UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Marcelo Ferreira de Melo

FUNCIONAIS PARAMÉTRICOS ELÍPTICOS EM VARIEDADES RIEMANNIANAS

Fortaleza-Ce
2009

Marcelo Ferreira de Melo

FUNCIONAIS PARAMÉTRICOS ELÍPTICOS EM VARIEDADES RIEMANNIANAS

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração:
Geometria diferencial.

Orientador:
Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira.

Fortaleza-Ce
2009

Melo, Marcelo Ferreira de

M486f Funcionais Paramétricos Elípticos em Variedades Riemannianas.

Marcelo Ferreira de Melo – Fortaleza: 2009.
109f.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira.

Área de concentração: Geometria Diferencial

Tese (doutorado)- Universidade Federal do Ceará;

Departamento de Matemática, 2009

CDD 516.36

Dedico este trabalho à minha esposa Priscila de Lima Leite Melo.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Jeová Deus pelo dom da vida e por todas as bênçãos a mim concedidas.

Agradeço à minha esposa, Priscila Melo, pelo amor, carinho e compreensão em todos esses anos.

Agradeço à minha mãe, Aurea e minha irmã Joyce pelo afeto e incentivo durante a minha vida.

Agradeço ao meu irmão Marcos Melo pela cumplicidade, apoio e companheirismo em toda a minha vida.

Agradeço aos meus sogros Joaquim Ibiapina e Neusa Bezerra por toda a consideração, assistência, arrimo e desvelo em todos esses anos. Agradeço aos meus cunhados André, Débora, Tiago e Rebeca pela estima e boa convivência.

Agradeço ao meu orientador, Jorge Herbert, pelo perito trabalho de orientação e por todo o imprescindível suporte que proporcionou a realização desta tese de doutorado.

Agradeço aos professores Antonio Caminha e Gervásio Colares pelas pertinentes e valiosas sugestões em adendo a este trabalho, por aquiescerem em participar da banca de defesa desta tese e por todo o apoio nestes anos em que participei deste programa de pós-graduação. Agradeço ao professores Miguel Malacarne e Ricardo Sá Earp por suas apropriadas e ponderadas considerações e admoestações e por assentirem em tomar parte da comissão julgadora deste trabalho.

Agradeço aos professores Luquésio Jorge, Levi Lima, Lucas Barbosa e Cleon Barroso pelo valoroso ensino e aprendizado que angariei nas disciplinas por eles ministradas neste programa de doutorado.

Agradeço a todos os meus colegas de pós-graduação em matemática da UFC, em especial, a Joseílson e Gleydson, por terem me ajudado nas disciplinas que cursaram comigo.

Agradeço à secretária da pós-graduação, Andréia Dantas, pela assiduidade e competência em executar suas atribuições que, em particular, me beneficiaram. Agradeço aos demais secretários, Antonia Catarina, Carlos Adriano e Márcio Pereira pelo proveito que obtive em virtude do bom trabalho desempenhado por eles.

Agradeço à bibliotecária da matemática, Rocilda Sales, e aos seus auxiliares, Francisca Fernanda e Erivan Carneiro pelo benefício que me trouxeram através bom desempenho de suas atividades.

Agradeço aos meus colegas da UFPI no campus de Parnaíba, em especial, a Alex Marinho, Roberto Ramos, Marcelo Rêgo, Carpegiani Borges, Ricardo Mendes e Márcia Sekeff, por todo amparo e auxílio que recebi para concluir a minha tese doutorado.

Agradeço a CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todos que de maneira direta ou indireta contribuíram para que este trabalho se concretizasse.

"A expectativa adiada faz adoecer o coração, mas a coisa desejada, quando vem, é árvore de vida."

Provérbios 13:12

Sumário

Resumo

Neste trabalho, consideramos funcionais paramétricos elípticos como generalizações naturais para o clássico funcional área. Calculamos a primeira variação de tais funcionais e, a partir da equação de Euler-Lagrange, definimos a curvatura média anisotrópica de uma hipersuperfície imersa em uma variedade Riemanniana como generalização natural da curvatura média usual. Em seguida, estabelecemos a fórmula da segunda variação e classificamos as hipersuperfícies rotacionalmente simétricas que possuem curvatura média anisotrópica constante. A fim de compreender a estabilidade dos exemplos rotacionais, deduzimos a primeira e a segunda fórmulas de Minkowski. Além disso, no contexto anisotrópico, apresentamos as equações fundamentais de Weingarten, Codazzi e Gauss e, por fim, estudamos a harmonicidade da aplicação de Gauss.

Abstract

It is stated that critical points of a parametric elliptic functional in a Riemannian manifold are hypersurfaces with prescrebed anisotropic mean curvature. We prove that the anisotropic Gauss map of surfaces immersed in Euclidean space with constant anisotropic mean curvature is a harmonic map. In the case of rotatioally invariat functionals in some homogeneous three-dimensional ambients, we present a abridged version of a existence result for constant anisotropic mean curvature surfaces as cylinders, spheres, tori and annuli corresponding to the anisotropic analogs of onduloids and nodoids.

In the Euclidean case $\bar{M} = \mathbb{R}^3$, examples of stable critical points are provided by the Wulff shapes associated to functional F. Paralleling the case of constant curvature mean spheres, a characterization of Wulff shapes is provided, which answers affirmatively a question posed by M. Koiso and B. Parmer in [13].

Introdução

O surgimento da noção de curvatura média está intimamente ligado aos primeiros desdobramentos históricos do Cálculo de Variações. Superfícies de curvatura média nula, descritas não-paramétrica e localmente como gráficos, extremizam a área, segundo a abordagem clássica de Lagrange, retomada depois por Gauss em sua magistral dedução da primeira variação da área. Por sua vez, a equação de Laplace-Young, um dos pilares da Ciência dos Materiais e da Mecânica dos Fluidos, caracteriza superfícies de curvatura média constante como interfaces em equilíbrio entre a tensão superficial e a pressão exercida pelas duas fases distintas.

Curiosamente, se remontamos à dedução formal da equação de Laplace-Young, constatamos que, descartando a hipótese de que a pressão dos fluidos separados pela interface seja isotrópica e que, portanto, obedeça a Lei de Pascal, alteramos, naturalmente, a condição de equilíbrio. No caso isotrópico, em que o tensor de pressão é diagonalizado com autovalores todos iguais entre si, o vetor curvatura média é colinear ao vetor que representa, por dualidade, o tensor de pressão. Todavia, considerando pressão anisotrópica, surge, na equação de equilíbrio, uma discrepância entre os dois vetores e o segundo passa a constituir um análogo anisotrópico do vetor normal. A divergência deste campo vetorial é, por definição, a curvatura média anisotrópica da interface.

Isto ilustra que a noção de anisotropia já está implícita nos tratamentos primordiais da Geometria Diferencial das Superfícies, em estreita conexão com modelos físicos. Surpreendentemente, conquanto seja um tópico raramente abordado na formação básica em Geometria Diferencial, sendo virtualmente omitido na literatura usual, o estudo da curvatura média anisotrópica encontrou nichos naturais em diversas ciências e aplicações, como é o caso de seu reiterado aparecimento nas Ciências Biológicas ou na Computação Gráfica. Da Cristalografia, por exemplo, provém a noção anisotrópica de esfera, a forma de Wulff, descoberta no início do século passado pelo geólogo russo de mesmo nome.

A estabilidade da forma de Wulff ou o fato de que corresponda a uma solução do problema isoperimétrico para um funcional paramétrico puderam ser demonstrados apenas por recurso à alta tecnologia da Teoria Geométrica da Medida. Mencionamos, a propósito, o artigo expositório [25]. Sob a tutela de pesquisadores na área de Teoria Geométrica da Medida tais como J. Taylor, F. Almgren, B. Whyte, entre outros, a noção de curvatura média anisotrópica tornou-se um tema de intensa e profunda investigação, em que contribuições fundamentais são mencionadas de passagem em [**?**]. Problemas elípticos e parabólicos oriundos da formulação analítica, ora do problema de Plateau, ora do fluxo pela curvatura anisotrópica são, até o presente momento exaustivamente estudados.

Paralelamente ao tratamento via Teoria Geométrica da Medida, a curvatura anisotrópica tem sido também o objeto de métodos próprios da Análise Geométrica, abordagem da qual citamos as contribuições de Hildebrandt, Sauvigny, H. von der Mosel, entre outros. Recentemente, devido em grande parte ao trabalho de Bennett Palmer e Miyuki Koiso, um considerável esforço de pesquisa tem revisto este tópico com estratégias próprias da Geometria de Subvariedades. Destacamos, neste sentido, contribuições recentes de Haizhong Li e colaboradores.

Todavia, na literatura concernente que nos foi dada a conhecer, as noções de anisotropia e de extremização dos funcionais paramétricos são ou desenvolvidas no espaço euclidiano ou em termos locais com o auxílio de coordenadas. O uso de coordenadas locais não afeta cálculos locais, visto que a homogeneidade das lagrangianas paramétricas conserva o funcional por mudanças de coordenadas. Esta covariância, contudo, não é partilhada pelas fórmulas variacionais locais, que não têm caráter tensorial. Portanto, permanece em aberto nas referências especializadas um tratamento covariante, tensorial, da curvatura média anisotrópica em variedades Riemannianas.

Por esta razão, devotamo-nos a encontrar uma formulação adequada da teoria em ambientes riemannianos que, permita, em particular, investigar as hipersuperfícies imersas em formas espaciais com curvatura média anisotrópica constante ou prescrita. A seguir, descrevemos, em linhas gerais, o plano da tese.

No Capítulo 1, apresentamos alguns fatos geométricos básicos sobre o fibrado tangente e a métrica de Sasaki que embasaram, no que segue, a devida formulação variacional da curvatura anisotrópica em ambientes Riemannianos. A primeira variação da área e a caracterização variacional das hipersuperfícies com curvatura média anisotrópica pres-crita são deduzidas no Capítulo 2. Ainda neste capítulo, redefinimos a curvatura média anisotrópica como traço de um análogo anisotrópico do tensor de Weingarten. No Capítulo 3, tentamos reproduzir a teoria clássica de hipersuperfícies em variedades Riemannianas em termos dos análogos anisotrópicos do tensor de Weingarten e da segunda forma fundamental. A equação de Codazzi anisotrópica assegura que, para superfícies em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média anisotrópica constante, a aplicação de Gauss anisotrópica, com imagens na forma de Wulff adequada, é harmônica. Isto demonstra afirmativamente conjectura posta por M. Koiso.

O exemplo natural das formas de Wulff para lagrangianas paramétricas no espaço euclidiano não pode ser facilmente reproduzido em variedades para as quais não temos a estrutura vetorial de $\mathbb{R}^{n+1}$ e a teoria clássica de corpos convexos resultante desta estrutura. Ao invés de confrontar o problema de existência de pontos críticos para funcionais arbitrários em ambientes igualmente arbitrários, devotamos nossa atenção, no Capítulo 4, ao uso de métodos equivariantes para assegurar a existência de pontos críticos de funcionais rotacionalmente invariantes em ambientes Riemannianos como as formas espaciais e os produtos de formas espaciais por uma linha euclidiana. Tais métodos podem também ser empregados em geometrias homogêneas tridimensionais como o grupo de Heisenberg e as esferas de Berger.

Nos capítulos 5 e 6, respectivamente, deduzimos a segunda variação do funcional paramétrico elíptico em torno de um extremo e demonstramos algumas fórmulas integrais.

Capítulo 1

Preliminares

Em [6], U. Clarenz e H. von der Mosel enunciam a fórmula da primeira variação para funcionais elípticos paramétricos no espaço euclidiano. Utilizam, implicitamente, o fato de que o fibrado tangente de $\mathbb{R}^{n+1}$ é globalmente identificado a $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$. Em uma variedade riemanniana, a principal dificuldade em estudar a primeira variação de funcionais paramétricos elípticos é não haver necessariamente uma trivialização global do fibrado tangente, ou mesmo trivializações locais em que as equações e tensores envolvidos sejam covariantes e, portanto, geométricos. Neste capítulo, portanto, apresentamos alguns fatos geométricos básicos sobre o fibrado tangente e a métrica de Sasaki que embasaram, no que segue, a devida formulação variacional da curvatura anisotrópica em ambientes riemannianos.

1.1 A Geometria do Fibrado Tangente

Seja $\bar{M}^{n+1}$ uma variedade riemanniana completa orientada e $T\bar{M}$ seu fibrado tangente. Sabemos que $T\bar{M}$ é um fibrado vetorial sobre $\bar{M}$ dado por

$$T\bar{M} = \bigcup_{y \in \bar{M}} T_y\bar{M}. \tag{1.1}$$

Fixadas coordenadas locais

$$y \mapsto (y^1, \ldots, y^{n+1}) \tag{1.2}$$

em $\bar{M}$, um vetor tangente $\eta \in T_y\bar{M}$ é escrito como

$$\eta = \eta^1 \frac{\partial}{\partial y^1} + \cdots + \eta^{n+1} \frac{\partial}{\partial y^{n+1}}. \tag{1.3}$$

Isto naturalmente induz um sistema de coordenadas

$$(y,\eta) \mapsto (y^1,\ldots,y^{n+1},\eta^1,\ldots,\eta^{n+1}) \tag{1.4}$$

em $T\bar{M}$, cujos campos coordenados correspondentes são

$$\frac{\partial}{\partial y^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial y^{n+1}},\frac{\partial}{\partial \eta^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial \eta^{n+1}}. \tag{1.5}$$

A projeção $\pi : TM \to M$, $\pi(y,\eta) = y$, é localmente descrita por

$$(y^1,\ldots,y^{n+1},\eta^1,\ldots,\eta^{n+1}) \xrightarrow{\pi} (y^1,\ldots,y^{n+1}) \tag{1.6}$$

e, em cada ponto $(y,\eta) \in T\bar{M}$, determina um subespaço

$$\mathcal{V}_{(y,\eta)} = \ker \pi_*|_{(y,\eta)} \subset T_{(y,\eta)}T\bar{M}, \tag{1.7}$$

denominado subespaço vertical em (y,η). A distribuição vertical

$$(y,\eta) \mapsto \mathcal{V}_{(y,\eta)} \tag{1.8}$$

é integrável com folhas integrais dadas pelas fibras

$$\pi^{-1}(y) = T_yM. \tag{1.9}$$

A conexão riemanniana $\bar{\nabla}$ em $\bar{M}$ determina uma distribuição horizontal

$$(y,\eta) \in \bar{M} \mapsto \mathcal{H}_{(y,\eta)} \subset T_{(y,\eta)}T\bar{M} \tag{1.10}$$

em $T\bar{M}$ satisfazendo

$$\mathcal{V}_{(y,\eta)} \oplus \mathcal{H}_{(y,\eta)} = T_{(y,\eta)}T\bar{M}, \quad (y,\eta) \in T\bar{M}. \tag{1.11}$$

Esta distribuição é construída do seguinte modo. Fixados $y \in \bar{M}$ e $u \in T_y\bar{M}$, consideramos uma curva $\beta : (-\epsilon,\epsilon) \to \bar{M}$ passando por y em $s = 0$ com vetor velocidade $\beta'(0) = u$. Assim, dado $(y,\eta) \in T\bar{M}$, seja $s \mapsto \eta(s)$ o transporte paralelo do vetor $\eta \in T_y\bar{M}$ ao longo da curva β. Portanto,

$$s \in (-\epsilon,\epsilon) \mapsto \alpha(s) := (\beta(s),\eta(s)) \tag{1.12}$$

define uma curva α em $T\bar{M}$. O vetor velocidade $u^{\mathsf{h}} = \alpha'(0) \in T_{(y,\eta)}T\bar{M}$ é o *levantamento horizontal* de $u \in T_y\bar{M}$. O conjunto em $T_{(y,\eta)}T\bar{M}$ dos levantamentos horizontais de vetores em $T_y\bar{M}$ é, por definição, $\mathcal{H}_{(y,\eta)}$.

A fim de obtermos uma expressão coordenada do levantamento horizontal, definimos coordenadas em $TT\bar{M}$ do seguinte modo. Um vetor tangente $\Upsilon \in T_{(y,\eta)}T\bar{M}$ tem expressão local

$$\Upsilon = a^1\frac{\partial}{\partial y^1} + \ldots + a^{n+1}\frac{\partial}{\partial y^{n+1}} + b^1\frac{\partial}{\partial \eta^1} + \ldots + b^{n+1}\frac{\partial}{\partial \eta^{n+1}}. \tag{1.13}$$

Esta expressão define coordenadas locais em $TT\bar{M}$ da forma

$$((y,\eta),\Upsilon) \mapsto (y^1,\ldots y^{n+1},\eta^1,\ldots,\eta^{n+1},a^1,\ldots a^{n+1},b^1,\ldots b^{n+1}). \tag{1.14}$$

Mantendo a notação de (1.12) acima, escrevemos em termos destas coordenadas

$$\beta(s) \mapsto (y^1(s),\ldots,y^{n+1}(s)), \quad \eta(s) \mapsto (\eta^1(s),\ldots,\eta^{n+1}(s)),$$

sendo que as coordenadas $s \mapsto \eta^k(s)$ satisfazem a equação do transporte paralelo

$$\frac{d\eta^k}{ds} = -\Gamma^k_{lr}\frac{d\alpha^l}{ds}\eta^r(s),$$

onde Γ^k_{lr} são os símbolos de Christoffel associados a conexão $\bar{\nabla}$ em $\bar{M}$. Portanto, se

$$u = \sum_{k=1}^{n+1} u^k\frac{\partial}{\partial y^k} \in T_y\bar{M},$$

então

$$\begin{aligned}\Upsilon = \alpha'(0) &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{d\alpha^k}{ds}\Big|_{s=0}\frac{\partial}{\partial y^k} + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{d\eta^k}{ds}\Big|_{s=0}\frac{\partial}{\partial \eta^k}\\ &= \sum_{k=1}^{n+1} u^k\frac{\partial}{\partial y^k} - \sum_{k=1}^{n+1}\Gamma^k_{lr}u^l\eta^r\frac{\partial}{\partial \eta^k}.\end{aligned}$$

Logo, utilizando as coordenadas de $TT\bar{M}$ definidas acima em (1.14), associamos

$$((y,\eta),\Upsilon) \in T_{(y,\eta)}T\bar{M} \mapsto (y^k,\eta^k,u^k,-\Gamma^k_{lr}u^l\eta^r) \in \mathbb{R}^{4(n+1)}. \tag{1.15}$$

Deste modo, deduzimos que, o levantamento horizontal de $u \in T_y\bar{M}$ é dado por

$$u^{\mathsf{h}} = \sum_{k=1}^{n+1} u^k\frac{\partial}{\partial y^k} - \sum_{k=1}^{n+1}\Gamma^k_{rl}u^r\eta^l\frac{\partial}{\partial \eta^k}. \tag{1.16}$$

Em suma, de acordo com (1.11) e (1.16) podemos definir projeções

$$\pi_*^{\mathsf{v}} : T_{(y,\eta)}T\bar{M} \to \mathcal{V}_{(y,\eta)}, \qquad \pi_*^{\mathsf{h}} : T_{(y,\eta)}T\bar{M} \to \mathcal{H}_{(y,\eta)} \tag{1.17}$$

e as operações de levantamento vertical e horizontal

$$\Big(\frac{\partial}{\partial y^k}\Big)^{\mathsf{v}}\Big|_{(y,\eta)} = \frac{\partial}{\partial \eta^k}\Big|_{(y,\eta)}, \tag{1.18}$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial y^k}\Big)^{\mathsf{h}}\Big|_{(y,\eta)} = \frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_{(y,\eta)} - \Gamma^r_{kl}(y)\eta^l\frac{\partial}{\partial \eta^r}\Big|_{(y,\eta)}, \tag{1.19}$$

onde $1 \leq k \leq n+1$. Descrevemos a seguir a ação destas projeções sobre vetores tangentes arbitrários de $T\bar{M}$. Dada uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to T\bar{M}$ qualquer, descrita em coordenadas locais por

$$s \mapsto (y^1(s), \ldots, y^{n+1}(s), \eta^1(s), \ldots, \eta^{n+1}(s)), \tag{1.20}$$

temos

$$\begin{aligned}\alpha' &= \frac{dy^i}{ds}\frac{\partial}{\partial y^i} + \frac{d\eta^i}{ds}\frac{\partial}{\partial \eta^i}\\ &= \frac{dy^i}{ds}\Big(\frac{\partial}{\partial y^i}\Big)^{\mathsf{h}} + \big(\frac{d\eta^i}{ds} + \Gamma^i_{jk}\frac{dy^j}{ds}\eta^k\big)\frac{\partial}{\partial \eta^i}.\end{aligned}$$

Note que podemos escrever, como antes,

$$\alpha(s) = (\beta(s), \eta(s)) \tag{1.21}$$

onde

$$\beta = \pi \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \bar{M} \tag{1.22}$$

é uma curva em $\bar{M}$ e

$$\eta(s) = \eta^i(s)\frac{\partial}{\partial y^i} \in T_{\beta(s)}\bar{M} \tag{1.23}$$

é um campo vetorial ao longo de β. Em termos desta notação, concluímos que

$$\alpha'(s) = \beta'(s)^{\mathsf{h}} + \big(\bar{\nabla}_{\beta'(s)}\eta\big)^{\mathsf{v}}, \tag{1.24}$$

de modo que as projeções horizontal e vertical de α' são, respectivamente, dadas por

$$\pi_*^{\mathsf{h}}\alpha'(s) = \big(\beta'(s)\big)^{\mathsf{h}} = \Big(\frac{dy^i}{ds}\frac{\partial}{\partial y^i}\Big)^{\mathsf{h}} = \frac{dy^i}{ds}\Big(\frac{\partial}{\partial y^i}\Big)^{\mathsf{h}}$$

e

$$\begin{aligned}\pi_*^{\mathsf{v}}\alpha'(s) = (\bar\nabla_{\beta'(s)}\eta)^{\mathsf{v}} &= \bar\nabla_{\beta'(s)}\eta^i(s)\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{d\eta^i}{ds}\frac{\partial}{\partial y^i} + \eta^k\frac{dy^j}{ds}\bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^j}}\frac{\partial}{\partial y^k}\\ &= \frac{d\eta^i}{ds}\frac{\partial}{\partial y^i} + \eta^k\frac{dy^j}{ds}\Gamma^i_{jk}\frac{\partial}{\partial y^i},\end{aligned}$$

o que implica que

$$\big(\bar\nabla_{\beta'(s)}\eta\big)^{\mathsf{v}} = \frac{d\eta^i}{ds}\frac{\partial}{\partial\eta^i} + \eta^k\frac{dy^j}{ds}\Gamma^i_{jk}\frac{\partial}{\partial\eta^i} =: \bar\nabla_{\beta'}\eta^i\frac{\partial}{\partial\eta^i}.$$

Em particular, se $s \mapsto \eta(s)$ é um campo vetorial *paralelo* ao longo de $\beta = \pi\circ\alpha$, então α é uma curva horizontal. Em termos de coordenadas, dado $\Upsilon \in T_{(y,\eta)}T\bar M$, expresso localmente por (1.13), temos

$$\pi_*^{\mathsf{h}}\Upsilon = a^k\big(\frac{\partial}{\partial y^k}\big)^{\mathsf{h}} \tag{1.25}$$

e

$$\pi_*^{\mathsf{v}}\Upsilon = \big(b^k + a^r\Gamma^k_{rl}\eta^l\big)\frac{\partial}{\partial\eta^r}. \tag{1.26}$$

Portanto, podemos escrever

$$(y^k,\eta^k,a^k,b^k) \xrightarrow{\pi_*^{\mathsf{h}}} (y^k,\eta^k,a^k,-a^r\Gamma^k_{rl}\eta^l) \tag{1.27}$$

e

$$(y^k,\eta^k,a^k,b^k) \xrightarrow{\pi_*^{\mathsf{v}}} (y^k,\eta^k,0,b^k + a^r\Gamma^k_{rl}\eta^l) \tag{1.28}$$

Denotamos a identificação entre vetores em $T_{(y,\eta)}T_y\bar M = T_{(y,\eta)}\pi^{-1}(y)$ e $T_y\bar M$ por $\iota_{(y,\eta)}$. Definimos, assim, um tensor $K : TT\bar M \to T\bar M$, de modo que a aplicação linear

$$K_{(y,\eta)} : T_{(y,\eta)}T\bar M \to T_y\bar M \tag{1.29}$$

é definida por

$$K_{(y,\eta)}\Upsilon = \iota_{(y,\eta)}\pi_*^{\mathsf{v}}\Upsilon. \tag{1.30}$$

Em coordenadas, temos

$$K_{(y,\eta)}\cdot\big(a^k\frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_{(y,\eta)} + b^k\frac{\partial}{\partial\eta^k}\Big|_{(y,\eta)}\big) = \big(b^k + a^r\Gamma^k_{rl}\eta^l\big)\frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_y, \tag{1.31}$$

ou, esquematicamente,

$$(y^k,\eta^k,a^k,b^k) \xrightarrow{K} (y^k,b^k + a^r\Gamma^k_{rl}\eta^l) \tag{1.32}$$

Em particular, se $\Upsilon \in \mathcal{H}_{(y,\eta)}$, então $\Upsilon \in \ker K_{(y,\eta)}$. Reciprocamente, caso $\Upsilon \in \ker K_{(y,\eta)}$, então $b^k = -a^r \Gamma^k_{rl} \eta^l$, o que implica que Υ é projeção horizontal de um vetor em $T_{(y,\eta)} T\bar{M}$. Logo, demonstramos que

$$\mathcal{H}_{(y,\eta)} = \ker K_{(y,\eta)}, \quad (y,\eta) \in T\bar{M}. \tag{1.33}$$

Finalmente, dado um campo vetorial $X \in \Gamma(T\bar{M})$, considerado como uma aplicação diferenciável $X : \bar{M} \to T\bar{M}$, temos

$$K_{(y,X(y))}(X_* \zeta) = \bar{\nabla}_\zeta X|_y, \quad (y,\eta) \in T\bar{M}. \tag{1.34}$$

De fato, descrevendo X em coordenadas locais como a aplicação $y^k \mapsto (y^k, u^k)$, calculamos

$$X_* \eta = \zeta^l X_* \frac{\partial}{\partial y^l} = \zeta^l \frac{\partial y^k}{\partial y^l} \frac{\partial}{\partial y^k} + \zeta^l \frac{\partial u^k}{\partial y^l} \frac{\partial}{\partial \eta^k} = \zeta^k \frac{\partial}{\partial y^k} + \zeta^l \frac{\partial u^k}{\partial y^l} \frac{\partial}{\partial \eta^k}.$$

Portanto,

$$K_{(y,X(y))} X_* \eta = \big(\zeta^l \frac{\partial u^k}{\partial y^l} + \zeta^r \Gamma^k_{lr} u^l \big) \frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_y = \bar{\nabla}_\zeta X|_y,$$

como afirmamos acima.

A partir do tensor K, definimos uma estrutura riemanniana em $T\bar{M}$, a métrica de Sasaki.

Proposição 1.1 *O tensor covariante em $T\bar{M}$ definido por*

$$\langle \Upsilon, \hat{\Upsilon} \rangle_{T\bar{M}} = \langle \pi_* \Upsilon, \pi_* \hat{\Upsilon} \rangle + \langle K\Upsilon, K\hat{\Upsilon} \rangle \tag{1.35}$$

é uma métrica Riemanniana em $T\bar{M}$, denominada métrica de Sasaki. Este tensor métrico satisfaz as seguintes propriedades

$$\langle X^{\mathsf{h}}, Y^{\mathsf{h}} \rangle_{T\bar{M}} = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \Gamma(T\bar{M}), \tag{1.36}$$

$$\langle X^{\mathsf{v}}, Y^{\mathsf{v}} \rangle_{T\bar{M}} = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \Gamma(T\bar{M}), \tag{1.37}$$

$$\langle X^{\mathsf{h}}, Y^{\mathsf{v}} \rangle_{T\bar{M}} = 0, \quad X, Y \in \Gamma(T\bar{M}). \tag{1.38}$$

A métrica de Sasaki tem a propriedade fundamental de que as fibras verticais $\pi^{-1}(y)$, $y \in \bar{M}$, são totalmente geodésicas. Além do mais, as coordenadas (η^k), definidas acima, constituem um sistema de coordenadas normais globalmente definido em cada fibra.

Proposição 1.2 *A conexão Riemanniana D em $T\bar{M}$ induzida pela métrica de Sasaki satisfaz, para quaisquer campos vetoriais $X, Y \in \Gamma(T\bar{M})$,*

$$D_{X^{\mathsf{h}}}Y^{\mathsf{h}}\big|_{(y,\eta)} = (\bar{\nabla}_X Y)^{\mathsf{h}}\big|_{(y,\eta)} - \frac{1}{2}(\bar{R}(X,Y)\eta)^{\mathsf{v}}\big|_{(y,\eta)}, \tag{1.39}$$

$$D_{X^{\mathsf{h}}}Y^{\mathsf{v}} = (\bar{\nabla}_X Y)^{\mathsf{v}}\big|_{(y,\eta)} + \frac{1}{2}(\bar{R}(\eta,Y)X)^{\mathsf{h}}\big|_{(y,\eta)}, \tag{1.40}$$

$$D_{X^{\mathsf{v}}}Y^{\mathsf{h}} = \frac{1}{2}(\bar{R}(\eta,X)Y)^{\mathsf{h}}\big|_{(y,\eta)}, \tag{1.41}$$

$$D_{X^{\mathsf{v}}}Y^{\mathsf{v}} = 0. \tag{1.42}$$

Em particular, as fibras verticais $T_y\bar{M} = \pi^{-1}(y) \subset T\bar{M}$, $y \in \bar{M}$, são totalmente geodésicas.

Apresentamos, na proposição seguinte, alguma informação, a ser utilizada na sequência, sobre o tensor de curvatura da conexão D em $T\bar{M}$.

Proposição 1.3 *O tensor de curvatura $R^{T\bar{M}}$ em $T\bar{M}$ com respeito a métrica de Sasaki satisfaz*

$$R^{T\bar{M}}(X^{\mathsf{h}}, Y^{\mathsf{v}})Z^{\mathsf{v}}|_{(y,\eta)} = -\Big(\frac{1}{2}\bar{R}(Y,Z)X + \frac{1}{4}\bar{R}(\eta,Y)\bar{R}(\eta,Z)X\Big)^{\mathsf{h}} \tag{1.43}$$

$$R^{T\bar{M}}(X^{\mathsf{v}}, Y^{\mathsf{v}})Z^{\mathsf{v}} = 0. \tag{1.44}$$

Da equação de Gauss, concluímos que as folhas verticais são intrinsicamente euclidianas.

1.2 Lagrangianas Paramétricas

A definição intrínseca de um funcional paramétrico elíptico envolve a escolha judiciosa de integrandos, as chamadas densidades lagrangianas paramétricas, que passamos a definir.

Definição 1.1 *Uma lagrangiana paramétrica no fibrado tangente $T\bar{M}$ é uma função diferenciável $F : T\bar{M}-\{0\} \to \mathbb{R}^+$ satisfazendo as seguintes condições: (i) homogeneidadede com respeito a segunda variável, isto é, $F(y,t\eta) = t\,F(y,\eta),\ t > 0,\ \eta \neq 0$. (ii) convexidade estrita com respeito a segunda variável, isto é, a matriz $(\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^k\partial\eta^l})$ é positiva-definida.*

Observamos que a função F define uma estrutura Finsler em $T\bar{M}$. De fato, a matriz $(\frac{\partial^2 F^2}{\partial\eta^k\partial\eta^l})$ é positiva-definida, visto que

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial\eta^k\partial\eta^l} = F\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^k\eta^l} + \frac{\partial F}{\partial\eta^k}\frac{\partial F}{\partial\eta^l} \tag{1.45}$$

e, portanto, dado $\zeta \in TT\bar{M} - \{0\}$,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial\eta^k\partial\eta^l}\zeta^k\zeta^l = F\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^k\eta^l}\zeta^k\zeta^l + \big(\frac{\partial F}{\partial\eta^k}\zeta^k\big)^2 > 0,$$

em vista da condição (ii) acima. Ao longo do texto, apresentamos algumas construções próprias da Geometria Finsler à medida em que surgirem naturalmente.

Calculamos, inicialmente, o gradiente de F com respeito à métrica de Sasaki definida na Proposição 1.1. Para tanto, escrevemos, em termos do referencial coordenado fixado em (1.4),

$$DF = \alpha^i\frac{\partial}{\partial y^i} + \beta^i\frac{\partial}{\partial\eta^i}, \tag{1.46}$$

onde D denota a conexão Riemanniana associada à métrica de Sasaki em $T\bar{M}$.

Proposição 1.4 *O campo vetorial gradiente de $F : T\bar{M} \to \mathbb{R}^+$ tem componentes horizontal e vertical dadas por*

$$\begin{aligned} DF &= \pi_*^{\mathsf{h}}DF + \pi_*^{\mathsf{v}}DF \\ &= \bar{g}^{ij}\Big(\frac{\partial F}{\partial y^j} - \Gamma^k_{jl}\eta^l\frac{\partial F}{\partial\eta^k}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial y^i}\Big)^{\mathsf{h}} + \bar{g}^{ij}\frac{\partial F}{\partial\eta^j}\frac{\partial}{\partial\eta^i}. \end{aligned} \tag{1.47}$$

Prova. Partindo de (1.46), calculamos

$$\begin{aligned} \pi_*^{\mathsf{v}}DF &= \alpha^i\pi_*^{\mathsf{v}}\frac{\partial}{\partial y^i} + \beta^i\pi_*^{\mathsf{v}}\frac{\partial}{\partial\eta^i} \\ &= \alpha^i\pi_*^{\mathsf{v}}\left(\Big(\frac{\partial}{\partial y^i}\Big)^{\mathsf{h}} + \Gamma^k_{ij}(y)\eta^j\frac{\partial}{\partial\eta^k}\Big|_{(y,\eta)}\right) + \beta^i\frac{\partial}{\partial\eta^i} \\ &= (\beta^k + \Gamma^k_{ij}\alpha^i\eta^j)\frac{\partial}{\partial\eta^k}, \end{aligned}$$

obtendo

$$\pi_*^{\mathsf{v}}DF = (\beta^k + \Gamma^k_{ij}\alpha^i\eta^j)\frac{\partial}{\partial\eta^k}. \tag{1.48}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}\pi_*^{\mathsf{h}} DF &= \alpha^i \pi_*^{\mathsf{h}} \frac{\partial}{\partial y^i} + \beta^i \pi_*^{\mathsf{h}} \frac{\partial}{\partial \eta^i} \\ &= \alpha^i \pi_*^{\mathsf{h}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)^{\mathsf{h}} + \Gamma_{ij}^k(y) \eta^j \frac{\partial}{\partial \eta^k} \Big|_{(y,\eta)} \right) \\ &= \alpha^i \Big(\frac{\partial}{\partial y^i} \Big)^{\mathsf{h}},\end{aligned}$$

donde concluímos que

$$\pi_*^{\mathsf{h}} DF = \alpha^i \Big(\frac{\partial}{\partial y^i} \Big)^{\mathsf{h}}. \tag{1.49}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \eta^l} &= \langle DF, \frac{\partial}{\partial \eta^l} \rangle_{T\bar{M}} = \langle \pi_*^{\mathsf{v}} DF, \frac{\partial}{\partial \eta^l} \rangle_{T\bar{M}} = (\beta^k + \Gamma_{ij}^k \alpha^i \eta^j) \langle \frac{\partial}{\partial \eta^k}, \frac{\partial}{\partial \eta^l} \rangle_{T\bar{M}} \\ &= (\beta^k + \Gamma_{ij}^k \alpha^i \eta^j) \langle \Big(\frac{\partial}{\partial y^k} \Big)^{\mathsf{v}}, \Big(\frac{\partial}{\partial y^l} \Big)^{\mathsf{v}} \rangle_{T\bar{M}} \\ &= (\beta^k + \Gamma_{ij}^k \alpha^i \eta^j) \langle \frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^l} \rangle \\ &= \bar{g}_{kl} (\beta^k + \Gamma_{ij}^k \alpha^i \eta^j),\end{aligned}$$

do que resulta

$$\beta^k + \Gamma_{ij}^k \alpha^i \eta^j = \bar{g}^{kl} \frac{\partial F}{\partial \eta^l} \tag{1.50}$$

e

$$\pi_*^{\mathsf{v}} DF = \bar{g}^{kl} \frac{\partial F}{\partial \eta^l} \frac{\partial}{\partial \eta^k}. \tag{1.51}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}\langle DF, \Big(\frac{\partial}{\partial y^l} \Big)^{\mathsf{h}} \rangle &= \langle DF, \frac{\partial}{\partial y^l} - \Gamma_{lr}^k \eta^r \frac{\partial}{\partial \eta^k} \rangle \\ &= \frac{\partial F}{\partial y^l} - \Gamma_{lr}^k \eta^r \frac{\partial F}{\partial \eta^k}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\langle DF, \Big(\frac{\partial}{\partial y^l} \Big)^{\mathsf{h}} \rangle_{T\bar{M}} &= \langle \pi_*^{\mathsf{h}} DF, \Big(\frac{\partial}{\partial y^l} \Big)^{\mathsf{h}} \rangle_{T\bar{M}} = \alpha^i \langle \Big(\frac{\partial}{\partial y^i} \Big)^{\mathsf{h}}, \Big(\frac{\partial}{\partial y^l} \Big)^{\mathsf{h}} \rangle_{T\bar{M}} = \alpha^i \langle \frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^l} \rangle \\ &= \alpha^i \bar{g}_{il}.\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\alpha^i = \bar{g}^{il}\Big(\frac{\partial F}{\partial y^l} - \Gamma^k_{lr}\eta^r\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\Big) \tag{1.52}$$

e

$$\pi^{\mathsf{h}}_* DF = \bar{g}^{il}\Big(\frac{\partial F}{\partial y^l} - \Gamma^k_{lr}\eta^r\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial y^i}\Big)^{\mathsf{h}}. \tag{1.53}$$

Demonstramos, desta forma, que DF se decompõe em termos das projeções horizontal and vertical como

$$\begin{aligned} DF &= \pi^{\mathsf{h}}_* DF + \pi^{\mathsf{v}}_* DF & (1.54)\\ &= \bar{g}^{ij}\Big(\frac{\partial F}{\partial y^j} - \Gamma^k_{jl}\eta^l\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial y^i}\Big)^{\mathsf{h}} + \bar{g}^{ij}\frac{\partial F}{\partial \eta^j}\frac{\partial}{\partial \eta^i}. & (1.55)\end{aligned}$$

