P}^k_j\right) \\
&= g_{ik} H^k_j,
\end{aligned}$$

onde

$$H^k_j = (1 - uS_1)a^k_j - ua^l_j a^k_l + u^k_{;j} + \mathcal{P}^k_j. \tag{5.5}$$

Usaremos isto para calcular a $(r+1)$-curvatura média de X_u, que denotaremos por $S_{r+1}(u)$.

Tendo em vista a expansão

$$\det(\delta^i_j - \xi\widetilde{a}^i_j) = \sum_{l=0}^{n} (-\xi)^l S_l(u),$$

onde $S_l(u)$ é a l-curvatura de X_u, e usando que $\widetilde{a}^i_j = \widetilde{g}^{ik}\widetilde{b}_{kj}$ e, portanto, $\widetilde{g}_{ik}\widetilde{a}^k_j = \widetilde{b}_{ij}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} K^n\beta^n \det(\widetilde{g}_{ij})\sum_{l=0}^{n}(-t)^l S_l(u) &= K^n\beta^n \det(\widetilde{g}_{ij} - t\widetilde{b}_{ij}) \\ &= \det(K\beta\widetilde{g}_{ij} - tK\beta\widetilde{b}_{ij}) \\ &= \det(K\beta g_{ik}G^k_j - t g_{ik}H^k_j) \\ &= \det(g_{ik})\det(K\beta G^k_j - tH^k_j). \end{aligned}$$

Daí obtemos

$$K^n\beta^n\frac{\det(\widetilde{g}_{ij})}{\det(g_{ij})}\sum_{l=0}^{n}(-t)^l S_l(u) = \det(K\beta G^k_j - tH^k_j),$$

e comparando os coeficientes de $(-t)^{l+1}$ temos

$$\begin{aligned} K^n\beta^n\frac{\det(\widetilde{g}_{ij})}{\det(g_{ij})}S_{r+1}(u) &= \sum_{i_1<\ldots<i_{r+1}} \det(K\beta G^1_j \ldots H^{i_1}_j \ldots H^{i_{r+1}}_j \ldots K\beta G^n_j) \\ &= \sum_{i_1<\ldots<i_{r+1}} (K\beta)^{n-r-1}\det(G^1_j \ldots H^{i_1}_j \ldots H^{i_{r+1}}_j \ldots G^n_j), \end{aligned}$$

o que fornece a identidade

$$K^{r+1}\beta^{r+1}\frac{\det(\widetilde{g}_{ij})}{\det(g_{ij})}S_{r+1}(u) = \sum_{i_1<\ldots<i_{r+1}} \det(G^1_j \ldots H^{i_1}_j \ldots H^{i_{r+1}}_j \ldots G^n_j),$$

que escreveremos na forma

$$\mathcal{S}_{r+1}(u) = \sum_{i_1<\ldots<i_{r+1}} \det(G^1_j \ldots H^{i_1}_j \ldots H^{i_{r+1}}_j \ldots G^n_j), \tag{5.6}$$

onde, por definição,

$$\mathcal{S}_{r+1}(u) = K^{r+1}\beta^{r+1}\frac{\det(\widetilde{g}_{ij})}{\det(g_{ij})}S_{r+1}(u). \tag{5.7}$$

Se substituirmos u por ξu em $\mathcal{S}_{r+1}$, teremos uma família a um parâmetro ξ de funções $\mathcal{S}_{r+1}(\xi u)$, com $\xi = 0$ correspondendo à superfície inicial Σ^n e $\xi = 1$ ao gráfico normal X_u. Estaremos agora interessados em calcular

$$\dot{\mathcal{S}}_{r+1}(u) = \frac{d}{d\xi}\Big|_{\xi=0}\mathcal{S}_{r+1}(\xi u), \tag{5.8}$$

a *linearização* de $\mathcal{S}_{r+1}$. Nesta seção, a mesma notação será reservada para a linearização, em relação a ξ, de outros invariantes dependentes de u.

