UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Jorge Antonio Hinojosa Vera

Representação de Superfícies em Grupos de Lie Tridimensionais

Fortaleza

2008

Jorge Antonio Hinojosa Vera

REPRESENTAÇÃO DE SUPERFÍCIES EM GRUPOS DE LIE TRIDIMENSIONAIS

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria diferencial

Orientador: Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira.

Fortaleza
2008

Hinojosa, Jorge Antonio

H554r Representação de superfícies em grupos de Lie tridimensionais/

Jorge Antonio Hinojosa Vera. Fortaleza: 2008.

144 f.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira.

Tese (doutorado). Universidade Federal do Ceará,

Curso de Pós-graduação em Matemática, 2008.

1. Geometria diferencial

CDD 516.36

Dedico este trabalho a meus pais, irmãos e filha.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente a Deus, pela disposição, coragem e serenidade a mim concedidas.

A meu orientador, Prof. Dr. Jorge Herbert de Lira, pelo trabalho de orientação, prestatividade, paciência, amizade e companherismo durante todos esses anos no curso de pós-graduação.

A meu irmão Pedro, pela amizade, companheirismo e preocupação com a minha pessoa.

A meus amigos Claudio Muños (Curanilahue-Chile), Daniel e Fernando (Recife), Natalicio e Mici (Fortaleza).

A todos meus amigos da pós-graduação em matemática da UFC, em especial a Francisco Andrade, Francisco Carpegiane, Marcos Melo, Juscelino Silva, Paulo Alexandre, Antonio Fernando (Tony), Feliciano Vitório, Gleydson Chaves, Fabricio Oliveira, Darlan Dantas, pela amizade em todos esses anos na PGMAT da UFC.

Aos professores da Pós-graduação em Matemática da UFC, em especial a Levi Lima, João Lucas M. Barbosa, Abdenego barros, Francisco Pimentel, Aldir Chaves e Abdou Garba.

A Andrea Dantas, secretária da Pós-graduação em Matemática da UFC. Pela sua assistência, competência e prontidão para resolver os pedidos de todos os alunos da Pós-graduação.

Aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco (Ufrpe), por facilitar meu afastamento para cursar o doutorado.

Finalmente, agradeço à Pro-reitoría de Pós-Graduação da Ufrpe pela bolsa PICDT-CAPES a mim concedida.

"Yo me crié en el Sur de América, bajo la lluvia fría
que durante 13 meses del año (dicen los Chilenos del Sur)
cae sobre pueblos, montañas y caminos, hasta mojar los archipiélagos
derramados en el Pacífico, transir las soledades de Patagonia
y congelarse en la Antártica pura.
Por eso, el radiante Brasil, que como una infinita mariposa verde
cierra e abre sus alas en el mapa de América, me electrizó
y me dejo soñando, buscando las señales de su magnetismo misterioso.
Pero cuando descubrí su gente dulce su pueblo fraternal y poderoso,
se completó mi corazón con una tierra indeleble.
A esta tierra y a este pueblo dedico com amor mi poesía."

Pablo Neruda.

Sumário

Resumo

Consideramos o problema de representação de superfícies imersas em grupos de Lie tridimensionais. Especificamente, nos espaços Hiperbólico, de Sitter, Heisenberg (Riemanniano e pseudo-Riemanniano), nas esferas de Berger e em espaços Anti de Sitter exóticos. Estabelecemos como condições de integrabilidade para a existência de uma imersão conforme de uma superfície de Riemann nos espaços Hiperbólico, de Sitter, Heisenberg (Riemanniano e pseudo-Riemanniano) as equações de compatibilidade para um sistema de primeira ordem, envolvendo uma equação de Dirac com potenciais geométricos. Nas esferas de Berger e nos espaços Anti de Sitter exóticos, demonstra-se que a harmonicidade de uma dada aplicação, definida na superfície com valores em abertos da esfera, é condição suficiente para a existência de uma imersão conforme mínima.

Abstract

We considered the problem of representation of immersed surfaces in three-dimensional Lie groups. We search for integrability conditions assuring the existence of a conformal immersion of a given Riemann surface in some Lie group with left-invariant metric. Such compatibility conditions are found to be a first order system, consisting of a Dirac equation with geometric potentials and an extra pair of equations relating the metric and the Hopf differential. In many cases, we proved that the harmonicity of a map, defined in an open of the sphere is a sufficient condition for the existence of a conformal minimal or constant mean curvature immersion.

Introdução

A representação de superfícies no espaço euclidiano com curvatura média prescrita, como estabelecida, em feição moderna, por K. Kenmotsu em 1981, é um tema recorrentemente explorado em Geometria Diferencial. Em [23], demonstra-se, complementando trabalho anterior de Ruh e Wilms (v. [35]), que, dada uma aplicação harmônica de uma superfície de Riemann na esfera, existe uma imersão desta superfície no espaço euclidiano com curvatura média constante, cuja aplicação de Gauss é justamente o mapeamento harmônico dado. Ademais, as coordenadas da imersão são explicitadas em fórmulas integrais.

O trabalho de Kenmotsu, historicamente precedido da ilustre Representação de Weierstrass para superfícies mínimas e de contribuições importantes compiladas nos tratados clássicos de Darboux e Eisenhart (v. [12] e [14]), assenta as bases para o notável esforço empreendido, desde então, para a construção e classificação de superfícies de curvatura média constante, a exemplo dos toros de Wente. Em outra direção, as técnicas de análise de equações diferenciais e sistemas integráveis utilizadas, e.g., em [42], [38], [6], [33], entre outras referências, motivaram diversas interpretações da Representação de Kenmotsu, incorporando-a a teorias diversas, tais como o relativamente recente método Dorfmeister-Pedit-Wu (v. [13] e [19]) ou a representação espinorial, nos distintos formatos em que é apresentada em artigos como [25], [39] e [15].

Nosso principal propósito é investigar de que modo os diferentes métodos mencionados acima podem ser ajustados à representação de superfícies em ambientes homogêneos não-euclidianos. O interesse por problemas desta natureza é sobretudo incitado por desenvolvimentos recentes na teoria de superfícies mínimas e de curvatura média constante em espaços homogêneos de dimensão três, a exemplo da demonstração da existência de diferenciais holomorfas associadas a estas superfícies em (v. [1]) e as noções de aplicação de Gauss fixadas em [10] e [17]. Simultaneamente a estes artigos, a pesquisa iniciada por Gelfand e Fokas em [16] e D. Berdisnski e I. Taimanov em [4] deixou evidente como a estrutura de grupo de Lie permite elaborar representações de superfícies envolvendo espinores e a equação de Dirac em vários destes ambientes.

Resumidamente, nos propomos, no que segue, a combinar a formulação espinorial dos resultados em [10] a noções convenientes de aplicações de Gauss para superfícies em alguns grupos de Lie tridimensionais, que resultem harmônicas em contextos naturais, como o de superfícies mínimas.

Dividimos a exposição em três partes, a primeira das quais concernente a superfícies no espaço hiperbólico e no aberto do espaço de Sitter, costumeiramente denominado *steady state space*. A parte seguinte trata de superfícies no espaço de Heisenberg, dotado tanto da métrica riemanniana usual, quanto de uma métrica lorentziana definida de modo correlato. Por fim, a última fração da tese versa sobre superfícies na esfera tridimensional e no espaço Anti de Sitter, onde consideramos as estruturas métricas "exóticas" que, no caso riemanniano, são conhecidas como esferas de Berger.

No Capítulo 1, esboçamos alguns preliminares e fixamos notações, nos restringindo ao estritamente necessário ao prosseguimento da leitura. Um, certamente desejável, tratamento mais extenso de aplicações harmônicas e estruturas espinoriais em superfícies de Riemann foi preterido em respeito a considerações de espaço. Remetemos o leitor às referências [22], [26], [6], [30] e [43].

O Capítulo seguinte detalha a estrutura de grupo do espaço hiperbólico e do *steady state space* como grupos de Lie dotados de uma métrica invariante à esquerda, cuja conexão e curvatura são explicitamente calculadas. Denotamos tais grupos por $\mathbb{H}^3(-\tau^2)$. Em seguida, demonstramos como superfícies imersas nestes grupos geram soluções de uma equação de Dirac com um potencial envonvendo dados geométricos da imersão. Uma recíproca deste fato é estabelecida no seguinte teorema.

Teorema 2.2.2. *Sejam Ω um domínio simplesmente conexo de uma superfície de Riemann Σ, $H : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e ψ_1 e ψ_2 funções complexas definidas em Ω que satisfazem $|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2 > 0$ e a equação de Dirac em $\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$, isto é,*

$$\partial_{\bar{z}}\psi_1 = -\frac{\epsilon}{2}\{\tau|\psi_2|^2 + H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)\}\psi_2,$$

$$\partial_z\psi_2 = -\frac{1}{2}\{\epsilon\tau|\psi_1|^2 - H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)\}\psi_1.$$

Então, a aplicação

$$X = (x_1, x_2, x_3) : \Omega \looparrowright \mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2),$$

definida por

$$\begin{aligned} x_1(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \psi_1\bar{\psi}_2 dz\right) \\ x_2(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)e^{\tau x_1} dz\right) \\ x_3(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)e^{\tau x_1} dz\right), \end{aligned} \tag{1}$$

é uma imersão conforme com curvatura média H.

Duas situações em que ocorre naturalmente a integrabilidade da equação de Dirac são as seguintes.

Corolário 2.3.2. *Seja $g : \Omega \subset \Sigma \to (\mathbb{D}, ds^2)$ uma aplicação harmônica nunca holomorfa definida sobre um domínio simplesmente conexo Ω de uma superfície de Riemann Σ, onde*

$$ds^2 = \lambda^2(w)|dw|^2 = \frac{1}{1-|w|^4}|dw|^2.$$

Então, a aplicação

$$X = (x_1, x_2, x_3) : \Omega \looparrowright \mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2),$$

definida por

$$\begin{aligned} x_1(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{2\epsilon}{\tau(|g|^4-1)}\bar{g}_z g dz\right) \\ x_2(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} (1-\epsilon g^2)\tfrac{\epsilon}{\tau(|g|^4-1)}\bar{g}_z e^{\tau x_1} dz\right) \\ x_3(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} (1+\epsilon g^2)\tfrac{i\epsilon}{\tau(|g|^4-1)}\bar{g}_z e^{\tau x_1} dz\right), \end{aligned} \tag{2}$$

é uma imersão mínima conforme e tem aplicação de Gauss g.

Corolário 2.3.4. *Seja $g : \Omega \to (\mathbb{D}_\epsilon, ds_\epsilon^2)$ uma aplicação harmônica nunca holomorfa definida sobre um domínio simplesmente conexo Ω de uma superfície de Riemann Σ, onde*

$$\mathbb{D}_\epsilon = \begin{cases} \mathbb{C}, & \epsilon = 1 \\ \mathbb{D}, & \epsilon = -1 \end{cases} \quad e \quad ds_\epsilon^2 = \frac{1}{1+\epsilon|w|^2}|dw|^2.$$

Então, a aplicação

$$X = (x_1, x_2, x_3) : \Omega \looparrowright \mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2),$$

definida por

$$\begin{aligned} x_1(z) &= -2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{\epsilon}{\tau(1+\epsilon|g|^2)} g\bar{g}_z dz\right) \\ x_2(z) &= -2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{\epsilon}{2\tau(1+\epsilon|g|^2)}(1-\epsilon g^2)\bar{g}_z e^{\tau x_1} dz\right) \\ x_3(z) &= -2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{i\epsilon}{2\tau(1+\epsilon|g|^2)}(1+\epsilon g^2)\bar{g}_z e^{\tau x_1} dz\right) \end{aligned} \tag{3}$$

é uma imersão conforme de curvatura média constante igual a τ e aplicação de Gauss g.

Nestes corolários, as condições de compatibilidade para a existência, ora de uma imersão mínima, ora de uma imersão com curvatura constante, igual à das horoesferas ambiente, correspondem à harmonicidade da aplicação de Gauss. Esta aplicação é definida como a translação à esquerda do vetor normal a um dado ponto da imersão para a esfera unitária da álgebra de Lie. Obviamente, no caso euclidiano, isto corresponde exatamente a noção usual. A harmonicidade desta aplicação é obtida considerando-se, como se depreende do enunciado, métricas particulares no disco, no plano ou no plano estendido. Por fim, registramos que, no caso euclidiano, teoremas deste tipo foram obtidos anteriormente por M. Kokubu (v. [24]), no caso mínimo, e por R. Sá Earp e E. Toubiana (v. [36]), quando $\tau = 1$. Neste último artigo, a aplicação de Gauss não é interpretada em termos da estrutura intrínseca de grupo, mas como à normal euclidiana a superfície no modelo do semi-espaço superior.

O capítulo seguinte, sobre o espaço de Heisenberg, tem estrutura similar ao anterior. Desta vez, baseamo-nos no artigo [10]. As contribuições originais em nosso estudo são, além da rotineira possibilidade de haver englobado o caso lorentziano, reobter os resultados em B. Daniel na linguagem de espinores e, em grau maior de importância, haver escrito os teoremas de representação em forma integral, a exemplo do trabalho precursor de F. Mercuri e colaboradores (v. [28]), desta vez estendidos a *qualquer* valor da curvatura média. O grupo de Heisenberg cuja métrica nas coordenadas exponenciais é dada por:

$$ds_\epsilon^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \epsilon\{(\tau x_2 dx_1 - \tau x_1 dx_2) + dx_3\}^2$$

é denotado por $\mathbb{H}_3(\tau)$. Os resultados centrais desta parte são os seguintes:

Teorema 3.1.1. *Sejam Ω um domínio simplesmente conexo de uma superfície de Riemann Σ e $H : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Suponha que as funções complexas ψ_1 e ψ_2 definidas em Ω satisfazem $|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2 > 0$ e a equação de Dirac em $\mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$, isto é,*

$$\partial_{\bar{z}}\psi_1 = -\frac{\epsilon}{2}\{H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\}\psi_2,$$

$$\partial_z\psi_2 = \frac{1}{2}\{H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\}\psi_1.$$

Então, a aplicação

$$X = (x_1, x_2, x_3) : \Omega \looparrowright \mathbb{H}_3(\epsilon, \tau),$$

definida por

$$\begin{aligned} x_1(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)dz\right) \\ x_2(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)dz\right) \\ x_3(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \{\tau[\tfrac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)x_1 - \tfrac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)x_2] + \psi_1\bar{\psi}_2\}dz\right), \end{aligned} \tag{4}$$

é uma imersão conforme com curvatura média H.

Corolário 3.2.3. *Seja $g : \Omega \subset \Sigma \to (\mathbb{D}, ds_\epsilon^2)$ uma aplicação harmônica nunca holomorfa, onde*

$$ds_\epsilon^2 = \lambda_\epsilon^2(w)|dw|^2 = \frac{1}{(1-\epsilon|w|^2)^2}|dw|^2.$$

Então, a aplicação

$$X = (x_1, x_2, x_3) : \Omega \looparrowright \mathbb{H}_3(\epsilon, \tau),$$

definida por

$$\begin{aligned} x_1(z) &= -2Re\left(\int_{z_0}^{z} (1-\epsilon g^2)\tfrac{i}{\tau(1-\epsilon|g|^2)^2}\bar{g}_z dz\right) \\ x_2(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} (1+\epsilon g^2)\tfrac{1}{\tau(1-\epsilon|g|^2)^2}\bar{g}_z dz\right) \\ x_3(z) &= -2Re\left(\int_{z_0}^{z} \{\tfrac{\tau}{2}[i(1+\epsilon g^2)x_1 - (1-\epsilon g^2)x_2] + g\}\tfrac{2i}{\tau(1-\epsilon|g|^2)^2}\bar{g}_z dz\right), \end{aligned} \tag{5}$$

é uma imersão mínima conforme e tem aplicação de Gauss g.

Várias questões são naturalmente suscitadas por nossa análise. É razoável conjecturar se, para cada valor do parâmetro τ, existe correspondência local entre superfícies mínimas em $\mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$ e superfícies de curvatura média $\tau/2$ em $\mathbb{H}^2(-\epsilon\tau^2) \times \mathbb{R}$, nos moldes do resultado obtido por B. Daniel em [11]. Uma outra suposição é de que a diferencial quadrática holomorfa obtida na Seção 3.1.3 pode ser reobtida a partir da imersão do espaço de Heisenberg como horoesfera do espaço hiperbólico complexo.

A parte final, que consideramos o núcleo deste trabalho, trata de superfícies na esfera tridimensional e no espaço Anti de Sitter, pensados, respectivamente, como o grupo SU_2 e como o revestimento universal de $\mathrm{SU}_{1,1}$. Em ambos os casos, consideramos nestes ambientes a família a um parâmetro (τ) de métricas invariantes à esquerda obtidas por mudança de escala de um dos vetores na álgebra de Lie. No caso riemanniano, esta construção gera as chamadas esferas de Berger denotadas por $\mathbb{S}^3_{1,\tau}$ e no caso do grupo $\mathrm{SU}_{1,1}$ gera os espaços Anti de Sitter exóticos denotados por $\mathbb{S}^3_{-1,\tau}$.

A atenção dispensada ao espaço Anti de Sitter em pesquisas sobre gravidade $2+1$ (a propósito, cf. [34]) motivou-nos a considerar o problema da representação de superfícies com curvatura média prescrita neste ambiente. Superfícies espaciais de curvatura média constante podem ser tomadas como superfícies iniciais para o problema de Cauchy na formulação de valor inicial da gravidade $2+1$. Em nosso trabalho, o elenco de condições de integrabilidade necessárias à construção de uma superfície deste tipo é abreviado, no caso mínimo, na existência de uma aplicação harmônica. O mesmo pode ser dito com respeito a superfícies mínimas em esferas de Berger. Para enunciar o resultado pertinente, primeiro definimos para $\epsilon = -1$ e $0 < \tau \leq 1$, a constante $r_0 = \frac{1}{\tau}(1 - \sqrt{1-\tau^2})$. Sendo assim, a expressão $\frac{4}{\tau^2}(1-\frac{1}{\tau^2}) + [\frac{2}{\tau^2} - 1 + \epsilon|w|^2]^2$ é positiva no disco $\mathbb{D}_{r_0} = \{w : |w| < r_0\}$. Agora enunciamos o resltado principal deste trabalho.

Teorema 4.6.1. *Seja Σ uma superfície de Riemann simplesmente conexa e orientada. Dada uma aplicação $g : \Sigma \to (\mathbb{D}^\tau_\epsilon, \lambda^2_{\epsilon,\tau})$ onde*

$$\mathbb{D}^\tau_\epsilon = \begin{cases} \mathbb{C}, & \epsilon = 1,\ 0 < \tau \\ \mathbb{D}_{r_0}, & \epsilon = -1,\ 0 < \tau \leq 1 \\ \mathbb{D}, & \epsilon = -1,\ 1 < \tau \end{cases} \quad \lambda^2_{\epsilon,\tau}(w) = \frac{1}{\frac{4}{\tau^2}(1-\frac{1}{\tau^2}) + [\frac{2}{\tau^2} - 1 + \epsilon|w|^2]^2}$$

harmônica nunca holomorfa, existe uma imersão mínima conforme, $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$ representada por

$$X^{-1}X_z = -\frac{i\epsilon}{\tau}\lambda^2_{\epsilon,\tau}(g)\{2\bar{g}_z g\hat{e}_1 + (1-\epsilon g^2)\bar{g}_z\hat{e}_2 + (1+\epsilon g^2)\bar{g}_z\hat{e}_3\}, \tag{6}$$

com aplicação de Gauss g.

Este teorema é baseado no seguinte resutado.

Proposição 4.4.1. *Seja α uma 1-forma definida em Σ com valores em $\mathfrak{g}$ localmente expressa por*

$$\alpha = \hat{e}_a \otimes \big(Z^a \mathrm{d}z + \bar{Z}^a \mathrm{d}\bar{z}\big),$$

para funções complexas $Z^a(z,\bar{z})$ definidas em Σ. Supomos que estas funções satisfazem o sistema (4.25)-(4.33) e as condições iniciais

$$\big(\epsilon(Z^1)^2 + (Z^2)^2 + (Z^3)^2\big)(z_0) = 0, \quad \big(\epsilon|Z^1|^2 + |Z^2|^2 + |Z^3|^2\big)(z_0) = \frac{1}{2}e^{2\omega(z_0,\bar{z}_0)}$$

onde $\omega(z,\bar{z})$, $H(z,\bar{z})$ e $q(z,\bar{z})$ são funções dadas em Σ. Então, existe uma imersão isométrica $X : \Sigma \to \mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$ tal que

$$X^{-1}\mathrm{d}X = \alpha,$$

isto é, X é uma primitiva de Darboux de α, $X^*\hat{\omega} = \alpha$. Além disso, esta imersão tem métrica prescrita

$$e^{2\omega}|\mathrm{d}z|^2$$

e segunda forma fundamental

$$\frac{q}{2}\mathrm{d}z^2 + \frac{H}{2}e^{2\omega}\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z} + \frac{\bar{q}}{2}\mathrm{d}\bar{z}^2.$$

Contrariamente ao que ocorre nos espaços hiperbólico, de Sitter e Heisenberg, em que coordenadas euclideanas subjacentes permitem reduzir o problema de integrabilidade a um correlato no espaço euclidiano, reescrevendo-se as condições de compatibilidade neste sistema de coordenadas, nas esferas e no Anti de Sitter devemos estabelecer, a parte, uma versão adequada do Teorema de Bonnet. Mencionamos, neste ponto, a pretensão futura de escrever em detalhes uma variante do Teorema Fundamental das Superfícies considerando as projeções tangente e normal do campo invariante à esquerda distinguido no ambiente respectivamente como *desvio* e *lapso* na superfície de Riemann. Para dados analíticos, o típico formalismo ADM em Relatividade Geral permitiria obter um teorema de imersão. Por sua vez, tal teorema, no caso lorentziano, poderia prestar-se a elaborar a teoria de buracos negros BTZ em espaços Anti de Sitter exóticos, seguindo a linha de trabalho de Bañados, Teltelboim e Zabelli (v. [2]) e P. Valtancoli (v. [40]).

Uma outra direção futura de pesquisa que pretendemos empreender é a integração, tão explícita quanto possível, das superfícies relacionados aos exemplos de aplicações harmônicas dscritos na última seção do Capítulo 4.

A idéia que nos impeliu a estudar superfícies via a estrutura de grupo de Lie ambiente foi a de reconstruir o método DPW para esferas e $\mathrm{SU}_{1,1}$ utilizando mudanças de referencial intrínsecas, isto é, modeladas respectivamente por SO_3 e $\mathrm{O}^{++}_{3,1}$, ao invés daquelas, tradicionalmente utilizadas no método, baseadas nos grupos spin $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2$ e $\mathrm{SU}_{1,1} \times \mathrm{SU}_{1,1}$, cuja utilização segue do fato de que estes espaços são usualmente tomados como quádricas em um ambiente quadridimensional plano. A vantagem aparente seria a de descrever o estudo de grupos de laços de maneira exatamente análoga ao correspondente em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{L}^3$ (v. [13], [18] e [7]). Isto é objeto de desenvolbimentos futuros.

Capítulo 1

Noções Preliminares

1.1 Teoria Local de Superfícies

Denotamos por $\tilde{M}_\epsilon$ uma variedade de dimensão 3 dotada de uma métrica riemanniana, quando $\epsilon = 1$, ou de uma métrica pseudo-riemanniana de índice 1, quando $\epsilon = -1$. Seja $X : \Sigma \looparrowright \tilde{M}_\epsilon$ uma imersão isométrica de uma superfície de Riemann conexa Σ em $\tilde{M}_\epsilon$. Denotamos por I e II a primeira e segunda formas fundamentais da imersão X. Assim,

$$I = \langle dX, dX \rangle, \tag{1.1}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a métrica em $\tilde{M}_\epsilon$ e

$$II = -\langle dN, dX \rangle, \tag{1.2}$$

onde N é um campo normal ao longo de X que, satisfaz

$$\langle N, N \rangle = \epsilon. \tag{1.3}$$

Denotamos por ∇ e $\bar{\nabla}$, respectivamente, as conexões de Levi-Civitá em Σ e em $\tilde{M}_\epsilon$. Consideramos, um parâmetro conforme $z = u + iv$ em Σ. Indicamos os campos coordenados referentes ao sistema de coordenadas (u, v) alternativamente por $\partial_u,\ \partial_v$ ou $X_u,\ X_v$. Os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ são

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle. \tag{1.4}$$

Denotando-se as derivadas covariantes por $\bar{\nabla}_{\partial_u}\partial_u = X_{uu},\ \bar{\nabla}_{\partial_u} N = N_u$, e assim por diante, obtém-se, para os coeficientes de II, as expressões

$$e = -\langle N_u, X_u \rangle, \quad f = -\langle N_u, X_v \rangle, \quad g = -\langle N_v, X_v \rangle. \tag{1.5}$$

O operador de Weingarten $A : T\Sigma \to T\Sigma$ é definido, atuando em um campo Y sobre o fibrado tangente a Σ, $T\Sigma$, por

$$AY = -\bar{\nabla}_Y N. \tag{1.6}$$

Seja (h_{ij}) a matriz deste operador na base $\{X_u, X_v\}$, i.e.,

$$\begin{aligned} AX_u &= h_{11}X_u + h_{21}X_v = -\bar{\nabla}_{X_u}N = -N_u, \\ AX_v &= h_{12}X_u + h_{22}X_v = -\bar{\nabla}_{X_v}N = -N_v. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Define-se a curvatura média H da imersão $X : \Sigma \looparrowright \tilde{M}_\epsilon$ por

$$H = \frac{\epsilon}{2}\mathrm{tr}(A) = \frac{\epsilon}{2}(h_{11} + h_{22}). \tag{1.8}$$

É imediato verificar que

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

donde segue que

$$AX_u = -N_u = \frac{eG - fF}{EG - F^2}X_u + \frac{fE - eF}{EG - F^2}X_v, \tag{1.10}$$

$$AX_v = -N_v = \frac{fG - gF}{EG - F^2}X_u + \frac{gE - fF}{EG - F^2}X_v. \tag{1.11}$$

No sistema de coordenadas conformes (u, v), temos

$$E = G =: e^{2\omega}, \qquad F = 0. \tag{1.12}$$

Denotamos os campos coordenados correspondentes aos parâmetros $(z, \bar{z})$ por

$$\frac{\partial}{\partial z} = \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_u - i\partial_v), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_u + i\partial_v)$$

ou, alternativamente, por

$$X_z = \frac{1}{2}(X_u - iX_v), \quad X_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(X_u + iX_v).$$

Temos, então,

$$X_u = X_z + X_{\bar{z}}, \quad X_v = i(X_z - X_{\bar{z}})$$

A métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de Σ tem coeficientes complexos

$$\langle X_z, X_z \rangle = \frac{1}{4}(E - G - 2iF) = 0, \tag{1.13}$$

$$\langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{4}(E + G) = \frac{1}{2}e^{2\omega}, \tag{1.14}$$

$$\langle X_{\bar{z}}, X_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{4}(E - G + 2iF) = 0. \tag{1.15}$$

Estendemos as conexões riemannianas em Σ e $\tilde{M}_\epsilon$ a vetores complexos por linearidade complexa, de modo que

$$X_{zz} = \bar{\nabla}_{X_z} X_z = \bar{\nabla}_{\frac{1}{2}(\partial_u - i\partial_v)} \frac{1}{2}(\partial_u - i\partial_v) = \frac{1}{4}(X_{uu} - X_{vv} - 2iX_{uv}), \tag{1.16}$$

$$X_{z\bar{z}} = \bar{\nabla}_{X_z} X_{\bar{z}} = \bar{\nabla}_{\frac{1}{2}(\partial_u - i\partial_v)} \frac{1}{2}(\partial_u + i\partial_v) = \frac{1}{4}(X_{uu} + X_{vv}), \tag{1.17}$$

$$X_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}} X_{\bar{z}} = \bar{\nabla}_{\frac{1}{2}(\partial_u + i\partial_v)} \frac{1}{2}(\partial_u + i\partial_v) = \frac{1}{4}(X_{uu} - X_{vv} + 2iX_{uv}). \tag{1.18}$$

Visto que as coodenadas (u, v) são conformes, obtemos de (1.12) e (1.9) a simetria $h_{12} = h_{21}$. Assim, denotando-se $N_z = \bar{\nabla}_{\partial_z} N = \frac{1}{2}(N_u - iN_v)$, segue da observação anterior e das relações em (1.7) que

$$\begin{aligned}
-N_z &= -\frac{1}{2}(N_u - iN_v) \\
&= \frac{1}{2}\{h_{11}X_u + h_{21}X_v - i(h_{12}X_u + h_{22}X_v)\} \\
&= \frac{1}{2}\{(h_{11} - ih_{21})X_u + (h_{21} - ih_{22})X_v\} \\
&= \frac{1}{2}\{(h_{11} - ih_{21})(X_z + X_{\bar{z}}) + (h_{21} - ih_{22})i(X_z - X_{\bar{z}})\} \\
&= \frac{1}{2}\{(h_{11} + h_{22})X_z + (h_{11} - h_{22} + 2ih_{21})X_{\bar{z}}\}.
\end{aligned}$$

Desta forma,

$$-N_z = \epsilon H X_z + q_0 X_{\bar{z}}, \tag{1.19}$$

$$-N_{\bar{z}} = \bar{q_0} X_z + \epsilon H X_{\bar{z}}, \tag{1.20}$$

onde

$$q_0 = \frac{1}{2}(h_{11} - h_{22} - 2ih_{12}).$$

Os coeficientes complexos da segunda forma são, pelas relações (1.16), (1.17) e (1.18),

$$\frac{q}{2} := \langle X_{zz}, N \rangle = -\langle X_z, N_z \rangle = \frac{1}{4}(e - g - 2if) = \frac{1}{2} q_0 e^{2\omega}, \tag{1.21}$$

$$\langle X_{z\bar{z}}, N \rangle = -\langle X_z, N_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{4}(e + g) = \frac{\epsilon}{2} H e^{2\omega}, \tag{1.22}$$

$$\frac{\bar{q}}{2} = \langle X_{\bar{z}\bar{z}}, N \rangle = -\langle X_{\bar{z}}, N_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{4}(e - g + 2if) = \frac{1}{2} \bar{q_0} e^{2\omega}. \tag{1.23}$$

Temos, ainda,

$$\langle X_z, X_{zz} \rangle = \langle X_z, X_{z\bar{z}} \rangle = \langle X_{\bar{z}}, X_{\bar{z}\bar{z}} \rangle = \langle X_{\bar{z}}, X_{z\bar{z}} \rangle = 0,$$

$$\langle X_{\bar{z}}, X_{zz}\rangle = \partial_z\langle X_{\bar{z}}, X_z\rangle = \frac{1}{2}\partial_z(e^{2\omega}) = e^{2\omega}\omega_z$$

e

$$\langle X_z, X_{\bar{z}\bar{z}}\rangle = \partial_{\bar{z}}\langle X_z, X_{\bar{z}}\rangle = \frac{1}{2}\partial_{\bar{z}}(e^{2\omega}) = e^{2\omega}\omega_{\bar{z}}$$

Portanto, as equações estruturais (Gauss-Weingarten) para o referencial complexo $\{X_z, X_{\bar{z}}\}$ reduzem-se a

$$X_{zz} = \bar{\nabla}_{X_z}X_z = \nabla_{X_z}X_z + \epsilon\langle\bar{\nabla}_{X_z}X_z, N\rangle N = 2\omega_z X_z + \frac{\epsilon}{2}qN, \tag{1.24}$$

$$X_{z\bar{z}} = X_{\bar{z}z} = \bar{\nabla}_{X_z}X_{\bar{z}} = \nabla_{X_z}X_{\bar{z}} + \epsilon\langle\bar{\nabla}_{X_z}X_{\bar{z}}, N\rangle N = \frac{1}{2}He^{2\omega}N, \tag{1.25}$$

$$X_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}X_{\bar{z}} = \nabla_{X_{\bar{z}}}X_{\bar{z}} + \epsilon\langle\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}X_{\bar{z}}, N\rangle N = 2\omega_{\bar{z}}X_{\bar{z}} + \frac{\epsilon}{2}\bar{q}N. \tag{1.26}$$

Derivamos a seguir condições de compatibilidade para as equações de Gauss-Weingarten, ditas equações de Gauss-Codazzi.