Finalmente, explicitamos os coeficientes de DF na base coordenada. Temos

$$\begin{aligned} \beta^i &= \bar{g}^{ij}\frac{\partial F}{\partial \eta^j} - \Gamma^i_{jl}\alpha^j\eta^l \\ &= \bar{g}^{ij}\frac{\partial F}{\partial \eta^j} - \Gamma^i_{jl}\bar{g}^{js}\big(\frac{\partial F}{\partial y^s} - \Gamma^k_{sr}\eta^r\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\big)\eta^l. \end{aligned}$$

□

Apenas com o propósito de verificar que a Proposição 1.4 apresenta uma expressão correta para o gradiente de F, dada uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to T\bar{M}$ como em (1.21) acima, temos

$$\begin{aligned} \langle DF, \alpha'\rangle_{T\bar{M}} &= \langle \pi^{\mathsf{h}}_* DF, (\beta')^{\mathsf{h}}\rangle_{T\bar{M}} + \langle \pi^{\mathsf{v}}_* DF, (\bar{\nabla}_{\beta'}\eta)^{\mathsf{v}}\rangle_{T\bar{M}} \\ &= \bar{g}^{il}\Big(\frac{\partial F}{\partial y^l} - \Gamma^k_{lr}\eta^r\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\Big)\frac{dy^j}{ds}\langle\Big(\frac{\partial}{\partial y^i}\Big)^{\mathsf{h}}, \Big(\frac{\partial}{\partial y^j}\Big)^{\mathsf{h}}\rangle_{T\bar{M}} \\ &\quad + \bar{g}^{il}\frac{\partial F}{\partial \eta^l}\big(\frac{d\eta^j}{ds} + \Gamma^j_{rk}\frac{dy^r}{ds}\eta^k\big)\langle\frac{\partial}{\partial \eta^i}, \frac{\partial}{\partial \eta^j}\rangle \\ &= \bar{g}^{il}\Big(\frac{\partial F}{\partial y^l} - \Gamma^k_{lr}\eta^r\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\Big)\frac{dy^j}{ds}\bar{g}_{ij} \\ &\quad + \bar{g}^{il}\frac{\partial F}{\partial \eta^l}\big(\frac{d\eta^j}{ds} + \Gamma^j_{rk}\frac{dy^r}{ds}\eta^k\big)\bar{g}_{ij} \\ &= \Big(\frac{\partial F}{\partial y^j} - \Gamma^k_{jr}\eta^r\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\Big)\frac{dy^j}{ds} + \frac{\partial F}{\partial \eta^j}\big(\frac{d\eta^j}{ds} + \Gamma^j_{rk}\frac{dy^r}{ds}\eta^k\big) \\ &= \frac{\partial F}{\partial y^j}\frac{dy^j}{ds} + \frac{\partial F}{\partial \eta^j}\frac{d\eta^j}{ds} = dF(\alpha'). \end{aligned}$$

Proposição 1.5 *Dada uma seção local $\varphi : U \subset \bar{M} \to T\bar{M}$ definida sobre um subconjunto aberto $U \subset \bar{M}$, existem campos vetoriais ξ, χ em $\Gamma(TU)$ tais que*

$$DF|_{\varphi(y)} = \chi^{\mathsf{h}}|_{\varphi(y)} + \xi^{\mathsf{v}}|_{\varphi(y)}. \tag{1.56}$$

Estes vetores são expressos em coordenadas locais por

$$\xi(y) = \bar{g}^{ij}(y)\frac{\partial F}{\partial \eta^j}(y, \eta(y))\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_y, \quad y \in \bar{M} \tag{1.57}$$

e

$$\chi(y) = \bar{g}^{ij}(y)\Big(\frac{\partial F}{\partial y^j}(y, \eta(y)) - \Gamma^k_{jr}(y)\eta^r(y)\frac{\partial F}{\partial \eta^k}(y, \eta(y))\Big)\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_y, \quad y \in U. \tag{1.58}$$

Prova. Consideramos uma seção (local)

$$\varphi : U \subset \bar{M} \to T\bar{M} \tag{1.59}$$

da forma

$$\varphi(y) = (y, \eta(y)), \quad y \in U.$$

Assim, para todo $y \in U$,

$$\pi(\varphi(y)) = y$$

ou, equivalentemente,

$$\eta(y) \in T_y\bar{M}.$$

Logo, temos, nos pontos do gráfico $\{\varphi(y) = (y, \eta(y)) : y \in U\} \subset T\bar{M}$,

$$\pi^{\mathsf{v}}_* DF|_{(y,\eta(y))} = \bar{g}^{ij}(y)\frac{\partial F}{\partial \eta^j}(y, \eta(y))\frac{\partial}{\partial \eta^i}\Big|_{(y,\eta(y))} = \bar{g}^{ij}(y)\frac{\partial F}{\partial \eta^j}(y, \eta(y))\Big(\frac{\partial}{\partial y^i}\Big)^{\mathsf{v}}$$

o que implica

$$\pi^{\mathsf{v}}_* DF|_{(y,\eta(y))} = (\xi(y))^{\mathsf{v}}, \tag{1.60}$$

onde

$$\xi(y) = \bar{g}^{ij}(y)\frac{\partial F}{\partial \eta^j}(y, \eta(y))\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_y, \quad y \in U \tag{1.61}$$

é um campo vetorial em $\Gamma(TU)$. Analogamente

$$\pi^{\mathsf{h}}_* DF|_{(y,\eta(y))} = \bar{g}^{ij}(y)\Big(\frac{\partial F}{\partial y^j}(y, \eta(y)) - \Gamma^k_{jr}(y)\eta^r(y)\frac{\partial F}{\partial \eta^k}(y, \eta(y))\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial y^i}\Big)^{\mathsf{h}}\Big|_{(y,\eta(y))}$$

o que acarreta

$$\pi_*^{\mathsf{h}} DF|_{(y,\eta(y))} = (\chi(y))^{\mathsf{h}}, \tag{1.62}$$

onde

$$\chi(y) = \bar{g}^{ij}(y)\Big(\frac{\partial F}{\partial y^j}(y,\eta(y)) - \Gamma^k_{jr}(y)\eta^r(y)\frac{\partial F}{\partial \eta^k}(y,\eta(y))\Big)\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_y, \quad y \in U \tag{1.63}$$

é um campo vetorial em $\Gamma(TU)$.

Concluímos que, ao longo de uma dada secção local φ em $T\bar{M}$, ocorre

$$DF|_{(y,\eta(y))} = (\xi(y))^{\mathsf{v}} + (\chi(y))^{\mathsf{h}}. \tag{1.64}$$

□

O campo vetorial ξ tem a seguinte interpretação em termos de geometria Finsler.

Proposição 1.6 *A forma de Hilbert*

$$\Omega = \frac{\partial F}{\partial \eta^k} dy^k \tag{1.65}$$

é globalmente definida em $T\bar{M}$. Dada uma secção local $\varphi : U \subset \bar{M} \to T\bar{M}$, a 1-forma diferencial $\omega \in \Gamma(T^*U)$ dada por

$$\omega = \varphi^*\Omega \tag{1.66}$$

é dual ao campo vetorial $\xi \in \Gamma(TU)$.

Prova. Considerando uma mudança de coordenadas locais em $\bar{M}$

$$(y^1, \dots, y^{n+1}) \mapsto (\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^{n+1}),$$

temos

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j}\frac{\partial \tilde{y}^j}{\partial y^i}.$$

Assim, dado $(y,\eta) \in T\bar{M}$, escrevemos

$$\eta = \eta^i \frac{\partial}{\partial y^i} = \eta^i \frac{\partial \tilde{y}^j}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j} =: \tilde{\eta}^j \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j}$$

o que implica que a correspondente mudança de coordenadas em $T\bar{M}$ é

$$(y^1, \dots, y^{n+1}, \eta^1, \dots, \eta^{n+1}) \mapsto (\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^{n+1}, \tilde{\eta}^1, \dots, \tilde{\eta}^{n+1}),$$

onde

$$\tilde{\eta}^j = \frac{\partial \tilde{y}^j}{\partial y^i}\eta^i.$$

Visto que

$$\tilde{y}^j = \tilde{y}^j(y^1, \ldots, y^{n+1})$$

não depende das coordenadas η^i, deduz-se que

$$\frac{\partial}{\partial \eta^i} = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j}\frac{\partial \tilde{y}^j}{\partial \eta^i} + \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}^j}\frac{\partial \tilde{\eta}^j}{\partial \eta^i} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}^j}\frac{\partial \tilde{y}^j}{\partial y^i}.$$

Portanto, concluímos que

$$\frac{\partial F}{\partial \eta^i} = \frac{\partial F}{\partial \tilde{\eta}^j}\frac{\partial \tilde{y}^j}{\partial y^i}.$$

Uma vez que

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial \tilde{y}^j} d\tilde{y}^j,$$

demonstra-se, deste modo, que

$$\Omega = \left.\frac{\partial F}{\partial \eta^i}\right|_{(y,\eta)} dy^i$$

é uma 1-forma em globalmente definida em $\bar{M}$. Restrita ao domínio da secção local φ, temos

$$\omega = \varphi^*\Omega = \left.\frac{\partial F}{\partial \eta^i}\right|_{(y,\eta(y))} dy^i|_y.$$

Demonstra-se facilmente que ω e ξ são campos metricamente equivalentes em U. $\square$

Tratamos, agora, de obter uma interpretação para o campo vetorial χ. Dada a secção local $\varphi : U \subset \bar{M} \to T\bar{M}$ da forma $\varphi(y) = (y, \eta(y))$, temos

$$F \circ \varphi : U \subset \bar{M} \to \mathbb{R}^+ \tag{1.67}$$

e

$$\frac{\partial F \circ \varphi}{\partial y^i} = \frac{\partial F}{\partial y^i} + \frac{\partial F}{\partial \eta^j}\frac{\partial \eta^j}{\partial y^i},$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}(F\circ\varphi) &= \bar{g}^{ij}\frac{\partial F\circ\varphi}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial y^j} = \bar{g}^{ij}\Big(\frac{\partial F}{\partial y^i}+\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\frac{\partial \eta^k}{\partial y^i}\Big)\frac{\partial}{\partial y^j}\\
&= \bar{g}^{ij}\Big(\frac{\partial F}{\partial y^i}+\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\big(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^i}}\eta\big)^k-\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\Gamma^k_{ir}\eta^r\Big)\frac{\partial}{\partial y^j}\\
&= \bar{g}^{ij}\Big(\frac{\partial F}{\partial y^i}-\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\Gamma^k_{ir}\eta^r\Big)\frac{\partial}{\partial y^j}+\bar{g}^{ij}\big(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^i}}\eta\big)^k\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\frac{\partial}{\partial y^j}\\
&= \alpha^j(y,\eta(y))\frac{\partial}{\partial y^j}+\bar{g}^{ij}\Big(\big(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^i}}\eta\big)^k\frac{\partial}{\partial y^k}\Big)^{\mathsf{v}}F\frac{\partial}{\partial y^j}.
\end{aligned}$$

Uma vez que estes cálculos são feitos ao longo da imagem de φ, concluímos que

$$\bar{\nabla}(F\circ\varphi)=\chi+\bar{g}^{ij}(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^i}}\eta)^{\mathsf{v}}F\frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Em certo sentido, ξ e χ correspondem às derivadas de F com respeito às variáveis y e η. Assim, apresentamos a seguir uma forma tensorial de expressar independência de F com respeito à variável y.

Definição 1.2 *A função F é horizontalmente constante quando $\pi^{\mathsf{h}}_*DF=0$, isto é, quando*

$$\langle DF,\pi^{\mathsf{h}}_*\zeta\rangle_{T\bar{M}}=0,$$

para todo vetor tangente $\zeta\in TT\bar{M}$. Em particular,

$$\Big(\frac{\partial}{\partial y^i}\Big)^{\mathsf{h}}F=\frac{\partial F}{\partial y^i}-\Gamma^k_{ij}\eta^j\frac{\partial F}{\partial \eta^k}=0.$$

Neste caso, fixada uma secção local $\varphi:U\subset\bar{M}\to T\bar{M}$ de $T\bar{M}$, o campo vetorial χ correspondente é nulo.

Detalhamos abaixo algumas consequências importantes de considerarmos lagrangianas horizontalmente constantes. Iniciamos por um exemplo fundamental.

Proposição 1.7 *Lagrangianas $F:T\bar{M}\to\mathbb{R}^+$ da forma $F(y,\eta)=f(y)|\eta|$, onde $F|_{S\bar{M}}=f$, são horizontalmente constantes. Em particular, se $F(y,\eta)=|\eta|$, então F é horizontalmente constante. Em particular, fixada uma secção local $\varphi:U\subset\bar{M}\to T\bar{M}$, o campo vetorial χ correspondente a estes exemplos é nulo.*

Prova. Definimos uma função $f : \bar{M} \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$F|_{S\bar{M}} = f, \tag{1.68}$$

isto é,

$$F(y,\eta) = f(y), \quad y \in \bar{M},$$

quando $|\eta| = 1$. Isto implica que

$$F(y,\eta) = |\eta| F(y, \frac{\eta}{|\eta|}) = f(y)|\eta|, \tag{1.69}$$

para todo $(y,\eta) \in T\bar{M}$. Por brevidade, consideramos o caso particular em que

$$F(y,\eta) = |\eta|,$$

isto é, quando $f \equiv 1$. Neste caso, uma vez que

$$F(y,\eta) = \langle \eta^{\mathsf{v}}, \eta^{\mathsf{v}} \rangle_{T\bar{M}}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\bar{g}_{lm}\eta^l\eta^m},$$

calculamos

$$\frac{\partial}{\partial y^j} F = \frac{\partial}{\partial y^j}|\eta| = \frac{\partial}{\partial y^j}\sqrt{\bar{g}_{lm}(y)\eta^l\eta^m} = \frac{1}{2}\frac{1}{|\eta|}\frac{\partial \bar{g}_{lm}}{\partial y^j}\eta^l\eta^m.$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial}{\partial \eta^k} F = \frac{1}{|\eta|}\bar{g}_{kl}\eta^l.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{\partial}{\partial y^j}\Big)^{\mathsf{h}} F &= \frac{\partial F}{\partial y^j} - \Gamma^k_{jr}\eta^r \frac{\partial F}{\partial \eta^k} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{|\eta|}\frac{\partial \bar{g}_{lm}}{\partial y^j}\eta^l\eta^m - \frac{1}{|\eta|}\Gamma^k_{jr}\bar{g}_{kl}\eta^l\eta^r \\
&= \frac{1}{|\eta|}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \bar{g}_{lm}}{\partial y^j} - \Gamma^k_{jm}\bar{g}_{kl}\right)\eta^l\eta^m \\
&= \frac{1}{2|\eta|}\left(\frac{\partial \bar{g}_{lm}}{\partial y^j} - \bar{g}^{kr}\Big(\frac{\partial \bar{g}_{rm}}{\partial y^j} + \frac{\partial \bar{g}_{jr}}{\partial y^m} - \frac{\partial \bar{g}_{jm}}{\partial y^r}\Big)\bar{g}_{kl}\right)\eta^l\eta^m \\
&= \frac{1}{2|\eta|}\left(\frac{\partial \bar{g}_{lm}}{\partial y^j} - \frac{\partial \bar{g}_{lm}}{\partial y^j} - \frac{\partial \bar{g}_{jl}}{\partial y^m} + \frac{\partial \bar{g}_{jm}}{\partial y^l}\right)\eta^l\eta^m \\
&= \frac{1}{2|\eta|}\left(\frac{\partial \bar{g}_{jm}}{\partial y^l} - \frac{\partial \bar{g}_{jl}}{\partial y^m}\right)\eta^l\eta^m = 0,
\end{aligned}$$

a última igualdade decorrendo do fato de que a matriz entre parênteses é anti-simétrica ao passo que $(\eta^l \eta^m)$ é simétrica.

No caso geral, temos

$$\big(\frac{\partial}{\partial y^j}\big)^{\mathsf{h}} F \;=\; |\eta| \big(\frac{\partial}{\partial y^j}\big)^{\mathsf{h}} f + f \big(\frac{\partial}{\partial y^j}\big)^{\mathsf{h}} |\eta| = |\eta| \frac{\partial f}{\partial y^j},$$

o que permite concluir que

$$\pi_*^{\mathsf{h}} DF = |\eta| \bar{g}^{kl} \frac{\partial f}{\partial y^k} \big(\frac{\partial}{\partial y^l}\big)^{\mathsf{h}}. \tag{1.70}$$

Procedendo de modo análogo, fixada uma secção local $\varphi : U \subset \bar{M} \to T\bar{M}$ de $T\bar{M}$, temos

$$\begin{aligned} \chi \;&=\; \bar{g}^{ij} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{|\eta|} \frac{\partial \bar{g}_{lm}}{\partial y^j} \eta^l \eta^m - \frac{1}{|\eta|} \Gamma^k_{jr} \bar{g}_{kl} \eta^l \eta^r \right) \\ &=\; \frac{1}{|\eta|} \bar{g}^{ij} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{g}_{lm}}{\partial y^j} - \Gamma^k_{jm} \bar{g}_{kl} \right) \eta^l \eta^m \\ &=\; \frac{1}{2|\eta|} \bar{g}^{ij} \left(\frac{\partial \bar{g}_{jm}}{\partial y^l} - \frac{\partial \bar{g}_{jl}}{\partial y^m} \right) \eta^l \eta^m = 0. \end{aligned}$$

No caso geral, temos

$$\chi \;=\; \bar{g}^{ij} \frac{\partial f}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial y^i} |\eta| = |\eta| \bar{\nabla} f,$$

o que encerra a demonstração □

As derivadas terceiras de F determinam, no contexto de Geometria Finsleriana, o tensor de Cartan. Abaixo, expomos algumas consequências do fato de F ser horizontalmente constante sobre o tensor de Cartan.

Proposição 1.8 *Se F é horizontalmente constante, então*

$$\langle D_{X^{\mathsf{h}}} DF, Y^{\mathsf{v}} \rangle_{T\bar{M}} = 0, \tag{1.71}$$

para campos vetoriais $X, Y \in \Gamma(T\bar{M})$ quaisquer.

Prova. Se F é horizontalmente constante, então

$$\langle DF, \Big(\frac{\partial}{\partial y^i}\Big)^{\mathsf{h}} \rangle_{T\bar{M}} = \Big(\frac{\partial}{\partial y^i}\Big)^{\mathsf{h}} F = 0,$$

do que concluímos

$$\frac{\partial}{\partial \eta^j}\langle DF, \Big(\frac{\partial}{\partial y^i}\Big)^{\mathsf{h}}\rangle_{T\bar{M}} = 0,$$

o que resulta em

$$\begin{aligned}
0 &= \langle D_{\frac{\partial}{\partial \eta^j}} DF, (\frac{\partial}{\partial y^i})^{\mathsf{h}}\rangle_{T\bar{M}} + \langle DF, D_{\frac{\partial}{\partial \eta^j}} (\frac{\partial}{\partial y^i})^{\mathsf{h}}\rangle_{T\bar{M}} \\
&= \langle D_{\frac{\partial}{\partial \eta^j}} DF, (\frac{\partial}{\partial y^i})^{\mathsf{h}}\rangle_{T\bar{M}} + \langle DF, D_{(\frac{\partial}{\partial y^j})^{\mathsf{v}}} (\frac{\partial}{\partial y^i})^{\mathsf{h}}\rangle_{T\bar{M}} \\
&= \langle D_{(\frac{\partial}{\partial y^j})^{\mathsf{v}}} DF, (\frac{\partial}{\partial y^i})^{\mathsf{h}}\rangle_{T\bar{M}} + \frac{1}{2}\langle DF, (\bar{R}(N, \frac{\partial}{\partial y^j})\frac{\partial}{\partial y^i})^{\mathsf{h}}\rangle_{T\bar{M}} \\
&= \langle D_{(\frac{\partial}{\partial y^j})^{\mathsf{v}}} DF, (\frac{\partial}{\partial y^i})^{\mathsf{h}}\rangle_{T\bar{M}}.
\end{aligned}$$

Proposição 1.9 *Se F é horizontalmente constante, então $D_{X^{\mathsf{h}}} D^2F(Y^{\mathsf{v}}, Z^{\mathsf{v}}) = 0$, onde X, Y, Z são campos vetoriais em $\bar{M}$.*

Prova. Dados campos vetoriais U, V, W em $T\bar{M}$, temos

$$\begin{aligned}
&D_U(D^2F)(V,W) = U(D^2F(V,W)) - D^2F(D_UV, W) - D^2F(V, D_UW) \\
&\quad = U\langle D_V DF, W\rangle_{T\bar{M}} - D^2F(D_UV, W) - D^2F(V, D_UW) \\
&\quad = \langle D_U D_V DF, W\rangle_{\bar{T}M} + \langle D_V DF, D_UW\rangle_{T\bar{M}} - \langle D_{D_UV} DF, W\rangle_{T\bar{M}} \\
&\quad\quad - \langle D_V DF, D_UW\rangle_{T\bar{M}} \\
&\quad = \langle D_U D_V DF, W\rangle_{T\bar{M}} - \langle D_{D_UV} DF, W\rangle_{T\bar{M}} \\
&\quad = \langle D_V D_U DF + D_{[U,V]} DF + R^{T\bar{M}}(U,V)DF, W\rangle_{T\bar{M}} - \langle D_{D_UV} DF, W\rangle_{T\bar{M}} \\
&\quad = \langle D_V D_U DF - D_{D_VU} DF + R^{T\bar{M}}(U,V)DF, W\rangle_{T\bar{M}} \\
&\quad = D_V(D^2F)(U,W) + \langle R^{T\bar{M}}(U,V)DF, W\rangle_{T\bar{M}}.
\end{aligned}$$

Em particular,

$$\begin{aligned}
D_{(\frac{\partial}{\partial y^k})^{\mathsf{h}}} D^2F(V, \frac{\partial}{\partial \eta^l}) &= D_V D^2F((\frac{\partial}{\partial y^k})^{\mathsf{h}}, \frac{\partial}{\partial \eta^l}) + \langle R^{T\bar{M}}((\frac{\partial}{\partial y^k})^{\mathsf{h}}, V)DF, \frac{\partial}{\partial \eta^l}\rangle \\
&= D_V D^2F((\frac{\partial}{\partial y^k})^{\mathsf{h}}, \frac{\partial}{\partial \eta^l}) - \langle R^{T\bar{M}}((\frac{\partial}{\partial y^k})^{\mathsf{h}}, V)\frac{\partial}{\partial \eta^l}, DF\rangle.
\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}
D_{(\frac{\partial}{\partial y^k})^{\mathsf{h}}} D^2F(V, \frac{\partial}{\partial \eta^l}) &= V\big(D^2F((\frac{\partial}{\partial y^k})^{\mathsf{h}}, \frac{\partial}{\partial \eta^l})\big) - D^2F(D_V(\frac{\partial}{\partial y^k})^{\mathsf{h}}, \frac{\partial}{\partial \eta^l}) - D^2F((\frac{\partial}{\partial y^k})^{\mathsf{h}}, D_V\frac{\partial}{\partial \eta^l}) \\
&\quad - \langle R^{T\bar{M}}((\frac{\partial}{\partial y^k})^{\mathsf{h}}, V)\frac{\partial}{\partial \eta^l}, DF\rangle.
\end{aligned}$$

Uma vez que F é horizontalmente constante, temos

$$D^2F((\cdot)^{\mathsf{h}},(\cdot)^{\mathsf{v}}) = \langle D_{(\cdot)^{\mathsf{h}}}DF,(\cdot)^{\mathsf{v}}\rangle_{T\bar{M}} = 0.$$

Assim, supondo que $V = Z^{\mathsf{v}}$ é o levantamento vertical de um campo vetorial $Z \in \Gamma(T\bar{M})$, obtemos

$$D^2F((\frac{\partial}{\partial y^k})^{\mathsf{h}}, \frac{\partial}{\partial \eta^l}) = 0$$

e

$$D^2F((\frac{\partial}{\partial y^k})^{\mathsf{h}}, D_{Z^{\mathsf{v}}}\frac{\partial}{\partial \eta^l}) = 0.$$

Neste caso,

$$D_{(\frac{\partial}{\partial y^k})^{\mathsf{h}}}D^2F(V,\frac{\partial}{\partial \eta^l}) \;\; = \;\; -D^2F(D_V(\frac{\partial}{\partial y^k})^{\mathsf{h}}, \frac{\partial}{\partial \eta^l}) - \langle R^{T\bar{M}}((\frac{\partial}{\partial y^k})^{\mathsf{h}}, V)\frac{\partial}{\partial \eta^l}, DF\rangle.$$

Entretanto, os campos vetoriais

$$D_V(\frac{\partial}{\partial y^k})^{\mathsf{h}} = D_{Z^{\mathsf{v}}}(\frac{\partial}{\partial y^k})^{\mathsf{h}}$$

e

$$R^{T\bar{M}}((\frac{\partial}{\partial y^k})^{\mathsf{h}}, V)\frac{\partial}{\partial \eta^l} = R^{T\bar{M}}((\frac{\partial}{\partial y^k})^{\mathsf{h}}, Z^{\mathsf{v}})\frac{\partial}{\partial \eta^l}$$

são campos vetoriais horizontais em $T\bar{M}$. Sendo assim, obtemos

$$D_{(\frac{\partial}{\partial y^k})^{\mathsf{h}}}D^2F(V,\frac{\partial}{\partial \eta^l}) = 0$$

como havíamos afirmado. $\square$

As identidades de Ricci para as terceiras derivadas são estabelecidas a seguir.

Proposição 1.10 *Identidades de Ricci em $T\bar{M}$ são dadas por*

$$D_{\frac{\partial}{\partial \eta^k}}D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^l}, \frac{\partial}{\partial \eta^m}\Big) = D_{\frac{\partial}{\partial \eta^m}}D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^k}, \frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big). \tag{1.72}$$

Prova. Temos de verificar a boa definição do tensor curvatura

$$D_{\frac{\partial}{\partial \eta^k}}D_{\frac{\partial}{\partial \eta^m}}DF = D_{\frac{\partial}{\partial \eta^m}}D_{\frac{\partial}{\partial \eta^k}}DF + R^{T\bar{M}}(\frac{\partial}{\partial \eta^k}, \frac{\partial}{\partial \eta^m})DF.$$

Agora, seja Hess$F$ o operador Hessiano metricamente associado a forma Hessiana D^2F, isto é,

$$\langle \text{Hess}FV, W\rangle_{T\bar{M}} = D^2F(V,W), \quad V, W \in \Gamma(TT\bar{M}).$$

Assim

$$\text{Hess}FV = D_V DF$$

e

$$\begin{aligned}
\big(D_{\frac{\partial}{\partial\eta^k}}\text{Hess}F\big)\frac{\partial}{\partial\eta^m} &= D_{\frac{\partial}{\partial\eta^k}}\text{Hess}F\frac{\partial}{\partial\eta^m} - \text{Hess}F\big(D_{\frac{\partial}{\partial\eta^k}}\frac{\partial}{\partial\eta^m}\big)\\
&= D_{\frac{\partial}{\partial\eta^k}}D_{\frac{\partial}{\partial\eta^m}}DF - D_{D_{\frac{\partial}{\partial\eta^k}}\frac{\partial}{\partial\eta^m}}DF\\
&= D_{\frac{\partial}{\partial\eta^m}}D_{\frac{\partial}{\partial\eta^k}}DF - D_{D_{\frac{\partial}{\partial\eta^m}}\frac{\partial}{\partial\eta^k}}DF + R^{T\bar{M}}\big(\frac{\partial}{\partial\eta^k},\frac{\partial}{\partial\eta^m}\big)DF\\
&= \big(D_{\frac{\partial}{\partial\eta^m}}\text{Hess}F\big)\frac{\partial}{\partial\eta^k} + R^{T\bar{M}}\big(\frac{\partial}{\partial\eta^k},\frac{\partial}{\partial\eta^m}\big)DF.
\end{aligned}$$

Por outro lado, visto que D^2F e Hess$F$ são metricamente relacionados, se segue que

$$D_{\frac{\partial}{\partial\eta^k}}D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial\eta^m},\frac{\partial}{\partial\eta^l}\Big) = \langle\big(D_{\frac{\partial}{\partial\eta^k}}\text{Hess}F\big)\frac{\partial}{\partial\eta^m},\frac{\partial}{\partial\eta^l}\rangle_{T\bar{M}}.$$

Note que

$$\begin{aligned}
D_UD^2F(V,W) &= U\big(D^2F(V,W)\big) - D^2F(D_UV,W) - D^2F(V,D_UW)\\
&= U\langle D_VDF,W\rangle_{T\bar{M}} - \langle D_{D_UV}DF,W\rangle_{T\bar{M}} - \langle D_VDF,D_UW\rangle_{T\bar{M}}\\
&= \langle D_UD_VDF,W\rangle_{T\bar{M}} + \langle D_VDF,D_UW\rangle_{T\bar{M}} - \langle D_{D_UV}DF,W\rangle_{T\bar{M}}\\
&\quad -\langle D_VDF,D_UW\rangle_{T\bar{M}}\\
&= \langle D_UD_VDF,W\rangle_{T\bar{M}} - \langle D_{D_UV}DF,W\rangle_{T\bar{M}}\\
&= \langle D_U\text{Hess F}V,W\rangle_{T\bar{M}} - \langle\text{Hess F}(D_UV),W\rangle_{T\bar{M}}\\
&= (\langle D_U\text{Hess F})V,W\rangle_{T\bar{M}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&D_{\frac{\partial}{\partial\eta^k}}D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial\eta^l},\frac{\partial}{\partial\eta^m}\Big) = D_{\frac{\partial}{\partial\eta^k}}D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial\eta^m},\frac{\partial}{\partial\eta^l}\Big) = D_{\frac{\partial}{\partial\eta^m}}D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial\eta^k},\frac{\partial}{\partial\eta^l}\Big)\\
&\quad+\langle R^{T\bar{M}}\big(\frac{\partial}{\partial\eta^k},\frac{\partial}{\partial\eta^m}\big)DF,\frac{\partial}{\partial\eta^l}\rangle_{T\bar{M}}.
\end{aligned}$$

Isto prova (1.72). $\square$

Capítulo 2

Curvatura Média Anisotrópica

Dada uma variedade riemanniana compacta, fechada e orientada M^n, seja $\psi : M \to \bar{M}$ uma imersão isométrica. Consideramos o fibrado induzido $\psi^* T\bar{M}$ sobre M, do qual fixamos uma secção

$$x \in M \mapsto (\psi(x), N(\psi(x))) \in T\bar{M},$$

definindo um campo vetorial normal unitário ao longo de ψ. Isto significa que esta secção em $\Gamma(\psi^* T\bar{M})$ satisfaz

$$\langle N(\psi(x)), \psi_* v \rangle = 0,$$

para todo $(x, v) \in TM$. Consideramos uma aplicação $\Psi : (-\epsilon, \epsilon) \times M \to T\bar{M}$, $\epsilon > 0$, da forma

$$\Psi(s, x) = (y = \psi(s, x), \eta = N(s, x)), \quad s \in (-\epsilon, \epsilon),\, x \in M. \tag{2.1}$$

Supomos que $\psi(s, \cdot) : M \to \bar{M}$ seja uma imersão para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ e que $N(s, \cdot)$ é um campo vetorial normal unitário ao longo de $\psi(s, \cdot)$. Usamos, neste contexto, a notação $\psi_s = \psi(s, \cdot)$ e nos referimos a família $\{\psi_s : s \in (-\epsilon, \epsilon)\}$ como uma *variação* de ψ.

No que segue, deduzimos a fórmula da primeira variação para o funcional

$$\mathcal{F}(\psi) = \int_M F(\psi, N)\, dM, \tag{2.2}$$

onde o elemento de volume dM é induzido pelo elemento de volume em $\bar{M}$ através da imersão ψ. Mais precisamente, deduzimos uma fórmula para a primeira variação

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \mathcal{F}(\psi(s, \cdot)) = \int_M F(\Psi(s, \cdot))\, dM_s, \tag{2.3}$$

onde o elemento de volume dM_s é induzido pelo elemento de volume em $\bar{M}$ através da imersão $\psi(s, \cdot)$.

A expressão (2.2) define um funcional paramétrico elíptico. A elipticidade se refere ao fato de que a equação de Euler-Lagrange obtida pela extremização de (2.2) é elíptica. A homogeneidade de F implica que este funcional é geométrico, isto é, que independe da parametrização de M. De fato, em coordenadas locais

$$\begin{aligned} F(\psi, N)dM &= F(\psi, \frac{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \ldots \wedge \psi_* \frac{\partial}{\partial x^n}}{|\psi_* \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \ldots \wedge \psi_* \frac{\partial}{\partial x^n}|}) |\psi_* \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \ldots \wedge \psi_* \frac{\partial}{\partial x^n}| dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \\ &= F(\psi, \psi_* \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \ldots \wedge \psi_* \frac{\partial}{\partial x^n}) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \end{aligned}$$

O principal objetivo deste capítulo é demonstrar a seguinte fórmula da primeira variação do funcional $\mathcal{F}$ definido em (2.2).

Teorema 2.1 *Uma imersão isométrica $\psi : M \to \bar{M}$ é um ponto crítico do funcional paramétrico elíptico $\mathcal{F}$ se e somente se os campos vetoriais χ e ξ definidos em* (2.12) *e* (2.15) *com respeito a um campo normal unitário N ao longo de ψ satisfazem*

$$\mathrm{div}_M \xi + \langle \chi, N \rangle = 0. \tag{2.4}$$

Se considerarmos o vínculo de que as variações admissíveis de ψ preservam volume, então a equação de Euler-Lagrange correspondente é

$$\mathrm{div}_M \xi + \langle \chi, N \rangle = -nH_0, \tag{2.5}$$

onde H_0 é um multiplicador de Lagrange.

A equação (2.4) é também deduzida em [18] quando o ambiente $\bar{M}^{n+1}$ é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ e F é horizontalmente constante e em [6] para F qualquer, ainda no espaço euclidiano. Nas seções seguintes, demonstramos as fórmulas (2.4) e (2.5).

2.1 Primeira Variação do Campo Normal

Sejam $x^1, \ldots, x^n$ coordenadas locais de M. As componentes locais da métrica induzida na subvariedade imersa $\psi_s(M) \subset \bar{M}$ são indicadas por

$$g_{ij}|_{\psi(s,x)} = \langle \psi_*(s,x) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}, \psi_*(s,x) \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle,$$

as componentes da métrica contravariante sendo denotadas por g^{ij}.

Visto que $\bar{\nabla} N$ é um campo de endomorfismos nos espaços tangentes de $\psi_s(M) \subset \bar{M}$, temos

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial s}} N &= g^{ij}|_{\psi(s,x)} \langle \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial s}} N, \psi_* \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= -g^{ij}|_{\psi(s,x)} \langle N, \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial s}} \psi_* \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= -g^{ij}|_{\psi(s,x)} \langle N, \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \psi_* \frac{\partial}{\partial s} + [\psi_* \frac{\partial}{\partial s}, \psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}] \rangle \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= -g^{ij}|_{\psi(s,x)} \langle N, \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \psi_* \frac{\partial}{\partial s} + \psi_* [\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x^i}] \rangle \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= -g^{ij}|_{\psi(s,x)} \langle N, \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \psi_* \frac{\partial}{\partial s} \rangle \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}.
\end{aligned}$$

Assim, denotando o campo vetorial variacional ao longo de $\psi(0,\cdot)$ por

$$\Xi(x) = \psi_* \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{(s=0,x)}, \tag{2.6}$$

obtemos

$$\bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial s}} N\Big|_{(0,x)} = -g^{ij}|_{\psi(0,x)} \langle N, \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \Xi \rangle \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Portanto, decompondo Ξ em partes tangencial e normal resulta que

$$\Xi(x) = \psi_*(0,x) \cdot V(x) + \phi(x)\, N(0,x), \tag{2.7}$$

onde $V \in \Gamma(TM)$ and $\phi \in C^\infty(M)$.

Assim, denotando por II e A a segunda forma fundamental e o operador de Weingarten de $\psi(0,\cdot)$, respectivamente, temos

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial s}} N &= -g^{ij}|_{\psi(0,x)} \langle N, \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \psi_* V \rangle \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j} - g^{ij}|_{\psi(0,x)} \langle N, \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \phi N \rangle \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= -g^{ij}|_{\psi(0,x)} II(\frac{\partial}{\partial x^i}, V) \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j} - g^{ij}|_{\psi(0,x)} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= -g^{ij}|_{\psi(0,x)} \langle AV, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j} - g^{ij}|_{\psi(0,x)} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j},
\end{aligned}$$

o que implica

$$\bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial s}} N = -\psi_* AV - \psi_* \nabla \phi. \tag{2.8}$$

Aqui, ∇ denota a conexão riemanniana em M com respeito a métrica induzida por $\psi(0,\cdot)$.

2.2 Primeira Variação da Densidade Lagrangiana

Calculamos agora a taxa de variação de

$$s \mapsto F(\Psi(s,x)) = F(\psi(s,x), N(s,x)). \tag{2.9}$$

Fixado $x \in M$, denotamos, usando as convenções apresentadas anteriormente no Capítulo 1,

$$\alpha(s) = \Psi(s,x) = (\psi(s,x), N(s,x))) \in T\bar{M}$$

e

$$\beta(s) = \pi \circ \alpha(s) = \psi(s,x).$$

Assim

$$\frac{dF}{ds}\Big|_{s=0} = dF(\alpha'(0)) = \langle DF, \alpha'(0)\rangle = \langle \pi_*^{\mathsf{h}} DF, (\beta')^{\mathsf{h}}\rangle + \langle \pi_*^{\mathsf{v}} DF, (\bar{\nabla}_{\beta'} N)^{\mathsf{v}}\rangle. \tag{2.10}$$

O segundo termo da soma no lado direito de (2.10) é

$$\langle \pi_*^{\mathsf{v}} DF, (\bar{\nabla}_{\beta'} N)^{\mathsf{v}}\rangle\big|_{(y=\psi(0,x),\eta=N(0,x))} = \langle \xi, \bar{\nabla}_{\beta'} N\rangle, \tag{2.11}$$

onde

$$\xi(\psi(0,x)) = \bar{g}^{kl}(\psi(0,x))\frac{\partial F}{\partial \eta^l}(\psi(0,x), N(0,x))\frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_{\psi(0,x)} \tag{2.12}$$

é um campo vetorial ao longo de $\psi(0,\cdot)$. Observamos que $x \mapsto (\psi(0,x), N(0,x))$ é uma secção do fibrado pull-back $\psi^* T\bar{M}$, a qual denotamos por ζ na sequência.