É evidente de (5.6) que vale

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{S}}_{r+1}(u) &= \sum_{I:i_1<\ldots<i_{r+1}} \sum_{i\notin I} \det(G^1_j \ldots \dot{G}^i_j \ldots H^{i_1}_j \ldots H^{i_{r+1}}_j \ldots G^n_j) + \\ & \sum_{I:i_1<\ldots<i_{r+1}} \sum_{1\leqslant k\leqslant r+1} \det(G^1_j \ldots H^{i_1}_j \ldots \dot{H}^{i_k}_j \ldots H^{i_{r+1}}_j \ldots G^n_j),\end{aligned} \tag{5.9}$$

onde $\sum_{I:i_1<\ldots<i_{r+1}}$ indica soma sobre todos os multi-índices do tipo indicado. Note que excepcionalmente nesta seção, pontos representam linearização.

Note agora que $\mathcal{S}_{r+1}(\xi u)|_{\xi=0} = S_{r+1}$. Mais ainda, usando (5.1) e (5.2), vemos que o termo complicado, digamos $\Upsilon(u)$, que multiplica $S_{r+1}(u)$ no lado direito de (5.7) satisfaz $\Upsilon(\xi u)|_{\xi=0} = 1$, e isto é parte do que é preciso para demonstrar a seguinte importante proposição.

Proposição 6. *If $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é r-mínima então $\dot{\mathcal{S}}_{r+1} = \dot{S}_{r+1} = \mathcal{L}_r$.*

Para confirmar isto, devemos calcular o lado direiro de (5.9) em $\xi = 0$, que é

$$\begin{aligned}\text{l.d. de } (5.9)|_{\xi=0} &= \sum_{I:i_1<\ldots<i_{r+1}} \sum_{i\notin I} \det(\delta^1_j \ldots - 2ua^i_j \ldots a^{i_1}_j \ldots a^{i_{r+1}}_j \ldots \delta^n_j) + \\ & \sum_{I:i_1<\ldots<i_{r+1}} \sum_{1\leqslant k\leqslant r+1} \det(\delta^1_j \ldots a^{i_1}_j \ldots - uS_1 a^{i_k}_j + u^{i_k}_{;j} - \\ & -u a^{i_k}_k a^k_j \ldots a^{i_{r+1}}_j \ldots \delta^n_j)\end{aligned}$$

usando o linearidade do determinante tem-se

$$\begin{aligned}\text{l.d. de } (5.9)|_{\xi=0} &= -2u \sum_{I:i_1<\ldots<i_{r+1}} \sum_{i\notin I} \det(\delta^1_j \ldots a^i_j \ldots a^{i_1}_j \ldots a^{i_{r+1}}_j \ldots \delta^n_j) \\ & -uS_1 \sum_{I:i_1<\ldots<i_{r+1}} \sum_{1\leqslant k\leqslant r+1} \det(\delta^1_j \ldots a^{i_1}_j \ldots a^{i_k}_j \ldots a^{i_{r+1}}_j \ldots \delta^n_j) \\ & + \sum_{I:i_1<\ldots<i_{r+1}} \sum_{1\leqslant k\leqslant r+1} \det(\delta^1_j \ldots a^{i_1}_j \ldots u^{i_k}_{;j} \ldots a^{i_{r+1}}_j \ldots \delta^n_j) + \\ & -u \sum_{I:i_1<\ldots<i_{r+1}} \sum_{1\leqslant k\leqslant r+1} \det(\delta^1_j \ldots a^{i_1}_j \ldots a^{i_k}_k a^k_j \ldots a^{i_{r+1}}_j \ldots \delta^n_j) \\ &= -2u(r+2)S_{r+2} - u(r+1)S_1S_{r+1} + \\ & +L_r u - u\,(S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}) \\ &= L_r u - (r+2)S_{r+2}u,\end{aligned}$$

onde na última igualdade foi usado o fato de Σ^n ser r-mínima.

5.3 Os termos não-lineares da $(r+1)$-curvatura

Em virtude da Proposição 6, é natural supor, a partir de agora, que Σ é r-mínima. Determinaremos então a estrutura dos termos não-lineares, isto é, de ordem pelo menos quadráticas em u e suas derivadas, da $(r+1)$-curvatura de Σ_u.