Abreviadamente, denotamos o referencial complexo por

$$\mathcal{F} = (X_z, X_{\bar{z}}, N)^T \tag{1.27}$$

e observamos que

$$\mathcal{F}_z = (X_{zz}, X_{\bar{z}z}, N_z)^T, \quad \mathcal{F}_{\bar{z}} = (X_{z\bar{z}}, X_{\bar{z}\bar{z}}, N_{\bar{z}})^T. \tag{1.28}$$

Sendo assim, a equação de compatibilidade é sucintamente descrita por

$$\mathcal{F}_{z\bar{z}} - \mathcal{F}_{\bar{z}z} = \mathcal{R} \tag{1.29}$$

o que equivale às equações

$$X_{zz\bar{z}} - X_{z\bar{z}z} = \bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}\bar{\nabla}_{X_z}X_z - \bar{\nabla}_{X_z}\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}X_z = \bar{R}(X_{\bar{z}}, X_z)X_z, \tag{1.30}$$

$$X_{\bar{z}z\bar{z}} - X_{\bar{z}\bar{z}z} = \bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}\bar{\nabla}_{X_z}X_{\bar{z}} - \bar{\nabla}_{X_z}\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}X_{\bar{z}} = \bar{R}(X_{\bar{z}}, X_z)X_{\bar{z}}, \tag{1.31}$$

$$N_{z\bar{z}} - N_{\bar{z}z} = \bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}\bar{\nabla}_{X_z}N - \bar{\nabla}_{X_z}\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}N = \bar{R}(X_{\bar{z}}, X_z)N, \tag{1.32}$$

onde $\bar{R}$ é o tensor de curvatura em $\tilde{M}_\epsilon$. Ocorre que as duas últimas equações são, de fato, equivalentes à primeira, de sorte que basta analisarmos (1.30). Calculamos, utilizando (1.24), (1.25), (1.19) e (1.20) e o fato de que $q_0 = e^{-2\omega}q$

$$\begin{aligned}
X_{zz\bar{z}} &= 2\omega_{z\bar{z}}X_z + 2\omega_z X_{z\bar{z}} + \frac{\epsilon}{2}q_{\bar{z}}N + \frac{\epsilon}{2}qN_{\bar{z}} \\
&= 2\omega_{z\bar{z}}X_z + 2\omega_z\frac{1}{2}He^{2\omega}N + \frac{\epsilon}{2}q_{\bar{z}}N - \frac{\epsilon}{2}q\left(\bar{q}_0X_z + \epsilon HX_{\bar{z}}\right) \\
&= \left(2\omega_{z\bar{z}} - \frac{\epsilon}{2}e^{-2\omega}q\bar{q}\right)X_z - \frac{1}{2}HqX_{\bar{z}} + \epsilon\left(He^{2\omega}\omega_z + \frac{\epsilon}{2}q_{\bar{z}}\right)N,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{z\bar{z}z} &= \frac{1}{2}H_z e^{2\omega}N + He^{2\omega}\omega_z N + \frac{1}{2}He^{2\omega}N_z \\
&= -\frac{1}{2}He^{2\omega}\left(\epsilon H X_z + q_0 X_{\bar{z}}\right) + \left(\frac{1}{2}H_z e^{2\omega} + He^{2\omega}\omega_z\right)N \\
&= -\frac{\epsilon}{2}H^2 e^{2\omega}X_z - \frac{1}{2}HqX_{\bar{z}} + \left(\frac{1}{2}H_z e^{2\omega} + He^{2\omega}\omega_z\right)N.
\end{aligned}$$

Deste modo, obtemos

$$X_{zz\bar{z}} - X_{z\bar{z}z} = \left(2\omega_{z\bar{z}} + \frac{\epsilon}{2}H^2 e^{2\omega} - \frac{\epsilon}{2}e^{-2\omega}q\bar{q}\right)X_z + \frac{1}{2}\left(\epsilon q_{\bar{z}} - H_z e^{2\omega}\right)N. \tag{1.33}$$

Por outro lado, o termo de curvatura em (1.30) pode ser expresso em coordenadas reais por

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X_{\bar{z}}, X_z)X_z &= \frac{1}{8}\bar{R}(X_u + iX_v, X_u - iX_v)(X_u - iX_v) \\
&= -\frac{i}{4}\bar{R}(X_u, X_v)(X_u - iX_v) \\
&= -\frac{1}{4}\{\bar{R}(X_u, X_v)X_v + i\bar{R}(X_u, X_v)X_u\}
\end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de que a extensão de $\bar{R}$ a vetores complexos é feita de modo $\mathbb{C}$-linear. Sendo assim, a parte tangente do termo de curvatura é

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X_{\bar{z}}, X_z)X_z, X_{\bar{z}}\rangle &= -\frac{1}{8}\langle \bar{R}(X_u, X_v)X_v + i\bar{R}(X_u, X_v)X_u, X_u + iX_v\rangle \\
&= -\frac{1}{8}\{\langle \bar{R}(X_u, X_v)X_v, X_u\rangle + i^2\langle \bar{R}(X_u, X_v)X_u, X_v\rangle \\
&= -\frac{1}{4}\langle \bar{R}(X_u, X_v)X_v, X_u\rangle \\
&= -\frac{1}{4}K_{\tilde{M}_\epsilon}e^{4\omega}
\end{aligned}$$

onde $K_{\tilde{M}_\epsilon}$ é a curvatura seccional em $\tilde{M}_\epsilon$ no plano tangente a Σ. Logo, de (1.33), obtemos

$$\left(2\omega_{z\bar{z}} + \frac{\epsilon}{2}H^2 e^{2\omega} - \frac{\epsilon}{2}e^{-2\omega}q\bar{q}\right)\frac{1}{2}e^{2\omega} = -\frac{1}{4}K_{\bar{M}_\epsilon}e^{4\omega},$$

donde inferimos que

$$2\omega_{z\bar{z}} + \frac{\epsilon}{2}H^2 e^{2\omega} - \frac{\epsilon}{2}e^{-2\omega}q\bar{q} = -\frac{1}{2}K_{\bar{M}}e^{2\omega},$$

ou seja,

$$\omega_{z\bar{z}} + \frac{\epsilon}{4}\left(H^2 + \epsilon K_{\bar{M}_\epsilon}\right)e^{2\omega} - \frac{\epsilon}{4}e^{-2\omega}q\bar{q} = 0.$$

Temos, também a partir de (1.33),

$$R^{\perp} = \langle \bar{R}(X_{\bar{z}}, X_z)X_z, N\rangle = \frac{\epsilon}{2}\left(\epsilon q_{\bar{z}} - H_z e^{2\omega}\right).$$

Portanto, verificamos que as equações de Gauss e Codazzi são respectivamente

$$\omega_{z\bar{z}} + \frac{\epsilon}{4}\left(H^2 + \epsilon K_{\tilde{M}_\epsilon}\right) e^{2\omega} - \frac{\epsilon}{4} e^{-2\omega} q\bar{q} = 0, \tag{1.34}$$

$$R^\perp = \langle \bar{R}(X_{\bar{z}}, X_z)X_z, N\rangle = \frac{\epsilon}{2}\left(\epsilon q_{\bar{z}} - H_z e^{2\omega}\right). \tag{1.35}$$

1.2 Superfícies em Grupos de Lie

Nesta seção, estabelecemos algumas notações e particularizamos algumas propriedades de imersões isométricas estudadas na seção anterior ao caso em que o espaço ambiente $\tilde{M}_\epsilon$ é um grupo de Lie. Consideramos a métrica ambiente invariante à esquerda. Denotamos por e o elemento unidade do grupo e fixamos uma base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ ortonormal positiva do espaço tangente ao grupo $\tilde{M}_\epsilon$ na unidade e, $T_e\tilde{M}_\epsilon$. Denotamos por E_1, E_2 e E_3 os campos invariantes à esquerda gerados pelos vetores $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ e $\hat{e}_3$, respectivamente. Isto é, pomos

$$E_i(x) \;=\; d(L_x)_e \cdot \hat{e}_i, \quad (i = 1, 2, 3),$$

onde

$$L_x : \tilde{M}_\epsilon \to \tilde{M}_\epsilon, \qquad L_x(y) \;=\; xy$$

é a translação à esquerda em $\tilde{M}_\epsilon$ pelo elemento x. Assim, $\{E_1, E_2, E_3\}$ é um referencial ortonormal positivo da álgebra de Lie do grupo $\tilde{M}_\epsilon$, que denotamos por $\mathfrak{m}_\epsilon$.

Definição 1. *Para U, $V \in \mathfrak{m}_\epsilon$, definimos o produto exterior $U \times V$ por*

$$\langle U \times V, W\rangle = \det_{(E_1,E_2,E_3)}(U, V, W), \qquad W \in \mathfrak{m}_\epsilon \tag{1.36}$$

Definição 2. *A aplicação de Gauss da imersão isométrica $X : \Sigma \looparrowright \tilde{M}_\epsilon$ é a aplicação*

$$\eta : \Sigma \to \mathbb{S}^2_\epsilon \subset T_e\tilde{M}_\epsilon, \quad \eta(p) = dL_{(X(p))^{-1}}N(p),$$

onde

$$\mathbb{S}^2_\epsilon = \left\{a\hat{e}_1 + b\hat{e}_2 + c\hat{e}_3 \in T_e\tilde{M}_\epsilon : \langle a\hat{e}_1 + b\hat{e}_2 + c\hat{e}_3, a\hat{e}_1 + b\hat{e}_2 + c\hat{e}_3\rangle = \epsilon\right\}$$

é a esfera unitária em $T_e\tilde{M}_\epsilon$, quando $\epsilon = 1$, ou um hiperbolóide, quando $\epsilon = -1$.

Em outros termos, η é a translação à esquerda do vetor normal N à unidade.

Observação 1. *Se o campo normal* N *da imersão isométrica* $X : \Sigma \looparrowright \tilde{M}_\epsilon$ *é expressa no referencial invariante à esquerda por* $N = N^1E_1 + N^2E_2 + N^3E_3$, *então*

$$\eta = N^1\hat{e}_1 + N^2\hat{e}_2 + N^3\hat{e}_3.$$

Observação 2. *Usando a fórmula de Koszul, temos (veja proposição* 3.18 *de [9])*

$$\bar{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}\{[X,Y] - (ad_X)^*Y - (ad_Y)^*X\}, \quad X, Y \in \mathfrak{m}_\epsilon, \tag{1.37}$$

onde $(ad_X)^*$ *é a aplicação adjunta de* ad_X *em relação a* $\langle\cdot,\cdot\rangle$, *sendo que*

$$ad_X : \mathfrak{m}_\epsilon \to \mathfrak{m}_\epsilon, \quad ad_X(Y) = [X,Y].$$

A seguir, estabelecemos algumas fórmulas que utilizamos nos capítulos seguintes. Seja $X : \Sigma \looparrowright \tilde{M}_\epsilon$ uma imersão isométrica de uma superfície de Riemann Σ no grupo de Lie $\tilde{M}_\epsilon$. Utilizando o referencial $\{E_1, E_2, E_3\}$ ortonormal do grupo, podemos escrever no domínio de um parâmetro conforme $z = u + iv$ de Σ,

$$X_z = Z^1E_1|_X + Z^2E_2|_X + Z^3E_3|_X,\ X_{\bar{z}} = \bar{Z}^1E_1|_X + \bar{Z}^2E_2|_X + \bar{Z}^3E_3|_X. \tag{1.38}$$

A condição de conformalidade pode ser expressa como

$$\langle X_z, X_z\rangle = 0 \quad (= \langle X_{\bar{z}}, X_{\bar{z}}\rangle), \tag{1.39}$$

ao passo que a condição de X ser uma imersão pode ser expressa

$$\langle X_z, X_{\bar{z}}\rangle = \frac{1}{2}e^{2\omega}. \tag{1.40}$$

Denotamos por Γ_{ij}^k os símbolos de Christoffel dos campos E_1, E_2 e E_3, o que nos permite escrever

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\partial_z} X_{\bar{z}} &= \bar{\nabla}_{\partial_z}\left(\sum_{i=1}^3 \bar{Z}^i E_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^3 \partial_z(\bar{Z}^i)E_i + \sum_{i=1}^3 \bar{Z}^i \bar{\nabla}_{\partial_z} E_i \\
&= \sum_{i=1}^3 \partial_z(\bar{Z}^i)E_i + \sum_{i=1}^3 \bar{Z}^i \sum_{j=1}^3 Z^j \bar{\nabla}_{E_j} E_i \\
&= \sum_{k=1}^3 \partial_z(\bar{Z}^k)E_k + \sum_{i,j,k=1}^3 \bar{Z}^i Z^j \Gamma_{ji}^k E_k \\
&= \sum_{k=1}^3 \{\partial_z(\bar{Z}^k) + \sum_{i,j=1}^3 \bar{Z}^i Z^j \Gamma_{ji}^k\} E_k.
\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\bar{\nabla}_{\partial_z} X_{\bar{z}} = \sum_{k=1}^{3} \{\partial_z(\bar{Z}^k) + \sum_{i,j=1}^{3} \bar{Z}^i Z^j \Gamma_{ji}^k\} E_k. \tag{1.41}$$

Analogamente, calculamos

$$\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}} X_z = \sum_{k=1}^{3} \{\partial_{\bar{z}}(Z^k) + \sum_{i,j=1}^{3} Z^i \bar{Z}^j \Gamma_{ji}^k\} E_k, \tag{1.42}$$

$$\bar{\nabla}_{\partial_z} X_z = \sum_{k=1}^{3} \{\partial_z(Z^k) + \sum_{i,j=1}^{3} Z^i Z^j \Gamma_{ji}^k\} E_k. \tag{1.43}$$

Por outro lado, pela equação (1.25), obtemos

$$-\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}} X_z + \bar{\nabla}_{\partial_z} X_{\bar{z}} = 0, \tag{1.44}$$

$$\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}} X_z + \bar{\nabla}_{\partial_z} X_{\bar{z}} = e^{2\omega} HN. \tag{1.45}$$

Assim, em vista das relações (1.41) e (1.42), as equações (1.44) e (1.45) tornam-se, em termos das funções complexas Z^j, $j = 1, 3$,

$$\sum_{k=1}^{3} \{-\partial_{\bar{z}} Z^k + \partial_z \bar{Z}^k + \sum_{i,j} (-Z^i \bar{Z}^j + \bar{Z}^i Z^j) \Gamma_{ji}^k\} E_k|_X = 0, \tag{1.46}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \{\partial_{\bar{z}} Z^k + \partial_z \bar{Z}^k + \sum_{i,j} (Z^i \bar{Z}^j + \bar{Z}^i Z^j) \Gamma_{ji}^k\} E_k|_X = e^{2\omega} HN. \tag{1.47}$$

Procedendo de modo similar, deduzimos, a partir das equações (1.24) e (1.43),

$$\sum_{k=1}^{3} \{\partial_z Z^k + \sum_{i,j} Z^i Z^j \Gamma_{ji}^k\} E_k|_X = \sum_{k=1}^{3} \{2\,\omega_z Z^k + \frac{\epsilon}{2}\, q N^k\} E_k|_X. \tag{1.48}$$

A partir de (1.43), a função componente da diferencial de Hopf pode ser escrita em termos das funções complexas Z^j, $j = 1, 2, 3$ e dos símbolos de Christoffel dos campos E_1, E_2 e E_3 como

$$\frac{q}{2} = \sum_{i=1}^{3} \partial_z Z^i \langle E_i, N\rangle + \sum_{i,j,k=1}^{3} Z^i Z^j \Gamma_{ji}^k \langle E_k, N\rangle. \tag{1.49}$$

1.3 Aplicações Harmônicas entre Superfícies de Riemann

Seja $f : \Sigma \to N$ uma aplicação diferenciável entre superfícies de Riemann. Fixamos parâmetros conformes $z = u + iv$ e $w = x_1 + ix_2$ em Σ e N, respectivamente, de modo que f é localmente representada por

$$z = u + iv \xrightarrow{f} w = x_1(u,v) + ix_2(u,v).$$

Denotamos os coeficientes da métrica em N nas coordenadas (x_1, x_2) por

$$g^N_{ij}(x_1, x_2) = \lambda^2(x_1, x_2)\delta_{ij},$$

o que implica que os símbolos de Christoffel da conexão riemanniana correspondente, com respeito ao referencial $\{\partial_{x_1}, \partial_{x_2}\}$, são dados por

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = -\Gamma^1_{22} = \frac{\lambda_{x_1}}{\lambda}, \qquad \Gamma^2_{22} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\Gamma^2_{11} = \frac{\lambda_{x_2}}{\lambda}. \tag{1.50}$$

Sabemos que f é harmônica se, e somente se, sua expressão local satisfaz

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial z \partial \bar{z}} + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} \frac{\partial x_j}{\partial z} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{z}} = 0, \ \ i = 1, 2. \tag{1.51}$$

Estas equações correspondem, em vista de (1.50), a

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial z \partial \bar{z}} + \Gamma^1_{11}\{\frac{\partial x_1}{\partial z}\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial x_2}{\partial z}\frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}}\} + \Gamma^2_{22}\{\frac{\partial x_1}{\partial z}\frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial x_2}{\partial z}\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}}\} = 0, \tag{1.52}$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial z \partial \bar{z}} - \Gamma^2_{22}\{\frac{\partial x_1}{\partial z}\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial x_2}{\partial z}\frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}}\} + \Gamma^1_{11}\{\frac{\partial x_1}{\partial z}\frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial x_2}{\partial z}\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}}\} = 0. \tag{1.53}$$

Ao somarmos a equação (1.52) à equação (1.53) multiplicada por i, obtemos

$$f_{z\bar{z}} + (\Gamma^1_{11} - i\Gamma^2_{22})\{[\frac{\partial x_1}{\partial z}\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial x_2}{\partial z}\frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}}] + i[\frac{\partial x_1}{\partial z}\frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial x_2}{\partial z}\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}}]\} = 0,$$

equação que pode ser expressa como

$$f_{z\bar{z}} + (\Gamma^1_{11} - i\Gamma^2_{22})(\frac{\partial x_1}{\partial z} + i\frac{\partial x_2}{\partial z})(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i\frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}}) = 0,$$

ou, ainda, por

$$f_{z\bar{z}} + (\Gamma^1_{11} - i\Gamma^2_{22})f_z f_{\bar{z}} = 0, \tag{1.54}$$

onde

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} - i\Gamma^2_{22} &= (\Gamma^1_{11} - i\Gamma^2_{22})(f(z)) \\ &= \frac{1}{\lambda(f(z))}\{\lambda_{x_1}(f(z)) - i\lambda_{x_2}(f(z))\} \\ &= \frac{2}{\lambda(f(z))}\lambda_w(f(z)). \end{aligned}$$

Portanto, (1.54) pode ser escrita como

$$f_{z\bar{z}} + \frac{2}{\lambda(f(z))}\lambda_w(f(z))f_z f_{\bar{z}} = 0. \tag{1.55}$$

Com a notação acima, temos

Proposição 1.3.1. *Se $f : \Sigma \to N$ é uma aplicação harmônica, então a forma diferencial quadrática*

$$Q = \lambda^2(f(z))f_z\bar{f}_z dz^2$$

é holomorfa.

Prova. Por (1.55), obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\lambda^2 f_z\bar{f}_z\right)_{\bar{z}} &= 2\lambda(\lambda_w w_{\bar{z}} + \lambda_{\bar{w}}\bar{w}_{\bar{z}})f_z\bar{f}_z + \lambda^2(f_{z\bar{z}}\bar{f}_z + f_z\bar{f}_{z\bar{z}}) \\
&= 2\lambda(\lambda_w f_{\bar{z}}f_z\bar{f}_z + \lambda_{\bar{w}}\bar{f}_{\bar{z}}f_z\bar{f}_z) + \lambda^2(f_{z\bar{z}}\bar{f}_z + f_z\overline{f_{z\bar{z}}}) \\
&= 2\lambda(\lambda_w|f_{\bar{z}}|^2 f_z + \lambda_{\bar{w}}|f_z|^2\bar{f}_z) + \lambda^2\left[(-\frac{2}{\lambda}\lambda_w f_z f_{\bar{z}})\bar{f}_z + (-\frac{2}{\lambda}\lambda_{\bar{w}}\bar{f}_{\bar{z}}\bar{f}_z)f_z\right] \\
&= 2\lambda(\lambda_w|f_{\bar{z}}|^2 f_z + \lambda_{\bar{w}}|f_z|^2\bar{f}_z) - 2\lambda(\lambda_w f_z f_{\bar{z}}\bar{f}_z + \lambda_{\bar{w}}\bar{f}_{\bar{z}}\bar{f}_z f_z) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Superfícies no Espaço Hiperbólico e no Espaço de Sitter

2.1 O Espaço Hiperbólico e o Espaço de Sitter como Grupos de Lie

A seguir, apresentamos a estrutura de grupo de Lie do espaço hiperbólico de dimensão 3 e curvatura seccional constante $-\tau^2$ e do espaço de Sitter tridimensional com curvatura τ^2. Considere o conjunto

$$\mathrm{G}_\tau^3 = \mathrm{G}_\tau = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & e^{\tau s} & 0 & x \\ 0 & 0 & e^{\tau s} & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ : \ (s,x,y) \in \mathbb{R}^3 \right\}. \tag{2.1}$$

Por ser subgrupo e subconjunto fechado, G_τ é um subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(4,\mathbb{R})$, grupo das matrizes reais 4×4 com determinante não nulo. Denotamos por e a matriz unidade de ordem 4 e observamos que o espaço tangente a G_τ na unidade é

$$T_e\mathrm{G}_\tau = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & \tau a & 0 & b \\ 0 & 0 & \tau a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ : \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \mathrm{span}\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\},$$

onde

$$\hat{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Identificando a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & e^{\tau s} & 0 & x \\ 0 & 0 & e^{\tau s} & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de G_τ às coordenadas (s, x, y), verificamos que a translação à esquerda em G_τ pelo elemento (s', x', y') é dada por

$$L_{(s',x',y')} : \mathrm{G}_\tau \to \mathrm{G}_\tau, \quad L_{(s',x',y')}(s, x, y) = (s' + s, x' + e^{\tau s'}x, y' + e^{\tau s'}y).$$

Logo, se denotamos por E_i a translação à esquerda do vetor $\hat{e}_i$, então

$$\begin{aligned} E_1(s,x,y) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} L_{(s,x,y)}(t,0,0) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(s+t,x,y) = \partial_s|_{(s,x,y)}, \\ E_2(s,x,y) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} L_{(s,x,y)}(0,t,0) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(s,x+e^{\tau s}t,y) = e^{\tau s}\partial_x|_{(s,x,y)}, \\ E_3(s,x,y) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} L_{(s,x,y)}(0,0,t) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(s,x,y+e^{\tau s}t) = e^{\tau s}\partial_y|_{(s,x,y)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, mediante a identificação

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & \tau a & 0 & b \\ 0 & 0 & \tau a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in T_e\mathrm{G}_\tau \leftrightarrow (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,$$

vemos que o colchete (ou produto) em $T_e\mathrm{G}_\tau$ é dado por

$$[(a', b', c'), (a, b, c)] = (0, \tau(a'b - ab'), \tau(a'c - ac')),$$

donde

$$[\hat{e}_1, \hat{e}_2] = \tau\hat{e}_2, \quad [\hat{e}_1, \hat{e}_3] = \tau\hat{e}_3, \quad [\hat{e}_2, \hat{e}_3] = 0. \tag{2.2}$$

Considere sobre G_τ as métricas riemanniana ($\epsilon = 1$) e pseudo-riemannina ($\epsilon = -1$) que, nas coordenadas (s, x, y), são dadas por

$$g_{\epsilon,\tau} = \epsilon(ds)^2 + e^{-2\tau s}\{(dx)^2 + (dy)^2\} \tag{2.3}$$

Inicialmente, observamos que

Proposição 2.1.1. *As métricas $g_{\epsilon,\tau}$ definidas sobre o grupo G_τ são invariantes à esquerda.*

Prova. De fato,

$$\begin{aligned} L^*_{(s',x',y')} g_{\epsilon,\tau} &= \epsilon\{d(s'+s)\}^2 + e^{-2\tau(s'+s)}\{[d(x'+e^{\tau s'}x)]^2 + [d(y'+e^{\tau s'}y)]^2\} \\ &= \epsilon ds^2 + e^{-2\tau(s'+s)}\{(e^{\tau s'}dx)^2 + (e^{\tau s'}dy)^2\} \\ &= \epsilon ds^2 + e^{-2\tau s}\{dx^2 + dy^2\} \\ &= g_{\epsilon,\tau} \end{aligned}$$

□

Denotamos o grupo de Lie G_τ dotado da métrica $g_{\epsilon,\tau}$ por $\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$. Note que se $\tau = 0$, então $(\mathrm{G}_\tau, g_{1,\tau})$ é o espaço Euclideano de dimensão 3 e $(\mathrm{G}_\tau, g_{-1,\tau})$ é o espaço de Lorentz $\mathbb{L}^3$. Além disso, temos

Proposição 2.1.2. *Se $\tau \neq 0$, então o grupo de Lie G_τ dotado da métrica $g_{1,\tau}$ (resp. $g_{-1,\tau}$) é isométrico ao espaço hiperbólico de curvatura seccional constante $-\tau^2$, $\mathbb{H}^3(-\tau^2)$ (resp. ao aberto do espaço de Sitter tridimensional denominado steady state space).*

Prova. De fato, a transformação de coordenadas

$$(s,x,y) \to (\widetilde{s},\widetilde{x},\widetilde{y}) \quad \begin{cases} \widetilde{s} &= e^{\tau s} \\ \widetilde{x} &= \tau x \\ \widetilde{y} &= \tau y \end{cases}$$

transforma o grupo G_τ, no caso em que $\epsilon = 1$, no modelo do semi-espaço superior do espaço hiperbólico; e, no caso em que $\epsilon = -1$, no modelo do semi espaço superior do espaço de Sitter. Temos,

$$d\widetilde{s} = \tau e^{\tau s} ds, \quad d\widetilde{x} = \tau dx, \quad d\widetilde{y} = \tau dy.$$

Logo, para $\tau \neq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau^2 \widetilde{s}^2}\{\epsilon(d\widetilde{s})^2 + (d\widetilde{x})^2 + (d\widetilde{y})^2\} &= \frac{1}{\tau^2 e^{2\tau s}}\{\epsilon\tau^2 e^{2\tau s}(ds)^2 + \tau^2(dx)^2 + \tau^2(dy)^2\} \\ &= \epsilon(d\widetilde{s})^2 + e^{-2\tau s}\{(dx)^2 + (dy)^2\} \\ &= g_{\epsilon,\tau} \end{aligned}$$

□

A métrica $g_{\epsilon,\tau}$ restrita ao espaço tangente $T_e\mathrm{G}_\tau$ é dada nas coordenadas (a, b, c) por

$$g_{\epsilon,\tau}|_{T_e\mathrm{G}_\tau} = \epsilon da^2 + db^2 + dc^2,$$

o que resulta em

$$\langle \hat{e}_1, \hat{e}_1 \rangle = \epsilon, \quad \langle \hat{e}_i, \hat{e}_j \rangle = \delta_{ij} \ \ (j > 1). \tag{2.4}$$

De (2.2) e (2.4), inferimos que o referencial $\{E_1, E_2, E_3\}$ satisfaz

$$[E_1, E_2] = \tau E_2, \ \ [E_2, E_3] = 0, \ \ [E_3, E_1] = -\tau E_3, \tag{2.5}$$

$$\langle E_1, E_1 \rangle = \epsilon, \quad \langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij} \ \ (j > 1). \tag{2.6}$$

Além disso, temos

Lema 2.1.1. *O referencial $\{E_1, E_2, E_3\}$ satisfaz*

$$\begin{array}{lll} \bar{\nabla}_{E_1} E_1 = 0 & \bar{\nabla}_{E_2} E_1 = -\tau E_2 & \bar{\nabla}_{E_3} E_1 = -\tau E_3 \\ \bar{\nabla}_{E_1} E_2 = 0 & \bar{\nabla}_{E_2} E_2 = \epsilon\tau E_1 & \bar{\nabla}_{E_3} E_2 = 0 \\ \bar{\nabla}_{E_1} E_3 = 0 & \bar{\nabla}_{E_2} E_3 = 0 & \bar{\nabla}_{E_3} E_3 = \epsilon\tau E_1 \end{array} \tag{2.7}$$

Prova. De (1.37), temos

$$\langle \bar{\nabla}_{E_1} E_1, E_1 \rangle = -\langle (ad_{E_1})^* E_1, E_1 \rangle = -\langle E_1, [E_1, E_1] \rangle = 0$$

$$\langle \bar{\nabla}_{E_1} E_1, E_2 \rangle = -\langle (ad_{E_1})^* E_1, E_2 \rangle = -\langle E_1, [E_1, E_2] \rangle = -\langle E_1, \tau E_2 \rangle = 0$$

$$\langle \bar{\nabla}_{E_1} E_1, E_3 \rangle = -\langle (ad_{E_1})^* E_1, E_3 \rangle = -\langle E_1, [E_1, E_3] \rangle = -\langle E_1, \tau E_3 \rangle = 0.$$

Logo, $\bar{\nabla}_{E_1} E_1 = 0$. Analogamente, obtemos

$$\langle \bar{\nabla}_{E_2} E_2, E_1 \rangle = -\langle (ad_{E_2})^* E_2, E_1 \rangle = -\langle E_2, [E_2, E_1] \rangle = -\langle E_2, -\tau E_2 \rangle = \tau$$

$$\langle \bar{\nabla}_{E_2} E_2, E_2 \rangle = -\langle (ad_{E_2})^* E_2, E_2 \rangle = -\langle E_2, [E_2, E_2] \rangle = 0$$

$$\langle \bar{\nabla}_{E_2} E_2, E_3 \rangle = -\langle (ad_{E_2})^* E_2, E_3 \rangle = -\langle E_2, [E_2, E_3] \rangle = 0.$$

Assim, $\bar{\nabla}_{E_2} E_2 = \epsilon\tau E_1$. Calcula-se, agora,

$$\langle \bar{\nabla}_{E_3} E_3, E_1 \rangle = -\langle (ad_{E_3})^* E_3, E_1 \rangle = -\langle E_3, [E_3, E_1] \rangle = -\langle E_3, -\tau E_3 \rangle = \tau$$

$$\langle \bar{\nabla}_{E_3} E_3, E_2 \rangle = -\langle (ad_{E_3})^* E_3, E_2 \rangle = -\langle E_3, [E_3, E_2] \rangle = 0$$

$$\langle \bar{\nabla}_{E_3} E_3, E_3 \rangle = -\langle (ad_{E_3})^* E_3, E_3 \rangle = -\langle E_3, [E_3, E_3] \rangle = 0.$$

Logo, $\bar{\nabla}_{E_3}E_3 = \epsilon\tau E_1$. Temos, ainda,

$$\begin{aligned}
\langle\bar{\nabla}_{E_1}E_2, E_1\rangle &= \frac{1}{2}\langle[E_1, E_2] - (ad_{E_1})^*E_2 - (ad_{E_2})^*E_1, E_1\rangle \\
&= \frac{1}{2}\{\langle[E_1, E_2], E_1\rangle - \langle E_2, [E_1, E_1]\rangle - \langle E_1, [E_2, E_1]\rangle\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle\bar{\nabla}_{E_1}E_2, E_2\rangle &= \frac{1}{2}\langle[E_1, E_2] - (ad_{E_1})^*E_2 - (ad_{E_2})^*E_1, E_2\rangle \\
&= \frac{1}{2}\{\langle[E_1, E_2], E_2\rangle - \langle E_2, [E_1, E_2]\rangle - \langle E_1, [E_2, E_2]\rangle\} \\
&= \frac{1}{2}\{\tau - \tau\} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle\bar{\nabla}_{E_1}E_2, E_3\rangle &= \frac{1}{2}\langle[E_1, E_2] - (ad_{E_1})^*E_2 - (ad_{E_2})^*E_1, E_3\rangle \\
&= \frac{1}{2}\{\langle[E_1, E_2], E_3\rangle - \langle E_2, [E_1, E_3]\rangle - \langle E_1, [E_2, E_3]\rangle\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Sendo assim, $\bar{\nabla}_{E_1}E_2 = 0$ e $\bar{\nabla}_{E_2}E_1 = [E_2, E_1] + \bar{\nabla}_{E_1}E_2 = -\tau E_2$. Continuamos, calculando

$$\begin{aligned}
\langle\bar{\nabla}_{E_1}E_3, E_1\rangle &= \frac{1}{2}\langle[E_1, E_3] - (ad_{E_1})^*E_3 - (ad_{E_3})^*E_1, E_1\rangle \\
&= \frac{1}{2}\{\langle[E_1, E_3], E_1\rangle - \langle E_3, [E_1, E_1]\rangle - \langle E_1, [E_3, E_1]\rangle\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle\bar{\nabla}_{E_1}E_3, E_2\rangle &= \frac{1}{2}\langle[E_1, E_3] - (ad_{E_1})^*E_3 - (ad_{E_3})^*E_1, E_2\rangle \\
&= \frac{1}{2}\{\langle[E_1, E_3], E_2\rangle - \langle E_3, [E_1, E_2]\rangle - \langle E_1, [E_3, E_2]\rangle\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle\bar{\nabla}_{E_1}E_3, E_3\rangle &= \frac{1}{2}\langle[E_1, E_3] - (ad_{E_1})^*E_3 - (ad_{E_3})^*E_1, E_3\rangle \\
&= \frac{1}{2}\{\langle[E_1, E_3], E_3\rangle - \langle E_3, [E_1, E_3]\rangle - \langle E_1, [E_3, E_3]\rangle\} \\
&= \frac{1}{2}\{\tau - \tau\} = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\bar{\nabla}_{E_1}E_3 = 0$ e $\bar{\nabla}_{E_3}E_1 = [E_3, E_1] + \bar{\nabla}_{E_1}E_3 = -\tau E_3$. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\langle\bar{\nabla}_{E_2}E_3, E_1\rangle &= \frac{1}{2}\langle[E_2, E_3] - (ad_{E_2})^*E_3 - (ad_{E_3})^*E_2, E_1\rangle \\
&= \frac{1}{2}\{\langle[E_2, E_3], E_1\rangle - \langle E_3, [E_2, E_1]\rangle - \langle E_2, [E_3, E_1]\rangle\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\nabla}_{E_2}E_3, E_2\rangle &= \frac{1}{2}\langle [E_2,E_3] - (ad_{E_2})^* E_3 - (ad_{E_3})^* E_2, E_2\rangle \\
&= \frac{1}{2}\{\langle [E_2,E_3],E_2\rangle - \langle E_3,[E_2,E_2]\rangle - \langle E_2,[E_3,E_2]\rangle\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\nabla}_{E_2}E_3, E_3\rangle &= \frac{1}{2}\langle [E_2,E_3] - (ad_{E_2})^* E_3 - (ad_{E_3})^* E_2, E_3\rangle \\
&= \frac{1}{2}\{\langle [E_2,E_3],E_3\rangle - \langle E_3,[E_2,E_3]\rangle - \langle E_2,[E_3,E_3]\rangle\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Desta forma, $\bar{\nabla}_{E_2}E_3 = 0$ e $\bar{\nabla}_{E_3}E_2 = [E_3,E_2] + \bar{\nabla}_{E_2}E_3 = 0$. □

O lema acima pode ser abreviado do seguinte modo.

Observação 3. *Os símbolos de Christoffel de $\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$ relativamente ao referencial $\{E_1,E_2,E_3\}$ são*

$$\Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{33} = \epsilon\tau, \quad \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = -\tau, \quad \textit{outros } \Gamma^k_{ij} = 0. \tag{2.8}$$

Observamos, ainda, que estes cálculos podem ser facilmente deduzidos do fato de que ∂_s é um campo de Killing perpendicular as folhas $s = cte.$, horoesferas do espaço $\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$. Neste caso, $\epsilon\tau$ é a curvatura média das horoesferas. De fato, para a folha $\{s \equiv s_0\}$, as curvas

$$\alpha(t) = (s_0, t, y_0), \quad \beta(t) = (s_0, x_0, t)$$

satisfazem $\alpha' = \partial_x|_\alpha$, $\beta' = \partial_y|_\beta$ e $\alpha(x_0) = \beta(y_0) = (s_0,x_0,y_0) = p_0$. Assim, se N é o vetor normal e A é o operador de Weingarten da folha $\{s \equiv s_0\}$ em $\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$, então, pelo fato de que $\bar{\nabla}_{E_2}E_1 = \tau E_2$, obtemos, no ponto p_0,

$$A\alpha' = -\bar{\nabla}_{\alpha'}N = -\bar{\nabla}_{\partial_x}\partial_s = -\bar{\nabla}_{e^{-\tau s}E_2}E_1 = -e^{-\tau s}\bar{\nabla}_{E_2}E_1 = \tau e^{-\tau s}E_2 = \tau\partial_x.$$

Portanto, $A\alpha'(x_0) = \tau\alpha'(x_0)$. Analogamente, de $\bar{\nabla}_{E_3}E_1 = \tau E_3$, obtemos $A\beta'(y_0) = \tau\beta'(y_0)$. Donde, concluímos que a curvatura média da folha no ponto p_0 é $H = \frac{\epsilon}{2}Tr(A) = \epsilon\tau$.