Todos os fatos demonstrados no Capítulo 1 envolvendo seções locais de $T\bar{M}$ têm análogos no contexto de secções locais do fibrado induzido $\psi^* T\bar{M}$. Como exemplo desta afirmação, de modo análogo ao que vimos acima no Capítulo 1, o campo ξ definido em (2.12) satisfaz, em um ponto $\zeta(x) \in T\bar{M}$,

$$\begin{aligned}
\langle \xi^{\mathsf{v}}, \frac{\partial}{\partial \eta^m}\rangle_{T\bar{M}} &= \bar{g}^{kl}(\psi(0,x))\frac{\partial F}{\partial \eta^l}(\psi(0,x), N(0,x))\langle (\frac{\partial}{\partial y^k})^{\mathsf{v}}, \frac{\partial}{\partial \eta^m}\rangle_{T\bar{M}} \\
&= \bar{g}^{kl}(\psi(0,x))\frac{\partial F}{\partial \eta^l}(\psi(0,x), N(0,x))\langle \frac{\partial}{\partial \eta^k}, \frac{\partial}{\partial \eta^m}\rangle_{T\bar{M}} \\
&= \bar{g}^{kl}\bar{g}_{km}\frac{\partial F}{\partial \eta^l} = \frac{\partial F}{\partial \eta^m} \\
&= \langle \pi_*^{\mathsf{v}} DF, \frac{\partial}{\partial \eta^m}\rangle_{T\bar{M}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\xi^{\mathsf{v}}|_{\zeta(x)} = \pi_*^{\mathsf{v}} DF|_{\zeta(x)}, \quad x \in M. \tag{2.13}$$

Com isto, verificamos (2.11) e concluímos que

$$\langle \pi_*^{\mathsf{v}} DF, (\bar{\nabla}_{\beta'} N)^{\mathsf{v}} \rangle \big|_{(y=\psi(0,x),\eta=N(0,x))} = \langle \xi, \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial s}} N \rangle = -\langle \xi, \psi_*(AV + \nabla\phi) \rangle. \tag{2.14}$$

O primeiro termo no lado direito em (2.10) é reescrito como

$$\langle \pi_*^{\mathsf{h}} DF, (\beta')^{\mathsf{h}} \rangle \big|_{(y=\psi(0,x),\eta=M(0,x))} = \langle \chi, \psi_* \frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} \rangle = \langle \chi, \Xi \rangle,$$

onde

$$\begin{aligned} \chi(\psi(0,x)) \quad = \quad & \bar{g}^{kl}(\psi(0,x)) \Big(\frac{\partial F}{\partial y^l}(\psi(0,x), N(0,x)) \\ & - \Gamma_{lr}^m(\psi(0,x)) N^r(0,x) \frac{\partial F}{\partial \eta^m}(\psi(0,x), N(0,x)) \Big) \frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_{\psi(0,x)} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Observamos, novamente, que χ definido em (2.15) é um campo vetorial ao longo de ψ satisfazendo, em pontos da secção ζ, a equação $\chi|_{\zeta(x)} = \pi_*^{\mathsf{h}} DF|_{\zeta(x)}$, $x \in M$. A equação (2.15) é verificada segundo procedimento análogo à demonstração de (2.11).

Visto que

$$\alpha'(0) = \Psi_* \frac{\partial}{\partial s}\big|_{(0,x)},$$

concluímos que

$$\frac{dF}{ds}\Big|_{s=0} = \langle DF, \Psi_* \frac{\partial}{\partial s} \rangle = \langle \chi, \Xi \rangle - \langle \xi, \psi_* AV \rangle - \langle \xi, \psi_* \nabla\phi \rangle$$

Entretanto, a parte tangencial ξ^T de ξ é ψ-relacionada a um campo vetorial tangente $\hat{\xi}$ em M. Assim,

$$\langle \xi, \psi_* \nabla\phi \rangle = \langle \psi_* \hat{\xi}, \psi_* \nabla\phi \rangle = \langle \hat{\xi}, \nabla\phi \rangle = \mathrm{div}_M(\phi\, \hat{\xi}) - \phi\, \mathrm{div}_M \hat{\xi}.$$

Sendo assim, calculamos

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_M \hat{\xi} \quad &= \quad g^{ij} \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \hat{\xi}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = g^{ij}|_{\psi(0,x)} \langle \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \xi, \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = \mathrm{div}_{\psi(0,M)} \xi^T \\ &= \quad \mathrm{div}_{\psi(0,M)} \xi - g^{ij} \langle \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \langle \xi, N \rangle N, \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle \\ &= \quad \mathrm{div}_{\psi(0,M)} \xi - g^{ij} \langle \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} N, \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle \langle \xi, N \rangle \\ &= \quad \mathrm{div}_{\psi(0,M)} \xi + nH \langle \xi, N \rangle. \end{aligned}$$

Segue que

$$\langle \xi, \psi_* \nabla \phi \rangle = \mathrm{div}_M(\phi\,\hat{\xi}) - \phi\,\mathrm{div}_{\psi(0,M)}\xi - nH\phi\langle \xi, N\rangle \tag{2.16}$$

e, então,

$$\begin{aligned} \frac{dF}{ds}\Big|_{s=0} &= \langle DF, \Psi_* \frac{\partial}{\partial s}\rangle \\ &= \langle \chi, \Xi\rangle - \langle \xi, \psi_* AV\rangle - \mathrm{div}_M(\phi\,\hat{\xi}) + \phi\,\mathrm{div}_{\psi(0,M)}\xi + nH\phi\langle \xi, N\rangle, \end{aligned} \tag{2.17}$$

o que encerra o cálculo da primeira variação de F.

2.3 Primeira Variação do Elemento de Volume

O elemento de volume induzido em $\psi_s(M)$ é a norma do co-vetor

$$\psi_* \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \ldots \wedge \psi_* \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Temos, em $s = 0$,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial s}} \big(\psi_* \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \ldots \wedge \psi_* \frac{\partial}{\partial x^n}\big) &= \sum_{i=1}^{n} \psi_* \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \ldots \wedge \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial s}} \psi_* \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \ldots \wedge \psi_* \frac{\partial}{\partial x^n} \\ = \sum_{i=1}^{n} \psi_* \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \ldots \wedge \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \psi_* \frac{\partial}{\partial s} \wedge \ldots \wedge \psi_* \frac{\partial}{\partial x^n} \\ = \sum_{i=1}^{n} \psi_* \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \ldots \wedge \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \Xi \wedge \ldots \wedge \psi_* \frac{\partial}{\partial x^n}. \end{aligned}$$

Entretanto

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \Xi &= \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \psi_* V + \phi\,\bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \phi\, N \\ &= \psi_* V^j_{;i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial \phi}{\partial x^i} N + \phi \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} N \\ &= \psi_* V^j_{;i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial \phi}{\partial x^i} N - \phi\,\psi_* A \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &=: \psi_* V^j_{;i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial \phi}{\partial x^i} N - \phi\, a^j_i \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\ldots\wedge\psi_*\frac{\partial}{\partial x^n}\big) &= \sum_{i=1}^{n} V^i_{;i}\psi_*\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\ldots\wedge\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\ldots\wedge\psi_*\frac{\partial}{\partial x^n}\\ -\phi\sum_{i=1}^{n} a^i_i\psi_*\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\ldots\wedge\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\ldots\wedge\psi_*\frac{\partial}{\partial x^n} &+ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\psi_*\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\ldots\wedge N\wedge\ldots\wedge\psi_*\frac{\partial}{\partial x^n},\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\ldots\wedge\psi_*\frac{\partial}{\partial x^n}\big) &= \mathrm{div}_M V\,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\ldots\wedge\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\ldots\wedge\psi_*\frac{\partial}{\partial x^n}\\ -nH\phi\,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\ldots\wedge\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\ldots\wedge\psi_*\frac{\partial}{\partial x^n} &+ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}.\end{aligned}$$

Assim, deduzimos

$$\begin{aligned}&\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}|\psi_*\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\ldots\wedge\psi_*\frac{\partial}{\partial x^n}|\\ &= \frac{1}{|\psi_*\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\ldots\wedge\psi_*\frac{\partial}{\partial x^n}|}\langle\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\ldots\wedge\psi_*\frac{\partial}{\partial x^n}\big),\psi_*\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\ldots\wedge\psi_*\frac{\partial}{\partial x^n}\rangle\\ &= \big(\mathrm{div}_M V - nH\phi\big)|\psi_*\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\ldots\wedge\psi_*\frac{\partial}{\partial x^n}|.\end{aligned}$$

2.4 Primeira Variação do Funcional Paramétrico

Nesta seção, calculamos

$$\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\Xi} = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\int_M F(\psi(s,x),N(s,x))\,dM_s, \tag{2.18}$$

onde

$$dM_s = |\psi_*\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\ldots\wedge\psi_*\frac{\partial}{\partial x^n}|\,dx^1\ldots dx^n.$$

Juntando todas as informações acima e tendo em conta que $dM = dM_0$, obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\Xi} &= \int_M \frac{dF}{ds}\Big|_{s=0} dM + \int_M F(\psi(0,x),N(0,x))\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} dM_s\\ &= \int_M \big(\langle\chi,\Xi\rangle - \langle\xi,\psi_*AV\rangle - \mathrm{div}_M(\phi\,\hat{\xi}) + \phi\,\mathrm{div}_{\psi(0,M)}\xi + nH\phi\langle\xi,N\rangle\big)dM\\ &\quad + \int_M F(\psi(0,x),N(0,x))\big(\mathrm{div}_M V - nH\phi\big)\,dM.\end{aligned}$$

Usando o teorema da divergência, calculamos

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\Xi} &= \int_M \frac{dF}{ds}\Big|_{s=0} dM + \int_M F(\psi(0,x),N(0,x))\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} dM_s \\
&= \int_M \big(\langle\chi,\Xi\rangle - \langle\xi,\psi_* AV\rangle + \phi\,\mathrm{div}_{\psi(0,M)}\xi + nH\phi\langle\xi,N\rangle\big)dM \\
&\quad + \int_M \big(\mathrm{div}_M(F(\psi(0,x),N(0,x))V) \\
&\quad -\langle\nabla(F\circ\Psi(0,\cdot)),V\rangle - nHF(\psi(0,x),N(0,x))\phi\big)\,dM \\
&= \int_M \big(\langle\chi,\Xi\rangle - \langle\xi,\psi_* AV\rangle + \phi\,\mathrm{div}_{\psi(0,M)}\xi + nH\phi\langle\xi,N\rangle \\
&\quad -\langle\nabla(F\circ\Psi(0,\cdot)),V\rangle - nH\phi\, F\circ\Psi(0,\cdot)\big)\,dM.
\end{aligned}$$

Entretanto, observamos que

$$\begin{aligned}
\langle\xi,N\rangle &= \bar{g}^{kl}\frac{\partial F}{\partial\eta^l}(\psi(0,x),N(0,x))\langle\frac{\partial}{\partial y^k},N\rangle = \bar{g}^{kl}\bar{g}_{km}\frac{\partial F}{\partial\eta^l}(\psi(0,x),N(0,x))\eta^m(x) \\
&= \frac{\partial F}{\partial\eta^m}\eta^m = F(\psi(0,x),N(0,x)),
\end{aligned} \tag{2.19}$$

onde usamos o fato de que F é homogênea de grau um em η.

Deste modo, obtemos

$$\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\Xi} = \int_M \big(\langle\chi,\Xi\rangle - \langle\xi,\psi_* AV\rangle + \phi\,\mathrm{div}_{\psi(0,M)}\xi - \langle\nabla(F\circ\Psi(0,\cdot)),V\rangle\big)\,dM.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(\psi(0,x),N(0,x))}{\partial x^i} &= (\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{h}}F|_{\zeta(x)} + (\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}}N)^{\mathsf{v}}F|_{\zeta(x)} \\
&= \langle(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{h}},DF\rangle_{T\bar{M}} + \langle(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}}N)^{\mathsf{v}},DF\rangle_{T\bar{M}} \\
&= \langle(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{h}},\pi_*^{\mathsf{h}}DF\rangle_{T\bar{M}} + \langle(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}}N)^{\mathsf{v}},\pi_*^{\mathsf{v}}DF\rangle_{T\bar{M}} \\
&= \langle\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i},\chi\rangle + \langle\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}}N,\xi\rangle,
\end{aligned}$$

donde concluímos que

$$\begin{aligned}
\langle\nabla(F\circ\Psi(0,\cdot)),V\rangle &= V^i\frac{\partial F(\psi(0,x),N(0,x))}{\partial x^i} \\
&= \langle\chi,V\rangle + \langle\bar{\nabla}_V N,\xi\rangle \\
&= \langle\chi,V\rangle - \langle\xi,AV\rangle,
\end{aligned}$$

em pontos de $\zeta(x) = (\psi(0,x), N(0,x))$. Como sempre, os campos vetoriais ξ e χ são avaliados em $\zeta(x) = (\psi(0,x), N(0,x))$, isto é,

$$\xi^{\mathsf{v}}(\psi(0,x), N(0,x)) = \pi_*^{\mathsf{v}} DF\big|_{(\psi(0,x),N(0,x))} \tag{2.20}$$

e

$$\chi^{\mathsf{h}}(\psi(0,x), N(0,x)) = \pi_*^{\mathsf{h}} DF\big|_{(\psi(0,x),N(0,x))}. \tag{2.21}$$

Concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\Xi} &= \int_M \big(\langle\chi,\Xi\rangle - \langle\chi,\psi_*V\rangle + \phi\,\mathrm{div}_{\psi(0,M)}\xi\big)\,dM \\ &= \int_M \big(\phi\langle\chi,N\rangle + \phi\,\mathrm{div}_{\psi(0,M)}\xi\big)\,dM. \end{aligned}$$

Daí, a imersão estacionária satisfaz

$$\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\Xi} = \int_M \big(\langle\chi,N\rangle + \mathrm{div}_{\psi(0,M)}\xi\big)\phi\,dM = 0 \tag{2.22}$$

e a equação de Euler-Lagrange é

$$\mathrm{div}_{\psi(0,M)}\xi + \langle\chi,N\rangle = 0, \tag{2.23}$$

o que demonstra a fórmula (2.4).

Se consideramos um vínculo de volume para o problema original, devemos calcular a primeira derivada de Frechét do funcional $\mathcal{F}$ restrito a variações geradas por campos vetoriais variacionais satisfazendo a condição de média zero

$$\int_M \phi\,dM = \int_M \langle\Xi,N\rangle dM = 0. \tag{2.24}$$

Considerando uma tal variação admissível, definimos para um dado multiplicador de Lagrange $H_0 \in \mathbb{R}$ o funcional modificado

$$\mathcal{F}_{H_0}(\psi(s,\cdot)) = \mathcal{F}(\psi(s,\cdot)) + nH_0\mathcal{V}(s), \tag{2.25}$$

onde $\mathcal{V}(s)$ representa o volume compreendido pelas hipersuperfícies $\psi_0(M)$ e $\psi_s(M)$, isto é,

$$\mathcal{V}(s) = \int_{M\times[0,s]} \iota^* d\bar{M},$$

onde ι é a inclusão do cilíndro sólido imerso

$$\bigcup_{s'\in[0,s]} \psi_{s'}(M)$$

em $\bar{M}$. Da expressão em coordenadas

$$\mathcal{V}(S) = \int_0^S \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_*(s,\cdot)\frac{\partial}{\partial s} \wedge \psi_*(s,\cdot)\frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \ldots \wedge \psi_*(s,\cdot)\frac{\partial}{\partial x^n}|\, ds dx^1 \ldots dx^n,$$

deduzimos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\mathcal{V} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_*(0,\cdot)\frac{\partial}{\partial s} \wedge \psi_*(0,\cdot)\frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \ldots \wedge \psi_*(0,\cdot)\frac{\partial}{\partial x^n}|\, dx^1 \ldots dx^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\Xi \wedge \psi_*(0,\cdot)\frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \ldots \wedge \psi_*(0,\cdot)\frac{\partial}{\partial x^n}|\, dx^1 \ldots dx^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \Xi, \psi_*(0,\cdot)\frac{\partial}{\partial x^1} \times \ldots \times \psi_*(0,\cdot)\frac{\partial}{\partial x^n}\rangle\, dx^1 \ldots dx^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \Xi, N\rangle |\psi_*(0,\cdot)\frac{\partial}{\partial x^1} \times \ldots \times \psi_*(0,\cdot)\frac{\partial}{\partial x^n}|\, dx^1 \ldots dx^n. \end{aligned}$$

Portanto, a fórmula

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\mathcal{V} = \int_M \langle \Xi, N\rangle\, dM, \tag{2.26}$$

permite determinar que variações são admissíveis, isto é, que as variações satisfazendo (2.24) são variações que preservam volume.

Concluímos que imersões estacionárias para o problema vinculado de extremizar $\mathcal{F}_{H_0}$ satisfazem

$$\mathrm{div}_{\psi(0,M)}\xi + \langle \chi, N\rangle = -nH_0, \tag{2.27}$$

demonstrando, deste modo, a fórmula (2.5).

2.5 Alguns Tensores Fundamentais

Em pontos da subvariedade imersa $\psi(0,M)$, temos

$$\xi|_{\psi(0,M)} = \bar{g}^{kl}(\psi(0,x))\frac{\partial F}{\partial \eta^k}(\zeta(x))\frac{\partial}{\partial y^l}\Big|_{\psi(0,x)}, \tag{2.28}$$

onde fixamos ζ ao longo de $\psi(0,M)$ como a secção do fibrado normal unitário

$$\zeta(x) = (\psi(0,x), N(0,x)).$$

Como vimos na Proposição 1.6, o campo vetorial ξ é metricamente equivalente à 1-forma ω, de modo que em $y=\psi(x)$ temos

$$\xi(y)=\bar{g}^{kl}(y)\omega_k(y)\frac{\partial}{\partial y^l}\bigg|_y=\bar{g}^{kl}(y)\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\bigg|_{(y,\eta(y))}\frac{\partial}{\partial y^l}\bigg|_y=\bar{g}^{kl}(y)\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\circ\zeta(x)\right)\frac{\partial}{\partial y^l}\bigg|_y$$

Dada uma curva coordenada $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ com velocidade $\gamma'(0)=\frac{\partial}{\partial x^i}$ e denotando $\beta=\psi\circ\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\bar{M}$, observamos que

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}}\omega &= \bar{\nabla}_{\psi_*\gamma'(0)}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\circ\zeta\right)dy^k\\
&= \gamma'(0)\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\circ\zeta\right)dy^k+\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\circ\zeta\right)\bar{\nabla}_{\beta'(0)}dy^k\\
&= \zeta_*\gamma'(0)\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\right)dy^k+\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\circ\zeta\right)\bar{\nabla}_{\beta'(0)}dy^k\\
&= (\zeta\circ\gamma)'(0)\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\right)dy^k+\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\circ\zeta\right)\bar{\nabla}_{\beta'(0)}dy^k.
\end{aligned}$$

Visto que $\zeta\circ\gamma=(\psi\circ\gamma,N(\psi\circ\gamma))$ é uma curva em $T\bar{M}$, prosseguimos, calculando

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}}\omega &= (\psi\circ\gamma,N(\psi\circ\gamma))'(0)\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\right)dy^k+\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\circ\zeta\right)\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}}dy^k\\
&= (\psi\circ\gamma,N(\psi\circ\gamma))'(0)\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\right)dy^k+\frac{\partial\psi^m}{\partial x^i}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\circ\zeta\right)\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^m}}dy^k\\
&= \left((\psi_*\gamma'(0))^{\mathsf{h}}+(\bar{\nabla}_{\psi_*\gamma'(0)}N)^{\mathsf{v}}\right)\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\right)dy^k+\frac{\partial\psi^m}{\partial x^i}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\circ\zeta\right)\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^m}}dy^k\\
&= \left((\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{h}}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\right)+(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}}N)^{\mathsf{v}}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\right)\right)dy^k-\frac{\partial\psi^m}{\partial x^i}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\circ\zeta\right)\Gamma^k_{ml}dy^l\\
&= \left((\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{h}}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\right)-a_i^j(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{v}}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\right)\right)dy^k-\frac{\partial\psi^m}{\partial x^i}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\circ\zeta\right)\Gamma^k_{ml}dy^l.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}}\omega &= \left(\frac{\partial\psi^m}{\partial x^i}(\frac{\partial}{\partial y^m})^{\mathsf{h}}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\right)-\frac{\partial\psi^r}{\partial x^j}a_i^j(\frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{v}}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\right)\right)dy^k-\frac{\partial\psi^m}{\partial x^i}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\circ\zeta\right)\Gamma^k_{ml}dy^l\\
&= \frac{\partial\psi^m}{\partial x^i}(\frac{\partial}{\partial y^m})^{\mathsf{h}}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\right)dy^k-\frac{\partial\psi^r}{\partial x^j}a_i^j\frac{\partial}{\partial \eta^r}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\right)dy^k-\frac{\partial\psi^m}{\partial x^i}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^l}\circ\zeta\right)\Gamma^l_{mk}dy^k\\
&= -\frac{\partial\psi^r}{\partial x^j}a_i^j\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^r\partial\eta^k}dy^k+\frac{\partial\psi^m}{\partial x^i}\left((\frac{\partial}{\partial y^m})^{\mathsf{h}}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\right)-\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^l}\circ\zeta\right)\Gamma^l_{mk}\right)dy^k. \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

Por outro lado, as derivadas covariantes de ω e ξ são também metricamente equivalentes. De fato,

$$\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}}\omega \,\cdot\, \psi_*\frac{\partial}{\partial x^j} = \psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}\omega(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}) - \omega\cdot\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}}\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j} = \psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}\langle\xi,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}\rangle$$
$$-\langle\xi,\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}}\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}\rangle = \langle\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}}\xi,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}\rangle.$$

Em particular, temos

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}}\xi)^T &= g^{ml}\langle\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}}\xi,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^m}\rangle\psi_*\frac{\partial}{\partial x^l} = g^{ml}\big(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}}\omega\cdot\psi_*\frac{\partial}{\partial x^m}\big)\psi_*\frac{\partial}{\partial x^l}\\
&= g^{ml}\frac{\partial\psi^k}{\partial x^m}\big(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}}\omega\cdot\psi_*\frac{\partial}{\partial y^k}\big)\psi_*\frac{\partial}{\partial x^l}\\
&= g^{ml}\frac{\partial\psi^k}{\partial x^m}\Bigg(-\frac{\partial\psi^r}{\partial x^j}a_i^j\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^r\partial\eta^k} + \frac{\partial\psi^r}{\partial x^i}\bigg((\frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{h}}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial\eta^k}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial\eta^l}\circ\zeta\right)\Gamma^l_{rk}\bigg)\Bigg)\psi_*\frac{\partial}{\partial x^l}.\end{aligned}$$

A fim de dar um significado intrínsico para o segundo termo entre parênteses do lado direito, calculamos

$$(\frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{h}}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial\eta^k}\right) = (\frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{h}}\langle DF,\frac{\partial}{\partial\eta^k}\rangle_{T\bar{M}} = \langle D_{(\frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{h}}}DF,\frac{\partial}{\partial\eta^k}\rangle_{T\bar{M}} + \langle DF, D_{(\frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{h}}}\frac{\partial}{\partial\eta^k}\rangle_{T\bar{M}}.$$

Entretanto

$$\begin{aligned}D_{(\frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{h}}}\frac{\partial}{\partial\eta^k} &= D_{(\frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{h}}}(\frac{\partial}{\partial y^k})^{\mathsf{v}} = (\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^r}}\frac{\partial}{\partial y^k})^{\mathsf{v}} + \frac{1}{2}(\bar{R}(\eta,\frac{\partial}{\partial y^k})\frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{h}}\\
&= \Gamma^l_{rk}(\frac{\partial}{\partial y^l})^{\mathsf{v}} + \frac{1}{2}(\bar{R}(\eta,\frac{\partial}{\partial y^k})\frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{h}}\\
&= \Gamma^l_{rk}\frac{\partial}{\partial\eta^l} + \frac{1}{2}(\bar{R}(\eta,\frac{\partial}{\partial y^k})\frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{h}},\end{aligned}$$

o que implica

$$\langle D_{(\frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{h}}}\frac{\partial}{\partial\eta^k},DF\rangle = \Gamma^l_{rk}\frac{\partial F}{\partial\eta^l} + \frac{1}{2}\langle(\bar{R}(\eta,\frac{\partial}{\partial y^k})\frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{h}},DF\rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned}(\frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{h}}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial\eta^k}\right) - \Gamma^l_{rk}\frac{\partial F}{\partial\eta^l} &= \langle D_{(\frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{h}}}DF,\frac{\partial}{\partial\eta^k}\rangle_{T\bar{M}}\\
&+\frac{1}{2}\langle(\bar{R}(\eta,\frac{\partial}{\partial y^k})\frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{h}},DF\rangle,\end{aligned} \tag{2.30}$$

o que torna válida a expressão

$$(\bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \xi)^T = g^{ml} \frac{\partial \psi^k}{\partial x^m} \Big(- \frac{\partial \psi^r}{\partial x^j} a_i^j \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^r \partial \eta^k} + \frac{\partial \psi^r}{\partial x^i} \Big(\langle D_{(\frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{h}}} DF, \frac{\partial}{\partial \eta^k} \rangle_{T\bar{M}} + \frac{1}{2} \langle (\bar{R}(\eta, \frac{\partial}{\partial y^k}) \frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{h}}, DF \rangle \Big) \psi_* \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Isto implica que

$$\langle \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \xi, \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = - \frac{\partial \psi^r}{\partial x^p} a_i^p \frac{\partial \psi^k}{\partial x^j} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^r \partial \eta^k} + \frac{\partial \psi^r}{\partial x^i} \frac{\partial \psi^k}{\partial x^j} \Big(\langle D_{(\frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{h}}} DF, \frac{\partial}{\partial \eta^k} \rangle_{T\bar{M}} + \frac{1}{2} \langle (\bar{R}(\eta, \frac{\partial}{\partial y^k}) \frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{h}}, DF \rangle \Big). \tag{2.31}$$

Visto que

$$\mathrm{div}_{\psi(0,M)} \xi = g^{ij} \langle \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \xi, \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle,$$

temos

$$\mathrm{div}_{\psi(0,M)} \xi = -g^{ij} \frac{\partial \psi^r}{\partial x^p} a_i^p \frac{\partial \psi^k}{\partial x^j} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^r \partial \eta^k} + g^{ij} \frac{\partial \psi^r}{\partial x^i} \frac{\partial \psi^k}{\partial x^j} \Big(\langle D_{(\frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{h}}} DF, \frac{\partial}{\partial \eta^k} \rangle_{T\bar{M}} + \frac{1}{2} \langle (\bar{R}(\eta, \frac{\partial}{\partial y^k}) \frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{h}}, DF \rangle \Big) \tag{2.32}$$

Além disso, uma vez que as fibras de $T\bar{M}$ são intrinsicamente Euclidianas, o termo com segundas derivadas em η^k é o Hessiano da restrição de F à fibra. Mais precisamente, temos

$$D_{\frac{\partial}{\partial \eta^r}} \frac{\partial}{\partial \eta^k} = D_{(\frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{v}}} (\frac{\partial}{\partial y^k})^{\mathsf{v}} = 0$$

e, portanto,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^r \partial \eta^k} = \langle D_{\frac{\partial}{\partial \eta^r}} DF, \frac{\partial}{\partial \eta^k} \rangle.$$

Assim,

$$\mathrm{div}_{\psi(0,M)} \xi = -g^{ij} \frac{\partial \psi^r}{\partial x^p} a_i^p \frac{\partial \psi^k}{\partial x^j} \langle D_{\frac{\partial}{\partial \eta^r}} DF, \frac{\partial}{\partial \eta^k} \rangle + g^{ij} \frac{\partial \psi^r}{\partial x^i} \frac{\partial \psi^k}{\partial x^j} \Big(\langle D_{(\frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{h}}} DF, \frac{\partial}{\partial \eta^k} \rangle_{T\bar{M}} + \frac{1}{2} \langle (\bar{R}(\eta, \frac{\partial}{\partial y^k}) \frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{h}}, DF \rangle \Big)$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_{\psi(0,M)}\xi &= -g^{ij}\langle D_{(\psi_* A\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}} DF, (\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{v}}\rangle \\ &+ g^{ij}\langle D_{(\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{h}}} DF, (\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{v}}\rangle_{T\bar{M}} + \frac{1}{2} g^{ij}\langle (\bar{R}(\eta, \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j})\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{h}}, DF\rangle \end{aligned} \tag{2.33}$$

Estas fórmulas motivam a seguinte definição:

Definição 2.1 *Fixadas secções locais $\varphi(y) = (y, \eta(y))$, $y \in U \subset \bar{M}$, do fibrado tangente $T\bar{M}$ e $\zeta(x) = (\psi(x), N(\psi(x)))$, $x \in M$, do fibrado $\psi^* T\bar{M}$, definimos os campos tensoriais covariantes $\mathcal{G}_F \in \Gamma(T^*\bar{M} \otimes T^*\bar{M})$ e $\mathcal{A}_F \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ por*

$$\mathcal{G}_F(U, V) = \langle D_{U^{\mathsf{v}}} DF, V^{\mathsf{v}}\rangle_{T\bar{M}} \circ \varphi, \quad U, V \in \Gamma(T\bar{M}) \tag{2.34}$$

e, dados campos vetoriais $X, Y \in \Gamma(TM)$,

$$\mathcal{A}_F(X, Y) = \mathcal{G}_F(\psi_* X, \psi_* Y) \circ \psi = \langle D_{(\psi_* X)^{\mathsf{v}}} DF, (\psi_* Y)^{\mathsf{v}}\rangle_{T\bar{M}} \circ \zeta. \tag{2.35}$$

Definimos, ainda, os tensores $\mathcal{G}_F^* \in \Gamma(T\bar{M} \otimes T^*\bar{M})$ e $\mathcal{A}_F^* \in \Gamma(TM \otimes T^*M)$ por

$$\langle \mathcal{G}_F^* U, V\rangle = \mathcal{G}_F(U, V), \quad U, V \in \Gamma(T\bar{M}) \tag{2.36}$$

e

$$\langle \mathcal{A}_F^* X, Y\rangle = \mathcal{A}_F(X, Y), \quad X, Y \in \Gamma(TM). \tag{2.37}$$

Segue da definição que

$$\psi_* \mathcal{A}_F^* = \mathcal{G}_F^* \psi_*. \tag{2.38}$$

Observamos que o tensor $\mathcal{A}_F^*$ está bem definido, levando campos vetoriais tangentes em campos vetoriais tangentes, em razão da homogeneidade de grau um de F. De fato, demonstramos as seguintes consequências da homogeneidade de F.

Proposição 2.1 *Fixadas secções locais $\varphi(y) = (y, \eta(y))$, $y \in U \subset \bar{M}$, do fibrado tangente $T\bar{M}$ e $\zeta(x) = (\psi(x), N(\psi(x)))$, $x \in M$, do fibrado $\psi^* T\bar{M}$, temos*

$$\mathcal{G}_F(\cdot, \eta) = 0. \tag{2.39}$$

Além disso, dados campos vetoriais X, Y e Z em M, temos

$$\langle (\bar{\nabla}_{\psi_* X} \mathcal{G}_F^*)\psi_* Y, \psi_* Z\rangle = \nabla_X \mathcal{A}_F(Y, Z).$$

Prova. Visto que $\frac{\partial F}{\partial \eta^k}$ é homogênea de grau zero, temos

$$\mathcal{G}_F\Big(\frac{\partial}{\partial y^k}, \eta\Big) = \eta^l \mathcal{G}_F\Big(\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^l}\Big) = \eta^l \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^k \partial \eta^l} = \eta^l \frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big(\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\Big) = 0.$$

Entretanto, uma vez que $\langle \mathcal{G}_F^* N, \cdot\rangle = \mathcal{G}_F(\cdot, N) = 0$, temos, dados $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$,

$$\begin{aligned}
&\langle (\bar{\nabla}_{\psi_* X} \mathcal{G}_F^*)\psi_* Y, \psi_* Z\rangle = \langle \bar{\nabla}_{\psi_* X} \mathcal{G}_F \psi_* Y - \mathcal{G}_F^* \bar{\nabla}_{\psi_* X} \psi_* Y, \psi_* Z\rangle \\
&= \langle \bar{\nabla}_{\psi_* X} \psi_* \mathcal{A}_F^* Y - \mathcal{G}_F^* \psi_* \nabla_X Y, \psi_* Z\rangle \\
&= \langle \bar{\nabla}_{\psi_* X} \psi_* \mathcal{A}_F^* Y - \psi_* \mathcal{A}_F^* \nabla_X Y, \psi_* Z\rangle \\
&= \langle \psi_* \nabla_X \mathcal{A}_F^* Y - \psi_* \mathcal{A}_F^* \nabla_X Y, \psi_* Z\rangle \\
&= \langle (\nabla_X \mathcal{A}_F^*) Y, Z\rangle = \nabla_X \mathcal{A}_F(Y, Z).
\end{aligned}$$

Isto encerra a prova da proposição. □

Em coordenadas locais, temos

$$\mathcal{G}_F(\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^l}) = \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^k \partial \eta^l}\Big|_{(y,\eta(y))} \tag{2.40}$$

e

$$\mathcal{A}_F(\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}, \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^k \partial \eta^l}\Big|_{(\psi(x), N(\psi(x))} \tag{2.41}$$

Portanto, nestes termos, escrevemos

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}_{\psi(0,M)} \xi = -g^{ij} \mathcal{A}_F(A \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) \\
&+ g^{ij} \langle D_{(\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{h}}} DF, (\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{v}}\rangle_{T\bar{M}} + \frac{1}{2} g^{ij} \langle (\bar{R}(\eta, \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j})\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{h}}, DF\rangle
\end{aligned} \tag{2.42}$$

O primeiro termo do lado direito da fórmula (2.42) é de natureza algébrica, sendo o traço de uma composição do tensor $\mathcal{A}_F$ e do operador de Weingarten. Sua aparição motiva mais uma definição.

Definição 2.2 *O tensor $A_F \in \Gamma(TM \otimes T^*M)$ definido por*

$$\langle A_F X, Y\rangle = \langle \mathcal{A}_F^* A X, Y\rangle = \mathcal{A}_F(AX, Y), \quad X, Y \in \Gamma(TM), \tag{2.43}$$

é denominado aplicação de Weingarten anisotrópica. O traço deste tensor, dividido pela dimensão de M, é, por definição, a curvatura média anisotrópica de ψ, que denotamos por H_F. Portanto,

$$nH_F = \mathrm{tr}\, A_F = g^{ij} \mathcal{A}_F(A \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}). \tag{2.44}$$

Passamos, agora, ao cálculo do termo $\langle \chi, N \rangle$ presente em (2.4) e (2.5). Diretamente da definição de χ, temos

$$\langle \chi, N \rangle = \bar{g}^{ij}\left(\frac{\partial F}{\partial y^j} - \Gamma^k_{jr}\eta^r \frac{\partial F}{\partial \eta^k}\right)\eta^l \bar{g}_{il} = \left(\frac{\partial F}{\partial y^j} - \Gamma^k_{jr}\eta^r \frac{\partial F}{\partial \eta^k}\right)\eta^j.$$

Todavia, F é homogênea de grau um com respeito a segunda variável. Em coordenadas, a relação de Euler acarreta

$$\eta^i \frac{\partial F}{\partial \eta^i} = F,$$

o que pode ser expresso invariantemente como

$$\langle \eta^{\mathsf{v}}, DF \rangle|_{(y,\eta)} = F(y, \eta), \tag{2.45}$$

uma vez que

$$\eta^{\mathsf{v}} = (\eta^i \frac{\partial}{\partial y^i})^{\mathsf{v}} = \eta^i (\frac{\partial}{\partial y^i})^{\mathsf{v}} = \eta^i \frac{\partial}{\partial \eta^i}.$$

As derivadas parciais $\frac{\partial F}{\partial y^j}$ são também funções homogêneas de grau um localmente definidas. Isto implica, em coordenadas locais, que

$$\eta^i \frac{\partial}{\partial \eta^i}\frac{\partial F}{\partial y^j} = \frac{\partial F}{\partial y^j}.$$

Substituição esta expressão acima resulta em

$$\begin{aligned}
\langle \chi, N \rangle &= \eta^j\left(\eta^i \frac{\partial}{\partial \eta^i}\frac{\partial F}{\partial y^j} - \Gamma^k_{jr}\eta^r \frac{\partial F}{\partial \eta^k}\right)\eta^j = \eta^i \eta^j \left(\frac{\partial}{\partial \eta^i}\frac{\partial F}{\partial y^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial F}{\partial \eta^k}\right) \\
&= \eta^i \eta^j \big(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^j}} \omega\big)_i = \bar{\nabla}_\eta \omega \cdot \eta \\
&= \langle \bar{\nabla}_\eta \xi, \eta \rangle.
\end{aligned}$$

Por outro lado, posto que $\xi^{\mathsf{v}} = \pi^{\mathsf{v}}_* DF$, temos

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\nabla}_\eta \xi, \eta \rangle &= \langle (\bar{\nabla}_\eta \xi)^{\mathsf{v}}, \eta^{\mathsf{v}} \rangle_{T\bar{M}} = \langle D_{\eta^{\mathsf{h}}} \xi^{\mathsf{v}}, \eta^{\mathsf{v}} \rangle_{T\bar{M}} - \frac{1}{2}\langle (\bar{R}(\eta, \xi)\eta)^{\mathsf{h}}, \eta^{\mathsf{v}} \rangle_{T\bar{M}} \\
&= \langle D_{\eta^{\mathsf{h}}} \pi^{\mathsf{v}}_* DF, \eta^{\mathsf{v}} \rangle_{T\bar{M}} = \langle D_{\eta^{\mathsf{h}}} DF, \eta^{\mathsf{v}} \rangle_{T\bar{M}} - \langle D_{\eta^{\mathsf{h}}} \pi^{\mathsf{h}}_* DF, \eta^{\mathsf{v}} \rangle_{T\bar{M}} \\
&= \langle D_{\eta^{\mathsf{h}}} DF, \eta^{\mathsf{v}} \rangle_{T\bar{M}} - \langle D_{\eta^{\mathsf{h}}} \chi^{\mathsf{h}}, \eta^{\mathsf{v}} \rangle_{T\bar{M}} \\
&= \langle D_{\eta^{\mathsf{h}}} DF, \eta^{\mathsf{v}} \rangle_{T\bar{M}} - \langle (\bar{\nabla}_\eta \chi)^{\mathsf{h}}, \eta^{\mathsf{v}} \rangle_{T\bar{M}} + \frac{1}{2}\langle (R(\eta, \chi)\eta)^{\mathsf{v}}, \eta^{\mathsf{v}} \rangle_{T\bar{M}} \\
&= \langle D_{\eta^{\mathsf{h}}} DF, \eta^{\mathsf{v}} \rangle_{T\bar{M}} + \frac{1}{2}\langle R(\eta, \chi)\eta, \eta \rangle \\
&= \langle D_{\eta^{\mathsf{h}}} DF, \eta^{\mathsf{v}} \rangle_{T\bar{M}}.
\end{aligned}$$

Visto que $\zeta(\psi(0,x)) = (\psi(0,x), \eta(0,x))$ é uma secção do fibrado $\psi^*T\bar{M}$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_{\psi(0,M)}\xi + \langle \chi, N\rangle = &-g^{ij}\langle D_{(\psi_* A\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}} DF, (\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{v}}\rangle \\ &+g^{ij}\langle D_{(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{h}}} DF, (\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{v}}\rangle_{T\bar{M}} + \langle D_{\eta^{\mathsf{h}}} DF, \eta^{\mathsf{v}}\rangle_{T\bar{M}} \\ &+\frac{1}{2} g^{ij}\langle (\bar{R}(\eta, \psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{h}}, DF\rangle.\end{aligned}$$

Observamos que a homogeneidade de grau um assegura que

$$\langle D_{\eta^{\mathsf{v}}} DF, \eta^{\mathsf{v}}\rangle = \eta^i\eta^j \frac{\partial^2 F}{\partial\eta^i\partial\eta^j} = 0.$$

Assim, considerando (2.44), obtemos

$$\mathrm{div}_{\psi(0,M)}\xi + \langle \chi, N\rangle = -nH_F + \mathrm{tr}_{\bar{M}}\langle D_{(\cdot)^{\mathsf{h}}} DF, (\cdot)^{\mathsf{v}}\rangle_{T\bar{M}}\big|_{\psi(0,M)} + \frac{1}{2}\mathrm{Ric}_{\bar{M}}(\eta, \chi) \tag{2.46}$$

onde utilizamos o fato de que

$$\begin{aligned} g^{ij}\langle (\bar{R}(\eta, \psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{h}}, DF\rangle &= g^{ij}\langle (\bar{R}(\eta, \psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{h}}, \pi_*^{\mathsf{h}} DF\rangle \\ &= g^{ij}\langle \bar{R}(\eta, \psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \chi\rangle \\ &= \mathrm{Ric}_{\bar{M}}(\eta, \chi)\end{aligned}$$

uma vez que $\chi^{\mathsf{h}} = \pi_*^{\mathsf{h}} DF$.