Consideremos as seguintes abreviações:

$$H^i_j \stackrel{\text{def}}{=} a^i_j + uL^i_j + \mathcal{P}^i_j, \qquad L^i_j \stackrel{\text{def}}{=} -uS_1 a^i_j + u^i_{;j} - u a^i_k a^k_j.$$

Em virtude de

$$\mathcal{S}_{r+1}(u) = \sum_{I:i_1<\ldots<i_{r+1}} \det[G^1_j \ldots H^{i_1}_j \ldots H^{i_{r+1}}_j \ldots G^n_j],$$

o termo não-linear (pelo menos quadrático) será

$$\begin{aligned}
&4u^2 \sum_{k,m\notin I} \det[\delta^1_j \ldots a^k_j \ldots a^{i_1}_j \ldots a^{i_{r+1}}_j \ldots \delta^n_j] \\
&+u^2 \sum_{k\notin I} \det[\delta^1_j \ldots r^k_j \ldots a^{i_1}_j \ldots a^{i_{r+1}}_j \ldots \delta^n_j] \\
&+\sum_{k\notin I} \det[\delta^1_j \ldots u^k u_j \ldots a^{i_1}_j \ldots a^{i_{r+1}}_j \ldots \delta^n_j] \\
&-2u \sum_{k\notin I} \sum_{1\leqslant m\leqslant r+1} \det[\delta^1_j \ldots a^k_j \ldots a^{i_1}_j \ldots L^{i_m}_j \ldots a^{i_{r+1}}_j \ldots \delta^n_j] \\
&+\sum_{1\leqslant k,m\leqslant r+1} \det[\delta^1_j \ldots a^k_j \ldots a^{i_1}_j \ldots L^{i_k}_j \ldots L^{i_m}_j \ldots a^{i_{r+1}}_j \ldots \delta^n_j] \\
&+\ldots + \det[r^1_j \ldots a^k_j \ldots a^{i_1}_j \ldots L^{i_m}_j \ldots a^{i_{r+1}}_j \ldots r^n_j] \\
&+\det[u^1 u_j \ldots L^{i_1}_j \ldots L^{i_{r+1}}_j \ldots u^n u_j] \\
&+\sum_{1\leqslant k\leqslant r+1} \det[\delta^1_j \ldots a^{i_1}_j \ldots \mathcal{P}^{i_k}_j \ldots a^{i_{r+1}}_j \ldots \delta^n_j] + \ldots \\
&+\det[r^1_j \ldots \mathcal{P}^{i_1}_j \ldots \mathcal{P}^{i_{r+1}}_j \ldots \delta^n_r] \\
&+\det[u^1 u_j \ldots \mathcal{P}^{i_1}_j \ldots \mathcal{P}^{i_{r+1}}_j \ldots u^n u_j].
\end{aligned}$$

Substituindo novamente $u = \phi\nu$, onde ϕ é a função auxiliar que aparece na Observação 11, temos a seguite proposição.

Proposição 7. *Se $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é r-mínima, então vale a expansão a seguir para $u = \phi\nu$:*

$$\mathcal{S}_{r+1}(u) = \mathcal{L}_r(u) + \sum_{\sigma} \phi^\sigma \mathcal{Q}_\sigma(\nu), \tag{5.10}$$

onde o índice satisfaz $2 \leqslant \sigma \leqslant n(r+3)$ e os polinômios $\mathcal{Q}_\sigma$ são homogêneos de grau σ e dependem das variáveis (ν, ν_i, ν_{ij}), com coeficientes dependendo da geometria de Σ.

Obs 12. *Um ponto extremamente importante nas aplicações desta proposição é que, no caso específico dos catenóide, a dependência dos coeficientes em questão podem ser determinados em função perfil ρ, que contém todas as informações sobre a geometria. Desse modo, o comportamento assintótico destes coeficientes pode ser similarmente determinado.*

Capítulo 6

Perturbações de hipersuperfícies r-mínimas

Neste capítulo, utilizaremos a teoria desenvolvida até agora para demonstrar os Teoremas 1 e 2, apresentados na Introdução.

6.1 Estrutura local de $\mathcal{M}_{r,k}$: o Teorema 1

A demonstração do Teorema 1 baseia-se nas Proposições 5 e 7, que sugerem uma maneira natural de construir uma família de dimensão $k(n+1)$ de hipersuperfícies r-mínimas perto de um elemento não-generado. Com efeito, se $\Sigma \in \mathcal{M}_{r,k}$ é não-degenerada e $u \in C^{2,\alpha}(\Sigma)$ possui norma suficientemente pequena, considere a hipersuperfície Σ_u dada como gráfico normal

