UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Henrique Fernandes de Lima

HIPERSUPERFÍCIES TIPO-ESPAÇO COM CURVATURA DE ORDEM SUPERIOR CONSTANTE

Fortaleza
2007

Henrique Fernandes de Lima

HIPERSUPERFÍCIES TIPO-ESPAÇO COM CURVATURA DE ORDEM SUPERIOR CONSTANTE

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Antonio Gervásio Colares.

Fortaleza
2007

Lima, Henrique Fernandes de

L698h Hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura de ordem superior constante.

Henrique Fernandes de Lima. – Fortaleza:2006.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Gervásio Colares.

CDD 516.36

Dedico este trabalho a minha esposa Márcia, ao meu filho Nícolas, e aos meus pais Alexandre e Ana Maria.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, antes de tudo, a Deus. Agradeço também a todas as pessoas que direta ou indiretamente me ajudaram nesta caminhada. Em particular,

Aos meus pais, por toda assistência que têm dado a minha família;

A minha esposa Márcia e ao meu filho Nícolas, por todo sacrifício que têm passado em prol da concretização desse meu objetivo;

Ao prof. Antonio Gervásio Colares, por todo apoio, incentivo e orientação, imprescindíveis para a realização deste trabalho;

Ao grande amigo prof. Antônio Caminha, cuja amizade foi um apoio crucial na busca deste meu objetivo. Destacando-se o fato de que o quinto capítulo desta Tese corresponde ao nosso primeiro trabalho em parceria;

Ao prof. L. J. Alías da Universidade de Murcia (Espanha), por ter proposto meu problema inicial de Tese, tendo dado sugestões as quais utilizei para obter os resultados apresentados no terceiro capítulo deste trabalho;

A todos os amigos da Pós-graduação em Matemática da UFC, alunos do Doutorado e professores, pela convivência harmoniosa e pelo incentivo constante durante todo esse tempo;

A Andrea Dantas, secretária da Pós-graduação em Matemática da UFC. Quero aproveitar e destacar toda sua competência e prontidão na assistência a todos os alunos da Pós-graduação;

Finalmente, agradeço também a todos os amigos do Departamento de Matemática e Estatística da UFCG – do qual tenho a honra de fazer parte – por todo apoio e incentivo para que eu concluísse o quanto antes o Doutorado; e, em particular, ao grande amigo prof. Arimatéia Fernandes, por toda disposição em ajudar-me no que fosse preciso.

“Mas a coisa não é assim tão simples e nítida” – observa o Outro – “eu sei, eu sei” – respondo em pensamentos – “mas vamos adiante, companheiro. É pelos sendeiros do erro e da dúvida que havemos de chegar um dia ao reino da verdade.”
O Fantasma foca em mim os seus olhos secretamente céticos e murmura: “Será que esse reino existe mesmo fora da mitologia?” Ambos encolhemos os ombros.

Érico Verissimo,
Solo de Clarineta: Memórias I.

RESUMO

Nesta Tese, nossos objetos de estudo são as hipersuperfícies tipo-espaço imersas num espaço-tempo com alguma curvatura de ordem superior constante. Em relação a estas hipersuperfícies, abordamos questões como existência, unicidade e estimativa de quantidades geométricas associadas as mesmas. Mais precisamente, desenvolvemos fórmulas tipo-Minkowski para hipersuperfícies tipo-espaço compactas com bordo imersas no espaço de De Sitter e tendo alguma curvatura de ordem superior constante. Em seguida, aplicamos estas fórmulas para estabelecer uma relação entre a curvatura média e a geometria do bordo. Obtemos, também, uma estimativa *sharp* para a função altura de hipersuperfícies tipo-espaço compactas imersas no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$ com alguma curvatura de ordem superior constante não-nula. Como aplicação desta estimativa, tratamos sobre a natureza de um *fim* de uma hipersuperfície tipo-espaço completa de $\mathbb{L}^{n+1}$. Finalmente, estudamos a existência e unicidade de gráficos verticais completos com curvatura média constante tanto no *Steady State space* $\mathcal{H}^{n+1}$ como no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$. Como conseqüência deste estudo, obtemos resultados tipo-Bernstein em $\mathcal{H}^3$ e $\mathbb{H}^3$.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos anos, o estudo das hipersuperfícies tipo-espaço imersas numa variedade de Lorentz (*espaço-tempo*) tem despertado substancial interesse tanto no aspecto físico quanto no matemático. Do ponto de vista físico, esse interesse é justificado pelo papel que estas hipersuperfícies desempenham no tratamento de diversos problemas em relatividade geral (veja, por exemplo, [24] e [38]). Já do ponto de vista matemático, o estudo de tais hipersuperfícies é motivado pelo fato de que estas exibem interessantes propriedades tipo-Bernstein. Por exemplo, E. Calabi em [14], para $n \leq 4$, e S.Y. Cheng e S.T. Yau em [18], para n arbitrário, mostraram que as únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$ com curvatura média identicamente nula são os hiperplanos tipo-espaço.

Mais recentemente, R. Aiyama em [1] e Y.L. Xin em [43] simultaneamente e independentemente caracterizaram os hiperplanos tipo-espaço como as únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas em $\mathbb{L}^{n+1}$ tendo curvatura média constante e cuja imagem pela aplicação normal de Gauss está contida numa bola geodésica do espaço hiperbólico n-dimensional $\mathbb{H}^n$ (veja também [39] para uma versão anterior e mais fraca deste resultado obtida por B. Palmer). No caso compacto, L.J. Alías e J.M. Malacarne em [7] mostraram que as únicas hipersuperfícies compactas tendo alguma curvatura de ordem superior constante e bordo esférico são as bolas hiperplanares com curvatura de ordem superior zero, e as calotas hiperbólicas tendo curvatura de ordem superior não-nula (veja também [8] para o caso da curvatura média constante e [9] para o caso da curvatura escalar constante).

Em relação ao espaço de De Sitter $\mathbb{S}^{n+1}_1$, A.J. Goddard em [22] conjecturou que toda hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média constante H imersa em $\mathbb{S}_1^{n+1}$ deveria ser totalmente umbílica. Embora tenha-se mostrado que esta conjectura é falsa em sua versão original (cf. [13]), ela motivou uma série de trabalhos de diversos autores tentando obter uma resposta positiva para esta supondo alguma hipótese adicional apropriada. Por exemplo, K. Akutagawa em [2] mostrou que a conjectura de Goddard é verdadeira quando $0 \leq H^2 \leq 1$ no caso $n = 2$, e quando $0 \leq H^2 < 4(n-1)/n^2$ no caso $n \geq 3$. Posteriormente, S. Montiel em [33] respondeu afirmativamente a conjectura de Goddard no caso compacto, provando que as únicas hipersuperfícies tipo-espaço fechadas (i.e., compactas sem bordo) imersas em $\mathbb{S}_1^{n+1}$ com curvatura média constante são as esferas redondas n-dimensionais.

Aqui, nossos objetos de estudo são as hipersuperfícies tipo-espaço imersas num espaço-tempo com alguma curvatura de ordem superior constante. Em relação a estas hipersuperfícies, abordamos questões como existência, unicidade e estimativa de quantidades geométricas associadas as mesmas. Passamos, agora, à descrição do conteúdo dos demais capítulos que compõem este trabalho. No capítulo 2, estabelecemos a notação e os pré-requisitos necessários à abordagem dos problemas tratados nos capítulos posteriores.

Já no capítulo 3, desenvolvemos fórmulas tipo-Minkowski relativas a hipersuperfícies tipo-espaço compactas Σ^n com bordo $\partial\Sigma$ e tendo alguma curvatura de ordem superior constante no espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Para tal, essencialmente calculamos a divergência em Σ do campo de vetores $P_r(Y^T)$, onde P_r denota a r-ésima transformação de Newton e Y^T a componente tangente a Σ de um campo de vetores de Killing Y globalmente definido em $\mathbb{S}_1^{n+1}$ (veja Proposição 3.1). Em seguida, abordamos a questão da existência de hipersuperfícies tipo-espaço com alguma curvatura média de ordem superior constante no *Steady State space* $\mathcal{H}^{n+1}$, o qual é definido por

$$\mathcal{H}^{n+1} = \left\{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle p, a\rangle > 0\right\},$$

onde $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ é um vetor tipo-luz.

Observemos que, no contexto da Física, o Steady State space aparece naturalmente como uma solução exata para as equações de Einstein, sendo este espaço um modelo cosmológico para o universo proposto por Bondi, Gold e Hoyle (cf. [24], capítulo 5). Nesse modelo, é suposto que as partículas de matéria se movem ao longo de geodésicas normais a hiperplanos espaciais isométricos ao espaço Euclidiano. Consequentemente, se assume que estas partículas de matéria são produzidas continuamente de modo a se manter constante a densidade de energia em cada ponto destes hiperplanos.

L.J. Alías e J.M. Malacarne obtiveram em [7] uma fórmula do fluxo no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$. Para tal, utilizaram fórmulas tipo-Minkowski correspondentes a $\mathbb{L}^{n+1}$ e exploraram o fato de que seu espaço ambiente é *flat*. Fazendo uso de nossas fórmulas tipo-Minkowski em $\mathbb{S}_1^{n+1}$ e explorando a geometria de nosso espaço ambiente $\mathcal{H}^{n+1} \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$, estabelecemos o resultado principal deste capítulo: uma fórmula do fluxo correspondente ao campo de vetores de Killing

$$Y_{a,b}(x) = \frac{1}{\langle a, b\rangle} \left(\langle b, x\rangle\, a - \langle a, x\rangle\, b\right),$$

o qual determina uma direção ortogonal ao vetor posição x no subespaço gerado pelos vetores a e b. Mais precisamente, provamos o resultado abaixo.

Teorema 1.1. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma imersão tipo-espaço de uma hipersuperfície compacta, cujo bordo é uma subvariedade mergulhada $(n-1)$-dimensional $\Gamma = \psi\,(\partial\Sigma)$ a qual está contida num hiperplano horizontal $L^n(\tau)$, para algum $\tau > 0$. Se a r-ésima curvatura média H_r é constante, para algum r, $1 \leq r \leq n$, então*

$$\oint_{\partial\Sigma} \langle P_{r-1}\nu, Y_{a,b}\rangle\, dS = -r\binom{n}{r} H_r \operatorname{vol}(\Omega),$$

onde $b \in \mathbb{L}^{n+2}$ é qualquer vetor fixo tal que $\langle a, b\rangle \neq 0$ e Ω é o domínio em $L^n(\tau)$ determinado por Γ.

Observemos que, pela Proposição 3.1, para um campo de vetores de Killing arbitrário o seu $(r-1)$-ésimo fluxo depende apriori da geometria da hipersuperfície. O teorema anterior nos diz que, considerando o campo de vetores de Killing $Y_{a,b}$, o $(r-1)$-ésimo fluxo

$$\oint_{\partial\Sigma} \langle P_{r-1}\nu, Y_{a,b}\rangle\, dS$$

não depende da hipersuperfície Σ^n, mas somente do valor de H_r e do bordo $\partial\Sigma$. É exatamente este fato que constitui a relevância da fórmula acima: uma ferramenta analítica para o estudo de hipersuperfícies compactas com alguma curvatura de ordem superior constante em $\mathcal{H}^{n+1}$ e tendo restrições apenas na geometria do bordo.

Como aplicação desta fórmula integral, estabelecemos uma relação entre a curvatura média e o bordo de uma hipersuperfície tipo-espaço Σ^n imersa em $\mathcal{H}^{n+1}$. Para conseguirmos tal relação, um ponto crucial é a escolha apropriada do vetor b da definição do campo de vetores $Y_{a,b}$ de modo a detectarmos a geometria de $\partial\Sigma$.

Teorema 1.2. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço compacta com bordo $\partial\Sigma$ contido num hiperplano horizontal $L^n(\tau)$, para algum $\tau > 0$. Suponhamos que ψ tem curvatura média constante $H > 1$ com relação ao campo normal unitário N apontando para o passado e que $\partial\Sigma = S^{n-1}(b, \rho)$ é uma esfera geodésica com centro b e raio ρ contida num hiperplano horizontal $L^n(\tau)$, para algum $\tau > 0$. Então,*

$$\rho H - \left|1 - \frac{\rho^2}{2}\right| \sqrt{H^2 - 1} \leq 1.$$

Uma conseqüêcia dessa relação, é descrita pelo seguinte corolário.

Corolário 1.3. *Não existe hipersuperfície tipo-espaço compacta imersa no Steady State space $\mathcal{H}^{n+1}$ com curvatura média constante $H > 1$ e bordo esférico contido num hiperplano horizontal com raio $\sqrt{5} - 1 \leq \rho \leq 2$.*

No capítulo 4, explorando a elipticidade do operador diferencial linear de segunda ordem L_r associado a r-ésima transformação de Newton P_r, obtemos uma estimativa para a altura de hipersuperfícies tipo-espaço compactas imersas no espaço de Lorentz-Minkowski, quando estas possuem alguma curvatura de ordem superior constante diferente de zero. Mais precisamente,

Teorema 1.4. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço compacta com bordo contido no hiperplano $\Pi = \{0\} \times \mathbb{R}^n$. Suponhamos que a r-ésima curvatura média $H_r \neq 0$ é constante. Se a imagem hiperbólica de Σ está contida na bola geodésica de centro $e_{n+1} \in \mathbb{H}^n$ e raio $\varrho > 0$, então a altura h de Σ^n é tal que*

$$|h| \leq \frac{\cosh(\varrho) - 1}{|H_r|^{1/r}}.$$

Verificamos ainda que esta estimativa é *sharp*, dado que as calotas hiperbólicas a realizam.

Observemos também que R. López em [30] obteve uma estimativa sharp para o caso de uma superfície tipo-espaço imersa no espaço de Lorentz-Minkowski tridimensional com curvatura média constante não-nula, sendo que esta estimativa envolve o volume da superfície. Notemos que, além de nossa estimativa corresponder ao caso mais geral (tanto pela dimensão do espaço ambiente como pela ordem da curvatura média da hipersuperfície), o fato dela envolver somente a r-ésima curvatura média e o raio da bola geodésica na qual está contida a imagem hiperbólica da hipersuperfície nos permite obter um método para estudarmos a natureza de um *fim* de uma hipersuperfície tipo-espaço completa imersa em $\mathbb{L}^{n+1}$.

Especificamente, dado que uma hipersuperfície completa com um fim pode ser vista como a união de uma hipersuperfície compacta com bordo e uma hipersuperfície difeomorfa a um cilindro, nossa estimativa de altura nos diz o quanto podemos caminhar ao longo do fim de uma tal hipersuperfície. Mais precisamente, obtemos a seguinte versão dos teoremas de R. Aiyama em [1] e Y.L. Xin em [43] para o caso da curvatura média de ordem superior constante.

Teorema 1.5. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa com um fim. Suponhamos que a r-ésima curvatura média $H_r \neq 0$ é constante. Se a imagem hiperbólica de Σ está contida numa bola geodésica de $\mathbb{H}^n$, então seu fim é não-divergente.*

Finalmente, no capítulo 5 estudamos o problema da existência e unicidade de gráficos verticais completos não-compactos com curvatura média constante sobre uma horosfera do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$, bem como sobre um hiperplano horizontal do Steady State space $\mathcal{H}^{n+1}$.

Para fazermos tal estudo, modelamos nossos ambientes como produtos warped semi-Riemannianos; a saber:

$$\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \mathcal{H}^{n+1} = -\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n.$$

Sendo o princípio do máximo generalizado de Omori-Yau a principal ferramenta analítica para a demonstração de nossos resultados.

No Steady State space $\mathcal{H}^{n+1}$, provamos o seguinte resultado (onde θ denota o ângulo hiperbólico entre o campo ∂_t e a aplicação normal de Gauss N da hipersuperfície).

Teorema 1.6. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ um gráfico vertical tipo-espaço completo no Steady State space $(n+1)$-dimensional, com curvatura média constante $H \geq 1$. Se*

$$h \leq -\log(\cosh\theta - 1),$$

então:

(a) $H = 1$ *em* Σ;

(b) *a curvatura escalar* R *de* Σ *é não-negativa e não pode ser limitada globalmente acima do zero (i.e., não existe constante positiva* α *tal que* $R \geq \alpha$*).*

Como conseqüência deste teorema, fazendo uso também do teorema principal de K. Akutagawa em [2] e da classificação das hipersuperfícies tipo-espaço umbílicas do espaço de De Sitter (cf. [33], exemplo 1), obtemos o seguinte resultado tipo-Bernstein em $\mathcal{H}^3$.

Teorema 1.7. *Seja* $\psi : \Sigma^2 \to \mathcal{H}^3$ *um gráfico vertical tipo-espaço completo, com curvatura média constante* $H \geq 1$. *Se*

$$h \leq -\log(\cosh\theta - 1),$$

Então $\psi(\Sigma)$ *é um plano horizontal de* $\mathcal{H}^3$.

Em relação ao espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$, exploramos o fato de que existe uma dualidade natural entre as aplicações normais de Gauss das hipersuperfícies Riemannianas imersas em $\mathcal{H}^{n+1}$ e as imersas em $\mathbb{H}^{n+1}$ quando ambos são modelados como hiperquádricas do espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+2}$ (veja seção 5.4), para provarmos o seguinte resultado.

Teorema 1.8. *Sejam* Σ^n *uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci limitada globalmente por baixo, e* $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ *um gráfico vertical no espaço hiperbólico* $(n+1)$*-dimensional, com curvatura média constante* $0 \leq H \leq 1$. *Se*

$$h \leq -\log(1 + \langle N, \partial_t \rangle),$$

então:

(a) $H = 1$ *em* Σ;

(b) *Se o fecho da imagem da aplicação de Gauss Lorentziana de* ψ *com respeito a* N *está contida no Steady State space* $\mathcal{H}^{n+1}$*, então a curvatura escalar* R *de* Σ *é não-positina e não pode ser limitada globalmente abaixo do zero (isto é, não existe constante* α *tal que* $R \leq -\alpha$*).*

Retornando ao caso tridimensional, para superfícies completas com curvatura Gaussiana não-negativa, obtemos dois outros resultados tipo-Bernstein usando o fato de que estas superfícies são parabólicas no sentido de superfícies de Riemann (cf. [26]). Mais precisamente, se a norma do gradiente da função altura de uma tal superfície satisfaz uma certa limitação, então esta tem que ser um um plano horizontal em $\mathcal{H}^3$.

Teorema 1.9. *Seja $\psi : \Sigma^2 \to \mathcal{H}^3$ uma imersão Riemanniana de uma superfície completa de curvatura Gaussiana $K_\Sigma \geq 0$, com curvatura média constante $H \geq 1$. Se*

$$|\nabla h|^2 \leq H^2 - 1,$$

então $\psi(\Sigma)$ é um plano horizontal de $\mathcal{H}^3$.