Portanto, a equação de Euler-Lagrange (2.5), combinada á fórmula (2.46), resulta em

$$nH_F = \mathrm{tr}_{\bar{M}}\langle D_{(\cdot)^{\mathsf{h}}} DF, (\cdot)^{\mathsf{v}}\rangle_{T\bar{M}}\big|_{\psi(0,M)} + \frac{1}{2}\mathrm{Ric}_{\bar{M}}(\eta, \chi), \tag{2.47}$$

fórmula que, no caso em que F é horizontalmente constante, reduz-se simplesmente a

$$H_F = 0. \tag{2.48}$$

Por sua vez, a equação de Euler-Lagrange (2.4) referente a variações que preservam volume reescreve-se, utilizando (2.46), na forma

$$nH_F = nH_0 + \mathrm{tr}_{\bar{M}}\langle D_{(\cdot)^{\mathsf{h}}} DF, (\cdot)^{\mathsf{v}}\rangle_{T\bar{M}}\big|_{\psi(0,M)} + \frac{1}{2}\mathrm{Ric}_{\bar{M}}(\eta, \chi) \tag{2.49}$$

e, novamente no caso em que F é horizontalmente constante, esta equação torna-se a equação de curvatura média anisotrópica constante

$$H_F = H_0. \tag{2.50}$$

Observamos, finalmente, que, se F é horizontalmente constante, então

$$nH_F = -\mathrm{div}_M \xi. \tag{2.51}$$

Denotando

$$n\mathcal{H} = \mathrm{tr}_{\bar{M}} \langle D_{(\cdot)^{\mathsf{h}}} DF, (\cdot)^{\mathsf{v}} \rangle_{T\bar{M}} \big|_{\psi(0,M)} + \frac{1}{2} \mathrm{Ric}_{\bar{M}}(\eta, \chi), \tag{2.52}$$

resumimos os cálculos abaixo no seguinte resultado, em que as equações de Euler-Lagrange no Teorema 2.1 são reescritos de modo algébrico com a introdução da curvatura média anisotrópica.

Teorema 2.2 *Usando a notação*

$$\mathcal{H} = \mathrm{tr}_{\bar{M}} \langle D_{(\cdot)^{\mathsf{h}}} DF, (\cdot)^{\mathsf{v}} \rangle_{T\bar{M}} \big|_{\psi(0,M)} + \frac{1}{2} \mathrm{Ric}_{\bar{M}}(\eta, \chi), \tag{2.53}$$

a equação de Euler-Lagrange (2.5) *equivale à condição de curvatura média anisotrópica* prescrita

$$H_F = H_0 + \mathcal{H}. \tag{2.54}$$

Se a lagrangiana paramétrica F é horizontalmente constante, a curvatura média anisotrópica da imersão é dada por

$$nH_F \doteq -\mathrm{div}_M \xi \tag{2.55}$$

e, neste caso, a equação (2.5) *torna-se a equação de curvatura média anisotrópica* constante

$$H_F = H_0. \tag{2.56}$$

Portanto, se F é horizontalmente constante e ψ é um ponto crítico de $\mathcal{F}$ com respeito à variações que preservam volume, então a curvatura média anisotrópica de ψ é constante.

2.6 Funcional de Hildebrandt

Um interessante caso de prescrição da curvatura média anisotrópica segue da extremização do funcional de Hildebrandt da forma

$$\mathcal{F}_Q(\psi) = \int_M F(\psi, N)\, dM + \int_M \langle Q(\psi), N \rangle \, dM, \tag{2.57}$$

onde Q é um campo vetorial em $\bar{M}$ e F é horizontalmente constante. Denotando-se

$$F_Q(y,\eta) = \langle Q(y), \eta\rangle,$$

temos, em coordenadas locais,

$$F_Q = \bar{g}_{rs} Q^r \eta^s$$

e, sendo assim, calculamos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_Q}{\partial y^l} - \Gamma^m_{lr}\eta^r \frac{\partial F_Q}{\partial \eta^m} = \frac{\partial \bar{g}_{rs}}{\partial y^l} Q^r \eta^s + \bar{g}_{rs}\frac{\partial Q^r}{\partial y^l}\eta^s - \Gamma^m_{lr}\eta^r \bar{g}_{sm} Q^s \\
&= \frac{\partial \bar{g}_{rs}}{\partial y^l} Q^r \eta^s + \bar{g}_{rs}(Q^r_{;l} - \Gamma^r_{lm} Q^m)\eta^s - \Gamma^m_{lr}\eta^r \bar{g}_{sm} Q^s \\
&= \bar{g}_{rs} Q^r_{;l}\eta^s + Q^r\eta^s(\frac{\partial \bar{g}_{rs}}{\partial y^l} - \bar{g}_{ks}\Gamma^k_{lr} - \bar{g}_{rk}\Gamma^k_{ls}) \\
&= \bar{g}_{rs} Q^r_{;l}\eta^s + Q^r\eta^s(\frac{\partial \bar{g}_{rs}}{\partial y^l} - \frac{1}{2}\bar{g}_{ks}\bar{g}^{km}(\frac{\partial \bar{g}_{mr}}{\partial y^l} + \frac{\partial \bar{g}_{lm}}{\partial y^r} - \frac{\partial \bar{g}_{lr}}{\partial y^m}) \\
&\quad -\frac{1}{2}\bar{g}_{rk}\bar{g}^{km}(\frac{\partial \bar{g}_{ms}}{\partial y^l} + \frac{\partial \bar{g}_{lm}}{\partial y^s} - \frac{\partial \bar{g}_{ls}}{\partial y^m})),
\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_Q}{\partial y^l} - \Gamma^m_{lr}\eta^r \frac{\partial F_Q}{\partial \eta^m} = \bar{g}_{rs} Q^r_{;l}\eta^s + Q^r\eta^s(\frac{\partial \bar{g}_{rs}}{\partial y^l} - \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{g}_{rs}}{\partial y^l} + \frac{\partial \bar{g}_{ls}}{\partial y^r} - \frac{\partial \bar{g}_{lr}}{\partial y^s}) \\
&\quad -\frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{g}_{rs}}{\partial y^l} + \frac{\partial \bar{g}_{lr}}{\partial y^s} - \frac{\partial \bar{g}_{ls}}{\partial y^r})) \\
&= \bar{g}_{rs} Q^r_{;l}\eta^s.
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\begin{aligned}
\chi_Q &\doteqdot \bar{g}^{kl}\Big(\frac{\partial F_Q}{\partial y^l} - \Gamma^m_{lr}\eta^r \frac{\partial F_Q}{\partial \eta^m}\Big)\frac{\partial}{\partial y^k} \\
&= \bar{g}^{kl}\bar{g}_{rs} Q^r_{;l}\eta^s \frac{\partial}{\partial y^k} = \bar{g}^{kl}\eta^s Q_{s;l}\frac{\partial}{\partial y^k}
\end{aligned}$$

e, deste modo,

$$\langle \chi_Q, \eta\rangle = \bar{g}^{kl}\eta^r\eta^s Q_{s;l}\bar{g}_{kr} = \eta^l\eta^s Q_{s;l} = \eta^l \eta_s Q^s_{;l}. \tag{2.58}$$

Por outro lado, a expressão

$$\frac{\partial F_Q}{\partial \eta^l} = \bar{g}_{rl} Q^r$$

assegura que

$$\xi_Q \doteq \bar{g}^{kl}\frac{\partial F_Q}{\partial \eta^l}\frac{\partial}{\partial y^k} = \bar{g}^{kl}\bar{g}_{rl}Q^r\frac{\partial}{\partial y^k} = Q^k\frac{\partial}{\partial y^k} = Q.$$

Logo,

$$\mathrm{div}_M \xi_Q = \mathrm{div}_M Q. \tag{2.59}$$

Agrupando (2.58) e (2.59), demonstramos

Teorema 2.3 *A equação de Euler-Lagrange resultante da extremização de* (2.57) *é*

$$\mathrm{div}_M \xi_Q + \langle \chi_Q, \eta\rangle = \mathrm{div}_{\bar{M}} Q|_{\psi(M)}. \tag{2.60}$$

Assim, a equação de curvatura média anisotrópica prescrita é, neste caso, escrita como

$$nH_F = nH_0 + \mathcal{H}_Q, \tag{2.61}$$

onde

$$\mathcal{H}_Q = \mathrm{div}_{\bar{M}} Q. \tag{2.62}$$

Observamos que, no caso particular em que Q é um campo de Killing, a equação (2.61) reduz-se á equação de curvatura média anissotrópica constante. Mais adiante, lidamos com a estabilidade de pontos críticos do funcional de Hildebrandt.

2.7 Tensor de Cartan

Ocupamo-nos, nesta seção, da comparação entre o funcional paramétrico elíptico $\mathcal{F}$ e o funcional área clássico. Isto requer estudarmos o quanto o tensor $\mathcal{G}_F$ desvia de uma métrica riemanniana. Em termos de Geometria Finsler, este desvio equivale a existência de um tensor composto de derivadas terceiras de F, o tensor de Cartan.

Iniciamos apresentando algumas propriedades elementares das derivadas covariantes dos tensores $\mathcal{G}_F$ e $\mathcal{A}_F$. Vemos, em seguida, por exemplo, que a diferenciação covariante preserva a simetria dos campos tensoriais $\mathcal{G}_F$ e $\mathcal{A}_F$.

Proposição 2.2 *A derivada covariante de $\mathcal{G}_F^*$ satisfaz*

$$\langle (\bar{\nabla}_U \mathcal{G}_F^*)U', W\rangle = \langle U', (\bar{\nabla}_U \mathcal{G}_F^*)W\rangle, \tag{2.63}$$

para quaisquer campos vetoriais U, U' e W em $\bar{M}$. Propriedades similares valem para os campos tensoriais $\mathcal{G}_F, \mathcal{A}_F$ e $\mathcal{A}_F^*$.

Prova. Dados os campos vetoriais $U, U', W \in \Gamma(T\bar{M})$, se segue que

$$\begin{aligned}
\langle(\bar{\nabla}_U \mathcal{G}_F^*)U', W\rangle &= \langle\bar{\nabla}_U(\mathcal{G}_F^* U'), W\rangle - \langle\mathcal{G}_F^*(\bar{\nabla}_U U'), W\rangle \\
&= U\langle\mathcal{G}_F^* U', W\rangle - \langle\mathcal{G}_F^* U', \bar{\nabla}_U W\rangle - \langle\bar{\nabla}_U U', \mathcal{G}_F^* W\rangle \\
&= U\langle U', \mathcal{G}_F^* W\rangle - \langle\mathcal{G}_F^* U', \bar{\nabla}_U W\rangle - \langle\bar{\nabla}_U U', \mathcal{G}_F^* W\rangle \\
&= \langle U', \bar{\nabla}_U(\mathcal{G}_F^* W)\rangle - \langle U', \mathcal{G}_F^*(\bar{\nabla}_U W)\rangle \\
&= \langle U', (\bar{\nabla}_U \mathcal{G}_F^*)W\rangle. \qquad (2.64)
\end{aligned}$$

Isto prova (2.63). □

A proposição seguinte relaciona as derivadas covariantes de $\mathcal{G}_F$ e $\mathcal{A}_F$.

Proposição 2.3 *Dados campos vetoriais X, Y, Z em M, temos*

$$\bar{\nabla}_{\psi_* X}\mathcal{G}_F(\psi_* Y, \psi_* Z) \circ \psi = \nabla_X \mathcal{A}_F(Y, Z). \qquad (2.65)$$

Prova. Utilizando (2.39), calculamos, em pontos de $\psi(0, M)$,

$$\begin{aligned}
&\bar{\nabla}_{\psi_* X}\mathcal{G}_F(\psi_* Y, \psi_* Z) = \psi_* X(\mathcal{G}_F(\psi_* Y, \psi_* Z)) - \mathcal{G}_F(\bar{\nabla}_{\psi_* X}\psi_* Y, \psi_* Z) - \mathcal{G}_F(\psi_* Y, \bar{\nabla}_{\psi_* X}\psi_* Z) \\
&= X(\mathcal{A}_F(Y, Z)) - \mathcal{G}_F(\psi_* \nabla_X Y, \psi_* Z) - \mathcal{G}_F(\psi_* Y, \psi_* \nabla_X Z) \\
&= X(\mathcal{A}_F(Y, Z)) - \mathcal{A}_F(\nabla_X Y, Z) - \mathcal{A}_F(Y, \nabla_X Z) \\
&= \nabla_X \mathcal{A}_F(Y, Z),
\end{aligned}$$

o que encerra a demonstração. □

Agora, relacionamos derivadas covariantes de $\mathcal{A}_F$ e o tensor de Cartan de F.

Proposição 2.4 *Se F é horizontalmente constante, as derivadas covariantes de segunda ordem de $\mathcal{A}_F$ são dadas por*

$$(\mathcal{A}_F)_{ij;k} = -A_k^l \frac{\partial\psi^r}{\partial x^l}\frac{\partial\psi^s}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^t}{\partial x^j}F_{s;tr}, \qquad (2.66)$$

onde A_k^l são as componentes locais do tensor de Weingarten.

Prova. Temos

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\mathcal{A}_F(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial}{\partial x^k}(\mathcal{A}_F(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})) - \mathcal{A}_F(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) - \mathcal{A}_F(\frac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^j}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^k}(\mathcal{G}_F(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}) \circ \psi) - \mathcal{G}_F(\psi_*\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^i}, \psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}) \circ \psi \\
&\quad -\mathcal{G}_F(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \psi_*\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^j}) \circ \psi \\
&= \frac{\partial}{\partial x^k}(\mathcal{G}_F(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}) \circ \psi) - \mathcal{G}_F(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}}\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}) \circ \psi \\
&\quad -\mathcal{G}_F(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}}\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}) \circ \psi.
\end{aligned}$$

Portanto, denotando por $\zeta : M \to T\bar{M}$ a secção de $\psi^*T\bar{M}$ dada por $\zeta(x) = (\psi(x), N(\psi(x)))$, temos

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\mathcal{A}_F(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial}{\partial x^k}(D^2F((\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}, (\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{v}}) \circ \zeta) \\
&\quad -D^2F((\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}}\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}, (\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{v}}) \circ \zeta - D^2F((\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}, (\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}}\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{v}}) \circ \zeta \\
&= \zeta_*\frac{\partial}{\partial x^k}(D^2F((\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}, (\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{v}})) \\
&\quad -D^2F((\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}}\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}, (\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{v}}) \circ \zeta - D^2F((\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}, (\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}}\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{v}}) \circ \zeta.
\end{aligned}$$

Deste modo, resulta que

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\mathcal{A}_F(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = D_{\zeta_*\frac{\partial}{\partial x^k}}D^2F((\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}, (\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{v}}) + D^2F(D_{\zeta_*\frac{\partial}{\partial x^k}}(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}, (\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{v}}) \\
&\quad +D^2F((\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}, D_{\zeta_*\frac{\partial}{\partial x^k}}(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{v}}) \\
&\quad -D^2F((\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}}\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}, (\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{v}}) \circ \zeta - D^2F((\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}, (\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}}\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{v}}) \circ \zeta.
\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\zeta_*\frac{\partial}{\partial x^k} = (\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k})^{\mathsf{h}} + (\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}}N)^{\mathsf{v}},$$

supondo F horizontalmente constante, deduzimos, usando a Proposição 1.2, que

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\mathcal{A}_F(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = D_{(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}}N)^{\mathsf{v}}}D^2F((\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}, (\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{v}}) \\
&\quad +D^2F(D_{(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k})^{\mathsf{h}}}(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}, (\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{v}}) + D^2F((\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}, D_{(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k})^{\mathsf{h}}}(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{v}}) \\
&\quad -D^2F((\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}}\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}, (\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{v}}) - D^2F((\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}, (\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}}\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{v}}) \\
&= D_{(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}}N)^{\mathsf{v}}}D^2F((\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}, (\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{v}}).
\end{aligned}$$

Disto decorre que

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\mathcal{A}_F(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) &= -a_k^l D_{(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^l})^{\mathsf{v}}}D^2F((\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}, (\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{v}}) \\
&= -a_k^l\frac{\partial\psi^r}{\partial x^l}\frac{\partial\psi^s}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^t}{\partial x^j}D_{\frac{\partial}{\partial\eta^r}}D^2F(\frac{\partial}{\partial\eta^s}, \frac{\partial}{\partial\eta^t}) \\
&= -a_k^l\frac{\partial\psi^r}{\partial x^l}\frac{\partial\psi^s}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^t}{\partial x^j}F_{s;tr},
\end{aligned}$$

donde concluímos que

$$(\mathcal{A}_F)_{ij;k} = -a_k^l \frac{\partial \psi^r}{\partial x^l} \frac{\partial \psi^s}{\partial x^i} \frac{\partial \psi^t}{\partial x^j} F_{s;tr}. \tag{2.67}$$

Isto encerra a demonstração. □

Observamos que, para o ambiente euclidiano $\bar{M}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$, uma fórmula similar aparece em ([**?**], p. 276). Uma vez que as fibras em $T\bar{M}$ sao intrinsecamente planas, as derivadas covariantes de F comutam em todos os índices. Portanto, o tensor em M com componentes

$$T_{lij} = \frac{\partial \psi^r}{\partial x^l} \frac{\partial \psi^s}{\partial x^i} \frac{\partial \psi^t}{\partial x^j} F_{s;tr} \tag{2.68}$$

é simétrico em todos os índices. Observamos, ainda, que $F_{s;tr}$ é o tensor de Cartan.

Deste modo, temos

$$(\mathcal{A}_F^*)^m_{j;k} = g^{mi}(\mathcal{A}_F)_{ij;k} = -g^{mi} a_k^l T_{lij} = -a_k^l T_{lj}^m$$

e, portanto,

$$(\mathcal{A}_F^*)^k_{j;k} - (\mathcal{A}_F^*)^k_{k;j} = -a_k^l T_{lj}^k + a_j^l T_{lk}^k = -a_k^l (T_{lj}^k - T_{lm}^m \delta_j^k)$$

Caso o tensor T_{lij} seja livre de traço (por simetria, isto significa que, levantando qualquer um dos índices, temos um tensor $(1,1)$ livre de traço), temos

$$\mathrm{div}_M \mathcal{A}_F^* = \mathrm{dtr} \mathcal{A}_F^* \tag{2.69}$$

Deste modo, demonstramos

Proposição 2.5 *Se F é horizontalmente constante e o tensor T é livre de traço, então*

$$\mathrm{div}_M \mathcal{A}_F^* = \mathrm{dtr} \mathcal{A}_F^*. \tag{2.70}$$

Capítulo 3

Equações Fundamentais

Neste capítulo, tentamos reproduzir a teoria clássica de hipersuperfícies em variedades riemannianas em termos dos análogos anisotrópicos do tensor de Weingarten e da segunda forma fundamental. A equação de Codazzi anisotrópica assegura que, para superfícies em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média anisotrópica constante, a aplicação de Gauss anisotrópica, com imagens na forma de Wulff adequada, é harmônica. Isto demonstra afirmativamente conjectura posta por M. Koiso em [13].

Proposição 3.1 *Se F é horizontalmente constante, o tensor de Weingarten anisotrópico definido em* (2.2) *satisfaz*

$$\bar{\nabla}\xi = -A_F. \tag{3.1}$$

Nos referimos a (3.1) *como equação de Weingarten anisotrópica.*

Prova. Se F é horizontalmente constante, a fórmula (2.29) reduz-se a

$$\Big(\frac{\partial}{\partial y^r}\Big)^{\mathsf{h}}\frac{\partial F}{\partial \eta^k} - \Gamma^l_{rk}\frac{\partial F}{\partial \eta^l} = \langle D_{(\frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{h}}}DF, \frac{\partial}{\partial \eta^k}\rangle_{T\bar{M}} + \frac{1}{2}\langle(\bar{R}(\eta, \frac{\partial}{\partial \eta^k})\frac{\partial}{\partial y^r})^{\mathsf{h}}, DF\rangle_{T\bar{M}} = 0.$$

Assim, neste caso, a expressão (2.31) torna-se

$$\langle \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}}\xi, \psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}\rangle = -\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^k \partial \eta^l}\frac{\partial \psi^k}{\partial x^m}a_i^m\frac{\partial \psi^l}{\partial x^j}.$$

Por outro lado,

$$\langle \mathcal{A}_F\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle = \langle D_{(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}}DF, (\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}\rangle_{T\bar{M}} = \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^k \partial \eta^l}\frac{\partial \psi^k}{\partial x^i}\frac{\partial \psi^l}{\partial x^j}$$

e, portanto,

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}_F A \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle &= a_i^m \langle \mathcal{A}_F A \frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = \langle D_{(\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}} DF, (\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}} \rangle_{T\bar{M}} \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^k \partial \eta^l} \frac{\partial \psi^k}{\partial x^m} a_i^m \frac{\partial \psi^l}{\partial x^j} = -\langle \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \xi, \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle
\end{aligned}
$$

Visto que, pela Proposição 2.1, o tensor $\mathcal{A}_F A$ leva vetores tangentes em vetores tangentes, temos

$$
-\big(\bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \xi\big)^T = \psi_* \mathcal{A}_F A \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{3.2}
$$

Assim, denotando por $A_F = \mathcal{A}_F A$ o operador de Weingarten anisotrópico, concluímos que

$$
\psi_* A_F X = -\big(\bar{\nabla}_{\psi_* X} \xi\big)^T, \tag{3.3}
$$

para todo vetor fixado $X \in \Gamma(TM)$. Verificamos a seguir que não existe componente normal (no sentido usual) de $\bar{\nabla}_{\psi_* X} \xi$. De fato, (2.29) escreve-se como

$$
\bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \omega = -\frac{\partial \psi^r}{\partial x^j} a_i^j \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^r \partial \eta^k} dy^k.
$$

Uma vez que, dado um vetor tangente $(y, u) \in T\bar{M}$, temos

$$
\langle \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \xi, u \rangle = \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \omega \cdot u,
$$

deduzimos que

$$
\bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \xi = -\frac{\partial \psi^r}{\partial x^j} a_i^j \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^r \partial \eta^k} \bar{g}^{kl} \frac{\partial}{\partial y^l}.
$$

De maneira mais sucinta, escrevemos

$$
\bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \xi = -\bar{g}^{kl} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^r \partial \eta^k} \big(\psi_* A \frac{\partial}{\partial x^i}\big)^r \frac{\partial}{\partial y^l}. \tag{3.4}
$$

Isto implica que

$$
\begin{aligned}
\langle \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \xi, \eta \rangle &= -\bar{g}^{kl} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^r \partial \eta^k} \big(\psi_* A \frac{\partial}{\partial x^i}\big)^r \eta^m \bar{g}_{lm} \\
&= -\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^r \partial \eta^k} \big(\psi_* A \frac{\partial}{\partial x^i}\big)^r \eta^k \\
&= -\eta^k \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^k \partial \eta^r} \big(\psi_* A \frac{\partial}{\partial x^i}\big)^r = 0,
\end{aligned}
$$

onde usamos o fato de que as funções $\frac{\partial F}{\partial \eta^r}$ são homogêneas de grau zero. Então, como havíamos afirmado,

$$\langle \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \xi, \eta \rangle = 0. \tag{3.5}$$

Portanto

$$\psi_* A_F \frac{\partial}{\partial x^i} = -\bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \xi \tag{3.6}$$

Isto encerra a demonstração □

3.1 Equação de Codazzi

Proposição 3.2 *O tensor de Weingarten anisotrópico A_F definido em* (3.1) *satisfaz à seguinte versão anisotrópica da equação de Codazzi*

$$\psi_*(\nabla_X A_F)Y - \psi_*(\nabla_Y A_F)X = -\bar{R}(\psi_* X, \psi_* Y)\xi, \tag{3.7}$$

onde X, Y são campos vetoriais em M e $\bar{R}$ é o tensor de curvatura de Riemann em $\bar{M}$.

Prova. Visto que

$$\psi_* A_F X = -\bar{\nabla}_{\psi_* X} \xi, \tag{3.8}$$

temos

$$\begin{aligned}
\psi_*(\nabla_X A_F)Y &= \psi_*(\nabla_X A_F Y - A_F \nabla_X Y) = \bar{\nabla}_{\psi_* X} \psi_* A_F Y - \langle \bar{\nabla}_{\psi_* X} \psi_* A_F Y, \eta \rangle \eta + \bar{\nabla}_{\psi_* \nabla_X Y} \xi \\
&= -\bar{\nabla}_{\psi_* X} \bar{\nabla}_{\psi_* Y} \xi + \langle \bar{\nabla}_{\psi_* X} \bar{\nabla}_{\psi_* Y} \xi, \eta \rangle \eta + \bar{\nabla}_{\psi_* \nabla_X Y} \xi \\
&= -\bar{\nabla}_{\psi_* X} \bar{\nabla}_{\psi_* Y} \xi + \psi_* X \langle \bar{\nabla}_{\psi_* Y} \xi, \eta \rangle \eta - \langle \bar{\nabla}_{\psi_* Y} \xi, \bar{\nabla}_{\psi_* X} \eta \rangle \eta + \bar{\nabla}_{\psi_* \nabla_X Y} \xi
\end{aligned}$$

No entanto, uma vez que $\bar{\nabla}_{\psi_* Y} \xi$ não tem componente na direção de η e posto que $\bar{\nabla}_{\psi_* X} \eta$ é um vetor tangente, obtemos

$$\psi_*(\nabla_X A_F)Y = -\bar{\nabla}_{\psi_* X} \bar{\nabla}_{\psi_* Y} \xi - \langle A_F Y, AX \rangle \eta + \bar{\nabla}_{\psi_* \nabla_X Y} \xi.$$

Analogamente,

$$\psi_*(\nabla_Y A_F)X = -\bar{\nabla}_{\psi_* Y} \bar{\nabla}_{\psi_* X} \xi - \langle A_F X, AY \rangle \eta + \bar{\nabla}_{\psi_* \nabla_Y X} \xi,$$

o que implica que

$$\begin{aligned}
\psi_*(\nabla_X A_F)Y - \psi_*(\nabla_Y A_F)X &= -\bar{\nabla}_{\psi_* X} \bar{\nabla}_{\psi_* Y} \xi + \bar{\nabla}_{\psi_* Y} \bar{\nabla}_{\psi_* X} \xi + \bar{\nabla}_{\psi_* \nabla_X Y} \xi - \bar{\nabla}_{\psi_* \nabla_Y X} \xi \\
&\quad - \langle A_F Y, AX \rangle \eta + \langle A_F X, AY \rangle \eta.
\end{aligned}$$

Visto que $A_F A$ é simétrico, concluímos que

$$\psi_*(\nabla_X A_F)Y - \psi_*(\nabla_Y A_F)X = -\bar{R}(\psi_* X, \psi_* Y)\xi. \tag{3.9}$$

A simetria de $A_F A = \mathcal{A}_F A^2$ pode ser verificada como segue

$$\begin{aligned}
&\langle A_F \frac{\partial}{\partial x^i}, A\frac{\partial}{\partial x^j}\rangle = \langle \mathcal{A}_F A\frac{\partial}{\partial x^i}, A\frac{\partial}{\partial x^j}\rangle \\
&= a_i^k a_j^l \langle \mathcal{A}_F \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\rangle = a_i^k a_j^l \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^r \partial \eta^s}\frac{\partial \psi^r}{\partial \eta^k}\frac{\partial \psi^s}{\partial \eta^l} \\
&= a_i^k a_j^l \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^s \partial \eta^r}\frac{\partial \psi^s}{\partial \eta^l}\frac{\partial \psi^r}{\partial \eta^k} = a_j^l a_i^k \langle \mathcal{A}_F \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k}\rangle = \langle \mathcal{A}_F A\frac{\partial}{\partial x^j}, A\frac{\partial}{\partial x^i}\rangle \\
&= \langle A_F \frac{\partial}{\partial x^j}, A\frac{\partial}{\partial x^i}\rangle.
\end{aligned}$$

Isto encerra a demonstração da proposição. □

3.2 Equações de Gauss-Weingarten Anisotrópicas

Uma vez que

$$\langle \xi, \eta \rangle = F,$$

o campo vetorial ξ sempre tem componente normal. Assim, este campo é transversal à hipersuperfície imersa. Então, podemos decompor $T_{\psi(x)}\bar{M}$ em uma soma direta $f_* T_x M \oplus \mathbb{R}\,\xi$. Em termos desta soma direta, escrevemos

$$\bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j} \doteq \psi_* \nabla^F_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} + II_F(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})\,\xi. \tag{3.10}$$

Note que se decompomos ξ nas direções normal e tangente, obtemos

$$\xi = \xi^T + F\eta.$$

Então,

$$\bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j} = \psi_* \nabla^F_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} + II_F(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})\,\xi^T + F\,II_F(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})\eta. \tag{3.11}$$

Usando as equações de Gauss-Weingarten

$$\psi_* \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \big(\bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}\big)^T$$

e

$$II(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j} - \big(\bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}\big)^T,$$

concluímos que

$$\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - II_F(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})\hat{\xi}, \tag{3.12}$$

onde $\hat{\xi}$ é o campo vetorial em M que está $f-$relacionado com ξ^T. Além disso, temos

$$II_F(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{1}{F} II(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}). \tag{3.13}$$

Assim concluímos que

$$\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{1}{F} II(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})\hat{\xi}, \tag{3.14}$$

Dados os campos vetoriais $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$, a equação de Gauss é (em termos da métrica ambiente usual em $\bar{M}$ e da métrica induzida em M)

$$\begin{aligned}&\langle R(X,Y)Z, W\rangle - \langle \bar{R}(\psi_* X, \psi_* Y)\psi_* Z, \psi_* W\rangle = II(X,W)II(Y,Z)\\ &-II(X,Z)II(Y,W).\end{aligned}$$

Em termos de dados anisotrópicos, deduzimos a equação de Gauss anistrópica

$$\begin{aligned}&\langle R(X,Y)Z, W\rangle - \langle \bar{R}(\psi_* X, \psi_* Y)\psi_* Z, \psi_* W\rangle = F^2\, II_F(X,W)II_F(Y,Z)\\ &-F^2\, II_F(X,Z)II_F(Y,W).\end{aligned} \tag{3.15}$$

3.3 Harmonicidade da Aplicação de Gauss

Dada uma lagrangiana paramétrica horizontalmente constante $F : T\mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}^+$, a *forma de Wulff* é a fronteira regular do corpo convexo em $\mathbb{R}^3$ cuja função suporte, baseada na origem, é a própria função F. Uma vez que $T\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, globalmente, o fato de que F é horizontalmente constante equivale a que F dependa unicamente da segunda variável. Denotamos, assim, a restrição de F a esfera unitária $\mathbb{S}^2$ por f. A hipótese de homogeneidade implica que

$$F(\eta) = |\eta| f(\frac{\eta}{|\eta|}), \quad \eta \in \mathbb{R}^3 - \{0\},$$

ou seja, F é a extensão homogênea de grau um da função $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^+$. Sendo assim, dada a família de semi-planos

$$\Pi_-(\eta) = \{y \in \mathbb{R}^3 : \langle y, \eta\rangle \leq F(\eta)\}, \quad \eta \in \mathbb{S}^2,$$

o corpo convexo K cuja fronteira é a forma de Wulff W_F correspondente a F é, por definição, o envelope convexo destes semi-planos, isto é,

$$K = \bigcap_{\eta\in\mathbb{S}^2} \Pi_-(\eta).$$

Portanto, $W_F = \partial K$ é a superfície regular parametrizada pela aplicação $G : \mathbb{S}^2 \to W_F \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$G(\eta) = \bar{\nabla} F(\eta) = \hat{\nabla} f(\eta) + f(\eta)\eta, \quad \eta \in \mathbb{S}^2, \tag{3.16}$$

onde $\hat{\nabla}$ denota o gradiente em $\mathbb{S}^2$ e a última igualdade deriva do Lema de Euler e do fato de que F é extensão homogênea de grau 1 de f. A partir da expressão (3.16), deduzimos que, dados parâmetros locais $w = u + iv$ em $\mathbb{S}^2$ e uma carta local $w \in \mathbb{R}^2 \mapsto \eta = X(w) \in \mathbb{S}^2$, a métrica induzida em W_F tem coeficiente da forma

$$\mathfrak{E} = \langle G_*(\eta)X_*(w)\cdot\frac{\partial}{\partial u}, G_*(\eta)X_*(w)\cdot\frac{\partial}{\partial u}\rangle = \langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial u}}\bar{\nabla}F, \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial u}}\bar{\nabla}F\rangle. \tag{3.17}$$

Uma vez que

$$\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial u}}\bar{\nabla}F, \eta\rangle = \frac{\partial}{\partial u}\langle\bar{\nabla}F,\eta\rangle - \langle\bar{\nabla}F, \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial u}}\eta\rangle = \frac{\partial(F\circ X)}{\partial u} - \langle\bar{\nabla}F, \frac{\partial X}{\partial u}\rangle = 0,$$

concluímos que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E} &= \langle\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial\eta^k}\rangle\langle\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial\eta^l}\rangle\bar{g}^{rs}\langle\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial\eta^k}}\bar{\nabla}F, \frac{\partial}{\partial\eta^r}\rangle\langle\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial\eta^l}}\bar{\nabla}F, \frac{\partial}{\partial\eta^s}\rangle \\
&= \langle\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial\eta^k}\rangle\langle\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial\eta^l}\rangle\bar{g}^{rs}\,\mathcal{G}_F(\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^r})\mathcal{G}_F(\frac{\partial}{\partial\eta^l}, \frac{\partial}{\partial\eta^s}) \\
&= \bar{g}^{rs}\mathcal{G}_F(\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial y^r})\mathcal{G}_F(\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial\eta^s}).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\mathfrak{E} = \bar{g}^{rs}\langle\mathcal{G}_F^*\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial y^r}\rangle\langle\mathcal{G}_F^*\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial\eta^s}\rangle = \langle\mathcal{G}_F^*\frac{\partial X}{\partial u}, \mathcal{G}_F^*\frac{\partial X}{\partial u}\rangle \tag{3.18}$$

Os demais coeficientes locais da métrica em W_F são dados por

$$\mathfrak{F} = \langle\mathcal{G}_F^*\frac{\partial X}{\partial u}, \mathcal{G}_F^*\frac{\partial X}{\partial v}\rangle, \quad \mathfrak{G} = \langle\mathcal{G}_F^*\frac{\partial X}{\partial v}, \mathcal{G}_F^*\frac{\partial X}{\partial v}\rangle. \tag{3.19}$$

Consideramos, agora, uma imersão isométrica $\psi : M \to \mathbb{R}^3$. Definimos a aplicação de Gauss anisotrópica

$$g : M \to W_F \tag{3.20}$$

pela seguinte relação: para cada $x \in M$, o ponto $g(x) \in W_F$ é o único ponto em W_F com plano tangente (orientado) paralelo ao plano tangente a $\psi(M)$ em $\psi(x)$, com direção normal dada por $\eta = N(\psi(x))$. Remetemos o leitor a [20] para uma definição similar.

Seguindo esta terminologia, demonstramos o seguinte resultado, análogo anisotrópico do celebrado teorema de Ruh e Wilms (v. [26]).

Teorema 3.1 *Seja M uma variedade bidimensional compacta e orientada. Uma imersão isométrica $\psi : M \to \mathbb{R}^3$ tem curvatura média anisotrópica constante se e somente se a aplicação de Gauss anisotrópica $g : M \to W_F$ é harmônica.*

Prova. A segunda forma fundamental da aplicação g é, por definição,

$$\beta(g)(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = \tilde{\nabla}_{g_* \frac{\partial}{\partial x^i}} g_* \frac{\partial}{\partial x^j} - g_* \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{3.21}$$

onde ∇ e $\tilde{\nabla}$ são as conexões Riemannianas em M e W_F, respectivamente.