$$X_u = X + \rho^{p_{n,r}/2} u N, \tag{6.1}$$

onde X é a parametrização de Σ. Se for possível mostrar que a regra que a cada u associa a $(r+1)$-curvatura de X_u define uma aplicação suave $\mathcal{N} : \mathcal{U} \to \mathcal{E}^{0,\alpha}_{\delta}(\Sigma)$ numa pequena vizinhança $\mathcal{U}$ da origem de $\mathcal{E}^{2,\alpha}_{\delta}(\Sigma) \oplus W_{\Sigma}$ cuja derivada na origem é precisamente $\tilde{\mathcal{L}}_N$ então uma aplicação do Teorema da Função Implícita prova a existência da família de dimensão $k(n+1)$de hipersuperfícies r-mínimas predita pelo Teorema 1. A demonstração desta afirmação sobre $\mathcal{N}$ é conseqüência de estimativas cuidadosas envolvendo a expansão (5.10) na Proposição 7. Na verdade, estas estimativas serão efetuadas em cada um dos fins E_i de Σ que, conforme sabemos, são assintóticos a um catenóide.

Para provar o Teorema 1, note que se $n' = n + \frac{p_{n,r}}{2}$, em virtude de (3.16) e (3.17) e por

(5.10), temos

$$\rho^{n'}\mathcal{S}_{r+1}(u) = \mathcal{L}_N(u) + \rho^{n'}\sum_{\sigma}\phi^{\sigma}\mathcal{Q}_{\sigma}(\rho^{\frac{p_{n,r}}{2}}\phi^{-1}u) \tag{6.2}$$

a menos de constantes multiplicativas. Devemos mostrar então que o lado direito de (6.2) tem $\mathcal{E}^{0,\alpha}_{\delta}$-norma finita se $u = u_\delta + u_{W_\Sigma}$ for suficientemente pequena, onde $\delta \in (\gamma^-_{n+1}, \gamma^-_1)$. Como u_{W_Σ} gera uma deformação normal que é r-mínima no infinito, contribuindo portanto com um termo de suporte compacto para o lado esquerdo de (6.2), somente temos que nos preocupar com os termos de ordem pelo menos quadrática avaliados em u_δ sobre E_i.

Observemos inicialmente que

$$\begin{aligned}
-\delta < -\gamma^-_{n+1} &= \sqrt{2n + c_{n,r}d^2_{n,r}} \\
&= \sqrt{c_{n,r}}\sqrt{\frac{2n}{c_{n,r}} + d^2_{n,r}} \\
&= \sqrt{c_{n,r}}\sqrt{\frac{2n(n-r-1)}{(r+1)(n-1)} + \left(1 - \frac{n}{2(r+1)}\right)^2} \\
&\leqslant \sqrt{c_{n,r}}\sqrt{\frac{2n}{r+1} + \left(1 - \frac{n}{2(r+1)}\right)^2} \\
&= \sqrt{c_{n,r}}\left(1 + \frac{n}{2(r+1)}\right),
\end{aligned}$$

onde aí usamos o fato de que, como $r \geqslant 1$, tem-se $\frac{n-r-1}{n-1} \leqslant 1$. Assim, para qualquer σ,

$$\begin{aligned}
\| \rho^{n'}\phi^{\sigma}\mathcal{Q}_{\sigma}(\rho^{\frac{p_{n,r}}{2}}\phi^{-1}u_\delta) \|_{0,\alpha,\delta} &= \sup_{s\geqslant 0} | e^{-\delta s}\rho^{n'}\phi^{\sigma}\mathcal{Q}_{\sigma}(\rho^{\frac{p_{n,r}}{2}}\phi^{-1}u_\delta) |_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} \\
&= \sup_{s\geqslant 0} | e^{-\delta s}\rho^{\frac{p_{n,r}}{2}-2}\rho^{n+2}\phi^{\sigma}\mathcal{Q}_{\sigma}(\rho^{\frac{p_{n,r}}{2}}\phi^{-1}u_\delta) |_{\mathcal{C}^{0,\alpha}},
\end{aligned}$$