No espaço hiperbólico tridimensional, L.J. Alías e M. Dajczer em [6] estudaram superfícies completas imersas propriamente em $\mathbb{H}^3$ e contidas entre duas horosferas, obtendo um resultado tipo-Bernstein para o caso da curvatura média constante $|H| \leq 1$. Em conexão com esse resultado, supondo uma limitação semelhante à utilizada em $\mathcal{H}^3$ para a norma do gradiente da função altura, provamos nosso último resultado tipo-Bernstein.

Teorema 1.10. *Seja $\psi : \Sigma^2 \to \mathbb{H}^3$ um gráfico vertical completo com curvatura Gaussiana $K_\Sigma \geq 0$ e curvatura média constante $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq H \leq 1$. Se*

$$|\nabla h|^2 \leq 1 - H^2,$$

então $\psi(\Sigma)$ é uma horosfera de $\mathbb{H}^3$.

Capítulo 2

Preliminares

Este capítulo objetiva estabelecer as notações que serão utilizadas no demais capítulos deste trabalho, bem como os fatos básicos da teoria de imersões isométricas dos quais faremos uso posteriormente. Para maiores detalhes, indicamos como referências [15], [27] e [38].

2.1 Variedades semi-Riemannianas

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma forma bilinear simétrica $b = \langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ é dita

(a) *Positiva definida*, quando $\langle v, v\rangle > 0$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$.

(b) *Negativa definida*, quando $\langle v, v\rangle < 0$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$.

(c) *Não-degenerada*, quando $\langle v, w\rangle = 0$ para todo $w \in V$ implica em $v = 0$.

Se b é uma forma bilinear simétrica sobre V, um subespaço W de V é dito *não-degenerado* se $b_{|W\times W} : W \times W \to \mathbb{R}$ for não-degenerada.
O *índice* de uma forma bilinear simétrica b sobre V é a maior dimensão de um subespaço W de V tal que $b_{|W\times W} : W \times W \to \mathbb{R}$ seja negativa definida.
Dados uma forma bilinear simétrica b sobre V e um subespaço W de V, definimos o complemento ortogonal $W^\perp$ de W em V por

$$W^\perp = \{v \in V;\ \langle v, w\rangle = 0;\ \forall\, w \in W\}.$$

Enunciaremos, agora, fatos relevantes correspondentes a uma forma bilinear simétrica (cf. [38], lemas 1.19, 1.22 e 1.23).

Lema 2.1. *Seja b uma forma bilinear simétrica sobre o espaço vetorial de dimensão finita V, e W um subespaço de V. Então:*

(a) *b é não-degenerada se e só se sua matriz com respeito a uma (e então a toda) base de V for invertível.*

(b) *Se W é não-degenerado então $dim(W)+dim(W^{\perp}) = dim(V)$ e $(W^{\perp})^{\perp} = W$.*

(c) *W é não-degenerado se e só se $V = W \oplus W^{\perp}$. Em particular, W é não-degenerado se e só se $W^{\perp}$ for não-degenerado.*

No que segue, supomos que $b = \langle \ , \ \rangle$ é uma forma bilinear simétrica e não-degenerada sobre o espaço vetorial real V. Em relação a b, dizemos que $v \in V \setminus \{0\}$ é:

(i) *Tipo-tempo*, quando $\langle v, v\rangle < 0$;

(ii) *Tipo-luz*, quando $\langle v, v\rangle = 0$;

(iii) *Tipo-espaço*, quando $\langle v, v\rangle > 0$.

Analogamente, define-se o que significa para um subespaço não-degenerado W de V ser tipo-tempo, tipo-luz ou tipo-espaço. Se $v \in V \setminus \{0\}$ não for tipo-luz, define-se o *sinal* $\epsilon_v \in \{-1, 1\}$ de v por

$$\epsilon_v = \frac{\langle v, v\rangle}{|\langle v, v\rangle|}.$$

A *norma* de $v \in V$ é $|v| = \sqrt{\epsilon_v \langle v, v\rangle}$, e v é *unitário* se $|v| = 1$. Temos que V admite uma base $\{e_i\}$ ortonormal com respeito a b, isto é, tal que $\langle e_i, e_j\rangle = \epsilon_i \delta_{ij}$, onde ϵ_i denota o sinal de e_i (cf. [38], lema 2.24). Desse modo, a expansão ortonormal de $v \in V$ com respeito a $\{e_i\}$ é dada por

$$v = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \langle v, e_i\rangle e_i.$$

Seja V um espaço vetorial no qual uma forma bilinear simétrica e não-degenerada $b = \langle \ , \ \rangle$ de índice 1 está definida, e $\mathcal{T} = \{u \in V; \langle u, u\rangle < 0\}$. Para cada $u \in \mathcal{T}$, definimos o *cone tipo-tempo (ou cone temporal) de V contendo u* por $C(u) = \{v \in \mathcal{T}; \langle u, v\rangle < 0\}$.

Lema 2.2 ([27], lema 1.2.1)**.** *Sejam $v, w \in \mathcal{T}$. Então:*

(a) *O subespaço $\{v\}^\perp$ é tipo-espaço e $V = span\{v\} \oplus span\{v\}^\perp$. Assim, $\mathcal{T}$ é a união disjunta de $C(v)$ e $C(-v)$.*

(b) *$|\langle v, w\rangle| \geq |v||w|$, com igualdade se e só se v e w forem colineares.*

(c) *Se $v \in C(u)$ para algum $u \in \mathcal{T}$, então $w \in C(u) \Leftrightarrow \langle v, w\rangle < 0$. Portanto, $w \in C(v) \Leftrightarrow v \in C(w) \Leftrightarrow C(v) = C(w)$.*

Definição 2.3. *Um tensor métrico sobre uma variedade diferenciável $\overline{M}$ é um $2-$tensor covariante e simétrico $\overline{g}$ sobre $\overline{M}$, tal que $\overline{g}_p$ é não-degenerada para todo $p \in \overline{M}$. Uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}$ é um par $(\overline{M}, \overline{g})$, onde $\overline{M}$ é uma variedade diferenciável e $\overline{g} = \langle\ ,\ \rangle$ é um tensor métrico de índice constante sobre $\overline{M}$.*

Como o índice de $\overline{g}$ é uma função semi-contínua inferiormente de $\overline{M}$ em $\mathbb{N}$, temos que ele é constante em toda componente conexa de $\overline{M}$. No que segue, por simplificação de notação, escreveremos $\overline{M}$ para o par $(\overline{M}, \overline{g})$, $\langle\ ,\ \rangle$ para o tensor métrico $\overline{g}$ de $\overline{M}$ e ν para seu índice.
Sempre que $p \in \overline{M}$ e $v, w \in T_p\overline{M}$ gerarem um subespaço $2-$dimensional não-degenerado de $T_p\overline{M}$, segue do item (a) do lema 2.1 que $\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2 \neq 0$.

Definição 2.4. *Sejam $\overline{M}$ uma variedade semi-Riemanniana, $p \in \overline{M}$ e $\sigma \subset T_p\overline{M}$ um subespaço $2-$dimensional não-degenerado de $T_p\overline{M}$. O número*

$$K(\sigma) = \frac{\langle \overline{R}(v, w)v, w\rangle}{\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2}$$

independe da base escolhida $\{v, w\}$ de σ, e é denominado curvatura seccional de $\overline{M}$ em p, segundo σ.

Definição 2.5. *A variedade semi-Riemanniana $\overline{M}$ tem* curvatura seccional constante *quando, para cada $p \in \overline{M}$, os números $K(\sigma)$ da definição acima independerem do subespaço $2-$dimensional não-degenerado σ de $T_p\overline{M}$.*

Observação 2.6. *Quando $dim(\overline{M}) \geq 3$ e $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, temos pelo teorema de Schur que o valor de $K(\sigma)$ também independe do ponto $p \in \overline{M}$ escolhido.*

Aproximando subespaços 2−dimensionais degenerados σ de $T_p\overline{M}$ através de subespaços não-degenerados, pode-se mostrar que o fato de $\overline{M}$ ter curvatura seccional constante determina seu tensor curvatura $\overline{R}$. Mais precisamente (cf. [38], corolário 3.43), se $\overline{M}$ tiver curvatura seccional constante c, então

$$\overline{R}(X,Y)Z = c[\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X], \tag{2.1}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\overline{M})$.
Quando o índice ν de $\overline{M}$ é 0, $\overline{M}$ é simplesmente uma variedade Riemanniana; quando $\nu = 1$, $\overline{M}$ é denominada uma variedade de Lorentz (ou *espaço-tempo*).

Definição 2.7. *Seja $\overline{M}$ uma variedade de Lorentz. Uma aplicação τ, que associa a cada $p \in \overline{M}$ um cone tipo-tempo τ_p em $T_p\overline{M}$, é suave quando, para cada $p \in \overline{M}$, existem uma vizinhança aberta U de p e $V \in \mathcal{X}(U)$, tais que $V(q) \in \tau_q$ para todo $q \in U$. Caso uma tal aplicação τ exista, diz-se que $\overline{M}$ é* temporalmente orientável.

Proposição 2.8. *Uma variedade de Lorentz $\overline{M}$ é temporalmente orientável se, e somente se, existir um campo vetorial tipo-tempo $K \in \mathcal{X}(\overline{M})$.*

Demonstração. Se existe um campo K de vetores tipo-tempo sobre $\overline{M}$, defina $\tau(p) = C(K(p))$. Reciprocamente, seja τ uma orientação temporal de $\overline{M}$. Como τ é diferenciável, cada ponto $p \in \overline{M}$ possui uma vizinhança U em $\overline{M}$ na qual está definido um campo de vetores tipo-tempo K_U, com $K_U(q) \in \tau(q)$, para cada $q \in U$. Sejam agora $\{U_\alpha\}$ uma tal cobertura de $\overline{M}$, e $\{f_\alpha\}$ uma partição da unidade estritamente subordinada a $\{U_\alpha\}$. Então o campo

$$K = \sum_\alpha f_\alpha K_{U_\alpha}$$

está bem definido sobre $\overline{M}$; além disso, pelo lema 2.2, temos que K é tipo-tempo. □

De outro modo, a proposição acima diz que não importa se nos referimos à função suave τ ou ao campo vetorial tipo-tempo K. Assim, sempre que $\overline{M}$ for temporalmente orientável, a escolha de uma aplicação τ como acima, ou de um campo vetorial tipo-tempo K a ela correspondente, será denominada uma *orientação temporal* para $\overline{M}$.
Seja τ uma orientação temporal para $\overline{M}$, e $V \in \mathcal{X}(\overline{M})$. Se $V(q) \in \tau_q$ ($-V(q) \in \tau_q$) para todo $q \in \overline{M}$, diz-se que V *aponta para o futuro* (*aponta para o passado*). Pelo item (c) do lema 2.2, sendo K uma orientação temporal para $\overline{M}$, temos que um campo vetorial tipo-tempo V sobre $\overline{M}$ aponta para o futuro (passado) se, e somente se, $\langle V,K\rangle < 0$ ($\langle V,K\rangle > 0$).

2.2 Hipersuperfícies tipo-espaço

Seja $(\overline{M}^{n+1}, \langle , \rangle)$ uma variedade de Lorentz $(n+1)$-dimensional. Uma imersão suave $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ de uma variedade suave, conexa e n-dimensional Σ é dita uma hipersuperfície tipo-espaço se a métrica induzida em Σ pela imersão ψ for Riemanniana. Neste caso, também denotaremos por $\langle , \rangle$ a métrica de Σ.

Proposição 2.9. *Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço de uma variedade de Lorentz temporalmente orientada $\overline{M}^{n+1}$. Então Σ^n admite um campo vetorial normal unitário (suave) $N \in \mathcal{X}(M)^{\perp}$, apontando (por exemplo) para o futuro. Em particular, Σ^n é orientável.*

Demonstração. Fixe um campo $K \in \mathcal{X}(\overline{M})$ que dá a orientação temporal de $\overline{M}$, e observe que, para todo $p \in \Sigma$, o conjunto de todos os vetores tipo-tempo $v \in T_p\overline{M}$ é a união disjunta de $C(K(p))$ e $C(-K(p))$.
Tome, em cada $p \in \Sigma$, um vetor unitário $N(p) \in T_p\Sigma^{\perp}$. Desde que $N(p)$ é tipo-tempo, trocando $N(p)$ por $-N(p)$ se necessário, podemos supor que $N(p) \in C(K(p))$. Deste modo, definimos unicamente um campo vetorial normal unitário N sobre Σ, apontando para o futuro; resta-nos mostrar que tal campo N é suave.
Fixe, então, $p \in \Sigma$ e tome um referencial móvel $\{e_i\}$ sobre uma vizinhança aberta e conexa U de p em Σ. Então $\tilde{N} = K - \sum_{i=1}^{n}\langle K, e_i\rangle e_i$ é suave e normal a Σ em U, com

$$\langle \tilde{N}, \tilde{N}\rangle = \langle \tilde{N}, K\rangle = \langle K, K\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle K, e_i\rangle^2.$$

Mas $\langle K, K\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle K, e_i\rangle^2 - \langle K, N\rangle^2$, de modo que $\langle \tilde{N}, \tilde{N}\rangle = -\langle K, N\rangle^2 < 0$. Portanto, $\tilde{N}(q) \in C(K(q))$ para cada $q \in U$, e $N = \frac{\tilde{N}}{|\tilde{N}|}$, suave. □

Feita a escolha da orientação temporal N da hipersuperfície tipo-espaço $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ imersa num espaço-tempo, também denominaremos N como sendo a *Aplicação normal de Gauss* de Σ.
Com relação a notação correspondente a uma hipersuperfície tipo-espaço $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$, exceto pela métrica objetos sem barra se referirão a Σ, ao passo que objetos com barra se referirão a $\overline{M}$. Em particular, ∇ e $\overline{\nabla}$ denotarão as conexões de Levi-Civitta, e R e $\overline{R}$ os tensores de curvatura de Σ e $\overline{M}$, respectivamente.

Para todos $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$, tem-se $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T$, onde o T sobrescrito denota componente tangente. Assim,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y),$$

onde $\alpha : \mathcal{X}(\Sigma) \times \mathcal{X}(\Sigma) \to \mathcal{X}^{\perp}(\Sigma)$ é a *segunda forma fundamental* da imersão ψ. Desde que α é $\mathcal{C}^{\infty}(\Sigma)-$bilinear e simétrica, definindo

$$\langle AX, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), N \rangle$$

obtemos um campo $A : \mathcal{X}(\Sigma) \to \mathcal{X}(\Sigma)$ de operadores lineares auto-adjuntos $A_p : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$ $(p \in \Sigma)$, denominados *operadores de forma* da imersão ψ. É imediato verificar que

$$AX = -\overline{\nabla}_X N \quad \text{e} \quad \alpha(X, Y) = -\langle AX, Y \rangle N.$$

A proposição a seguir estabelece as equações fundamentais relacionando os tensores curvatura de Σ e $\overline{M}$ e a segunda forma fundamental (para a sua demonstração, veja [27] ou [38]):

Proposição 2.10. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Então, para quaisquer campos de vetores $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\Sigma)$, temos que:*

(a) (*Equação de Gauss*)

$$R(X, Y)Z = (\overline{R}(X, Y)Z)^T + \langle AY, Z \rangle AX - \langle AX, Z \rangle AY. \tag{2.2}$$

(b) (*Equação de Codazzi*)

$$(\overline{R}(X, Y)N)^T = (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X. \tag{2.3}$$

Para ambientes de curvatura seccional constante tem-se o seguinte

Corolário 2.11. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de Σ^n em um ambiente $\overline{M}^{n+1}$ de curvatura seccional constante c, e $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(\Sigma)$. Então:*

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= c[\langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle] \\ &\quad \langle AX, W \rangle \langle AY, Z \rangle - \langle AX, Z \rangle \langle AY, W \rangle. \end{aligned} \tag{2.4}$$

e

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X. \tag{2.5}$$

2.3 Campos conformes num espaço-tempo

Um tipo particular de variedade de Lorentz temporalmente orientável é uma variedade de Lorentz $(\overline{M}^{n+1}, g)$ *conformemente estacionária*, isto é, tal que $\overline{M}$ possui um campo de vetores tipo tempo K *conforme*, no sentido de ser

$$\mathcal{L}_K g = 2\phi g, \tag{2.6}$$

onde $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M})$ é o *fator conforme* de K, e $\mathcal{L}_K$ denota a derivação de Lie. Como $\mathcal{L}_K(V) = [K, V]$ para todo $V \in \mathcal{X}(\overline{M})$, segue do caráter tensorial de $\mathcal{L}_K$ que $K \in \mathcal{X}(\overline{M})$ é conforme se, e somente se,

$$\langle \overline{\nabla}_V K, W\rangle + \langle V, \overline{\nabla}_W K\rangle = 2\phi\langle V, W\rangle, \tag{2.7}$$

para quaisquer $V, W \in \mathcal{X}(\overline{M})$. Em particular, K é um campo de vetores de Killing (em relação a métrica $\overline{g}$) se, e somente se, $\phi \equiv 0$.
Enunciamos a seguir uma proposição devida a Montiel (cf. [36], proposição 1), a qual será utilizada nos demais capítulos deste trabalho.

Proposição 2.12. *Seja* $(\overline{M}^{n+1}, \langle\, ,\, \rangle)$ *uma variedade de Lorentz munida de um campo de vetores tipo-tempo* $K \in \mathcal{X}(\overline{M})$ conforme fechado*, isto é,*

$$\overline{\nabla}_V K = \phi V, \tag{2.8}$$

para todo $V \in \mathcal{X}(\overline{M}^{n+1})$*, onde* $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M})$*.Então,*

(a) A distribuição n-dimensional $\mathcal{D}$ *definida em* $\overline{M}^{n+1}$ *por*

$$p \mapsto \mathcal{D}(p) = \{v \in T_p\overline{M}; \langle K(P), v\rangle = 0\}$$

determina uma folheação $\mathcal{F}(K)$ *tipo-espaço de codimensão* 1*, a qual é orientada por* K*. Além disso, as funções* $\langle K, K\rangle$, $\mathrm{Div}K$ *e* $K(\phi)$ *são constantes em cada folha conexa de* $\mathcal{F}(K)$*;*

(b) O campo unitário tipo-tempo $\nu = \frac{K}{|K|}$ *em* $\overline{M}$ *satisfaz*

(i) $\nabla_\nu \nu = 0$*;*

(ii) $\nabla_u \nu = \frac{\phi}{|K|}u$*, se* $\langle u, \nu\rangle = 0$*;*

e, portanto, o fluxo do campo ν *é um fluxo geodésico normalizado tipo-tempo o qual leva homoteticamente folhas de* $\mathcal{F}(K)$ *em folhas de* $\mathcal{F}(K)$*, sendo cada folha de* $\mathcal{F}(K)$ *totalmente umbílica com curvatura média constante* $H = -\frac{\phi}{|K|}$.