Por definição, o plano tangente a $\psi(M)$ em $\psi(x)$ e a W_F em $g(x)$ são paralelos com direção normal dada por $\eta = N(\psi(x))$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{g_* \frac{\partial}{\partial x^i}} g_* \frac{\partial}{\partial x^j} &= \big(\bar{\nabla}_{g_* \frac{\partial}{\partial x^i}} g_* \frac{\partial}{\partial x^j}\big)^{T_F} \\ &= \big(\frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j}\big)^{T_F} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j} - \langle \frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j}, N \rangle N, \end{aligned} \tag{3.22}$$

onde $\bar{\nabla}$ é a conexão euclidiana em $\mathbb{R}^3$ e T_F indica a projeção tangencial sobre TW_F. Visto que $g(x) = \xi(x)$ por paralelismo, conluímos da equação de Weingarten anisotrópica que

$$\frac{\partial g}{\partial x^j} = \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} \xi = -(A_F)_j^k \psi_* \frac{\partial}{\partial x^k} = -(A_F)_j^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k}. \tag{3.23}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j} &= -\frac{\partial (A_F)_j^k}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - (A_F)_j^k \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^k} \\ &= -\frac{\partial (A_F)_j^k}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - (A_F)_j^k \Big(\big(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^k}\big)^T + \langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^k}, N \rangle N \Big), \end{aligned}$$

onde, desta vez, T representa a projeção tangential sobre TM. Uma vez que T_F e T são projeções sobre planos paralelos, temos

$$\big(\frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j}\big)^{T_F} = -\frac{\partial (A_F)_j^k}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - (A_F)_j^k \big(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^k}\big)^T.$$

Da equação de Gauss usual, segue que

$$\tilde{\nabla}_{g_*\frac{\partial}{\partial x^i}} g_* \frac{\partial}{\partial x^j} = \Big(\frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j}\Big)^{T_F} = -\frac{\partial (A_F)^l_j}{\partial x^i}\frac{\partial \psi}{\partial x^l} - (A_F)^k_j \Gamma^l_{ik}\frac{\partial \psi}{\partial x^l},$$

onde Γ^l_{ik} são os símblolos de Christoffel para a conexão induzida ∇ pela imersão de M. Por outro lado,

$$g_*\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij}\, g_*\frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma^k_{ij}\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}}\xi = -\Gamma^k_{ij}(A_F)^l_k\psi_*\frac{\partial}{\partial x^l} = -\Gamma^k_{ij}(A_F)^l_k\frac{\partial \psi}{\partial x^l}.$$

Deste modo, concluímos que

$$\begin{aligned}\beta(g)\Big(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) &= -\frac{\partial (A_F)^l_j}{\partial x^i}\frac{\partial \psi}{\partial x^l} - (A_F)^k_j\Gamma^l_{ik}\frac{\partial \psi}{\partial x^l} + \Gamma^k_{ij}(A_F)^l_k\frac{\partial \psi}{\partial x^l} \\ &= -\big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} A_F\big)^l_j\frac{\partial \psi}{\partial x^l} =: -(A_F)^l_{j;i}\psi_*\frac{\partial}{\partial x^l}.\end{aligned}$$

O campo de tensão $\tau(g)$ é, por definição, o traço da segunda forma fundamental β, isto é,

$$\tau(g) = g^{ij}\beta(g)\Big(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\Big). \tag{3.24}$$

Portanto, o campo de tensão de g tem componentes

$$\tau(g)^l = -g^{ij}(A_F)^l_{j;i}. \tag{3.25}$$

Entretanto, usando a equação de Codazzi anisotrópica para $\mathbb{R}^3$, obtemos

$$\begin{aligned}\tau(g)^l &= -g^{ij}(g^{lk}(A_F)_{kj})_{;i} = -g^{lk}g^{ij}(A_F)_{kj;i} = -g^{lk}g^{ij}(A_F)_{jk;i} = -g^{lk}g^{ij}(A_F)_{ji;k} \\ &= -g^{lk}(g^{ij}(A_F)_{ji})_{;k} = -ng^{lk}(H_F)_{;k} = -nH^l_F.\end{aligned}$$

Assim,

$$\tau(g) = -n\psi_*\nabla H_F. \tag{3.26}$$

Concluímos que g é harmônica se, e somente se, H_F é constante, como queríamos demonstrar $\square$

Uma consequência importante da harmonicidade da aplicação de Gauss é a existência de uma diferencial quadrática holomorfa associada a uma imersão com curvatura média anisotrópica constante em $\mathbb{R}^3$. Esta diferencial, denominada diferencial de Hopf, é definida em termos de coordenadas locais conformes $z = x^1 + \sqrt{-1}\,x^2$ em M e da métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle_{W_F}$ em W_F por

$$\Phi = \langle g_*\frac{\partial}{\partial z}, g_*\frac{\partial}{\partial z}\rangle_{W_F}\, dz^2. \tag{3.27}$$

Teorema 3.2 *Se ψ tem curvatura média anisotrópica constante, então Φ é uma diferencial quadrática holomorfa. Em particular, se M é homeomorfa à esfera $\mathbb{S}^2$, então $\psi(M)$ é isométrico a W_F.*

Capítulo 4

Hipersuperfícies de Delaunay Anisotrópicas

O exemplo natural das formas de Wulff para lagrangianas paramétricas no espaço euclidiano não pode ser facilmente reproduzido em variedades para as quais não temos a estrutura vetorial de $\mathbb{R}^{n+1}$ e a teoria clássica de corpos convexos resultante desta estrutura. Ao invés de confrontar o problema de existência de pontos críticos para funcionais arbitrários em ambientes igualmente arbitrários, focamos nossa atenção, neste capítulo, ao uso de métodos equivariantes para assegurar a existência de pontos críticos de funcionais rotacionalmente invariantes em ambientes riemannianos como as formas espaciais e os produtos de formas espaciais por uma linha euclidiana. Tais métodos podem também ser empregados em geometrias homogêneas tridimensionais como o grupo de Heisenberg e as esferas de Berger.

4.1 Funcionais Paramétricos Rotacionalmente Invariantes

Seja $Y \in \Gamma(T\bar{M})$ um campo vetorial em $\bar{M}$. Fixadas coordenadas locais $y^1, \ldots, y^{n+1}, \eta^1, \ldots, \eta^{n+1}$ em $T\bar{M}$, escrevemos

$$Y = a^1 \frac{\partial}{\partial y^1} + \ldots + a^{n+1} \frac{\partial}{\partial y^{n+1}}, \tag{4.1}$$

onde as funções

$$a^i = a^i(y^1, \ldots, y^{n+1}) \tag{4.2}$$

são as componentes locais de Y. Assim, o levantamento vertical

$$Y^{\mathsf{v}}(y, \eta) = a^1 \frac{\partial}{\partial \eta^1} + \ldots + a^{n+1} \frac{\partial}{\partial \eta^{n+1}} \tag{4.3}$$

determina um campo vetorial global em $T\bar{M}$, isto é, $Y^{\mathsf{v}} \in \Gamma(TT\bar{M})$. Lembramos que

$$P(y,\eta) = \eta^1 \frac{\partial}{\partial \eta^1}\Big|_{(y,\eta)} + \ldots + \eta^{n+1} \frac{\partial}{\partial \eta^{n+1}}\Big|_{(y,\eta)} \tag{4.4}$$

é a secção canônica do fibrado $TT\bar{M}$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \langle Y^{\mathsf{v}}, P\rangle_{T\bar{M}} &= a^k(y^1,\ldots,y^{n+1})\eta^l \langle \frac{\partial}{\partial \eta^k}\Big|_{(y,\eta)}, \frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big|_{(y,\eta)}\rangle_{T\bar{M}} \\ &= a^k\eta^l \langle \frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_y, \frac{\partial}{\partial y^l}\Big|_y\rangle = \bar{g}_{kl}a^k\eta^l. \end{aligned}$$

Analogamente, calculamos

$$|P| = \sqrt{\langle P, P\rangle_{T\bar{M}}} = \sqrt{\bar{g}_{kl}(y^1,\ldots,y^{n+1})\eta^k\eta^l}.$$

Deste modo, concluímos que

$$\Theta(y,\eta) := \langle Y^{\mathsf{v}}, \frac{P}{|P|}\rangle_{T\bar{M}} \tag{4.5}$$

é uma função bem definida em $T\bar{M}$. Alternativamente, escrevemos

$$\Theta(y,\eta) = \langle Y, \frac{\eta}{|\eta|}\rangle$$

uma vez que, em termos de coordenadas locais, temos

$$\eta = \eta^k \frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_y \in T_y\bar{M}$$

e

$$\langle Y, \eta\rangle = \bar{g}_{kl}a^k\eta^l.$$

Agora, seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função real diferenciável escolhida de tal modo que a função $F : T\bar{M} \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$F(y,\eta) = |\eta| f(\Theta(y,\eta)) \tag{4.6}$$

é uma lagrangiana paramétrica em $T\bar{M}$. Note que F é, por definição, uma função homogênea de grau um na segunda variável, uma vez que

$$F(y,\eta) = |\eta| f(\langle Y, \frac{\eta}{|\eta|}\rangle) = |P| f(\langle Y^{\mathsf{v}}, \frac{P}{|P|}\rangle_{T\bar{M}}) \tag{4.7}$$

satisfaz

$$F(y, t\eta) = t\, F(y, \eta), \quad t > 0, \ (y, \eta) \in T\bar{M} - \{0\}. \tag{4.8}$$

A convexidade de F com respeito a segunda variável depende, naturalmente, da escolha de f. Determinamos, abaixo, os autovalores da forma bilinear $D\pi_*^{\mathsf{v}} DF$ restrita a $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$. Assumimos, tacitamente, que f é escolhida de forma que estes autovalores sejam positivos.

Proposição 4.1 *A lagrangiana paramétrica $F : T\bar{M} \to \mathbb{R}^+$ definida em* (4.6) *satisfaz*

$$\pi_*^{\mathsf{v}} DF = f(\Theta)\frac{P}{|P|} + f'(\Theta)\Big(Y^{\mathsf{v}} - \langle Y^{\mathsf{v}}, \frac{P}{|P|}\rangle_{T\bar{M}} \frac{P}{|P|}\Big). \tag{4.9}$$

Prova. Dada uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to T\bar{M}$ da forma

$$\alpha(s) = (y, \eta(s))$$

com $\alpha(0) = (y, \eta)$, calculamos

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= \frac{dy^k}{ds}\frac{\partial}{\partial y^k} + \frac{d\eta^k}{ds}\frac{\partial}{\partial \eta^k} = \eta'^k \frac{\partial}{\partial \eta^k} \\ &= \Big(\eta'^k \frac{\partial}{\partial y^k}\Big)^{\mathsf{v}}. \end{aligned}$$

Assim, $\alpha'(0)$ é um vetor tangente vertical. Calculamos

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} |P(\alpha(s))| = \frac{1}{|P|}\langle D_{\alpha'(0)} P, P\rangle_{T\bar{M}}.$$

Temos

$$\begin{aligned} D_{\alpha'(0)} P &= \eta'^k D_{\frac{\partial}{\partial \eta^k}} P = \eta'^k D_{\frac{\partial}{\partial \eta^k}} \eta^l \frac{\partial}{\partial \eta^l} = \eta'^k \frac{\partial \eta^k}{\partial \eta^l}\frac{\partial}{\partial \eta^l} + \eta'^k \eta^l D_{\frac{\partial}{\partial \eta^k}} \frac{\partial}{\partial \eta^l} \\ &= \eta'^k \frac{\partial}{\partial \eta^k} = \alpha'(0). \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} |P(\alpha(s))| = \frac{1}{|P|}\langle \alpha'(0), P\rangle_{T\bar{M}}.$$

Por outro lado, temos

$$D_{\alpha'(0)} Y^{\mathsf{v}} = D_{\alpha'(0)} a^k \frac{\partial}{\partial \eta^k} = \frac{da^k(y, \eta(s))}{ds}\Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial \eta^k} + a^k D_{\alpha'(0)} \frac{\partial}{\partial \eta^k} = a^k \eta'^l D_{\frac{\partial}{\partial \eta^l}} \frac{\partial}{\partial \eta^k} = 0,$$

onde usamos o fato de que $a^k(\alpha(s)) = a^k(y)$ são constantes com respeito a s, pela escolha da curva α. Disto resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\Theta &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\langle Y^{\mathsf{v}}, \frac{P}{|P|}\rangle_{T\bar{M}} = \langle D_{\alpha'(0)}Y^{\mathsf{v}}, \frac{P}{|P|}\rangle_{T\bar{M}} + \langle Y^{\mathsf{v}}, \frac{1}{|P|}D_{\alpha'(0)}P + \alpha'(0)(\frac{1}{|P|})P\rangle_{T\bar{M}} \\
&= \langle Y^{\mathsf{v}}, \frac{1}{|P|}\alpha'(0) - \frac{1}{|P|^3}\langle \alpha'(0), P\rangle_{T\bar{M}}P\rangle_{T\bar{M}} \\
&= \frac{1}{|P|}\langle Y^{\mathsf{v}}, \alpha'(0)\rangle_{T\bar{M}} - \frac{1}{|P|^3}\langle Y^{\mathsf{v}}, P\rangle_{T\bar{M}}\langle P, \alpha'(0)\rangle_{T\bar{M}}.
\end{aligned}$$

Concluímos que

$$\begin{aligned}
\langle DF, \alpha'(0)\rangle_{T\bar{M}} &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}F(\alpha(s)) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}|P(\alpha(s))|\, f(\Theta(\alpha(s))) + |P(\alpha(s))|\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}f(\Theta(\alpha(s))) \\
&= \langle \frac{P}{|P|}, \alpha'(0)\rangle_{T\bar{M}}f(\Theta(\alpha(0))) + |P(\alpha(0))|f'(\Theta(\alpha(0)))\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\Theta(\alpha(s)) \\
&= \langle \frac{P}{|P|}, \alpha'(0)\rangle_{T\bar{M}}f(\Theta(y,\eta)) \\
&\quad + \Big(\langle Y^{\mathsf{v}}, \alpha'(0)\rangle_{T\bar{M}} - \frac{1}{|P|^2}\langle P, Y^{\mathsf{v}}\rangle_{T\bar{M}}\langle P, \alpha'(0)\rangle_{T\bar{M}}\Big)f'(\Theta(y,\eta)).
\end{aligned}$$

Visto que P é um campo vetorial vertical e que todo campo vetorial tangente vertical corresponde a algum vetor velocidade da forma $\alpha'(0)$, obtemos

$$\pi^{\mathsf{v}}_* DF = f(\Theta(y,\eta))\frac{P}{|P|} + f'(\Theta(y,\eta))\Big(Y^{\mathsf{v}} - \langle Y^{\mathsf{v}}, \frac{P}{|P|}\rangle_{T\bar{M}}\frac{P}{|P|}\Big). \tag{4.10}$$

Isto encerra a demonstração da proposição. □

Agora, iremos calcular o Hessiano de F. Seus autovalores são listados abaixo

Proposição 4.2 *A derivada covariante de $\pi^{\mathsf{v}}_* DF$, restrita a distribuição vertical $\mathcal{V}$ em $T\bar{M}$, é dada por*

$$D\pi^{\mathsf{v}}_* DF|_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}} = \mu^{\|}T_\flat \otimes T_\flat + \mu^{\perp}(\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}} - T_\flat \otimes T_\flat) \tag{4.11}$$

onde $T_\flat$ é a 1-forma em $T\bar{M}$ metricamente equivalente ao campo vetorial

$$T := Y^{\mathsf{v}} - \langle Y^{\mathsf{v}}, \frac{P}{|P|}\rangle_{T\bar{M}}\frac{P}{|P|} \tag{4.12}$$

e os autovalores $\mu^{\|}$ e $\mu^{\perp}$ são dados por

$$\mu^{\|} = f''(\Theta)\frac{1}{|P|}\big(|Y^{\mathsf{v}}|^2 - \langle Y^{\mathsf{v}}, \frac{P}{|P|}\rangle^2_{T\bar{M}}\big) + \frac{1}{|P|}\big(f(\Theta) - f'(\Theta)\langle Y^{\mathsf{v}}, \frac{P}{|P|}\rangle_{T\bar{M}}\big) \tag{4.13}$$

e

$$\mu^{\perp} = \frac{1}{|P|}\Big(f(\Theta) - f'(\Theta)\langle Y^{\mathsf{v}}, \frac{P}{|P|}\rangle_{T\bar{M}}\Big). \tag{4.14}$$

Observamos que f é escolhida de modo que $\mu^{\|} > 0$ e $\mu^{\perp} > 0$ em $T\bar{M} - \{0\}$.

Prova. Dado um vetor tangente vertical $U \in T_{(y,\eta)}T\bar{M}$, temos

$$Uf(\Theta) = f'(\Theta)U\Theta = f'(\Theta)\Big(\frac{1}{|P|}\langle Y^{\mathsf{v}}, U\rangle_{T\bar{M}} - \frac{1}{|P|^3}\langle Y^{\mathsf{v}}, P\rangle_{T\bar{M}}\langle P, U\rangle_{T\bar{M}}\Big)$$

e

$$Uf'(\Theta) = f''(\Theta)U\Theta = f''(\Theta)\Big(\frac{1}{|P|}\langle Y^{\mathsf{v}}, U\rangle_{T\bar{M}} - \frac{1}{|P|^3}\langle Y^{\mathsf{v}}, P\rangle_{T\bar{M}}\langle P, U\rangle_{T\bar{M}}\Big).$$

Além disso,

$$D_U\frac{P}{|P|} = U\frac{1}{|P|}\,P + \frac{1}{|P|}\,D_UP = -\frac{1}{|P|^3}\langle P, U\rangle_{\bar{T}M}P + \frac{1}{|P|}U.$$

Visto que, segundo a demonstração da proposição anterior, é válido que $D_UY^{\mathsf{v}} = 0$, temos

$$\begin{aligned}
D_U\pi_*^{\mathsf{v}}DF &= f'(\Theta)\Big(\frac{1}{|P|}\langle Y^{\mathsf{v}}, U\rangle_{T\bar{M}} - \frac{1}{|P|^3}\langle Y^{\mathsf{v}}, P\rangle_{T\bar{M}}\langle P, U\rangle_{T\bar{M}}\Big)\frac{P}{|P|}\\
&+f(\Theta)\Big(\frac{1}{|P|}U - \frac{1}{|P|^3}\langle P, U\rangle_{\bar{T}M}P\Big)\\
&+f''(\Theta)\Big(\frac{1}{|P|}\langle Y^{\mathsf{v}}, U\rangle_{T\bar{M}} - \frac{1}{|P|^3}\langle Y^{\mathsf{v}}, P\rangle_{T\bar{M}}\langle P, U\rangle_{T\bar{M}}\Big)\Big(Y^{\mathsf{v}} - \langle Y^{\mathsf{v}}, \frac{P}{|P|}\rangle_{T\bar{M}}\frac{P}{|P|}\Big)\\
&+f'(\Theta)\Big(-\langle Y^{\mathsf{v}}, \frac{1}{|P|}U - \frac{1}{|P|^3}\langle P, U\rangle_{\bar{T}M}P\rangle_{T\bar{M}}\frac{P}{|P|} - \langle Y^{\mathsf{v}}, \frac{P}{|P|}\rangle_{T\bar{M}}\big(\frac{1}{|P|}U - \frac{1}{|P|^3}\langle P, U\rangle_{\bar{T}M}P\Big),
\end{aligned}$$

expressão que, depois de algumas simplificações, resulta em

$$\begin{aligned}
D_U\pi_*^{\mathsf{v}}DF &= f''(\Theta)\frac{1}{|P|}\Big(\langle Y^{\mathsf{v}}, U\rangle_{T\bar{M}} - \langle Y^{\mathsf{v}}, \frac{P}{|P|}\rangle_{T\bar{M}}\langle\frac{P}{|P|}, U\rangle_{T\bar{M}}\Big)\Big(Y^{\mathsf{v}} - \langle Y^{\mathsf{v}}, \frac{P}{|P|}\rangle_{T\bar{M}}\frac{P}{|P|}\Big)\\
&-f'(\Theta)\frac{1}{|P|}\langle Y^{\mathsf{v}}, \frac{P}{|P|}\rangle_{T\bar{M}}\Big(U - \langle U, \frac{P}{|P|}\rangle_{\bar{T}M}\frac{P}{|P|}\Big)\\
&+f(\Theta)\frac{1}{|P|}\Big(U - \langle U, \frac{P}{|P|}\rangle_{\bar{T}M}\frac{P}{|P|}\Big).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Os autovalores da forma bilinear $D\pi_*^{\mathsf{v}}DF$ restrita a $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ são calculados como segue. Primeiro, consideramos vetores tangentes verticais U,V ortogonais a P. Neste caso, temos

$$\begin{aligned}\langle D_U\pi_*^{\mathsf{v}}DF,V\rangle_{T\bar M} &= f''(\Theta)\frac{1}{|P|}\langle Y^{\mathsf{v}},U\rangle_{T\bar M}\langle Y^{\mathsf{v}},V\rangle_{T\bar M}\\ &+\frac{1}{|P|}\Big(f(\Theta)-f'(\Theta)\langle Y^{\mathsf{v}},\frac{P}{|P|}\rangle_{T\bar M}\Big)\langle U,V\rangle_{T\bar M},\end{aligned}$$

para $U,V\perp P$. Como esperado pela homogeneidade, tomando $U=P$ ou, mais geralmente, U paralelo a P, obtemos

$$D_P\pi_*^{\mathsf{v}}DF=0,$$

como pode ser demonstrado diretamente da expressão (4.15). Assim, é suficiente calcular $D_{(\cdot)}\pi_*^{\mathsf{v}}DF$ ao longo das direções $U,V\perp P$. Se, em particular, tomamos ambos os vetores verticais U,V perpendiculares à direção

$$T:=Y^{\mathsf{v}}-\langle Y^{\mathsf{v}},\frac{P}{|P|}\rangle_{T\bar M}\frac{P}{|P|},$$

temos

$$\langle U,Y^{\mathsf{v}}\rangle_{T\bar M}=\langle U,T\rangle_{\bar TM}+\langle Y^{\mathsf{v}},\frac{P}{|P|}\rangle_{T\bar M}\langle U,\frac{P}{|P|}\rangle_{T\bar M}=0$$

e, analogamente,

$$\langle V,Y^{\mathsf{v}}\rangle_{T\bar M}=0.$$

Neste caso,

$$\langle D_U\pi_*^{\mathsf{v}}DF,V\rangle_{T\bar M}=\frac{1}{|P|}\Big(f(\Theta)-f'(\Theta)\langle Y^{\mathsf{v}},\frac{P}{|P|}\rangle_{T\bar M}\Big)\langle U,V\rangle_{T\bar M},$$

assegurando que

$$\mu^{\perp}:=\frac{1}{|P|}\Big(f(\Theta)-f'(\Theta)\langle Y^{\mathsf{v}},\frac{P}{|P|}\rangle_{T\bar M}\Big) \tag{4.16}$$

é um autovalor do tensor covariante de posto dois $D\pi_*DF$ com multiplicidade igual a $n-1$. Agora, consideramos vetores tangentes U,V ambos verticais e paralelos a T. Tomando $U=V=T$, por exemplo, temos

$$\begin{aligned}\langle D_T\pi_*^{\mathsf{v}}DF,T\rangle_{T\bar M} &= f''(\Theta)\frac{1}{|P|}\langle Y^{\mathsf{v}},T\rangle_{T\bar M}^2+\frac{1}{|P|}\Big(f(\Theta)-f'(\Theta)\langle Y^{\mathsf{v}},\frac{P}{|P|}\rangle_{T\bar M}\Big)\langle T,T\rangle_{T\bar M}\\ &= f''(\Theta)\frac{1}{|P|}|T|^4+\frac{1}{|P|}\Big(f(\Theta)-f'(\Theta)\langle Y^{\mathsf{v}},\frac{P}{|P|}\rangle_{T\bar M}\Big)|T|^2\\ &= \Big(f''(\Theta)\frac{1}{|P|}\big(|Y^{\mathsf{v}}|^2-\langle Y^{\mathsf{v}},\frac{P}{|P|}\rangle_{T\bar M}^2\big)+\frac{1}{|P|}\big(f(\Theta)-f'(\Theta)\langle Y^{\mathsf{v}},\frac{P}{|P|}\rangle_{T\bar M}\big)\Big)|T|^2,\end{aligned}$$

demonstrando que

$$\mu^{\|} := f''(\Theta)\frac{1}{|P|}\big(|Y^{\mathsf{v}}|^2 - \langle Y^{\mathsf{v}}, \frac{P}{|P|}\rangle^2_{T\bar{M}}\big) + \frac{1}{|P|}\big(f(\Theta) - f'(\Theta)\langle Y^{\mathsf{v}}, \frac{P}{|P|}\rangle_{T\bar{M}}\big) \tag{4.17}$$

é um autovalor simples de $D\pi^{\mathsf{v}}_* DF\big|_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}}$. Isto encerra a prova da proposição. □

4.2 Uma Fórmula do Fluxo

Dada uma imersão isométrica $\psi : M \to \bar{M}$ e um campo vetorial normal unitário N em $\psi(M)$, definimos o campo vetorial ao longo de ψ dado por

$$\begin{aligned}&\xi(\psi(x)) = f(\langle Y(\psi(x)), N(\psi(x))\rangle)N(\psi(x))\\ &\quad + f'(\langle Y(\psi(x)), N(\psi(x))\rangle)(Y(\psi(x)) - \langle Y(\psi(x)), N(\psi(x))\rangle N(\psi(x))).\end{aligned}$$

Uma vez que $|N| = 1$, segue que

$$\begin{aligned}\xi^{\mathsf{v}} &= f(\Theta(y,\eta))P + f'(\Theta(y,\eta))(Y^{\mathsf{v}} - \langle Y^{\mathsf{v}}, P\rangle_{T\bar{M}}P)\\ &= \pi^{\mathsf{v}}_* DF(y,\eta),\end{aligned}$$

onde

$$y = \psi(x), \quad \eta = N(\psi(x)).$$

De modo mais sucinto, escrevemos

$$\xi^{\mathsf{v}} = f(\Theta)P + f'(\Theta)T.$$

Proposição 4.3 *Seja $Y \in \Gamma(T\bar{M})$ um campo vetorial Killing conforme. A curvatura média anisotrópica de ψ com respeito a lagrangiana paramétrica F definida em* (4.6) *é dada por*

$$nH_F = nH(f(\Theta) - f'(\Theta)\Theta) - f''(\Theta)\langle\nabla\langle Y, N\rangle, Y^T\rangle - n\varrho f'(\Theta), \tag{4.18}$$

onde a função $\varrho \in C^\infty(\bar{M})$ é definida por $\pounds_Y\langle\cdot,\cdot\rangle = \varrho\langle\cdot,\cdot\rangle$ e $Y^T = Y - \langle Y, N\rangle N$.

Prova. A fim de calcular a curvatura média anisotrópica de ψ, fixamos um referencial ortonormal local $e_1, \ldots, e_n$ tangente a $\psi(M)$. Então, denotando $Y^T = Y - \langle Y, N\rangle N$, temos

$$\bar{\nabla}_{\psi_* e_i}\xi = f'(\Theta)\psi_* e_i\langle Y, N\rangle\, N + f(\Theta)\bar{\nabla}_{\psi_* e_i}N + f''(\Theta)\psi_* e_i\langle Y, N\rangle\, Y^T + f'(\Theta)\bar{\nabla}_{\psi_* e_i}Y^T$$

e então

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_{\psi(M)}\xi &= \sum_{i=1}^{n}\langle\bar{\nabla}_{\psi_* e_i}\xi,\psi_* e_i\rangle = f(\Theta)\sum_{i=1}^{n}\langle\bar{\nabla}_{\psi_* e_i}N,\psi_* e_i\rangle + f''(\Theta)\sum_{i=1}^{n}\psi_* e_i\langle Y,N\rangle\langle\psi_* e_i,Y^T\rangle \\
&+f'(\Theta)\sum_{i=1}^{n}\langle\bar{\nabla}_{\psi_* e_i}Y^T,\psi_* e_i\rangle \\
&= -nHf(\Theta) + f''(\Theta)\langle\psi_*\nabla\langle Y,N\rangle\circ\psi, Y^T\rangle + f'(\Theta)\mathrm{div}_{\psi(M)}Y^T.
\end{aligned}$$

No caso particular em que Y é um campo vetorial Killing conforme satisfazendo

$$\langle\bar{\nabla}_X Y, Z\rangle + \langle\bar{\nabla}_Z Y, X\rangle = 2\varrho\langle X,Z\rangle, \quad X,Z\in\Gamma(T\bar{M}),$$

temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_{\psi(M)}Y^T &= \sum_{i=1}^{n}\langle\bar{\nabla}_{\psi_* e_i}Y^T,\psi_* e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle\bar{\nabla}_{\psi_* e_i}Y,\psi_* e_i\rangle - \langle Y,N\rangle\sum_{i=1}^{n}\langle\bar{\nabla}_{\psi_* e_i}N,\psi_* e_i\rangle \\
&= n\varrho + nH\langle Y,N\rangle.
\end{aligned}$$

Neste caso, visto que a curvatura média anisotrópica é dada por

$$nH_F = -\mathrm{div}_{\psi(M)}\xi,$$

obtemos, usando a notação $\Theta = \langle Y,N\rangle$, a fórmula

$$nH_F = nH(f(\Theta) - f'(\Theta)\Theta) - f''(\Theta)\langle\psi_*\nabla\langle Y,N\rangle, Y^T\rangle - n\varrho f'(\Theta) \tag{4.19}$$

Abusando da notação, denotamos também por Y^T o campo vetorial em M o qual é $\psi-$relacionado a Y^T. Sendo assim, deduzimos a fórmula simplificada

$$nH_F = nH(f(\Theta) - f'(\Theta)\Theta) - f''(\Theta)\langle\nabla\langle Y,N\rangle, Y^T\rangle - n\varrho f'(\Theta), \tag{4.20}$$

encerrando a demonstração da proposição. □

Agora, deduzimos uma fórmula do fluxo, nos moldes das fórmulas demonstradas na literatura sobre curvatura média constante.

Proposição 4.4 *Seja Ω um domínio em M cujo bordo é um ciclo Γ orientado por um campo vetorial co-normal exterior ν. Então,*

$$\int_\Omega n\varrho f(\Theta) + nH_F\langle Y,N\rangle = \int_\Gamma (f(\Theta) - f'(\Theta)\Theta)\langle Y^T,\nu\rangle \tag{4.21}$$

Prova. Temos

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}_{\psi(M)}\big((f(\Theta) - f'(\Theta)\Theta)Y^T\big) = \langle \nabla(f(\Theta) - f'(\Theta)\Theta), Y^T\rangle + (f(\Theta) - f'(\Theta)\Theta)\mathrm{div}_{\psi(M)}Y^T \\
&\quad = \langle f'\nabla\langle Y,N\rangle - \nabla\langle Y,N\rangle f' - \langle Y,N\rangle f''\nabla\langle Y,N\rangle, Y^T\rangle + (f - f'\Theta)(n\varrho + nH\langle Y,N\rangle) \\
&\quad = -f''(\Theta)\langle Y,N\rangle\langle\nabla\langle Y,N\rangle, Y^T\rangle + (f(\Theta) - f'(\Theta)\Theta)(n\varrho + nH\langle Y,N\rangle).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&nH_F\langle Y,N\rangle = nH\langle Y,N\rangle(f(\Theta) - f'(\Theta)\Theta) - f''(\Theta)\langle Y,N\rangle\langle\nabla\langle Y,N\rangle, Y^T\rangle - n\varrho f'(\Theta)\langle Y,N\rangle \\
&\quad = \mathrm{div}_{\psi(M)}\big((f(\Theta) - f'(\Theta)\Theta)Y^T\big) - n\varrho f(\Theta).
\end{aligned}$$

Daí, concluímos que

$$\mathrm{div}_{\psi(M)}\big((f(\Theta) - f'(\Theta)\Theta)Y^T\big) = n\varrho f(\Theta) + nH_F\langle Y,N\rangle,$$

donde a fórmula (4.21) segue, aplicando-se diretamente o Teorema de Stokes. □

Especializamos esta discussão para o caso de campos de Killing ou campos paralelos, obtendo informações adicionais sobre a equação de curvatura média anisotrópica.

Proposição 4.5 *Se $Y \in \Gamma(T\bar{M})$ é um campo de Killing, isto é, se $\varrho = 0$, temos*

$$\langle \chi, \eta\rangle = 0 \tag{4.22}$$

onde $\chi \in \Gamma(T\bar{M})$ é definido por

$$\chi^{\mathsf{h}}|_{\varphi(y)} = \pi_*^{\mathsf{h}} DF|_{\varphi(y)},$$

para uma dada secção $\varphi(y) = (y, \eta(y))$ do fibrado $T\bar{M}$. Além disso, se Y é um campo vetorial paralelo, então F é horizontalmente constante.

Prova. Calculamos

$$\frac{\partial F}{\partial y^k} = \frac{\partial}{\partial y^k} f(\bar{g}_{mn}a^m\eta^n) = f'(...)(\frac{\partial \bar{g}_{mn}}{\partial y^k}a^m + \bar{g}_{mn}a^m_{;k})\eta^n$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial \eta^r} = f'\bar{g}_{mn}a^m.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{\partial}{\partial y^k}\Big)^{\mathsf{h}} F &= \frac{\partial F}{\partial y^k} - \Gamma^r_{kl}\eta^l \frac{\partial F}{\partial \eta^r} \\
&= f'\Big(\frac{\partial \bar{g}_{mn}}{\partial y^k} a^m \eta^n + \bar{g}_{mn}\frac{\partial a^m}{\partial y^k}\eta^n - \Gamma^r_{kn}\eta^n \bar{g}_{mr} a^m\Big) \\
&= f'\eta^n\Big(\frac{\partial \bar{g}_{mn}}{\partial y^k} a^m + \bar{g}_{mn}\frac{\partial a^m}{\partial y^k} - \Gamma^r_{kn}\bar{g}_{mr} a^m\Big) \\
&= f'\eta^n\Big(\frac{\partial \bar{g}_{mn}}{\partial y^k} a^m + \bar{g}_{mn}(a^m_{;k} - \Gamma^m_{kr}a^r) - \Gamma^r_{kn}a_r\Big) \\
&= f'\Big(\frac{\partial \bar{g}_{mn}}{\partial y^k} a^m + \bar{g}_{mn}a^m_{;k} - \bar{g}_{mn}\Gamma^m_{kr}a^r - \Gamma^r_{kn}a\Big) \\
&= f'\eta^n\Big(\frac{\partial \bar{g}_{mn}}{\partial y^k} a^m + a_{n;k} - \bar{g}_{mn}\Gamma^m_{kr}a^r - \Gamma^r_{kn}a_r\Big),
\end{aligned}$$

o que resulta em

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{\partial}{\partial y^k}\Big)^{\mathsf{h}} F &= f'\eta^n\Big(\frac{\partial a_n}{\partial y^k} - \bar{g}_{mn}a^m_{;k} + a_{n;k} - \bar{g}_{mn}\Gamma^m_{kr}a^r - \Gamma^r_{kn}a_r\Big) \\
&= f'\eta^n\Big(a_{n;k} + \Gamma^r_{kn}a_r - \bar{g}_{mn}a^m_{;k} + a_{n;k} - \bar{g}_{mn}\Gamma^m_{kr}a^r - \Gamma^r_{kn}a_r\Big) \\
&= f'\eta^n\Big(a_{n;k} - \bar{g}_{mn}(a^m_{;k} - \Gamma^m_{kl}a^l) + a_{n;k} - \bar{g}_{mn}\Gamma^m_{kr}a^r\Big) \\
&= f'\eta^n(a_{n;k} - a_{n;k} + a_{n;k}) \\
&= f'\eta^n a_{n;k}.
\end{aligned}$$

Deste modo, temos

$$\langle DF, \Big(\frac{\partial}{\partial y^k}\Big)^{\mathsf{h}}\rangle_{T\bar{M}} = \Big(\frac{\partial}{\partial y^k}\Big)^{\mathsf{h}} F = f'\eta^n a_{n;k}. \tag{4.23}$$

Entretanto, $\pi^{\mathsf{h}}_* DF = 0$ se, e somente se, Y é um campo vetorial paralelo. Logo, fixada a secção φ, calculamos

$$\begin{aligned}
\langle \chi, \eta\rangle &= \langle \chi^{\mathsf{h}}, \eta^{\mathsf{h}}\rangle_{T\bar{M}} = \eta^k \langle \pi^{\mathsf{h}}_* DF, \Big(\frac{\partial}{\partial y^k}\Big)^h\rangle_{T\bar{M}} = \eta^k \Big(\frac{\partial}{\partial y^k}\Big)^h F \\
&= f'\eta^k\eta^n a_{n;k}.
\end{aligned}$$

Se Y é um campo vetorial de Killing, a equação de Killing

$$a_{n;k} + a_{k;n} = 0$$

implica que a forma $(a_{n;k})$ é anti-simétrica. Neste caso, concluímos que

$$\langle \chi, \eta \rangle = 0.$$

Para um campo vetorial de Killing conforme fechado, quando $a_{n;k}\eta^k = \varrho\,\eta_n$, a última fórmula nos dá

$$\langle \chi, N \rangle = f'\varrho.$$

No caso em que consideramos uma imersão isométrica $\psi : M \to \bar{M}$ dada e a secção $\zeta = (\psi, N)$ do fibrado $\psi^* T\bar{M}$, uma prova simples deste fato procede do seguinte cálculo

$$\begin{aligned} \langle \chi, N \rangle &= \langle \bar{\nabla}_N \xi, N \rangle|_{\psi(M)} \\ &= \langle \bar{\nabla}_N f N + f' Y^\top, N \rangle \\ &= N(f) + f \langle \bar{\nabla}_N N, N \rangle + f' \langle Y^T, N \rangle \\ &= f' N \langle Y, N \rangle = f' (\langle \bar{\nabla}_N Y, N \rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_N N \rangle) \\ &= f'\varrho = 0, \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que N é estendido como um campo vetorial velocidade unitário de geodésicas partindo ortogonalmente de $\psi(M)$, o que implica que $\bar{\nabla}_N N = 0$.

4.3 Hipersuperfícies Rotacionalmente Invariantes

Seja Y um campo de Killing. Por brevidade da exposição, supomos que a distribuição

$$y \in \bar{M} \mapsto \{\eta \in T_y \bar{M} : \langle \eta, Y(y) \rangle = 0\} \tag{4.24}$$

é integrável. Isto significa que a métrica ambiente em $\bar{M}$ é estática, i.e., é preservada pelo fluxo Ψ of Y. Além disso, supomos que a métrica induzida em uma folha integral P desta distribuição é rotationalmente simétrica. Mais precisamente, supomos que existe um pólo o em P tal que em termos de coordenadas esféricas $(r, \theta) \in (0, R) \times \mathbb{S}^{n-1}$, para algum $R \in (0, +\infty)$, baseadas em o, a métrica em P é expressa por

$$dr^2 + h^2(r)\, d\theta^2 \tag{4.25}$$

em uma vizinhança normal estrelada de o em P. Nesta expressão, denotamos por

$$d\theta^2 = \theta_{ij} d\theta^i d\theta^j$$

a métrica canônica em $\mathbb{S}^{n-1}$ escrita em coordenadas locais $(\theta^1, \ldots, \theta^n)$ para $\mathbb{S}^{n-1}$.