2.2 A Representação Espinorial

Como na seção anterior, $\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$ denota o grupo de Lie dotado de uma métrica invariante à esquerda que, nas coordenadas $(s, x, y) \in \mathbb{R}^3$, tem produto e métrica dados respectivamente por

$$(a, b, c)(s, x, y) = (a + s, b + e^{\tau a}x, c + e^{\tau a}y), \tag{2.9}$$

$$g_{\epsilon,\tau} = \epsilon ds^2 + e^{-2\tau s}(dx^2 + dy^2). \tag{2.10}$$

Fixamos os campos invariantes à esquerda

$$E_1 = \partial_s, \quad E_2 = e^{\tau s}\partial_x, \quad E_3 = e^{\tau s}\partial_y. \tag{2.11}$$

Consideramos uma imersão isométrica $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$ de uma superfície de Riemman Σ no espaço $\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$. Fixamos em um domínio de Σ um parâmetro conforme $z = u + iv$ no qual a expressão local da métrica em Σ é $ds^2_\Sigma = e^{2\omega}|dz|^2$ e escrevemos

$$X_z = Z^1E_1 + Z^2E_2 + Z^3E_3. \tag{2.12}$$

Temos, de (1.39), (1.40) e (2.6),

$$\langle X_z, X_z\rangle = \epsilon(Z^1)^2 + (Z^2)^2 + (Z^3)^2 = 0, \tag{2.13}$$

$$\langle X_z, X_{\bar{z}}\rangle = \epsilon|Z^1|^2 + |Z^2|^2 + |Z^3|^2 = \frac{1}{2}e^{2\omega}. \tag{2.14}$$

Além disso, por (1.36) e (2.6), o produto exterior, expresso no referencial $\{E_1, E_2, E_3\}$, satisfaz

$$E_1 \times E_2 = E_3, \quad E_2 \times E_3 = \epsilon E_1, \quad E_3 \times E_1 = E_2. \tag{2.15}$$

Assim, o campo normal da imersão, definido por

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = e^{-2\omega}X_u \times X_v,$$

pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} e^{2\omega}N &= X_u \times X_v = i(X_z + X_{\bar{z}}) \times (X_z - X_{\bar{z}}) \\ &= i\{\sum_a (Z^a + \bar{Z}^a)E_a \times \sum_b (Z^b - \bar{Z}^b)E_b\} \\ &= 2i\{(\bar{Z}^2Z^3 - Z^2\bar{Z}^3)\epsilon E_1 + (Z^1\bar{Z}^3 - \bar{Z}^1Z^3)E_2 + (\bar{Z}^1Z^2 - Z^1\bar{Z}^2)E_3\}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$N = 2ie^{-2\omega}\{(\bar{Z}^2 Z^3 - Z^2 \bar{Z}^3)\epsilon E_1 + (Z^1 \bar{Z}^3 - \bar{Z}^1 Z^3)E_2 + (\bar{Z}^1 Z^2 - Z^1 \bar{Z}^2)E_3\}. \qquad (2.16)$$

Agora, usamos (2.8) para estabelecer as equações que provêm de (1.46). Inicialmente, para $k = 1$, temos

$$-\partial_{\bar{z}} Z^1 + \partial_z \bar{Z}^1 + (-Z^2 \bar{Z}^2 + \bar{Z}^2 Z^2)\epsilon\tau + (-Z^3 \bar{Z}^3 + \bar{Z}^3 Z^3)\epsilon\tau = 0,$$

ou seja,

$$-\partial_{\bar{z}} Z^1 + \partial_z \bar{Z}^1 = 0. \qquad (2.17)$$

Para $k = 2$, obtém-se

$$-\partial_{\bar{z}} Z^2 + \partial_z \bar{Z}^2 + (-Z^1 \bar{Z}^2 + \bar{Z}^1 Z^2)(-\tau) = 0,$$

o que resulta em

$$-\partial_{\bar{z}} Z^2 + \partial_z \bar{Z}^2 + (Z^1 \bar{Z}^2 - \bar{Z}^1 Z^2)\tau = 0. \qquad (2.18)$$

Finalmente, para $k = 3$

$$-\partial_{\bar{z}} Z^3 + \partial_z \bar{Z}^3 + (-Z^1 \bar{Z}^3 + \bar{Z}^1 Z^3)(-\tau) = 0,$$

donde segue que

$$-\partial_{\bar{z}} Z^3 + \partial_z \bar{Z}^3 + (Z^1 \bar{Z}^3 - \bar{Z}^1 Z^3)\tau = 0. \qquad (2.19)$$

Similarmente, estabelecemos as equações que provêm de (1.47). Desta vez, combinando (2.8) e a expressão do vetor normal dada em (2.16), obtemos

$$\partial_{\bar{z}} Z^1 + \partial_z \bar{Z}^1 + 2(|Z^2|^2 + |Z^3|^2)\epsilon\tau = 2iH\epsilon(\bar{Z}^2 Z^3 - Z^2 \bar{Z}^3), \qquad (2.20)$$

$$\partial_{\bar{z}} Z^2 + \partial_z \bar{Z}^2 - (Z^1 \bar{Z}^2 + \bar{Z}^1 Z^2)\tau = 2iH(Z^1 \bar{Z}^3 - \bar{Z}^1 Z^3), \qquad (2.21)$$

$$\partial_{\bar{z}} Z^3 + \partial_z \bar{Z}^3 - (Z^1 \bar{Z}^3 + \bar{Z}^1 Z^3)\tau = 2iH(\bar{Z}^1 Z^2 - Z^1 \bar{Z}^2). \qquad (2.22)$$

Por fim, tendo em vista a condição de corformalidade dada pelo polinômio (2.13), escrevemos (Weierstrass)

$$Z^1 = \psi_1 \bar{\psi}_2, \ Z^2 = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2), \ Z^3 = \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2), \qquad (2.23)$$

de modo que ψ_1 e ψ_2 satizfazem

$$Z^2 + iZ^3 = -\epsilon\psi_1^2, \quad \bar{Z}^2 + i\bar{Z}^3 = \psi_2^2. \qquad (2.24)$$

Além disso,

$$\epsilon|Z^1|^2 + |Z^2|^2 + |Z^3|^2 = \frac{1}{2}(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)^2,$$

$$\bar{Z}^2 Z^3 - Z^2 \bar{Z}^3 = \frac{i}{2}(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2),$$

$$Z^1 \bar{Z}^3 - \bar{Z}^1 Z^3 = -\frac{i}{2}(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2),$$

$$\bar{Z}^1 Z^2 - Z^1 \bar{Z}^2 = -\frac{1}{2}(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)$$

Estas expressões, juntamente com as equações (2.14) e (2.16), nos permitem escrever a métrica em Σ e o vetor normal da imersão X em termos das funções ψ_1 e ψ_2 como segue:

$$\frac{1}{2}e^{2\omega} = \frac{1}{2}(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)^2, \quad (e^{\omega} = |\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2). \tag{2.25}$$

$$N = e^{-\omega}\{(|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2)E_1 + (\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)E_2 + i(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2)E_3\}. \tag{2.26}$$

Desejamos determinar dados U e V que verifiquem a equação de Dirac

$$\begin{pmatrix} 0 & \partial_z \\ -\partial_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.27}$$

isto é, tais que

$$\partial_{\bar{z}}\psi_1 = V\psi_2, \quad \partial_z\psi_2 = -U\psi_1. \tag{2.28}$$

Passamos, portanto, à dedução das expressões explícitas para os potenciais U e V. Ao somarmos a equação (2.18) à equação (2.19) multiplicada por i, obtemos

$$-\partial_{\bar{z}}(Z^2 + iZ^3) + \partial_z(\bar{Z}^2 + i\bar{Z}^3) + \tau Z^1(\bar{Z}^2 + i\bar{Z}^3) - \tau\bar{Z}^1(Z^2 + iZ^3) = 0.$$

Logo, usando (2.23), garantimos que

$$-\partial_{\bar{z}}(-\epsilon\psi_1^2) + \partial_z(\psi_2^2) + \tau\psi_1\bar{\psi}_2(\psi_2^2) - \tau\bar{\psi}_1\psi_2(-\epsilon\psi_1^2) = 0,$$

isto é,

$$2\epsilon\psi_1\partial_{\bar{z}}\psi_1 + 2\psi_2\partial_z\psi_2 + \tau\psi_1\psi_2(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) = 0.$$

Daí, considerando (2.28), a equação acima torna-se

$$U - \epsilon V = \frac{\tau}{2}(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2). \tag{2.29}$$

Agora, somando a equação (2.21) à equação (2.22) multiplicada por i, obtemos

$$\begin{aligned}
&\partial_{\bar z}(Z^2+iZ^3)+\partial_z(\bar Z^2+i\bar Z^3)-\tau\{Z^1(\bar Z^2+i\bar Z^3)+\bar Z^1(Z^2+iZ^3)\}\\
&= 2iH\{Z^1(\bar Z^3-i\bar Z^2)-\bar Z^1(Z^3-iZ^2)\}\\
&= 2H\{Z^1(\bar Z^2+i\bar Z^3)-\bar Z^1(Z^2+iZ^3)\}.
\end{aligned}$$

Em vista de (2.23), a equação acima é reescrita como

$$\partial_{\bar z}(-\epsilon\psi_1^2)+\partial_z(\psi_2^2)-\tau\{\psi_1\bar\psi_2(\psi_2^2)+\bar\psi_1\psi_2(-\epsilon\psi_1^2)\}=2H\{\psi_1\bar\psi_2(\psi_2^2)-\bar\psi_1\psi_2(-\epsilon\psi_1^2)\},$$

isto é

$$-2\epsilon\psi_1\partial_{\bar z}\psi_1+2\psi_2\partial_z\psi_2-\tau\psi_1\psi_2(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)=2H\psi_1\psi_2(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2),$$

donde obtemos, usando (2.28),

$$U+\epsilon V=-\frac{1}{2}\{\tau(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)+2H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)\}. \tag{2.30}$$

Assim, utilizando as expressões para os potenciais U e V em (2.28), obtemos um sistema de equações lineares em U e V consistindo das equações (2.29) e (2.30), cuja solução é

$$U=\frac{1}{2}\{\epsilon\tau|\psi_1|^2-H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)\}, \tag{2.31}$$

$$V=-\frac{\epsilon}{2}\{\tau|\psi_2|^2+H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)\}. \tag{2.32}$$

Estes cálculos permitem enunciar o seguinte resultado.

Proposição 2.2.1. *Seja $X:\Sigma\looparrowright\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$ imersão isométrica de uma superfície de Riemann Σ no espaço $\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$. Então, o campo espinorial $\psi=(\psi_1\ \ \psi_2)^T$ definido pelas equações (2.12) e (2.23) satisfaz a equação de Dirac $\mathcal{D}\psi=0$, onde*

$$\mathcal{D}=\begin{pmatrix}0 & \partial_z\\ -\partial_{\bar z} & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}U & 0\\ 0 & V\end{pmatrix},$$

$$U=\frac{1}{2}\{\epsilon\tau|\psi_1|^2-H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)\}\quad e\quad V=-\frac{\epsilon}{2}\{\tau|\psi_2|^2+H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)\}.$$

Esta é uma versão do Teorema 8 em [39], demonstrado aqui para o caso em que o grupo é $\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$.

A seguir, expomos uma representação local do tipo Weierstrass para superfícies no espaço $\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$. Inicialmente, observamos que qualquer superfície em $\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$ pode ser representada localmente por integrais. Para tanto, utilizamos a seguinte versão do Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema 2.2.1. *Seja Σ uma superfície de Riemann. Se $c : [a,b] \to \Sigma$ é uma curva diferenciável por partes e $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, então*

$$\int_c df = f(c(b)) - f(c(a)).$$

Seja $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$ uma imersão. Denotamos, como antes, por $z = u + iv$ um parâmetro conforme em um domínio $\Omega \subset \Sigma$, onde a imersão é representada, em termos das coordenadas $(s, x, y) = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$, por

$$X(z) = (x_1(z), x_2(z), x_3(z)) \quad \text{ou} \quad X(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)).$$

Logo, em Ω, temos

$$X_z = \phi_1\partial_{x_1} + \phi_2\partial_{x_2} + \phi_3\partial_{x_3}, \quad \text{onde} \quad \phi_k = \frac{\partial x_k}{\partial z}, \quad k = 1,2,3.$$

Observamos que

$$\begin{aligned} \phi_k dz &= \frac{\partial x_k}{\partial z} dz \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial u} - i\frac{\partial x_k}{\partial v}\right)(du + idv) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial x_k}{\partial u}du + \frac{\partial x_k}{\partial v}dv + i\left(\frac{\partial x_k}{\partial u}dv - \frac{\partial x_k}{\partial v}du\right)\right\}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$Re(\phi_k dz) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial u}du + \frac{\partial x_k}{\partial v}dv\right) = \frac{1}{2}dx_k.$$

Assim, uma vez que dx_k é exata, dado um caminho fechado $c : I \to \Omega \subset \Sigma$, temos

$$Re\int_c \phi_k dz = \int_c Re(\phi_k dz) = \frac{1}{2}\int_c dx_k = 0.$$

Este fato diz que a forma local $\phi_k dz$ não tem períodos reais, e é obviamente equivalente ao fato de que a integral de linha não depende do caminho escolhido. Portanto, a aplicação

$$z \to Re\int_{\gamma_z} \phi_k dz,$$

onde γ_z é um caminho em Ω de z_0 a z, está bem definida. Denotamos esta função simplesmente por: $z \to Re \int_{z_0}^{z} \phi_k dz$. Pela versão anterior do teorema fundamental do cálculo, é válido que

$$Re \int_{z_0}^{z} \phi_k dz = \frac{1}{2} \int_{z_0}^{z} dx_k = \frac{1}{2}(x_k(z) - x_k(z_0)).$$

Portanto,

$$x_k(z) = x_k(z_0) + 2Re \int_{z_0}^{z} \phi_k dz.$$

Por outro lado, temos em Ω a seguinte expressão

$$\begin{aligned} X_z &= \psi_1 \bar{\psi}_2 E_1 + \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon \psi_1^2) E_2 + \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon \psi_1^2) E_3 \\ &= \psi_1 \bar{\psi}_2 \partial_{x_1} + \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon \psi_1^2) e^{\tau x_1} \partial_{x_2} + \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon \psi_1^2) e^{\tau x_1} \partial_{x_3}. \end{aligned}$$

Desta forma, concluímos que

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \psi_1 \bar{\psi}_2, \\ \phi_2 &= \tfrac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon \psi_1^2) e^{\tau x_1}, \\ \phi_3 &= \tfrac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon \psi_1^2) e^{\tau x_1}. \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} x_1(z) &= x_1(z_0) + 2Re \left(\int_{z_0}^{z} \psi_1 \bar{\psi}_2 dz \right) \\ x_2(z) &= x_2(z_0) + 2Re \left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon \psi_1^2) e^{\tau x_1} dz \right) \\ x_3(z) &= x_3(z_0) + 2Re \left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon \psi_1^2) e^{\tau x_1} dz \right) \end{aligned} \tag{2.33}$$

O teorema a seguir diz que a representação integral acima pode ser obtida a partir das funções ψ_1 e ψ_2, desde que verifiquem a equação de Dirac em $\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$. Para obter tal representação, utilizamos o seguinte lema técnico.

Lema 2.2.1. *Seja $\phi : \Omega \subset \Sigma \to \mathbb{C}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ definida sobre um domínio simplesmente conexo de uma superfície de Riemann Σ, onde está definido o paramêtro conforme $z = u + iv$, tal que $\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \in \mathbb{R}$. Então, a forma $\phi\, dz$ não tem períodos reais e*

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(2 \int_{z_0}^{z} Re(\phi\, dz) \right) = \phi$$

Prova. Escreva $\phi = \phi_1 + i\phi_2$. Então,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right)(\phi_1 + i\phi_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} - \frac{\partial \phi_2}{\partial v}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial u} + \frac{\partial \phi_1}{\partial v}\right).$$

Logo, a condição $\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \in \mathbb{R}$ implica que

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial u} + \frac{\partial \phi_1}{\partial v} = 0.$$

Portanto, como o domínio de ϕ é simplesmente conexo, a forma

$$Re(\phi\, dz) = \phi_1 du - \phi_2 dv$$

é exata. Assim, existe uma função $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\phi_1 du - \phi_2 dv = d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv,$$

donde concluímos que a forma ϕdz não tem períodos reais e a função $z \in \Omega \to \left(2\int_{z_0}^{z} Re(\phi dz)\right)$ é bem definida. Além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}\left(2\int_{z_0}^{z} Re(\phi dz)\right) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(2\int_{z_0}^{z} d\psi\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right)(2(\psi(z) - \psi(z_0))) \\
&= \frac{\partial \psi}{\partial u} - i\frac{\partial \psi}{\partial v} \\
&= \phi_1 + i\phi_2 \\
&= \phi.
\end{aligned}$$

□

A fim de estabelecer o teorema de representação de superfícies em $\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$, primeiro demonstramos o seguinte lema.

Lema 2.2.2. *Suponha que $\psi_1, \psi_2 : \Omega \to \mathbb{C}$ satisfazem a equação de Dirac em $\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$, isto é,*

$$\partial_{\bar{z}}\psi_1 = -\frac{\epsilon}{2}\{\tau|\psi_2|^2 + H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)\}\psi_2,$$
$$\partial_z\psi_2 = -\frac{1}{2}\{\epsilon\tau|\psi_1|^2 - H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)\}\psi_1.$$

Então,

$$\partial_{\bar{z}}\left(\psi_1\bar{\psi}_2\right) = -\frac{\epsilon}{2}\{H(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4) + \epsilon(|\psi_2|^4 + |\psi_1|^4)\}, \tag{2.34}$$

$$\partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2-\epsilon\psi_1^2)\right)=H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)Re(\psi_1\psi_2)+\frac{\tau}{2}\{|\psi_2|^2\psi_1\psi_2-\epsilon|\psi_1|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\}, \quad (2.35)$$

$$\partial_{\bar{z}}\left(\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2+\epsilon\psi_1^2)\right)=H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)Im(\psi_1\psi_2)-\frac{i}{2}\tau\{|\psi_2|^2\psi_1\psi_2+\epsilon|\psi_1|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\} \quad (2.36)$$

Prova. Para a primeira equação, temos

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}}\left(\psi_1\bar{\psi}_2\right) &= \psi_1\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_2+\bar{\psi}_2\partial_{\bar{z}}\psi_1 \\
&= -\frac{1}{2}\{\epsilon\tau|\psi_1|^2-H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)\}|\psi_1|^2-\frac{\epsilon}{2}\{\tau|\psi_2|^2+H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)\}|\psi_2|^2 \\
&= \frac{1}{2}H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)(|\psi_1|^2-\epsilon|\psi_2|^2)-\frac{\epsilon\tau}{2}(|\psi_1|^4+|\psi_2|^4) \\
&= -\frac{\epsilon}{2}H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)-\frac{\epsilon\tau}{2}(|\psi_2|^4+|\psi_1|^4) \\
&= -\frac{\epsilon}{2}\{H(|\psi_2|^4-|\psi_1|^4)+\epsilon(|\psi_2|^4+|\psi_1|^4)\}
\end{aligned}$$

A segunda, por sua vez, segue de

$$\begin{aligned}
&\partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2-\epsilon\psi_1^2)\right) = \bar{\psi}_2\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_2-\epsilon\psi_1\partial_{\bar{z}}\psi_1 \\
&= -\frac{1}{2}\{\epsilon\tau|\psi_1|^2-H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)\}\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2+\frac{1}{2}\{\tau|\psi_2|^2+H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)\}\psi_1\psi_2 \\
&= \frac{1}{2}H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)(\psi_1\psi_2+\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)-\frac{\tau}{2}\{\epsilon|\psi_1|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2-|\psi_2|^2\psi_1\psi_2\} \\
&= H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)Re(\psi_1\psi_2)+\frac{\tau}{2}\{|\psi_2|^2\psi_1\psi_2-\epsilon|\psi_1|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\}.
\end{aligned}$$

Por fim, a última equação deriva de

$$\begin{aligned}
&\partial_{\bar{z}}\left(\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2+\epsilon\psi_1^2)\right) = i\left(\bar{\psi}_2\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_2+\epsilon\psi_1\partial_{\bar{z}}\psi_1\right) \\
&= -\frac{i}{2}\{\epsilon\tau|\psi_1|^2-H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)\}\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2-\frac{i}{2}\{\tau|\psi_2|^2+H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)\}\psi_1\psi_2 \\
&= \frac{i}{2}H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2-\psi_1\psi_2)-\frac{i}{2}\tau\{\epsilon|\psi_1|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2+|\psi_2|^2\psi_1\psi_2\} \\
&= H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)Im(\psi_1\psi_2)-\frac{i}{2}\tau\{|\psi_2|^2\psi_1\psi_2+\epsilon|\psi_1|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\}
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.2. *Sejam Ω um domínio simplesmente conexo de uma superfície de Riemann Σ, $H:\Omega\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável e ψ_1 e ψ_2 funções complexas definidas em Ω que satisfazem $|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2>0$ e a equação de Dirac em $\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$, isto é,*

$$\partial_{\bar{z}}\psi_1=-\frac{\epsilon}{2}\{\tau|\psi_2|^2+H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)\}\psi_2,$$

$$\partial_z \psi_2 = -\frac{1}{2}\{\epsilon\tau|\psi_1|^2 - H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)\}\psi_1.$$

onde $H : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Então, a aplicação

$$X = (x_1, x_2, x_3) : \Omega \looparrowright \mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2),$$

definida por

$$\begin{aligned} x_1(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \psi_1 \bar{\psi}_2 dz\right) \\ x_2(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)e^{\tau x_1} dz\right) \\ x_3(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)e^{\tau x_1} dz\right), \end{aligned} \tag{2.37}$$

é uma imersão conforme com curvatura média H.

Prova. Inicialmente, observamos que (2.34) assegura que $\partial_{\bar{z}}\left(\psi_1\bar{\psi}_2\right) \in \mathbb{R}$. Logo, pelo Lema (2.2.1), a função x_1 está bem definida e satisfaz $\frac{\partial x_1}{\partial z} = \psi_1\bar{\psi}_2$. Além disso, a partir de (2.35) e (2.36), obtemos

$$\begin{aligned} &\partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)e^{\tau x_1}\right) \\ &= \left\{H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)Re(\psi_1\psi_2) + \frac{\tau}{2}(|\psi_2|^2\psi_1\psi_2 - \epsilon|\psi_1|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)\right\} e^{\tau x_1} \\ &+ \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\tau e^{\tau x_1}\bar{\psi}_1\psi_2 \\ &= \left\{H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)Re(\psi_1\psi_2) + \frac{\tau}{2}(|\psi_2|^2\psi_1\psi_2 - \epsilon|\psi_1|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)\right\} e^{\tau x_1} \\ &+ \frac{\tau}{2}(|\psi_2|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \epsilon|\psi_1|^2\psi_1\psi_2)e^{\tau x_1} \\ &= e^{\tau x_1}\{H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)Re(\psi_1\psi_2) + \frac{\tau}{2}[|\psi_2|^2(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2) \\ &- \epsilon|\psi_1|^2(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)]\} \\ &= e^{\tau x_1}\{H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + \tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\}Re(\psi_1\psi_2) \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\bar{z}}\left(\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2+\epsilon\psi_1^2)e^{\tau x_1}\right)\\
&=\{H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)Im(\psi_1\psi_2)-\frac{i}{2}\tau(|\psi_2|^2\psi_1\psi_2+\epsilon|\psi_1|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)\}e^{\tau x_1}\\
&+\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2+\epsilon\psi_1^2)\tau e^{\tau x_1}\bar{\psi}_1\psi_2\\
&=\{H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)Im(\psi_1\psi_2)-\frac{i}{2}\tau(|\psi_2|^2\psi_1\psi_2+\epsilon|\psi_1|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)\}e^{\tau x_1}\\
&+\frac{i}{2}\tau(|\psi_2|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2+\epsilon|\psi_1|^2\psi_1\psi_2)e^{\tau x_1}\\
&=e^{\tau x_1}\{H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)Im(\psi_1\psi_2)+\frac{i}{2}\tau[|\psi_2|^2(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2-\psi_1\psi_2)\\
&-\epsilon|\psi_1|^2(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2-\psi_1\psi_2)]\}\\
&=e^{\tau x_1}\{H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)+\tau(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)\}Im(\psi_1\psi_2).
\end{aligned}
$$

Portanto, novamente pelo Lema (2.2.1), as funções x_2 e x_3 estão bem definidas e satisfazem

$$\partial_z(x_2)=\frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2-\epsilon\psi_1^2)e^{\tau x_1},\quad \partial_z(x_3)=\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2+\epsilon\psi_1^2)e^{\tau x_1}.$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
X_z &= \partial_z(x_1)\partial_{x_1}+\partial_z(x_2)\partial_{x_2}+\partial_z(x_3)\partial_{x_3}\\
&= \psi_1\bar{\psi}_2\partial_{x_1}+\frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2-\epsilon\psi_1^2)e^{\tau x_1}\partial_{x_2}+\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2+\epsilon\psi_1^2)e^{\tau x_1}\partial_{x_3}\\
&= \psi_1\bar{\psi}_2E_1+\frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2-\epsilon\psi_1^2)E_2+\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2+\epsilon\psi_1^2)E_3,
\end{aligned}
$$

donde segue que

$$\langle X_z,X_z\rangle=0 \quad \text{e} \quad \langle X_z,X_{\bar{z}}\rangle=\frac{1}{2}(|\psi_1|^2+\epsilon|\psi_2|^2)^2\ (=\frac{1}{2}e^{2\omega}).$$

Portanto, como $|\psi_1|^2+\epsilon|\psi_2|^2>0$, a aplicação X é uma imersão conforme. Além disso, a expressão do vetor normal ao longo de X é

$$N=e^{-\omega}\{(|\psi_1|^2-\epsilon|\psi_2|^2)E_1+2Re(\psi_1\psi_2)E_2+2Im(\psi_1\psi_2)E_3\}.$$

Finalmente, mostramos que X tem curvatura média H. A derivada covariante de X_z em relação a $X_{\bar{z}}$ é

$$
\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}X_z &= \partial_{\bar{z}}(\psi_1\bar{\psi}_2)E_1+\frac{1}{2}\partial_{\bar{z}}(\bar{\psi}_2^2-\epsilon\psi_1^2)E_2+\frac{i}{2}\partial_{\bar{z}}(\bar{\psi}_2^2+\epsilon\psi_1^2)E_3\\
&+ \psi_1\bar{\psi}_2\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}E_1+\frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2-\epsilon\psi_1^2)\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}E_2+\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2+\epsilon\psi_1^2)\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}E_3.
\end{aligned}
$$

Sendo assim, a partir de (2.7), obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}} E_1 &= \bar{\psi}_1\psi_2\bar{\nabla}_{E_1}E_1 + \frac{1}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)\bar{\nabla}_{E_2}E_1 - \frac{i}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)\bar{\nabla}_{E_3}E_1 \\
&= -\frac{\tau}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_2 + \frac{i\tau}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_3, \\
\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}} E_2 &= \bar{\psi}_1\psi_2\bar{\nabla}_{E_1}E_2 + \frac{1}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)\bar{\nabla}_{E_2}E_2 - \frac{i}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)\bar{\nabla}_{E_3}E_2 \\
&= \frac{\epsilon\tau}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_1, \\
\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}} E_3 &= \bar{\psi}_1\psi_2\bar{\nabla}_{E_1}E_3 + \frac{1}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)\bar{\nabla}_{E_2}E_3 - \frac{i}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)\bar{\nabla}_{E_3}E_3 \\
&= -\frac{i\epsilon\tau}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_1.
\end{aligned}$$

Portanto, das relações acima, deduzimos que

$$\begin{aligned}
&\psi_1\bar{\psi}_2\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}E_1 + \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}E_2 + \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}E_3 \\
&= \psi_1\bar{\psi}_2\left\{-\frac{\tau}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_2 + \frac{i\tau}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_3\right\} \\
&+ \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\frac{\epsilon\tau}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_1 - \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\frac{i\epsilon\tau}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_1 \\
&= \frac{\epsilon\tau}{4}\left\{(|\psi_2|^4 - \epsilon\bar{\psi}_1^2\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2\psi_2^2 + |\psi_1|^4) + (|\psi_2|^4 + \epsilon\bar{\psi}_1^2\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2\psi_2^2 + |\psi_1|^4)\right\}E_1 \\
&- \frac{\tau}{2}(|\psi_2|^2\psi_1\psi_2 - \epsilon|\psi_1|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)E_2 + \frac{i\tau}{2}(|\psi_2|^2\psi_1\psi_2 + \epsilon|\psi_1|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)E_3 \\
&= \frac{\epsilon\tau}{2}(|\psi_2|^4 + |\psi_1|^4)E_1 - \frac{\tau}{2}(|\psi_2|^2\psi_1\psi_2 - \epsilon|\psi_1|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)E_2 \\
&+ \frac{i\tau}{2}(|\psi_2|^2\psi_1\psi_2 + \epsilon|\psi_1|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)E_3.
\end{aligned}$$

Deste modo, usando esta relação juntamente com (2.34), (2.35) e (2.36), obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}X_z &= -\frac{\epsilon}{2}\left\{H(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4) + \tau(|\psi_2|^4 + |\psi_1|^4)\right\}E_1 \\
&+ \left\{H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)Re(\psi_1\psi_2) + \frac{\tau}{2}(|\psi_2|^2\psi_1\psi_2 - \epsilon|\psi_1|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)\right\}E_2 \\
&+ \left\{H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)Im(\psi_1\psi_2) - \frac{i}{2}\tau(|\psi_2|^2\psi_1\psi_2 + \epsilon|\psi_1|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)\right\}E_3 \\
&+ \frac{\epsilon\tau}{2}(|\psi_2|^4 + |\psi_1|^4)E_1 - \frac{\tau}{2}(|\psi_2|^2\psi_1\psi_2 - \epsilon|\psi_1|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)E_2 \\
&+ \frac{i\tau}{2}(|\psi_2|^2\psi_1\psi_2 + \epsilon|\psi_1|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)E_3,
\end{aligned}$$

o que nos leva a concluir que

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}X_z &= H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)\left\{\frac{1}{2}(|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2)E_1 + Re(\psi_1\psi_2)E_2 + Im(\psi_1\psi_2)E_3\right\} \\
&= \frac{1}{2}H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)^2N \\
&= \frac{1}{2}He^{2\omega}N.
\end{aligned}$$

Portanto, X tem curvatura média H, o que completa a prova do teorema. □

2.2.1 Equações Adicionais

Determinemos um sistema de equações diferenciais de primeira ordem satisfeitas pelas funções ψ_1 e ψ_2. A primeira destas equações é obtida derivando em relação a z a expressão da métrica em termos de ψ_1 e ψ_2, dada na equação (2.25) e utilizando (2.28) junto com (2.31) e (2.32). Temos

$$\begin{aligned} e^{\omega}\omega_z &= \psi_2\partial_z\bar{\psi}_2 + \bar{\psi}_2\partial_z\psi_2 + \epsilon\psi_1\partial_z\bar{\psi}_1 + \epsilon\bar{\psi}_1\partial_z\psi_1 \\ &= \psi_2\partial_z\bar{\psi}_2 - U\psi_1\bar{\psi}_2 + \epsilon\bar{V}\psi_1\bar{\psi}_2 + \epsilon\bar{\psi}_1\partial_z\psi_1 \\ &= \psi_2\partial_z\bar{\psi}_2 + \epsilon\bar{\psi}_1\partial_z\psi_1 + (\epsilon\bar{V} - U)\psi_1\bar{\psi}_2 \\ &= \psi_2\partial_z\bar{\psi}_2 + \epsilon\bar{\psi}_1\partial_z\psi_1 - \frac{\tau}{2}(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)\psi_1\bar{\psi}_2. \end{aligned}$$

Desta equação, obtemos

$$\epsilon\bar{\psi}_1\partial_z\psi_1 + \psi_2\partial_z\bar{\psi}_2 = e^{\omega}(\omega_z + \frac{\tau}{2}\psi_1\bar{\psi}_2). \tag{2.38}$$

A segunda das equações é obtida ao expressar-se em termos de ψ_1 e ψ_2 a função componente da diferencial de Hopf. Tal função foi escrita em (1.49) como a soma de dois termos. Para o primeiro somando, temos, usando as definições das funções Z^i em termos das ψ_i dadas em (2.23) e a expressão do vetor N dada em (2.26),

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{3}\partial_z(Z^i)\langle E_i, N\rangle \\ &= (\psi_1\partial_z\bar{\psi}_2 + \bar{\psi}_2\partial_z\psi_1)e^{-\omega}(|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2)\epsilon \\ &+ (\bar{\psi}_2\partial_z\bar{\psi}_2 - \epsilon\psi_1\partial_z\psi_1)e^{-\omega}(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2) \\ &+ i(\bar{\psi}_2\partial_z\bar{\psi}_2 + \epsilon\psi_1\partial_z\psi_1)[-ie^{-\omega}(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)] \\ &= e^{-\omega}\{[\epsilon\psi_1(|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2) + \bar{\psi}_2(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2) + \bar{\psi}_2(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)]\partial_z\bar{\psi}_2 \\ &+ [\epsilon\bar{\psi}_2(|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2) - \epsilon\psi_1(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2) + \epsilon\psi_1(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)]\partial_z\psi_1)\} \\ &= e^{-\omega}\{[\psi_1(\epsilon|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) + \psi_1|\psi_2|^2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2^2 + \psi_1|\psi_2|^2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2^2]\partial_z\bar{\psi}_2 \\ &+ \epsilon[\bar{\psi}_2(|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2) - \psi_1^2\psi_2 - |\psi_1|^2\bar{\psi}_2 + \psi_1^2\psi_2 - |\psi_1|^2\bar{\psi}_2]\partial_z\psi_1)\} \\ &= e^{-\omega}\{[\psi_1(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)]\partial_z\bar{\psi}_2 - [\bar{\psi}_2(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)]\partial_z\psi_1)\} \\ &= \psi_1\partial_z\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_2\partial_z\psi_1. \end{aligned}$$

Portanto

$$\sum_{i=1}^{3} \partial_z(Z^i)\langle E_i, N\rangle = \psi_1\partial_z\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_2\partial_z\psi_1. \tag{2.39}$$

Quanto ao segundo somando de (1.49), usando os símbolos de Christoffel dos campos E_i dados na equação (2.8) juntamente com a expressão do vetor normal dada em (2.26), obtemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j,k=1}^{3} Z^iZ^j\Gamma_{ji}^k\langle E_k, N\rangle \\
&= \epsilon\tau\{[\frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)]^2 + [\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)]^2\}e^{-\omega}(|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2)\epsilon \\
&- \tau\frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\psi_1\bar{\psi}_2e^{-\omega}(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2) - \tau\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\psi_1\bar{\psi}_2[-ie^{-\omega}(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)] \\
&= \tau e^{-\omega}(-\epsilon\psi_1^2\bar{\psi}_2^2)(|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2) \\
&- \frac{\tau}{2}e^{-\omega}\psi_1\bar{\psi}_2(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2) - \frac{\tau}{2}e^{-\omega}\psi_1\bar{\psi}_2(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2) \\
&= -\epsilon\tau e^{-\omega}\psi_1^2\bar{\psi}_2^2(|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2) \\
&- \frac{\tau}{2}e^{-\omega}\psi_1\bar{\psi}_2(\psi_1\bar{\psi}_2|\psi_2|^2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2^3 - \epsilon\psi_1^3\psi_2 - \epsilon\psi_1\bar{\psi}_2|\psi_1|^2) \\
&- \frac{\tau}{2}e^{-\omega}\psi_1\bar{\psi}_2(\psi_1\bar{\psi}_2|\psi_2|^2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2^3 + \epsilon\psi_1^3\psi_2 - \epsilon\psi_1\bar{\psi}_2|\psi_1|^2) \\
&= -\tau e^{-\omega}\psi_1^2\bar{\psi}_2^2(\epsilon|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) - \tau e^{-\omega}[\psi_1\bar{\psi}_2]^2(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo

$$\sum_{i,j,k=1}^{3} Z^iZ^j\Gamma_{ji}^k\langle E_k, N\rangle = 0. \tag{2.40}$$

Segue de (1.49), (2.39) e (2.40) que

$$-\bar{\psi}_2\partial_z\psi_1 + \psi_1\partial_z\bar{\psi}_2 = \frac{q}{2}. \tag{2.41}$$

As equações (2.38) e (2.41) constituem um sistema de equações diferenciais para as funções ψ_1 e ψ_2 que pode ser escrito matricialmente como,

$$\begin{pmatrix} \epsilon\bar{\psi}_1 & \psi_2 \\ -\bar{\psi}_2 & \psi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_z\psi_1 \\ \partial_z\bar{\psi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\omega}\{\omega_z + \frac{\tau}{2}\psi_1\bar{\psi}_2\} \\ \frac{q}{2} \end{pmatrix}. \tag{2.42}$$

A partir dele, determinamos

$$\partial_z\psi_1 = \omega_z\psi_1 - \frac{q}{2}e^{-\omega}\psi_2 + \frac{\tau}{2}\psi_1^2\bar{\psi}_2, \tag{2.43}$$

$$\partial_z\bar{\psi}_2 = \omega_z\bar{\psi}_2 + \epsilon\frac{q}{2}e^{-\omega}\bar{\psi}_1 + \frac{\tau}{2}\psi_1\bar{\psi}_2^2. \tag{2.44}$$

Reunindo as equações acima à equação de Dirac, obtemos

$$\begin{cases} \partial_z\psi_1 &=& \omega_z\psi_1 - \frac{q}{2}e^{-\omega}\psi_2 + \frac{\tau}{2}\psi_1^2\bar{\psi}_2, \\ \partial_z\psi_2 &=& -\frac{1}{2}\{\epsilon\tau|\psi_1|^2 - H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)\}\psi_1, \\ \partial_{\bar{z}}\psi_1 &=& -\frac{\epsilon}{2}\{\tau|\psi_2|^2 + H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)\}\psi_2, \\ \partial_{\bar{z}}\psi_2 &=& \omega_{\bar{z}}\psi_2 + \epsilon\frac{\bar{q}}{2}e^{-\omega}\psi_1 + \frac{\tau}{2}\bar{\psi}_1\psi_2^2. \end{cases}$$

2.3 A Aplicação de Gauss

Nesta seção, nos ocupamos em estabelecer condições de compatibilidade para a equação de Dirac, no caso em que a curvatura média da imersão é constante.