Observação 2.13. *Veja também a proposição* 1 *em [35], correspondente ao caso Riemanniano.*

2.4 Espaço-tempo de Robertson-Walker Generalizado

Sejam M^n uma variedade Riemanniana conexa orientada n-dimensional, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função suave positiva. Dada a variedade produto $\overline{M}^{n+1} = I \times M^n$, denotemos por π_I e π_M as projeções canônicas sobre os fatores I e M, respectivamente.
Munindo $\overline{M}$ com a métrica

$$\langle v, w\rangle_p = -\langle (\pi_I)_* v, (\pi_I)_* w\rangle + (f \circ \pi_I)(p)^2 \langle (\pi_M)_* v, (\pi_M)_* w\rangle,$$

para todo $p \in \overline{M}$ e para quaisquer $v, w \in T_p\overline{M}$, obtemos uma classe importante de variedades de Lorentz a qual é denominada (seguindo a terminologia introduzida em [10]) um *espaço-tempo de Robertson-Walker Generalizado* (GRW); neste caso, denotaremos $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$. Em particular, quando M^n tem curvatura seccional constante, $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ é denominado classicamente um *espaço-tempo de Robertson-Walker* (RW) (para maiores detalhes veja [10], [3], ou ainda [38]).
Observemos que, quando $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ é um espaço-tempo GRW, o campo de vetores

$$K = f\partial_t = (f \circ \pi_I)\partial_t \tag{2.9}$$

é conforme fechado, com fator conforme $\phi = f'$, onde $'$ denota a derivação com respeito a $t \in I$.

2.5 Curvaturas de ordem superior

Dada uma hipersuperfície tipo-espaço $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ imersa num espaço-tempo, denotemos por A o operador de forma de Σ^n em $\overline{M}^{n+1}$ relativo a escolha de uma orientação temporal N de Σ^n. Associado ao operador A existem n invariantes algébricos, os quais são as funções simétricas elementares S_r dos autovalores de A (*curvaturas principais*) $\kappa_1, \cdots, \kappa_n$, dadas por

$$S_r = S_r(\kappa_1, \cdots, \kappa_n) = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_r}, \ 1 \le r \le n. \tag{2.10}$$

A *r-ésima curvatura média* H_r da hipersuperfície tipo-espaço Σ^n é, então, definida por

$$\binom{n}{r} H_r = (-1)^r S_r. \tag{2.11}$$

Em particular, quando $r = 1$,

$$H_1 = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\kappa_i = -\frac{1}{n}\,\mathrm{tr}\,(A) = H$$

é a curvatura média de Σ^n, a qual é a principal curvatura extrínseca da hipersuperfície.
A escolha do sinal $(-1)^r$ em (2.11) é motivado pelo fato de que, definindo-se o vetor curvatura média por $\overrightarrow{H} = HN$, $H(p) > 0$ num ponto $p \in \Sigma$ se, e somente se, $\overrightarrow{H}(p)$ está na mesma orientação temporal de $N(p)$ (isto é, $\langle\overrightarrow{H}, N\rangle_p < 0$).
Quando $r = 2$, H_2 define uma quantidade geométrica a qual está relacionada com a curvatura escalar (intrínseca) R da hipersuperfície. Por exemplo, quando o ambiente espaço-tempo $\overline{M}_c^{n+1}$ tem curvatura seccional constante c, segue da equação de Gauss (2.4) que

$$R = n(n-1)(c - H_2). \tag{2.12}$$

Ademais, no caso tridimensional, denotando por K_Σ a curvatura Gaussiana da superfície tipo-espaço $\psi : \Sigma^2 \to \overline{M}^3$, temos que

$$K_\Sigma = c - H_2. \tag{2.13}$$

Utilizando as desigualdades de Gårding (cf. [20]) e levando-se em conta o sinal em nossa definição (2.11), das idéias de Montiel e Ros correspondentes ao lemma 1 em [34] obtemos o seguinte resultado (como referência, veja também [16], proposição 1).

Lema 2.14. *Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço imersa num espaço-tempo $\overline{M}^{n+1}$. Suponhamos que existe um ponto elíptico em Σ^n. Se H_r é positivo em Σ^n, temos que o mesmo ocorre com H_k, $k = 1, \cdots, r-1$. Ademais,*

$$H_{k-1} \geq H_k^{(k-1)/k} \tag{2.14}$$

e

$$H \geq H_k^{1/k}, \tag{2.15}$$

$k = 1, \cdots, r$. Se $k \geq 2$, nas desigualdades (2.14) e (2.15) ocorre a igualdade somente nos pontos umbílicos (isto é, pontos nos quais todas as curvaturas principais coincidem).

Aqui, um ponto elíptico p_0 numa hipersuperfície tipo-espaço Σ^n significa um ponto $p_0 \in \Sigma^n$ onde todas as curvaturas principais $\kappa_i(p_0)$ são negativas (com respeito a uma escolha apropriada da orientação temporal N de Σ^n).

2.6 As transformações de Newton

Nesta seção, iremos introduzir as *transformações de Newton*

$$P_r : \mathcal{X}(\Sigma) \to \mathcal{X}(\Sigma), \; 0 \le r \le n,$$

associadas ao operador de forma A de uma hipersuperfície tipo-espaço Σ^n imersa num ambiente espaço-tempo $\overline{M}^{n+1}$. De acordo com nossa definição (2.11) das r-ésimas curvaturas, as transformações de Newton são dadas por

$$P_r = \binom{n}{r} H_r I + \binom{n}{r-1} H_{r-1} A + \cdots + \binom{n}{1} H_1 A^{r-1} + A^r, \tag{2.16}$$

onde I denota o operador identidade de $\mathcal{X}(\Sigma)$.
É de facil verificação que, indutivamente, temos

$$P_0 = I \quad e \quad P_r = \binom{n}{r} H_r I + A \circ P_{r-1}. \tag{2.17}$$

Observemos que o polinômio característico de A pode ser expresso em termos das r-ésimas curvaturas H_r como

$$\det(tI - A) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} H_r t^{n-r},$$

onde $H_0 = 1$. Logo, pelo teorema de Cayley-Hamilton, segue que $P_n = 0$.
Ademais, verificamos as seguintes propriedades correspondentes as transformações de Newton (para a demonstração, veja [3], ou ainda [27]).

1. Se $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é um referencial (local) ortonormal tangente a Σ o qual diagonaliza A, isto é, $Ae_i = \kappa_i e_i, i = 1, \cdots, n$, então este também diagonaliza cada P_r, e $P_r e_i = \lambda_{i,r} e_i$ com

$$\lambda_{i,r} = (-1)^r \sum_{i_1 < \cdots < i_r,\ i_j \neq i} \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_r} = \sum_{i_1 < \cdots < i_r,\ i_j \neq i} (-\kappa_{i_1}) \cdots (-\kappa_{i_r}).$$

2. Para cada $1 \leq r \leq n-1$,

$$\operatorname{tr}(P_r) = (r+1)\binom{n}{r+1}H_r, \tag{2.18}$$

$$\operatorname{tr}(A \circ P_r) = -(r+1)\binom{n}{r+1}H_{r+1}, \tag{2.19}$$

e

$$\operatorname{tr}\left(A^2 \circ P_r\right) = \binom{n}{r+1}(nH_1H_{r+1} - (n-r-1)H_{r+2}). \tag{2.20}$$

3. Para cada $V \in \mathcal{X}(\Sigma)$ e cada $1 \leq r \leq n-1$,

$$\operatorname{tr}(P_r \circ \nabla_V A) = -\binom{n}{r+1}\langle \nabla H_{r+1}, V\rangle. \tag{2.21}$$

4. Quando o ambiente espaço-tempo tem curvatura seccional constante, as transformações de Newton P_r são *livres de divergência*, isto é,

$$\operatorname{div}_\Sigma(P_r) = \operatorname{tr}(V \to (\nabla_V P_r)V) = 0.$$

Associado a cada transformação de Newton P_r temos um operador diferencial linear de segunda ordem $L_r : \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \to \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, dado por

$$L_r(f) = \operatorname{tr}(P_r \operatorname{Hess} f). \tag{2.22}$$

Sendo $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, segue das propriedades do hessiano que

$$L_r(fg) = fL_r(g) + gL_r(f) + 2\langle P_r\nabla f, \nabla g\rangle.$$

Observemos, ainda, que

$$\begin{aligned} L_r(f) &= \operatorname{tr}(P_r \operatorname{Hess} f) = \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla_{e_i}\nabla f), e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}\nabla f, P_r(e_i)\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{P_r(e_i)}\nabla f), e_i\rangle = \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f \circ P_r), \end{aligned}$$

onde $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é um referencial (local) ortonormal tangente a Σ^n. Ademais, quando o ambiente espaço-tempo tem curvatura seccional constante, temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(P_r(\nabla f)) &= \sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla_{e_i}P_r)(\nabla f), e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle P_r(\nabla_{e_i}\nabla f), e_i\rangle \\ &= \langle \mathrm{div}P_r, \nabla f\rangle + L_r(f) = L_r(f). \end{aligned}$$

Consequentemente, concluímos que o operador L_r é elíptico se, e somente se, P_r é positivo definido (para uma escolha apropriada da orientação temporal N de Σ^n, se r for ímpar). Notemos que $L_0 = \triangle$ é sempre elíptico. O resultado seguinte nos dá uma condição geométrica a qual garante a elipticidade de L_1.

Lema 2.15 (lema 3.2 de [4])**.** *Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço imersa num ambiente espaço-tempo. Se $H_2 > 0$ em Σ, então L_1 é elíptico ou, equivalentemente, P_1 é positivo definido (para uma escolha apropriada da orientação temporal N de Σ^n).*

Demonstração. Notemos que pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que $H^2 \geq H_2 > 0$, sendo que H não se anula em Σ. Escolhendo-se apropriadamente a orientação temporal N de Σ^n, podemos assumir que $H > 0$. Lembremos que H_2 não depende da escolha da orientação temporal. Como

$$n^2H^2 = \sum_{i=1}^{n}\kappa_i^2 + n(n-1)H_2 > \kappa_j^2,$$

para todo $j = 1, \cdots, n$, então $\lambda_{j,1} = nH + \kappa_j > 0$ para todo j e, consequentemente, P_1 é positivo definido. □

Quando $r \geq 2$, o lema seguinte nos dá condições suficientes para garantirmos a elipticidade do operador L_r (para a demonstração, veja [19], proposição 3.2; veja também [11], proposição 3.2).

Lema 2.16 (lema 3.3 de [4])**.** *Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço imersa num ambiente espaço-tempo. Suponhamos que existe um ponto elíptico em Σ (com respeito a uma escolha apropriada de sua orientação temporal). Se $H_{r+1} > 0$ em Σ, para algum $2 \leq r \leq n-1$, então para todo $1 \leq k \leq r$ o operador L_k é elíptico ou, equivalentemente, P_k é positivo definido (para uma escolha apropriada da orientação temporal N de Σ^n, se k for ímpar).*

Capítulo 3

Hipersuperfícies tipo-espaço no espaço de De Sitter

Neste capítulo, o qual corresponde ao artigo [28], desenvolvemos fórmulas tipo-Minkowski relativas a hipersuperfícies tipo-espaço compactas Σ^n com bordo $\partial\Sigma$ e tendo alguma curvatura de ordem superior constante no espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$ (vide Proposição 3.1). Em seguida, considerando a metade $\mathcal{H}^{n+1}$ do espaço de De Sitter o qual modela o conhecido *Steady State space*, usamos estas formulas para obter o resultado principal deste capítulo: uma fórmula integral correspondente ao fluxo de um campo de Killing específico globalmente definido em $\mathcal{H}^{n+1}$ (cf. Teorema 3.3).
Como aplicação desta fórmula integral, estabelecemos uma relação entre a curvatura média e a geometria do bordo de uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em $\mathcal{H}^{n+1}$ (veja Teorema 3.7).

3.1 O espaço de De Sitter

Denotemos por $\mathbb{L}^{n+2}$ o espaço de Lorentz-Minkowski $(n+2)$-dimensional $(n \geq 2)$, isto é, o espaço vetorial real $\mathbb{R}^{n+2}$ munido da métrica de Lorentz, a qual é definida por

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} v_i w_i - v_{n+2} w_{n+2},$$

para quaisquer $v, w \in \mathbb{R}^{n+2}$. Definimos o espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$ $(n+1)$-dimensional como sendo a seguinte hiperquádrica de $\mathbb{L}^{n+2}$:

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = \left\{ p \in L^{n+2}; \langle p, p \rangle = 1 \right\}.$$

A métrica induzida pela inclusão $\imath : \mathbb{S}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ torna $\mathbb{S}_1^{n+1}$ uma variedade de Lorentz com curvature seccional constante igual a 1. Ademais, para cada $p \in \mathbb{S}_1^{n+1}$, temos que o espaço tangente a $\mathbb{S}_1^{n+1}$ em p é dado por

$$T_p\left(\mathbb{S}_1^{n+1}\right) = \left\{ v \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle v, p \rangle = 0 \right\}.$$

Observemos que $e_{n+2} = (0, \cdots, 0, 1)$ é um campo de vetores tipo-tempo unitário e globalmente definido em $\mathbb{L}^{n+2}$, determinando, assim, uma orientação temporal em $\mathbb{L}^{n+2}$. Logo, dada uma hipersuperfície tipo-espaço no espaço de De Sitter $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{S}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$, podemos escolher um único campo normal unitário de vetores tipo-tempo N ao longo de Σ^n apontando para o passado em $\mathbb{L}^{n+2}$ (i.e., $\langle N, e_{n+2} \rangle > 0$); deste modo, podemos assumir que Σ^n é orientada por N. Neste contexto, denotaremos por $\nabla^\circ, \overline{\nabla}$ e ∇ as conexões de Levi-Civita de $\mathbb{L}^{n+2}, \mathbb{S}_1^{n+1}$ e Σ^n, respectivamente. Então, as fórmulas de Gauss e Weingarten relativas a imersão $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{S}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} \nabla^\circ_V W &= \overline{\nabla}_V W - \langle V, W \rangle \psi \qquad (3.1) \\ &= \nabla_V W - \langle AV, W \rangle N - \langle V, W \rangle \psi \end{aligned}$$

e

$$A(V) = -\nabla^\circ_V N = -\overline{\nabla}_V N, \qquad (3.2)$$

para quaisquer campos de vetores tangentes $V, W \in \mathcal{X}(\Sigma)$, onde A denota o operador de forma de Σ^n em $\mathbb{S}_1^{n+1}$ associado a N.

3.2 Fórmulas tipo-Minkowski em $\mathbb{S}_1^{n+1}$

No que segue, $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{S}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ denotará uma hipersuperfície tipo-espaço compacta com bordo $\partial\Sigma$, imersa no espaço de De Sitter. Consideraremos Σ^n orientada por um campo normal de vetores tipo-tempo unitário N apontando para o passado. Além disso, $\nu \in T_p\Sigma$ denotará o campo conormal exterior unitário ao longo de $\partial\Sigma$, $d\Sigma$ o elemento de volume n-dimensional de

Σ com respeito a métrica induzida e a orientação escolhida, e dS significará o elemento de área $(n-1)$-dimensional de $\partial\Sigma$.
Fixados vetores a and b do espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+2}$ tais que $\langle a, b\rangle \neq 0$, consideremos o seguinte campo de vetores

$$Y_{a,b}(x) = \frac{1}{\langle a, b\rangle} \left(\langle b, x\rangle\, a - \langle a, x\rangle\, b\right). \tag{3.3}$$

Observemos que $\langle Y_{a,b}, x\rangle = 0$, isto é, geometricamente $Y_{a,b}(x)$ determina uma direção ortogonal ao vetor posição x no subespaço gerado por a e b. Ademais, verifica-se facilmente que

$$\left\langle \overline{\nabla}_V Y_{a,b}, W\right\rangle + \left\langle V, \overline{\nabla}_W Y_{a,b}\right\rangle = 0,$$

para quaisquer campos de vetores tangentes $V, W \in \mathcal{X}(\mathbb{S}_1^{n+1})$. Portanto, $Y_{a,b}$ é um campo de vetores de Killing globalmente definido no espaço de De Sitter.

Proposição 3.1 (Fórmulas tipo-Minkowski)**.** *Sejam $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{S}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ uma hipersuperfície tipo-espaço compacta com bordo $\partial\Sigma$ e Y um campo de vetores de Killing em $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Se a r-ésima curvatura média H_r de Σ^n é constante para algum r, $1 \leq r \leq n$, então*

(i) $$\oint_{\partial\Sigma} \langle P_{r-1}\nu, Y\rangle\, dS = r\binom{n}{r} H_r \int_{\Sigma} \langle Y, N\rangle\, d\Sigma;$$

(ii) $$\oint_{\partial\Sigma} \langle P_{r-1}\nu, Y_{a,b}\rangle\, dS = \binom{n-1}{r-1} H_r \frac{1}{\langle a,b\rangle} \oint_{\partial\Sigma} \det\left(\psi, v_1, \cdots, v_{n-1}, a, b\right) dS,$$

onde $\{v_1, \cdots, v_{n-1}\}$ denota um referencial ortonormal tangente ao longo de $\partial\Sigma$.