Seja t o parâmetro do fluxo Ψ de Y definido de modo que $\Psi(0,y) = y$, para todo $y \in P$. Supomos que as linhas de fluxo de Y são completas. Deste modo, $(t,r,\theta) \in \mathbb{R}\times(0,R)\times\mathbb{S}^{n-1}$ são coordenadas locais em $\bar{M}$ com $Y = \frac{\partial}{\partial t}$. Denotando $g^2(r) := \langle Y, Y\rangle$, concluímos que a métrica ambiente é expressa nestas coordenadas como uma métrica duplamente "warped" da forma

$$g^2(r)dt^2 + dr^2 + h^2(r)d\theta^2. \tag{4.26}$$

No que segue, fixamos as seguintes escolhas das funções g e h:

$$h(r) = \mathrm{sn}_\kappa(r), \qquad g(r) = \mathrm{sn}'_\kappa(r), \tag{4.27}$$

caso consideremos $\bar{M}^{n+1} = \mathbb{S}^{n+1}(\kappa)$ quando $\kappa > 0$ e $\bar{M}^{n+1} = \mathbb{H}^{n+1}(\kappa)$, se $\kappa < 0$; ou

$$h(r) = \mathrm{sn}_\kappa(r), \qquad g(r) = 1, \tag{4.28}$$

caso consideremos $\bar{M}^{n+1} = \mathbb{S}^n(\kappa)\times\mathbb{R}$ quando $\kappa > 0$ e $\bar{M}^{n+1} = \mathbb{H}^n(\kappa)\times\mathbb{R}$, se $\kappa < 0$. Lembramos que, por definição,

$$\mathrm{sn}_\kappa(r) = \begin{cases} r, \quad \text{se} \quad \kappa = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\sin(\sqrt{\kappa}r), \quad \text{se} \quad \kappa > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\kappa}}\sinh(\sqrt{-\kappa}r), \quad \text{se} \quad \kappa < 0, \end{cases}$$

de modo que, denotando $\mathrm{cs}_\kappa(r) = \mathrm{sn}'_\kappa(r)$, temos

$$\mathrm{cs}^2_\kappa(r) + \kappa\mathrm{sn}^2_\kappa(r) = 1.$$

Observamos que, mesmo fixadas estas escolhas, várias das expressões e resultados a seguir valem para uma métrica na forma (4.26) mais geral.

Uma hipersuperfície rotacionalmente invariante $\psi : M \to \bar{M}$ é parametrizada em termos das coordenadas (t,r,θ) por

$$(s,\theta) \mapsto (t(s), r(s), \theta), \quad s \in (0,S). \tag{4.29}$$

Os campos vetoriais

$$\psi_*\frac{\partial}{\partial s} = \dot{r}\frac{\partial}{\partial r} + \dot{t}\frac{\partial}{\partial t}, \tag{4.30}$$

onde $\cdot$ representa a derivada com respeito a s, e

$$\psi_*\frac{\partial}{\partial\theta^i} = \frac{\partial}{\partial\theta^i}\Big|_\psi \tag{4.31}$$

geram o espaço tangente a cada ponto de $\psi(M)$. Se s é o parâmetro do comprimento de arco, a métrica induzida em $\psi(M)$ é

$$ds^2 + h^2(r(s))d\theta^2. \tag{4.32}$$

Um campo vetorial normal unitário ao longo de ψ é dado por

$$N = \dot{t}\frac{\partial}{\partial r} - g^{-2}(r)\dot{r}\frac{\partial}{\partial t}. \tag{4.33}$$

Proposição 4.6 *A equação da curvatura média anisotrópica de uma hipersuperfície rotacionalmente invariante $\psi : M \to \bar{M}$ parametrizada por* (4.29) *é dada por*

$$nH_F = \mu^{\|}(\dot{t}\ddot{r} - \dot{r}\ddot{t} - \dot{t}\frac{1}{g}\frac{dg}{dr}(1+\dot{r}^2)) - (n-1)\mu^{\perp}\dot{t}\frac{1}{h}\frac{dh}{dr} \tag{4.34}$$

onde

$$\mu^{\|} = (f''(g^2 - \dot{r}^2) + (f + f'\dot{r}))$$

e

$$\mu^{\perp} = (f' + f\dot{r})$$

são os autovalores da forma $D\pi_*^{\mathsf{v}} DF|_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}}$, calculados em pontos da secção

$$\zeta(x) = (\psi(x), N(\psi(x))),\, x \in M,$$

do fibrado $\psi^* T\bar{M}$, onde N é o campo normal fixado em (4.33). *Equivalentemente, $\mu^{\|}$ e $\mu^{\perp}$ são os autovalores de $\mathcal{A}_F$.*

Prova. Temos

$$\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial r}\rangle = -\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\rangle = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\rangle = -g\frac{dg}{dr}.$$

Além disso,

$$\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\rangle = 0$$

e

$$\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \theta^i}\rangle = -\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \theta^i}}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\rangle = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta^i}\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\rangle = 0.$$

Assim, temos

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial t} = -g\frac{dg}{dr}\frac{\partial}{\partial r}.$$

Visto que as folhas são totalmente geodésicas e que $\frac{\partial}{\partial r}$ é o campo vetor velocidade das geodésicas radiais que emanam de o em P, concluímos que

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}}\frac{\partial}{\partial r} = 0.$$

Ademais, temos

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial r} = \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{g}\frac{dg}{dr}\frac{\partial}{\partial t}$$

e

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \theta^k}}\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{h}\frac{dh}{dr}\,\frac{\partial}{\partial \theta^k}.$$

Por fim,

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \theta^k}}\frac{\partial}{\partial t} = 0.$$

Usando estas expressões, calculamos

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\psi_*\frac{\partial}{\partial s} &= \ddot{t}\frac{\partial}{\partial t} + \ddot{r}\frac{\partial}{\partial r} + \dot{t}\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial t} + \dot{r}\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial r} \\
&= \ddot{t}\frac{\partial}{\partial t} + \ddot{r}\frac{\partial}{\partial r} + \dot{t}\big(\dot{t}\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial t} + \dot{r}\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}}\frac{\partial}{\partial t}\big) + \dot{r}\big(\dot{t}\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial r} + \dot{r}\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}}\frac{\partial}{\partial r}\big) \\
&= \ddot{t}\frac{\partial}{\partial t} + \ddot{r}\frac{\partial}{\partial r} + \dot{t}\big(-\dot{t}g\frac{dg}{dr}\frac{\partial}{\partial r} + \dot{r}\frac{1}{g}\frac{dg}{dr}\frac{\partial}{\partial t}\big) + \dot{r}\big(\dot{t}\frac{1}{g}\frac{dg}{dr}\frac{\partial}{\partial t}\big) \\
&= \big(\ddot{t} + 2\dot{r}\dot{t}\frac{1}{g}\frac{dg}{dr}\big)\frac{\partial}{\partial t} + \big(\ddot{r} - \dot{t}^2 g\frac{dg}{dr}\big)\frac{\partial}{\partial r}
\end{aligned}$$

e, usando o fato de que $\dot{r}^2 + g^2\dot{t}^2 = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\langle\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\psi_*\frac{\partial}{\partial s}, N\rangle &= -\big(\dot{r}\ddot{t} + 2\dot{r}^2\dot{t}\frac{1}{g}\frac{dg}{dr}\big) + \big(\dot{t}\ddot{r} - \dot{t}^3 g\frac{dg}{dr}\big) = \dot{t}\ddot{r} - \dot{r}\ddot{t} - \dot{t}\frac{dg}{dr}\big(\frac{2}{g}\dot{r}^2 + g\dot{t}^2\big) \\
&= \dot{t}\ddot{r} - \dot{r}\ddot{t} - \dot{t}\frac{1}{g}\frac{dg}{dr}(1 + \dot{r}^2).
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\langle\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial \theta^i}}\psi_*\frac{\partial}{\partial \theta^j}, N\rangle &= \langle\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \theta^i}}\frac{\partial}{\partial \theta^j}, N\rangle = \dot{t}\langle\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \theta^i}}\frac{\partial}{\partial \theta^j}, \frac{\partial}{\partial r}\rangle - g^{-2}\dot{r}\langle\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \theta^i}}\frac{\partial}{\partial \theta^j}, \frac{\partial}{\partial t}\rangle \\
&= \dot{t}\langle\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \theta^i}}\frac{\partial}{\partial \theta^j}, \frac{\partial}{\partial r}\rangle = -\dot{t}h\frac{dh}{dr}\,\theta_{ij}.
\end{aligned}$$

Concluímos que o operador de Weingarten $A = -\bar{\nabla}N$ de ψ tem autovalores dados por

$$k^{\parallel} = \dot{t}\ddot{r} - \dot{r}\ddot{t} - \dot{t}\frac{1}{g}\frac{dg}{dr}(1 + \dot{r}^2) \tag{4.35}$$

e

$$k^{\perp} = -\dot{t}\frac{1}{h}\frac{dh}{dr} \tag{4.36}$$

cujas multiplicidades são, respectivamente, iguais a 1 e $n-1$.

Observamos que, dados autovetores $u, v \in TM$ da forma bilinear simétrica $\mathcal{A}_F$, associados a um autovalor μ, temos, por definição,

$$\mu\langle u, v\rangle = \mathcal{A}_F(u, v) = \mathcal{G}_F(\psi_* u, \psi_* v) = D\pi_*^{\mathsf{v}} DF((\psi_* u)^{\mathsf{v}}, (\psi_* v)^{\mathsf{v}}).$$

Por outro lado,

$$\langle u, v\rangle = \langle \psi_* u, \psi_* v\rangle = \langle (\psi_* u)^{\mathsf{v}}, (\psi_* v)^{\mathsf{v}}\rangle_{T\bar{M}},$$

o que permite concluir que μ é autovalor de $D\pi_*^{\mathsf{v}} DF|_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}}$. Concluímos que os autovalores de $\mathcal{A}_F^*$ são dados por

$$\mu^{\|} = f''(|Y|^2 - \langle Y, N\rangle^2) + (f - f'\langle Y, N\rangle) = f''(g^2(r) - \dot{r}^2) + (f + f'\dot{r}),$$

visto que $\langle Y, N\rangle = -\dot{r}$ e

$$\mu^{\perp} = f - f'\langle Y, N\rangle = f + f'\dot{r}.$$

Uma vez que

$$nH_F = \mu^{\|}k^{\|} + (n-1)\mu^{\perp}k^{\perp},$$

finalizando a prova. □

Hipersuperfícies rotacionalmente invariantes são equivariantes com respeito à ação do grupo ortogonal $O(n)$ em $\bar{M}$ que fixa a linha de fluxo de Y passando por o. Órbitas desta ação são, por definição, as classes de equivalência da relação descrita em coordenadas por

$$(r, t, \theta) \sim (r, t, \mathrm{R}\theta), \quad \mathrm{R} \in O(n). \tag{4.37}$$

Logo, o espaço de órbitas pode ser identificado ao conjunto

$$\Pi = \{(t, r) : t \in \mathbb{R},\ 0 \le r \le R\}, \tag{4.38}$$

onde $R = +\infty$ caso $\kappa \le 0$ e $R = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ quando $\kappa > 0$. Na sequência, denotamos por $\pi : \bar{M} \to \Pi$ a projeção de um ponto de $\bar{M}$ sobre sua órbita em Π. Nos pontos regulares, a aplicação π é uma submersão riemanniana.

As funções t e r são invariantes em uma órbita. Portanto, o fibrado normal a uma órbita é gerado por $\bar{\nabla}t$ e $\bar{\nabla}r$. Geodésicas de velocidade unitária realizando a distância entre órbitas vizinhas são perpendiculares às órbitas. Parametrizando uma tal geodésica, γ, digamos, pelo comprimento de arco ς, temos

$$\gamma'(\varsigma) = \langle \gamma', \bar{\nabla} t\rangle \frac{\bar{\nabla} t}{|\bar{\nabla} t|^2} + \langle \gamma', \bar{\nabla} r\rangle \frac{\bar{\nabla} r}{|\bar{\nabla} r|^2}$$

e, portanto,

$$1 = \langle \gamma', \gamma'\rangle = \big(\frac{dt}{d\varsigma}\big)^2 \frac{1}{|\bar{\nabla} t|^2} + \big(\frac{dr}{d\varsigma}\big)^2 \frac{\bar{\nabla} r}{|\bar{\nabla} r|^2},$$

o que implica

$$d\varsigma^2 = \frac{dt^2}{|\bar{\nabla} t|^2} + \frac{dr^2}{|\bar{\nabla} r|^2},$$

expressão local para a métrica orbital em Π. Uma vez que

$$|\bar{\nabla} t|^2 = g^{-4}\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\rangle = g^{-2}, \qquad |\bar{\nabla} r|^2 = 1,$$

temos

$$d\varsigma^2 = dr^2 + g^2(r)\, dt^2, \tag{4.39}$$

o que demonstra que a métrica orbital em Π coincide com a métrica induzida nas hipersuperfícies $\theta =$ constante em $\bar{M}$.

Dada a imersão $\psi : M \to \bar{M}$ de uma hipersuperfície rotacionalmente invariante, com coordenada $r > 0$, definimos a *curva geratriz* de ψ por $\tilde{\psi} = \pi \circ \psi$ em Π. Sendo assim, dizemos que $\psi(M)$ é a hipersuperfície gerada por $\tilde{\psi}$. Em coordenadas, escrevemos $\tilde{\psi}(s) = (t(s), r(s))$, onde s é o comprimento de arco. Definimos, então, o ângulo ϑ entre o vetor $\frac{\partial}{\partial r}$ e o vetor velocidade $\dot{\gamma}$ segundo as equações

$$\cos\vartheta = \dot{r}, \tag{4.40}$$
$$\sin\vartheta = g\dot{t}, \tag{4.41}$$

e, sendo assim, calculamos

$$\dot{t}\ddot{r} - \dot{r}\ddot{t} = -\frac{1}{g}\sin^2\vartheta\dot{\vartheta} - \frac{1}{g}\cos^2\vartheta\dot{\vartheta} + \frac{1}{g^2}\frac{dg}{dr}\cos^2\vartheta\sin\vartheta = -\frac{1}{g}\dot{\vartheta} + \frac{1}{g^2}\frac{dg}{dr}\cos^2\vartheta\sin\vartheta.$$

Portanto,

$$k^{\|} = \dot{t}\ddot{r} - \dot{r}\ddot{t} - \dot{t}\frac{1}{g}\frac{dg}{dr}(1+\dot{r}^2) = -\frac{1}{g}\dot{\vartheta} - \frac{1}{g^2}\frac{dg}{dr}\sin\vartheta. \tag{4.42}$$

Abreviamos estas informações na forma

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \cos\vartheta, && (4.43)\\ \dot{t} &= \frac{1}{g}\sin\vartheta, && (4.44)\\ \dot{\vartheta} &= -gk^{\|} - \frac{1}{g}\frac{dg}{dr}\sin\vartheta. && (4.45) \end{aligned}$$

É válido observar que $k^{\|}$ é a curvatura geodésica $\kappa_{\tilde{\psi}}$ da curva $\tilde{\psi}$ no espaço de órbitas Π. Isto segue do fato de que o interior de Π, conforme indicamos acima, é isométrico a um aberto de uma hipersuperfície $\theta =$ constante e, sendo assim,

$$\kappa_{\tilde{\psi}} = \langle \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial s}} \psi_* \frac{\partial}{\partial s}, N \rangle = k^{\|}. \tag{4.46}$$

O volume de uma órbita é dado por

$$v(r) = h^{n-1}(r)|\mathbb{S}^{n-1}| = \mathrm{sn}_\kappa^{n-1}(r)|\mathbb{S}^{n-1}|, \tag{4.47}$$

de modo que a derivada logarítmica do volume na direção do campo normal $\tilde{N} = \mathrm{R}^{-1}N$ a $\tilde{\psi}$ é determinada por

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{N}} \ln v = \frac{v'(r)}{v(r)}\frac{dt}{ds} = (n-1)\frac{1}{gh}\frac{dh}{dr}\, \sin\vartheta. \tag{4.48}$$

Uma vez que

$$k^{\perp} = -\frac{1}{gh}\frac{dh}{dr}\sin\vartheta,$$

a curvatura média anisotrópica de ψ é dada por

$$nH_F \;=\; -\mu^{\|}\big(\frac{1}{g}\dot{\vartheta} + \frac{1}{g^2}\frac{dg}{dr}\sin\vartheta\big) - (n-1)\mu^{\perp}\frac{1}{gh}\frac{dh}{dr}\sin\vartheta, \tag{4.49}$$

ou, equivalentemente, em termos de dados orbitais,

$$nH_F = -\mu^{\|}\kappa_{\tilde{\psi}} - \mu^{\perp}\frac{\partial}{\partial \tilde{N}}\ln v. \tag{4.50}$$

A equação (4.50) pode ser deduzida variacionalmente, segundo o argumento de redução clássico.

Reescrevendo a equação (4.49) como

$$\mu^{\|}\,\dot{\vartheta} = -\Big(\mu^{\|}\frac{1}{g}\frac{dg}{dr} + (n-1)\mu^{\perp}\frac{1}{h}\frac{dh}{dr}\Big)\,\sin\vartheta - ngH_F,$$

obtemos a terceira equação do sistema

$$\dot{r} = \cos\vartheta, \tag{4.51}$$
$$\dot{t} = \frac{1}{g}\sin\vartheta, \tag{4.52}$$
$$\mu^{\parallel}\,\dot{\vartheta} = -\Big(\mu^{\parallel}\frac{1}{g}\frac{dg}{dr} + (n-1)\mu^{\perp}\frac{1}{h}\frac{dh}{dr}\Big)\sin\vartheta - ngH_F. \tag{4.53}$$

A inspeção imediata deste sistema permite demonstrar alguns fatos elementares, mas importantes.

Proposição 4.7 *Dada uma solução $s \mapsto (r(s), t(s), \vartheta(s))$ do sistema e uma constante $a \in \mathbb{R}$, a curva $s \mapsto (r(s), t(s)+a, \vartheta(s))$ é também solução de* (4.51)-(4.53). *Além disso, as curvas $s \mapsto (r(s), 2a - t(s), \vartheta(s))$ e $s \mapsto (r(-s), t(-s), \vartheta(-s))$ são soluções do sistema obtido a partir de* (4.51)-(4.53) *substituindo-se H_F por $-H_F$. Geometricamente, translações ao longo das linhas de fluxo de Y preservam a curvatura média anisotrópica constante de hipersuperfícies rotacionalmente invariantes, ao passo que reflexões com respeito a uma linha $t = a$ e reversões do parâmetro da curva perfil mudam o sinal da curvatura média anisotrópica.*

Uma solução $s \in [0, S) \mapsto (r(s), t(s), \vartheta(s))$ do sistema (4.51)-(4.53) com condição inicial $\vartheta(0) = \pm\frac{\pi}{2}$ pode ser estendida ao intervalo $(-S, S)$ por reflexão em torno da linha $t = t(0)$.

Deste ponto em diante, procedemos à análise qualitativa de soluções do sistema (4.51)-(4.53). Iniciamos utilizando a Proposição 4.4 para obter uma integral primeira para este sistema.

Proposição 4.8 *A expressão*

$$I = (f + f'\dot{r})\dot{t}\,g^2(r)h^{n-1}(r) + nH_F\int_0^r g(\tau)h^{n-1}(\tau)\,d\tau. \tag{4.54}$$

define uma integral primeira para o sistema (4.51)-(4.53).

Prova. Seja $\Gamma_t = \psi(M) \cap P_t$, onde P_t é uma folha integral da distribuição

$$y \in \bar{M} \mapsto \{\eta \in T_y\bar{M} : \langle \eta, Y(y)\rangle = 0\}, \tag{4.55}$$

dada por $P_t = \{\Psi(t, y) : y \in P\}$. Sendo assim, Γ_t é uma hiperesfera geodésica em P_t limitando um n-disco geodésico Ω_t com raio $r(t)$. Consideramos, então, uma região em

$\psi(M)$ limitada por Γ_t e $\Gamma_{t'}$ para $t = t(s)$ e $t' = t(s')$ fixados, com $0 \leq s \leq s' \leq S$. Deduzimos da fórmula do fluxo (4.21) para $\varrho = 0$ que

$$\int_\Omega nH_F\langle Y, N\rangle = \int_{\Gamma_t}(f - f'\langle Y, N\rangle)\langle Y, \nu_t\rangle + \int_{\Gamma_{t'}}(f - f'\langle Y, N\rangle)\langle Y, \nu_{t'}\rangle, \tag{4.56}$$

onde as direções co-normais ao longo de Γ_t e $\Gamma_{t'}$ são dadas respectivamente por

$$\nu_t = -\psi_*\frac{\partial}{\partial s}$$

e

$$\nu_{t'} = \psi_*\frac{\partial}{\partial s}.$$

Suponha que H_F é constante ou, mais geralmente, que H_F é estendida como uma função constante ao longo das linhas de fluxo de Y. Desta forma, o teorema da divergência, aplicado ao ciclo D em $\bar{M}$ limitado por Ω, Ω_t e $\Omega_{t'}$, permite deduzir a partir da equação de Killing que

$$\begin{aligned}0 = \int_D nH_F\,\mathrm{div}_{\bar{M}}Y + n\langle\bar{\nabla}H_F, Y\rangle = \int_D \mathrm{div}_{\bar{M}}(nH_FY) = \int_\Omega nH_F\langle Y, N\rangle\\ + \int_{\Omega_t} nH_F\langle Y, -\frac{Y}{|Y|}\rangle + \int_{\Omega_{t'}} nH_F\langle Y, \frac{Y}{|Y|}\rangle\end{aligned}$$

o que implica

$$\int_\Omega nH_F\langle Y, N\rangle = \int_{\Omega_t} nH_F\langle Y, \frac{Y}{|Y|}\rangle - \int_{\Omega_{t'}} nH_F\langle Y, \frac{Y}{|Y|}\rangle.$$

Assim, concluímos que ambos os lados em

$$\int_{\Omega_t} nH_F|Y| - \int_{\Gamma_t}(f - f'\langle Y, N\rangle)\langle Y, \nu_t\rangle = \int_{\Omega_{t'}} nH_F|Y| + \int_{\Gamma_{t'}}(f - f'\langle Y, N\rangle)\langle Y, \nu_{t'}\rangle$$

definem uma função constante de s. Visto que

$$\langle Y, N\rangle = \langle\frac{\partial}{\partial t}, \dot{t}\frac{\partial}{\partial r} - g^{-2}(r)\dot{r}\frac{\partial}{\partial t}\rangle = -\dot{r}$$

e

$$\langle Y, \psi_*\frac{\partial}{\partial s}\rangle = \langle\frac{\partial}{\partial t}, \dot{r}\frac{\partial}{\partial r} + \dot{t}\frac{\partial}{\partial t}\rangle = g^2(r)\dot{t}$$

a integral na fronteira é dada por

$$\int_{\Gamma_t} (f - f'\langle Y, N\rangle)\langle Y, \nu_t\rangle = -\int_{\Gamma_t} (f + f'\dot{r})g^2(r)\dot{t}\, d\Gamma_t.$$

Entretanto, uma vez que Γ_t é uma hiperesfera geodésica com raio $r(s)$, temos que

$$d\Gamma_t = h^{n-1}(r(s))\, d\theta = h^{n-1}(r(s))\sqrt{\det \theta_{ij}}\, d\theta^1 \dots d\theta^{n-1}$$

e então

$$\int_{\Gamma_t} (f - f'\langle Y, N\rangle)\langle Y, \nu_t\rangle = -(f + f'\dot{r})\dot{t}g^2(r)h^{n-1}(r)|\mathbb{S}^{n-1}|.$$

Por outro lado, quando H_F é constante, obtemos

$$\int_{\Omega_t} nH_F|Y| = nH_F\, |\mathbb{S}^{n-1}| \int_0^{r(s)} g(\tau)h^{n-1}(\tau)\, d\tau.$$

Portanto, concluímos que

$$I = (f + f'\dot{r})\dot{t}\, g^2(r)h^{n-1}(r) + nH_F \int_0^r g(\tau)h^{n-1}(\tau)\, d\tau \tag{4.57}$$

é uma integral primeira para uma hipersuperfície rotacionalmente invariante com curvatura média anisotrópica constante. Denotamo-la por I no que segue. $\square$

No enunciado do teorema abaixo, f_0 é uma constante dada pelo valor de f em algum ponto $r = r_0$ determinado explicitamente na demonstração.

Teorema 4.1 *As superfícies completas, rotacionalmente invariantes, isometricamente imersas em $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3(\kappa)$ and $\mathbb{H}^3(\kappa)$ com curvatura média anisotrópica constante H_0 são classificadas segundo os parâmetros H_0 e I em: (i) folhas totalmente geodésicas, se $H_0 = I = 0$; (ii) anéis mínimos mergulhados, "catenóides", se $H_F = 0$ e $I \neq 0$, quando $\kappa \leq 0$; (iii) esferas mergulhadas, se $H_0 \neq 0$ e $I = 0$ - quando $\kappa \geq 0$ - e $H_0^2 > -\kappa f_0^2$ e $I = 0$, quando $\kappa < 0$; $(iii - bis)$ discos mergulhados, se $H_0^2 \leq -\kappa f_0^2$ e $I = 0$, quando $\kappa < 0$; (iv) cilindros regrados pelas linhas de fluxo de Y; (v) superfícies mergulhadas, periódicas e cilindricamente limitadas se $IH_0 < 0$ - quando $\kappa \geq 0$ - e se $IH_0 < 0$ e $H_0^2 > -\kappa f_0^2$, quando $\kappa < 0$; (v) uma superfície tipo catenóide-primo, se $IH_0 < 0$ e $H_0^2 = -\kappa f_0^2$, quando $\kappa < 0$; e, por fim, (vi) superfícies imersas tipo-nodóides, se $IH_0 > 0$ - quando $\kappa \leq 0$ - e se $IH_0 > 0$ e $H_0 \neq \kappa I$, quando $\kappa > 0$; (vii) toros de revolução, se $IH_0 > 0$ e $H_0 = \kappa I$, quando $\kappa > 0$.*

Prova. (i) Se $H_F = 0$ e $I = 0$, a fórmula (4.54) implica que $\dot{t} = 0$, donde resulta que $t = a$, para alguma constante $a \in \mathbb{R}$. Assim, (4.51) e (4.52) implicam que $\vartheta = 0$ ou $\vartheta = \pi$, conforme $s = r$ ou $s = -r$. Concluímos que, neste caso, a hipersuperfície rotacionalmente invariante com curvatura média anisotrópica está contida na folha totalmente geodésica $P_a = \{\Psi(a, y) : y \in P\}$. Esta solução do sistema (4.52)-(4.53) corresponde às condições iniciais $r(0) = r_0, t(0) = a$ e $\vartheta(0) = 0, \pi$.

(ii) Se $H_F = 0$ e $I \neq 0$, obtemos, a partir de (4.54),

$$I = \mu^{\perp}\mathrm{cs}_\kappa^2(r)\mathrm{sn}_\kappa(r)\,\dot{t},$$

o que permite concluir que $\dot{t} \neq 0$ e $r \neq 0$ em todo o domínio de definição da solução. Neste caso, supondo $\dot{t} > 0$, podemos escrever

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \frac{1}{\mathrm{cs}_\kappa^2(r)}\frac{I^2}{(\mu^{\perp})^2\mathrm{cs}_\kappa^2(r)\mathrm{sn}_\kappa^2 - I^2}. \tag{4.58}$$

Passamos à análise dos zeros do denominador em (4.58). Nos ambientes de curvatura constante $\bar{M}^3 = \mathbb{S}^3(\kappa)$ e $\bar{M}^3 = \mathbb{H}^3(\kappa)$, um zero $r = r_0$ desta expressão, ou seja, da derivada $\frac{dr}{dt}$, satisfaz

$$(\mu^{\perp})^2\mathrm{cs}_\kappa^2(r_0)\mathrm{sn}_\kappa^2(r_0) - I^2 = 0, \tag{4.59}$$

ou seja,

$$\frac{1}{4}\mathrm{sn}_\kappa^2(2r_0) = \frac{I^2}{(\mu^{\perp})^2}.$$

Ressaltamos que, em $r = r_0$, temos $\frac{dr}{dt} = 0$ e, dado que $\frac{dt}{ds} \neq 0$, deduzimos que $\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt}/\frac{ds}{dt} = 0$. Sendo assim, $\mu^{\perp} = f(0) =: f_0$ em zeros de (4.59) e, portanto,

$$\mathrm{sn}_\kappa^2(2r_0) = \frac{4I^2}{f_0^2}. \tag{4.60}$$

Se $\kappa > 0$, a equação (4.60) admite solução quando $I^2 \leq f_0^2/4\kappa$. No caso em que $\kappa \leq 0$, há sempre uma única solução.

Concluímos que, fixada uma solução $r = r_0$ de (4.60), a hipersuperfície rotacionalmente invariante com $H_F = 0$ e $I \neq 0$ fixado é gerada por uma solução do sistema (4.51)-(4.53) com condição inicial $r(0) = r_0,\ t(0) = 0, \vartheta(0) = \pm\frac{\pi}{2}$. Esta curva é descrita não-parametricamente como o bi-gráfico da função

$$t(r) = \pm\int_{r_0}^{r}\frac{1}{\mathrm{cs}_\kappa(\tau)}\frac{I}{\sqrt{(\mu^{\perp})^2\mathrm{cs}_\kappa^2(\tau)\mathrm{sn}_\kappa^2(\tau) - I^2}}\,d\tau, \quad r > r_0. \tag{4.61}$$

Para $\kappa \leq 0$, esta integral imprópria está definida para $r \in (r_0, +\infty)$. Sendo assim, a hipersuperfície rotacional correspondente é completa e difeomorfa a um anel. Caso $\kappa > 0$, entretanto, temos $\frac{dt}{dr} \nrightarrow 0$ quando $r \to \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$, o que demonstra que a solução não pode ser estendida por reflexão em torno do eixo $r = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Logo, nesta situação, a hipersuperfície rotacional correspondente não é completa.

(iii) Caso $H_F \neq 0$ e $I = 0$, escrevemos (4.54) na forma

$$\mu^{\perp}\mathrm{cs}_\kappa(r)\mathrm{sn}_\kappa(r)\sin\vartheta + H_F\mathrm{sn}^2_\kappa(r) = 0. \tag{4.62}$$

Caso $\bar{M}^3 = \mathbb{S}^3(\kappa)$ ou $\bar{M}^3 = \mathbb{H}^3(\kappa)$, temos

$$\mu^{\perp}\frac{\mathrm{cs}_\kappa(r)}{\mathrm{sn}_\kappa(r)}\sin\vartheta = -H_F \tag{4.63}$$

e, tomando $H_F < 0$, concluímos que $\sin\vartheta > 0$ em todo o intervalo de definição da solução. Além disso, caso $\kappa > 0$, temos $r < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$. A expressão (4.63) implica que $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ em $r = r_0$, onde r_0 satisfaz

$$\frac{\mathrm{cs}_\kappa(r_0)}{\mathrm{sn}_\kappa(r_0)} = -\frac{H_F}{f_0}.$$

Portanto, fixados $H_F \neq 0$ e $I = 0$, estamos considerando uma solução do sistema (4.51)-(4.53) com condições iniciais $r(0) = r_0,\ t(0) = 0, \vartheta(0) = \frac{\pi}{2}$. Tal solução pode ser descrita não-parametricamente, visto que

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \frac{\mathrm{sn}^2_\kappa(r)}{\mathrm{cs}^2_\kappa(r)}\frac{H_F^2}{(\mu^{\perp})^2\mathrm{cs}^2_\kappa(r) - H_F^2\mathrm{sn}^2_\kappa(r)}, \tag{4.64}$$

expressão a partir da qual constatamos que $\frac{dt}{dr} \to 0$ quando $r \to 0^+$. Logo, a solução pode ser estendida a $r = 0$, atingindo ortogonalmente a fronteira de Π. Pontos críticos para a coordenada r ocorrem quando o denominador em (4.64) se anula, isto é, para $r = r_+$ satifazendo

$$\frac{\mathrm{cs}^2_\kappa(r_+)}{\mathrm{sn}^2_\kappa(r_+)} = \frac{H_F^2}{f_0^2},$$

equação que, no caso $\kappa < 0$, tem solução unicamente para $H_F^2 > -\kappa f_0^2$. Se $\kappa \geq 0$, verificamos que sempre existem tais pontos críticos. Por esta razão, deduzimos, neste casos, que a curva geratriz pode ser estendida por reflexão em torno do eixo $r = 0$, gerando por rotação uma hipersuperfície de curvatura anisotrópica constante, homeomorfa a uma esfera.

Se $\kappa < 0$ e $H_F^2 \leq -\kappa$, as hipersuperfícies rotacionais de curvatura média anisotrópica constante geradas por estas soluções do sistema (4.51)-(4.53) têm a topologia de um disco.

(iv) Se $H_F \neq 0$ e $I \neq 0$, uma solução trivial para o sistema (4.51)-(4.53) é dada por $r = r_0$, para $r_0 \in (0, R)$ arbitrariamente fixado. Neste caso, temos $\vartheta = \pm\frac{\pi}{2}$ e $t(s) = \pm\frac{1}{g(r_0)}$. Assim, a hipersuperfície rotacionalmente invariante correspondente é um cilindro sobre a esfera geodésica de raio r_0 em P, regrada pelas linhas de fluxo de Y, percorridas à velocidade unitária. Este cilindro descreve, portanto, uma solução do sistema de equações (4.51)-(4.53) com condições iniciais $r(0) = r_0,\ t(0) = 0,\ \vartheta(0) = \pm\frac{\pi}{2}$. A integral primeira é determinada por

$$I = \mu^{\perp}\mathrm{cs}_\kappa(r_0)\mathrm{sn}_\kappa(r_0) + H_F\mathrm{sn}^2_\kappa(r_0).$$

Por outro lado, a equação (4.53) assegura que

$$2\,\mathrm{cs}_\kappa(r_0)H_F = \mu^{\|}\kappa\frac{\mathrm{sn}_\kappa(r_0)}{\mathrm{cs}_\kappa(r_0)} - \mu^{\perp}\frac{\mathrm{cs}_\kappa(r_0)}{\mathrm{sn}_\kappa(r_0)}.$$

Combinando estas expressões, obtemos

$$I = \frac{f_0}{2}\Big(\mathrm{sn}_\kappa(2r_0) - \frac{\mathrm{sn}_\kappa(r_0)}{\mathrm{cs}_\kappa(r_0)}\Big) + \frac{\kappa}{2}(f''(0)\mathrm{cs}^2_\kappa(r_0) + f_0)\frac{\mathrm{sn}^3_\kappa(r_0)}{\mathrm{cs}^2_\kappa(r_0)}, \tag{4.65}$$

expressão que relaciona o fluxo ao raio geodésico do cilindro.

(v) Ainda considerando $H_F \neq 0$ e $I \neq 0$, supomos, desta vez, que $H_F < 0$ e $I > 0$. Sendo assim, temos

$$\mu^{\perp}\dot{t}\,\mathrm{cs}^2_\kappa(r)\mathrm{sn}_\kappa(r) = I - H_F\,\mathrm{sn}^2_\kappa(r), \tag{4.66}$$

permitindo provar que $\dot{t} > 0$ e $r > 0$ – e $r < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ quando $\kappa > 0$ – em todo o intervalo de definição da solução. Investigamos, a seguir, pontos críticos da coordenada r. Nestes pontos, temos $\dot{r} = 0$ e $\mathrm{cs}_\kappa(r)\dot{t} = 1$. Assim, obtemos, nestes pontos,

$$f_0\,\mathrm{cs}_\kappa(r)\mathrm{sn}_\kappa(r) = I - H_F\,\mathrm{sn}^2_\kappa(r)$$

ou, equivalentemente,

$$f_0^2(1 - \kappa\mathrm{sn}^2_\kappa(r))\mathrm{sn}^2_\kappa(r) = (I - H_F\,\mathrm{sn}^2_\kappa(r))^2,$$

expressão que reescrevemos na forma da equação

$$(H_F^2 + \kappa f_0^2)\,\mathrm{sn}^4_\kappa(r) - (2H_FI + f_0^2)\,\mathrm{sn}^2_\kappa(r) + I^2 = 0, \tag{4.67}$$

cujas raízes $r = r_\pm$ satisfazem, quando $H_F^2 + \kappa f_0^2 > 0$,

$$\mathrm{sn}^2_\kappa(r_\pm) = \frac{2H_FI + f_0^2 \pm f_0\sqrt{f_0^2 + 4(H_FI - \kappa I^2)}}{2H_F^2 + 2\kappa f_0^2}. \tag{4.68}$$

Observamos que a condição $H_F^2 + \kappa f_0^2 > 0$ é suficiente para a existência de raízes positivas, visto que, com esta condição, o numerador em (4.68) correspondente ao sinal "$-$" é positivo se e somente se

$$2H_F I + f_0^2 > f_0\sqrt{f_0^2 + 4(H_F I - \kappa I^2)},$$

o que é equivalente a

$$4(H_F^2 + \kappa f_0^2)I^2 > 0.$$

Apontamos, ainda, para o fato de que o fluxo I é, neste caso, limitado por

$$0 < I < \frac{H_F + \kappa\sqrt{H_F^2 + \kappa f_0^2}}{2\kappa}$$

garantindo que o radicando em (4.68) seja positivo. O valor limítrofe

$$I_{\text{max}} = \frac{H_F + \kappa\sqrt{H_F^2 + \kappa f_0^2}}{2\kappa} \tag{4.69}$$

ocorre quando as duas raízes em (4.68) e caracteriza, portanto, o cilindro estudado no item (iii) acima. Em particular, (4.69) fornece uma expressão explícita para I em (4.65) em termos de H_F.

Se $\kappa < 0$ e $H_F^2 = -\kappa f_0^2$, temos uma única raiz $r = r_0$ de (4.67) dada por

$$\text{sn}_\kappa^2(r_0) = \frac{I^2}{f_0(f_0 - 2\sqrt{-\kappa}I)},$$

ao fixarmos $I < f_0/2\sqrt{-\kappa}$. A hipersuperfície rotacionalmente invariante correspondente é o análogo do catenóide primo da teoria de superfícies de curvatura média constante em $\mathbb{H}^3(\kappa)$.