Lembrando-se que, assintoticamente, ρ se comporta como $e^{\sqrt{c_{n,r}}s}$, teremos

$$e^{-\delta s}\rho^{\frac{p_{n,r}}{2}-2} \sim e^{-\delta s}e^{-\sqrt{c_{n,r}}\left(1+\frac{n}{2(r+1)}\right)s} = e^{\left[-\delta-\sqrt{c_{n,r}}\left(1+\frac{n}{2(r+1)}\right)\right]s} < 1,$$

onde aí usamos que

$$\frac{p_{n,r}}{2} - 2 = -\left(1 + \frac{n}{2(r+1)}\right),$$

além da estimativa para $-\delta$ acima apresentada. Isto nos permite concluir que

$$\| \rho^{n'}\phi^{\sigma}\mathcal{Q}_{\sigma}(\rho^{\frac{p_{n,r}}{2}}\phi^{-1}u_\delta) \|_{0,\alpha,\delta} \leqslant \sup_{s\geqslant 0} | \rho^{n+2}\phi^{\sigma}\mathcal{Q}_{\sigma}(\rho^{\frac{p_{n,r}}{2}}\phi^{-1}u_\delta) |_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} . \tag{6.3}$$

É hora de implementar a substituição $u = \phi v$ na Proposição 7 com a escolha $\phi = \rho^{-\frac{q_{n,r}}{2}}$. O ponto importante aqui é que esta escolha de ϕ nos permitirá mostrar que a dependência dos coeficientes de $\mathcal{Q}_\sigma$ na geometria do catenóide possibilitará compensar a potência ρ^{n+2} no lado esquerdo de 6.3. Para ver isto, note inicialmente que $g_{ij} \sim \rho^2$ e $a^i_j \sim \rho^{-\frac{n}{r+1}}$, em virtude da Observação 6. Por outro lado, obsevando que termos com índíces levantados têm pelos menos uma potência do tipo ρ^{-2}, provinda da métrica contravariante, e que símbolos de Christoffel não contribuem com potências de ρ, iremos rastrear a maior potência de ρ que pode ser colocada em evidência no termo não-linear de $\mathcal{S}_{r+1}(u)$ de forma que os coeficientes ainda permaneçam limitados.

Vejamos inicialmente que, em virtude da hipótese de planaridade (3.10), temos que $-\frac{n}{(r+1)} < -2$. Assim, um termo com contribuição do tipo $\rho^{-\frac{n}{r+1}}$ será considerado "melhor" que um termo do tipo ρ^{-2}. Tem-se ainda que, por (5.3), $\mathcal{P}^i_j$ possui a sua "pior" contribuição em potências de ρ no termo $g^{is}\Gamma^k_{sj}u_k$, que tem contribuição ρ^{-2}. Isso ocorre em virtude de todos os outros termos possuírem pelo menos um fator a^i_j, que é do tipo $\rho^{-\frac{n}{r+1}}$. Por (5.5), cada H^i_j tem sua pior contribuição no termo $\mathcal{P}^i_j$ e no termo $u^i_{;j}$, que também são do tipo ρ^{-2}. Temos ainda que, por (5.4), a pior contribuição de G^i_j ocorre em δ^i_j, que não contribui com potência alguma de ρ para o produto. Toda essa análise implica que os "piores" termos da parte não-linear te $\mathcal{S}_{r+1}(u)$, no sentido de contribuições de potências de ρ, devem ser do tipo em que aparecem $n-(r+1)$ entradas δ^i_j, provenientes de G^i_j e $r+1$ entradas dos tipos $u^i_{;j}$ ou $g^{is}\Gamma^k_{sj}u_k$, vindas de H^i_j, conforme discutido acima. Desta forma, na expressão dos termos não-lineares de $\mathcal{S}_{r+1}(u)$, pode-se colocar em evidência a potência $\rho^{-2(r+1)}$, de forma que os coeficientes do fator restante ainda são uniformente limitados.

Em virtude destas considerações, temos que a maior de tais potências é $\rho^{-2(r+1)}$, que acontece no polinômio de grau $\sigma = r+1$, de modo que a potência de ρ que aparecerá no lado direito de (6.3) será

$$\rho^{n+2}\rho^{-\frac{q_{n,r}(r+1)}{2}}\rho^{-2(r+1)} = \rho^{1-r} \leqslant 1$$

uma vez que $r \geqslant 1$. Desse modo, voltando a (6.3), existem expressões polinomiais $\mathcal{Q}^b_\sigma$ com coeficientes *limitados* tais que

$$\begin{aligned} \| \rho^{n'}\phi^\sigma \mathcal{Q}_\sigma(\rho^{\frac{p_{n,r}}{2}}\phi^{-1}u_\delta) \|_{0,\alpha,\delta} &\leqslant \sup_{s\geqslant 0} | \mathcal{Q}^b_\sigma(\rho^{\frac{p_{n,r}}{2}}\phi^{-1}u_\delta) |_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} \\ &= \sup_{s\geqslant 0} | \mathcal{Q}^b_\sigma(e^{-\delta s}e^{\delta s}\rho^{\frac{(p_{n,r}+q_{n,r})}{2}}u_\delta) |_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} . \end{aligned}$$