Demonstração. (i) Denotando por $Y^T \in \mathcal{X}(\Sigma)$ a componente tangente de Y, como $\nabla_V P_r$ é um operador auto-adjunto, para qualquer $V \in \mathcal{X}(\Sigma)$, e sendo P_r livre de divergência, temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\Sigma\left(P_r Y^T\right) &= \langle \operatorname{div}_\Sigma\left(P_r\right), Y\rangle + \sum_{i=1}^n \left\langle \nabla_{E_i} Y^T, P_r E_i\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \left\langle \nabla_{E_i} Y^T, P_r E_i\right\rangle, \end{aligned}$$

onde $\{E_1, \cdots, E_n\}$ é um referencial (local) ortonormal tangente em Σ^n. Agora, sendo Y um campo de vetores de Killing, derivando covariantemente

$$Y = Y^T - \langle Y, N \rangle N$$

e usando as fórmulas de Gauss (3.1) e de Weingarten (3.2), obtemos que

$$\frac{1}{2}\left(\left\langle \nabla_V Y^T, W \right\rangle + \left\langle V, \nabla_W Y^T \right\rangle\right) = -\langle Y, N \rangle \langle AV, W \rangle,$$

para quaisquer campos de vetores tangentes $V, W \in \mathcal{X}(\Sigma)$. Tomenos, então, uma referencial (local) ortonormal tangente $\{E_1, \cdots, E_n\}$ ao longo de Σ, o qual diagonaliza o operador de forma A. Então,

$$\left\langle \nabla_{E_i} Y^T, P_r E_i \right\rangle = \lambda_{i,r} \left\langle \nabla_{E_i} Y^T, E_i \right\rangle = \left\langle E_i, \nabla_{P_r E_i} Y^T \right\rangle.$$

Consequentemente,

$$\left\langle \nabla_{E_i} Y^T, P_r E_i \right\rangle = -\langle Y, N \rangle \langle A P_r E_i, E_i \rangle.$$

Logo, obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\Sigma\left(P_r Y^T\right) &= -\langle Y, N \rangle \operatorname{tr}(A P_r) \\ &= (r+1)\binom{n}{r+1}\langle Y, N \rangle H_{r+1}. \end{aligned}$$

Finalmente, pelo teorema da divergência, concluímos que

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Sigma} \langle P_{r-1}\nu, Y \rangle \, dS &= \int_\Sigma \operatorname{div}_\Sigma\left(P_{r-1} Y^T\right) d\Sigma \\ &= r\binom{n}{r}\int_\Sigma H_r \langle Y, N \rangle \, d\Sigma. \end{aligned}$$

(ii) Definimos em Σ^n a $(n-1)$ forma diferencial

$$\theta_{a,b}(v_1, \cdots, v_{n-1}) = \det(\psi, v_1, \cdots, v_{n-1}, a, b).$$

Usando novamente as fórmulas de Gauss (3.1) e de Weingarten (3.2), obtemos

$$\begin{aligned}(\nabla_Z\theta_{a,b})(E_1,\cdots,E_{n-1}) &= Z(\theta_{a,b}(E_1,\cdots,E_{n-1}))\\ &\quad-\sum_{i=1}^{n-1}\theta_{a,b}(E_1,\cdots,\nabla_Z E_i,\cdots,E_{n-1})\\ &= \det(Z,E_1,\cdots,E_{n-1},a,b)\\ &\quad-\sum_{i=1}^{n-1}\langle AE_i,Z\rangle\det\Big(\psi,\cdots,\underset{i}{N},\cdots,a,b\Big),\end{aligned}$$

para quaisquer campos de vetores tangentes $Z, E_1, \cdots, E_{n-1} \in \mathcal{X}(\Sigma)$. Então,

$$\begin{aligned}d\theta_{a,b}(E_1,\cdots,E_n) &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^i(\nabla_{E_i}\theta_{a,b})\Big(E_1,\cdots,\overset{\wedge}{E_i},\cdots,E_n\Big)\\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\det\Big(E_i,\cdots,\overset{\wedge}{E_i},\cdots,a,b\Big)\\ &\quad-\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1}\langle AE_j,E_i\rangle\det\Big(\psi,\cdots,\overset{\wedge}{E_i},\overset{\wedge}{E_j},\underset{j}{N},\cdots,a,b\Big)\\ &= -n\det(E_1,\cdots,E_n,a,b),\end{aligned}$$

onde $\{E_1, \cdots, E_n\}$ é um referencial (local) ortonormal tangente em Σ^n, o qual diagonaliza o operador de forma A. Logo, usando a fórmula de Gauss (3.1) relativa aos vetores a e b, concluímos que

$$d\theta_{a,b} = n\left(\langle a,N\rangle\langle b,\psi\rangle - \langle a,\psi\rangle\langle b,N\rangle\right)d\Sigma.$$

Portanto, pelo item anterior aplicado ao campo de vetores de Killing $Y_{a,b}$, e usando o teorema de Stokes, segue o resultado. $\square$

Observação 3.2. *L.J. Alías and J.M. Malacarne em [7] obtiveram as fórmulas integrais do item (i) da Proposition 3.1 no espaço de Lorentz-Minkowski. Enquanto que L.J. Alías, A. Brasil Jr. e A.G. Colares em [3] obtiveram tais fórmulas num espaço-tempo conformemente estacionário, considerando a hipersuperfície tipo-espaço Σ^n compact sem bordo. Por outro lado, o item (ii) da Proposição 3.1 reproduz (de uma forma mais geral) no espaço de De Sitter a fórmula do fluxo obtida por L.J. Alías e J.A. Pastor* *em [8], a qual foi utilizada por R. López em [30] para obter uma estimativa sharp para a altura de superfícies tipo-espaço compactas imersas com curvatura média constante no espaço de Lorentz-Minkowski* $\mathbb{L}^3$.

3.3 O Steady State space $\mathcal{H}^{n+1}$

Seja $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ um vetor tipo-luz na metade do cone de luz (com vértice na origem) a qual qual está contida no passado, isto é, $\langle a, a\rangle = 0$ e $\langle a, e_{n+2}\rangle > 0$, onde $e_{n+2} = (0, ..., 0, 1)$. O *Steady State space* $\mathcal{H}^{n+1}$ é definido como sendo a região aberta do espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$ dada por

$$\mathcal{H}^{n+1} = \left\{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle p, a\rangle > 0\right\}. \tag{3.4}$$

Observemos que o bordo de $\mathcal{H}^{n+1}$, enquanto subconjunto de $\mathbb{S}_1^{n+1}$, é a hipersuperfície tipo-luz

$$\left\{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle p, a\rangle = 0\right\},$$

topologicamente equivalente ao produto $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$ (cf. [37]; veja também [24], capítulo 5).

Agora, consideremos em $\mathcal{H}^{n+1}$ o campo de vetores tipo-tempo

$$\mathcal{K}(p) = a - \langle p, a\rangle\, p. \tag{3.5}$$

Verificamos facilmente que

$$\overline{\nabla}_V \mathcal{K}(p) = -\langle p, a\rangle\, V,$$

para qualquer $V \in \mathcal{X}(\mathcal{H}^{n+1})$. Logo, $\mathcal{K}$ é um campo conforme e fechado globalmente definido em $\mathcal{H}^{n+1}$. Assim, pela Proposição 2.12, temos que a distribuição n-dimensional $\mathcal{D}$ definida em $\mathcal{H}^{n+1}$ por

$$p \in \mathcal{H}^{n+1} \longmapsto \mathcal{D}(p) = \left\{v \in T_p\mathcal{H}^{n+1}; \langle \mathcal{K}(p), v\rangle = 0\right\}$$

determina uma folheação tipo-espaço $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ de codimensão 1, a qual é orientada por $\mathcal{K}$. Ademais (cf. [33], exemplo 1), as folhas de $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ são hiperplanos (horizontais)

$$L^n(\tau) = \left\{x \in S_1^{n+1}; \langle x, a\rangle = \tau\right\}, \tag{3.6}$$

$\tau \in (0, \infty)$. Cada um destes hiperplanos sendo uma hipersuperfície tipo-espaço totalmente umbílica de $\mathcal{H}^{n+1}$, isométrica ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, e tendo curvatura média constante igual a 1 com respeito ao campo normal unitário de vetores tipo-tempo

$$N_\tau\,(p) = \frac{1}{\tau}a - p, \ \ p \in L^n(\tau). \tag{3.7}$$

O resultado seguinte reproduz no Steady State space $\mathcal{H}^{n+1}$ uma correspondente fórmula integral obtida por L.J. Alías e J.M. Malacarne no espaço de Lorentz-Minkowski (cf. [7], theorem 3). Como é usual, se Γ é uma subvariedade fechada $(n-1)$-dimensional em $L^n(\tau) \hookrightarrow \mathcal{H}^{n+1}$, uma imersão tipo-espaço $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ é dita uma hipersuperfície *com bordo* Γ se a imersão ψ restrita ao bordo $\partial\Sigma$ é um difeomorfismo sobre Γ. Neste caso, simplesmente fazemos a identificação $\partial\Sigma \equiv \Gamma$.

Teorema 3.3. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma imersão tipo-espaço de uma hipersuperfície compacta, cujo bordo é uma subvariedade mergulhada $(n-1)$-dimensional $\Gamma = \psi\,(\partial\Sigma)$ a qual está contida num hiperplano horizontal $L^n(\tau)$, para algum $\tau > 0$. Se a r-ésima curvatura média H_r é constante, para algum r, $1 \le r \le n$, e sendo $b \in \mathbb{L}^{n+2}$ qualquer vetor fixo tal que $\langle a, b\rangle \neq 0$, então o $(r-1)$-ésimo fluxo*

$$\oint_{\partial\Sigma} \langle P_{r-1}\nu, Y_{a,b}\rangle\, dS$$

não depende da hipersuperfície, mas somente do valor de H_r e do bordo $\partial\Sigma$. Mais precisamente,

$$\oint_{\partial\Sigma} \langle P_{r-1}\nu, Y_{a,b}\rangle\, dS = -r\binom{n}{r} H_r\,\mathrm{vol}(\Omega), \tag{3.8}$$

onde Ω é o domínio em $L^n(\tau)$ determinado por Γ.

Demonstração. Notemos inicialmente que, para uma escolha adequada de orientações em Σ e em Ω, temos que $\Sigma \cup \Omega$ é um n-ciclo de $\mathcal{H}^{n+1}$. Logo, como $\mathcal{H}^{n+1}$ é simplesmente conexo, pelo teorema da dualidade de Alexander, temos que $\Sigma \cup \Omega = \partial D$, onde D é um domínio compacto orientado imerso em $\mathcal{H}^{n+1} \subset \mathbb{S}^{n+1}_1$ (mais precisamente, podemos escolher as orientações de Σ e de Ω de tal modo que ambas apontem para fora em relação ao bordo do domínio D).

Por outro lado, como $Y_{a,b}$ é um campo de vetores de Killing no espaço de De Sitter,

$$\langle \overline{\nabla}_V Y_{a,b}, V\rangle = 0,$$

para todo $V \in \mathcal{X}(\mathbb{S}_1^{n+1})$, donde segue que

$$\operatorname{div}_{S_1^{n+1}}(Y_{a,b}) = 0.$$

Em particular, isto ocorre em $\mathcal{H}^{n+1}$. Então, pelo teorema da divergência, temos que

$$\int_{\partial D} \langle Y_{a,b}, \widetilde{\nu}\rangle \, dS = \int_{D} \operatorname{div}_{S_1^{n+1}}(Y_{a,b}) = 0,$$

onde $\widetilde{\nu} \in T_pD$ denota o vetor conormal unitário exterior ao longo de ∂D e dS é o elemento de área n-dimensional de ∂D (com relação a métrica induzida pela inclusão $\imath : \partial D \hookrightarrow D$). Assim, como N e N_τ estão num mesmo cone temporal, obtemos que

$$\int_{\Sigma} \langle Y_{a,b}, N\rangle \, d\Sigma - \int_{\Omega} \langle Y_{a,b}, N_\tau\rangle \, d\Omega = 0.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} \langle Y_{a,b}, N\rangle \, d\Sigma &= \int_{\Omega} \langle Y_{a,b}, N_\tau\rangle \, d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \frac{1}{\langle a, b\rangle} \left(\langle b, \psi\rangle \langle a, N_\tau\rangle - \langle a, \psi\rangle \langle b, N_\tau\rangle\right) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \frac{1}{\langle a, b\rangle} \left(-\tau \langle b, \psi\rangle - \tau(\frac{1}{\tau}\langle a, b\rangle - \langle b, \psi\rangle)\right) d\Omega \\
&= -\operatorname{vol}(\Omega).
\end{aligned}$$

Portanto, pelo item (i) da Proposição 3.1, temos que

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial\Sigma} \langle P_{r-1}\nu, Y_{a,b}\rangle \, dS &= r\binom{n}{r} H_r \int_{\Sigma} \langle Y_{a,b}, N\rangle \, d\Sigma \\
&= -r\binom{n}{r} H_r \operatorname{vol}(\Omega).
\end{aligned}$$

□

Observemos que no contexto de produtos warped Lorentzianos (cf. capítulo 5), fazendo $\tau = e^t$, podemos considerar

$$\mathcal{H}^{n+1} = -\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n,$$

o qual corresponde ao modelo para o *steady state* do universo proposto por Bondi, Gold e Hoyle (cf. [24], capítulo 5). Neste modelo, como $\mathcal{K}$ aponta para o passado, temos que

$$\mathcal{K}\,(t,p) = -e^t \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(t,p)}. \tag{3.9}$$

Como consequência do Teorema 3.3, considerando o modelo warped $-\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$ para $\mathcal{H}^{n+1}$, obtemos os seguintes resultados.

Corolário 3.4. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço compacta, tendo como bordo uma subvariedade mergulhada $(n-1)$-dimensional $\Gamma = \psi(\partial\Sigma)$ contida num hiperplano horizontal $L^n(\tau)$, para algum $\tau > 0$. Suponhamos que a r-ésima curvatura média H_r é constante para algum r, $1 \le r \le n$, e que $b \in L^n(\tau)$. Então,*

$$\oint_{\partial\Sigma} \langle P_{r-1}\nu, Y_{a,b}\rangle\, dS = -r\binom{n}{r} H_r e^{nt}\,\mathrm{vol}\left(\varphi_t\left(\Omega\right)\right), \tag{3.10}$$

onde $t = \ln(\tau)$, φ é o fluxo do campo $\mathcal{K}$ e Ω é o domínio em $L^n(\tau)$ limitado por Γ.

Corolário 3.5. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço compacta, tendo como bordo uma subvariedade mergulhada $(n-1)$-dimensional $\Gamma = \psi(\partial\Sigma)$ contida num hiperplano horizontal $L^n(\tau)$, para algum $\tau > 0$. Suponhamos que a r-ésima curvatura média H_r é constante para algum r, $1 \le r \le n$, e que $b \in L^n(\tau)$. Então,*

$$\oint_{\partial\Sigma} \langle P_{r-1}\nu, Y_{a,b}\rangle\, dS = \frac{r}{(n+1)}\binom{n}{r} H_r\, \frac{d}{dt}\,\mathrm{vol}(\varphi_t\left(\Omega\right))\bigg|_{t=0}, \tag{3.11}$$

onde $t = \ln(\tau)$, φ é o fluxo do campo $\mathcal{K}$ e Ω é o domínio em $L^n(\tau)$ limitado por Γ.

Demonstração. Para cada $t \in \mathbb{R}$, denotemos por D_t o domínio de φ_t. Então, Ω está contido em D_t e

$$\mathrm{vol}\,(\varphi_t\,(\Omega)) = \int\limits_{\varphi_t(\Omega)} d\Omega_t = \int\limits_{\Omega} \varphi_t^*(d\Omega_t), \tag{3.12}$$

onde $d\Omega_t$ representa o elemento de volume n-dimensional de $\varphi_t\,(\Omega)$ com respeito a métrica induzida.

Como o integrando em (3.12) é uma função suave de t, podemos derivar (3.12) sob o sinal da integral com respeito a t. Logo, obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,\mathrm{vol}(\varphi_t\,(\Omega))\Big|_{t=t_0} &= \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}\,(\varphi_t^*(d\Omega_t))\Big|_{t=t_0} = \int\limits_{\Omega} \varphi_{t_0}^*(\pounds_{\mathcal{K}} d\Omega_{t_0}) \\
&= \int\limits_{\Omega} \varphi_{t_0}^*(\mathrm{div}\,\mathcal{K} d\Omega_{t_0}) = \int\limits_{\varphi_{t_0}(\Omega)} \mathrm{div}\,\mathcal{K} d\Omega_{t_0} \\
&= -\,(n+1)\,e^{t_0}\,\mathrm{vol}\,(\varphi_{t_0}\,(\Omega))\,.
\end{aligned}$$

Consequentemente, tomando $t_0 = 0$, temos que

$$\mathrm{vol}\,(\Omega) = \mathrm{vol}\,(\varphi_0\,(\Omega)) = -\frac{1}{(n+1)}\,\frac{d}{dt}\,\mathrm{vol}(\varphi_t\,(\Omega))\Big|_{t=0},$$

o qual, juntamente com o Teorema 3.3, completa nossa demonstração. □

3.4 Aplicação para o caso do bordo esférico

Para a demonstração de nossa aplicação do Teorema 3.3, necessitaremos do seguinte resultado devido a Montiel (cf. [37], teorema 7).

Proposição 3.6. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço compacta com bordo $\partial\Sigma$ contido num hiperplano horizontal $L^n(\tau)$, para algum $\tau > 0$. Suponhamos que ψ tem curvatura média constante $H > 1$ com relação ao campo normal unitário N apontando para o passado. Então,*

$$H\langle \psi, a\rangle + \langle N, a\rangle \geq 0 \tag{3.13}$$

e, consequentemente,

$$0 > \langle N, a\rangle \geq -H\tau \tag{3.14}$$

ao longo de Σ^n.

3.4 Aplicação para o caso do bordo esférico

Como aplicação do Teorema 3.3, obtemos a seguinte relação entre a curvatura média H de Σ^n e a geometria de seu bordo.

Teorema 3.7. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço compacta com bordo $\partial\Sigma$ contido num hiperplano horizontal $L^n(\tau)$, para algum $\tau > 0$. Suponhamos que ψ tem curvatura média constante $H > 1$ com relação ao campo normal unitário N apontando para o passado e que $\partial\Sigma = S^{n-1}(b, \rho)$ é uma esfera geodésica com centro b e raio ρ contida num hiperplano horizontal $L^n(\tau)$, para algum $\tau > 0$. Então,*

$$\rho H - \left|1 - \frac{\rho^2}{2}\right| \sqrt{H^2 - 1} \leq 1. \tag{3.15}$$

Demonstração. Denotemos por $S^{n-1}(b, \rho) = \{x \in L^n(\tau); d(b, x) = \rho\}$ a esfera geodésica $(n-1)$-dimensional com centro b e raio ρ contida no hiperplano $L^n(\tau) \hookrightarrow \mathcal{H}^{n+1}$. Afirmamos que

$$S^{n-1}(b, \rho) = \left\{x \in L^n(\tau); \langle x - b, x - b\rangle = \rho^2\right\},$$

ou, equivalentemente,

$$S^{n-1}(b, \rho) = \left\{x \in L^n(\tau); \langle x, b\rangle = 1 - \frac{\rho^2}{2}\right\},$$

onde $\langle , \rangle$ denota a métrica induzida pela inclusão $L^n(\tau) \hookrightarrow \mathcal{H}^{n+1}$. De fato, temos que

$$T_b L^n(\tau) = \{v \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle v, b\rangle = \langle v, a\rangle = 0\}.$$

Por outro lado, é de fácil verificação que a geodésica $\gamma_v : \mathbb{R} \to L^n(\tau)$ que parte de b numa direção $v \in T_b L^n(\tau)$, $|v| = 1$, é dada por

$$\gamma_v(s) = -\frac{s^2}{2\tau} a + vs + b,$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Assim, dado $q \in S^{n-1}(b, \rho)$, como $q = \gamma_v(\rho)$ para alguma geodésica γ_v com $\gamma_v(0) = b$, temos que $q = \gamma_v(\rho) = -\frac{\rho^2}{2\tau} a + v\rho + b$. Donde decorre que $\langle q, b\rangle = 1 - \frac{\rho^2}{2}$. Consequentemente,

$$S^{n-1}(b, \rho) \subset \left\{x \in L^n(\tau); \langle x, b\rangle = 1 - \frac{\rho^2}{2}\right\}.$$

Reciprocamente, dado $q \in \left\{x \in L^n(\tau); \langle x, b\rangle = 1 - \dfrac{\rho^2}{2}\right\}$, consideremos

$$v = \frac{1}{\rho}(q + \frac{\rho^2}{2\tau}a - b) \in \mathbb{L}^{n+2}.$$

Também é de fácil verificação que $v \in T_b L^n(\tau)$, $|v| = 1$, e que $\gamma_v(\rho) = q$; logo, $q \in S^{n-1}(b, \rho)$. Concluímos, portanto, a verificação de nossa afirmação.