Logo, no caso em que $H_F^2+\kappa f_0^2 > 0$, a solução do sistema (4.51)-(4.53) tem condições iniciais da forma $r(0) = r_+$, $t(0) = 0$, $\vartheta(0) = \frac{\pi}{2}$ pode ser descrita não-parametricamente como gráfico da função

$$t(r) = \int_{r_+}^{r} \frac{1}{\text{cs}_\kappa(\tau)} \frac{I - H_F\,\text{sn}_\kappa^2(\tau)}{\sqrt{(\mu^\perp)^2\,\text{cs}_\kappa^2(\tau)\text{sn}_\kappa^2(\tau) - (I - H_F\,\text{sn}_\kappa^2(\tau))}}\,d\tau, \tag{4.70}$$

a qual pode ser estendida por reflexões em torno das geodésicas $t = t(r_-)$ e $t = t(r_+)$ e sucessivamente, definindo uma solução completa e periódica, com período dado por

$$T = 2\int_{r_+}^{r_-} \frac{1}{\text{cs}_\kappa(\tau)} \frac{I - H_F\,\text{sn}_\kappa^2(\tau)}{\sqrt{(\mu^\perp)^2\,\text{cs}_\kappa^2(\tau)\text{sn}_\kappa^2(\tau) - (I - H_F\,\text{sn}_\kappa^2(\tau))}}\,d\tau \tag{4.71}$$

Finalmente, estudamos a existência de pontos de inflexão na curva solução do sistema. Inicialmente, ressaltamos que estes pontos não equivalem àqueles em que $\dot{\vartheta} = 0$. De fato, vimos acima que

$$\kappa_{\tilde{\psi}} = k^{\|} = -\frac{\dot{\vartheta}}{g} - \frac{1}{g}\frac{dg}{dr}\dot{t}.$$

Em pontos de inflexão, a curvatura média anisotrópica é dada por

$$\mu^{\perp} k^{\perp} = 2H_F \tag{4.72}$$

ou, equivalentemente, utilizando a expressão (4.36),

$$-\mu^{\perp}\, \mathrm{cs}_{\kappa}(r)\dot{t} = 2H_F \mathrm{sn}_{\kappa}(r). \tag{4.73}$$

Substituindo esta última equação em (4.66), obtemos

$$-2H_F \mathrm{sn}^2_{\kappa}(r)\mathrm{cs}_{\kappa}(r) = I - H_F \mathrm{sn}^2_{\kappa}(r) \tag{4.74}$$

ou, rearranjando termos,

$$H_F \mathrm{sn}^2_{\kappa}(r) - H_F \mathrm{sn}_{\kappa}(r)\mathrm{sn}_{\kappa}(2r) = I. \tag{4.75}$$

A existência de pontos de inflexão ou, equivalentemente, de raízes da equação (4.75) no intervalo $[r_-, r_+]$ deve-se ao fato de que, geometricamente, $k^{\|} = \kappa_{\tilde{\psi}} > 0$ em $r = r_-$ e $k^{\|} = \kappa_{\tilde{\psi}} < 0$ em $r = r_+$, calculadas com respeito ao campo normal apontando para fora.

(vi) Lidamos, agora, com o caso em que $H_F < 0$ e $I < 0$. Sendo assim, temos

$$\mu^{\perp}\dot{t}\, \mathrm{cs}^2_{\kappa}(r)\mathrm{sn}_{\kappa}(r) - I = -H_F\, \mathrm{sn}^2_{\kappa}(r). \tag{4.76}$$

Os pontos em que $\mathrm{cs}_{\kappa}(r)\dot{t} = 0$ são caracterizados por

$$\mathrm{sn}^2_{\kappa}(r_0) = \frac{I}{H_F}.$$

Caso $\kappa > 0$ e $\kappa I = H_F$, temos $r_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$, zero da função $r \mapsto \mathrm{cs}_{\kappa}(r)$. Neste caso, a fórmula (4.76) assegura que

$$\mu^{\perp}\dot{t}\, \mathrm{sn}_{\kappa}(r) = I,$$

sempre que $\mathrm{cs}_{\kappa}(r) \neq 0$, ou seja, para $r \neq r_0$. Em particular, em $r = r_{\pm}$, zeros da equação

$$f_0 \frac{\mathrm{sn}_{\kappa}(r_{\pm})}{\mathrm{cs}_{\kappa}(r_{\pm})} = \pm I,$$

temos $\vartheta = \pm\frac{\pi}{2}$. Concluímos que a hipersuperfície rotacional correspondente ao caso $\kappa > 0$ e $\kappa I = H_F$ é um toro de curvatura média anisotrópica constante.

Nos demais casos, os pontos da curva em que $\mathrm{cs}_\kappa(r)\dot{t} = 0$ são pontos críticos para a coordenada t. Concluímos, nestes casos, que a curva é solução do sistema (4.51)-(4.53) com condições iniciais $r(0) = r_0$, $t(0) = 0$, $\vartheta(0) = 0, \pi$.

Posto que $2H_F = \mu^{\|}k^{\|} + \mu^{\perp}k^{\perp}$, segue da equação (4.36) que

$$\mu^{\|}k^{\|}\mathrm{sn}_\kappa(r) = 2H_F\mathrm{sn}_\kappa(r) + \mu^{\perp}\mathrm{cs}_\kappa(r)\dot{t},$$

donde concluímos que $k^{\|} = 0$ em um ponto da curva geratriz se e somente se

$$\mu^{\perp}\mathrm{cs}_\kappa(r)\dot{t} = -2H_F\mathrm{sn}_\kappa(r). \tag{4.77}$$

Entretanto, o lado direito em (4.77) é estritamente positivo em todo o intervalo de definição da solução, ao passo que o lado esquerdo é nulo nos pontos críticos de t, cuja existência demonstramos há pouco. Demonstramos, deste modo, que a curva geratriz não tem pontos de inflexão. $\square$

Capítulo 5

Fórmula da segunda variação

Utilizamos, neste capítulo, a notação fixada no Capítulo 2. Iniciamos enunciando o seguinte resultado, cuja demonstração é o objeto das próximas seções.

Proposição 5.1 *Suponhamos F horizontalmente constante. Fixado, ao longo de uma imersão isométrica $\psi : M \to \bar{M}$, um campo variacional arbitrário da forma*

$$\Xi = \phi N + V, \quad \phi \in C^\infty(M),\ V \in \Gamma(TM), \tag{5.1}$$

a variação correspondente da curvatura média anisotrópica é dada por

$$n\dot{H}_F = \Delta_F \phi + \mathrm{tr}(A_F A)\phi + \mathrm{Ric}_{\mathcal{G}_F}(\Xi, N) + \langle \mathrm{div}_M A_F, V\rangle \tag{5.2}$$

onde denotamos $\dot{H}_F = \pounds_\Xi H_F$. Nesta fórmula, o operador elíptico Δ_F é definido por

$$\Delta_F \phi = \mathrm{div}_M \mathcal{A}_F \nabla\phi, \quad \phi \in C^\infty(M) \tag{5.3}$$

e o tensor $\mathrm{Ric}_{\mathcal{G}_\mathcal{F}}$ é, por definição, a contração do tensor de curvatura em pontos de $\psi(M)$ com respeito a $\mathcal{G}_F$, isto é,

$$\mathrm{Ric}_{\mathcal{G}_\mathcal{F}}(U, V) = g^{ij}\mathcal{G}_F(\bar{R}(\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}, U)V, \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}), \quad U, V \in \Gamma(\psi^* T\bar{M}). \tag{5.4}$$

No caso particular de variações normais, em que o campo variacional é da forma $\Xi = \phi N$, para alguma $\phi \in C^\infty(M)$, temos

$$n\dot{H}_F = \Delta_F \phi + \mathrm{tr}(A_F A)\phi + \mathrm{Ric}_{\mathcal{G}_F}(N, N)\,\phi \tag{5.5}$$

Se a variação de ψ é dada por hipersuperfícies paralelas, isto é, caso $\phi = 1$, a fórmula (5.5) *resulta na equação de Riccati anisotrópica*

$$n\dot{H}_F - \mathrm{tr}(A_F A) - \mathrm{Ric}_{\mathcal{G}_F}(N, N) = 0. \tag{5.6}$$

A partir destas fórmulas, demonstramos a fórmula da segunda variação do funcional $\mathcal{F}$ definido em (2.2).

Proposição 5.2 *Suponhamos F horizontalmente constante. Fixado, ao longo de uma imersão isométrica $\psi : M \to \bar{M}$ que é ponto crítico de $\mathcal{F}$, um campo variacional arbitrário da forma*

$$\Xi = \phi N + V, \quad \phi \in C^\infty(M),\ V \in \Gamma(TM), \tag{5.7}$$

a segunda variação do funcional paramétrico elíptico (2.2) *é calculada segundo a fórmula*

$$\frac{\delta^2 \mathcal{F}}{\delta \Xi^2} \doteq \frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} \mathcal{F}(\psi(s,\cdot)) = -\int_M \phi\, L_F \phi + \phi\,(\mathrm{Ric}_{\mathcal{G}_F}(V,N) + \langle \mathrm{div}_M A_F, V\rangle) \tag{5.8}$$

onde o operador elíptico L_F é definido como

$$L_F\phi = \Delta_F \phi + \mathrm{tr}(A_F A)\phi + \mathrm{Ric}_{\mathcal{G}_F}(N,N)\phi, \quad \phi \in C^\infty(M). \tag{5.9}$$

Restingindo-nos a variações admissíveis, isto é, que preservam o volume ou, equivalentemente, para as quais a componente normal $\phi \in C^\infty(M)$ satisfaz (2.24)*, concluímos que a fórmula da segunda variação reduz-se a*

$$\frac{\delta^2 \mathcal{F}}{\delta \Xi^2} = -\int_M \phi\, L_F \phi \tag{5.10}$$

e, além disso,

$$\langle \mathrm{div}_M A_F, V\rangle + \mathrm{Ric}_{\mathcal{G}_F}(V,N) = 0, \quad V \in \Gamma(TM). \tag{5.11}$$

Uma vez que a proposição anterior assegura que é suficiente considerarmos variações normais para o cálculo da segunda variação de $\mathcal{F}$ em torno de uma imersão isométrica de curvatura média anisotrópica *constante* $H_F = H_0$ - isto é, de um ponto crítico do funcional $\mathcal{F}_{H_0}$, estamos aptos a definir a estabilidade de uma tal imersão.

Definição 5.1 *Uma imersão $\psi : M \to \bar{M}$ de curvatura média anistrópica constante é* estável *quando*

$$-\int_M \phi\, L\phi\, dM \geq 0, \tag{5.12}$$

para toda função $\phi \in C^\infty(M)$ satisfazendo $\int_M \phi\, dM = 0$.

5.1 Variação da Segunda Forma Fundamental Anisotrópica

Denotando as componentes locais covariantes de A_F por h^F_{ij}, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s} h^F_{ij} &= \pounds_{\frac{\partial}{\partial s}} A_F\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = \frac{\partial}{\partial s}\Big(\mathcal{G}_F\Big(\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}, \psi_* A \frac{\partial}{\partial x^j}\Big)\Big) \\
&= \bar\nabla_{\psi_* \frac{\partial}{\partial s}} \mathcal{G}_F\Big(\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}, \psi_* A \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) + \mathcal{G}_F\Big(\bar\nabla_{\psi_* \frac{\partial}{\partial s}} \psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}, \psi_* A \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) \\
&\quad + \mathcal{G}_F\Big(\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}, \bar\nabla_{\psi_* \frac{\partial}{\partial s}} \psi_* A \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) \\
&= \bar\nabla_{\psi_* \frac{\partial}{\partial s}} \mathcal{G}_F\Big(\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}, \psi_* A \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) + \mathcal{G}_F\Big(\bar\nabla_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \psi_* \frac{\partial}{\partial s}, \psi_* A \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) \\
&\quad + \mathcal{G}_F\Big(\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}, -\bar\nabla_{\psi_* \frac{\partial}{\partial s}} \bar\nabla_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} N\Big).
\end{aligned}$$

Lembramos, entretanto, que

$$\psi_* \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{(s=0,x)} = \Xi(x) = \psi_*(0,x) \cdot V(x) + \phi(x)\, N(0,x)$$

é a decomposição do campo vetorial variacional ao longo de $\psi(0,\cdot)$ e que

$$\bar\nabla_{\psi_* \frac{\partial}{\partial s}} N = -\psi_* A V - \psi_* \nabla \phi.$$

é a primeira variação do campo normal. Assim, visto que

$$\bar R\Big(\psi_* \frac{\partial}{\partial s}, \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) N = \bar\nabla_{\psi_* \frac{\partial}{\partial s}} \bar\nabla_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} N - \bar\nabla_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} \bar\nabla_{\psi_* \frac{\partial}{\partial s}} N,$$

resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s} h^F_{ij} &= \bar\nabla_{\psi_* \frac{\partial}{\partial s}} \mathcal{G}_F\Big(\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}, \psi_* A \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) + \mathcal{G}_F\Big(\bar\nabla_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \Xi, \psi_* A \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) \\
&\quad + \mathcal{G}_F\Big(\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}, -\bar\nabla_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} \bar\nabla_{\psi_* \frac{\partial}{\partial s}} N - \bar R\big(\psi_* \frac{\partial}{\partial s}, \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}\big) N\Big) \\
&= \bar\nabla_{\psi_* \frac{\partial}{\partial s}} \mathcal{G}_F\Big(\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}, \psi_* A \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) + \mathcal{G}_F\Big(\bar\nabla_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} (\psi_* V + \phi N), \psi_* A \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) \\
&\quad + \mathcal{G}_F\Big(\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}, \bar\nabla_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} (\psi_* A V + \psi_* \nabla \phi) - \bar R\big(\psi_* \frac{\partial}{\partial s}, \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}\big) N\Big).
\end{aligned}$$

Contudo,

$$\bar\nabla_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} (\psi_* V + \phi N) = \psi_*\big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} V\big) + \langle \bar\nabla_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \psi_* V, N\rangle N + \frac{\partial \phi}{\partial x^i} N + \phi \bar\nabla_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} N.$$

Assim, (2.39) em Proposição 2.1 implica que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_F\Big(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}}(\psi_* V + \phi N), \psi_* A\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) &= \mathcal{G}_F\Big(\psi_*\big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} V\big), \psi_* A\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)\\
&\quad +\phi\mathcal{G}_F\Big(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}} N, \psi_* A\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)\\
&= \mathcal{G}_F\Big(\psi_*\big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} V\big), \psi_* A\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) - \phi\mathcal{G}_F\Big(\psi_* A\frac{\partial}{\partial x^i}, \psi_* A\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)\\
&= A_F\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} V, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) - \phi A_F\Big(A\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big).
\end{aligned}
$$

Assim, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}h^F_{ij} &= \bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \psi_* A\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) + A_F\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} V, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) - \phi A_F\Big(A\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big)\\
&\quad +\mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\psi_* AV\Big) + \mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\psi_*\nabla\phi\Big)\\
&\quad -\mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \bar{R}\big(\psi_*\frac{\partial}{\partial s}, \psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}\big)N\Big).
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

No entanto,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\psi_* AV\Big) &= \mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \psi_*\big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} AV\big) + \langle\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\psi_* AV, N\rangle N\Big)\\
&= \mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \psi_*\big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} AV\big)\Big)
\end{aligned}
$$

visto que $\mathcal{G}_F(\cdot, N) = 0$ como enunciado em (2.39) da Proposição 2.1. Logo, tomando traços em (5.13), obtemos

$$
\begin{aligned}
g^{ij}\frac{\partial}{\partial s}h^F_{ij} &= g^{ij}\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \psi_* A\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) + g^{ij}A_F\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} V, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) - \phi g^{ij}A_F\Big(A\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big)\\
&\quad +g^{ij}\mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \psi_*\big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} AV\big)\Big) + g^{ij}\mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\psi_*\nabla\phi\Big)\\
&\quad -g^{ij}\mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \bar{R}\big(\psi_*\frac{\partial}{\partial s}, \psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}\big)N\Big)
\end{aligned}
$$

e, abreviadamente,

$$
\begin{aligned}
g^{ij}\frac{\partial}{\partial s}h^F_{ij} &= g^{ij}\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \psi_* A\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) + \mathrm{tr}(A_F\nabla_{(\cdot)}V) - \phi\,\mathrm{tr}(A_F A) + \mathrm{tr}(\mathcal{A}_F\nabla_{(\cdot)}AV)\\
&\quad +g^{ij}\mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\psi_*\nabla\phi\Big) - g^{ij}\mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \bar{R}\big(\psi_*\frac{\partial}{\partial s}, \psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}\big)N\Big).
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

O quinto termo no lado direito da fórmula (5.14) é calculado como segue

$$\begin{aligned}
g^{ij}\mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\psi_*\nabla\phi\Big) &= g^{ij}\langle\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \mathcal{G}_F^*\cdot\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\psi_*\nabla\phi\rangle \\
&= g^{ij}\langle\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, -(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\mathcal{G}_F^*)\cdot\psi_*\nabla\phi + \bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}(\mathcal{G}_F^*\psi_*\nabla\phi)\rangle \\
&= g^{ij}\langle\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}(\mathcal{G}_F^*\psi_*\nabla\phi)\rangle - g^{ij}\langle\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, (\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\mathcal{G}_F^*)\cdot\psi_*\nabla\phi\rangle
\end{aligned}$$

Usando a definição de $\mathcal{A}_F$ segundo a qual $\psi_*\mathcal{A}_F^* = \mathcal{G}_F^*\psi_*$, definimos um operador elíptico Δ_F em M por

$$\Delta_F = \mathrm{div}_M\mathcal{A}_F\nabla. \tag{5.15}$$

Sendo assim, escrevemos

$$\begin{aligned}
g^{ij}\mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\psi_*\nabla\phi\Big) &= \mathrm{div}_M\mathcal{A}_F\nabla\phi - g^{ij}\langle\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, (\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\mathcal{G}_F^*)\cdot\psi_*\nabla\phi\rangle \\
&=: \Delta_F\phi - g^{ij}\langle\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \big(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\mathcal{G}_F^*\big)\cdot\psi_*\nabla\phi\rangle.
\end{aligned}\tag{5.16}$$

Quanto ao segundo termo do lado direito em (5.16), obtemos, utilizando (2.63),

$$\begin{aligned}
g^{ij}\langle\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, (\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\mathcal{G}_F^*)\cdot\psi_*\nabla\phi\rangle &= g^{ij}\langle(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\mathcal{G}_F^*)\cdot\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \psi_*\nabla\phi\rangle \\
&= g^{ij}\langle\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^j}}(\mathcal{G}_F^*\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}) - \mathcal{G}_F^*(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}), \psi_*\nabla\phi\rangle \\
&= g^{ij}\langle\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^j}}(\mathcal{G}_F^*\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}) - \mathcal{G}_F^*(\psi_*\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}), \psi_*\nabla\phi\rangle \\
&= g^{ij}\langle(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^j}}(\mathcal{G}_F^*\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}))^T - \mathcal{G}_F^*(\psi_*\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}), \psi_*\nabla\phi\rangle
\end{aligned}$$

e, sendo assim,

$$\begin{aligned}
g^{ij}\langle\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, (\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\mathcal{G}_F^*)\cdot\psi_*\nabla\phi\rangle &= g^{ij}\langle(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\psi_*\mathcal{A}_F^*\frac{\partial}{\partial x^i})^T - \psi_*\mathcal{A}_F^*(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}), \psi_*\nabla\phi\rangle \\
&= g^{ij}\langle\psi_*(\nabla_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\mathcal{A}_F^*\frac{\partial}{\partial x^i}) - \psi_*\mathcal{A}_F^*(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}), \psi_*\nabla\phi\rangle \\
&= g^{ij}\langle\nabla_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\mathcal{A}_F^*\frac{\partial}{\partial x^i} - \mathcal{A}_F^*(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}), \nabla\phi\rangle \\
&= g^{ij}\langle(\nabla_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\mathcal{A}_F^*)\frac{\partial}{\partial x^i}, \nabla\phi\rangle_M \\
&= \langle\mathrm{div}_M\mathcal{A}_F^*, \nabla\phi\rangle,
\end{aligned}$$

onde usamos que $\psi_*\nabla\phi$ é tangente a $\psi(0,M)$ e $\mathcal{G}_F^*\psi_* = \psi_*\mathcal{A}_F^*$.

Deste modo, concluímos que

$$\begin{aligned} g^{ij}\frac{\partial}{\partial s}h^F_{ij} &= g^{ij}\bar\nabla_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i},\psi_*A\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) + \mathrm{tr}(A_F\nabla_{(\cdot)}V) - \phi\,\mathrm{tr}(A_FA) + \mathrm{tr}(\mathcal{A}_F\nabla_{(\cdot)}AV) \\ &+\Delta_F\phi - \langle \mathrm{div}_M\mathcal{A}_F^*,\nabla\phi\rangle - g^{ij}\mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i},\bar R\big(\psi_*\frac{\partial}{\partial s},\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}\big)N\Big). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Deduzimos a partir de (5.17) e dos cálculos na Seção 5.2 que

$$\begin{aligned} g^{ij}\frac{\partial}{\partial s}h^F_{ij} &= g^{ij}\bar\nabla_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\mathcal{G}_F\big(\psi_*AV+\psi_*\nabla\phi,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}\big) + \mathrm{tr}(A_F\nabla_{(\cdot)}V) - \phi\,\mathrm{tr}(A_FA) \\ &+\mathrm{tr}(\mathcal{A}_F\nabla_{(\cdot)}AV) \\ &+\Delta_F\phi - \langle \mathrm{div}_M\mathcal{A}_F^*,\nabla\phi\rangle - g^{ij}\mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i},\bar R\big(\Xi,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}\big)N\Big) \\ &-g^{ij}D_{\Xi^{\mathsf h}}D^2F\big((\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf v},(\bar\nabla_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}N)^{\mathsf v}\big) \\ &+g^{ij}D_{(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf h}}D^2F\big((\bar\nabla_\Xi N)^{\mathsf v},(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf v}\big) \\ &+\frac12 g^{ij}D^2F\big((\bar R(N,\bar\nabla_\Xi N)\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf h},(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf v}\big) \\ &+\frac12 g^{ij}D^2F\big((\bar R(N,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf h},(\bar\nabla_\Xi N)^{\mathsf v}\big) \\ &-\frac12 g^{ij}D^2F\big((\bar R(N,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})\Xi)^{\mathsf h},(\bar\nabla_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}N)^{\mathsf v}\big) \\ &-\frac12 g^{ij}D^2F\big((\bar R(N,\bar\nabla_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}N)\Xi)^{\mathsf h},(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf v}\big). \end{aligned}$$

A Proposicção 2.1, entretanto, assegura que

$$\begin{aligned} g^{ij}\bar\nabla_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\mathcal{G}_F\big(\psi_*AV+\psi_*\nabla\phi,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}\big) &= g^{ij}\langle(\bar\nabla_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\mathcal{G}_F^*)(\psi_*AV+\psi_*\nabla\phi),\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}\rangle \\ &= g^{ij}\langle(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\mathcal{A}_F^*)(AV+\nabla\phi),\frac{\partial}{\partial x^i}\rangle \\ &= \langle \mathrm{div}_M\mathcal{A}_F^*, AV+\nabla\phi\rangle \end{aligned}$$

donde resulta que

$$\begin{aligned}
&g^{ij}\frac{\partial}{\partial s}h^F_{ij} = \langle \mathrm{div}_M \mathcal{A}^*_F, AV\rangle + \mathrm{tr}(A_F\nabla_{(\cdot)}V) - \phi\,\mathrm{tr}(A_F A) + \mathrm{tr}(\mathcal{A}_F\nabla_{(\cdot)}AV) \\
&\quad +\Delta_F\phi - g^{ij}\mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \bar{R}\big(\Xi, \psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}\big)N\Big) \\
&\quad -g^{ij}D_{\Xi^{\mathsf{h}}}D^2F\big((\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}, (\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}N)^{\mathsf{v}}\big) \\
&\quad +g^{ij}D_{(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{h}}}D^2F\big((\bar{\nabla}_\Xi N)^{\mathsf{v}}, (\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}\big) \\
&\quad +\frac{1}{2}g^{ij}D^2F\big((\bar{R}(N,\bar{\nabla}_\Xi N)\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{h}}, (\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}\big) \\
&\quad +\frac{1}{2}g^{ij}D^2F\big((\bar{R}(N,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{h}}, (\bar{\nabla}_\Xi N)^{\mathsf{v}}\big) \\
&\quad -\frac{1}{2}g^{ij}D^2F\big((\bar{R}(N,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})\Xi)^{\mathsf{h}}, (\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}N)^{\mathsf{v}}\big) \\
&\quad -\frac{1}{2}g^{ij}D^2F\big((\bar{R}(N,\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}N)\Xi)^{\mathsf{h}}, (\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}\big).
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Lidamos, agora, com a variação da métrica induzida. Uma vez que $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$, temos

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial s} = -g^{ik}\frac{\partial g_{kl}}{\partial s}g^{lj}.$$

Todavia

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{kl}}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s}\langle \psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}, \psi_*\frac{\partial}{\partial x^l}\rangle = \langle \bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}, \psi_*\frac{\partial}{\partial x^l}\rangle + \langle \psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}, \bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\psi_*\frac{\partial}{\partial x^l}\rangle \\
&= \langle \bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}}\Xi, \psi_*\frac{\partial}{\partial x^l}\rangle + \langle \psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}, \bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^l}}\Xi\rangle \\
&= \langle \bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}}(\psi_*V + \phi N), \psi_*\frac{\partial}{\partial x^l}\rangle + \langle \psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}, \bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^l}}(\psi_*V + \phi N)\rangle \\
&= \langle \bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}}\psi_*V + \phi\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}}N, \psi_*\frac{\partial}{\partial x^l}\rangle + \langle \psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}, \bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^l}}\psi_*V + \phi\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^l}}N\rangle \\
&= -2\phi h_{kl} + \langle \bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}}\psi_*V, \psi_*\frac{\partial}{\partial x^l}\rangle + \langle \psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}, \bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^l}}\psi_*V\rangle \\
&= -2\phi h_{kl} + \langle \psi_*(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}V), \psi_*\frac{\partial}{\partial x^l}\rangle + \langle \psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}, \psi_*(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}}V)\rangle \\
&= -2\phi h_{kl} + \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}V, \frac{\partial}{\partial x^l}\rangle + \langle \frac{\partial}{\partial x^k}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}}V\rangle.
\end{aligned}$$

Concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial g^{ij}}{\partial s} &= -g^{ik}\big(-2\phi h_{kl} + \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} V, \frac{\partial}{\partial x^l}\rangle + \langle \frac{\partial}{\partial x^k}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} V\rangle\big) g^{lj} \\ &= 2\phi g^{ik} h_{kl} g^{lj} - g^{ik}\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} V, \frac{\partial}{\partial x^l}\rangle g^{lj} - g^{ik}\langle \frac{\partial}{\partial x^k}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} V\rangle g^{lj}.\end{aligned}$$

Sendo assim, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial g^{ij}}{\partial s} h^F_{ij} &= 2\phi g^{ik} h_{kl} g^{lj} h^F_{ij} - g^{ik}\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} V, \frac{\partial}{\partial x^l}\rangle g^{lj} h^F_{ij} - g^{ik}\langle \frac{\partial}{\partial x^k}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} V\rangle g^{lj} h^F_{ij} \\ &= 2\phi A^i_l (A_F)^l_i - g^{lj} g^{ik} h^F_{ij} V^m_{;k} g_{ml} - g^{ik} g^{lj} h^F_{ij} V^m_{;l} g_{mk} \\ &= 2\phi \operatorname{tr}(A_F A) - g^{ik} h^F_{ij} V^j_{;k} - g^{lj} h^F_{ij} V^i_{;l} \\ &= 2\phi \operatorname{tr}(A_F A) - (h^F)^k_j V^j_{;k} - (h^F)^l_i V^i_{;l} \\ &= 2\phi \operatorname{tr}(A_F A) - 2 \operatorname{tr} A_F \nabla_{(\cdot)} V.\end{aligned}$$

Portanto, em $s = 0$, reunindo as fórmulas demonstradas acima, verificamos ser válido que

$$\begin{aligned}& n\frac{d}{ds} H_F = \frac{\partial g^{ij}}{\partial s} h^F_{ij} + g^{ij}\frac{\partial}{\partial s} h^F_{ij} \\ & = \langle \operatorname{div}_M \mathcal{A}^*_F, AV\rangle - \operatorname{tr}(A_F \nabla_{(\cdot)} V) + \phi \operatorname{tr}(A_F A) + \operatorname{tr}(\mathcal{A}_F \nabla_{(\cdot)} AV) \\ & \quad + \Delta_F \phi - g^{ij} \mathcal{G}_F\Big(\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}, \bar{R}\big(\Xi, \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}\big) N\Big) \\ & \quad + g^{ij}\Omega_i(\Xi, \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}),\end{aligned} \tag{5.19}$$

onde

$$\begin{aligned}& g^{ij}\Omega_i(\Xi, \psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}) = -g^{ij} D_{\Xi^{\mathsf{h}}} D^2 F\big((\bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} N)^{\mathsf{v}}, (\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}\big) \\ & \quad + g^{ij} D_{(\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{h}}} D^2 F\big((\bar{\nabla}_{\Xi} N)^{\mathsf{v}}, (\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}\big) \\ & \quad + \frac{1}{2} g^{ij} D^2 F\big((\bar{R}(N, \bar{\nabla}_{\Xi} N)\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{h}}, (\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}\big) \\ & \quad - \frac{1}{2} g^{ij} D^2 F\big((\bar{R}(N, \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} N)\Xi)^{\mathsf{h}}, (\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}\big) \\ & \quad + \frac{1}{2} g^{ij} D^2 F\big((\bar{R}(N, \psi_* \frac{\partial}{\partial x^i})\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{h}}, (\bar{\nabla}_{\Xi} N)^{\mathsf{v}}\big) \\ & \quad - \frac{1}{2} g^{ij} D^2 F\big((\bar{R}(N, \psi_* \frac{\partial}{\partial x^i})\Xi)^{\mathsf{h}}, (\bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} N)^{\mathsf{v}}\big),\end{aligned}$$

sendo Ω_i uma 2-forma que é a anti-simetrização de

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_i(U,W) &= D_{W^{\mathsf{h}}} D^2F\big((\bar{\nabla}_U N)^{\mathsf{v}}, (\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}\big)\\ &+\frac{1}{2} D^2F\big((\bar{R}(N,\bar{\nabla}_U N)W)^{\mathsf{h}}, (\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}\big)\\ &+\frac{1}{2} D^2F\big((\bar{R}(N,\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i})W)^{\mathsf{h}}, (\bar{\nabla}_U N)^{\mathsf{v}}\big).\end{aligned}$$

Entretanto, calculamos

$$-\mathrm{tr}(A_F \nabla_{(\cdot)} V) + \mathrm{tr}(\mathcal{A}_F \nabla_{(\cdot)} AV) = -\mathrm{tr}(\mathcal{A}_F A \nabla_{(\cdot)} V) + \mathrm{tr}(\mathcal{A}_F \nabla_{(\cdot)} AV) = \mathrm{tr}(\mathcal{A}_F (\nabla_{(\cdot)} A)V).$$

Demonstramos, ainda, que

$$\langle \mathrm{div}_M \mathcal{A}_F^*, AV\rangle + \mathrm{tr}(\mathcal{A}_F(\nabla_{(\cdot)}A)V) = \langle \mathrm{div} A_F, V\rangle.$$

De fato,

$$\begin{aligned}&\langle \mathrm{div}_M \mathcal{A}_F^*, AV\rangle + \mathrm{tr}(\mathcal{A}_F(\nabla_{(\cdot)}A)V) = g^{ij}\langle (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \mathcal{A}_F^*)\frac{\partial}{\partial x^j}, AV\rangle + g^{ij}\langle \mathcal{A}_F^*(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} A)V, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle\\ &= g^{ij}\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \mathcal{A}_F^* \frac{\partial}{\partial x^j}, AV\rangle - g^{ij}\langle \mathcal{A}_F^* \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, AV\rangle + g^{ij}\langle \mathcal{A}_F^*(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} A)V, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle\\ &= g^{ij}\langle A\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \mathcal{A}_F^* \frac{\partial}{\partial x^j}, V\rangle - g^{ij}\langle A\mathcal{A}_F^* \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, V\rangle + g^{ij}\langle \mathcal{A}_F^*(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} A)V, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle\\ &= -g^{ij}\langle (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} A)\mathcal{A}_F^* \frac{\partial}{\partial x^j}, V\rangle + g^{ij}\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} A\mathcal{A}_F^* \frac{\partial}{\partial x^j}, V\rangle - g^{ij}\langle A\mathcal{A}_F^* \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, V\rangle\\ &\quad + g^{ij}\langle \mathcal{A}_F^*(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} A)V, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle\\ &= -g^{ij}\langle (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} A)\mathcal{A}_F^* \frac{\partial}{\partial x^j}, V\rangle + g^{ij}\langle \mathcal{A}_F^*(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} A)V, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle + g^{ij}\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} A\mathcal{A}_F^* \frac{\partial}{\partial x^j}, V\rangle\\ &\quad - g^{ij}\langle A\mathcal{A}_F^* \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, V\rangle\\ &= -g^{ij}\langle (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} A)\mathcal{A}_F^* \frac{\partial}{\partial x^j}, V\rangle + g^{ij}\langle \mathcal{A}_F^*(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} A)V, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle + g^{ij}\langle (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} A\mathcal{A}_F^*) \frac{\partial}{\partial x^j}, V\rangle.\end{aligned}$$

Concluímos, portanto, que

$$\begin{aligned}&\langle \mathrm{div}_M \mathcal{A}_F^*, AV\rangle + \mathrm{tr}(\mathcal{A}_F(\nabla_{(\cdot)}A)V) = -g^{ij}\langle (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} A)\mathcal{A}_F^* \frac{\partial}{\partial x^j}, V\rangle + g^{ij}\langle \mathcal{A}_F^*(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} A)V, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle\\ &\quad + g^{ij}\langle (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} A_F) \frac{\partial}{\partial x^j}, V\rangle.\end{aligned}$$

Entretanto,

$$-g^{ij}\langle(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}A)\mathcal{A}_F^*\frac{\partial}{\partial x^j},V\rangle+g^{ij}\langle\mathcal{A}_F^*(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}A)V,\frac{\partial}{\partial x^j}\rangle=-g^{ij}\langle\mathcal{A}_F^*\frac{\partial}{\partial x^j},(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}A)V\rangle$$
$$+g^{ij}\langle(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}A)V,\mathcal{A}_F^*\frac{\partial}{\partial x^j}\rangle=0,$$

o que resulta em

$$\langle\text{div}_M\mathcal{A}_F^*,AV\rangle+\text{tr}(\mathcal{A}_F(\nabla_{(\cdot)}A)V)=g^{ij}\langle(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}A_F)\frac{\partial}{\partial x^j},V\rangle=\langle\text{div}A_F,V\rangle,$$

conforme afirmado.