Com este propósito, estudamos a aplicação de Gauss de uma dada imersão isométrica $X : \Sigma \to \mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$. Consideramos a esfera unitária

$$\mathbb{S}^2_1 = \{(a, b, c) \in T_e\mathbb{H}^3(-\tau^2) : a^2 + b^2 + c^2 = 1\},$$

e a parte superior, em relação à primeira coordenada, do hiperbolóide $-a^2+b^2+c^2 = -1$, isto é,

$$\mathbb{S}^2_{-1} = \{(a, b, c) \in T_e\mathbb{H}^3(\tau^2) : -a^2 + b^2 + c^2 = -1,\ a > 0\},$$

onde identificamos o vetor $a\hat{e}_1 + b\hat{e}_2 + c\hat{e}_3 \in T_e\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$ à terna (a, b, c). A projeção estereográfica, na esfera unitária, com respeito ao ponto $\mathrm{N}_1 = (1, 0, 0)$, é dada por

$$\pi_1 : \mathbb{S}^2_1 \to \bar{\mathbb{C}}, \quad \pi_1(a, b, c) = \frac{b}{1-a} + i\frac{c}{1-a}, \quad \pi_1(\mathrm{N}_1) = \infty$$

e tem inversa

$$\pi_1^{-1} : \bar{\mathbb{C}} \to \mathbb{S}^2,\ \pi_1^{-1}(w) = \frac{1}{1+|w|^2}(|w|^2 - 1, 2Re(w), 2Im(w)),\ \pi_1^{-1}(\infty) = \mathrm{N}_1.$$

Analogamente, a projeção estereográfica, em $\mathbb{S}^2_{-1}$, com respeito ao ponto $S_1 = (-1, 0, 0)$, é dada por

$$\pi_{-1} : \mathbb{S}^2_{-1} \to \mathbb{D}, \quad \pi_{-1}(a, b, c) = \frac{b}{1+a} + i\frac{c}{1+a}$$

e tem inversa

$$\pi_{-1}^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{S}^2_{-1},\ \pi_{-1}^{-1}(w) = \frac{1}{1-|w|^2}(1 + |w|^2, 2Re(w), 2Im(w)).$$

onde $\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C} : |w|^2 < 1\}$. Unificamos os cálculos acima, pondo

$$\pi_\epsilon(a, b, c) = \frac{b}{1-\epsilon a} + i\frac{c}{1-\epsilon a}. \tag{2.45}$$

$$\pi_\epsilon^{-1}(w) = \frac{1}{1+\epsilon|w|^2}(|w|^2 - \epsilon, 2Re(w), 2Im(w)). \tag{2.46}$$

Dada a imersão $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$, definimos no domínio do parâmetro conforme z, onde estão definidas ψ_1 e ψ_2, as funções

$$f = \bar{\psi}_2^2, \qquad g = \frac{\psi_1}{\bar{\psi}_2} \tag{2.47}$$

Reescrevemos as funções Z^1, Z^2 e Z^3 em termos de f e g como

$$Z^1 = gf, \quad Z^2 = \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f, \quad Z^3 = \frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f.$$

Com isto, uma verificação imediata permite concluir que

Lema 2.3.1. *Dada a imersão isométrica $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$, a métrica e o vetor normal são expressos, em termos das funções f e g, por*

$$e^{2\omega} = |f|^2(1+\epsilon|g|^2)^2, \quad (e^{\omega} = |f|(1+\epsilon|g|^2)) \tag{2.48}$$

$$N = \frac{1}{1+\epsilon|g|^2}\{(|g|^2-\epsilon)E_1 + 2Re(g)E_2 + 2Im(g)E_3\} \tag{2.49}$$

Temos, ainda, o seguinte fato

Lema 2.3.2. *Dada a imersão isométrica $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$, a aplicação de Gauss*

$$\eta : \Sigma \longrightarrow \mathbb{S}^2_\epsilon \subset T_e\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$$

satisfaz $\pi_\epsilon(\eta) = g$. Isto é, composta com uma projeção estereográfica adequada, a aplicação de Gauss da imersão é g.

Além disso,

Lema 2.3.3. *As funções f e g associadas à imersão isométrica $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$ satisfazem*

$$f_{\bar{z}} = \bar{g}|f|^2\{H(1+\epsilon|g|^2) - \epsilon\tau|g|^2\} \tag{2.50}$$

$$g_{\bar{z}} = \frac{\epsilon}{2}\bar{f}\{\tau(|g|^4-1) - H(1+\epsilon|g|^2)^2\}. \tag{2.51}$$

Prova. Usando a definição das funções f e g em termos das funções ψ_1 e ψ_2 dadas em (2.3.3), assim como a equação de Dirac (2.28) para os potenciais U e V juntamente com suas expressões dadas em (2.31) e (2.32), temos, para a derivada de f em relação a $\bar{z}$,

$$\begin{aligned} f_{\bar{z}} &= 2\bar{\psi}_2\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_2 = -2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\bar{U} \\ &= -\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\{\epsilon\tau|\psi_1|^2 - H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)\} \\ &= -\bar{g}|f|\{\epsilon\tau|g|^2|f| - H(|f| + \epsilon|g|^2|f|)\} \\ &= -\bar{g}|f|^2\{\epsilon\tau|g|^2 - H(1+\epsilon|g|^2)\} \\ &= \bar{g}|f|^2\{H(1+\epsilon|g|^2) - \epsilon\tau|g|^2\} \end{aligned}$$

e, para a derivada de g em relação $\bar{z}$, calculamos

$$\begin{aligned} g_{\bar{z}} &= \frac{1}{\bar{\psi}_2^2}\{\bar{\psi}_2\partial_{\bar{z}}\psi_1 - \psi_1\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_2\} = \frac{1}{\bar{\psi}_2^2}\{\bar{\psi}_2 V\psi_2 - \psi_1(-\bar{U}\bar{\psi}_1)\} \\ &= \frac{1}{\bar{\psi}_2^2}\{|\psi_2|^2V + |\psi_1|^2\bar{U}\} \\ &= -\frac{|\psi_2|^2}{\bar{\psi}_2^2}\frac{\epsilon}{2}\{\tau|\psi_2|^2 + H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)\} \\ &+ \frac{|\psi_1|^2}{\bar{\psi}_2^2}\frac{1}{2}\{\epsilon\tau|\psi_1|^2 - H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)\} \\ &= \frac{1}{2\bar{\psi}_2^2}\{\epsilon\tau(|\psi_1|^4 - |\psi_2|^4) - H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)(\epsilon|\psi_2|^2 + |\psi_1|^2)\} \\ &= \frac{\epsilon}{2\bar{\psi}_2^2}\{\tau(|\psi_1|^4 - |\psi_2|^4) - H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)^2\} \\ &= \frac{\epsilon}{2f}\{\tau(|g|^4|f|^2 - |f|^2) - H(|f| + \epsilon|g|^2|f|)^2\} \\ &= \frac{\epsilon}{2}\bar{f}\{\tau(|g|^4 - 1) - H(1+\epsilon|g|^2)^2\}. \end{aligned}$$

□

A partir destas fórmulas, obtemos o seguinte resultado.

Lema 2.3.4. *Se a imersão isométrica* $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$ *é mínima, então*

$$f_{\bar{z}} = -\epsilon\tau\bar{g}|f|^2|g|^2, \tag{2.52}$$

$$g_{\bar{z}} = \frac{\epsilon\tau}{2}\bar{f}(|g|^4 - 1). \tag{2.53}$$

Além disso,

$$g_{z\bar{z}} + \frac{2}{1-|g|^4}|g|^2\bar{g}g_{\bar{z}}g_z = 0. \tag{2.54}$$

Prova. As duas primeiras equações acima são consequências imediatas do lema anterior. Com respeito à terceira, usamos o fato de que (2.53) acarreta que

$$\frac{1}{|g|^4-1}g_{\bar{z}} = \frac{\epsilon\tau}{2}\bar{f} \in \mathcal{C}^\infty.$$

Assim,

$$\begin{aligned} g_{z\bar{z}} &= \frac{\epsilon\tau}{2}\bar{f}_z(|g|^4-1)+\frac{\epsilon\tau}{2}\bar{f}2|g|^2(g\bar{g}_z+\bar{g}g_z) \\ &= \frac{\epsilon\tau}{2}[-\epsilon\tau g|f|^2|g|^2](|g|^4-1)+\epsilon\tau\bar{f}|g|^2g[\frac{\epsilon\tau}{2}f(|g|^4-1)]+\epsilon\tau\bar{f}|g|^2\bar{g}g_z \\ &= -\frac{\tau^2}{2}g|f|^2|g|^2(|g|^4-1)+\frac{\tau^2}{2}|f|^2|g|^2g(|g|^4-1)+\epsilon\tau\bar{f}|g|^2\bar{g}g_z \\ &= 2\left(\frac{\epsilon\tau}{2}\bar{f}\right)|g|^2\bar{g}g_z \\ &= 2\frac{1}{|g|^4-1}g_{\bar{z}}|g|^2\bar{g}g_z \\ &= -2\frac{1}{|g|^4-1}|g|^2\bar{g}g_{\bar{z}}g_z, \end{aligned}$$

o que demonstra a última equação. $\square$

Observamos que o resultado acima, para $\epsilon = 1$, foi obtido por M. Kokubu (veja Proposição 6.2 em [24]). Observamos também que, quando $|g| < 1$, a aplicação g é harmônica sobre o disco $\mathbb{D}$ dotado da métrica conforme $ds^2 = \lambda^2(w)|dw|^2 = \frac{1}{1-|w|^4}|dw|^2$. De fato, temos

$$\lambda_w(w) = -\frac{1}{2}(1-|w|^4)^{-3/2}(-2|w|^2\bar{w}) = \frac{|w|^2\bar{w}}{(1-|w|^4)^{3/2}}$$

donde,

$$\frac{2}{\lambda(g)}\lambda_w(g) = \frac{2|g|^2\bar{g}}{1-|g|^4}.$$

Logo, de (2.54), obtemos que g satisfaz

$$g_{z\bar{z}} + \frac{2}{\lambda(g)}\lambda_w(g)g_zg_{\bar{z}} = 0$$

equação que, por (1.55), equivale à harmonicidade acima citada.

Uma outra consequência das equações que deduzimos acima é a seguinte.

Lema 2.3.5. *Se a imersão isométrica $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$ tem curvatura média constante igual a τ, então*

$$f_{\bar{z}} = \tau\bar{g}|f|^2, \tag{2.55}$$

$$g_{\bar{z}} = -\epsilon\tau\bar{f}(1+\epsilon|g|^2). \tag{2.56}$$

Além disso,

$$g_{z\bar{z}} - \frac{\epsilon\bar{g}}{1+\epsilon|g|^2}g_{\bar{z}}g_z = 0. \tag{2.57}$$

Prova. As duas primeiras derivadas são consequências de (2.50) e (2.51). A terceira segue segundo o cálculo

$$\begin{aligned} g_{z\bar{z}} &= -\epsilon\tau\bar{f}_z(1+\epsilon|g|^2) - \tau\bar{f}(g\bar{g}_z + \bar{g}g_z) \\ &= -\epsilon\tau[\tau g|f|^2](1+\epsilon|g|^2) - \tau\bar{f}g[-\epsilon\tau f(1+\epsilon|g|^2)] - \tau\bar{f}\bar{g}g_z \\ &= \epsilon(-\epsilon\tau\bar{f})\bar{g}g_z \\ &= \frac{\epsilon\bar{g}}{1+\epsilon|g|^2}g_{\bar{z}}g_z. \end{aligned}$$

onde, temos usado o fato de que (2.56) acarreta que

$$\frac{1}{1+\epsilon|g|^2}g_{\bar{z}} = -\epsilon\tau\bar{f} \in \mathcal{C}^\infty.$$

□

Uma conseqüência imediata da equação (2.57) é que a aplicação g é harmônica sobre $\mathbb{D}_\epsilon$, onde $\mathbb{D}_1$ é o plano complexo e $\mathbb{D}_{-1}$ e o disco unitário, munido da métrica conforme

$$ds_\epsilon^2 = \lambda_\epsilon^2(w)|dw|^2 = \frac{1}{1+\epsilon|w|^2}|dw|^2.$$

De fato, temos

$$\frac{2}{\lambda_\epsilon(g)}\left(\lambda_\epsilon\right)_w(g) = 2(1+\epsilon|g|^2)^{1/2}\left(-\frac{1}{2}(1+\epsilon|g|^2)^{-3/2}\epsilon\bar{g}\right) = -\frac{\epsilon\bar{g}}{1+\epsilon|g|^2}.$$

Segue de (2.57) que g satisfaz,

$$g_{z\bar{z}} + \frac{2}{\lambda_\epsilon(g)}\left(\lambda_\epsilon\right)_w(g)g_zg_{\bar{z}} = 0,$$

que vem a ser, por (1.55), a equação de uma aplicação harmônica definida em Σ com imagem em $\mathbb{D}_\epsilon$ munido da métrica conforme $ds_\epsilon^2 = \lambda_\epsilon^2(w)|dw|^2$. Observamos que

Observação 4. *A superfície $\mathbb{D}_\epsilon$ munida da métrica conforme*

$$ds_\epsilon^2 = \lambda_\epsilon^2(w)|dw|^2 = \frac{1}{1+\epsilon|w|^2}|dw|^2$$

tem curvatura Gaussiana $K = \frac{2}{1+\epsilon|w|^2}$.

De fato, a curvatura Gaussiana é dada por:

$$\begin{aligned} K &= -\Delta\ln\lambda_\epsilon = -\frac{4}{\lambda_\epsilon^2}\frac{\partial}{\partial\bar{w}}\left(\frac{\partial}{\partial w}\ln\lambda_\epsilon\right) \\ &= -\frac{4}{\lambda_\epsilon^2}\frac{\partial}{\partial\bar{w}}\left(\frac{(\lambda_\epsilon)_w}{\lambda_\epsilon}\right) = -\frac{4}{\lambda_\epsilon^2}\frac{\partial}{\partial\bar{w}}\left(\sqrt{1+\epsilon|w|^2}\frac{-\epsilon\bar{w}}{2(1+\epsilon|w|^2)^{3/2}}\right) \\ &= \frac{2\epsilon}{\lambda_\epsilon^2}\frac{\partial}{\partial\bar{w}}\left(\frac{\bar{w}}{1+\epsilon|w|^2}\right) = \frac{2}{\lambda_\epsilon^2}\left(\frac{(1+\epsilon|w|^2)-\epsilon\bar{w}w}{(1+\epsilon|w|^2)^2}\right) \\ &= \frac{2}{1+\epsilon|w|^2}. \end{aligned}$$

Além disso, temos

Proposição 2.3.1. *A diferencial de Hopf de uma superfície Σ de curvatura média $H = \tau$ no espaço $\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$, é um múltiplo escalar da diferencial de Hopf associada à aplicação harmônica $g : \Sigma \to (\mathbb{D}_\epsilon, ds^2_\epsilon)$.*

Prova. A diferencial de Hopf da imersão $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$ é, por definição, dada por $\frac{q}{2}dz^2$, ao passo que a diferencial de Hopf associada a g é $\tilde{q}dz^2 = \lambda^2_\epsilon(g(z))g_z\bar{g}_z dz^2$. Expressando as funções $\tilde{q}$ e q em termos das funções ψ_1 e ψ_2, obtemos, a partir de (2.41),

$$\frac{q}{2} = \psi_1\partial_z\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_2\partial_z\psi_1.$$

Por outro lado, utilizando (2.56) e a fórmula $g = \frac{\psi_1}{\psi_2}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{q} &= \lambda^2_\epsilon(g(z))\bar{g}_z g_z \\
&= \frac{1}{1+\epsilon|g|^2}\overline{g_{\bar{z}}}g_z \\
&= \frac{1}{1+\epsilon|g|^2}[-\tau f(1+\epsilon|g|^2)]g_z \\
&= -\tau f g_z \\
&= -\tau(\bar{\psi}_2\partial_z\psi_1 - \psi_1\partial_z\bar{\psi}_2),
\end{aligned}$$

posto que $f = \bar{\psi}_2^2$. Logo, $\tilde{q} = \tau\frac{q}{2}$. □

A seguir, a exemplo da seção anterior, demonstramos uma representação integral para superfícies em $\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau)$, desta vez em termos das funções f e g. Como na seção anterior, dadas a imersão isométrica $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$ e um parâmetro conforme $z = u + iv$ de Σ definido em um domínio $\Omega \subset \Sigma$, parametrizamos, em termos das coordenadas $(s, x, y) = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{H}^3(-\tau^2)$, $X(z) = (x_1(z), x_2(z), x_3(z))$. A expressão local para X exposta em (2.33) passa a ser, em termos de f e g:

$$\begin{aligned}
x_1(z) &= x_1(z_0) + 2Re\left(\int_{z_0}^{z} gf dz\right) \\
x_2(z) &= x_2(z_0) + 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{1}{2}(1-\epsilon g^2)fe^{\tau x_1}dz\right) \\
x_3(z) &= x_3(z_0) + 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{i}{2}(1+\epsilon g^2)fe^{\tau x_1}f dz\right)
\end{aligned} \tag{2.58}$$

O teorema seguinte diz que, localmente, podemos obter uma superfície a partir da fórmula integral acima, desde que f e g satisfaçam certo sistema de equações diferenciais. Seguimos as mesmas linhas da prova do Teorema 2.2.2. Primeiro, enunciamos o seguinte lema

Lema 2.3.6. *Sejam $f, g : \Omega \subset \Sigma \to \mathbb{C}$ aplicações que verificam (2.50) e (2.51), isto é,*

$$f_{\bar{z}} = \bar{g}|f|^2\{H(1+\epsilon|g|^2) - \epsilon\tau|g|^2\} \ \ e \ \ g_{\bar{z}} = \frac{\epsilon}{2}\bar{f}\{\tau(|g|^4-1) - H(1+\epsilon|g|^2)^2\}.$$

Então,

$$\partial_{\bar{z}}(gf) = \frac{\epsilon}{2}|f|^2\left\{H(|g|^4-1) - \tau(1+|g|^4)\right\}, \tag{2.59}$$

$$\partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f\right) = \frac{1}{2}|f|^2\left\{H(1+\epsilon|g|^2)2Re(g) + \tau g(1-\epsilon\bar{g}^2)\right\}, \tag{2.60}$$

$$\partial_{\bar{z}}\left(\frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f\right) = \frac{1}{2}|f|^2\left\{H(1+\epsilon|g|^2)2Im(g) - i\tau g(1+\epsilon\bar{g}^2)\right\}. \tag{2.61}$$

Prova. Temos, para a primeira equação,

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}}(gf) &= fg_{\bar{z}} + gf_{\bar{z}} \\
&= f\frac{\epsilon}{2}\bar{f}\{\tau(|g|^4-1) - H(1+\epsilon|g|^2)^2\} + g\bar{g}|f|^2\{H(1+\epsilon|g|^2) - \epsilon\tau|g|^2\} \\
&= |f|^2\left\{\frac{\epsilon}{2}\left[\tau(|g|^4-1) - H(1+\epsilon|g|^2)^2\right] + |g|^2\left[H(1+\epsilon|g|^2) - \epsilon\tau|g|^2\right]\right\} \\
&= |f|^2\left\{H(1+\epsilon|g|^2)\left[-\frac{\epsilon}{2}(1+\epsilon|g|^2) + |g|^2\right] + \epsilon\tau\left[\frac{1}{2}(|g|^4-1) - |g|^4\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}|f|^2\left\{H(1+\epsilon|g|^2)(|g|^2-\epsilon) - \epsilon\tau(1+|g|^4)\right\} \\
&= \frac{\epsilon}{2}|f|^2\left\{H(|g|^4-1) - \tau(1+|g|^4)\right\}.
\end{aligned}$$

A dedução da segunda equação efetua-se segundo o cálculo a seguir:

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f\right) &= \frac{1}{2}(-2\epsilon g g_{\bar{z}})f + \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f_{\bar{z}} \\
&= -\epsilon g f g_{\bar{z}} + \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f_{\bar{z}} \\
&= -gf\frac{1}{2}\bar{f}\{\tau(|g|^4-1) - H(1+\epsilon|g|^2)^2\} + \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)\bar{g}|f|^2\{H(1+\epsilon|g|^2) - \epsilon\tau|g|^2\} \\
&= \frac{1}{2}|f|^2\left\{-g\left[\tau(|g|^4-1) - H(1+\epsilon|g|^2)^2\right] + \bar{g}(1-\epsilon g^2)\left[H(1+\epsilon|g|^2) - \epsilon\tau|g|^2\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}|f|^2\left\{H(1+\epsilon|g|^2)\left[g(1+\epsilon|g|^2) + \bar{g}(1-\epsilon g^2)\right] - \tau\left[g(|g|^4-1) + \epsilon|g|^2(\bar{g} - \epsilon g|g|^2)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}|f|^2\left\{H(1+\epsilon|g|^2)(g+\bar{g}) + \tau(g - \epsilon\bar{g}|g|^2)\right\} \\
&= \frac{1}{2}|f|^2\left\{H(1+\epsilon|g|^2)2Re(g) + \tau g(1-\epsilon\bar{g}^2)\right\}.
\end{aligned}$$

Finalmente, demonstra-se a última equação conforme o seguinte procedimento:

$$
\begin{aligned}
\partial_{\bar z}\left(\frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f\right) &= \frac{i}{2}(2\epsilon g g_{\bar z})f + \frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f_{\bar z}\\
&= i\epsilon g f g_{\bar z} + \frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f_{\bar z}\\
&= igf\frac{1}{2}\bar f\{\tau(|g|^4-1) - H(1+\epsilon|g|^2)^2\} + \frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)\bar g|f|^2\{H(1+\epsilon|g|^2)-\epsilon\tau|g|^2\}\\
&= \frac{i}{2}|f|^2\left\{g\left[\tau(|g|^4-1) - H(1+\epsilon|g|^2)^2\right] + \bar g(1+\epsilon g^2)\left[H(1+\epsilon|g|^2)-\epsilon\tau|g|^2\right]\right\}\\
&= \frac{i}{2}|f|^2\left\{H(1+\epsilon|g|^2)\left[-g(1+\epsilon|g|^2)+\bar g(1+\epsilon g^2)\right] + \tau\left[g(|g|^4-1)-\epsilon\bar g|g|^2(1+\epsilon g^2)\right]\right\}\\
&= \frac{i}{2}|f|^2\left\{H(1+\epsilon|g|^2)(-g+\bar g) + \tau(-g-\epsilon\bar g|g|^2)\right\}\\
&= \frac{1}{2}|f|^2\left\{H(1+\epsilon|g|^2)2Im(g) - i\tau g(1+\epsilon\bar g^2)\right\}.
\end{aligned}
$$

□

Enunciamos, enfim, o teorema de representação de superfícies em $\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$ em termos das funções f e g.

Teorema 2.3.1. *Sejam Ω um domínio simplesmente conexo de uma superfície de Riemann Σ, $H:\Omega\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável e f e g funções complexas definidas em Ω com f nunca nula, $1+\epsilon|g|^2>0$, satisfazendo (2.50) e (2.51), isto é,*

$$
f_{\bar z} = \bar g|f|^2\{H(1+\epsilon|g|^2)-\epsilon\tau|g|^2\}, \quad g_{\bar z} = \frac{\epsilon}{2}\bar f\{\tau(|g|^4-1) - H(1+\epsilon|g|^2)^2\}.
$$

onde $H:\Omega\to\mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Então, a aplicação

$$
X=(x_1,x_2,x_3):\Omega\looparrowright\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2),
$$

definida por

$$
\begin{aligned}
x_1(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} gf dz\right)\\
x_2(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{1}{2}(1-\epsilon g^2)fe^{\tau x_1}dz\right)\\
x_3(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{i}{2}(1+\epsilon g^2)fe^{\tau x_1}dz\right),
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

é uma imersão conforme com curvatura média H e aplicação de Gauss g.

Prova. Inicialmente, observamos que, em vista de (2.59), temos $\partial_{\bar z}(gf)\in\mathbb{R}$. Logo, do Lema (2.2.1), concluímos que x_1 está bem definida e satisfaz $\frac{\partial x_1}{\partial z}=gf$. Além disso, em virtude de (2.60) e (2.61), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\partial\bar{z}\left(\frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)fe^{\tau x_1}\right)\\
&=\frac{1}{2}|f|^2\left\{H(1+\epsilon|g|^2)2Re(g)+\tau g(1-\epsilon\bar{g}^2)\right\}e^{\tau x_1}+\frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f\tau e^{\tau x_1}\bar{g}\bar{f}\\
&=\frac{1}{2}|f|^2e^{\tau x_1}\left\{H(1+\epsilon|g|^2)2Re(g)+\tau g(1-\epsilon\bar{g}^2)+\tau\bar{g}(1-\epsilon g^2)\right\}\\
&=\frac{1}{2}|f|^2e^{\tau x_1}\left\{H(1+\epsilon|g|^2)2Re(g)+\tau(g-\epsilon\bar{g}|g|^2+\bar{g}-\epsilon g|g|^2)\right\}\\
&=\frac{1}{2}|f|^2e^{\tau x_1}\left\{H(1+\epsilon|g|^2)2Re(g)+\tau(g+\bar{g})(1-\epsilon|g|^2)\right\}\\
&=|f|^2e^{\tau x_1}\left\{H(1+\epsilon|g|^2)+\tau(1-\epsilon|g|^2)\right\}Re(g)\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&\partial\bar{z}\left(\frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)fe^{\tau x_1}\right)\\
&=\frac{1}{2}|f|^2\left\{H(1+\epsilon|g|^2)2Im(g)-i\tau g(1+\epsilon\bar{g}^2)\right\}e^{\tau x_1}+\frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f\tau e^{\tau x_1}\bar{g}\bar{f}\\
&=\frac{1}{2}|f|^2e^{\tau x_1}\left\{H(1+\epsilon|g|^2)2Im(g)-i\tau g(1+\epsilon\bar{g}^2)+i\tau\bar{g}(1+\epsilon g^2)\right\}\\
&=\frac{1}{2}|f|^2e^{\tau x_1}\left\{H(1+\epsilon|g|^2)2Im(g)+i\tau\left[-g(1+\epsilon\bar{g}^2)+\bar{g}(1+\epsilon g^2)\right]\right\}\\
&=\frac{1}{2}|f|^2e^{\tau x_1}\left\{H(1+\epsilon|g|^2)2Im(g)+i\tau(-g-\epsilon\bar{g}|g|^2+\bar{g}+\epsilon g|g|^2)\right\}\\
&=\frac{1}{2}|f|^2e^{\tau x_1}\left\{H(1+\epsilon|g|^2)2Im(g)+i\tau(-g+\bar{g})(1-\epsilon|g|^2)\right\}\\
&=|f|^2e^{\tau x_1}\left\{H(1+\epsilon|g|^2)+\tau(1-\epsilon|g|^2)\right\}Im(g)\in\mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Portanto, novamente pelo Lema 2.2.1, as funções x_2 e x_3 estão bem definidas e satisfazem

$$\partial_z(x_2)=\frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)fe^{\tau x_1},\quad \partial_z(x_3)=\frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)fe^{\tau x_1}.$$

Alem disso,

$$
\begin{aligned}
X_z &= \partial_z(x_1)\partial_{x_1}+\partial_z(x_2)\partial_{x_2}+\partial_z(x_3)\partial_{x_3}\\
&= gf\partial_{x_1}+\frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)fe^{\tau x_1}\partial_{x_2}+\frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)fe^{\tau x_1}\partial_{x_3}\\
&= gfE_1+\frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)fE_2+\frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)fE_3,
\end{aligned}
$$

donde,

$$\langle X_z,X_z\rangle=0\quad \text{e}\quad \langle X_z,X_{\bar{z}}\rangle=\frac{1}{2}|f|^2(1+\epsilon|g|^2)^2\ (=\frac{1}{2}e^{2\omega}).$$

Potanto, como f é nunca nula e $1+\epsilon|g|^2>0$, a aplicação X é uma imersão conforme. Além disso, a expressão do vetor normal ao longo de X é

$$N=\frac{1}{1+\epsilon|g|^2}\left\{(|g|^2-\epsilon)E_1+2Re(g)E_2+2Im(g)E_3\right\}.$$

Assim, pelos dois primeiros lemas desta seção, a aplicação g é a projeção estereográfica da aplicação de Gauss de X. Finalmente, mostramos que X tem curvatura média H. De fato, a derivada covariante de X_z em relação a $X_{\bar{z}}$ é

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}} X_z &= \partial_{\bar{z}}(gf)E_1 + \frac{1}{2}\partial_{\bar{z}}((1-\epsilon g^2)f)E_2 + \frac{i}{2}\partial_{\bar{z}}((1+\epsilon g^2)f)E_3 \\ &+ gf\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}E_1 + \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}E_2 + \frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}E_3.\end{aligned}$$

Deste modo, usando (2.7), obtemos

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}} E_1 &= \bar{g}\bar{f}\bar{\nabla}_{E_1}E_1 + \frac{1}{2}(1-\epsilon\bar{g}^2)\bar{f}\bar{\nabla}_{E_2}E_1 - \frac{i}{2}(1+\epsilon\bar{g}^2)\bar{f}\bar{\nabla}_{E_3}E_1 \\ &= -\frac{\tau}{2}(1-\epsilon\bar{g}^2)\bar{f}E_2 + \frac{i\tau}{2}(1+\epsilon\bar{g}^2)\bar{f}E_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}} E_2 &= \bar{g}\bar{f}\bar{\nabla}_{E_1}E_2 + \frac{1}{2}(1-\epsilon\bar{g}^2)\bar{f}\bar{\nabla}_{E_2}E_2 - \frac{i}{2}(1+\epsilon\bar{g}^2)\bar{f}\bar{\nabla}_{E_3}E_2 \\ &= \frac{\epsilon\tau}{2}(1-\epsilon\bar{g}^2)\bar{f}E_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}} E_3 &= \bar{g}\bar{f}\bar{\nabla}_{E_1}E_3 + \frac{1}{2}(1-\epsilon\bar{g}^2)\bar{f}\bar{\nabla}_{E_2}E_3 - \frac{i}{2}(1+\epsilon\bar{g}^2)\bar{f}\bar{\nabla}_{E_3}E_3 \\ &= -\frac{i\epsilon\tau}{2}(1+\bar{g}^2)\bar{f}E_1.\end{aligned}$$

Portanto, das relações acima, obtemos

$$\begin{aligned}& gf\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}E_1 + \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}E_2 + \frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}E_3 \\ &= gf\left\{-\frac{\tau}{2}(1-\epsilon\bar{g}^2)\bar{f}E_2 + \frac{i\tau}{2}(1+\epsilon\bar{g}^2)\bar{f}E_3\right\} \\ &+ \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f\frac{\epsilon\tau}{2}(1-\epsilon\bar{g}^2)\bar{f}E_1 - \frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f\frac{i\epsilon\tau}{2}(1+\epsilon\bar{g}^2)\bar{f}E_1 \\ &= \frac{\epsilon\tau}{4}|f|^2\left\{(1-\epsilon g^2)(1-\epsilon\bar{g}^2) + (1+\epsilon g^2)(1+\epsilon\bar{g}^2)\right\}E_1 \\ &- \frac{\tau}{2}|f|^2 g(1-\epsilon\bar{g}^2)E_2 + \frac{i\tau}{2}|f|^2 g(1+\epsilon\bar{g}^2)E_3 \\ &= \frac{\epsilon\tau}{2}|f|^2(1+|g|^4)E_1 - \frac{\tau}{2}|f|^2 g(1-\epsilon\bar{g}^2)E_2 + \frac{i\tau}{2}|f|^2 g(1+\epsilon\bar{g}^2)E_3 \\ &= \frac{\tau}{2}|f|^2\left\{\epsilon(1+|g|^4)E_1 - g(1-\epsilon\bar{g}^2)E_2 + ig(1+\epsilon\bar{g}^2)E_3\right\}.\end{aligned}$$

Usando esta relação juntamente com (2.59), (2.60) e (2.61), obtemos

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}} X_z &= \frac{\epsilon}{2}|f|^2\left\{H(|g|^4-1) - \tau(1+|g|^4)\right\}E_1 \\ &+ \frac{1}{2}|f|^2\left\{H(1+\epsilon|g|^2)2Re(g) + \tau g(1-\epsilon\bar{g}^2)\right\}E_2 \\ &+ \frac{1}{2}|f|^2\left\{H(1+\epsilon|g|^2)2Im(g) - i\tau g(1+\epsilon\bar{g}^2)\right\}E_3 \\ &+ \frac{\tau}{2}|f|^2\left\{\epsilon(1+|g|^4)E_1 - g(1-\epsilon\bar{g}^2)E_2 + ig(1+\epsilon\bar{g}^2)E_3\right\}.\end{aligned}$$

O que implica que

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}} X_z &= \frac{1}{2} H|f|^2 \left\{-\epsilon(1-|g|^4)E_1 + (1+\epsilon|g|^2)2Re(g)E_2 + (1+\epsilon|g|^2)2Im(g)E_3\right\} \\
&= \frac{1}{2} H|f|^2(1+\epsilon|g|^2) \left\{-\epsilon(1-\epsilon|g|^2)E_1 + 2Re(g)E_2 + 2Im(g)E_3\right\} \\
&= \frac{1}{2} H|f|^2(1+\epsilon|g|^2) \left\{(|g|^2-\epsilon)E_1 + 2Re(g)E_2 + 2Im(g)E_3\right\} \\
&= \frac{1}{2} H|f|^2(1+\epsilon|g|^2)^2 N \\
&= \frac{1}{2} H e^{2\omega} N.
\end{aligned}$$

Portanto, X tem curvatura média H, o que encerra a prova do teorema. □

Como consequência deste teorema, obtemos um teorema de representação tipo Weierstrass para superfícies mínimas no espaço $\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$. Em particular, para o espaço hiperbólico de curvatura seccional constante $-\tau^2$, $\mathbb{H}^3(-\tau^2)$.