Agora, pelo Teorema 3.3 segue que

$$\begin{aligned}
nH \operatorname{vol}(B^n(\rho)) &\leq \oint_{\partial\Sigma} |\langle \nu, Y_{a,b}\rangle| \, dS \\
&= \oint_{\partial\Sigma} \left| \frac{1}{\langle a, b\rangle} \left(\langle b, \psi\rangle \langle a, \nu\rangle - \langle a, \psi\rangle \langle b, \nu\rangle\right)\right| dS \\
&= \oint_{\partial\Sigma} \left| \frac{1}{\tau}\left(1 - \frac{\rho^2}{2}\right) \langle a, \nu\rangle - \langle b, \nu\rangle \right| dS \\
&\leq \left(\frac{1}{\tau}\left|1 - \frac{\rho^2}{2}\right| \sup_{\partial\Sigma} |\langle a, \nu\rangle| + 1\right) \operatorname{area}\left(S^{n-1}(\rho)\right) \\
&= \left(\frac{1}{\tau}\left|1 - \frac{\rho^2}{2}\right| \sup_{\partial\Sigma} |\langle a, \nu\rangle| + 1\right) \frac{n \operatorname{vol}(B^n(\rho))}{\rho}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $\langle a, a\rangle = 0$ e $\langle a, v\rangle = 0$ para todo $v \in T_p\left(L^n(\tau)\right)$, temos que

$$\langle a, \nu\rangle^2 = \langle a, N\rangle^2 - \langle a, \psi\rangle^2.$$

Consequentemente,

$$\rho H \leq \frac{1}{\tau}\left|1 - \frac{\rho^2}{2}\right| \sqrt{\sup_{\partial\Sigma} \langle a, N\rangle^2 - \tau^2} + 1.$$

Finalmente, como estamos supondo $H > 1$ com relação ao campo normal unitário N apontando para o passado, podemos usar a estimativa (3.14) para concluirmos que

$$\rho H - \left|1 - \frac{\rho^2}{2}\right| \sqrt{H^2 - 1} \leq 1.$$

□

Pela relação (3.15) entre a curvatura média e a geometria do bordo de uma hipersuperfície tipo-espaço, obtemos os seguintes resultados.

Corolário 3.8. *Não existe hipersuperfície tipo-espaço compacta imersa no Steady State space* $\mathcal{H}^{n+1}$ *com curvatura média constante* $H > 1$ *e bordo esférico contido num hiperplano horizontal com raio* $\sqrt{5} - 1 \leq \rho \leq 2$.

Corolário 3.9. *Seja* $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço compacta com curvatura média constante* H *e cujo bordo* $\partial\Sigma$ *é uma esfera geodésica de raio* $\sqrt{2}$ *contida num hiperplano horizontal. Então,*

$$|H| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3.5 Apêndice

No que segue, apresentamos uma prova alternativa do Teorema 3.3 correspondente ao caso em que o bordo da hipersuperfície tipo-espaço $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ é esférico (isto é, $\partial\Sigma = S^{n-1}(b, \rho) \subset L^n(\tau)$).

Demonstração alternativa para o Teorema 3.3:

Pelo item (ii) da Proposição 3.1, é suficiente mostrarmos que

$$\oint_{\partial\Sigma} \det(\psi, e_1, \cdots, e_{n-1}, a, b) = -n\tau \mathrm{vol}(B^n(\rho)).$$

Ademais, como N_τ aponta para o passado, sendo $\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ um referencial (local) ortonormal tangente e positivamente orientado ao longo do bordo $\partial\Sigma$, temos que o referencial $\{\psi, -N_\tau, \eta, e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ é positivamente orientado e

$$\det(\psi, -N_\tau, \eta, e_1, \cdots, e_{n-1}) = 1.$$

Isto implica que $\det(\psi, e_1, \cdots, e_{n-1}, a, b)$ é dado por

$$\det \begin{pmatrix} \langle\psi, \psi\rangle & \langle e_1, \psi\rangle & \cdots & \langle e_{n-1}, \psi\rangle & \langle a, \psi\rangle & \langle b, \psi\rangle \\ \langle\psi, e_1\rangle & \langle e_1, e_1\rangle & \cdots & \langle e_{n-1}, e_1\rangle & \langle a, e_1\rangle & \langle b, e_1\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle\psi, e_{n-1}\rangle & \langle e_1, e_{n-1}\rangle & \cdots & \langle e_{n-1}, e_{n-1}\rangle & \langle a, e_{n-1}\rangle & \langle b, e_{n-1}\rangle \\ \langle\psi, -N_\tau\rangle & \langle e_1, -N_\tau\rangle & \cdots & \langle e_{n-1}, -N_\tau\rangle & \langle a, -N_\tau\rangle & \langle b, -N_\tau\rangle \\ \langle\psi, \eta\rangle & \langle e_1, \eta\rangle & \cdots & \langle e_{n-1}, \eta\rangle & \langle a, \eta\rangle & \langle b, \eta\rangle \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\det(\psi, e_1, \cdots, e_{n-1}, a, b) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \tau & 1 - \dfrac{\rho^2}{2} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \langle b, e_1 \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \langle b, e_{n-1} \rangle \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tau & -\dfrac{\rho^2}{2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \langle b, \eta \rangle \end{pmatrix},$$

ou ainda,

$$\det(\psi, e_1, \cdots, e_{n-1}, a, b) = \tau \langle b, \eta \rangle .$$

Por outro lado, como a geodésica $\gamma_v : \mathbb{R} \to L^n(\tau)$ que parte de b na direção $v \in T_b(L^n(\tau))$, $|v| = 1$, é dada por $\gamma_v(s) = -\dfrac{s^2}{2\tau} a + vs + b$, temos que

$$\langle b, \eta \rangle = \left\langle b, -\frac{\rho}{\tau} a + v \right\rangle = -\rho.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Sigma} \det(\psi, e_1, \cdots, e_{n-1}, a, b) &= -\tau\rho \oint_{\partial\Sigma} dS \\ &= -\tau\rho \,\mathrm{area}(S^{n-1}(\rho)) \\ &= -n\tau \,\mathrm{vol}(B^n(\rho)). \end{aligned}$$

□

Capítulo 4

Estimativa de altura no espaço de Lorentz-Minkowski

Neste capítulo (correspondente ao artigo [29]) nosso objeto de estudo são as hipersuperfícies tipo-espaço compactas imersas no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$. Especificamente, supondo o bordo contido num hiperplano tipo-espaço, obtemos uma estimativa para a altura de tais hipersuperfícies quando estas possuem alguma curvatura de ordem superior constante diferente de zero (veja Teorema 4.4). Como aplicação de nossa estimativa, obtemos uma versão para o caso da curvatura de ordem superior constante dos teoremas de Aiyama em [1] e Xin em [43] (cf. Teorema 4.9).
Para provar nossos resultados, consideramos o espaço de Lorentz-Minkowski como um espaço-tempo de Robertson-Walker e, então, aplicamos a técnica empregada por Hoffman, de Lira e Rosenberg em [25], onde obtiveram tal estimativa correspondente a gráficos verticais num produto $M^2 \times \mathbb{R}$, sendo M^2 uma superfície Riemanniana (de fato, Rosenberg em [40] já obteve tal tipo de estimativa referente a gráficos em formas espaciais Riemannianas; veja também [19], onde Xu Cheng e Rosenberg trabalharam num produto Riemanniano $M^m \times \mathbb{R}$).
Observemos que as calotas hiperbólicas são exemplos de hipersuperfícies tipo-espaço que realizam nossa estimativa (veja Observação 4.7); logo, nossa estimativa é *sharp*. Nesse sentido, o Teorema 4.4 é uma resposta a conjectura feita por R. López em [30], onde (usando outra técnica) obteve uma outra estimativa sharp para a altura de superfícies tipo-espaço compactas Σ^2 imersas no espaço de Lorentz-Minkowski tridimensional $\mathbb{L}^3$. Finalmente, destacamos o fato de que as calotas hiperbólicas também mostram que se fixarmos um

valor qualquer para a r-ésima curvatura H_r, existem gráficos tipo-espaço imersos no espaço de Lorentz-Minkowski com r-ésima curvatura média constante H_r e com uma altura arbitrária. Este fato não ocorre no contexto Euclidiano.

4.1 Cálculo do L_r das funções altura e tipo-suporte

As seguintes fórmulas, correspondentes ao operador L_r, constituem a ferramenta analítica que utilizaremos para obter nossa estimativa de altura. Estas fórmulas foram obtidas por L.J. Alías e A.G. Colares em [4]. Aqui, apresentamos uma prova mais direta e específica tendo em vista nossos propósitos.

Proposição 4.1. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço imersa num espaço-tempo GRW. Sejam N a aplicação normal de Gauss e $h = \pi_I \circ \psi$ a função altura de Σ. Então, para todo $r = 0, \cdots, n-1$, temos que*

$$\begin{aligned} L_r h &= -(\log f)'(h)((r+1)\binom{n}{r+1}H_r + \langle P_r(\nabla h), \nabla h\rangle) \qquad (4.1)\\ &\quad -\langle N, \partial_t\rangle (r+1)\binom{n}{r+1}H_{r+1}. \end{aligned}$$

Ademais, se $\overline{M}^{n+1}$ é um espaço-tempo RW com fibra Riemanniana M^n flat, então

$$\begin{aligned} L_r\langle N, K\rangle &= \binom{n}{r+1}(\langle \nabla H_{r+1}, K\rangle + (r+1)f'(h)H_{r+1}) \qquad (4.2)\\ &\quad +\langle N, K\rangle \mathrm{tr}(A^2 \circ P_r), \end{aligned}$$

onde $K = f\partial_t$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \nabla h &= \nabla(\pi_{I_{|\Sigma}}) = (\overline{\nabla}\pi_I)^{\top} = -\partial_t^{\top}\\ &= -\partial_t - \langle N, \partial_t\rangle N, \end{aligned}$$

onde $\overline{\nabla}$ denota o gradiente com respeito a métrica do ambiente espaço-tempo e $X^{\top}$ a componente tangente a Σ de um campo de vetores $X \in \mathcal{X}(\overline{M})$.

Fixemos $p \in M$, $v \in T_pM$ e seja A o operador de forma com respeito a aplicação de Gauss N. Escrevamos $v = w - \langle v, \partial_t \rangle \partial_t$, onde $w \in T_p\overline{M}$ é tangente a fibra Riemanniana de $\overline{M}$ a qual passa por p. Pela proposição 7.35 de [38], temos que

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_v \partial_t &= \overline{\nabla}_w \partial_t - \langle v, \partial_t \rangle \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t = \overline{\nabla}_w \partial_t \\ &= (\log f)' w = (\log f)'(v + \langle v, \partial_t \rangle \partial_t). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \nabla_v \nabla h &= \overline{\nabla}_v \nabla h + \langle Av, \nabla h \rangle N \qquad (4.3) \\ &= \overline{\nabla}_v (-\partial_t - \langle N, \partial_t \rangle N) + \langle Av, \nabla h \rangle N \\ &= -(\log f)' w - v(\langle N, \partial_t \rangle) N + \langle N, \partial_t \rangle Av + \langle Av, \nabla h \rangle N \\ &= -(\log f)' w + (\langle Av, \partial_t \rangle - \langle N, \overline{\nabla}_v \partial_t \rangle) N + \langle N, \partial_t \rangle Av \\ &\quad + \langle Av, \nabla h \rangle N \\ &= -(\log f)' w + (\langle Av, \partial_t^\top \rangle - \langle N, (\log f)' w \rangle) N + \langle N, \partial_t \rangle Av \\ &\quad + \langle Av, \nabla h \rangle N \\ &= -(\log f)' w - (\log f)' \langle v, \partial_t \rangle \langle N, \partial_t \rangle N + \langle N, \partial_t \rangle Av \\ &= -(\log f)' \{ v - \langle v, \partial_t \rangle (-\partial_t - \langle N, \partial_t \rangle N) \} + \langle N, \partial_t \rangle Av \\ &= (\log f)'(-v + \langle v, \partial_t^\top \rangle \nabla h) + \langle N, \partial_t \rangle Av \\ &= -(\log f)'(v + \langle v, \nabla h \rangle \nabla h) + \langle N, \partial_t \rangle Av. \end{aligned}$$

Agora, tomando um referencial (local) ortonormal $\{e_i\}$ em $T_p\Sigma$, obtemos

$$\begin{aligned} L_r h &= \mathrm{tr}(P_r \mathrm{Hess}\, h) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \nabla h, P_r e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle -(\log f)'(e_i + \langle e_i, \nabla h \rangle \nabla h) + \langle N, \partial_t \rangle A e_i, P_r e_i \rangle \\ &= -(\log f)' \{ \mathrm{tr}(P_r) + \langle P_r(\nabla h), \nabla h \rangle \} + \langle N, \partial_t \rangle \mathrm{tr}(A \circ P_r). \end{aligned}$$

Portanto, a fórmula (4.1) segue das expressões (2.18) e (2.19).
Suponhamos, agora, que a fibra Riemannian M^n é flat.
Como $\overline{\nabla}_V K = f'(h) V$ para todo $V \in \mathcal{X}(\Sigma)$, verificamos facilmente que

$$\nabla \langle N, K \rangle = -A(K^\top).$$

Então, para qualquer $V \in \mathcal{X}(\Sigma)$,

$$\nabla_V(\nabla\langle N, K\rangle) = -(\nabla_V A)(K^\top) - A(\nabla_V K^\top).$$

Logo, como $\nabla h = -\partial_t^\top$, pela equação de Codazzi (2.5) obtemos que

$$\nabla_V(\nabla\langle N, K\rangle) = -(\nabla_{K^\top} A)(V) - f'(h)A(V) + \langle N, K\rangle A^2(V). \tag{4.4}$$

Por outro lado, usando a propriedade (2.21) das transformações de Newton, temos que

$$\operatorname{tr}(\nabla_V A \circ P_r) = \operatorname{tr}(P_r \circ \nabla_V A) = -\binom{n}{r+1}\langle \nabla H_{r+1}, V\rangle.$$

Portanto, fazendo o produto de (4.4) com $P_r V$ e depois tomando o traço, obtemos a fórmula (4.2). $\square$

4.2 Estimativa de altura em $\mathbb{L}^{n+1}$

Seja $\mathbb{L}^{n+1}$ o espaço de Lorentz-Minkowski $(n+1)$-dimensional, isto é, o espaço vetorial real $\mathbb{R}^{n+1}$, munido com a métrica de Lorentz

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i - v_{n+1}w_{n+1},$$

para quaisquer $v, w \in \mathbb{R}^{n+1}$. Observemos inicialmente que $\mathbb{L}^{n+1}$ pode ser considerado como um espaço-tempo de Robertson-Walker; mais precisamente,

$$\mathbb{L}^{n+1} = -\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \tag{4.5}$$

Considerando o modelo RW de $\mathbb{L}^{n+1}$, no que segue iremos considerar uma hipersuperfície tipo-espaço compacta $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ cujo bordo $\partial\Sigma$ é uma subvariedade fechada $(n-1)$-dimensional mergulhada do hiperplano tipo-espaço $\Pi = \{0\} \times \mathbb{R}^n$ (por simplificação, diremos que o bordo de Σ está contido em Π). Neste contexto, subtendendo as composições relativas a isometria Φ entre os modelos RW e canônico de $\mathbb{L}^{n+1}$ a qual satisfaz

$$(\Phi_*)(\partial_t) = e_{n+1} = (0, \cdots, 0, 1) \quad e \quad \Phi(\{0\} \times \mathbb{R}^n) = \{x \in \mathbb{L}^{n+1}; x_{n+1} = 0\},$$

o campo normal de vetores tipo-tempo unitário $N \in \mathcal{X}^{\perp}(\Sigma)$ também será considerado como uma aplicação

$$N : \Sigma^n \to \mathbb{H}^n, \tag{4.6}$$

onde $\mathbb{H}^n$ denota o espaço hiperbólico n-dimensional, isto é,

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+1}; \langle x, x\rangle = -1,\ x_{n+1} \geq 1\}.$$

A imagem $N(\Sigma)$ será denominada de *imagem hiperbólica* de Σ. Consideraremos, inicialmente, o caso em que Σ tem curvatura média constante.

Teorema 4.2. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço compacta com bordo contido no hiperplano $\Pi = \{0\} \times \mathbb{R}^n$. Suponhamos que a curvatura média $H \neq 0$ é constante. Se a imagem hiperbólica de Σ está contida na bola geodésica de centro $e_{n+1} \in \mathbb{H}^n$ e raio $\varrho > 0$, então a altura h de Σ^n é tal que*

$$|h| \leq \frac{\cosh(\varrho) - 1}{|H|}. \tag{4.7}$$

Demonstração. Inicialmente, escolhemos a orientação N de Σ de tal modo que $H > 0$. Então, temos dois casos a considerar:

(a) Suponhamos N na mesma orientação temporal de ∂_t (i.e., $\langle N, \partial_t\rangle \leq -1$):

Neste caso, pela fórmula (4.1), temos que

$$\triangle h = -nH\langle N, \partial_t\rangle > 0.$$

Logo, pelo princípio do máximo, $h \leq 0$ em Σ. Agora, definimos em Σ a função

$$\varphi = c\,h - \langle N, \partial_t\rangle,$$

onde c é uma constante negativa a ser determinada. Observemos que a hipótese sobre a imagem hiperbólica de Σ equivale analiticamente a

$$1 \leq -\langle N, \partial_t\rangle \leq \cosh(\varrho).$$

Então, temos que $\varphi_{|\partial\Sigma} \leq \cosh(\varrho)$. Além disso, pela proposição 4.1 temos que

$$\triangle\varphi = -\langle N, \partial_t\rangle(ncH + \operatorname{tr}(A^2)).$$

Por outro lado, como (pela desigualdade de Cauchy-Schwarz) $H^2 - H_2 \geq 0$, temos que

$$\operatorname{tr}(A^2) = n^2H^2 - n(n-1)H_2 \geq nH^2.$$

Logo, tomando

$$c = -H,$$

na definição da função φ, temos que $\triangle\varphi \geq 0$ em Σ. Assim, concluímos pelo princípio do máximo que

$$\varphi \leq \cosh(\varrho) \quad \text{em} \quad \Sigma.$$

Portanto,

$$0 \geq h \geq \frac{\cosh(\varrho) - 1}{c} = -\frac{\cosh(\varrho) - 1}{H}.$$

(b) Suponhamos N na mesma orientação temporal de ∂_t (i.e., $\langle N, \partial_t \rangle \geq 1$):

Neste outro caso, temos que $\triangle h < 0$ e, consequentemente, $h \geq 0$ em Σ. Definimos, então, em Σ a função

$$\varphi = c\,h + \langle N, \partial_t \rangle,$$

onde c é uma constante positiva a ser determinada. A partir deste ponto, tomando

$$c = H,$$

continuamos a demonstração de maneira análoga ao item (a) para concluirmos que

$$0 \leq h \leq \frac{\cosh(\varrho) - 1}{H}.$$

□

Para estabelecermos nossa estimativa da função altura correspondente ao caso da curvatura de ordem superior constante, necessitamos do seguinte lema devido a L.J. Alías e J.M. Malacarne (cf. [7], lema 1; veja também [32], lema 9.1).