Retornando à (5.19), inferimos que

$$n\frac{d}{ds}H_F=\Delta_F\phi+\phi\,\text{tr}(A_FA)$$
$$+\langle\text{div}_MA_F,V\rangle-g^{ij}\mathcal{G}_F\big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i},\bar{R}\big(\Xi,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}\big)N\big)+g^{ij}\Omega_i(\Xi,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}).$$

No caso em que F é horizontalmente constante, as Proposições 1.8 e 1.9 asseguram que $\Omega_i=0$ e, sendo assim,

$$n\frac{d}{ds}H_F=\Delta_F\phi+\phi\,\text{tr}(A_FA)$$
$$+\langle\text{div}_MA_F,V\rangle-g^{ij}\mathcal{G}_F\big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i},\bar{R}\big(\Xi,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}\big)N\big).$$

Visto que

$$g^{ij}\mathcal{G}_F\big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i},\bar{R}\big(\Xi,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}\big)N\big)==g^{ij}g^{kl}\mathcal{G}_F\big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i},\psi_*\frac{\partial}{\partial x^l}\big)\langle\bar{R}\big(\Xi,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}\big)N,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}\rangle$$
$$=g^{ij}g^{kl}\mathcal{A}_F(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^l})\langle\bar{R}\big(\Xi,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}\big)N,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}\rangle$$
$$=g^{kl}(\mathcal{A}_F^*)_l^j\langle\bar{R}\big(\Xi,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}\big)N,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^k}\rangle$$

Por fim, considerando apenas variações normais, isto é, supondo que $\Xi=\phi\,N$, temos

$$n\frac{d}{ds}H_F=\Delta_F\phi+\phi\,\text{tr}(A_FA)-\phi\,g^{ij}\mathcal{G}_F\big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i},\bar{R}\big(N,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}\big)N\big).$$

5.2 Apêndice

Neste apêndice, calculamos o primeiro termo do lado direito em (5.17), obtendo

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i},\psi_* A\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) &= \bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i},-\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}N\Big)\\ &= -\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}N^m\frac{\partial\psi^l}{\partial x^i}\,\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\mathcal{G}_F\Big(\frac{\partial}{\partial y^l},\frac{\partial}{\partial y^m}\Big). \quad (5.20)\end{aligned}$$

Entretanto,

$$\begin{aligned}&\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\mathcal{G}_F\Big(\frac{\partial}{\partial y^l},\frac{\partial}{\partial y^m}\Big) = \frac{\partial}{\partial s}\Big(\mathcal{G}_F(\frac{\partial}{\partial y^l},\frac{\partial}{\partial y^m})\circ\psi\Big) - \mathcal{G}_F\Big(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial y^l},\frac{\partial}{\partial y^m}\Big)\\ &-\mathcal{G}_F\Big(\frac{\partial}{\partial y^l},\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial y^m}\Big)\\ &= \frac{\partial}{\partial s}\Big(D^2F(\frac{\partial}{\partial \eta^l},\frac{\partial}{\partial \eta^m})\circ\Psi\Big) - D^2F\Big((\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial y^l})^{\mathsf{v}},(\frac{\partial}{\partial y^m})^{\mathsf{v}}\Big)\\ &-D^2F\Big((\frac{\partial}{\partial y^l})^{\mathsf{v}},(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial y^m})^{\mathsf{v}}\Big),\end{aligned}$$

donde obtemos

$$\begin{aligned}&\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\mathcal{G}_F\Big(\frac{\partial}{\partial y^l},\frac{\partial}{\partial y^m}\Big) = \Big(\Psi_*\frac{\partial}{\partial s}\Big)D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^l},\frac{\partial}{\partial \eta^m}\Big)\Big|_{(\psi(s,x),N(s,x))}\\ &-D^2F\Big(D_{(\psi_*\frac{\partial}{\partial s})^{\mathsf{h}}}(\frac{\partial}{\partial y^l})^{\mathsf{v}} - \frac{1}{2}\big(\bar{R}(N,\frac{\partial}{\partial y^l})\psi_*\frac{\partial}{\partial s}\big)^{\mathsf{h}},(\frac{\partial}{\partial y^m})^{\mathsf{v}}\Big)\\ &-D^2F\Big(D_{(\psi_*\frac{\partial}{\partial s})^{\mathsf{h}}}(\frac{\partial}{\partial y^m})^{\mathsf{v}} - \frac{1}{2}\big(\bar{R}(N,\frac{\partial}{\partial y^m})\psi_*\frac{\partial}{\partial s}\big)^{\mathsf{h}},(\frac{\partial}{\partial y^l})^{\mathsf{v}}\Big)\\ &= D_{\Psi_*\frac{\partial}{\partial s}}D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^l},\frac{\partial}{\partial \eta^m}\Big) + D^2F\Big(D_{\Psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial \eta^l},\frac{\partial}{\partial \eta^m}\Big) + D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^l},D_{\Psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial \eta^m}\Big)\\ &-D^2F\Big(D_{(\psi_*\frac{\partial}{\partial s})^{\mathsf{h}}}\frac{\partial}{\partial \eta^l},\frac{\partial}{\partial \eta^m}\Big) - D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^l},D_{(\psi_*\frac{\partial}{\partial s})^{\mathsf{h}}}\frac{\partial}{\partial \eta^m}\Big)\\ &+\frac{1}{2}D^2F\Big(\big(\bar{R}(N,\frac{\partial}{\partial y^l})\Xi\big)^{\mathsf{h}},\frac{\partial}{\partial \eta^m}\Big) + \frac{1}{2}D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^l},\big(\bar{R}(N,\frac{\partial}{\partial y^m})\Xi\big)^{\mathsf{h}}\Big).\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\Psi_*\frac{\partial}{\partial s} = \big(\psi_*\frac{\partial}{\partial s}\big)^{\mathsf{h}} + \big(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}N\big)^{\mathsf{v}},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
&\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\mathcal{G}_F\Big(\frac{\partial}{\partial y^l},\frac{\partial}{\partial y^m}\Big) = D_{\Psi_*\frac{\partial}{\partial s}}D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^l},\frac{\partial}{\partial \eta^m}\Big)\\
&+D^2F\Big(D_{(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}N)^{\mathsf{v}}}\frac{\partial}{\partial \eta^l},\frac{\partial}{\partial \eta^m}\Big)+D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^l},D_{(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}N)^{\mathsf{v}}}\frac{\partial}{\partial \eta^m}\Big)\\
&+\frac{1}{2}D^2F\Big(\big(\bar{R}(N,\frac{\partial}{\partial y^l})\Xi\big)^{\mathsf{h}},\frac{\partial}{\partial \eta^m}\Big)+\frac{1}{2}D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^l},\bar{R}(N,\frac{\partial}{\partial y^m})\Xi\big)^{\mathsf{h}}\Big)
\end{aligned}$$

e visto que $D_{(\cdot)^{\mathsf{v}}}(\cdot)^{\mathsf{v}}=0$, temos

$$\begin{aligned}
&\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\mathcal{G}_F\Big(\frac{\partial}{\partial y^l},\frac{\partial}{\partial y^m}\Big) = D_{\Psi_*\frac{\partial}{\partial s}}D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^l},\frac{\partial}{\partial \eta^m}\Big)\\
&+\frac{1}{2}D^2F\Big(\big(\bar{R}(N,\frac{\partial}{\partial y^l})\Xi\big)^{\mathsf{h}},\frac{\partial}{\partial \eta^m}\Big)+\frac{1}{2}D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^l},\big(\bar{R}(N,\frac{\partial}{\partial y^m})\Xi\big)^{\mathsf{h}}\Big).
\end{aligned}\tag{5.21}$$

Assim, substituindo (5.21) em (5.20)

$$\begin{aligned}
&\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i},\psi_*A\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = -\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}N^m\,\frac{\partial\psi^l}{\partial x^i}\,\Big(D_{\Psi_*\frac{\partial}{\partial s}}D^2F(\frac{\partial}{\partial \eta^l},\frac{\partial}{\partial \eta^m})\\
&+\frac{1}{2}D^2F\big((\bar{R}(N,\frac{\partial}{\partial y^l})\Xi)^{\mathsf{h}},\frac{\partial}{\partial \eta^m})\\
&+\frac{1}{2}D^2F\big(\frac{\partial}{\partial \eta^l},(\bar{R}(N,\frac{\partial}{\partial y^m})\Xi)^{\mathsf{h}})\Big).
\end{aligned}$$

Entretanto,

$$\begin{aligned}
&D_{\Psi_*\frac{\partial}{\partial s}}D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^l},\frac{\partial}{\partial \eta^m}\Big) = D_{\big(\psi_*\frac{\partial}{\partial s}\big)^{\mathsf{h}}}D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^l},\frac{\partial}{\partial \eta^m}\Big)+D_{\big(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}N\big)^{\mathsf{v}}}D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^l},\frac{\partial}{\partial \eta^m}\Big)\\
&= D_{\big(\psi_*\frac{\partial}{\partial s}\big)^{\mathsf{h}}}D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^l},\frac{\partial}{\partial \eta^m}\Big)+\bar{\nabla}_{\Xi}N^k\,D_{\frac{\partial}{\partial \eta^k}}D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^l},\frac{\partial}{\partial \eta^m}\Big).
\end{aligned}$$

Usando (1.72), obtemos

$$\begin{aligned}
&\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i},\psi_*A\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = -\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}N^m\,\frac{\partial\psi^l}{\partial x^i}\,\Big(D_{\big(\psi_*\frac{\partial}{\partial s}\big)^{\mathsf{h}}}D^2F(\frac{\partial}{\partial \eta^l},\frac{\partial}{\partial \eta^m})\\
&+\bar{\nabla}_{\Xi}N^k\,D_{\frac{\partial}{\partial \eta^m}}D^2F(\frac{\partial}{\partial \eta^k},\frac{\partial}{\partial \eta^l})\Big)\\
&-\frac{1}{2}D^2F\Big(\big(\bar{R}(N,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})\Xi\big)^{\mathsf{h}},\big(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}N\big)^{\mathsf{v}}\Big)\\
&-\frac{1}{2}D^2F\Big(\big(\bar{R}(N,\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}N)\Xi\big)^{\mathsf{h}},\big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}\big)^{\mathsf{v}}\Big).
\end{aligned}\tag{5.22}$$

Note que

$$D_{\Psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}} D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^k},\frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big) = D_{\big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}\big)^{\mathsf{h}}} D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^k},\frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big) + D_{\big(\bar\nabla_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}} N\big)^{\mathsf{v}}} D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^k},\frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big)$$
$$= D_{\big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}\big)^{\mathsf{h}}} D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^k},\frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big) + \bar\nabla_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}} N^m\, D_{\frac{\partial}{\partial \eta^m}} D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^k},\frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big),$$

o que implica

$$-\bar\nabla_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}} N^m\,\frac{\partial \psi^l}{\partial x^i}\,\bar\nabla_\Xi N^k\, D_{\frac{\partial}{\partial \eta^m}} D^2F\big(\frac{\partial}{\partial \eta^k},\frac{\partial}{\partial \eta^l}\big) = -\frac{\partial \psi^l}{\partial x^i}\,\bar\nabla_\Xi N^k\, D_{\Psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}} D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^k},\frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big)$$
$$+\frac{\partial \psi^l}{\partial x^i}\,\bar\nabla_\Xi N^k\, D_{\big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}\big)^{\mathsf{h}}} D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^k},\frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big). \tag{5.23}$$

Contudo, calculamos

$$D_{\Psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}} D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^k},\frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big) = \Psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}\Big(D^2F\big(\frac{\partial}{\partial \eta^k},\frac{\partial}{\partial \eta^l}\big)\Big)$$
$$-D^2F\Big(D_{\Psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial \eta^k},\frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big) - D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^k}, D_{\Psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^j}\Big(D^2F\big(\frac{\partial}{\partial \eta^k},\frac{\partial}{\partial \eta^l}\big)\circ\Psi\Big)$$
$$-D^2F\Big(D_{\Psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial \eta^k},\frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big) - D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^k}, D_{\Psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^j}\Big(\mathcal{G}_F\big(\frac{\partial}{\partial y^k},\frac{\partial}{\partial y^l}\big)\circ\psi\Big)$$
$$-D^2F\Big(D_{\Psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial \eta^k},\frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big) - D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^k}, D_{\Psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big).$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
D_{\Psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^k}, \frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big) &== \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} \mathcal{G}_F\Big(\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^l}\Big) \\
&+\mathcal{G}_F\Big(\bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^l}\Big) + \mathcal{G}_F\Big(\frac{\partial}{\partial y^k}, \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial y^l},\Big) \\
&-D^2F\Big(D_{\Psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial \eta^k}, \frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big) - D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^k}, D_{\Psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big) \\
&= \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} \mathcal{G}_F\Big(\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^l}\Big) \\
&+D^2F\Big((\bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial y^k})^{\mathsf{v}}, \frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big) + D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^k}, (\bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial y^l})^{\mathsf{v}},\Big) \\
&-D^2F\Big(D_{\Psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial \eta^k}, \frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big) - D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^k}, D_{\Psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big).
\end{aligned}
$$

Concluímos que

$$
\begin{aligned}
D_{\Psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^k}, \frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big) &= \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} \mathcal{G}_F\Big(\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^l}\Big) \\
&+D^2F\Big(D_{\left(\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}\right)^{\mathsf{h}}} \frac{\partial}{\partial \eta^k} - \frac{1}{2}\big(\bar{R}(N, \frac{\partial}{\partial y^k})\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}\big)^{\mathsf{h}}, \frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big) \\
&+D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^k}, D_{\left(\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}\right)^{\mathsf{h}}} \frac{\partial}{\partial \eta^l} - \frac{1}{2}\big(\bar{R}(N, \frac{\partial}{\partial y^l})\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}\big)^{\mathsf{h}}\Big) \\
&-D^2F\Big(D_{\Psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial \eta^k}, \frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big) - D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^k}, D_{\Psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big).
\end{aligned}
$$

Visto que $\Psi_* \frac{\partial}{\partial x^j} = (\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{h}} + (\bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} N)^{\mathsf{v}}$ e que $D_{(\cdot)^{\mathsf{v}}}(\cdot)^{\mathsf{v}} = 0$, temos

$$
\begin{aligned}
D_{\Psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^k}, \frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big) &= \bar{\nabla}_{\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}} \mathcal{G}_F\Big(\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^l}\Big) \\
&-\frac{1}{2} D^2F\Big(\big(\bar{R}(N, \frac{\partial}{\partial y^k})\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}\big)^{\mathsf{h}}, \frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big) \\
&-\frac{1}{2} D^2F\Big(\big(\bar{R}(N, \frac{\partial}{\partial y^l})\psi_* \frac{\partial}{\partial x^j}\big)^{\mathsf{h}}, \frac{\partial}{\partial \eta^k}\Big).
\end{aligned} \tag{5.24}
$$

Substituindo (5.23) em (5.22) acima, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}} \mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \psi_* A\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = -\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}} N^m\, \frac{\partial \psi^l}{\partial x^i}\, D_{(\psi_*\frac{\partial}{\partial s})^{\mathsf{h}}} D^2F\big(\frac{\partial}{\partial \eta^l}, \frac{\partial}{\partial \eta^m}\big) \\
&-\frac{\partial \psi^l}{\partial x^i}\, \bar{\nabla}_{\Xi} N^k\, D_{\Psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}} D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^k}, \frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big) \\
&+\frac{\partial \psi^l}{\partial x^i}\, \bar{\nabla}_{\Xi} N^k\, D_{\big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}\big)^{\mathsf{h}}} D^2F\Big(\frac{\partial}{\partial \eta^k}, \frac{\partial}{\partial \eta^l}\Big) \\
&-\frac{1}{2} D^2F\Big(\big(\bar{R}(N, \psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})\Xi\big)^{\mathsf{h}}, \big(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}} N\big)^{\mathsf{v}}\Big) \\
&-\frac{1}{2} D^2F\Big(\big(\bar{R}(N, \bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}} N)\Xi\big)^{\mathsf{h}}, \big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}\big)^{\mathsf{v}}\Big).
\end{aligned}
$$

Substituindo (5.24) na expressão anterior, deduzimos, por fim, que

$$
\begin{aligned}
&\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}} \mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}, \psi_* A\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = -\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}} N^m\, \frac{\partial \psi^l}{\partial x^i}\, D_{\big(\psi_*\frac{\partial}{\partial s}\big)^{\mathsf{h}}} D^2F\big(\frac{\partial}{\partial \eta^l}, \frac{\partial}{\partial \eta^m}\big) \\
&-\frac{\partial \psi^l}{\partial x^i}\, \bar{\nabla}_{\Xi} N^k \Big(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}} \mathcal{G}_F\big(\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^l}\big) \\
&-\frac{1}{2} D^2F\big((\bar{R}(N, \frac{\partial}{\partial y^k})\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{h}}, \frac{\partial}{\partial \eta^l}\big) \\
&-\frac{1}{2} D^2F\big((\bar{R}(N, \frac{\partial}{\partial y^l})\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{h}}, \frac{\partial}{\partial \eta^k}\big)\Big) \\
&+\frac{\partial \psi^l}{\partial x^i}\, \bar{\nabla}_{\Xi} N^k\, D_{(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{h}}} D^2F\big(\frac{\partial}{\partial \eta^k}, \frac{\partial}{\partial \eta^l}\big) \\
&-\frac{1}{2} D^2F\big((\bar{R}(N, \psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})\Xi)^{\mathsf{h}}, (\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}} N)^{\mathsf{v}}\big) \\
&-\frac{1}{2} D^2F\big((\bar{R}(N, \bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}} N)\Xi)^{\mathsf{h}}, (\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}\big).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i},\psi_*A\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) &= -D_{\Xi^{\mathsf{h}}}D^2F\big((\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}},(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}N)^{\mathsf{v}}\big)\\
&-\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\mathcal{G}_F\big(\bar{\nabla}_{\Xi}N,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}\big)\\
&+\frac{1}{2}D^2F\big((\bar{R}(N,\bar{\nabla}_{\Xi}N)\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{h}},(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}\big)\\
&+\frac{1}{2}D^2F\big((\bar{R}(N,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{h}},(\bar{\nabla}_{\Xi}N)^{\mathsf{v}}\big)\\
&+D_{(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{h}}}D^2F\big((\bar{\nabla}_{\Xi}N)^{\mathsf{v}},(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}\big)\\
&-\frac{1}{2}D^2F\big((\bar{R}(N,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})\Xi)^{\mathsf{h}},(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}N)^{\mathsf{v}}\big)\\
&-\frac{1}{2}D^2F\big((\bar{R}(N,\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}N)\Xi)^{\mathsf{h}},(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}\big).
\end{aligned}$$

Isto implica que

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial s}}\mathcal{G}_F\Big(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i},\psi_*A\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) &= \bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}\mathcal{G}_F\big(\psi_*AV+\psi_*\nabla\phi,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i}\big)\\
&-D_{\Xi^{\mathsf{h}}}D^2F\big((\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}},(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}N)^{\mathsf{v}}\big)\\
&+D_{(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{h}}}D^2F\big((\bar{\nabla}_{\Xi}N)^{\mathsf{v}},(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}\big)\\
&+\frac{1}{2}D^2F\big((\bar{R}(N,\bar{\nabla}_{\Xi}N)\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{h}},(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}\big)\\
&+\frac{1}{2}D^2F\big((\bar{R}(N,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j})^{\mathsf{h}},(\bar{\nabla}_{\Xi}N)^{\mathsf{v}}\big)\\
&-\frac{1}{2}D^2F\big((\bar{R}(N,\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})\Xi)^{\mathsf{h}},(\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}N)^{\mathsf{v}}\big)\\
&-\frac{1}{2}D^2F\big((\bar{R}(N,\bar{\nabla}_{\psi_*\frac{\partial}{\partial x^j}}N)\Xi)^{\mathsf{h}},(\psi_*\frac{\partial}{\partial x^i})^{\mathsf{v}}\big).
\end{aligned}$$

Capítulo 6

Fórmulas Integrais

Neste capítulo, deduzimos fórmulas de Minkowski inspiradas pela abordagem de R. Reilly, A. Ros e S. Montiel ao Teorema de Aleksandrov e por contribuições recentes de H. Li e colaboradores à caracterização das formas de Wulff em, por exemplo, [15] e [17]. Observamos que a presença do tensor de Cartan torna estas fórmulas diferentes daquelas anteriormente deduzidas para o funcional área.

Seja $X \in \Gamma(T\bar{M})$ um campo de Killing conforme fechado em $\bar{M}$. Doravante, $\varphi \in C^\infty(\bar{M})$ denota a função definida por $\pounds_X \langle \cdot, \cdot \rangle = \varphi \langle \cdot, \cdot \rangle$. Consideramos sobre $\psi(M)$ o campo vetorial

$$Y = \langle X, N \rangle \xi^T - F X^T, \tag{6.1}$$

onde T denota a projeção tangencial. Observamos que o campo $\langle X, N \rangle \xi - FX$ é tangente a $\psi(M)$. De fato

$$\langle \langle X, N \rangle \xi - FX, N \rangle = \langle X, N \rangle \langle \xi, N \rangle - F \langle X, N \rangle = \langle X, N \rangle F - F \langle X, N \rangle = 0.$$

Assim, dado um referencial ortonormal local $\{e_i\}_{i=1}^n$, tangente a M, temos

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{e_i} Y, e_j \rangle &= e_i \langle X, N \rangle \langle \xi, e_j \rangle + \langle X, N \rangle \langle \nabla_{e_i} \xi^T, e_j \rangle - e_i (F \circ \zeta) \langle X, e_j \rangle - F \langle \nabla_{e_i} X^T, e_j \rangle \\
&= (\langle \bar{\nabla}_{e_i} X, N \rangle + \langle X, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle) \langle \xi, e_j \rangle + \langle X, N \rangle \langle \nabla_{e_i} \xi^T, e_j \rangle - \langle DF, e_i^{\mathsf{h}} + (\bar{\nabla}_{e_i} N)^{\mathsf{v}} \rangle_{T\bar{M}} \langle X, e_j \rangle \\
&\quad - F \langle \bar{\nabla}_{e_i} X^T, e_j \rangle \\
&= (\varphi \langle e_i, N \rangle + \langle X, -Ae_i \rangle) \langle \xi, e_j \rangle + \langle X, N \rangle \langle \nabla_{e_i} \xi^T, e_j \rangle - \langle DF, (\bar{\nabla}_{e_i} N)^{\mathsf{v}} \rangle_{T\bar{M}} \langle X, e_j \rangle \\
&\quad - F \langle \bar{\nabla}_{e_i} (X - \langle X, N \rangle N), e_j \rangle \\
&= -\langle X, Ae_i \rangle \langle \xi, e_j \rangle + \langle X, N \rangle \langle \nabla_{e_i} \xi^T, e_j \rangle + \langle DF, (Ae_i)^{\mathsf{v}} \rangle_{T\bar{M}} \langle X, e_j \rangle \\
&\quad - F \langle \varphi \, e_i + \langle X, N \rangle Ae_i, e_j \rangle \\
&= -\langle X, Ae_i \rangle \langle \xi, e_j \rangle + \langle X, N \rangle \langle \nabla_{e_i} \xi^T, e_j \rangle + \langle \xi, Ae_i \rangle \langle X, e_j \rangle \\
&\quad - F \langle \varphi \, e_i + \langle X, N \rangle Ae_i, e_j \rangle.
\end{aligned}$$

Em particular, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}Y,e_i\rangle = -\langle X,A\xi^T\rangle+\langle X,N\rangle\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}\xi^T,e_i\rangle+\langle\xi^T,AX^T\rangle\\ -nF\varphi-nFH\langle X,N\rangle.\end{aligned}$$

Portanto

$$\mathrm{div}_{\psi(M)}Y=\langle X,N\rangle\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}\xi^T,e_i\rangle-nF\varphi-nHF\langle X,N\rangle.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}-nH_F &= \sum_i\langle\bar\nabla_{e_i}\xi,e_i\rangle=\sum_i\langle\bar\nabla_{e_i}\xi^T,e_i\rangle+\sum_i\langle\bar\nabla_{e_i}\langle\xi,N\rangle N,e_i\rangle\\ &= \sum_i\langle\bar\nabla_{e_i}\xi^T,e_i\rangle+\sum_i\langle\bar\nabla_{e_i}FN,e_i\rangle\\ &= \sum_i\langle\bar\nabla_{e_i}\xi^T,e_i\rangle+F\sum_i\langle\bar\nabla_{e_i}N,e_i\rangle\\ &= \sum_i\langle\nabla_{e_i}\xi^T,e_i\rangle-nHF,\end{aligned}$$

o que implica

$$\mathrm{div}_{\psi(M)}Y=-nH_F\langle X,N\rangle-nF\varphi. \tag{6.2}$$

Deste modo, demonstramos

Teorema 6.1 *Dados um campo de Killing conforme fechado $X\in\Gamma(T\bar M)$ e uma imersão isométrica $\psi:M\to\bar M$ orientada por um campo normal unitário $N\in\Gamma(\psi^*T\bar M)$, temos*

$$\int_M H_F\langle X,N\rangle+F\varphi=0, \tag{6.3}$$

onde H_F denota a curvatura média anistrópica de ψ.

Agora, derivamos a segunda fórmula de Minkowski. Para tanto, definimos

$$T_1=nH_FI-A_F, \tag{6.4}$$

a parte sem traço do tensor de Weingarten anisotrópico A_F. Por definição, temos

$$(T_1)^i_j=(A_F)^k_k\delta^i_j-(A_F)^i_j,$$

expressão a partir da qual calculamos

$$\begin{aligned}(T_1)^i_{j;i} &= (A_F)^k_{k;i}\delta^i_j - (A_F)^i_{j;i}\\ &= (A_F)^i_{i;j} - (A_F)^i_{j;i}.\end{aligned}$$

Em termos do referencial ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ definido acima, escrevemos

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_M T_1 \cdot Y &= \sum_i \langle \nabla_{e_i} T_1 \cdot e_i, Y\rangle = \sum_i \langle \nabla_{e_i} T_1 e_i, Y\rangle - \sum_i \langle T_1 \nabla_{e_i} e_i, Y\rangle\\ &= \sum_i \langle \nabla_{e_i} nH_F e_i - \nabla_{e_i} A_F e_i, Y\rangle - \sum_i \langle nH_F \nabla_{e_i} e_i - A_F \nabla_{e_i} e_i, Y\rangle\\ &= n\langle \nabla H_F, Y\rangle - \sum_i \langle (\nabla_{e_i} A_F) e_i, Y\rangle.\end{aligned}$$

Logo, utilizando a equação de Codazzi anisotrópica, temos

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_M T_1 \cdot Y &= n\langle \nabla H_F, Y\rangle - \sum_i \langle (\nabla_{e_i} A_F) Y, e_i\rangle\\ &= n\langle \nabla H_F, Y\rangle - \sum_i \langle (\nabla_Y A_F) e_i, e_i\rangle + \sum_i \langle \bar{R}(e_i, Y)\xi, e_i\rangle\\ &= n\langle \nabla H_F, Y\rangle - \sum_i \langle \nabla_Y A_F e_i, e_i\rangle + \sum_i \langle A_F \nabla_Y e_i, e_i\rangle + \sum_i \langle \bar{R}(e_i, Y)\xi, e_i\rangle\\ &= n\langle \nabla H_F, Y\rangle - n\langle Y, \nabla H_F\rangle + \sum_i \langle A_F e_i, \nabla_Y e_i\rangle + \sum_i \langle A_F \nabla_Y e_i, e_i\rangle\\ &\quad + \sum_i \langle \bar{R}(e_i, Y)\xi, e_i\rangle.\end{aligned}$$

Assim, supondo que $\nabla e_i = 0$ no ponto em que efetuamos os cálculos, temos

$$\mathrm{div}_M T_1 \cdot Y = \sum_i \langle \bar{R}(e_i, Y)\xi, e_i\rangle. \tag{6.5}$$

Deste modo, concluímos que

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_M T_1 Y &= \sum_i \langle \nabla_{e_i} T_1 Y, e_i\rangle = \sum_i \langle (\nabla_{e_i} T_1) Y, e_i\rangle + \sum_i \langle T_1 \nabla_{e_i} Y, e_i\rangle\\ &= \mathrm{div}_M T_1 \cdot Y + nH_F\, \mathrm{div}_M Y - \sum_i \langle \nabla_{e_i} Y, A_F e_i\rangle.\end{aligned}$$

Entretanto

$$\sum_i \langle \nabla_{e_i} Y, A_F e_i\rangle = \sum_{i,j} (A_F)^j_i \langle \nabla_{e_i} Y, e_j\rangle.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}\langle\nabla_{e_i}Y, e_j\rangle = -\langle X, Ae_i\rangle\langle\xi, e_j\rangle + \langle X, N\rangle\langle\nabla_{e_i}\xi^T, e_j\rangle + \langle\xi, Ae_i\rangle\langle X, e_j\rangle \\ -F\langle\varphi\, e_i + \langle X, N\rangle Ae_i, e_j\rangle,\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}\sum_i\langle\nabla_{e_i}Y, A_Fe_i\rangle &= -\sum_{i,j}\langle X, Ae_i\rangle\langle\xi, (A_F)_i^j e_j\rangle + \sum_{i,j}\langle X, N\rangle\langle\nabla_{e_i}\xi^T, (A_F)_i^j e_j\rangle \\ &\quad + \sum_{i,j}\langle\xi, Ae_i\rangle\langle X, (A_F)_i^j e_j\rangle - F\sum_{i,j}\langle\varphi\, e_i + \langle X, N\rangle Ae_i, (A_F)_i^j e_j\rangle \\ &= -\sum_i\langle X, Ae_i\rangle\langle\xi, A_Fe_i\rangle + \sum_i\langle X, N\rangle\langle\nabla_{e_i}\xi^T, A_Fe_i\rangle \\ &\quad + \sum_i\langle\xi, Ae_i\rangle\langle X, A_Fe_i\rangle - F\sum_i\langle\varphi\, e_i + \langle X, N\rangle Ae_i, A_Fe_i\rangle\end{aligned}$$

e, sendo assim, deduzimos que

$$\begin{aligned}\sum_i\langle\nabla_{e_i}Y, A_Fe_i\rangle &= -\sum_i\langle AX^T, e_i\rangle\langle A_F\xi^T, e_i\rangle + \sum_i\langle X, N\rangle\langle\bar\nabla_{e_i}\xi - \langle\xi, N\rangle\bar\nabla_{e_i}N, A_Fe_i\rangle \\ &\quad + \sum_i\langle A\xi^T, e_i\rangle\langle A_FX^T, e_i\rangle - n\varphi FH_F - F\langle X, N\rangle\mathrm{tr}\,(AA_F).\end{aligned}$$

A simetria dos tensores A e A_F assegura, portanto, que

$$\sum_i\langle\nabla_{e_i}Y, A_Fe_i\rangle = -\langle X, N\rangle\mathrm{tr}\, A_F^2 + \langle X, N\rangle\langle\xi, N\rangle\mathrm{tr}\,(AA_F) - n\varphi FH_F - F\langle X, N\rangle\mathrm{tr}\,(AA_F).$$

Visto que $F = \langle\xi, N\rangle$, temos

$$\sum_i\langle\nabla_{e_i}Y, A_Fe_i\rangle = -\langle X, N\rangle\mathrm{tr}\, A_F^2 - n\varphi FH_F,$$

donde, por fim, reunindo (6.2) e (6.5), concluímos que

$$\mathrm{div}_M T_1 Y = (\mathrm{tr} A_F^2 - n^2H_F^2)\langle X, N\rangle + n(1-n)FH_F\varphi + \sum_{i=1}^n\langle\bar R(e_i, Y)\xi, e_i\rangle. \qquad (6.6)$$

Entretanto,

$$\sum_{i=1}^n\langle\bar R(e_i, Y)\xi, e_i\rangle = \langle X, N\rangle\sum_{i=1}^n\langle\bar R(e_i, \xi)\xi, e_i\rangle - F\sum_{i=1}^n\langle\bar R(e_i, X)\xi, e_i\rangle,$$

o que resulta em

$$\sum_{i=1}^{n}\langle \bar{R}(e_i,Y)\xi,e_i\rangle = \langle X,N\rangle(\mathrm{Ric}(\xi,\xi)-\langle \bar{R}(N,\xi)\xi,N\rangle)$$
$$-F(\mathrm{Ric}(X,\xi)-\langle \bar{R}(N,X)\xi,N\rangle) \tag{6.7}$$

No caso particular em que o ambiente é uma forma espacial de curvatura seccional constante κ, temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\langle \bar{R}(e_i,Y)\xi,e_i\rangle &= \kappa\sum_{i=1}^{n}(\langle e_i,e_i\rangle\langle Y,\xi\rangle-\langle \xi,e_i\rangle\langle Y,e_i\rangle)\\ &= (n-1)\kappa\langle Y,\xi\rangle.\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}\langle Y,\xi\rangle &= \langle X,N\rangle\langle \xi-\langle \xi,N\rangle N,\xi\rangle - F\langle X-\langle X,N\rangle N,\xi\rangle\\ &= \langle X,N\rangle|\xi|^2-F\langle X,\xi\rangle\\ &= \langle\langle X,N\rangle\xi-FX,\xi\rangle,\end{aligned}$$

segue que

$$\sum_{i=1}^{n}\langle \bar{R}(e_i,Y)\xi,e_i\rangle = (n-1)\kappa(\langle X,N\rangle\langle\xi,\xi\rangle-\langle\xi,N\rangle\langle X,\xi\rangle) = (n-1)\langle \bar{R}(X,\xi)\xi,N\rangle$$

Finalmente, se denotamos os autovalores (curvaturas principais anisotrópicas) de A_F por k_i^F, calculamos

$$\mathrm{tr}A_F^2-n^2H_F^2=\sum_{i=1}^{n}(k_i^F)^2-\Big(\sum_{i=1}^{n}k_i^F\Big)^2=-2\sum_{i<j}k_i^Fk_j^F \doteq -n(n-1)S_F, \tag{6.8}$$

onde S_F denota a curvatura escalar extrínseca anisotrópica. Observamos, a partir desta notação, que

$$H_F^2-S_F=H_F^2+\frac{1}{n(n-1)}(\mathrm{tr}A_F^2-n^2H_F^2)=\frac{1}{n(n-1)}(\mathrm{tr}A_F^2-nH_F^2). \tag{6.9}$$

Além disso, a desigualdade de Cauchy-Schwarz implica que

$$nH_F^2\leq \mathrm{tr}A_F^2,$$

a igualdade ocorrendo apenas em pontos em que a imersão é A_F-umbílica, isto é, em pontos em que $k_1^F=\ldots=k_n^F$.

Nestes termos, abeviamos os cálculos acima no seguinte

Teorema 6.2 *Dados um campo de Killing conforme fechado $X \in \Gamma(T\bar{M})$ e uma imersão isométrica $\psi : M \to \bar{M}$ orientada por um campo normal unitário $N \in \Gamma(\psi^* T\bar{M})$, temos*

$$\int_M n(n-1)(S_F\langle X, N\rangle + FH_F\varphi) + F(\mathrm{Ric}(X,\xi) - \langle \bar{R}(N,X)\xi, N\rangle) \\ -\langle X, N\rangle(\mathrm{Ric}(\xi,\xi) - \langle \bar{R}(N,\xi)\xi, N\rangle) = 0, \tag{6.10}$$

onde H_F e S_F denotam, respectivamente a curvatura média e a curvatura escalar extrínseca anisotrópicas de ψ. No caso particular em que $\bar{M}$ é uma forma espacial $\mathbb{M}^{n+1}(\kappa)$ de curvatura seccional constante κ, a fórmula reduz-se a

$$\int_M n(S_F\langle X, N\rangle + FH_F\varphi) - \langle \bar{R}(X,\xi)\xi, N\rangle = 0. \tag{6.11}$$

Suponhamos, daqui por diante, que a lagrangiana F, além de horizontalmente constante, é preservada pelo fluxo do campo conforme X, isto é, que $\langle X, \xi\rangle = 0$. Neste caso, em um ambiente de curvatura seccional constante $\mathbb{M}^{n+1}(\kappa)$, temos

$$\langle \bar{R}(X,\xi)\xi, N\rangle = \kappa\langle X, N\rangle|\xi|^2 \tag{6.12}$$

e, neste caso, a segunda fórmula de Minkowski escreve-se como

$$\int_M n(S_F\langle X, N\rangle + FH_F\varphi) - \kappa\langle X, N\rangle|\xi|^2 = 0. \tag{6.13}$$

Estamos, com isto, aptos a demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 6.3 *Suponhamos que F é horizontalmente constante e que satisfaz $\langle X, \xi\rangle = 0$ ao longo da imersão isométrica $\psi : M \to \mathbb{M}(\kappa)$, $\kappa \geq 0$. Supomos que $\langle X, N\rangle$ não muda de sinal. Suponhamos, ainda, que a curvatura média anisotrópica H_F de ψ é constante. Então, a hipersuperfície $\psi(M)$ é A_F-umbílica.*

Prova. Restringimo-nos apenas ao caso $\kappa > 0$. Multiplicando (6.3) por nH_F e subtraindo (6.13) do resultado, obtemos

$$\int_M n(H_F^2 - S_F)\langle X, N\rangle + \kappa\langle X, N\rangle|\xi|^2 = 0. \tag{6.14}$$

Com isto, demonstramos que $\langle X, N\rangle < 0$ em $\psi(M)$. De fato, caso contrário, teríamos

$$0 = \int_M n(H_F^2 - S_F)\langle X, N\rangle + \kappa\langle X, N\rangle|\xi|^2 \geq \kappa\int_M \langle X, N\rangle|\xi|^2\, dM \geq 0,$$

o que implicaria $\xi = 0$. Portanto, a função $\langle X, N\rangle$ é negativa e, dado que $\langle X, N\rangle < 0$, decorre de (6.14) que

$$H_F^2 = S_F$$

e, portanto, que $\psi(M)$ é A_F-umbílica. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Andrews, B.,

[2] Barbosa, J. L.; do Carmo, M., *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature.* Math. Z. **185** (1984) 3, 339–353.

[3] Barbosa, J. L.; do Carmo, M.; Eschenburg, J., *Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds.* Math. Z. **197** (1988), 123–138.

[4] Chern, S.-S., *On Finsler geometry,* C. R. Acad. Sci. Paris **314** (1992), 757–761.

[5] Clarenz, U., *The Wulff shape minimizes an anisotropic Willmore functional.* Interfaces Free Bound. **6** (2004) 3, 351–359.

[6] Clarenz, U., *Enclosure theorems for extremals of elliptic parametric functionals.* Calc. Var., **15** (3) (2002), 313–324.

[7] Clarenz, U.; von der Mosel, H., *On surfaces of prescibed F-mean curvature.* Pacific J. of Math. **213** 1 (2004), 15–36.

[8] Clarenz, U.; von der Mosel, H., *Compactness theorems and isoperimetric inequality for critical points of elliptic parametric functionals.* Calc. Var. **12** (2001), 85–107.

[9] Clarenz, U.; von der Mosel, H., *Isoperimetric inequalities for a parametric variational problems.* Ann. de l'IHP – Analyse Non Linéaire **19** (2002), 617–629.

[10] Dombrowsky, P., *On the geometry of the tangent bundle.* J. Reine Angew. Math. **210** (1962), 73–88.

[11] Hildebrandt, S.; von der Mosel, H., *On two-dimensional parametric variational problems.*Calc. Var. **9** (1999), 249–267.

[12] Hsiang, W-T; Hsiang, W-Y. *On the uniqueness of isoperimetric solutions and imbedded soap bubbles in non-compact symmetric spaces.* Invent. Math. **85** (1989), 39–58.

[13] Koiso, M.; Palmer, B., *Geometry and stability of surfaces with constant anisotropic mean curvature.* Indiana Univ. Math. J., **54** (2005) 6, 1817–1852.

[14] Li, Haizhong; He, Yijun, *Anisotropic version of a Theorem of H. Hopf.* Ann. Global Anal. Geom. **35** (2009), 243–247,

[15] Li, Haizhong; He, Yijun, *Stability of hypersurfaces with constant r-th anisotropic mean curvature,* preprint, ArXiv: math.DG/0801.3561 , a aparecer em in Illinois Journal of Math., 2009

[16] Li, Haizhong; He, Yujin; Ma, H.; Ge, J. Q., *Compact embedded hypersurfaces with constant higher order anisotropic mean curvature.* Indiana Univ. Math. J., **58** (2009), 853–868.

[17] Li, Haizhong; He, Yujin, *Integral formula of Minkowski type and new characterization of the Wulff shape.* Acta Math Sinica **24** (2008), 697–704.

[18] Palmer, B., *Stability of Wulff shape.* Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 3661–3667.

[19] Pedrosa, Renato; Ritoré, Manuel. *Isoperimetric Domains in the Riemannian Product of a Circle with a Simply Connected Space Form and Applications to Free Boundary Problems.* Ind. Univ. Math J.,Vol. 48, n.4 (1999).

[20] R. Reilly. *The relative differential geometry of nonparametric hypersurfaces.* Duke Math. J., 43 (1976), 705-721.

[21] Petersen, P., Riemannian geometry. Springer-Verlag, 2005.

[22] Sakai, T., Riemannian geometry. Translations of AMS, 2002.

[23] Sauvigny, F., Partial differential equations. Springer-Verlag, 2000.

[24] Zhongmin Shen. *On Finsler geometry of submanifolds.* Math. Ann. 311, 549-576 (1998).

[25] Taylor, J., *Crystalline variational problems,* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **84** (1978), 568–588.

[26] Xin, Y. L., Geometry of harmonic maps. Birkhäuser, 1996.

[27] B. Y. Wu; Y. L. Xin. *Comparison theorems in Finsler geometry and their applications.* Math. Ann. (2007) 337, 177-196.

[28] Brian White. *The Space of m-dimensional Surfaces That Are Stationary for a Parametric Elliptic Functional.* Indiana Univ. Math. J. 36 (1987), 567-602.

[29] Winklmann, S., *Existence and uniqueness of F-minimal surfaces.* Annals of Global Analysis and Geometry **24**, 269-277 (2003).

[30] Winklmann, S., *Isoperimetric inequalities involving generalized mean curvature.* Analysis **22**, 393-403 (2002).

[31] Winklmann, S., *Integral curvature estimates for F-stable hypersurfaces.* Calc. Var. **23**, 391-414 (2005).

[32] Winklmann, S., *Pointwise curvature estimates for F-stable hypersurfaces.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **22**, 543-555 (2005).

[33] Winklmann, S., *Estimates for stable hypersurfaces of prescribed F-mean curvature.* manuscripta mathematica **118**, 485-499 (2005).

[34] Winklmann, S., *A note on the stability of the Wulff shape.* Arch. Math. **87**, 272-279 (2006).

[35] Winklmann, S., *A Bernstein result for entire F-minimal graphs.* Analysis **27**, 375-386 (2007).

[36] von der Mosel, H.; Winklmann, S., *On weakly harmonic maps from Finsler to Riemannian manifolds.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **26**, 39-57 (2009).