Corolário 2.3.1. *Suponha que f e g são funções definidas sobre um domínio simplesmente conexo $\Omega \subset \Sigma$ com f nunca nula, $1+\epsilon|g|^2 > 0$, satisfazendo (2.52) e (2.53), isto é,*

$$f_{\bar{z}} = -\epsilon\tau\bar{g}|f|^2|g|^2, \quad g_{\bar{z}} = \frac{\epsilon\tau}{2}\bar{f}(|g|^4-1).$$

Então, a aplicação

$$X = (x_1, x_2, x_3) : \Omega \looparrowright \mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2),$$

definida por

$$\begin{aligned}
x_1(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} gf dz\right) \\
x_2(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{1}{2}(1-\epsilon g^2) f e^{\tau x_1} dz\right) \qquad (2.63) \\
x_3(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{i}{2}(1+\epsilon g^2) f e^{\tau x_1} dz\right),
\end{aligned}$$

é uma imersão conforme mínima e com aplicação de Gauss g.

Prova. As relações (2.52) e (2.53) são respectivamente as relações (2.50) e (2.51) com $H = 0$. □

Quando $|g| < 1$, a representação de superfícies mínimas no espaço $\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$ e, em particular, no espaço hiperbólico, dada acima, pode ser obtida somente a partir da aplicação de Gauss g.

Corolário 2.3.2. *Seja $g : \Omega \subset \Sigma \to (\mathbb{D}, ds^2)$ uma aplicação harmônica nunca holomorfa definida sobre um domínio simplesmente conexo $\Omega \subset \Sigma$, onde*

$$ds^2 = \lambda^2(w)|dw|^2 = \frac{1}{1-|w|^4}|dw|^2.$$

Então, a aplicação

$$X = (x_1, x_2, x_3) : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2),$$

definida por

$$\begin{aligned} x_1(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{2\epsilon}{\tau(|g|^4-1)}\bar{g}_z g dz\right) \\ x_2(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} (1-\epsilon g^2)\tfrac{\epsilon}{\tau(|g|^4-1)}\bar{g}_z e^{\tau x_1} dz\right) \\ x_3(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} (1+\epsilon g^2)\tfrac{i\epsilon}{\tau(|g|^4-1)}\bar{g}_z e^{\tau x_1} dz\right), \end{aligned} \tag{2.64}$$

é uma imersão mínima conforme e tem aplicação de Gauss g.

Prova. Note que, como $|g| < 1$, a função

$$f := \frac{2\epsilon}{\tau(|g|^4-1)}\bar{g}_z,$$

está bem definida. Tal função é livre de zeros, visto que g é nunca holomorfa. Além disso, deduzimos que a derivada de g em relação a $\bar{z}$ satisfaz (2.53), isto é,

$$g_{\bar{z}} = \frac{\epsilon\tau}{2}\bar{f}(|g|^4-1).$$

Por outro lado, pela harmonicidade de g, obtemos que a derivada de f em relação a $\bar{z}$ é

$$\begin{aligned} f_{\bar{z}} &= \frac{2\epsilon}{\tau(|g|^4-1)^2}\left\{\bar{g}_{z\bar{z}}(|g|^4-1) - \bar{g}_z 2|g|^2(g\bar{g}_{\bar{z}} + \bar{g}g_{\bar{z}})\right\} \\ &= \frac{2\epsilon}{\tau(|g|^4-1)^2}\left\{\overline{g_{\bar{z}z}}(|g|^4-1) - 2|g|^2 g\bar{g}_z\bar{g}_{\bar{z}} - 2|g|^2\bar{g}|g_{\bar{z}}|^2\right\} \\ &= \frac{2\epsilon}{\tau(|g|^4-1)^2}\left\{2|g|^2 g\bar{g}_z\bar{g}_{\bar{z}} - 2|g|^2 g\bar{g}_z\bar{g}_{\bar{z}} - 2|g|^2\bar{g}\left(\frac{\tau^2}{4}|f|^2(|g|^4-1)^2\right)\right\} \\ &= -\epsilon\tau\bar{g}|f|^2|g|^2, \end{aligned}$$

isto é, é valida a equação (2.52). Além disso, pela definição de f, a expressão de X dada em (2.64) torna-se (2.63). Assim, pelo corolário anterior, concluímos a prova deste resultado. □

Demonstramos, também, um teorema de representação para superfícies de curvatura média τ no espaço $\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$.

Corolário 2.3.3. *Suponha que f e g são funções definidas sobre um domínio simplesmente conexo $\Omega \subset \Sigma$ com f nunca nula, $1+\epsilon|g|^2 > 0$ e satisfazendo (2.55) e (2.56), isto é,*

$$f_{\bar{z}} = \tau \bar{g}|f|^2, \quad g_{\bar{z}} = -\epsilon\tau\bar{f}(1+\epsilon|g|^2).$$

Então, a aplicação

$$X = (x_1, x_2, x_3) : \Omega \looparrowright \mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2),$$

definida por

$$\begin{aligned} x_1(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} gf dz\right) \\ x_2(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{1}{2}(1-\epsilon g^2) f e^{\tau x_1} dz\right) \\ x_3(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{i}{2}(1+\epsilon g^2) f e^{\tau x_1} dz\right), \end{aligned} \tag{2.65}$$

é uma imersão conforme com curvatura média τ e aplicação de Gauss g.

Prova. As relações (2.55) e (2.56) são respectivamente as relações (2.50) e (2.51) com $H = \tau$. □

A representação acima pode ser dada somente em termos da aplicação de Gauss.

Corolário 2.3.4. *Seja $\Omega \subset \Sigma$ um domínio simplesmente conexo. Dada uma aplicação $g : \Omega \to (\mathbb{D}_\epsilon, ds_\epsilon^2)$ harmônica nunca holomorfa, onde*

$$ds_\epsilon^2 = \frac{1}{1+\epsilon|w|^2}|dw|^2.$$

Então, a aplicação

$$X = (x_1, x_2, x_3) : \Omega \looparrowright \mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2),$$

definida por

$$\begin{aligned} x_1(z) &= -2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{\epsilon}{\tau(1+\epsilon|g|^2)} g\bar{g}_z dz\right) \\ x_2(z) &= -2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{\epsilon}{2\tau(1+\epsilon|g|^2)}(1-\epsilon g^2)\bar{g}_z e^{\tau x_1} dz\right) \\ x_3(z) &= -2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{i\epsilon}{2\tau(1+\epsilon|g|^2)}(1+\epsilon g^2)\bar{g}_z e^{\tau x_1} dz\right) \end{aligned} \tag{2.66}$$

é uma imersão conforme de curvatura média constante igual a τ e aplicação de Gauss g.

Prova. Definimos

$$f = -\frac{\epsilon}{\tau(1+\epsilon|g|^2)}\bar{g}_z.$$

Logo, como $1+\epsilon|g|^2>0$, f é bem definida e como g é nunca holomorfa, f não tem zeros. Pela definição de f, segue que a derivada de g em relação a $\bar{z}$ satifaz (2.56), isto é,

$$g_{\bar{z}} = -\epsilon\tau\bar{f}(1+\epsilon|g|^2).$$

Agora mostramos que, pela harmonicidade de g e (2.56), a derivada de f em relação a $\bar{z}$ satisfaz (2.55). De fato, pela definição de f, temos

$$\begin{aligned} f_{\bar{z}} &= -\frac{\epsilon}{\tau}\frac{\bar{g}_{z\bar{z}}(1+\epsilon|g|^2)-\epsilon\bar{g}_z(g\bar{g}_{\bar{z}}+\bar{g}g_{\bar{z}})}{(1+\epsilon|g|^2)^2} \\ &= -\frac{\epsilon}{\tau(1+\epsilon|g|^2)^2}\{\bar{g}_{\bar{z}z}(1+\epsilon|g|^2)-\epsilon g\bar{g}_z\bar{g}_{\bar{z}}-\epsilon\bar{g}|g_{\bar{z}}|^2\} \\ &= -\frac{\epsilon}{\tau(1+\epsilon|g|^2)^2}\{\epsilon g\bar{g}_z\bar{g}_z-\epsilon g\bar{g}_z\bar{g}_{\bar{z}}-\epsilon\bar{g}\tau^2|f|^2(1+\epsilon|g|^2)^2\} \\ &= \tau\bar{g}|f|^2. \end{aligned}$$

Finalmente, substituindo a expressão de f em (2.66), asseguramos que a aplicação X é dada em termos de f e g como em (2.65). Portanto, o resultado segue do corolário anterior. □

Por último, observamos que os corolários (2.3.1) e (2.3.3) tem obviamente versões em termos das funções ψ_1 e ψ_2 que não os enunciaremos aqui.

2.4 Casos Particulares

Como observamos na primeira seção deste capítulo, quando $\tau=0$, $(\mathrm{G}_\tau, g_{1,\tau})$ é o espaço Euclideano e $(\mathrm{G}_\tau, g_{-1,\tau})$ é o espaço Lorentziano. Portanto, como conseqüência deste capítulo obtemos, para uma imersão de uma superfície de Riemann Σ no espaço Euclideano ou Lorentziano de dimensão 3, resultados similares aos apresentados acima para $\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$, tomando $\tau=0$ e $\epsilon=1$ ou $\epsilon=-1$.

2.4.1 Caso Euclideano

A seguir, apresentamos alguns resultamos para imersões de uma superfície de Riemann no espaço Euclideano, obtidos como conseqüência deste capítulo. Assim por exemplo, da Proposição (2.2.1), temos

Proposição 2.4.1. *Seja $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ uma imersão isométrica de uma superfície de Riemann Σ no espaço Euclideano de dimensão 3, então o campo espinorial $\psi = (\psi_1 \ \ \psi_2)^T$*

definido pelas equações (2.12) e (2.23) satisfaz a equação de Dirac $\mathcal{D}\psi = 0$, onde

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_z \\ -\partial_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix},$$

$$U = V = -\frac{1}{2}H(|\psi_2|^2 + |\psi_1|^2).$$

Pelo lema (2.3.3), temos

Lema 2.4.1. *Seja $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ uma imersão de curvatura média H. Sobre um domínio de um parâmetro conforme da superfície de Riemann Σ, onde estão definidas as funções f e g, temos*

$$f_{\bar{z}} = H\bar{g}|f|^2(1 + |g|^2), \tag{2.67}$$

$$g_{\bar{z}} = -\frac{H}{2}\bar{f}(1 + |g|^2)^2. \tag{2.68}$$

Além disso,

$$g_{z\bar{z}} = -\frac{H_z}{2}\bar{f}(1 + |g|^2)^2 + 2\frac{\bar{g}}{1 + |g|^2}g_{\bar{z}}g_z. \tag{2.69}$$

Prova. As equações (2.67) e (2.67) são, respectivamente, as equações (2.50) e (2.50) com $\tau = 0$ e $\epsilon = 1$. Para (2.69), temos

$$\begin{aligned}
g_{z\bar{z}} &= -\frac{H_z}{2}\bar{f}(1 + |g|^2)^2 - \frac{H}{2}\bar{f}_z(1 + |g|^2)^2 - \frac{H}{2}\bar{f}2(1 + |g|^2)(g\bar{g}_z + \bar{g}g_z) \\
&= -\frac{H_z}{2}\bar{f}(1 + |g|^2)^2 - \frac{H}{2}[Hg|f|^2(1 + |g|^2)](1 + |g|^2)^2 \\
&- H\bar{f}(1 + |g|^2)g\{-\frac{H}{2}f(1 + |g|^2)^2\} - H\bar{f}(1 + |g|^2)\bar{g}g_z \\
&= -\frac{H_z}{2}\bar{f}(1 + |g|^2)^2 - \frac{H^2}{2}g|f|^2(1 + |g|^2)^3 \\
&+ \frac{H^2}{2}|f|^2(1 + |g|^2)^3 g - \frac{H}{2}\bar{f}(1 + |g|^2)^2\frac{2\bar{g}}{1 + |g|^2}g_z \\
&= -\frac{H_z}{2}\bar{f}(1 + |g|^2)^2 + 2\frac{\bar{g}}{1 + |g|^2}g_{\bar{z}}g_z.
\end{aligned}$$

□

Observe que, por (2.68), quando H é nunca nula, temos

$$\bar{f} = -\frac{2}{H(1 + |g|^2)^2}g_{\bar{z}}.$$

Logo, (2.69) pode ser reescrita como

$$H\left\{g_{z\bar{z}} - 2\frac{\bar{g}}{1 + |g|^2}g_{\bar{z}}g_z\right\} = H_z g_{\bar{z}}. \tag{2.70}$$

A fórmula acima é a fórmula (4.1) em [23]. Uma conseqüência do lema anterior é

Corolário 2.4.1. *Seja $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ uma imersão. Então, se X é mínima, f e g são holomorfas; e, se X tem curvatura média constante, então a aplicação de Gauss g é harmônica sobre o plano $\mathbb{C}$ dotado da métrica*

$$ds^2 = \lambda^2(w)|dw|^2 = \frac{1}{(1+|w|^2)^2}|dw|^2.$$

Prova. De fato, se a curatura média da imersão é constante, então a equação (2.69) torna-se

$$g_{z\bar{z}} - 2\frac{\bar{g}}{1+|g|^2}g_{\bar{z}}g_z = 0. \tag{2.71}$$

De modo que, se $\lambda(w) = \frac{1}{1+|w|^2}$, então $\lambda_w(w) = -\frac{\bar{w}}{(1+|w|^2)^2}$. Logo,

$$\frac{2}{\lambda(g)}\lambda_w(g) = 2(1+|g|^2)\left(-\frac{\bar{g}}{(1+|g|^2)^2}\right) = -2\frac{\bar{g}}{(1+|g|^2)^2}.$$

Portanto, a equação (2.71) escreve-se como

$$g_{z\bar{z}} + \frac{2}{\lambda(g)}\lambda_w(g)g_{\bar{z}}g_z = 0.$$

Isto expressa, por (1.55), a harmonicidade de g. □

Outra conseqüência deste capítulo é a representação integral para superfícies no espaço euclideano. Do Teorema (2.3.1), obtemos

Teorema 2.4.1. *Sejam Ω um domínio simplesmente conexo de uma superfície de Riemann Σ, $H : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e f e g funções complexas definidas em Ω com f nunca nula, satisfazendo (2.67) e (2.68), isto é,*

$$f_{\bar{z}} = H\bar{g}|f|^2(1+|g|^2), \quad g_{\bar{z}} = \frac{H}{2}\bar{f}(1+|g|^2)^2.$$

Então, a aplicação

$$X = (x_1, x_2, x_3) : \Omega \looparrowright \mathbb{R}^3,$$

definida por

$$\begin{aligned} x_1(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} gf dz\right) \\ x_2(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{1}{2}(1-g^2)f dz\right) \\ x_3(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{i}{2}(1+g^2)f dz\right), \end{aligned} \tag{2.72}$$

é uma imersão conforme com curvatura média H e aplicação de Gauss g.

Prova. As relações (2.67) e (2.68) são, respectivamente, as relações (2.50) e (2.51) com $\tau = 0$ e $\epsilon = 1$. Assim, a definição de X dada em (2.72) corresponde àquela dada em (2.62) com $\tau = 0$ e $\epsilon = 1$. $\square$

A representação de uma superfície no espaço euclideano, pode ser dada somente a partir de sua aplicação de Gauss g, desde que g verifique certa equação diferencial. Isto é, (veja Teorema 4 em [23])

Corolário 2.4.2. *Seja $\Omega \subset \Sigma$ um dominio simplesmente conexo. Seja $H : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e nunca nula. Suponha que a aplicação g definida sobre Ω é nunca holomorfa e satifaz a equação diferencial (2.70) i.e.,*

$$Hg_{z\bar{z}} - H_z g_{\bar{z}} = 2H\frac{\bar{g}}{1+|g|^2}g_{\bar{z}}g_z.$$

Então, a aplicação

$$X = (x_1, x_2, x_3) : \Omega \looparrowright \mathbb{R}^3,$$

definida por

$$\begin{array}{rcl} x_1(z) &=& -2Re\left(\int_{z_0}^{z} \frac{2}{H(1+|g|^2)^2} g\bar{g}_z dz\right) \\ x_2(z) &=& -2Re\left(\int_{z_0}^{z} (1-g^2)\frac{1}{H(1+|g|^2)^2}\bar{g}_z dz\right) \\ x_3(z) &=& -2Re\left(\int_{z_0}^{z} (1+g^2)\frac{i}{H(1+|g|^2)^2}\bar{g}_z dz\right), \end{array} \tag{2.73}$$

é uma imersão conforme com curvatura média H e aplicação de Gauss g.

Prova. Defina

$$f := -\frac{2}{H(1+|g|^2)^2}\bar{g}_z.$$

Logo, como $\bar{g}_z$ e H são nunca nulas, f é nunca nula. Além disso, pela definição de f, segue que a derivada de g em relação a $\bar{z}$ satisfaz (2.68) i.e., $g_{\bar{z}} = \frac{H}{2}\bar{f}(1+|g|^2)^2$. Agora, por (2.68) e (2.70), para a derivada de f em relação a $\bar{z}$, temos

$$\begin{aligned}
f_{\bar{z}} &= -\frac{2}{H^2(1+|g|^2)^4}\{\bar{g}_{z\bar{z}}H(1+|g|^2)^2 - \bar{g}_z H_{\bar{z}}(1+|g|^2)^2 \\
&- 2H\bar{g}_z(1+|g|^2)(g\bar{g}_z + \bar{g}g_{\bar{z}})\} \\
&= -\frac{2}{H^2(1+|g|^2)^3}\left\{(1+|g|^2)\left[\overline{g_{\bar{z}z}}H - \bar{g}_z H_{\bar{z}}\right] - 2H\bar{g}_z(g\bar{g}_z + \bar{g}g_{\bar{z}})\right\} \\
&= -\frac{2}{H^2(1+|g|^2)^3}\{2Hg\bar{g}_z\bar{g}_{\bar{z}} - 2H\bar{g}_z(g\bar{g}_z + \bar{g}g_{\bar{z}})\} \\
&= \frac{4}{H(1+|g|^2)^3}\bar{g}|g_z|^2 \\
&= \frac{4}{H(1+|g|^2)^3}\bar{g}\left(\frac{H^2}{4}|f|^2(1+|g|^2)^4\right) \\
&= H\bar{g}|f|^2(1+|g|^2),
\end{aligned}$$

isto é, obtemos a equação (2.67). Além disso, pela definição de f, a definição de X dada em (2.73), torna-se (2.72). Portanto, este resultado segue do teorema anterior. □

Também podemos obter, salvo uma mudança de coordenadas, a representação de Weierstrass para superfícies mínimas no espaço Euclideano

Corolário 2.4.3. (Representação de Weiertrass) *Suponha que f e g são funções holomorfas definidas sobre um domínio simplesmente conexo $\Omega \subset \Sigma$ com f nunca nula. Então a aplicação*

$$X = (x_1, x_2, x_3) : \Omega \looparrowright \mathbb{R}^3,$$

definida por

$$\begin{aligned}
x_1(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} gf dz\right) \\
x_2(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{1}{2}(1-g^2)f dz\right) \\
x_3(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{i}{2}(1+g^2)f dz\right),
\end{aligned} \tag{2.74}$$

é uma imersão conforme mínima com aplicação de Gauss g.

2.4.2 Caso Lorentziano

Como observamos na primeira seção deste capítulo, quando $\tau = 0$, $(\mathrm{G}_\tau, g_{-1,\tau})$ é o espaço de Lorentz $\mathbb{L}^3$. Mencionamos aqui os resultados mais importantes que podemos obter para uma imersão

$$X : \Sigma \to \mathbb{L}^3$$

de uma superfície de Riemann Σ no espaço de Lorentz de dimensão 3, obtidos dos cálculos acima efetuados para $\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$, tomando $\tau = 0$ e $\epsilon = -1$. Assim, por exemplo, da Proposição (2.2.1), temos

Proposição 2.4.2. *Seja $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{L}^3$ uma imersão isométrica de uma superfície de Riemann Σ no espaço de Lorentz de dimensão 3, então o campo espinorial $\psi = (\psi_1 \;\; \psi_2)^T$ definido pelas equações (2.12) e (2.23) satisfaz a equação de Dirac $\mathcal{D}\psi = 0$, onde*

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_z \\ -\partial_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix},$$

$$U = -V = -\frac{1}{2}H(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2).$$

Pelo Lema (2.3.3), temos

Lema 2.4.2. *Seja $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{L}^3$ uma imersão de curvatura média H. Sobre um domínio de um parâmetro conforme da superfície de Riemann Σ, onde estão definidas as funções f e g, temos*

$$f_{\bar{z}} = H\bar{g}|f|^2(1 - |g|^2), \tag{2.75}$$

$$g_{\bar{z}} = \frac{H}{2}\bar{f}(1 - |g|^2)^2. \tag{2.76}$$

Além disso, temos

$$g_{z\bar{z}} = \frac{H_z}{2}\bar{f}(1 - |g|^2)^2 - 2\frac{\bar{g}}{1 - |g|^2}g_{\bar{z}}g_z. \tag{2.77}$$

Prova. As equações (2.75) e (2.75) são, respectivamente, as equações (2.50) e (2.50) com $\tau = 0$ e $\epsilon = -1$. Para (2.77), temos, pelo fato de que (2.76) fornece

$$\frac{2g_{\bar{z}}}{(1 - |g|^2)^2} = H\bar{f} \in \mathcal{C}^\infty.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
g_{z\bar{z}} &= \frac{H_z}{2}\bar{f}(1 - |g|^2)^2 + \frac{H}{2}\bar{f}_z(1 - |g|^2)^2 - \frac{H}{2}\bar{f}2(1 - |g|^2)(g\bar{g}_z + \bar{g}g_z) \\
&= \frac{H_z}{2}\bar{f}(1 - |g|^2)^2 + \frac{H}{2}[Hg|f|^2(1 - |g|^2)](1 - |g|^2)^2 \\
&- H\bar{f}(1 - |g|^2)g\{\frac{H}{2}f(1 - |g|^2)^2\} - H\bar{f}(1 - |g|^2)\bar{g}g_z \\
&= \frac{H_z}{2}\bar{f}(1 - |g|^2)^2 + \frac{H^2}{2}g|f|^2(1 - |g|^2)^3 \\
&- \frac{H^2}{2}|f|^2(1 - |g|^2)^3g - (H\bar{f})(1 - |g|^2)\bar{g}g_z \\
&= \frac{H_z}{2}\bar{f}(1 - |g|^2)^2 - \left(\frac{2g_{\bar{z}}}{(1 - |g|^2)^2}\right)(1 - |g|^2)\bar{g}g_z \\
&= \frac{H_z}{2}\bar{f}(1 - |g|^2)^2 - 2\frac{\bar{g}}{1 - |g|^2}g_{\bar{z}}g_z.
\end{aligned}$$

□

Uma conseqüência do lema acima é,

Corolário 2.4.4. *Seja $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{L}^3$ uma imersão. Então, se X é mínima, f e g são holomorfas; e, se X tem curvatura média constante, então a aplicação de Gauss g é harmônica sobre o disco $\mathbb{D}$ equipado com a métrica*

$$ds^2 = \lambda^2(w)|dw|^2 = \frac{1}{(1-|w|^2)^2}|dw|^2.$$

Prova. De fato, se a curatura média da imersão é constante, então a equação (2.77) torna-se

$$g_{z\bar{z}} + 2\frac{\bar{g}}{1-|g|^2}g_{\bar{z}}g_z = 0. \tag{2.78}$$

De modo que, se $\lambda(w) = \frac{1}{1-|w|^2}$, então $\lambda_w(w) = \frac{\bar{w}}{(1-|w|^2)^2}$. Logo,

$$\frac{2}{\lambda(g)}\lambda_w(g) = 2(1-|g|^2)\left(\frac{\bar{g}}{(1-|g|^2)^2}\right) = 2\frac{\bar{g}}{(1-|g|^2)^2}.$$

Portanto, a equação (2.78) escreve-se como

$$g_{z\bar{z}} + \frac{2}{\lambda(g)}\lambda_w(g)g_{\bar{z}}g_z = 0.$$

Isto expressa, por (1.55), a harmonicidade de g. □

Outra conseqüência de nossos cálculos é a representação integral para superfícies no espaço de Lorentz. Do Teorema (2.3.1), obtemos

Teorema 2.4.2. *Sejam Ω um domínio simplesmente conexo de uma superfície de Riemann Σ, $H : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e f e g funções complexas definidas em Ω com f nunca nula e $|g| < 1$, satisfazendo (2.75) e (2.76), isto é,*

$$f_{\bar{z}} = H\bar{g}|f|^2(1-|g|^2), \quad g_{\bar{z}} = \frac{H}{2}\bar{f}(1-|g|^2)^2.$$

Então, a aplicação

$$X = (x_1, x_2, x_3) : \Omega \looparrowright \mathbb{L}^3,$$

definida por

$$\begin{aligned} x_1(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} gf dz\right) \\ x_2(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{1}{2}(1+g^2)f dz\right) \\ x_3(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{i}{2}(1-g^2)f dz\right), \end{aligned} \tag{2.79}$$

é uma imersão conforme com curvatura média H e aplicação de Gauss g.

Prova. As relações (2.75) e (2.76) são, respectivamente, as relações (2.50) e (2.51) com $\tau = 0$ e $\epsilon = -1$. Assim, a definição de X dada em (2.79) corresponde àquela dada em (2.62) com $\tau = 0$ e $\epsilon = -1$. $\square$

A representação de uma superfície no espaço de Lorentz pode ser dada somente a partir de sua aplicação de Gauss g, desde que g verifique certa equação diferencial. Isto é,

Corolário 2.4.5. *Seja $\Omega \subset \Sigma$ um domínio simplesmente conexo. Seja $H : \Omega \subset \Sigma \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e nunca nula. Suponha que a aplicação $g : \Omega \subset \Sigma \to \mathbb{D}$ é nunca holomorfa e satisfaz a equação diferencial*

$$Hg_{z\bar{z}} - H_z g_{\bar{z}} = -2H\frac{\bar{g}}{1-|g|^2}g_{\bar{z}}g_z. \tag{2.80}$$

Então, a aplicação

$$X = (x_1, x_2, x_3) : \Omega \looparrowright \mathbb{L}^3,$$

definida por

$$\begin{aligned} x_1(z) &= -2Re\left(\int_{z_0}^{z} \frac{2}{H(1-|g|^2)^2}\bar{g}_z g dz\right) \\ x_2(z) &= -2Re\left(\int_{z_0}^{z} (1+g^2)\frac{1}{H(1-|g|^2)^2}\bar{g}_z dz\right) \\ x_3(z) &= -2Re\left(\int_{z_0}^{z} (1-g^2)\frac{i}{H(1-|g|^2)^2}\bar{g}_z dz\right), \end{aligned} \tag{2.81}$$

é uma imersão conforme com curvatura média H e aplicação de Gauss g.

Prova. Defina

$$f := \frac{2}{H(1-|g|^2)^2}\bar{g}_z.$$

Observe que, como $|g| < 1$ e H é nunca nula, f é bém definida. Note também que, como g é nunca holomorfa, f não se anula. Além disso, pela definição de f, segue que a derivada de g em relação a $\bar{z}$ satisfaz (2.76) i.e., $g_{\bar{z}} = \frac{H}{2}\bar{f}(1-|g|^2)^2$ e que a equação (2.77) é equivalente a (2.80). Agora, por (2.76) e (2.80), temos, para a derivada de f em relação a $\bar{z}$,

$$\begin{aligned}
f_{\bar{z}} &= \frac{2}{H^2(1-|g|^2)^4}\{\bar{g}_{z\bar{z}}H(1-|g|^2)^2 - \bar{g}_z H_{\bar{z}}(1-|g|^2)^2 \\
&+ \; 2H\bar{g}_z(1-|g|^2)(g\bar{g}_z + \bar{g}g_{\bar{z}})\} \\
&= \frac{2}{H^2(1-|g|^2)^3}\left\{(1-|g|^2)\left[\overline{g_{\bar{z}z}}H - \bar{g}_z H_{\bar{z}}\right] + 2H\bar{g}_z(g\bar{g}_z + \bar{g}g_{\bar{z}})\right\} \\
&= \frac{2}{H^2(1-|g|^2)^3}\left\{-2Hg\bar{g}_z\bar{g}_{\bar{z}} + 2H\bar{g}_z(g\bar{g}_z + \bar{g}g_{\bar{z}})\right\} \\
&= \frac{4}{H(1-|g|^2)^3}\bar{g}|g_z|^2 \\
&= \frac{4}{H(1-|g|^2)^3}\bar{g}\left(\frac{H^2}{4}|f|^2(1-|g|^2)^4\right) \\
&= H\bar{g}|f|^2(1-|g|^2),
\end{aligned}$$

isto é, reobtemos (2.75). Além disso, pela definição de f, a definição de X dada em (2.81), torna-se (2.79). Portanto, este resultado segue do teorema anterior. □

Também podemos obter, uma representação do tipo Weierstrass para superfícies mínimas no espaço lorentziano

Corolário 2.4.6. (Representação de Weiertrass no Espaço de Lorentz) *Suponha que f e g são funções holomorfas definidas sobre um dominio simplesmente conexo $\Omega \subset \Sigma$ com f nunca nula e $|g| < 1$. Então, a aplicação*

$$X = (x_1, x_2, x_3) : \Omega \looparrowright \mathbb{L}^3,$$

definida por

$$\begin{aligned}
x_1(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} gf dz\right) \\
x_2(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{1}{2}(1+g^2)f dz\right) \\
x_3(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{i}{2}(1-g^2)f dz\right),
\end{aligned} \tag{2.82}$$

é uma imersão conforme mínima com aplicação de Gauss g.