Lema 4.3 (Existência de um ponto elíptico). *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço compacta com bordo contido num hiperplano (tipo-espaço) $\Pi = a^{\perp}$, onde a denota um vetor tipo-tempo unitário na mesma orientação temporal da aplicação normal de Gauss N de Σ^n. Então, para uma escolha apropriada de N, existe um ponto elíptico $p_0 \in \Sigma^n$ (a menos que a hipersuperfície esteja inteiramente contida no hiperplano Π).*

Finalmente, como a existência de um ponto elíptico implica na elipticidade do operador L_r, seguindo as idéias do teorema anterior obtemos o resultado principal deste capítulo.

Teorema 4.4. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço compacta com bordo contido no hiperplano $\Pi = \{0\} \times \mathbb{R}^n$. Suponhamos que a r-ésima curvatura média $H_r \neq 0$ é constante. Se a imagem hiperbólica de Σ está contida na bola geodésica de centro $e_{n+1} \in \mathbb{H}^n$ e raio $\varrho > 0$, então a altura h de Σ^n é tal que*

$$|h| \leq \frac{\cosh(\varrho) - 1}{|H_r|^{1/r}}. \tag{4.8}$$

Demonstração. Como (após uma escolha apropriada da aplicação normal de Gauss N de Σ, se r for ímpar) o lema 4.3 garante a existência de um ponto elíptico em Σ, podemos supor que $H_r > 0$. Consideremos, por exemplo, que N está na mesma orientação temporal de ∂_t. Pela fórmula (4.1) temos que

$$L_{r-1}h = -r\binom{n}{r}H_r\langle N, \partial_t\rangle > 0.$$

Logo, como estamos nas hipóteses do lema 2.16 (ou lema 2.15 para o caso $r = 2$), garantimos a elipticidade do operador L_{r-1} e, consequentemente, $h \leq 0$ em Σ. Agora, consideremos em Σ a função $\varphi = c\,h - \langle N, \partial_t\rangle$, onde c é uma constante negativa a determinar. Como a hipótese sobre a imagem hiperbólica de Σ significa que

$$1 \leq -\langle N, \partial_t\rangle \leq \cosh(\varrho),$$

temos que $\varphi_{|\partial\Sigma} \leq \cosh(\varrho)$. Além disso, pela proposição 4.1

$$L_{r-1}\varphi = -\langle N, \partial_t\rangle(r\binom{n}{r}\, cH_r + \mathrm{tr}(A^2 \circ P_{r-1})).$$

Por outro lado, pelo lema 2.14, sabemos que

$$H_{r-1} \geq H_r^{(r-1)/r} > 0, \tag{4.9}$$

e também que

$$H \geq H_{r-1}^{1/(r-1)}. \tag{4.10}$$

Ademais, pelas desigualdades de Newton (veja teorema 55 de [23], ou proposição 1 de [16]), temos que $H_r^2 - H_{r-1}H_{r+1} \geq 0$. Logo,

$$H_{r+1} \leq \frac{H_r^2}{H_{r-1}}. \tag{4.11}$$

Então, das desigualdades (4.9), (4.10) e (4.11), obtemos

$$\begin{aligned} H\,H_r - H_{r+1} &\geq \frac{H_r}{H_{r-1}}(H\,H_{r-1} - H_r) \geq \frac{H_r}{H_{r-1}}(H\,H_{r-1} - H_{r-1}^{r/(r-1)}) \\ &= H_r(H - H_{r-1}^{1/(r-1)}) \geq 0. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\mathrm{tr}(A^2 \circ P_{r-1}) = \binom{n}{r}(nH\,H_r - (n-r)H_{r+1}) \geq r\binom{n}{r}H_r^{(r+1)/r}.$$

Assim, tomando

$$c = -H_r^{1/r}$$

na definição da função φ obtemos $L_{r-1}\varphi \geq 0$ em Σ. Logo, como o lema 2.16 (ou lema 2.15, para o caso $r = 2$) garante a elipticidade de L_{r-1}, concluímos pelo princípio do máximo que $\varphi \leq \cosh(\varrho)$ em Σ. Portanto,

$$0 \geq h \geq \frac{\cosh(\varrho) - 1}{c} = -\frac{\cosh(\varrho) - 1}{H_r^{1/r}}.$$

Finalmente, notemos que no caso em que N está na orientação oposta de ∂_t, a demonstração transcorre de maneira análoga, nos levando a concluir que

$$0 \leq h \leq \frac{\cosh(\varrho) - 1}{H_r^{1/r}}.$$

$\square$

Em particular, para o caso tridimensional obtemos a seguinte estimativa da função altura em termos da curvatura Gaussiana de um superfície tipo-espaço compacta Σ^2.

Corolário 4.5. *Seja $\psi : \Sigma^2 \to \mathbb{L}^3$ uma superfície tipo-espaço compacta com bordo contido no hiperplano $\Pi = \{0\} \times \mathbb{R}^2$. Suponhamos que a curvatura Gaussiana $K_\Sigma \neq 0$ é constante. Se a imagem hiperbólica de Σ^2 está contida na bola geodésica de centro $e_3 \in \mathbb{H}^3$ e raio $\varrho > 0$, então a altura h de Σ^2 é tal que*

$$|h| \leq \frac{\cosh(\varrho) - 1}{(-K_\Sigma)^{1/2}}. \tag{4.12}$$

Observando que a translação Φ_{t_0} por um parâmetro real arbitrário t_0, isto é,

$$\Phi_{t_0} : \{t\} \times \mathbb{R}^n \mapsto \{t + t_0\} \times \mathbb{R}^n,$$

é uma isometria de $\mathbb{L}^{n+1}$, obtemos o seguinte resultado

Corolário 4.6. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço compacta com bordo contido no hiperplano $\Pi_{t_0} = \{t_0\} \times \mathbb{R}^n$. Suponhamos que a r-ésima curvatura média $H_r \neq 0$ é constante. Se a imagem hiperbólica de Σ está contida na bola geodésica de centro $e_{n+1} \in \mathbb{H}^n$ e raio $\varrho > 0$, então*

$$\Sigma \subset [t_0, t_0 + C] \times \mathbb{R}^n,$$

ou

$$\Sigma \subset [t_0 - C, t_0] \times \mathbb{R}^n,$$

onde $C = (\cosh(\varrho) - 1)|H_r|^{-1/r}$.

Observação 4.7. *Fixada uma constante real $\lambda > 0$, verificamos facilmente que a calota hiperbólica*

$$\Sigma_\lambda^n = \left\{ x \in \mathbb{L}^{n+1}; \langle x, x \rangle = -\lambda^2,\ \lambda \leq x_{n+1} \leq \sqrt{1 + \lambda^2} \right\}$$

é um exemplo de hipersuperfície tipo-espaço compacta do espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$ a qual possui r-ésima curvatura média constante

$$H_r = \frac{1}{\lambda^r} > 0,$$

para cada $1 \leq r \leq n$ (escolhendo-se a aplicação normal de Gauss N na mesma orientação temporal de e_{n+1}, para o caso r ímpar). Ademais, também *é de fácil verificação que a imagem hiperbólica de Σ^n_λ está contida na bola geodésica de centro $e_{n+1} \in \mathbb{H}^n$ e raio*

$$\varrho = \cosh^{-1}\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}.$$

Portanto, como a altura h de tal calota hiperbólica é dada por

$$h = \sqrt{1+\lambda^2} - \lambda = \frac{\cosh(\varrho) - 1}{H_r^{1/r}},$$

concluímos que nossa estimativa da função altura é sharp.

4.3 Hipersuperfícies completas com um fim

Nesta seção abordaremos as hipersuperfícies tipo-espaço completas $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ com *um fim* N^n, isto é, uma hipersuperfície Σ^n que é dada como

$$\Sigma^n = \Sigma^n_t \cup N^n,$$

onde Σ^n_t é uma hipersuperfície compacta com bordo contido no hiperplano $\Pi_t = \{t\} \times \mathbb{R}^n$ e N^n é difeomorfo ao cilindro $[t, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$.

Definição 4.8. *Dada uma hipersuperfície tipo-espaço completa $\Sigma^n = \Sigma^n_t \cup N^n$ com um fim, dizemos que o fim N^n é divergente se, considerando N^n com coordenadas $p = (s, q) \in [t, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$, temos que*

$$\lim_{s\to\infty} h(p) = \infty,$$

onde h denota a função altura de N^n. Caso contrário, dizemos que o fim N^n é não-divergente.

Agora, para concluirmos este capítulo, apresentamos a seguinte aplicação de nossa estimativa da função altura, a qual é uma versão dos teoremas de Aiyama em [1] e Xin em [43] para o caso da curvatura de ordem superior constante.

Teorema 4.9. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa com um fim. Suponhamos que a r-ésima curvatura média $H_r \neq 0$ é constante. Se a imagem hiperbólica de Σ está contida numa bola geodésica de $\mathbb{H}^n$, então seu fim é não-divergente.*

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que o fim N^n de $\Sigma^n = \Sigma_t^n \cup N^n$ é divergente. Então, como Σ_t^n é uma hipersuperfície compacta com bordo contido no hiperplano Π_t, pelo corolário 4.5 temos (por exemplo) que

$$\Sigma_t^n \subset [t - C, t],$$

onde $C = (\cosh(\varrho) - 1)H_r^{-1/r}$ e ϱ é o raio da bola geodésica de $\mathbb{H}^n$ a qual contém a imagem hiperbólica de Σ^n. Agora, pela suposição de que o fim N^n de Σ^n é divergente, podemos intersectar Σ^n pelo hiperplano Π_{t+C} e obter uma hipersuperfície tipo-espaço compacta Σ_{t+C}^n com r-ésima curvatura média $H_r \neq 0$ constante e com bordo contido no hiperplano Π_{t+C}, e cuja altura é estritamente maior que C. Chegamos, então, a uma contradição com respeito a nossa estimativa de altura para uma hipersuperfície tipo-espaço compacta. Portanto, concluímos que o fim N^n de Σ^n é não-divergente. $\square$

Observação 4.10. *Observemos, ainda, que dada uma constante real $\lambda > 0$,*

$$\Sigma^n = \left\{x \in \mathbb{L}^{n+1}; \langle x, x\rangle = -\lambda^2,\ x_{n+1} \geq \lambda\right\}$$

é um exemplo de uma hipersuperfície tipo-espaço completa com r-ésima curvatura média constante (não-nula) e com um fim, o qual é divergente. Por outro lado, a imagem hiperbólica de Σ^n é exatamente $\mathbb{H}^n$.

Capítulo 5

Gráficos verticais completos imersos num produto warped

Este capítulo corresponde ao artigo [17], em colaboração com A. Caminha. Aqui, tratamos de gráficos completos não-compactos com curvatura média constante sobre uma horosfera do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$, bem como sobre um hiperplano horizontal do Steady State space $\mathcal{H}^{n+1}$. Em conexão com os resultados obtidos neste capítulo, L.J. Alías e M. Dajczer em [6] estudaram superfícies completas imersas propriamente em $\mathbb{H}^3$ e contidas entre duas horosferas, obtendo um resultado tipo-Bernstein para o caso da curvatura média constante $-1 \leq H \leq 1$ (veja também [5], para resultados correspondentes em ambientes mais gerais). No espaço de De Sitter, K. Akutagawa em [2] provou que as hipersuperfícies tipo-espaço completas tendo curvatura média constante num intervalo real específico são totalmente umbílicas. Também no espaço de De Sitter, dentre outros resultados interessantes, S. Montiel em [37] provou que, sob uma restrição apropriada na imagem da aplicação normal de Gauss hiperbólica, hipersuperfícies tipo-espaço completas com curvatura média $H \geq 1$ constante devem ter, na verdade, curvatura média $H \equiv 1$.
Com relação ao caso Lorentziano, nossa motivação de nos restringirmos ao Steady State space vem do fato de que existe uma dualidade natural entre as aplicações normais de Gauss das hipersuperfícies Riemannianas deste espaço e as do espaço hiperbólico, quando ambos são modelados como hiperquádricas do espaço de Lorentz-Minkowski (veja seção 5.4). Por outro lado, no contexto da Física o Steady State space aparece naturalmente como uma solução para as equações de Einstein (cf. [24], capítulo 5).

No que segue, modelamos nossos ambientes como produtos warped semi-Riemannianos com o objetivo de obter condições necessárias para garantir a existência de gráficos verticais completos com curvatura média constante (cf. Teorema 5.7 e Teorema 5.13), sendo que nossa ferramenta analítica principal consiste no princípio do máximo generalizado de Omori-Yau. No caso tridimensional, para superfícies completas com curvatura Gaussiana não-negativa, obtemos resultados tipo-Bernstein usando o fato de que estas superfícies são parabólicas no sentido de superfícies de Riemann (cf. [26]). Mais precisamente, se a norma do gradiente da função altura de uma tal superfície satisfaz uma certa limitação, então esta tem que ser uma horosfera em $\mathbb{H}^3$ (cf. Theorem 5.14), ou um plano horizontal em $\mathcal{H}^3$ (cf. Theorem 5.12).

5.1 Revisitando os campos conformes

Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade semi-Riemanniana conexa com métrica $\overline{g} = \langle\ ,\ \rangle$ de índice $\nu \leq 1$, e conexãode Levi-Civita $\overline{\nabla}$. Para um campo de vetores $X \in \mathcal{X}(\overline{M})$, seja $\epsilon(X) = \langle X, X\rangle$; nesta notação, X é dito um campo de vetores unitário se $\epsilon(X) = \pm 1$, e tipo-tempo se $\epsilon(X) = -1$.

No que segue, consideraremos *imersões Riemannianas* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$, isto é, imersões de uma variedade diferenciável orientável n-dimensional Σ^n em $\overline{M}$, tal que a métrica induzida $g = \psi^*(\overline{g})$ torne Σ uma variedade Riemanniana (no caso Lorentziano $\nu = 1$, isto significa que Σ^n é uma hipersuperfície tipo-espaço de $\overline{M}^{n+1}$), com conexão de Levi-Civita ∇. Orientamos Σ pela escolha de um campo de vetores normal unitário N em Σ, e denotamos por A o operador de forma correspondente e por $H = \epsilon(N)\,\mathrm{tr}(A)/n$ a curvatura média.

A proposição seguinte aparece pela primeira vez (no contexto Riemanniano) em [42]. Também vale observar que A.B. Barros, A. Brasil Jr. e A. Caminha em [12] generalizaram este resultado no contexto Lorentziano. Apresentamos aqui uma versão unificada.

Proposição 5.1. *Sejam $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade semi-Riemanniana munida de um campo de vetores conforme V com fator conforme $\phi : \overline{M}^{n+1} \to \mathbb{R}$, e $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão Riemanniana. Se $\eta = \langle V, N\rangle$, então*

$$\Delta\eta = -\epsilon\, n\langle V, \nabla H\rangle - \epsilon\,\eta\left\{\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2\right\} - n\left\{\epsilon\, H\phi + N(\phi)\right\}, \quad (5.1)$$

onde $\epsilon = \epsilon(N)$, ∇H *é o gradiente de* H *em relação a métrica de* Σ, $\overline{\mathrm{Ric}}$ *é o tensor de Ricci de* $\overline{M}$ *e* $|A|$ *é a norma de Hilbert-Schmidt de* A.

Demonstração. Fixemos $p \in \Sigma$ e seja $\{e_k\}$ um referencial ortonormal numa vizinhança de p em Σ, geodésico em p. Extendemos os e_k a uma vizinhança de p em $\overline{M}$, tal que $(\overline{\nabla}_N e_k)(p) = 0$, e seja

$$V = \sum_{l}^{n} \alpha_l e_l + \epsilon\, \eta N.$$

Então

$$\begin{aligned} \eta = \langle N, V\rangle \Rightarrow e_k(\eta) &= \langle \overline{\nabla}_{e_k} N, V\rangle + \langle N, \overline{\nabla}_{e_k} V\rangle \\ &= -\langle Ae_k, V\rangle + \langle N, \overline{\nabla}_{e_k} V\rangle, \end{aligned}$$

e, assim,

$$\begin{aligned} \Delta\eta &= \sum_k e_k(e_k(\eta)) = -\sum_k e_k\langle Ae_k, V\rangle + \sum_k e_k\langle N, \overline{\nabla}_{e_k} V\rangle \\ &= -\sum_k \langle \overline{\nabla}_{e_k} Ae_k, V\rangle - 2\sum_k \langle Ae_k, \overline{\nabla}_{e_k} V\rangle \\ &\quad + \sum_k \langle N, \overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_{e_k} V\rangle. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Agora, diferenciando $Ae_k = \sum_l h_{kl} e_l$ com respeito a e_k, obtemos em p

$$\begin{aligned} \sum_k \langle \overline{\nabla}_{e_k} Ae_k, V\rangle &= \sum_{k,l} e_k(h_{kl})\langle e_l, V\rangle + \sum_{k,l} h_{kl}\langle \overline{\nabla}_{e_k} e_l, V\rangle \\ &= \sum_{k,l} \alpha_l e_k(h_{kl}) + \epsilon \sum_{k,l} h_{kl}\langle \overline{\nabla}_{e_k} e_l, N\rangle\langle V, N\rangle \\ &= \sum_{k,l} \alpha_l e_k(h_{kl}) + \epsilon \sum_{k,l} h_{kl}^2 \eta \\ &= \sum_{k,l} \alpha_l e_k(h_{kl}) + \epsilon\, \eta |A|^2. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Pedindo-se que $Ae_k = \lambda_k e_k$ at p (o que é sempre possível), temos em p que

$$\sum_k \langle Ae_k, \overline{\nabla}_{e_k} V\rangle = \sum_k \lambda_k \langle e_k, \overline{\nabla}_{e_k} V\rangle = \sum_k \lambda_k \phi = \epsilon\, nH\phi. \tag{5.4}$$

No sentido de calcularmos o último termo de (5.2), notemos que a conformidade de V nos dá

$$\langle \overline{\nabla}_N V, e_k \rangle + \langle N, \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle = 0$$

para todo k. Logo, diferenciando a relação acima na direção de e_k, obtemos

$$\langle \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_N V, e_k \rangle + \langle \overline{\nabla}_N V, \overline{\nabla}_{e_k} e_k \rangle + \langle \overline{\nabla}_{e_k} N, \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle + \langle N, \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle = 0.$$