Usando agora que

$$\delta < \gamma_1^- = -\sqrt{c_{n,r}}\frac{n}{2(r+1)} = -\sqrt{c_{n,r}}\frac{(p_{n,r}+q_{n,r})}{2},$$

temos finalmente que

$$\begin{aligned}\| \rho^{n'}\phi^{\sigma}\mathcal{Q}_{\sigma}(\rho^{\frac{p_{n,r}}{2}}\phi^{-1}u_{\delta}) \|_{0,\alpha,\delta} &\leqslant \sup_{s\geqslant 0} | \mathcal{Q}^b_{\sigma}(e^{-\delta s}e^{\delta s}\rho^{\frac{(p_{n,r}+q_{n,r})}{2}}u_{\delta}) |_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} \\ &\leqslant \sup_{s\geqslant 0} | \mathcal{Q}^b_{\sigma}(e^{-\delta s}u_{\delta}) |_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} \\ &\leqslant c\sup_{s\geqslant 0} | e^{-\delta s}u_{\delta} |^{\sigma}_{\mathcal{C}^{2,\alpha}} \\ &\leqslant c' \| u_{\delta} \|^{\sigma}_{2,\alpha,\delta},\end{aligned}$$

onde na terceira desigualdade foi usando o caráter polinomial de $\mathcal{Q}^b_{\sigma}$. Isto evidentemente mostra que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$U = \{u = u_{\delta} + u_{W_{\Sigma}} \in \mathcal{E}^{2,\alpha}_{\delta}(\Sigma) \oplus W_{\Sigma}; \|u_{\delta}\|_{2,\alpha,\delta} + \|u_{W_{\Sigma}}\|_{W_{\Sigma}} < \epsilon\}$$

define uma vizinhança da origem onde a aplicação

$$u \longmapsto \mathcal{N}(u) = \rho^{n'}\mathcal{S}_{r+1}(u)$$

dada por (6.2) e tomando valores em $\mathcal{E}^{0,\alpha}_{\delta}(\Sigma)$, é suave (de fato analítica) e tem $\tilde{\mathcal{L}}_N$ como derivada na origem. Daí, o resultado segue pela Proposição 5 e o Teorema da Função Implícita.

Concluiremos esta seção com outra interessante aplicação do método desenvolvido acima. Seja $\mathcal{M}^0_{r,k}$ o espaço definido similarmente a $\mathcal{M}_{r,k}$, exceto pelo fato que os movimentos usados para ajustar cada fim a um catenóide restrigem-se a dilatações e translações ao longo dos eixos. Não-degenerescência, neste caso, é dada pela seguinte definição.

Definição 10. $\Sigma \in \mathcal{M}^0_{r,k}$ *é não-degenerada se* $\mathcal{L}_N : \mathcal{E}^{2,\alpha}_{\delta}(\Sigma) \longrightarrow \mathcal{E}^{0,\alpha}_{\delta}(\Sigma)$ *é injetivo para* $\delta < \gamma_0^-$.

Então usando uma simples variação dos argumentos apresentados acima, obtemos

Teorema 3. $\mathcal{M}^0_{r,k}$ *é uma variedade analítica de dimensão virtual* k.

6.2 Pertubações de catenóides truncados: o Teorema 2

A teoria desenvolvida anteriormente também pode ser aplicada para construir novos exemplos de hipersuperfícies r-mínimas otidas por perturbação de catenóides truncados. Como antes, começaremos desenvolvendo a teoria linear na proposição seguinte, que sobre a invertibilidade global de $\mathcal{L}_n$ sobre o catenóide truncado $\mathcal{C}_0$, dado por $s \geqslant 0$, sujeito a dados de fronteira sobre $\partial\mathcal{C}_0 \approx \mathbb{S}^{n-1}$.