Capítulo 3

Superfícies no Espaço de Heisenberg

3.1 O Espaço de Heisenberg

Nesta seção, apresentamos algumas noções básicas sobre o espaço de Heisenberg, definido como o grupo de Lie tridimensional, nilpotente a dois passos, representado em $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ por matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & r & t \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $r,\ s,\ t \in \mathbb{R}$. A seguir, consideramos uma família de grupos de Heisenberg dependendo de um parâmetro $\tau > 0$. Detonamos, inicialmente, esta família por

$$\mathbb{H}_3(\tau) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2\tau}\, x_1 & x_3 + \tau\, x_1 x_2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2\tau}\, x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

O elemento unidade deste grupo é a matriz identidade de ordem 3, que denotamos por e. É fácil ver que o espaço tangente a $\mathbb{H}_3(\tau)$ na unidade é dado por

$$T_e\mathbb{H}_3(\tau) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\tau}\, a & c \\ 0 & 0 & \sqrt{2\tau}\, b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Note que, fixada

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\tau}\, x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & \sqrt{2\tau}\, x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in T_e\mathbb{H}_3(\tau),$$

então

$$A = \exp M = I + M + \frac{1}{2}M^2 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2\tau}\, x_1 & x_3 + \tau\, x_1 x_2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2\tau}\, x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sendo assim, dizemos que a matriz $A \in \mathbb{H}_3(\tau)$ tem coordenadas exponenciais (x_1, x_2, x_3). Explicitamos a seguir a estrutura de grupo de $\mathbb{H}_3(\tau)$ em termos destas coordenadas. Sejam

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\tau}\; x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & \sqrt{2\tau}\; x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\tau}\; y_1 & y_3 \\ 0 & 0 & \sqrt{2\tau}\; y_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e $A = \exp M$, $B = \exp N$. Portanto,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2\tau}\, x_1 & x_3 + \tau\, x_1 x_2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2\tau}\, x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2\tau}\, y_1 & y_3 + \tau\, y_1 y_2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2\tau}\, y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2\tau}(x_1 + y_1) & x_3 + y_3 + \tau(x_1 y_2 - y_1 x_2) + \tau(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \\ 0 & 1 & \sqrt{2\tau}(x_2 + y_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} AB &= \exp M \cdot \exp N \\ &= \exp\big(M + N + \frac{1}{2}[M, N]\big) \\ &= \exp \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\tau}(x_1 + y_1) & x_3 + y_3 + \tau(x_1 y_2 - y_1 x_2) \\ 0 & 0 & \sqrt{2\tau}(x_2 + y_2) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, se as matrizes A e B de $\mathbb{H}_3(\tau)$ são representadas em coordenadas exponenciais por (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3), respectivamente, então o produto AB é representado por $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + \tau x_1 y_2 - \tau y_1 x_2)$. Logo, usando coordenadas exponencias sobre o grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_3(\tau)$

$$(x_1, x_2, x_3) \quad \xrightarrow{\exp} \quad \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2\tau}\, x_1 & x_3 + \tau\, x_1 x_2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2\tau}\, x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a operação do grupo (multiplicação de matrizes) pode ser escrita como

$$(x_1, x_2, x_3) * (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + \tau x_1 y_2 - \tau y_1 x_2) \tag{3.1}$$

A álgebra de Lie $T_e\mathbb{H}_3(\tau)$ é gerada pelos vetores

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que, em termos das coordenadas exponencias (x_1, x_2, x_3), são dados respectivamente por

$$\partial_{x_1}|_e =: \hat{e}_1, \quad \partial_{x_2}|_e =: \hat{e}_2, \quad \partial_{x_3}|_e =: \hat{e}_3$$

Sejam E_1, E_2 e E_3 os campos invariantes à esquerda gerados pelos vetores $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ e $\hat{e}_3$, respectivamente, ou seja,

$$\begin{aligned} E_1|_{(x_1,x_2,x_3)} &= \frac{d}{dt}(x_1, x_2, x_3) * (t, 0, 0)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(x_1 + t, x_2, t - \tau t x_3)|_{t=0} \\ &= (\partial_{x_1} - \tau x_2 \partial_{x_3})|_{(x_1,x_2,x_3)} \end{aligned}$$

e, de modo análogo,

$$E_2 = \partial_{x_2} + \tau x_1 \partial_{x_3}, \quad E_3 = \partial_{x_3}.$$

Segue que

$$\partial_{x_1} = E_1 + \tau x_2 E_3, \quad \partial_{x_2} = E_2 - \tau x_1 E_3, \quad \partial_{x_3} = E_3.$$

Definimos uma métrica em $\mathbb{H}_3(\tau)$, invariante à esquerda, que denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, de modo que os vetores $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ e $\hat{e}_3$ sejam ortogonais e verifiquem

$$\langle \hat{e}_1, \hat{e}_1 \rangle = \langle \hat{e}_2, \hat{e}_2 \rangle = 1, \quad \langle \hat{e}_3, \hat{e}_3 \rangle = \pm 1 =: \epsilon.$$

Esta métrica é representada pela matriz

$$(g_{ij}) = (\langle \partial_{x_i}, \partial_{x_j} \rangle) = \begin{pmatrix} 1 + \tau^2 x_2^2 \epsilon & -\tau^2 x_1 x_2 \epsilon & \tau x_2 \epsilon \\ -\tau^2 x_1 x_2 \epsilon & 1 + \tau^2 x_1^2 \epsilon & -\tau x_1 \epsilon \\ \tau x_2 \epsilon & -\tau x_1 \epsilon & \epsilon \end{pmatrix},$$

donde obtemos sua expressão coordenada

$$ds_\epsilon^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \epsilon\{\tau(x_2 dx_1 - x_1 dx_2) + dx_3\}^2. \tag{3.2}$$

Doravante, o grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_3(\tau)$, dotado da métrica ds^2_ϵ, será denotado por $\mathbb{H}_3(\epsilon,\tau)$. A seguir, determinamos os símbolos de Christoffel correspondentes com respeito ao referencial $\{E_1, E_2, E_3\}$. Inicialmente, calculamos

$$\begin{aligned}[\hat{e}_1, \hat{e}_2] &= (1,0,0) * (0,1,0) - (0,1,0) * (1,0,0) \\ &= (1,1,\tau) - (1,1,-\tau) = 2\tau(0,0,1) = 2\tau\hat{e}_3\end{aligned}$$

e, similarmente, $[\hat{e}_1, \hat{e}_3] = [\hat{e}_2, \hat{e}_3] = 0$. Portanto, o referencial ortogonal $\{E_1, E_2, E_3\}$ verifica

$$[E_1, E_2] = 2\tau E_3, \quad [E_1, E_3] = [E_2, E_3] = 0 \tag{3.3}$$

e

$$\langle E_i, E_j\rangle = \delta_{ij} \quad (j \neq 3), \qquad \langle E_3, E_3\rangle = \epsilon. \tag{3.4}$$

Além disso, temos

Lema 3.1.1. *O referencial* $\{E_1, E_2, E_3\}$ *satisfaz*

$$\begin{array}{ccc} \bar{\nabla}_{E_1}E_1 = 0 & \bar{\nabla}_{E_2}E_1 = -\tau E_3 & \bar{\nabla}_{E_3}E_1 = -\epsilon\tau E_2 \\ \bar{\nabla}_{E_1}E_2 = \tau E_3 & \bar{\nabla}_{E_2}E_2 = 0 & \bar{\nabla}_{E_3}E_2 = \epsilon\tau E_1 \\ \bar{\nabla}_{E_1}E_3 = -\epsilon\tau E_2 & \bar{\nabla}_{E_2}E_3 = \epsilon\tau E_1 & \bar{\nabla}_{E_3}E_3 = 0 \end{array} \tag{3.5}$$

Prova. Escrevemos

$$\bar{\nabla}_{E_1}E_1 = \Gamma^1_{11}E_1 + \Gamma^2_{11}E_2 + \Gamma^3_{11}E_3.$$

Segue de (1.37), que

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{11} &= \langle \bar{\nabla}_{E_1}E_1, E_1\rangle = \frac{1}{2}\langle [E_1, E_1] - 2(ad_{E_1})^*E_1, E_1\rangle = -\langle E_1, [E_1, E_1]\rangle = 0 \\ \Gamma^2_{11} &= \langle \bar{\nabla}_{E_1}E_1, E_2\rangle = \frac{1}{2}\langle [E_1, E_1] - 2(ad_{E_1})^*E_1, E_2\rangle = -\langle E_1, [E_1, E_2]\rangle = 0 \\ \epsilon\ \Gamma^3_{11} &= \langle \bar{\nabla}_{E_1}E_1, E_3\rangle = \frac{1}{2}\langle [E_1, E_1] - 2(ad_{E_1})^*E_1, E_3\rangle = -\langle E_1, [E_1, E_3]\rangle = 0.\end{aligned}$$

Portanto, $\bar{\nabla}_{E_1}E_1 = 0$ e, similarmente, $\bar{\nabla}_{E_2}E_2 = \bar{\nabla}_{E_3}E_3 = 0$. Escrevemos, desta vez,

$$\bar{\nabla}_{E_1}E_2 = \Gamma^1_{12}E_1 + \Gamma^2_{12}E_2 + \Gamma^3_{12}E_3$$

e, como acima, obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{12} &= \langle \bar{\nabla}_{E_1}E_2, E_1\rangle = \frac{1}{2}\langle [E_1, E_2] - (ad_{E_1})^*E_2 - (ad_{E_2})^*E_1, E_1\rangle \\ &= -\frac{1}{2}\{\langle E_2, [E_1, E_1]\rangle + \langle E_1, [E_2, E_1]\rangle\} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^2 &= \langle \bar{\nabla}_{E_1} E_2, E_2 \rangle = \frac{1}{2}\langle [E_1, E_2] - (ad_{E_1})^* E_2 - (ad_{E_2})^* E_1, E_2 \rangle \\ &= -\frac{1}{2}\{\langle E_2, [E_1, E_2]\rangle + \langle E_1, [E_2, E_2]\rangle\} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon\ \Gamma_{12}^3 &= \langle \bar{\nabla}_{E_1} E_2, E_3 \rangle = \frac{1}{2}\langle [E_1, E_2] - (ad_{E_1})^* E_2 - (ad_{E_2})^* E_1, E_3 \rangle \\ &= \frac{1}{2}\{2\tau\epsilon - \langle E_2, [E_1, E_3]\rangle - \langle E_1, [E_2, E_3]\rangle\} = \tau\epsilon.\end{aligned}$$

Logo, $\bar{\nabla}_{E_1} E_2 = \tau E_3$ e $\bar{\nabla}_{E_2} E_1 = [E_2, E_1] + \bar{\nabla}_{E_1} E_2 = -2\tau E_3 + \tau E_3 = -\tau E_3$. Desta forma, temos

$$\bar{\nabla}_{E_1} E_3 = \Gamma_{13}^1 E_1 + \Gamma_{13}^2 E_2 + \Gamma_{13}^3 E_3,$$

o que acarreta

$$\begin{aligned}\Gamma_{13}^1 &= \langle \bar{\nabla}_{E_1} E_3, E_1 \rangle = \frac{1}{2}\langle [E_1, E_3] - (ad_{E_1})^* E_3 - (ad_{E_3})^* E_1, E_1 \rangle \\ &= -\frac{1}{2}\{\langle E_3, [E_1, E_1]\rangle + \langle E_1, [E_3, E_1]\rangle\} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{13}^2 &= \langle \bar{\nabla}_{E_1} E_3, E_2 \rangle = \frac{1}{2}\langle [E_1, E_3] - (ad_{E_1})^* E_3 - (ad_{E_3})^* E_1, E_2 \rangle \\ &= -\frac{1}{2}\{\langle E_3, [E_1, E_2]\rangle + \langle E_1, [E_3, E_2]\rangle\} = -\tau\epsilon\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon\ \Gamma_{13}^3 &= \langle \bar{\nabla}_{E_1} E_3, E_3 \rangle = \frac{1}{2}\langle [E_1, E_3] - (ad_{E_1})^* E_3 - (ad_{E_3})^* E_1, E_3 \rangle \\ &= -\frac{1}{2}\{\langle E_3, [E_1, E_3]\rangle + \langle E_1, [E_3, E_3]\rangle\} = 0.\end{aligned}$$

Assim, $\bar{\nabla}_{E_1} E_3 = -\epsilon\tau E_2$ e $\bar{\nabla}_{E_3} E_1 = [E_3, E_1] + \bar{\nabla}_{E_1} E_3 = -\epsilon\tau E_2$. Finalmente, considerando

$$\bar{\nabla}_{E_2} E_3 = \Gamma_{23}^1 E_1 + \Gamma_{23}^2 E_2 + \Gamma_{23}^3 E_3,$$

encontramos

$$\begin{aligned}\Gamma_{23}^1 &= \langle \bar{\nabla}_{E_2} E_3, E_1 \rangle = \frac{1}{2}\langle [E_2, E_3] - (ad_{E_2})^* E_3 - (ad_{E_3})^* E_2, E_1 \rangle \\ &= -\frac{1}{2}\{\langle E_3, [E_2, E_1]\rangle + \langle E_2, [E_3, E_1]\rangle\} = \epsilon\tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{23}^2 &= \langle \bar{\nabla}_{E_2} E_3, E_2 \rangle = \frac{1}{2}\langle [E_2, E_3] - (ad_{E_2})^* E_3 - (ad_{E_3})^* E_2, E_2 \rangle \\ &= -\frac{1}{2}\{\langle E_3, [E_2, E_2]\rangle + \langle E_2, [E_3, E_2]\rangle\} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon\ \Gamma_{23}^3 &= \langle \bar\nabla_{E_2} E_3, E_3\rangle = \frac{1}{2}\langle [E_2,E_3] - (ad_{E_2})^* E_3 - (ad_{E_3})^* E_2, E_3\rangle \\ &= -\frac{1}{2}\{\langle E_3, [E_2,E_3]\rangle + \langle E_2, [E_3,E_3]\rangle\} = 0.\end{aligned}$$

Sendo assim, $\bar\nabla_{E_2}E_3 = \epsilon\tau E_1$ e $\bar\nabla_{E_3}E_2 = [E_3,E_2] + \bar\nabla_{E_2}E_3 = \epsilon\tau E_1$. □

O lema acima fornece os símbolos de Christoffel da conexão em $\mathbb{H}_3(\epsilon,\tau)$.

Observação 5. *Os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k da conexão $\bar\nabla$ em relação à métrica ds_ϵ^2 de $\mathbb{H}_3(\tau)$, calculados no referencial $\{E_1,E_2,E_3\}$, verificam*

$$\Gamma_{12}^3 = \tau = -\Gamma_{21}^3,\ \Gamma_{13}^2 = -\epsilon\tau = \Gamma_{31}^2,\ \Gamma_{23}^1 = \epsilon\tau = \Gamma_{32}^1, \textit{outros } \Gamma_{ij}^k = 0. \tag{3.6}$$

Observamos, ainda, que

Lema 3.1.2. *O tensor de curvatura em $\mathbb{H}_3(\epsilon,\tau)$ é determinado, no referencial $\{E_1,E_2,E_3\}$, por*

$$\begin{gathered}\bar R(E_1,E_2)E_3 = \bar R(E_2,E_3)E_1 = \bar R(E_3,E_1)E_2 = 0\\ \bar R(E_1,E_2)E_2 = -3\epsilon\tau^2 E_1, \quad \bar R(E_2,E_3)E_3 = \tau^2 E_2\\ \bar R(E_3,E_1)E_1 = \epsilon\tau^2 E_3.\end{gathered} \tag{3.7}$$

Prova. Das equações (3.3), (3.4) e (3.5), obtemos:

$$\begin{aligned}\bar R(E_1,E_2)E_3 &= \bar\nabla_{E_1}\bar\nabla_{E_2}E_3 - \bar\nabla_{E_2}\bar\nabla_{E_1}E_3 - \bar\nabla_{[E_1,E_2]}E_3\\ &= \bar\nabla_{E_1}(\epsilon\tau E_1) - \bar\nabla_{E_2}(-\epsilon\tau E_2) - \bar\nabla_{2\tau E_3}E_3 = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar R(E_2,E_3)E_1 &= \bar\nabla_{E_2}\bar\nabla_{E_3}E_1 - \bar\nabla_{E_3}\bar\nabla_{E_2}E_1 - \bar\nabla_{[E_2,E_3]}E_1\\ &= \bar\nabla_{E_2}(-\epsilon\tau E_2) - \bar\nabla_{E_3}(-\tau E_3) = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar R(E_3,E_1)E_2 &= \bar\nabla_{E_3}\bar\nabla_{E_1}E_2 - \bar\nabla_{E_1}\bar\nabla_{E_3}E_2 - \bar\nabla_{[E_3,E_1]}E_2\\ &= \bar\nabla_{E_3}(\tau E_3) - \bar\nabla_{E_1}(\epsilon\tau E_1) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar R(E_1,E_2)E_2 &= \bar\nabla_{E_1}\bar\nabla_{E_2}E_2 - \bar\nabla_{E_2}\bar\nabla_{E_1}E_2 - \bar\nabla_{[E_1,E_2]}E_2\\ &= -\bar\nabla_{E_2}(\tau E_3) - \bar\nabla_{2\tau E_3}E_2\\ &= -\tau\epsilon\tau E_1 - 2\tau\epsilon\tau E_1\\ &= -3\epsilon\tau^2 E_1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{R}(E_2,E_3)E_3 &= \bar{\nabla}_{E_2}\bar{\nabla}_{E_3}E_3 - \bar{\nabla}_{E_3}\bar{\nabla}_{E_2}E_3 - \bar{\nabla}_{[E_2,E_3]}E_3 \\ &= -\bar{\nabla}_{E_3}(\epsilon\tau E_1) = -\epsilon\tau(-\epsilon\tau E_2) = \tau^2 E_2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{R}(E_3,E_1)E_1 &= \bar{\nabla}_{E_3}\bar{\nabla}_{E_1}E_1 - \bar{\nabla}_{E_1}\bar{\nabla}_{E_3}E_1 - \bar{\nabla}_{[E_3,E_1]}E_1 \\ &= -\bar{\nabla}_{E_1}(-\epsilon\tau E_2) = \epsilon\tau\tau E_3 = \epsilon\tau^2 E_3.\end{aligned}$$

□

3.2 A Representação Espinorial

Sejam $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{H}_3(\epsilon,\tau)$ uma imersão isométrica de uma superfície de Riemann Σ no espaço de Heisenberg $\mathbb{H}_3(\epsilon,\tau)$ e $z = u + iv$ um parâmetro conforme em Σ para o qual a expressão local da métrica em Σ é

$$ds^2_\Sigma = e^{2\omega}|dz|^2.$$

Escrevemos

$$X_z = Z^1E_1 + Z^2E_2 + Z^3E_3 \tag{3.8}$$

de modo que, em função de (1.13) e (1.14), obtemos

$$0 = \langle X_z, X_z\rangle = (Z^1)^2 + (Z^2)^2 + \epsilon(Z^3)^2 \tag{3.9}$$

$$\frac{1}{2}e^{2\omega} = \langle X_z, X_{\bar{z}}\rangle = |Z^1|^2 + |Z^2|^2 + \epsilon|Z^3|^2 \tag{3.10}$$

Em virtude de (1.36), o produto exterior é determinado no referencial $\{E_1, E_2, E_3\}$ por

$$E_1 \times E_2 = \epsilon E_3, \quad E_2 \times E_3 = E_1, \quad E_3 \times E_1 = E_2. \tag{3.11}$$

Assim, o campo normal ao longo da imersão dado por

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = e^{-2\omega}X_u \times X_v,$$

pode ser escrito como

$$\begin{aligned} e^{2\omega}N &= X_u \times X_v = i(X_z + X_{\bar{z}}) \times (X_z - X_{\bar{z}}) \\ &= i\{\sum_a (Z^a + \bar{Z}^a)E_a \times \sum_b (Z^b - \bar{Z}^b)E_b\} \\ &= 2i\{(\bar{Z}^2Z^3 - Z^2\bar{Z}^3)E_1 + (Z^1\bar{Z}^3 - \bar{Z}^1Z^3)E_2 + \epsilon(\bar{Z}^1Z^2 - Z^1\bar{Z}^2)E_3\}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$N = 2ie^{-2\omega}\{(\bar{Z}^2 Z^3 - Z^2\bar{Z}^3)E_1 + (Z^1\bar{Z}^3 - \bar{Z}^1 Z^3)E_2 + \epsilon(\bar{Z}^1 Z^2 - Z^1\bar{Z}^2)E_3\}. \tag{3.12}$$

Estabelecemos, agora, as equações que provêm de (1.46) e (1.47). Considerando (1.46) e (3.6), obtemos as equações

$$-\partial_{\bar{z}}Z^1 + \partial_z\bar{Z}^1 + (-Z^3\bar{Z}^2 + \bar{Z}^3 Z^2)\epsilon\tau + (-Z^2\bar{Z}^3 + \bar{Z}^2 Z^3)\epsilon\tau = 0$$

$$-\partial_{\bar{z}}Z^2 + \partial_z\bar{Z}^2 + (-Z^3\bar{Z}^1 + \bar{Z}^3 Z^1)(-\epsilon\tau) + (-Z^1\bar{Z}^3 + \bar{Z}^1 Z^3)(-\epsilon\tau) = 0$$

$$-\partial_{\bar{z}}Z^3 + \partial_z\bar{Z}^3 + (-Z^2\bar{Z}^1 + \bar{Z}^2 Z^1)\tau + (-Z^1\bar{Z}^2 + \bar{Z}^1 Z^2)(-\tau) = 0$$

que se reduzem respectivamente a

$$-\partial_{\bar{z}}Z^1 + \partial_z\bar{Z}^1 = 0 \tag{3.13}$$

$$-\partial_{\bar{z}}Z^2 + \partial_z\bar{Z}^2 = 0 \tag{3.14}$$

$$-\partial_{\bar{z}}Z^3 + \partial_z\bar{Z}^3 + 2\tau(Z^1\bar{Z}^2 - \bar{Z}^1 Z^2) = 0 \tag{3.15}$$

Em vista de (1.47), (3.12) e (3.6), obtemos, desta feita, as equações

$$\partial_{\bar{z}}Z^1 + \partial_z\bar{Z}^1 + (Z^3\bar{Z}^2 + \bar{Z}^3 Z^2)\epsilon\tau + (Z^2\bar{Z}^3 + \bar{Z}^2 Z^3)\epsilon\tau = 2iH(\bar{Z}^2 Z^3 - Z^2\bar{Z}^3)$$

$$\partial_{\bar{z}}Z^2 + \partial_z\bar{Z}^2 + (Z^3\bar{Z}^1 + \bar{Z}^3 Z^1)(-\epsilon\tau) + (Z^1\bar{Z}^3 + \bar{Z}^1 Z^3)(-\epsilon\tau) = 2iH(Z^1\bar{Z}^3 - \bar{Z}^1 Z^3)$$

$$\partial_{\bar{z}}Z^3 + \partial_z\bar{Z}^3 + (Z^2\bar{Z}^1 + \bar{Z}^2 Z^1)\tau + (Z^1\bar{Z}^2 + \bar{Z}^1 Z^2)(-\tau) = 2iH\epsilon(\bar{Z}^1 Z^2 - Z^1\bar{Z}^2),$$

as quais podem ser respectivamente reescritas como

$$\partial_{\bar{z}}Z^1 + \partial_z\bar{Z}^1 + 2\epsilon\tau(Z^3\bar{Z}^2 + \bar{Z}^3 Z^2) = 2iH(\bar{Z}^2 Z^3 - Z^2\bar{Z}^3) \tag{3.16}$$

$$\partial_{\bar{z}}Z^2 + \partial_z\bar{Z}^2 - 2\epsilon\tau(Z^3\bar{Z}^1 + \bar{Z}^3 Z^1) = 2iH(Z^1\bar{Z}^3 - \bar{Z}^1 Z^3) \tag{3.17}$$

$$\partial_{\bar{z}}Z^3 + \partial_z\bar{Z}^3 = 2iH\epsilon(\bar{Z}^1 Z^2 - Z^1\bar{Z}^2). \tag{3.18}$$

A equação polinomial dada em (3.9) tem uma solução da forma

$$Z^1 = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2), \quad Z^2 = \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2), \quad Z^3 = \psi_1\bar{\psi}_2. \tag{3.19}$$

As funções ψ_1 e ψ_2 verificam, portanto,

$$Z^1 + iZ^2 = -\epsilon\psi_1^2, \quad \bar{Z}^1 + i\bar{Z}^2 = \psi_2^2. \tag{3.20}$$

A expressão da métrica de Σ em termos de ψ_1 e ψ_2 é

$$e^{2\omega} = (|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)^2.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $|\psi_2| > |\psi_1|$ quando $\epsilon = -1$. Portanto,

$$e^{\omega} = |\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2. \tag{3.21}$$

Ademais, calculamos

$$\bar{Z}^2 Z^3 - Z^3 \bar{Z}^3 = -\frac{i}{2}(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)$$

$$Z^1 \bar{Z}^3 - \bar{Z}^1 Z^3 = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2)(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)$$

$$\bar{Z}^1 Z^2 - Z^1 \bar{Z}^2 = \frac{i}{2}(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2).$$

Utilizando (3.12) e (3.21), constatamos que a expressão do campo normal em função de ψ_1 e ψ_2 é

$$N = e^{-w}\{(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)E_1 + i(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2)E_2 + (|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2)E_3\}. \tag{3.22}$$

Deduzimos, agora, as expressões explícitas para os potenciais U e V que satisfazem (2.28). Ao somarmos a equação (3.13) à equação (3.14) multiplicada por i, obtemos

$$-\partial_{\bar{z}}(Z^1 + iZ^2) + \partial_z(\bar{Z}^1 + i\bar{Z}^2) = 0$$

expressão que, ao usarmos (3.20), se transforma em

$$-\partial_{\bar{z}}(-\epsilon\psi_1^2) + \partial_z(\psi_2^2) = 0$$

que, por sua vez, considerando-se (2.28), torna-se (após cancelamento de $2\psi_1\psi_2$)

$$\epsilon V - U = 0. \tag{3.23}$$

Ao somarmos a equação (3.16) à equação (3.17) multiplicada por i, obtemos

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{z}}(Z^1 + iZ^2) + \partial_z(\bar{Z}^1 + i\bar{Z}^2) + 2\epsilon\tau\{\bar{Z}^3(Z^2 - iZ^1) + Z^3(\bar{Z}^2 - i\bar{Z}^1)\} \\ = 2iH\{Z^3(\bar{Z}^2 - i\bar{Z}^1) - \bar{Z}^3(Z^2 - iZ^1)\},\end{aligned}$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
&\partial_{\bar{z}}(Z^1 + iZ^2) + \partial_z(\bar{Z}^1 + i\bar{Z}^2) - 2i\epsilon\tau\{\bar{Z}^3(Z^1 + iZ^2) + Z^3(\bar{Z}^1 + i\bar{Z}^2)\} \\
&= 2H\{Z^3(\bar{Z}^1 + i\bar{Z}^2) - \bar{Z}^3(Z^1 + iZ^2)\}.
\end{aligned}$$

Portanto, utilizando as expressões em (3.20), assim como a definição de Z^3 em (3.19), deduzimos a equação

$$\begin{aligned}
&\partial_{\bar{z}}(-\epsilon\psi_1^2) + \partial_z(\psi_2^2) - 2i\epsilon\tau\{\bar{\psi}_1\psi_2(-\epsilon\psi_1^2) + \psi_1\bar{\psi}_2(\psi_2^2)\} \\
&= 2H\{\psi_1\bar{\psi}_2(\psi_2^2) - \bar{\psi}_1\psi_2(-\epsilon\psi_1^2)\},
\end{aligned}$$

o que assegura que

$$\epsilon V + U = -H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) - i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2), \tag{3.24}$$

onde utilizamos, desta vez, a expressão (2.28) (e cancelamento por $-2\psi_1\psi_2$). Assim, as equações (3.23) e (3.24) fornecem um sistema de equações lineares em U e V, cuja solução é da forma

$$U = -\frac{1}{2}\{H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\}, \tag{3.25}$$

$$V = -\frac{\epsilon}{2}\{H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\} \tag{3.26}$$

Estos cálculos permitem demostrar a seguinte

Proposição 3.2.1. *Seja $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{H}_3(\epsilon,\tau)$ uma imersão isométrica de uma superfície de Riemann Σ no grupo de Heisenberg, $\mathbb{H}_3(\epsilon,\tau)$. Então o campo espinorial $\psi = (\psi_1 \quad \psi_2)^T$, definido pelas equações (3.8) e (3.19), satisfaz a equação de Dirac $\mathcal{D}\psi = 0$, onde*

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_z \\ -\partial_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

$$U = -\frac{1}{2}\{H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\}$$

e

$$V = -\frac{\epsilon}{2}\{H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\}.$$

Observação 6. *Para $\epsilon = 1$ e $\tau = \frac{1}{2}$, obtemos*

$$U = V = -\frac{1}{2}\{H(|\psi_2|^2 + |\psi_1|^2) + \frac{i}{2}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2)\}$$

e, para $\epsilon = -1$ e $\tau\frac{1}{2}$, obtemos

$$U = -V = -\frac{1}{2}\{H(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2) + -\frac{i}{2}(|\psi_2|^2 + |\psi_1|^2)\}.$$

A seguir, como no capítulo anterior, apresentamos uma representação integral local do tipo Weierstrass para superfícies no espaço de Heisenberg, $H_3(\epsilon,\tau)$. Observamos inicialmente que, como no capítulo anterior, qualquer superfície em $H_3(\epsilon,\tau)$ tem uma representação integral.

Escrevemos localmente, em termos do parâmetro conforme z e das coordenadas exponenciais em $\mathbb{H}_3(\epsilon,\tau)$,

$$X(z) = (x_1(z), x_2(z), x_3(z))\,.$$

Logo

$$X_z = \phi_1\partial_{x_1} + \phi_2\partial_{x_2} + \phi_3\partial_{x_3}, \quad \text{onde } \phi_k = \frac{\partial x_k}{\partial z}, \quad k = 1,2,3.$$

Por outro lado, temos em Ω

$$\begin{aligned}
X_z &= \frac{1}{2}(\bar\psi_2^2 - \epsilon\psi_1^2)E_1 + \frac{i}{2}(\bar\psi_2^2 + \epsilon\psi_1^2)E_2 + \psi_1\bar\psi_2 E_3 \\
&= \frac{1}{2}(\bar\psi_2^2 - \epsilon\psi_1^2)(\partial_{x_1} - \tau x_2\partial_{x_3}) + \frac{i}{2}(\bar\psi_2^2 + \epsilon\psi_1^2)(\partial_{x_2} + \tau x_1\partial_{x_3}) + \psi_1\bar\psi_2\partial_{x_3} \\
&= \frac{1}{2}(\bar\psi_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\partial_{x_1} + \frac{i}{2}(\bar\psi_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\partial_{x_2} \\
&+ \{\frac{\tau}{2}[i(\bar\psi_2^2 + \epsilon\psi_1^2)x_1 - (\bar\psi_2^2 - \epsilon\psi_1^2)x_2] + \psi_1\bar\psi_2\}\partial_{x_3}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \tfrac{1}{2}(\bar\psi_2^2 - \epsilon\psi_1^2) \\
\phi_2 &= \tfrac{i}{2}(\bar\psi_2^2 + \epsilon\psi_1^2) \\
\phi_3 &= \{\tfrac{\tau}{2}[i(\bar\psi_2^2 + \epsilon\psi_1^2)x_1 - (\bar\psi_2^2 - \epsilon\psi_1^2)x_2] + \psi_1\bar\psi_2\}.
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
x_1(z) &= x_1(z_0) + 2Re\left(\int_{z_0}^z \tfrac{1}{2}(\bar\psi_2^2 - \epsilon\psi_1^2)dz\right) \\
x_2(z) &= x_2(z_0) + 2Re\left(\int_{z_0}^z \tfrac{i}{2}(\bar\psi_2^2 + \epsilon\psi_1^2)dz\right) \\
x_3(z) &= x_2(z_0) + 2Re\left(\int_{z_0}^z \{\tfrac{\tau}{2}[i(\bar\psi_2^2 + \epsilon\psi_1^2)x_1 - (\bar\psi_2^2 - \epsilon\psi_1^2)x_2] + \psi_1\bar\psi_2\} f dz\right).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

O teorema a seguir afirma que superfícies no espaço de Heisenberg, $H_3(\epsilon,\tau)$, podem ser obtidas pela representação acima, desde que ψ_1 e ψ_2 satisfaçam a equação de Dirac em $H_3(\epsilon,\tau)$. Incialmente, demonstramos o seguinte lema.

Lema 3.2.1. *Sejam $\psi_1,\psi_2 : \Omega \subset \mathbb{C} \to \Sigma$ aplicações que verificam a equação de Dirac em $\mathbb{H}_3(\epsilon,\tau)$, isto é,*

$$\partial_{\bar z}\psi_1 = -\frac{\epsilon}{2}\{H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\}\psi_2,$$

$$\partial_z \psi_2 = \frac{1}{2}\{H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\}\psi_1.$$

Então,

$$\partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\right) = H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)Re(\psi_1\psi_2) - \epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)Im(\psi_1\psi_2) \quad (3.28)$$

$$\partial_{\bar{z}}\left(\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\right) = H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)Im(\psi_1\psi_2) + \epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)Re(\psi_1\psi_2) \quad (3.29)$$

$$\partial_{\bar{z}}(\psi_1\bar{\psi}_2) = -\frac{1}{2}(\epsilon H + i\tau)(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4) \quad (3.30)$$

Prova. Temos, para a primeira equação,

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}}(\frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2) &= \bar{\psi}_2\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_2 - \epsilon\psi_1\partial_{\bar{z}}\psi_1 \\
&= \frac{1}{2}\{H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) - i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\}\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 \\
&+ \frac{1}{2}\{H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\}\psi_1\psi_2 \\
&= \frac{1}{2}H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2) \\
&- \frac{i\epsilon\tau}{2}(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2) \\
&= H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)Re(\psi_1\psi_2) - \epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)Im(\psi_1\psi_2).
\end{aligned}$$

Com respeito a segunda,

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}}(\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2) &= i\bar{\psi}_2\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_2 + i\epsilon\psi_1\partial_{\bar{z}}\psi_1 \\
&= \frac{i}{2}\{H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) - i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\}\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 \\
&- \frac{i}{2}\{H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\}\psi_1\psi_2 \\
&= \frac{i}{2}H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2) \\
&+ \frac{\epsilon\tau}{2}(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 + \psi_1\psi_2) \\
&= H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)Im(\psi_1\psi_2) + \epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)Re(\psi_1\psi_2).
\end{aligned}$$

Por fim, calculamos, relativamente a terceira equação,

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar z}(\psi_1\bar\psi_2) &= \psi_1\partial_{\bar z}\bar\psi_2 + \bar\psi_2\partial_{\bar z}\psi_1 \\
&= \frac{1}{2}\{H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2) - i\epsilon\tau(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)\}|\psi_1|^2 \\
&- \frac{\epsilon}{2}\{H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)\}|\psi_2|^2 \\
&= \frac{1}{2}H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)(|\psi_1|^2-\epsilon|\psi_2|^2) \\
&- \frac{i\epsilon\tau}{2}(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)(|\psi_1|^2+\epsilon|\psi_2|^2) \\
&= -\frac{\epsilon}{2}H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2) \\
&- \frac{i\tau}{2}(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2) \\
&= -\frac{1}{2}(\epsilon H + i\tau)(|\psi_2|^4-|\psi_1|^4).
\end{aligned}$$

□

Enunciamos, enfim, o teorema de representação de superfícies em $\mathbb{H}_3(\epsilon,\tau)$.

Teorema 3.2.1. *Sejam Ω um domínio simplesmente conexo de uma superfície de Riemann Σ, $H:\Omega\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável e ψ_1 e ψ_2 funções complexas definidas em Ω que satisfazem $|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2>0$ e a equação de Dirac em $\mathbb{H}^3(-\epsilon\tau^2)$, isto é,*

$$\partial_{\bar z}\psi_1 = -\frac{\epsilon}{2}\{H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)\}\psi_2$$

$$\partial_z\psi_2 = \frac{1}{2}\{H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)\}\psi_1.$$

Então, a aplicação

$$X=(x_1,x_2,x_3):\Omega\looparrowright\mathbb{H}_3(\epsilon,\tau),$$

definida por

$$\begin{aligned}
x_1(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z}\tfrac{1}{2}(\bar\psi_2^2-\epsilon\psi_1^2)dz\right) \\
x_2(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z}\tfrac{i}{2}(\bar\psi_2^2+\epsilon\psi_1^2)dz\right) \\
x_3(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z}\{\tau[\tfrac{i}{2}(\bar\psi_2^2+\epsilon\psi_1^2)x_1-\tfrac{1}{2}(\bar\psi_2^2-\epsilon\psi_1^2)x_2]+\psi_1\bar\psi_2\}dz\right),
\end{aligned} \tag{3.31}$$

é uma imersão conforme com curvatura média H.