Entretanto, em p temos que

$$\begin{aligned} \langle \overline{\nabla}_N V, \overline{\nabla}_{e_k} e_k \rangle &= \epsilon \langle \overline{\nabla}_N V, \langle \overline{\nabla}_{e_k} e_k, N \rangle N \rangle = \epsilon \langle \overline{\nabla}_N V, \lambda_k N \rangle \\ &= \epsilon \lambda_k \phi \langle N, N \rangle = \lambda_k \phi \end{aligned}$$

e

$$\langle \overline{\nabla}_{e_k} N, \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle = -\lambda_k \langle e_k, \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle = -\lambda_k \phi,$$

assim

$$\langle \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_N V, e_k \rangle + \langle N, \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle = 0 \tag{5.5}$$

em p. Por outro lado, como

$$[N, e_k](p) = (\overline{\nabla}_N e_k)(p) - (\overline{\nabla}_{e_k} N)(p) = \lambda_k e_k(p),$$

segue de (5.5) que

$$\begin{aligned} \langle \overline{R}(N, e_k) V, e_k \rangle_p &= \langle \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_N V - \overline{\nabla}_N \overline{\nabla}_{e_k} V + \overline{\nabla}_{[N, e_k]} V, e_k \rangle_p \\ &= -\langle N, \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle_p - N \langle \overline{\nabla}_{e_k} V, e_k \rangle_p + \langle \overline{\nabla}_{\lambda_k e_k} V, e_k \rangle_p \\ &= -\langle N, \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle_p - N(\phi) + \lambda_k \phi, \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\sum_k \langle N, \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle_p = -nN(\phi) + \epsilon\, nH\phi - \overline{\mathrm{Ric}}(N, V)_p \tag{5.6}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Ric}}(N, V) &= \sum_l \alpha_l \overline{\mathrm{Ric}}(N, e_l) + \epsilon\, \eta \overline{\mathrm{Ric}}(N, N) \\ &= \sum_{k,l} \alpha_l \langle \overline{R}(e_k, e_l) e_k, N \rangle + \epsilon\, \eta \overline{\mathrm{Ric}}(N, N), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \overline{R}(e_k, e_l)e_k, N\rangle_p &= \langle \overline{\nabla}_{e_l}\overline{\nabla}_{e_k}e_k - \overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_{e_l}e_k, N\rangle_p \\
&= e_l\langle \overline{\nabla}_{e_k}e_k, N\rangle_p - \langle \overline{\nabla}_{e_k}e_k, \overline{\nabla}_{e_l}N\rangle_p - e_k\langle \overline{\nabla}_{e_l}e_k, N\rangle_p \\
&\quad + \langle \overline{\nabla}_{e_l}e_k, \overline{\nabla}_{e_k}N\rangle_p \\
&= -e_l\langle e_k, \overline{\nabla}_{e_k}N\rangle_p + e_k\langle e_k, \overline{\nabla}_{e_l}N\rangle_p \\
&= e_l(h_{kk}) - e_k(h_{kl}),
\end{aligned}$$

assim

$$\overline{\mathrm{Ric}}(N, V)_p = \sum_{k,l}\alpha_l e_l(h_{kk}) - \sum_{k,l}\alpha_l e_k(h_{kl}) + \epsilon\,\eta\overline{\mathrm{Ric}}(N, N)_p,$$

e segue de (5.6) que

$$\begin{aligned}
\sum_k \langle N, \overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_{e_k}V\rangle_p &= -nN(\phi) + \epsilon\, nH\phi - V^{\top}(\epsilon\, nH) \\
&\quad + \sum_{k,l}\alpha_l e_k(h_{kl}) - \epsilon\,\eta\overline{\mathrm{Ric}}(N, N). \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

Substituindo, agora, (5.3), (5.4) e (5.7) em (5.2), obtemos a fórmula desejada (5.1).

□

5.2 Produtos warped semi-Riemannianos

Sejam M^n uma variedade Riemanniana n-dimensional, conexa e orientada, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função suave positiva. Com relação a variedade produto $\overline{M}^{n+1} = I \times M^n$, denotemos por π_I e π_M as projeções canônicas sobre I e M, respectivamente.

Uma classe particular de variedades semi-Riemannianas possuindo campos conformes é obtida munindo $\overline{M}$ com a seguinte métrica

$$\langle v, w\rangle_p = \epsilon\langle (\pi_I)_* v, (\pi_I)_* w\rangle + f(p)^2\langle (\pi_M)_* v, (\pi_M)_* w\rangle,$$

onde $\epsilon = -1$ ou $\epsilon = 1$ para todo $p \in \overline{M}$ e quaisquer $v, w \in T_p\overline{M}$ (observemos que no caso Lorentziano, isto é, $\epsilon = -1$, $\overline{M}^{n+1}$ é exatamente um espaço-tempo GRW). Nesse contexto (cf. [35] e [36]), temos que o campo de vetores

$$V = (f \circ \pi_I)\partial_t$$

é conforme e fechado, com fator conforme $\phi = f'$, onde ' denota a derivação com respeito a $t \in I$. Tais espaços são denominados de *produtos warped semi-Riemannianos*, e no que segue escreveremos simplesmente $\overline{M}^{n+1} = \epsilon I \times_f M^n$ para denotarmos tais espaços.

Se $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ é uma imersão Riemanniana, com Σ orientada por um campo de vetores normal unitário N, temos que $\epsilon = \epsilon(\partial_t) = \epsilon(N)$. O resultado seguinte reproduz a proposição 5.1 no contexto acima, e no espírito de [4].

Proposição 5.2. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = \epsilon I \times_f M^n$. *Assumindo as notações da proposição 5.1, se* Σ *tem curvatura média* H *constante, então*

$$\Delta\eta = -\epsilon\,\eta\left\{\mathrm{Ric}(N^\top, N^\top) + (n-1)(\log f)''(1 - \langle N, \partial_t\rangle^2) + |A|^2\right\} - \epsilon\, nHf'. \tag{5.8}$$

onde Ric *denota o tensor de Ricci de* M *e* $N^\top = (\pi_M)_* N$.

Demonstração. Inicialmente, notemos que $\eta = \langle V, N\rangle = f\langle N, \partial_t\rangle$, logo segue de (5.1) que

$$\Delta\eta = -\epsilon\,\eta\left\{\overline{\mathrm{Ric}}(N, N) + |A|^2\right\} - n\left\{\epsilon H f' + N(f')\right\}.$$

Agora, $N(f') = \epsilon\, f''\langle N, \partial_t\rangle = \epsilon\,(f''/f)\eta$. Por outro lado, como

$$N = N^\top + \epsilon\langle N, \partial_t\rangle\partial_t,$$

segue do corolário 7.43 de [38] que

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Ric}}(N, N) &= \overline{\mathrm{Ric}}(N^\top, N^\top) + \langle N, \partial_t\rangle^2\overline{\mathrm{Ric}}(\partial_t, \partial_t) \\
&= \mathrm{Ric}(N^\top, N^\top) - \epsilon\langle N^\top, N^\top\rangle\left\{\frac{f''}{f} + (n-1)\frac{(f')^2}{f^2}\right\} \\
&\quad -\frac{nf''}{f}\langle N, \partial_t\rangle^2 \\
&= \mathrm{Ric}(N^\top, N^\top) - \left\{\frac{f''}{f} + (n-1)\frac{(f')^2}{f^2}\right\} \\
&\quad -(n-1)\left(\frac{f'}{f}\right)'\langle N, \partial_t\rangle^2,
\end{aligned}$$

onde usamos na última igualdade acima que $\langle N^\top, N^\top\rangle = \epsilon(1 - \langle N, \partial_t\rangle^2)$. Portanto,

$$\begin{aligned}\Delta\eta &= -\epsilon\,\eta\left\{\mathrm{Ric}(N^\top, N^\top) - \left\{\frac{f''}{f} + (n-1)\frac{(f')^2}{f^2}\right\}\right\}\\ &\quad +(n-1)\epsilon\,\eta\left(\frac{f'}{f}\right)'\langle N, \partial_t\rangle^2 - \epsilon\,\eta|A|^2 - \epsilon\, n\left\{Hf' + \frac{f''}{f}\eta\right\}\\ &= -\epsilon\,\eta\left\{\mathrm{Ric}(N^\top, N^\top) + (n-1)(\log f)''(1 - \langle N, \partial_t\rangle^2) + |A|^2\right\}\\ &\quad -\epsilon\, nHf'.\end{aligned}$$

□

Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ é uma imersão Riemanniana como descrita acima, denotemos por $h = \pi_{I_{|\Sigma}} : \Sigma \to I$ a função altura de Σ com respeito ao campo de vetores unitário ∂_t. A seguinte proposição (no contexto Lorentziano) é devida a L.J. Alías e A.G. Colares (cf. [4], lema 4.1); aqui, apresentamos uma prova mais direta e particular (no contexto semi-Riemanniano) adequada aos nossos propósitos.

Proposição 5.3. *Assumindo a notação acima utilizada, temos que*

$$\Delta h = (\log f)'(h)\{\epsilon\, n - |\nabla h|^2\} + \epsilon\, nH\langle N, \partial_t\rangle, \tag{5.9}$$

onde H denota a curvatura média de Σ com respeito a aplicação normal de Gauss N.

Demonstração. Como $h = \pi_{I_{|\Sigma}}$, temos que

$$\begin{aligned}\nabla h &= \nabla(\pi_{I_{|\Sigma}}) = (\overline{\nabla}\pi_I)^\top = \epsilon\partial_t^\top\\ &= \epsilon\,\partial_t - \langle N, \partial_t\rangle N.\end{aligned}$$

onde $\overline{\nabla}$ denota o gradiente com respeito a métrica do espaço ambiente, e $X^\top$ denota a componente tangente a Σ de um campo de vetores $X \in \mathcal{X}(\overline{M})$. Fixemos agora $p \in M$, $v \in T_pM$ e denotemos por A o operador de Weingarten com respeito a N. Escrevendo $v = w + \epsilon\langle v, \partial_t\rangle\partial_t$, onde $w \in T_p\overline{M}$ é tangente a fibra de $\overline{M}$ que passa por p. Logo, pela proposição 7.35 de [38], temos que

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_v\partial_t &= \overline{\nabla}_w\partial_t + \epsilon\langle v, \partial_t\rangle\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = \overline{\nabla}_w\partial_t\\ &= (\log f)'w = (\log f)'(v - \epsilon\langle v, \partial_t\rangle\partial_t).\end{aligned}$$

Assim, procedendo de modo análogo a (4.3) na prova da proposição 4.1, obtemos

$$\nabla_v \nabla h = (\log f)'(\epsilon\, v - \langle v, \nabla h\rangle \nabla h) + \langle N, \partial_t\rangle Av.$$

Portanto, fixando $p \in \Sigma$ e tomando um referencial ortonormal $\{e_i\}$ em $T_p\Sigma$, obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta h &= \mathrm{tr}(\mathrm{Hess} h) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla h, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle (\log f)'(\epsilon\, e_i - \langle e_i, \nabla h\rangle \nabla h) + \langle N, \partial_t\rangle Ae_i, e_i\rangle \\
&= (\log f)'\{\epsilon\, n - |\nabla h|^2\} + \langle N, \partial_t\rangle \mathrm{tr(A)} \\
&= (\log f)'\{\epsilon\, n - |\nabla h|^2\} + \epsilon\, nH\langle N, \partial_t\rangle.
\end{aligned}$$

□

Consideremos novamente um produto warped semi-Riemanniano $\overline{M}^{n+1} = \epsilon I \times_f M^n$. Para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, orientamos a fibra $M^n_{t_0} = \{t_0\} \times M^n$ escolhendo campo de vetores normal unitário ∂_t. De acordo com a proposição 1 de [35] (veja também a proposição 1 de [36]), M_{t_0} tem curvatura média constante $H = -\epsilon f'(t_0)/f(t_0)$. Definiremos, agora, o nosso objeto de estudo referente a este capítulo.

Definição 5.4. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão Riemanniana. Dizemos que Σ é um* gráfico vertical *sobre a fibra $M^n_{t_0}$ se $\psi(x) = (u(x), x)$ para alguma função suave $u : M_{t_0} \to [0, +\infty)$.*

Observação 5.5. *Com relação a definição acima, notemos que*

(i) Primeiro, se h denota a função altura associada a um gráfico vertical sobre a fibra M_{t_0}, com função correspondente $u : M_{t_0} \to [0, +\infty)$, então temos que $u = h \circ \psi - t_0$.

(ii) Segundo, no caso Lorentziano a condição de que ψ seja uma imersão Riemanniana implica que $|Du| < 1$, sendo Du o gradiente de $u \circ \iota$ com respeito a métrica de M, onde $\iota : M \to M_{t_0}$ é a inclusão canônica (cf. [37], seção 4).

(iii) Por último, nossas aplicações nas seções seguintes tratam de produtos warped semi-Riemannian com função warping $f(t) = e^t$. De acordo com a discussão precedente, neste contexto todas as fibras têm curvatura média $H = -\epsilon$. Logo, sem perda de generalidade, podemos assumir que nossos gráficos verticais estão sobre M_0, i.e., são tais que $u = h \circ \psi \geq 0$; de fato, no que segue, se trocarmos u por $u + t_0$, todos os argumentos são diretamente reproduzidos para gráficos verticais sobre a fibra M_{t_0}.

5.3 Gráficos verticais no Steady State space

Nesta seção consideramos um modelo particular de produto warped Lorentziano, o *Steady State space*, dado por

$$\mathcal{H}^{n+1} = -\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n. \tag{5.10}$$

Em cosmologia, este espaço corresponde ao modelo *steady state* do universo proposto por Bondi, Gold e Hoyle (cf. [24], capítulo 5).

Para demonstrarmos o nosso próximo resultado necessitaremos do seguinte lema, o qual é uma conseqüência do princípio do máximo generalizado de Omori-Yau (cf. [2], lema 3; veja também [41], lema 2.1.2).

Lema 5.6. *Seja Σ^n uma variedade Riemanniana completa, cujo tensor de Ricci é limitado inferiormente. Se g é uma função suave e não-negativa em Σ^n a qual satisfaz*

$$\triangle g \geq \alpha\, g^2,$$

para alguma constante positiva α, então $g \equiv 0$ em Σ^n.

Se $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ é uma hipersuperfície tipo-espaço orientada pelo campo de vetores normal unitário N tal que $\langle N, \partial_t \rangle < 0$, o *ângulo hiperbólico* θ de ψ é definido como sendo a função suave $\theta : \psi(\Sigma) \to [0, +\infty)$ dada (implicitamente) por

$$\cosh\theta = -\langle N, \partial_t \rangle \geq 1. \tag{5.11}$$

No resultado seguinte, o membro direito de (5.12) deve ser interpretado como $+\infty$ quando $\cosh\theta = 1$.

Teorema 5.7. *Seja* $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ *um gráfico vertical tipo-espaço completo no Steady State space* $(n+1)$*-dimensional, com curvatura média constante* $H \geq 1$*. Se*

$$h \leq -\log(\cosh\theta - 1), \tag{5.12}$$

então:

(a) $H \equiv 1$ *em* Σ*;*

(b) a curvatura escalar R *de* Σ *é não-negativa e não pode ser limitada globalmente acima do zero (i.e., não existe constante positiva* α *tal que* $R \geq \alpha$*).*

Demonstração. Seja $g : \Sigma \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g = -e^h - \eta. \tag{5.13}$$

Segue de (5.11) e da definição de h que $g \geq 0$ em Σ. Por outro lado, nossa hipótese (5.12) sob o crescimento de h assegura que $g \leq 1$ em Σ.

Um simples trabalho computacional nos dá que $\Delta e^h = e^h\{|\nabla h|^2 + \Delta h\}$. Além disso, como a fibra Riemanniana de $\mathcal{H}^{n+1}$ é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, calculando-se o Laplaciano de g com o auxílio das proposições 5.2 e 5.3 obtemos que

$$\begin{aligned} \Delta g &= -\Delta e^h - \Delta\eta \\ &= -e^h\{|\nabla h|^2 + \Delta h\} - \Delta\eta \\ &= ne^h\{1 + H\langle N, \partial_t\rangle\} - \eta|A|^2 - nHe^h. \end{aligned}$$

Agora, denotando por S_2 a segunda função simétrica elementar dos autovalores de A, e sendo $H_2 = 2S_2/n(n-1)$ o valor médio de S_2, verificamos facilmente que

$$|A|^2 = n^2H^2 - n(n-1)H_2,$$

o qual, posto na fórmula precedente, nos dá

$$\begin{aligned} \Delta g &= n(H-1)\{-e^h - H\eta\} - n(n-1)(H^2 - H_2)\eta \\ &\geq n(H-1)g + n(n-1)(H^2 - H_2), \end{aligned} \tag{5.14}$$

onde, para obter a desigualdade, usamos que $-\eta \geq e^h \geq 1$.

(a) Suponhamos, por contradição, que $H > 1$. Como $0 \leq g \leq 1$ e (pela desigualdade de Cauchy-Schwarz) $H^2 - H_2 \geq 0$, obtemos

$$\Delta g \geq n(H-1)g^2.$$

Agora, denotando por Ric_Σ a curvatura de Ricci de Σ, pela equação de Gauss obtemos a seguinte estimativa

$$\mathrm{Ric}_\Sigma \geq (n-1) - \frac{n^2H^2}{4}. \tag{5.15}$$

Assim, estamos em condições de aplicarmos o Lema 5.6 para concluirmos que $g \equiv 0$. Então, $\eta \equiv -e^h$, donde $\langle N, \partial_t \rangle \equiv -1$, i.e., $\psi(\Sigma)$ é um hiperplano horizontal de $\mathcal{H}^{n+1}$. Entretanto, tal hiperplano tem curvatura média constante 1, o que nos dá uma contradição. Portanto, $H \equiv 1$.

(b) Retornando, agora, à equação (5.14), obtemos que

$$\Delta g \geq n(n-1)(1-H_2) = R \geq 0,$$

onde utilizamos a equação de Gauss para obter a última igualdade, e o fato de que $H^2 - H_2 \geq 0$ para obtermos o sinal para a curvatura escalar R.

Assim, se existisse uma constante $\alpha > 0$ tal que $R \geq \alpha$ em Σ, obteríamos que

$$\Delta g \geq \alpha g^2,$$

do qual segue-se mais uma vez pelo Lema 5.6 que $g \equiv 0$, donde $\psi(\Sigma)$ deveria ser um hiperplano horizontal. Entretanto, tal hiperplano é isométrico ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, tendo consequentemente curvatura escalar $R \equiv 0$. O que nos daria, portanto, uma outra contradição. □

Observação 5.8. *É de fácil verificação que a hipótese (5.12) no crescimento da função altura h é satisfeita se supormos que vale a seguinte estimativa para o gradiente de h*

$$|\nabla h| \leq e^{-h/2}, \tag{5.16}$$

a qual aparece naturalmente na literatura (veja, por exemplo, o corolário 16.6 *de [21]).*

Observação 5.9. *Como conseqüência do teorema de Bonnet-Myers, uma hipersuperfície tipo-espaço completa $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ tendo curvatura média H (não necessariamente constante) satisfazendo*

$$|H| \leq \varrho < 2\sqrt{n-1}/n, \tag{5.17}$$

ϱ constante, tem que ser compacta; de fato, supondo a limitação (5.17), pela equação (5.15) temos que

$$\mathrm{Ric}_\Sigma \geq (n-1) - n^2\rho^2/4 > 0.$$

Entretanto, como $\psi(\Sigma)$ é um gráfico sobre $\mathbb{R}^n$, este não pode ser compacto. Nesse sentido, como $2\sqrt{n-1}/n \leq 1$ para $n \geq 2$, é natural nos restringirmos ao caso $H \geq 1$.