Proposição 8. *Se* $\delta \in \left(\gamma_{n+1}^-, \gamma_1^-\right)$ *então para cada* $f \in \mathcal{E}_\delta^{0,\alpha}(\mathcal{C}_0)$ *existe* $w \in \mathcal{E}_\delta^{0,\alpha}(\mathcal{C}_0)$ *que é a única solução do problema de valores de contorno*

$$\begin{cases} \mathcal{L}_N w = f, & \text{em} \quad \mathcal{C}_0 \\ \pi_{II} w = 0, & \text{sobre} \quad \partial\mathcal{C}_0. \end{cases}$$

Além disso, $\|w\|_{2,\alpha,\delta} \leqslant c\|f\|_{0,\alpha,\delta}$ *para alguma constante* $c > 0$.

Omitimos a demonstração desta proposição, por ela ser uma conseqüência bem conhecida da Proposição 7; veja [FP],[KP]. Assim, se definimos

$$\left[\mathcal{E}_\delta^{2,\alpha}(\mathcal{C}_0)\right]_I = \left\{w \in \mathcal{E}_\delta^{2,\alpha}(\mathcal{C}_0); \pi_{II} w = 0 \text{ sobre } \partial\mathcal{C}_0\right\},$$

então $\mathcal{L}_N : \left[\mathcal{E}_\delta^{2,\alpha}(\mathcal{C}_0)\right]_I \to \mathcal{E}_\delta^{0,\alpha}(\mathcal{C}_0)$ é um isomorfismo. Equivalentemente, por dualidade, para qualquer $\varphi_{II} \in \pi_{II}(C^{2,\alpha}(\partial\mathcal{C}_0))$ existe um único $v \in \mathcal{E}_\delta^{2,\alpha}(\mathcal{C}_0)$ que resolve o problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_N v = 0, & \text{em} \quad \mathcal{C}_0 \\ v = \varphi_{II}, & \text{sobre} \quad \partial\mathcal{C}_0. \end{cases}$$

Mais ainda, a aplicação $\mathcal{R} : \pi_{II}(C^{2,\alpha}(\partial\mathcal{C}_0)) \to \mathcal{E}_\delta^{2,\alpha}(\mathcal{C}_0)$, $v = \mathcal{R}(\varphi_{II})$, é limitada.

Estamos interessados em hipersuperfícies r-mínimas X_u que são gráficos normais sobre o catenóide truncado $\mathcal{C}_0$, no sentido que vale

$$X_u = X_0 + \rho^{p_{n,r}/2} u N,$$

onde X_0 é a parametrização do catenóide. Por (5.10), X_u é r-mínima se e somente se $u = \phi v$ é solução do problema de valores de contorno

$$\begin{cases} \mathcal{L}_N u &= \mathcal{Q}(u) \quad \text{em } \mathcal{C}_0 \\ \quad u &= \varphi_{II} \quad \text{sobre } \partial\mathcal{C}_0, \end{cases}$$

onde

$$\mathcal{Q}(u) = -\rho^{n'} \sum_\sigma \phi^\sigma \mathcal{Q}_\sigma(\rho^{p_{n,r}/2} \phi^{-1} u)$$

De outro modo, escrevemos $u = w + \mathcal{R}(\varphi_{II})$ e tentamos resolver

$$\mathcal{L}_N w = \mathcal{Q}(w + \mathcal{R}(\varphi_{II}))), \quad w \in \left[\mathcal{E}_\delta^{2,\alpha}(\mathcal{C}_0)\right]_I.$$

As estimativas na demonstração do Teorema 1 mostram que se escolhermos $\phi = \rho^{-q_{n,r/2}}$ então existem $\epsilon', \epsilon'' > 0$ dependendo somente da geometria de $\mathcal{C}_0$ tais que

$$\Xi : B_{\epsilon'}(0) \times B_{\epsilon''}(0) \subset \pi_{II}(C^{2,\alpha}(\partial\mathcal{C}_0)) \times \left[\mathcal{E}^{2,\alpha}_{\delta}(\mathcal{C}_0)\right]_I \to \mathcal{E}^{0,\alpha}_{\delta}(\mathcal{C}_0)$$

dado por

$$\Xi(\varphi, w) = \rho^{n'}\mathcal{S}_{r+1}(w + \mathcal{R}(\varphi_{II})) = \mathcal{L}_N w - \mathcal{Q}(w + \mathcal{R}(\varphi_{II}))$$