Prova. Inicialmente, observamos que, por (3.28) e (3.29),

$$\partial_{\bar z}\left(\frac{1}{2}(\bar\psi_2^2-\epsilon\psi_1^2)\right)\in\mathbb{R} \quad\text{e}\quad \partial_{\bar z}\left(\frac{i}{2}(\bar\psi_2^2+\epsilon\psi_1^2)\right)\in\mathbb{R}.$$

Logo, pelo Lema 2.2.1, as funções x_1 e x_2 estão bem definidas e

$$\frac{\partial x_1}{\partial z} = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2), \quad \frac{\partial x_2}{\partial z} = \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2).$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
&\tau\left\{\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\partial_{\bar{z}}(x_1) - \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\partial_{\bar{z}}(x_2)\right\} \\
&= \tau\left\{\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\frac{1}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2) + \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\frac{i}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)\right\} \\
&= \frac{i}{4}\tau\left\{(|\psi_2|^4 + \epsilon\psi_1^2\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2\bar{\psi}_2^2 - |\psi_1|^2) + (|\psi_2|^4 - \epsilon\psi_1^2\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2\bar{\psi}_2^2 - |\psi_1|^2)\right\} \\
&= \frac{i}{2}\tau(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^2)
\end{aligned}$$

Portanto, pelo lema anterior, obtemos

$$\partial_{\bar{z}}\left(\tau[\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)x_1 - \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)x_2] + \psi_1\bar{\psi}_2\right) \in \mathbb{R}.$$

Ainda utilizando o Lema 2.2.1, concluímos que a função x_3 está bem definida e

$$\partial_z(x_3) = \tau\left\{\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)x_1 - \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)x_2\right\} + \psi_1\bar{\psi}_2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
X_z &= \partial_z(x_1)\partial_{x_1} + \partial_z(x_2)\partial_{x_2} + \partial_z(x_3)\partial_{x_3} \\
&= \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\partial_{x_1} + \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\partial_{x_2} \\
&+ \left(\frac{\tau}{2}\left[i(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)x_1 - (\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)x_2\right] + \psi_1\bar{\psi}_2\right)\partial_{x_3} \\
&= \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)(E_1 + \tau x_2 E_3) + \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)(E_2 - \tau x_1 E_3) \\
&+ \left(\frac{\tau}{2}\left[i(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)x_1 - (\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)x_2\right] + \psi_1\bar{\psi}_2\right)E_3 \\
&= \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)E_1 + \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)E_2 + \psi_1\bar{\psi}_2 E_3.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle X_z, X_z\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle X_z, X_{\bar{z}}\rangle = \frac{1}{2}(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)^2 \ (= \frac{1}{2}e^{2\omega}),$$

o que implica que X é uma imersão conforme, pois $|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2 > 0$. Além disso, a expressão do vetor normal ao longo de X é

$$N = \frac{1}{|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2}\left\{2Re(\psi_1\psi_2)E_1 + 2Im(\psi_1\psi_2)E_2 + (|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2)E_3\right\}.$$

Resta mostrarmos que X tem curvatura média H. Temos,

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}} X_z &= \partial_{\bar{z}}(\frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2))E_1 + \partial_{\bar{z}}(\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2))E_2 + \partial_{\bar{z}}(\psi_1\bar{\psi}_2)E_3 \\
&+ \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}} E_1 + \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}} E_2 + \psi_1\bar{\psi}_2\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}} E_3
\end{aligned}$$

e, considerando (3.5), resulta que

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}} E_1 &= \frac{1}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)\bar{\nabla}_{E_1}E_1 - \frac{i}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)\bar{\nabla}_{E_2}E_1 + \bar{\psi}_1\psi_2\bar{\nabla}_{E_3}E_1 \\
&= \frac{i\tau}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_3 - \epsilon\tau\bar{\psi}_1\psi_2 E_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}} E_2 &= \frac{1}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)\bar{\nabla}_{E_1}E_2 - \frac{i}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)\bar{\nabla}_{E_2}E_2 + \bar{\psi}_1\psi_2\bar{\nabla}_{E_3}E_2 \\
&= \frac{\tau}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_3 + \epsilon\tau\bar{\psi}_1\psi_2 E_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}} E_3 &= \frac{1}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)\bar{\nabla}_{E_1}E_3 - \frac{i}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)\bar{\nabla}_{E_2}E_3 + \bar{\psi}_1\psi_2\bar{\nabla}_{E_3}E_3 \\
&= -\frac{\epsilon\tau}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_2 - \frac{\epsilon i\tau}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_1.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\nabla_{\partial_{\bar{z}}} E_1 + \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}} E_2 + \psi_1\bar{\psi}_2\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}} E_3 \\
&= \frac{1}{2}(\tilde{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\left\{\frac{i\tau}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_3 - \epsilon\tau\bar{\psi}_1\psi_2 E_2\right\} \\
&+ \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\left\{\frac{\tau}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_3 + \epsilon\tau\bar{\psi}_1\psi_2 E_1\right\} \\
&+ \psi_1\bar{\psi}_2\left\{-\frac{\epsilon\tau}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_2 - \frac{\epsilon i\tau}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_1\right\} \\
&= \left\{\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\epsilon\tau\bar{\psi}_1\psi_2 - \psi_1\bar{\psi}_2\frac{\epsilon i\tau}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)\right\} E_1 \\
&+ \left\{-\frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\epsilon\tau\bar{\psi}_1\psi_2 - \psi_1\bar{\psi}_2\frac{\epsilon\tau}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)\right\} E_2 \\
&+ \left\{\frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\frac{i\tau}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2) + \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\frac{\tau}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)\right\} E_3 \\
&= \frac{i\epsilon\tau}{2}\left\{(|\psi_2|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 + \epsilon|\psi_1|^2\psi_1\psi_2) - (|\psi_2|^2\psi_1\psi_2 + \epsilon|\psi_1|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)\right\} E_1 \\
&- \frac{\epsilon\tau}{2}\left\{(|\psi_2|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \epsilon|\psi_1|^2\psi_1\psi_2) + (|\psi_2|^2\psi_1\psi_2 - \epsilon|\psi_1|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)\right\} E_2 \\
&+ \frac{i\tau}{4}\left\{(|\psi_2|^4 - \epsilon\psi_1^2\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2\bar{\psi}_2^2 - |\psi_1|^4) + (|\psi_2|^4 + \epsilon\psi_1^2\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2\bar{\psi}_2^2 - |\psi_1|^4)\right\} E_3 \\
&= \frac{i\epsilon\tau}{2}(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2)E_1 \\
&- \frac{\epsilon\tau}{2}(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 + \psi_1\psi_2)E_2 + \frac{i\tau}{2}(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4)E_3 \\
&= \epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\left\{Im(\psi_1\psi_2)E_1 - Re(\psi_1\psi_2)E_2 + \epsilon(|\psi_2|^2 - i\epsilon|\psi_1|^2)E_3\right\}.
\end{aligned}$$

Assim, da relação acima em conjunto com o lema anterior, obtemos

$$
\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}} X_z &= \left\{H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)Re(\psi_1\psi_2)-\epsilon\tau(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)Im(\psi_1\psi_2)\right\}E_1\\
&+ \left\{H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)Im(\psi_1\psi_2)+\epsilon\tau(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)Re(\psi_1\psi_2)\right\}E_2\\
&- \frac{1}{2}(\epsilon H+i\tau)(|\psi_2|^4-|\psi_1|^4)E_3\\
&+ \epsilon\tau(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)\left\{Im(\psi_1\psi_2)E_1-Re(\psi_1\psi_2)E_2+\epsilon(|\psi_2|^2-i\epsilon|\psi_1|^2)E_3\right\}\\
&= H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)\left\{Re(\psi_1\psi_2)E_1+Im(\psi_1\psi_2)E_2-\frac{\epsilon}{2}(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)E_3\right\}\\
&= \frac{1}{2}H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)\left\{2Re(\psi_1\psi_2)E_1+2Im(\psi_1\psi_2)E_2+(|\psi_1|^2-\epsilon|\psi_2|^2)E_3\right\}\\
&= \frac{1}{2}H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)^2N\\
&= \frac{1}{2}He^{2\omega}N.
\end{aligned}
$$

Portanto, a imersão X tem curvatura média H, o que encerra a prova do teorema. □

3.2.1 Equações Adicionais

Nesta seção, deduzimos equações adicionais para ψ_1 e ψ_2 as quais, em conjunto com a equação de Dirac, constituem as condições de integrabilidade para a existência de uma imersão isométrica.

Iniciamos calculando, em vista das relações (3.21), (2.28), (3.25) e (3.26)

$$
\begin{aligned}
e^{\omega}\omega_z &= \psi_2\partial_z\bar{\psi}_2+\bar{\psi}_2\partial_z\psi_2+\epsilon(\psi_1\partial_z\bar{\psi}_1+\bar{\psi}_1\partial_z\psi_1)\\
&= \psi_2\partial_z\bar{\psi}_2-U\psi_1\bar{\psi}_2+\epsilon(\bar{V}\psi_1\bar{\psi}_2+\bar{\psi}_1\partial_z\psi_1)\\
&= \psi_2\partial_z\bar{\psi}_2+\epsilon\bar{\psi}_1\partial_z\psi_1+(\epsilon\bar{V}-U)\psi_1\bar{\psi}_2\\
&= \psi_2\partial_z\bar{\psi}_2+\epsilon\bar{\psi}_1\partial_z\psi_1+i\epsilon\tau(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)\psi_1\bar{\psi}_2,
\end{aligned}
$$

donde obtemos

$$
\psi_2\partial_z\bar{\psi}_2+\epsilon\bar{\psi}_1\partial_z\psi_1=e^{\omega}\omega_z-i\epsilon\tau(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)\psi_1\bar{\psi}_2. \tag{3.32}
$$

Prosseguindo, calculamos, utilizando (3.19) e (3.22),

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3}\partial_z(Z^i)\langle E_i, N\rangle = e^{-\omega}\{(\bar{\psi}_2\partial_z\bar{\psi}_2-\epsilon\psi_1\partial_z\psi_1)(\psi_1\psi_2+\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)\\
&-(\bar{\psi}_2\partial_z\bar{\psi}_2+\epsilon\psi_1\partial_z\psi_1)(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2-\psi_1\psi_2)\\
&+\epsilon(\psi_1\partial_z\bar{\psi}_2+\bar{\psi}_2\partial_z\psi_1)(|\psi_1|^2-\epsilon|\psi_2|^2)\}\\
&= e^{-\omega}\{[\bar{\psi}_2(\psi_1\psi_2+\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)-\bar{\psi}_2(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2-\psi_1\psi_2)+\epsilon\psi_1(|\psi_1|^2-\epsilon|\psi_2|^2)]\partial_z\bar{\psi}_2\\
&+[-\psi_1(\psi_1\psi_2+\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)-\psi_1(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2-\psi_1\psi_2)+\bar{\psi}_2(|\psi_1|^2-\epsilon|\psi_2|^2)]\epsilon\partial_z\psi_1\}\\
&= e^{-\omega}\{[2\psi_1|\psi_2|^2+\psi_1(\epsilon|\psi_1|^2-|\psi_2|^2)]\partial_z\bar{\psi}_2\\
&+[-2\bar{\psi}_2|\psi_1|^2+\bar{\psi}_2(|\psi_1|^2-\epsilon|\psi_2|^2)]\epsilon\partial_z\psi_1\}\\
&= e^{-\omega}\{\psi_1(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)\partial_z\bar{\psi}_2-\bar{\psi}_2(|\psi_1|^2+\epsilon|\psi_2|^2)\epsilon\partial_z\psi_1\}\\
&= e^{-\omega}(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)(\psi_1\partial_z\bar{\psi}_2-\bar{\psi}_2\partial_z\psi_1)\\
&= \psi_1\partial_z\bar{\psi}_2-\bar{\psi}_2\partial_z\psi_1.
\end{aligned}$$

Por outro lado, obtemos, a partir de (3.19) e (3.6),

$$\begin{aligned}
&\sum_{ijk} Z^iZ^j\Gamma_{ji}^k\langle E_k, N\rangle = 2Z^2Z^3\epsilon\tau\langle E_1,N\rangle-2\epsilon\tau Z^1Z^3\langle E_2,N\rangle\\
&= e^{-\omega}\epsilon\tau\psi_1\bar{\psi}_2\{i(\bar{\psi}_2^2+\epsilon\psi_1^2)(\psi_1\psi_2+\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)-(\bar{\psi}_2^2-\epsilon\psi_1^2)i(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2-\psi_1\psi_2)\}\\
&= ie^{-\omega}\epsilon\tau\psi_1\bar{\psi}_2\{2\bar{\psi}_2^2\psi_1\psi_2+2\epsilon\psi_1^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\}\\
&= 2ie^{-\omega}\epsilon\tau\{\psi_1^2\bar{\psi}_2^2|\psi_2|^2+\epsilon\psi_1^2\bar{\psi}_2^2|\psi_1|^2\}\\
&= 2ie^{-\omega}\epsilon\tau\psi_1^2\bar{\psi}_2^2(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)\\
&= 2i\epsilon\tau\psi_1^2\bar{\psi}_2^2.
\end{aligned}$$

Destas duas últimas relações e da expressão (1.49), segue que

$$\psi_1\partial_z\bar{\psi}_2-\bar{\psi}_2\partial_z\psi_1=\frac{q}{2}-2i\epsilon\tau\psi_1^2\bar{\psi}_2^2. \tag{3.33}$$

Agrupamos as equações (3.32) e (3.33) no sistema

$$\begin{pmatrix}\epsilon\bar{\psi}_1 & \psi_2\\ -\bar{\psi}_2 & \psi_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_z\psi_1\\ \partial_z\bar{\psi}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\omega}\omega_z-2i\epsilon\tau(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)\psi_1\bar{\psi}_2\\ \frac{q}{2}-i\epsilon\tau\psi_1^2\bar{\psi}_2^2\end{pmatrix} \tag{3.34}$$

Resolvendo este sistema, obtemos

$$\partial_z\psi_1=\omega_z\psi_1-\frac{q}{2}e^{-\omega}\psi_2+i\epsilon\tau\psi_1^2\bar{\psi}_2, \tag{3.35}$$

$$\partial_z\bar{\psi}_2=\omega_z\bar{\psi}_2+\epsilon\frac{q}{2}e^{-\omega}\bar{\psi}_1+i\epsilon\tau\psi_1\bar{\psi}_2^2. \tag{3.36}$$

Reunindo as equações acima à equação de Dirac, obtemos

$$\begin{cases} \partial_z\psi_1 &=& \omega_z\psi_1 - \frac{q}{2}e^{-\omega}\psi_2 + i\epsilon\tau\psi_1^2\bar{\psi}_2, \\ \partial_z\psi_2 &=& \frac{1}{2}\{He^{\omega} + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\}\psi_1, \\ \partial_{\bar{z}}\psi_1 &=& -\frac{\epsilon}{2}\{He^{\omega} + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\}\psi_2, \\ \partial_{\bar{z}}\psi_2 &=& \omega_{\bar{z}}\psi_2 + \epsilon\frac{\bar{q}}{2}e^{-\omega}\psi_1 - i\epsilon\tau\bar{\psi}_1\psi_2^2. \end{cases}$$

3.2.2 Uma Diferencial Quadrática Holomorfa

Lembramos que, em geral, temos

$$\frac{q_{\bar{z}}}{2} = \partial_{\bar{z}}\langle\bar{\nabla}_{\partial_z}\partial_z, N\rangle = \langle\bar{R}(\partial_{\bar{z}}, \partial_z)\partial_z, N\rangle + \frac{\epsilon}{2}e^{2\omega}H_z.$$

A seguir, calculamos $\langle\bar{R}(\partial_{\bar{z}}, \partial_z)\partial_z, N\rangle$ em termos das funções ψ_1 e ψ_2. Temos

$$\begin{aligned}
&\langle\bar{R}(\partial_{\bar{z}}, \partial_z)\partial_z, N\rangle \\
&= \bar{Z}^1\langle\bar{R}(E_1, \partial_z)\partial_z, N\rangle + \bar{Z}^2\langle\bar{R}(E_2, \partial_z)\partial_z, N\rangle + \bar{Z}^3\langle\bar{R}(E_3, \partial_z)\partial_z, N\rangle \\
&= \bar{Z}^1\{Z^2\langle\bar{R}(E_1, E_2)\partial_z, N\rangle + Z^2\langle\bar{R}(E_1, E_3)\partial_z, N\rangle\} \\
&+ \bar{Z}^2\{Z^1\langle\bar{R}(E_2, E_1)\partial_z, N\rangle + Z^3\langle\bar{R}(E_2, E_3)\partial_z, N\rangle\} \\
&+ \bar{Z}^3\{Z^1\langle\bar{R}(E_3, E_1)\partial_z, N\rangle + Z^2\langle\bar{R}(E_3, E_2)\partial_z, N\rangle\} \\
&= (\bar{Z}^1Z^2 - Z^1\bar{Z}^2)\langle\bar{R}(E_1, E_2)\partial_z, N\rangle + (\bar{Z}^1Z^3 - Z^1\bar{Z}^3)\langle\bar{R}(E_1, E_3)\partial_z, N\rangle \\
&+ (\bar{Z}^2Z^3 - Z^2\bar{Z}^3)\langle\bar{R}(E_2, E_3)\partial_z, N\rangle \\
&= (\bar{Z}^1Z^2 - Z^1\bar{Z}^2)\{Z^1\langle\bar{R}(E_1, E_2)E_1, N\rangle + Z^2\langle\bar{R}(E_1, E_2)E_2, N\rangle\} \\
&+ (\bar{Z}^1Z^3 - Z^1\bar{Z}^3)\{Z^1\langle\bar{R}(E_1, E_3)E_1, N\rangle + Z^3\langle\bar{R}(E_1, E_3)E_3, N\rangle\} \\
&+ (\bar{Z}^2Z^3 - Z^2\bar{Z}^3)\{Z^2\langle\bar{R}(E_2, E_3)E_2, N\rangle + Z^3\langle\bar{R}(E_2, E_3)E_3, N\rangle\} \\
&= (\bar{Z}^1Z^2 - Z^1\bar{Z}^2)\{Z^1N^2\langle\bar{R}(E_1, E_2)E_1, E_2\rangle + Z^2N^1\langle\bar{R}(E_1, E_2)E_2, E_1\rangle\} \\
&+ (\bar{Z}^1Z^3 - Z^1\bar{Z}^3)\{Z^1N^3\langle\bar{R}(E_1, E_3)E_1, E_3\rangle + Z^3N^1\langle\bar{R}(E_1, E_3)E_3, E_1\rangle\} \\
&+ (\bar{Z}^2Z^3 - Z^2\bar{Z}^3)\{Z^2N^3\langle\bar{R}(E_2, E_3)E_2, E_3\rangle + Z^3N^2\langle\bar{R}(E_2, E_3)E_3, E_2\rangle\},
\end{aligned}$$

onde usamos a expressão $N = N^1E_1 + N^2E_2 + N^3E_3$. Em vista de (3.7), segue que

$$
\begin{aligned}
\langle \bar{R}(\partial_{\bar{z}}, \partial_z)\partial_z, N\rangle &= (\bar{Z}^1Z^2 - Z^1\bar{Z}^2)\{Z^1N^2(3\epsilon\tau^2) + Z^2N^1(-3\epsilon\tau^2)\}\\
&+ (\bar{Z}^1Z^3 - Z^1\bar{Z}^3)\{-Z^1N^3\epsilon\tau^2\langle E_3, E_3\rangle + Z^3N^1\epsilon\tau^2\langle E_3, E_3\rangle\}\\
&+ (\bar{Z}^2Z^3 - Z^2\bar{Z}^3)\{Z^2N^3(-\tau^2) + Z^3N^2\tau^2\rangle\}\\
&= 3\epsilon\tau^2(\bar{Z}^1Z^2 - Z^1\bar{Z}^2)(Z^1N^2 - Z^2N^1)\\
&+ \tau^2(\bar{Z}^1Z^3 - Z^1\bar{Z}^3)(-Z^1N^3 + Z^3N^1)\\
&+ \tau^2(\bar{Z}^2Z^3 - Z^2\bar{Z}^3)(-Z^2N^3 + Z^3N^2)\\
&= 3\epsilon\tau^2\frac{1}{2ie^{-2\omega}}N^3(Z^1N^2 - Z^2N^1)\\
&- \tau^2\frac{1}{2ie^{-2\omega}}N^2(-Z^1N^3 + Z^3N^1)\\
&+ \tau^2\frac{1}{2ie^{-2\omega}}N^1(-Z^2N^3 + Z^3N^2)\\
&= -\frac{i}{2}e^{2\omega}\tau^2\{3Z^1N^2N^3 - 3Z^2N^1N^3 - Z^3N^1N^2\\
&+ Z^1N^2N^3 + Z^3N^1N^2 - Z^2N^1N^3\}\\
&= -\frac{i}{2}e^{2\omega}\tau^2\{4Z^1N^2N^3 - 4Z^2N^1N^3\}\\
&= -2ie^{2\omega}\tau^2N^3\{Z^1N^2 - Z^2N^1\}
\end{aligned}
$$

onde, acima, utilizamos (3.12). Portanto, considerando (3.19) e (3.22), obtemos

$$
\begin{aligned}
\langle \bar{R}(\partial_{\bar{z}}, \partial_z)\partial_z, N\rangle &= 2ie^{2\omega}\tau^2N^3\{Z^2N^1 - Z^1N^2\}\\
&= 2ie^{2\omega}\tau^2e^{-\omega}(|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2)\{\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)e^{-\omega}(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)\\
&- \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)ie^{-\omega}(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2)\}\\
&= -\tau^2(|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2)\{\psi_1\bar{\psi}_2|\psi_2|^2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2^3 + \epsilon\psi_1^3\psi_2 + \epsilon\psi_1\bar{\psi}_2|\psi_1|^2\\
&- (\bar{\psi}_2^3\bar{\psi}_1 - \psi_1\bar{\psi}_2|\psi_2|^2 - \epsilon\psi_1\bar{\psi}_2|\psi_1|^2 + \epsilon\psi_1^3\psi_2)\}\\
&= -2\tau^2(|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2)(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)\psi_1\bar{\psi}_2\\
&= 2\epsilon\tau^2(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)\psi_1\bar{\psi}_2\\
&= 2\epsilon\tau^2(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4)\psi_1\bar{\psi}_2.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}}(Z^3) &= \partial_{\bar{z}}(\psi_1\bar{\psi}_2) = \psi_1\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_2 + \bar{\psi}_2\partial_{\bar{z}}\psi_1\\
&= \psi_1(-\bar{U}\bar{\psi}_1) + \bar{\psi}_2V\psi_2 = -\bar{U}|\psi_1|^2 + V|\psi_2|^2.
\end{aligned}
$$

Logo, por (3.25) e (3.26), obtemos

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}}(Z^3) &= -\bar{U}|\psi_1|^2 + V|\psi_2|^2 \\
&= \frac{1}{2}|\psi_1|^2\{H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) - i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\} \\
&- \frac{\epsilon}{2}|\psi_2|^2\{H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\} \\
&= \frac{1}{2}H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)\{|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2\} \\
&+ \frac{i}{2}\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\{-|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2\} \\
&= -\frac{\epsilon}{2}H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)\{|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2\} \\
&- \frac{i}{2}\epsilon^2\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\{|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2\} \\
&= -\frac{\epsilon}{2}(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4)(H + i\epsilon\tau).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}}(Z^3)^2 &= 2Z^3\partial_{\bar{z}}Z^3 \\
&= -\epsilon(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4)(H + i\epsilon\tau)\psi_1\bar{\psi}_2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(\partial_{\bar{z}}, \partial_z)\partial_z, N\rangle &= 2\epsilon\tau^2(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4)\psi_1\bar{\psi}_2 \\
&= 2\epsilon\tau^2(\frac{-\epsilon}{H + i\epsilon\tau})\partial_{\bar{z}}(Z^3)^2 \\
&= -\frac{2\tau^2}{H + i\epsilon\tau}\partial_{\bar{z}}(Z^3)^2 \\
&= -2\tau^2\left\{\partial_{\bar{z}}\left(\frac{(Z^3)^2}{H + i\epsilon\tau}\right) - \partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{H + i\epsilon\tau}\right)(Z^3)^2\right\}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\left(\frac{q}{2} + 2\tau^2\frac{(Z^3)^2}{H + i\epsilon\tau}\right)_{\bar{z}} = \frac{\epsilon}{2}e^{2\omega}H_z + 2\tau^2\left(\frac{1}{H + i\epsilon\tau}\right)_{\bar{z}}(Z^3)^2. \tag{3.37}$$

Como consequência desta fórmula, destacamos

Proposição 3.2.2. *Para uma superfície de curvatura média constante no espaço de Heisenberg* $\mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$*, a forma diferencial quadrática*

$$\tilde{Q}dz^2 = \left(\frac{q}{2} + 2\tau^2\frac{(Z^3)^2}{H + i\epsilon\tau}\right)dz^2$$

é holomorfa.

Além disso,

Proposição 3.2.3. *Se a diferencial $\tilde{Q}dz^2$ é holomorfa, então a superfície no espaço de Heisenberg riemanniano (i.e. $\epsilon = 1$) tem curvatura média constante.*

Prova. Procedemos por contradição. Supomos que a curvatura média não é constante, de tal sorte que, em um um aberto onde $H_z \neq 0$, temos, por (3.37),

$$\frac{\epsilon}{2} e^{2\omega} H_z = -2\tau^2 \left(\frac{1}{H + i\epsilon\tau} \right)_{\bar{z}} (Z^3)^2 = \frac{2\tau^2}{(H + i\epsilon\tau)^2} H_{\bar{z}} (Z^3)^2.$$

Como $e^\omega = |\psi_2|^2 + |\psi_1|^2$ e $Z^3 = \psi_1 \bar{\psi}_2$, a equação acima fica, em módulo,

$$\frac{1}{2}(|\psi_2|^2 + |\psi_1|^2)^2 |H_z| = \frac{2\tau^2}{H^2 + \tau^2} |H_{\bar{z}}| |\psi_1|^2 |\bar{\psi}_2|^2,$$

que, pela suposição, pode ser reescrita como

$$(H^2 + \tau^2)(|\psi_2|^2 + |\psi_1|^2)^2 = 4\tau^2 |\psi_2|^2 |\psi_1|^2,$$

isto é,

$$H^2(|\psi_2|^2 + |\psi_1|^2)^2 + \tau^2(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2)^2 = 0.$$

Todavia, a identidade acima vale se, e somente se, $|\psi_2| = |\psi_1|$ e $H = 0$, i.e. se a superfície é mínima, o que contradiz a suposição e prova a proposição. □

3.3 A Aplicação de Gauss

Nesta seção, estudamos a aplicação de Gauss de uma imersão de uma superfície de Riemann no grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$ via uma projeção estereográfica conveniente. Observamos inicialmente que, quando $\epsilon = 1$, o vetor normal é unitário, mas, quando $\epsilon = -1$, o vetor normal satisfaz $\langle N, N \rangle = -1$. Por tais motivos, denotamos por

$$\mathbb{S}^2_1 = \{(a, b, c) \in T_e\mathbb{H}_3(1, \tau) : a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$$

$$\mathbb{S}^2_{-1} = \{(a, b, c) \in T_e\mathbb{H}_3(-1, \tau) : a^2 + b^2 - c^2 = -1, \quad c > 0\}$$

onde, acima, identificamos o vetor $a\hat{e}_1 + b\hat{e}_2 + c\hat{e}_3 \in T_e\mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$ à terna (a, b, c). Assim, $\mathbb{S}^2_1$ é a esfera unitária de $T_e\mathbb{H}_3(1, \tau)$ e $\mathbb{S}^2_{-1}$ é a parte superior de um hiperbolóide em $T_e\mathbb{H}_3(-1, \tau)$. Sabemos que, quando $\epsilon = 1$, a projeção estereográfica com respeito ao pólo norte $\mathrm{N} = (0, 0, 1)$ é dada por:

$$\pi_1 : \mathbb{S}^2_1 \to \bar{\mathbb{C}}, \quad \pi_1(a, b, c) = \frac{a}{1 - c} + i\frac{b}{1 - c}, \quad \pi_1(\mathrm{N}) = \infty$$

e tem inversa

$$\pi_1^{-1} : \bar{\mathbb{C}} \to \mathbb{S}^2_1,\ \pi_1^{-1}(w) = \frac{1}{1+|w|^2}(2Re(w), 2Im(w), |w|^2 - 1),\ \pi_1^{-1}(\infty) = \mathrm{N}.$$

Analogamente, no caso em que $\epsilon = -1$, a projeção estereográfica em relação ao pólo sul $S = (0, 0, -1)$ tem imagens no disco $\mathbb{D} = \{g \in \mathbb{C} : |g| < 1\}$ e é dada por (veja [29])

$$\pi_{-1} : \mathbb{S}^2_{-1} \to \mathbb{D},\quad \pi_{-1}(a, b, c) = \frac{a}{1+c} + i\frac{b}{1+c}$$

e tem inversa

$$\pi_{-1}^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{S}^2_{-1},\quad \pi_{-1}^{-1}(w) = \frac{1}{1-|w|^2}(2Re(w), 2Im(w), 1 + |w|^2).$$

Englobamos estes cálculos, escrevendo

$$\pi_\epsilon(a, b, c) = \frac{a}{1-\epsilon c} + i\frac{b}{1-\epsilon c}, \tag{3.38}$$

$$\pi_\epsilon^{-1}(w) = \frac{1}{1+\epsilon|w|^2}(2Re(w), 2Im(w), |w|^2 - \epsilon). \tag{3.39}$$

Dada a imersão isométrica, definimos as funções

$$f = \bar{\psi}_2^2, \qquad g = \frac{\psi_1}{\bar{\psi}_2}, \tag{3.40}$$

de modo que Z^1, Z^2 e Z^3 são expressas por

$$Z^1 = \frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2)f, \quad Z^2 = \frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2)f, \quad Z^3 = gf.$$

Além disso,

Lema 3.3.1. *Dada a imersão isométrica $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$, as expressões da métrica e do vetor normal em termos de f e g são*

$$e^{2\omega} = |f|^2(1 + \epsilon|g|^2)^2, \quad (e^\omega = |f|(1 + \epsilon|g|^2) \tag{3.41}$$

$$N = \frac{1}{1+\epsilon|g|^2}\{2Re(g)E_1 + 2Im(g)E_2 + (|g|^2 - \epsilon)E_3\} \tag{3.42}$$

Temos, ainda.

Lema 3.3.2. *Dada a imersão isométrica $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$, a aplicação de Gauss $\eta : \Sigma \to \mathbb{S}^2_\epsilon$ satisfaz $\pi_\epsilon(\eta) = g$. Isto é, a composição da aplicação de Gauss com a projeção estereográfica é dada por g.*

Além disso,

Lema 3.3.3. *As funções f e g satisfazem*

$$f_{\bar{z}} = |f|^2\bar{g}\{H(1+\epsilon|g|^2) - i\epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)\}, \tag{3.43}$$

$$g_{\bar{z}} = -\frac{\bar{f}}{2}\{\epsilon H(1+\epsilon|g|^2)^2 + i\tau(1-\epsilon|g|^2)^2\}. \tag{3.44}$$

Prova. Usando a definição das funções f e g em termos das funções ψ_1 e ψ_2 dadas em (3.40), assim como a equação de Dirac (2.28) para os potenciais U e V juntamente com suas expressões dadas em (3.25) e (3.26), temos, com respeito a derivada de f em relação a $\bar{z}$,

$$\begin{aligned}
f_{\bar{z}} &= 2\bar{\psi}_2\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_2 = -2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\bar{U} \\
&= \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\{H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2) - i\epsilon\tau(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)\} \\
&= \bar{g}|f|\{H(|f|+\epsilon|g|^2|f|) - i\epsilon\tau(|f|-\epsilon|g|^2|f|)\} \\
&= |f|^2\bar{g}\{H(1+\epsilon|g|^2) - i\epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)\}
\end{aligned}$$

e, relativamente a a derivada de g em relação $\bar{z}$,

$$\begin{aligned}
g_{\bar{z}} &= \frac{1}{\bar{\psi}_2^2}\{\bar{\psi}_2\partial_{\bar{z}}\psi_1 - \psi_1\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_2\} = \frac{1}{\bar{\psi}_2^2}\{\bar{\psi}_2 V\psi_2 - \psi_1(-\bar{U}\bar{\psi}_1)\} \\
&= \frac{1}{\bar{\psi}_2^2}\{|\psi_2|^2V + |\psi_1|^2\bar{U}\} \\
&= -\frac{|\psi_2|^2}{\bar{\psi}_2^2}\frac{\epsilon}{2}\{H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)\} \\
&- \frac{|\psi_1|^2}{\bar{\psi}_2^2}\frac{1}{2}\{H(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2) - i\epsilon\tau(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)\} \\
&= -\frac{|f|}{f}\frac{\epsilon}{2}\{H(|f|+\epsilon|g|^2|f|) + i\epsilon\tau(|f|-\epsilon|g|^2|f|)\} \\
&- \frac{|g|^2|f|}{f}\frac{1}{2}\{H(|f|+\epsilon|g|^2|f|) - i\epsilon\tau(|f|-\epsilon|g|^2|f|)\} \\
&= -\frac{\bar{f}}{2}\{\epsilon H(1+\epsilon|g|^2) + i\tau(1-\epsilon|g|^2) + |g|^2[H(1+\epsilon|g|^2) - i\epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)]\} \\
&= -\frac{\bar{f}}{2}\{H(1+\epsilon|g|^2)(\epsilon+|g|^2) + i\tau(1-\epsilon|g|^2)(1-\epsilon|g|^2)\} \\
&= -\frac{\bar{f}}{2}\{\epsilon H(1+\epsilon|g|^2)^2 + i\tau(1-\epsilon|g|^2)^2\}.
\end{aligned}$$

□

Concluímos, então, que

Lema 3.3.4. *Se a imersão isométrica $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$ é mínima, então*

$$f_{\bar{z}} = -i\epsilon\tau|f|^2\bar{g}(1 - \epsilon|g|^2), \tag{3.45}$$

$$g_{\bar{z}} = -\frac{i}{2}\tau\bar{f}(1 - \epsilon|g|^2)^2. \tag{3.46}$$

Além disso,

$$g_{z\bar{z}} - i\epsilon\tau\bar{f}(1 - \epsilon|g|^2)\bar{g}g_z = 0 \tag{3.47}$$

Prova. As duas primeiras equações acima são consequência do lema anterior. Com respeito a terceira, temos

$$\begin{aligned}
g_{z\bar{z}} &= -\frac{i}{2}\tau\bar{f}_z(1 - \epsilon|g|^2)^2 - \frac{i}{2}\tau\bar{f}2(1 - \epsilon|g|^2)(-\epsilon)(g\bar{g}_z + \bar{g}g_z) \\
&= -\frac{i}{2}\tau(1 - \epsilon|g|^2)^2\left[i\epsilon\tau|f|^2g(1 - \epsilon|g|^2)\right] \\
&+ i\epsilon\tau\bar{f}(1 - \epsilon|g|^2)g\left[\frac{i}{2}\tau f(1 - \epsilon|g|^2)^2\right] + i\epsilon\tau\bar{f}(1 - \epsilon|g|^2)\bar{g}g_z \\
&= \frac{\epsilon}{2}\tau^2|f|^2g(1 - \epsilon|g|^2)^3 - \frac{\epsilon}{2}\tau^2|f|^2g(1 - \epsilon|g|^2)^3 + i\epsilon\tau\bar{f}(1 - \epsilon|g|^2)\bar{g}g_z \\
&= i\epsilon\tau\bar{f}(1 - \epsilon|g|^2)\bar{g}g_z.
\end{aligned}$$

□

A partir deste lema, deduzimos

Corolário 3.3.1. *Se a imersão isométrica $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$ é mínima e, quando $\epsilon = 1$, a aplicação de Gauss de X, η, não é horizontal e tem imagens no hemisfério sul, então a projeção estereográfica da aplicação de Gauss, $g = \pi_\epsilon(\eta)$, é harmônica sobre o disco $\mathbb{D}$ considerado com a métrica conforme*

$$ds_\epsilon^2 = \frac{1}{(1 - \epsilon|w|^2)^2}|dw|^2.$$

Prova. De fato, pelas hipóteses, quando $\epsilon = 1$, então $|g|^2 < 1$. Portanto, a imagem da aplicação de Gauss está no disco $\mathbb{D}$. Por outro lado, quando $\epsilon = -1$, por definição $|g| < 1$. Assim, em função de (3.47), segue que

$$\begin{aligned}
g_{z\bar{z}} &= i\epsilon\tau\bar{f}(1 - \epsilon|g|^2)\bar{g}g_z \\
&= -\frac{i}{2}\tau\bar{f}(1 - \epsilon|g|^2)^2(-2\epsilon\bar{g})\frac{1}{1 - \epsilon|g|^2}g_z \\
&= -2\epsilon\bar{g}\frac{1}{1 - \epsilon|g|^2}g_{\bar{z}}g_z.
\end{aligned}$$

Por sua vez, esta equação corresponde a harmonicidade da aplicação $g : \Sigma \to (\mathbb{D}, ds_\epsilon^2)$. De fato, para $\lambda_\epsilon^2(w) = \frac{1}{(1-\epsilon|w|^2)^2}$, temos $(\lambda_\epsilon)_w = \frac{\epsilon\bar{w}}{(1-\epsilon|w|^2)^2}$, de modo que

$$\frac{2}{\lambda_\epsilon(g)}(\lambda_\epsilon)_w(g) = 2(1-\epsilon|g|^2)\frac{\epsilon\bar{g}}{(1-\epsilon|g|^2)^2} = \frac{2\epsilon\bar{g}}{1-\epsilon|g|^2}.$$

Segue que g satisfaz

$$g_{z\bar{z}} + \frac{2}{\lambda_\epsilon(g)}(\lambda_\epsilon)_w(g) g_z g_{\bar{z}} = 0$$

que, por (1.55), prova a afirmação. □

Observação 7. *O disco $\mathbb{D}$ com a métrica conforme*

$$ds_\epsilon^2 = \lambda_\epsilon^2(w)|dw|^2 = \frac{1}{(1-\epsilon|w|^2)^2}|dw|^2$$

tem curvatura Gaussiana constante -4ϵ.