No sentido de demonstrarmos nosso próximo teorema, necessitamos do seguinte resultado devido a K. Akutagawa (cf. [2], teorema 1; veja também [41], teorema 2.3.1).

Proposição 5.10. *Sejam $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade de Lorentz com curvatura seccional $c > 0$ constante e Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço completa imersa em $\overline{M}^{n+1}$ com curvatura média H constante. Suponhamos que ocorre um dos itens seguintes:*

(a) $|H| \leq c^{1/2}$, *se* $n = 2$.

(b) $|H| < 2[(n-1)c]^{1/2}/n$, *se* $n \geq 3$.

Então, Σ^n é totalmente umbílica.

Como conseqüência do Teorema 5.7, obtemos o seguinte teorema tipo-Bernstein em $\mathcal{H}^3$:

Teorema 5.11. *Seja $\psi : \Sigma^2 \to \mathcal{H}^3$ um gráfico vertical tipo-espaço completo, com curvatura média constante $H \geq 1$. Se*

$$h \leq -\log(\cosh\theta - 1),$$

Então $\psi(\Sigma)$ é um plano horizontal de $\mathcal{H}^3$.

Demonstração. Pelo teorema anterior, $H = 1$ em Σ^2. Agora, aplicamos a Proposição 5.10 e a classificação das hipersuperfícies tipo-espaço umbílicas do espaço de De Sitter (cf. [33], exemplo 1; veja também [41], teorema 1.5.1), para concluirmos a demonstração. □

Para finalizarmos esta seção, aplicaremos o resultado da proposição 5.3 para provar um outro teorema tipo-Bernstein para superfícies completas (não necessariamente gráficos) imersas em $\mathcal{H}^3$.

Teorema 5.12. *Seja $\psi : \Sigma^2 \to \mathcal{H}^3$ uma imersão Riemanniana de uma superfície completa de curvatura Gaussiana $K_\Sigma \geq 0$, com curvatura média constante $H \geq 1$. Se*

$$|\nabla h|^2 \leq H^2 - 1, \tag{5.18}$$

então $\psi(\Sigma)$ é um plano horizontal de $\mathcal{H}^3$.

Demonstração. Pela Proposição 5.3, temos que

$$\begin{aligned} \triangle e^{-h} &= e^{-h}\left\{|\nabla h|^2 - \triangle h\right\} \\ &= 2e^{-h}\left\{|\nabla h|^2 + 1 + H\langle N, \partial_t\rangle\right\}. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $|\nabla h|^2 = \langle N, \partial_t\rangle^2 - 1$, verificamos facilmente que a hipótese (5.18) é equivalente a

$$|\nabla h|^2 + 1 + H\langle N, \partial_t\rangle \leq 0.$$

Consequentemente, temos que a função e^{-h} é superharmônica e positiva em Σ. Entretanto, um resultado clássico devido a Huber em [26] assegura que superfícies completas de curvatura Gaussiana não-negativa têm que ser parabólicas. Portanto, h é constante em Σ, i.e., $\psi(\Sigma)$ é um plano horizontal. $\square$

5.4 Gráficos verticais no espaço hiperbólico

Nesta seção, consideraremos o espaço hiperbólico $(n+1)-$dimensional modelado como um produto warped, isto é,

$$\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n. \tag{5.19}$$

Uma isometria explícita entre este modelo e o modelo do semi-espaço superior $\mathbb{R}^{n+1}_+$ é apresentada em [6], onde se vê facilmente que as fibras $M_{t_0} = \{t_0\} \times \mathbb{R}^n$ do produto warped são precisamente as horosferas de $\mathbb{H}^{n+1}$. Ademais, de acordo com o último parágrafo da seção 5.2, estas fibras têm curvatura média constante 1 se a considerarmos orientadas pelo campo de vetores normal unitário $N = -\partial_t$.

Outro modelo útil para $\mathbb{H}^{n+1}$ é o *modelo Lorentziano*, obtido considerando a hiperquádrica

$$\{p \in \mathbb{L}^{n+2};\ \langle p, p\rangle = -1,\ p_{n+2} > 0\}$$

munida da métrica (Riemanniana) induzida pela métrica de Lorentz de $\mathbb{L}^{n+2}$. Neste modelo, fixando um vetor tipo-luz $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ tal que $\langle a, e_{n+2}\rangle > 0$, onde $e_{n+2} = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{L}^{n+2}$, uma horosfera é dada por

$$L_\tau = \{p \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle p, a\rangle = \tau\},$$

onde τ é um número real positivo. Com um simples trabalho computacional verificamos que

$$\xi_p = p + \frac{1}{\tau} a \in \mathcal{H}^{n+1}$$

é um campo de vetores normal unitário ao longo de L_τ, com respeito ao qual L_τ tem curvatura média -1 (cf. [31]). Portanto, uma isometria Φ entre os modelos warped e Lorentziano de $\mathbb{H}^{n+1}$ deve levar $(\partial_t)_q$ em $\Phi_*(\partial_t) = \xi_{\Phi(q)}$.

Se $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ é um gráfico vertical sobre $\mathbb{R}^n$, orientamos Σ pela escolha de um campo de vetores normal unitário N tal que $\eta = \langle N, V\rangle < 0$, e assim $-e^h \leq \eta < 0$. Seguindo a discussão do parágrafo anterior, é natural considerarmos a *aplicação de Gauss Lorentziana* de Σ com respeito a N como sendo dada por

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^n & \to & \mathcal{H}^{n+1} \\ p & \mapsto & -\Phi_*(N_p) \end{array}$$

Finalmente, estamos em posição de enunciar e demonstrar, no contexto do espaço hiperbólico, resultados análogos aos da seção anterior, comecemos com o correspondente ao Teorema 5.7.

Teorema 5.13. *Sejam Σ^n uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci limitada globalmente por baixo, e $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ um gráfico vertical no espaço hiperbólico $(n+1)$-dimensional, com curvatura média constante $0 \leq H \leq 1$. Se*

$$h \leq -\log(1 + \langle N, \partial_t\rangle), \tag{5.20}$$

então:

(a) *$H \equiv 1$ em Σ;*

(b) *Se o fecho da imagem da aplicação de Gauss Lorentziana de ψ com respeito a N está contida no Steady State space $\mathcal{H}^{n+1}$, então a curvatura escalar R de Σ é não-positiva e não pode ser limitada globalmente abaixo do zero (isto é, não existe constante positiva α tal que $R \leq -\alpha$).*

Demonstração. Seja $g : \Sigma \to \mathbb{R}$ definida por

$$g = e^h + \eta. \tag{5.21}$$

Pela definição de h, juntamente com a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que $g \geq 0$ em Σ. Por outro lado, nossa hipótese (5.20) sob o crescimento de h assegura que $g \leq 1$ on Σ.

Por um simples trabalho computacional, obtemos que

$$\Delta e^h = e^h\{|\nabla h|^2 + \Delta h\}.$$

Ademais, como a fibra Riemanniana de $\mathbb{H}^{n+1}$ é $\mathbb{R}^n$, pelo cálculo do Laplaciano de g com o auxílio das proposições 5.2 e 5.3 obtemos

$$\begin{aligned} \Delta g &= \Delta e^h + \Delta\eta \\ &= e^h\{|\nabla h|^2 + \Delta h\} + \Delta\eta \\ &= ne^h\{1 + H\langle N, \partial_t\rangle\} - \eta|A|^2 - nHe^h. \end{aligned}$$

Agora, sejam S_2 a segunda função simétrica elementar dos autovalores de A, e $H_2 = 2S_2/n(n-1)$ o valor médio de S_2. Verificamos facilmente que

$$|A|^2 = n^2H^2 - n(n-1)H_2,$$

o qual posto na fórmula acima nos dá

$$\begin{aligned} \Delta g &= n(1-H)\{e^h + H\eta\} - n(n-1)(H^2 - H_2)\eta \\ &= n(1-H)g - n(n-1)(H^2 - H_2)\eta. \end{aligned} \tag{5.22}$$

(a) Suponhamos, por contradição, que $H < 1$ em Σ. Como $0 \leq g \leq 1$, $-\eta > 0$ e $H^2 - H_2 \geq 0$ (pela desigualdade de Cauchy-Schwarz), temos que

$$\Delta g \geq n(1-H)g^2.$$

Logo, de nossa hipótese sob a curvatura de Ricci de Σ estamos em condição de aplicar o Lema 5.6 para concluir que $g \equiv 0$, donde $\langle N, \partial_t\rangle \equiv -1$. Consequentemente, $\psi(\Sigma)$ é uma horosfera de $\mathbb{H}^{n+1}$. Entretanto, tal horosfera tem curvatura média constante 1. Obtemos, portanto, uma contradição.

(b) Retornando, agora, a equação (5.22), obtemos

$$\Delta g = n(n-1)(H_2 - 1)\eta = R\eta \geq R\langle N, \partial_t\rangle,$$

onde usamos a equação de Gauss na última igualdade e o fato de que $\eta < 0$ e $H_2 - H^2 \leq 0$ para obtermos a desigualdade. Por outro lado, a condição exigida sob a imagem da aplicação de Gauss Lorentziana de Σ implica na existência de um número real $\beta > 0$ tal que $\langle -N, \partial_t \rangle \geq \beta$ on Σ. Então, se existisse um número real positivo α tal que $R \leq -\alpha$ em Σ, obteríamos de $0 \leq g \leq 1$ que

$$\Delta g \geq -R\langle -N, \partial_t \rangle \geq \alpha\beta g^2,$$

assim, aplicando novamente o Lema 5.6, teríamos $g \equiv 0$ e, consequentemente, $\psi(\Sigma)$ seria uma horosfera. Entretanto, as horosferas de $\mathbb{H}^{n+1}$ são isométricas a $\mathbb{R}^n$, tendo curvatura escalar identicamente nula, o qual seria uma contradição. □

Para concluirmos este capítulo, apresentamos o análogo ao Teorema 5.12 para o espaço hiperbólico.

Teorema 5.14. *Seja $\psi : \Sigma^2 \to \mathbb{H}^3$ um gráfico vertical completo com curvatura Gaussiana $K_\Sigma \geq 0$ e curvatura média constante $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq H \leq 1$. Se*

$$|\nabla h|^2 \leq 1 - H^2, \tag{5.23}$$

então $\psi\,(\Sigma)$ é uma horosfera de $\mathbb{H}^3$.

Demonstração. Pela Proposição 5.3, temos que

$$\triangle e^{-h} = 2e^{-h}\left\{|\nabla h|^2 - 1 - H\langle N, \partial_t \rangle\right\}.$$

Por outro lado, como $|\nabla h|^2 = 1 - \langle N, \partial_t \rangle^2$ e $\langle N, \partial_t \rangle$ não muda de sinal, verificamos facilmente que a hipótese (5.23) é equivalente a

$$|\nabla h|^2 - 1 - H\langle N, \partial_t \rangle \leq 0.$$

Logo e^{-h} é uma função superharmônica e positiva em Σ^2. Portanto, como na demonstração do Teorema 5.12, h é constante em Σ^2, i.e., $\psi(\Sigma)$ é uma horosfera. □

Observação 5.15. *Como a equação de Gauss nos dá*

$$K_\Sigma = 2H^2 - 1 - \frac{1}{2}|A|^2,$$

a hipótese de que $K_\Sigma \geq 0$ nos obriga a nos restringirmos ao caso $H \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Observação 5.16. *Assumindo que a imersão ψ é própria, L. J. Alías e M. Dajczer obtiveram em [6] um resultado similar ao Teorema 5.14.*

Referências Bibliográficas

[1] R. Aiyama. *On the Gauss map of complete space-like hypersurfaces of constant mean curvature in Minkowski space*, Tsukuba J. Math. **16** (1992), 353-361.

[2] K. Akutagawa. *On spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space*, Math. Z. **196**, (1987) 13-19.

[3] L.J. Alías, A. Brasil Jr. e A.G. Colares. *Integral Formulae for Spacelike Hypersurfaces in Conformally Stationary Spacetimes and Applications*, Proc. Edinb. Math. Soc. **46** (2003), 465-488.

[4] L.J. Alías e A.G. Colares. *Uniqueness of spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in Generalized Robertson-Walker spacetimes*, to appear at the Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.

[5] L.J. Alías e M. Dajczer. *Constant mean curvature hypersurfaces in warped product spaces*, to appear at the Proc. of the Edinburgh Math. Soc.

[6] L.J. Alías e M. Dajczer. *Uniqueness of constant mean curvature surfaces properly immersed in a slab*, Comment. Math. Helv. **81**, (2006) 653-663.

[7] L.J. Alías e J.M. Malacarne. *Spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in Minkowski space-time*, J. Geom. Phys. **41** (2002), 359-375.

[8] L.J. Alías e J.A. Pastor. *Constant mean curvature spacelike hypersurfaces with spherical boundary in the Lorentz-Minkowski space*, J. Geom. Phys. **28** (1998), 85-93.

[9] L.J. Alías e J.A. Pastor. *Spacelike hypersurfaces with constant scalar curvature in the Lorentz-Minkowski space*, Ann. Global Anal. Geom. **18** (2000), 75-83.

[10] L.J. Alías, A. Romero e M. Sánchez. *Uniqueness of complete spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in Generalized Robertson-Walker spacetimes*, Gen. Relativity Gravitation **27** (1995), 71-84.

[11] J.L. Barbosa e A.G. Colares. *Stability of Hypersurfaces with Constant $r-$Mean Curvature*, Ann. Global Anal. Geom. **15** (1997), 277-297.

[12] A.B. Barros, A. Brasil Jr. e A. Caminha. *Stability of Spacelike Hypersurfaces in Foliated Spacetimes*, preprint.

[13] A. Brasil Jr. e A.G. Colares. *On constant mean curvature spacelike hypersurfaces in Lorentzian manifolds*, Matemática Contemporânea **17** (1999), 99-136.

[14] E. Calabi. *Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations*, Proc. Sympos. Pure Math. **15** (1970), 223-230.

[15] A. Caminha. *Sobre Hipersuperfícies em Espaços de Curvatura Seccional Constante*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Ceará (2004).

[16] A. Caminha. *On spacelike hypersurfaces of constant sectional curvature lorentz manifolds*, J. of Geom. and Physics **56** (2006), 1144-1174.

[17] A. Caminha e H.F. de Lima. *Complete Vertical Graphs with Constant Mean Curvature in Semi-Riemannian Warped Products*, preprint.

[18] S.Y. Cheng e S.T. Yau. *Maximal Spacelike Hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski Space*, Ann. of Math. **104**, (1976), 407-419.

[19] X. Cheng e H. Rosenberg. *Embedded positive constant r-mean curvature hypersurfaces in $M^m \times \mathbb{R}$*, An. Acad. Bras. Cienc. **77(2)**, (2005) 183-199.

[20] L. Gårding. *An inequality for hyperbolic polynomials*, J. Math. Mech. **8**, (1959) 957-965.

[21] D. Gilbarg e N. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin (1983).

[22] A.J. Goddard. *Some remarks on the existence of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **82** (1977), 489-495.

[23] G. Hardy, J.E. Littlewood e G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge Mathematical Library, Cambridge (1989).

[24] S.W. Hawking e G.R. Ellis. *The Large Scale Structure of Spacetime*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1973).

[25] D. Hoffman, J.H. de Lira e H. Rosenberg. *Constant mean curvature surfaces in* $M^2 \times \mathbb{R}$, Trans. Amer. Math. Soc. **358(2)**, (2006), 491-507.

[26] A. Huber. *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv. **32**, (1957) 13-72.

[27] H.F. de Lima. *Fórmulas Integrais Tipo-Minkowski para Hipersuperfícies Tipo-Espaço em Variedades de Lorentz Conformemente Estacionárias e Aplicações*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará (2002).

[28] H.F. de Lima. *Spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in de Sitter space*, J. Geom. Phys. **57**, (2007) 967-975.

[29] H.F. de Lima. *A sharp height estimate for compact spacelike hypersurfaces with constant* r*-mean curvature in the Lorentz-Minkowski space and application*, preprint.

[30] R. López. *Area Monotonicity for spacelike surfaces with constant mean curvature*, J. Geom. Phys. **52**, (2004) 353-363.

[31] R. López e S. Montiel. *Existence of constant mean curvature graphs in hyperbolic space*, Calc. Var. **8**, (1999) 177-190.

[32] J.M. Malacarne. *Fórmulas do Fluxo, Simetrias e* r*-Curvatura Média Constante*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Ceará (2000).

[33] S. Montiel. *An integral inequality for compact spacelike hypersurfaces in de Sitter space and applications to the case of constant mean curvature*, Indiana Univ. Math. J. **37**, (1988) 909-917.

[34] S. Montiel e A. Ros. *Compact hypersurfaces: the Alexandrov theorem for higher order mean curvatures*, in *Differential geometry* (ed. B. Lawson e K. Tenenblat), pp. 279-296 (Longman, 1991).

[35] S. Montiel. *Unicity of Constant Mean Curvature Hypersurfaces in Some Riemannian Manifolds*, Indiana Univ. Math. J. **48**, (1999) 711-748.

[36] S. Montiel. *Uniqueness of Spacelike Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in foliated Spacetimes*, Math. Ann. **314**, (1999) 529-553.

[37] S. Montiel. *Complete non-compact spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in de Sitter Space*, J. Math. Soc. Japan **55**, (2003) 915-938.

[38] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, London (1983).

[39] B. Palmer. *The Gauss map of a spacelike constant mean curvature hypersurface in Minkowski space*, Comment. Math. Helv. **65** (1990), 52-57.

[40] H. Rosenberg, *Hypersurfaces of Constant Curvature in Space Forms*, Bull. Sc. Math. **117**, (1993) 217-239.

[41] J.A. Sánchez. *Hipersuperficies espaciales completas de curvatura media constante en el espacio de Sitter*, Tesina de Licenciatura, Universidad de Murcia (1998).

[42] P.A. Sousa. *O Laplaciano de uma função tipo-suporte e aplicações*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará (2004).

[43] Y.L. Xin. *On the Gauss image of a spacelike hypersurface with constant mean curvature in Minkowski space*, Comment. Math. Helv. **66** (1991), 590-598.