é uma aplicação bem definida e suave, e obviamente um zero de Ξ fornece uma solução para o nosso problema. Mas a derivada de Ξ com respeito à segunda entrada em $(0,0)$ é precisamente o operador invertível $\mathcal{L}_N$. Assim, uma aplicação do Teorema da Função Implícita nos dá $\epsilon \leqslant \epsilon'$ e uma aplicação suave $\xi : B_\epsilon(0) \subset \pi_{II}(C^{2,\alpha}(\partial\mathcal{C}_0)) \to B_{\epsilon''}(0)$ tal que $\Xi(\varphi_{II}, \xi(\varphi_{II})) = 0$ para qualquer $\varphi_{II} \in B_\epsilon(0)$, como desejado.

Referências Bibliográficas

[BC] Barbosa, J.L.M., Colares, A.G., Stability of hypersurfaces with constant r-mean curvature. *Annals Global Analysis and Geometry*, 15 (1997), 277–297.

[FP] Fakhi, S., Pacard, F., Existence result for minimal hypersurfaces with a prescrideb finite number of planar ends. *Manuscripta Math.* 103 (2000), 4, 465–512.

[H] Hönig, C.S., Aplicações da topologia à análise, *Projeto Euclides*. Impa. 1976.

[HL1] Hounie, J., Leite, M. L., Uniqueness and non existence theorems for hypersurfaces with $H_r = 0$, *Ann. Global Anal. Geom.* 17 (1999), 5, 397–407.

[HL2] Hounie, J., Leite, M. L., The maximum principle for hypersuperfaces with vanishing curvature functions, *J. Diff. Geom.* 41 (1995), 247–258.

[HL3] Hounie, J., Leite, M.L., Two-ended hypersurfaces with zero scalar curvature, *Indiana Univ. Math J.* 48 (1999), 3, 867–882.

[KP] Kaabachi, S., Pacard, F., Riemann minimal surfaces in higher dimensions, *preprint*.

[KMP] Kusner, R., Mazzeo, R., Pollack, D., The moduli space of complete embeded constant mean curvature surfaces. *Geom. Funct. Anal.* 6. (1996), 1, 120–137.

[L] Lee, J. M., Riemannian Geometry: An Introduction to Curvature, *Graduate Texts In Mathematics, Springer*, 1997.

[dLLS1] de Lima, L.L., de Lira, J.H.S., Silva, J.P., New r-minimal hypersurfaces via perturbative methods, *preprint UFC*.

[JH] de Lira, J.H.S., *Notas de Aula*, Departamento de Matemática, UFC, 2006.

[MP] Mazzeo, R., Pacard, F., Poincaré-Einstein metrics and the Schouten tensor, *Pacific J. of Math.*, 212 (2003), 169–185.

[MPo] Mazzeo, R., Pollack, D., Gluing and moduli for noncompact geometric problems, *Geometric theory of singular phenomena in partial differential equations*(Cortona, 195), 17–51, Sympos. Math., XXXVIII, Cambridge Univ. Press, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[MPU] Mazzeo, R., Pollack, D., Uhlenbeck, K., Moduli space of singular Yamabe metrics, *J. Amer. Math. Soc.* 9 (1996), 2, 3003–334.

[P] Pacard, F., *Analysis in weighted spaces*, unpublished set of lecture notes.

[R] Reilly, R., Variational properties of functions of the mean curvature in space forms, *J. Diff. Geo.* 8 (1973),465–477.

[Ro] Rosenberg, H., Hypersurfaces of constant curvature in space forms. *Bull. Sc. Math.* 117, (1993), 211–239.

[S] Sousa, P., Complete $O_p \times O_q$-invariant r-minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}, p + q = n + 1$ *preprint, UFC* 2007.

[S2] Sousa, P., Sobre Hipersuperfícies r-Mínimas no Espaço Euclidiano, *Tese de Doutorado*, UFC, 2007.

[SdSN] Sato, J., de Souza Neto, V.F., Complete and stable $O(p + 1) \times O(q + 1)$-invariant hypersurfaces with zero scalar curvature in Euclidean space $\mathbb{R}^{p+q+2}$, *Ann. Global Anal. Geom.* 29(2006), 221–240.