De fato, a curvatura Gaussiana é dada por:

$$\begin{aligned}
K &= -\Delta \ln \lambda_\epsilon = -\frac{4}{\lambda_\epsilon^2}\frac{\partial}{\partial\bar{w}}\left(\frac{\partial}{\partial w}\ln\lambda_\epsilon\right) \\
&= -\frac{4}{\lambda_\epsilon^2}\frac{\partial}{\partial\bar{w}}\left(\frac{(\lambda_\epsilon)_w}{\lambda_\epsilon}\right) = -\frac{4}{\lambda_\epsilon^2}\frac{\partial}{\partial\bar{w}}\left((1-\epsilon|w|^2)\frac{\epsilon\bar{w}}{(1-\epsilon|w|^2)^2}\right) \\
&= -\frac{4\epsilon}{\lambda_\epsilon^2}\frac{\partial}{\partial\bar{w}}\left(\frac{\bar{w}}{1-\epsilon|w|^2}\right) = -\frac{4\epsilon}{\lambda_\epsilon^2}\left(\frac{(1-\epsilon|w|^2)-\bar{w}(-\epsilon w)}{(1-|w|^2)^2}\right) \\
&= -\frac{4\epsilon}{\lambda_\epsilon^2}\left(\frac{1}{(1-\epsilon|w|^2)^2}\right) = -4\epsilon
\end{aligned}$$

A seguir, como na seção anterior, apresentamos uma representação local do tipo Weierstrass para superfícies no espaço de Heisenberg, $H_3(\epsilon,\tau)$. Observamos inicialmente que, como antes, qualquer superfície no espaço de Heisenberg, $H_3(\epsilon,\tau)$, tem uma representação integral.

A expressão local para uma imersão isométrica $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{H}_3(\epsilon,\tau)$ exposta em (3.52) passa a ser, em termos de f e g:

$$\begin{aligned}
x_1(z) &= x_1(z_0) + 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{1}{2}(1-\epsilon g^2) f dz\right) \\
x_2(z) &= x_2(z_0) + 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{i}{2}(1+\epsilon g^2) f dz\right) \\
x_3(z) &= x_2(z_0) + 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \{\tfrac{\tau}{2}[i(1+\epsilon g^2)x_1 - (1-\epsilon g^2)x_2] + g\} f dz\right).
\end{aligned} \tag{3.48}$$

O teorema a seguir afirma que superficies no espaço de Heisenberg, $H_3(\epsilon,\tau)$, podem ser representadas localmente em termos de funções f e g como acima, desde que f e g satisfaçam certas equações diferenciais. Inicialmente, demonstramos

Lema 3.3.5. *Sejam $f, g : \Omega \subset \Sigma \to \mathbb{C}$ aplicações que verificam (3.43) e (3.44), isto é,*

$$f_{\bar{z}} = |f|^2\bar{g}\{H(1+\epsilon|g|^2) - i\epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)\}, \qquad g_{\bar{z}} = -\frac{\bar{f}}{2}\{\epsilon H(1+\epsilon|g|^2)^2 + i\tau(1-\epsilon|g|^2)^2\}.$$

Então,

$$\partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f\right) = |f|^2\left\{H(1+\epsilon|g|^2)Re(g) - \epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)Im(g)\right\} \tag{3.49}$$

$$\partial_{\bar{z}}\left(\frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f\right) = |f|^2\left\{H(1+\epsilon|g|^2)Im(g) + \epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)Re(g)\right\} \tag{3.50}$$

$$\partial_{\bar{z}}(fg) = \frac{1}{2}|f|^2\left\{H(1+\epsilon|g|^2)(|g|^2-\epsilon) - i\tau(1-|g|^4)\right\} \tag{3.51}$$

Prova. Temos, com respeito á primeira equação,

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}}(\frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f) &= \frac{1}{2}(-2\epsilon g g_{\bar{z}})f + \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f_{\bar{z}} \\
&= -\epsilon g f g_{\bar{z}} + \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f_{\bar{z}} \\
&= \epsilon g f\frac{\bar{f}}{2}\{\epsilon H(1+\epsilon|g|^2)^2 + i\tau(1-\epsilon|g|^2)^2\} \\
&+ \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)|f|^2\bar{g}\{H(1+\epsilon|g|^2) - i\epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)\} \\
&= \frac{1}{2}|f|^2\{\epsilon g[\epsilon H(1+\epsilon|g|^2)^2 + i\tau(1-\epsilon|g|^2)^2] \\
&+ \bar{g}(1-\epsilon g^2)[H(1+\epsilon|g|^2) - i\epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)]\} \\
&= \frac{1}{2}|f|^2\{H(1+\epsilon|g|^2)[g(1+\epsilon|g|^2) + \bar{g}(1-\epsilon g^2)] \\
&+ i\epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)[g(1-\epsilon|g|^2) - \bar{g}(1-\epsilon g^2)]\} \\
&= \frac{1}{2}|f|^2\{H(1+\epsilon|g|^2)(g+\epsilon g|g|^2 + \bar{g} - \epsilon g|g|^2) \\
&+ i\epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)(g - \epsilon g|g|^2 - \bar{g} + \epsilon g|g|^2)\} \\
&= \frac{1}{2}|f|^2\left\{H(1+\epsilon|g|^2)(g+\bar{g}) + i\epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)(g-\bar{g})\right\} \\
&= |f|^2\left\{H(1+\epsilon|g|^2)Re(g) - \epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)Im(g)\right\}
\end{aligned}$$

e, relativamente á segunda,

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}}(\frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f) &= \frac{i}{2}(2\epsilon g g_{\bar{z}})f + \frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f_{\bar{z}} \\
&= i\epsilon g f g_{\bar{z}} + \frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f_{\bar{z}} \\
&= -i\epsilon g f\frac{\bar{f}}{2}\{\epsilon H(1+\epsilon|g|^2)^2 + i\tau(1-\epsilon|g|^2)^2\} \\
&- \frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)|f|^2\bar{g}\{H(1+\epsilon|g|^2) - i\epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)\} \\
&= \frac{i}{2}|f|^2\{-\epsilon g[\epsilon H(1+\epsilon|g|^2)^2 + i\tau(1-\epsilon|g|^2)^2] \\
&+ \bar{g}(1+\epsilon g^2)[H(1+\epsilon|g|^2) - i\epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)]\} \\
&= \frac{i}{2}|f|^2\{H(1+\epsilon|g|^2)[-g(1+\epsilon|g|^2) + \bar{g}(1+\epsilon g^2)] \\
&- i\epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)[g(1-\epsilon|g|^2) + \bar{g}(1+\epsilon g^2)]\} \\
&= \frac{i}{2}|f|^2\{H(1+\epsilon|g|^2)(-g - \epsilon g|g|^2 + \bar{g} + \epsilon g|g|^2) \\
&- i\epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)(g - \epsilon g|g|^2 + \bar{g} + \epsilon g|g|^2)\} \\
&= \frac{i}{2}|f|^2\left\{H(1+\epsilon|g|^2)(-g+\bar{g}) - i\epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)(g+\bar{g})\right\} \\
&= |f|^2\left\{H(1+\epsilon|g|^2)Im(g) + \epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)Re(g)\right\}.
\end{aligned}$$

Por fim, a terceira equação pode ser deduzida como segue:

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}}(gf) &= f g_{\bar{z}} + g f_{\bar{z}} \\
&= -f\frac{\bar{f}}{2}\{\epsilon H(1+\epsilon|g|^2)^2 + i\tau(1-\epsilon|g|^2)^2\} \\
&+ g|f|^2\bar{g}\{H(1+\epsilon|g|^2) - i\epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)\} \\
&= |f|^2\{-\frac{1}{2}[\epsilon H(1+\epsilon|g|^2)^2 + i\tau(1-\epsilon|g|^2)^2] \\
&+ |g|^2[H(1+\epsilon|g|^2) - i\epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)]\} \\
&= |f|^2\{H(1+\epsilon|g|^2)[-\frac{\epsilon}{2}(1+\epsilon|g|^2) + |g|^2] \\
&- i\tau(1-\epsilon|g|^2)[\frac{1}{2}(1-\epsilon|g|^2) + \epsilon|g|^2]\} \\
&= |f|^2\left\{H(1+\epsilon|g|^2)(-\frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2}|g|^2) - i\tau(1-\epsilon|g|^2)(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}|g|^2)\right\} \\
&= \frac{1}{2}|f|^2\left\{H(1+\epsilon|g|^2)(|g|^2-\epsilon) - i\tau(1-\epsilon|g|^4)\right\}.
\end{aligned}$$

□

Enunciamos, enfim, o teorema de representação de superfícies em $\mathbb{H}_3(\epsilon,\tau)$.

Teorema 3.3.1. *Sejam Ω um domínio simplesmente conexo de uma superfície de Riemann Σ, $H : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e f e g funções complexas definidas em Ω com f nunca nula, satisfazendo (3.43) e (3.44), isto é,*

$$f_{\bar{z}} = |f|^2\bar{g}\{H(1+\epsilon|g|^2) - i\epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)\}, \qquad g_{\bar{z}} = -\frac{\bar{f}}{2}\{\epsilon H(1+\epsilon|g|^2)^2 + i\tau(1-\epsilon|g|^2)^2\}.$$

Então, a aplicação

$$X = (x_1, x_2, x_3) : \Omega \looparrowright \mathbb{H}_3(\epsilon,\tau),$$

definida por

$$\begin{array}{rcl} x_1(z) &=& 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2) f dz\right) \\ x_2(z) &=& 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \frac{i}{2}(1+\epsilon g^2) f dz\right) \\ x_3(z) &=& 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \{\tau[\frac{i}{2}(1+\epsilon g^2) f x_1 - \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2) f x_2] + gf\} dz\right), \end{array} \tag{3.52}$$

é uma imersão conforme com curvatura média H e aplicação de Gauss g.

Prova. Inicialmente, observamos que, por (3.49) e (3.50),

$$\partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f\right) \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \partial_{\bar{z}}\left(\frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f\right) \in \mathbb{R}.$$

Logo, pelo Lema 2.2.1, as funções x_1 e x_2 estão bem definidas e

$$\frac{\partial x_1}{\partial z} = \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial z} = \frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f.$$

Além disso, temos

$$\begin{array}{rl} & \tau\left\{\frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f\partial_{\bar{z}}(x_1) - \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f\partial_{\bar{z}}(x_2)\right\} \\ = & \tau\left\{\frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f\frac{1}{2}(1-\epsilon\bar{g}^2)\bar{f} + \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f\frac{i}{2}(1+\epsilon\bar{g}^2)\bar{f}\right\} \\ = & \frac{i}{4}\tau|f|^2\left\{(1+\epsilon g^2)(1-\epsilon\bar{g}^2) + (1-\epsilon g^2)(1+\epsilon\bar{g}^2)\right\} \\ = & \frac{i}{4}\tau|f|^2\left\{1+\epsilon g^2 - \epsilon\bar{g}^2 - |g|^2 + 1 - \epsilon g^2 + \epsilon\bar{g}^2 - |g|^4\right\} \\ = & \frac{i}{2}\tau|f|^2(1-|g|^4). \end{array}$$

Logo, por (3.49), (3.50) e (3.49), obtemos

$$\partial_{\bar{z}}\left(\tau\left[\frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)fx_1 - \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)fx_2\right] + gf\right) \in \mathbb{R}.$$

Portanto, pelo Lema 2.2.1, a função x_3 está bem definida e

$$\partial_z(x_3) = \tau\left(\frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)fx_1 - \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)fx_2\right) + gf.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
X_z &= \partial_z(x_1)\partial_{x_1} + \partial_z(x_2)\partial_{x_2} + \partial_z(x_3)\partial_{x_3} \\
&= \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f\partial_{x_1} + \frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f\partial_{x_2} \\
&+ \left(\frac{\tau}{2}\left[i(1+\epsilon g^2)x_1 - (1-\epsilon g^2)x_2\right] + g\right) f\partial_{x_3} \\
&= \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f\,(E_1 + \tau x_2 E_3) + \frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f\,(E_2 - \tau x_1 E_3) \\
&+ \left(\frac{\tau}{2}\left[i(1+\epsilon g^2)x_1 - (1-\epsilon g^2)x_2\right] + g\right) fE_3 \\
&= \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)fE_1 + \frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)fE_2 + \frac{\tau}{2}(1-\epsilon g^2)fx_2E_3 \\
&- \frac{i\tau}{2}(1+\epsilon g^2)fE_3 + \left(\frac{\tau}{2}\left[i(1+\epsilon g^2)x_1 - (1-\epsilon g^2)x_2\right] + g\right) fE_3 \\
&= \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)fE_1 + \frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)fE_2 + gfE_3.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle X_z, X_z\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle X_z, X_{\bar z}\rangle = \frac{1}{2}|f|^2(1+|g|^2)^2 \ (= \frac{1}{2}e^{2\omega}),$$

do que concluímos que X é uma imersão conforme, posto que f é nunca nula. Além disso, a expressão do vetor normal ao longo de X é

$$N = \frac{1}{1+\epsilon|g|^2}\left\{2Re(g)E_1 + 2Im(g)E_2 + (|g|^2-\epsilon)E_3\right\}.$$

Portanto, em virtude dos dois primeiros lemas desta seção, a aplicação g é a projeção estereográfica da aplicação de Gauss de X. Finalmente, mostramos que X tem curvatura média H. Temos,

$$\begin{aligned}
\bar\nabla_{\partial_{\bar z}}X_z &= \partial_{\bar z}(\frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f)E_1 + \partial_{\bar z}(\frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f)E_2 + \partial_{\bar z}(gf)E_3 \\
&+ \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f\bar\nabla_{\partial_{\bar z}}E_1 + \frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f\bar\nabla_{\partial_{\bar z}}E_2 + gf\bar\nabla_{\partial_{\bar z}}E_3.
\end{aligned}$$

Todavia, por (3.5), temos

$$\begin{aligned}
\bar\nabla_{\partial_{\bar z}}E_1 &= \frac{1}{2}(1-\epsilon\bar g^2)\bar f\bar\nabla_{E_1}E_1 - \frac{i}{2}(1+\epsilon\bar g^2)\bar f\bar\nabla_{E_2}E_1 + \bar g\bar f\bar\nabla_{E_3}E_1 \\
&= \frac{i\tau}{2}(1+\epsilon\bar g^2)\bar fE_3 - \epsilon\tau\bar g\bar fE_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar\nabla_{\partial_{\bar z}}E_2 &= \frac{1}{2}(1-\epsilon\bar g^2)\bar f\bar\nabla_{E_1}E_2 - \frac{i}{2}(1+\epsilon\bar g^2)\bar f\bar\nabla_{E_2}E_2 + \bar g\bar f\bar\nabla_{E_3}E_2 \\
&= \frac{\tau}{2}(1-\epsilon\bar g^2)\bar fE_3 + \epsilon\tau\bar g\bar fE_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}} E_3 &= \frac{1}{2}(1-\epsilon\bar{g}^2)\bar{f}\bar{\nabla}_{E_1}E_3 - \frac{i}{2}(1+\epsilon\bar{g}^2)\bar{f}\bar{\nabla}_{E_2}E_3 + \bar{g}\bar{f}\bar{\nabla}_{E_3}E_3 \\
&= -\frac{\epsilon\tau}{2}(1-\epsilon\bar{g}^2)\bar{f}E_2 - \frac{\epsilon i\tau}{2}(1+\epsilon\bar{g}^2)\bar{f}E_1,
\end{aligned}$$

o que nos faculta concluirmos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}E_1 + \frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}E_2 + gf\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}E_3 \\
&= \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f\left\{\frac{i\tau}{2}(1+\epsilon\bar{g}^2)\bar{f}E_3 - \epsilon\tau\bar{g}\bar{f}E_2\right\} \\
&+ \frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f\left\{\frac{\tau}{2}(1-\epsilon\bar{g}^2)\bar{f}E_3 + \epsilon\tau\bar{g}\bar{f}E_1\right\} \\
&+ gf\left\{-\frac{\epsilon\tau}{2}(1-\epsilon\bar{g}^2)\bar{f}E_2 - \frac{\epsilon i\tau}{2}(1+\epsilon\bar{g}^2)\bar{f}E_1\right\} \\
&= \left\{\frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f\epsilon\tau\bar{g}\bar{f} - gf\frac{\epsilon i\tau}{2}(1+\epsilon\bar{g}^2)\bar{f}\right\}E_1 \\
&+ \left\{-\frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f\epsilon\tau\bar{g}\bar{f} - gf\frac{\epsilon\tau}{2}(1-\epsilon\bar{g}^2)\bar{f}\right\}E_2 \\
&+ \left\{\frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f\frac{i\tau}{2}(1+\epsilon\bar{g}^2)\bar{f} + \frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f\frac{\tau}{2}(1-\epsilon\bar{g}^2)\bar{f}\right\}E_3 \\
&= \frac{i}{2}\epsilon\tau|f|^2\left\{\bar{g}(1+\epsilon g^2) - g(1+\epsilon\bar{g}^2)\right\}E_1 \\
&- \frac{1}{2}\epsilon\tau|f|^2\left\{\bar{g}(1-\epsilon g^2) + g(1-\epsilon\bar{g}^2)\right\}E_2 \\
&+ \frac{i}{4}|f|^2\left\{(1-\epsilon g^2)(1+\epsilon\bar{g}^2) + (1+\epsilon g^2)(1-\epsilon\bar{g}^2)\right\}E_3 \\
&= \frac{i}{2}\epsilon\tau|f|^2\left\{\bar{g} + \epsilon g|g|^2 - g + \epsilon\bar{g}|g|^2\right\}E_1 \\
&- \frac{1}{2}\epsilon\tau|f|^2\left\{\bar{g} - \epsilon g|g|^2 + g - \epsilon\bar{g}|g|^2\right\}E_2 \\
&+ \frac{i}{4}\tau|f|^2\left\{(1-\epsilon g^2+\epsilon\bar{g}^2-|g|^4) + (1+\epsilon g^2-\epsilon\bar{g}^2-|g|^4)\right\}E_3 \\
&= \frac{i}{2}\epsilon\tau|f|^2(\bar{g}-g)(1-\epsilon|g|^2)E_1 \\
&- \frac{1}{2}\epsilon\tau|f|^2(g+\bar{g})(1-\epsilon|g|^2)E_2 + \frac{i}{2}\tau|f|^2(1-|g|^4)E_3 \\
&= \epsilon\tau|f|^2\left\{(1-\epsilon|g|^2)Im(g)E_1 - (1-\epsilon|g|^2)Re(g)E_2 + \frac{i\epsilon}{2}(1-|g|^4)E_3\right\}.
\end{aligned}$$

Portanto, da relação acima em conjunto com o lema anterior, obtemos,

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}} X_z &= |f|^2 \left\{ H(1+\epsilon|g|^2)Re(g) - \epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)Im(g) \right\} E_1 \\
&+ |f|^2 \left\{ H(1+\epsilon|g|^2)Im(g) + \epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)Re(g) \right\} E_2 \\
&+ \frac{1}{2}|f|^2 \left\{ H(1+\epsilon|g|^2)(|g|^2-\epsilon) - i\tau(1-|g|^4) \right\} E_3 \\
&+ \epsilon\tau|f|^2 \left\{ (1-\epsilon|g|^2)Im(g)E_1 - (1-\epsilon|g|^2)Re(g)E_2 + \frac{i\epsilon}{2}(1-|g|^4)E_3 \right\} \\
&= H|f|^2(1+\epsilon|g|^2) \left\{ Re(g)E_1 + Im(g)E_2 + \frac{1}{2}(|g|^2-\epsilon)E_3 \right\} \\
&= \frac{1}{2}H|f|^2(1+\epsilon|g|^2) \left\{ 2Re(g)E_1 + 2Im(g)E_2 + (|g|^2-\epsilon)E_3 \right\} \\
&= \frac{1}{2}H|f|^2(1+\epsilon|g|^2)^2 N \\
&= \frac{1}{2}He^{2\omega}N.
\end{aligned}$$

Desta forma, a imersão X tem curvatura média H, o que finaliza a prova do teorema. □

A partir deste teorema, obtemos uma representação para uma superfície mínima em $\mathbb{H}_3(\epsilon,\tau)$, isto é,

Corolário 3.3.2. *Supomos f e g funções definidas em um domínio simplesmente conexo $\Omega \subset \Sigma$, com f nunca nula, satisfazendo (3.45) e (3.46), isto é,*

$$f_{\bar{z}} = -i\epsilon\tau|f|^2\bar{g}(1-\epsilon|g|^2), \qquad g_{\bar{z}} = -\frac{i}{2}\tau\bar{f}(1-\epsilon|g|^2)^2.$$

Então, a aplicação

$$X = (x_1, x_2, x_3) : \Omega \looparrowright \mathbb{H}_3(\epsilon,\tau),$$

definida por

$$\begin{aligned}
x_1(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f dz\right) \\
x_2(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \tfrac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f dz\right) \\
x_3(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \{\tau[\tfrac{i}{2}(1+\epsilon g^2)fx_1 - \tfrac{1}{2}(1-\epsilon g^2)fx_2] + gf\}dz\right),
\end{aligned} \tag{3.53}$$

é uma imersão mínima conforme e com aplicação de Gauss g.

Prova. As equações (3.45) e (3.46) são, respectivamente, as relações (3.43) e (3.44) com $H = 0$. □

Quando $|g|^2 < 1$, a representação integral dada acima para superfícies mínimas pode ser obtida somente da aplicação de Gauss da imersão. Assim, temos

Corolário 3.3.3. *Seja $g : \Omega \subset \Sigma \to (\mathbb{D}, ds^2_\epsilon)$ uma aplicação harmônica nunca holomorfa, onde*

$$ds^2_\epsilon = \lambda^2_\epsilon(w)|dw|^2 = \frac{1}{(1-\epsilon|w|^2)^2}|dw|^2.$$

Então, a aplicação

$$X = (x_1, x_2, x_3) : \Omega \subset \Sigma \to \mathbb{H}_3(\epsilon, \tau),$$

definida por

$$\begin{aligned} x_1(z) &= -2Re\left(\int_{z_0}^z (1-\epsilon g^2)\tfrac{i}{\tau(1-\epsilon|g|^2)^2}\bar{g}_z dz\right) \\ x_2(z) &= 2Re\left(\int_{z_0}^z (1+\epsilon g^2)\tfrac{1}{\tau(1-\epsilon|g|^2)^2}\bar{g}_z dz\right) \\ x_3(z) &= -2Re\left(\int_{z_0}^z \{\tfrac{\tau}{2}[i(1+\epsilon g^2)x_1 - (1-\epsilon g^2)x_2] + g\}\tfrac{2i}{\tau(1-\epsilon|g|^2)^2}\bar{g}_z dz\right), \end{aligned} \tag{3.54}$$

é uma imersão mínima conforme e tem aplicação de Gauss g.

Prova. Observamos que, se definimos

$$f := -\frac{2i}{\tau(1-\epsilon|g|^2)^2}\bar{g}_z,$$

concluímos que f é nunca nula, pois g é nunca holomorfa; ademais, a derivada de g em relação a $\bar{z}$, satisfaz (3.46), isto é,

$$g_{\bar{z}} = -\frac{i}{2}\tau\bar{f}(1-\epsilon|g|^2)^2.$$

Por outro lado, pela harmonicidade de g, a derivada de f em relação a $\bar{z}$ é dada por

$$\begin{aligned} f_{\bar{z}} &= -\frac{2i}{\tau(1-\epsilon|g|^2)^4}\{\bar{g}_{z\bar{z}}(1-\epsilon|g|^2)^2 + 2\epsilon\bar{g}_z(1-\epsilon|g|^2)(g\bar{g}_{\bar{z}} + \bar{g}g_{\bar{z}})\} \\ &= -\frac{2i}{\tau(1-\epsilon|g|^2)^3}\{\overline{g_{\bar{z}z}}(1-\epsilon|g|^2) + 2\epsilon\bar{g}_z(g\bar{g}_{\bar{z}} + \bar{g}g_{\bar{z}})\} \\ &= -\frac{2i}{\tau(1-\epsilon|g|^2)^3}\{-2\epsilon g\bar{g}_z\bar{g}_{\bar{z}} + 2\epsilon\bar{g}_z(g\bar{g}_{\bar{z}} + \bar{g}g_{\bar{z}})\} \\ &= -\frac{4i\epsilon}{\tau(1-\epsilon|g|^2)^3}\bar{g}|g_{\bar{z}}|^2 \\ &= -\frac{4i\epsilon}{\tau(1-\epsilon|g|^2)^3}\bar{g}\left[\frac{\tau^2}{4}|f|^2(1-\epsilon|g|^2)^4\right] \\ &= -i\epsilon\tau|f|^2\bar{g}(1-\epsilon|g|^2), \end{aligned}$$

isto é, reobtemos (3.45). Além disso, pela expressão de f, a definição de X dada em (3.54), torna-se (3.53). Do corolário anterior, segue o resultado. □

Capítulo 4

Superfícies em Esferas e no Espaço Anti de Sitter

4.1 A Esfera $\mathbb{S}^3$ como Grupo de Lie

Nesta seção, apresentamos a estrutura de grupo de Lie de $\mathbb{S}^3$ induzida pela identificação da esfera com um subgrupo multiplicativo das matrizes 2×2 com coeficientes complexos. Consideramos sobre $\mathbb{C}^2$ o produto interno (hermitiano) canônico

$$\langle (z,w),(\alpha,\beta)\rangle = z\bar{\alpha} + w\bar{\beta}.$$

Identificamos a esfera $\mathbb{S}^3$ ao grupo de matrizes SU_2 que preservam este produto interno. Mais especificamente, temos

$$\mathbb{S}^3 \equiv \mathrm{SU}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} : |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\}.$$

Relembramos que o espaço tangente a SU_2 na matriz identidade de ordem 2, que denotamos por e, é descrito como

$$\begin{aligned} T_e\mathrm{SU}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix} : a,\ b,\ c\ \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{span}\left\{ \hat{e}_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Observamos que os vetores $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ satisfazem as relações algébricas $\hat{e}_1^2 = \hat{e}_2^2 = \hat{e}_3^2 = -\hat{e}$. O colchete de Lie de matrizes determina, ainda, as relações $[\hat{e}_1, \hat{e}_2] = 2\hat{e}_3$, $[\hat{e}_2, \hat{e}_3] =$

$2\hat{e}_1$ e $[\hat{e}_3, \hat{e}_1] = 2\hat{e}_2$, as quais podem ser assimiladas ao produto exterior em $T_e\mathrm{SU}_2 = \mathbb{R}^3$. A translação à esquerda destes vetores define, respectivamente, os campos vetoriais invariantes à esquerda

$$X_1 = \begin{pmatrix} iz & -iw \\ -i\bar{w} & -i\bar{z} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -w & z \\ -i\bar{z} & -\bar{w} \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} iw & iz \\ i\bar{z} & -i\bar{w} \end{pmatrix}.$$

Obviamente, o colchete de Lie destes campos, que geram a álgebra de Lie $\mathfrak{su}_2$, é determinado por

$$[X_1, X_2] = 2X_3, \quad [X_2, X_3] = 2X_1, \quad [X_3, X_1] = 2X_2, \tag{4.1}$$

relações que podem ser escritas unificadamente como

$$[X_i, X_{i+1}] = 2X_{i+2}, \tag{4.2}$$

onde os índices são tomados módulo 3. O grupo SU_2 está contido no espaço vetorial real de dimensão 4

$$\mathbb{V} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} : \ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Mediante a correspondência

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{V} \leftrightarrow (z, w) \in \mathbb{C}^2 \leftrightarrow (x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4,$$

onde $z = x + iy$ e $w = u + iv$, o produto de matrizes em $\mathbb{V}$ passa a ser expresso, em termos das coordenadas $(z, w) \in \mathbb{C}^2$, na forma

$$(z, w)(z', w') = (zz' - \bar{w}'w, w'z + w\bar{z}').$$

Motivados pela relação

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \right\rangle_{M_{2\times 2}(\mathbb{C})} &= \frac{1}{2}\mathrm{tr} \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}^* \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr} \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr} \begin{pmatrix} |z|^2 + |w|^2 & 0 \\ 0 & |z|^2 + |w|^2 \end{pmatrix} \\ &= |z|^2 + |w|^2, \end{aligned} \tag{4.3}$$

definimos sobre o espaço vetorial real $\mathbb{V}$ o produto interno que, nas coordenadas $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$, é dado por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{V}} = dx^2 + dy^2 + du^2 + dv^2,$$

de modo que $Re\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{V}}$. A métrica induzida em SU_2 é bi-invariante. Os campos X_1, X_2 e X_3 definidos acima são expressos nas coordenadas lineares de $\mathbb{V}$ por

$$X_1 = -y\partial_x + x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v, \;\; X_2 = -u\partial_x - v\partial_y + x\partial_u + y\partial_v, \;\; X_3 = -v\partial_x + u\partial_y - y\partial_u + x\partial_v.$$

Verifica-se facilmente que constituem um referencial ortonormal em SU_2, com respeito a métrica induzida de $\mathbb{V}$. A conexão riemanniana correspondente é determinada por

$$\bar{\nabla}_{X_i} X_{i+1} = X_{i+2} = \frac{1}{2}[X_i, X_{i+1}].$$

4.2 O Espaço AdS como Grupo de Lie

O grupo $\mathrm{SU}_{1,1}$ consiste das matrizes de determinante 1 que preservam o produto interno pseudo-hermitiano definido em $\mathbb{C}^2$ por

$$((z, w), (\alpha, \beta)) = -z\bar{\alpha} + w\bar{\beta}.$$

Sucintamente, pomos

$$\mathrm{SU}_{1,1} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} : |z|^2 - |w|^2 = 1 \right\}.$$

Como na seção anterior, não é dificil ver que o espaço tangente de $\mathrm{SU}_{1,1}$ na matriz unidade e é dado por:

$$\begin{aligned} T_e\mathrm{SU}_{1,1} &= \left\{ \begin{pmatrix} ia & b + ic \\ b - ic & -ia \end{pmatrix} : a,\ b,\ c\ \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{span} \left\{ \hat{f}_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \hat{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Observamos que os vetores $\hat{f}_1,\ \hat{f}_2$ e $\hat{f}_3$ satisfazem as relações algébricas $\hat{f}_1^2 = \hat{f}_2^2 = \hat{f}_3^2 = -\hat{e}$. Ademais, o colchete de matrizes determina as relações $[\hat{f}_1, \hat{f}_2] = 2\hat{f}_3$, $[\hat{f}_2, \hat{f}_3] = -2\hat{f}_1$ e $[\hat{f}_3, \hat{f}_1] = 2\hat{f}_2$, as quais podem ser tomadas como o produto exterior em $T_e\mathrm{SU}_{1,1} =$

$\mathbb{L}^3$. Estes vetores definem, respectivamente, os seguintes campos vetoriais invariantes à esquerda

$$Y_1 = \begin{pmatrix} iz & -iw \\ i\bar{w} & -i\bar{z} \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} w & z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} -iw & iz \\ -i\bar{z} & i\bar{w} \end{pmatrix}$$

satisfazendo, obviamente

$$[Y_1, Y_2] = 2Y_3, \quad [Y_2, Y_3] = -2Y_1, \quad [Y_3, Y_1] = 2Y_2. \tag{4.4}$$

Constatamos que $\mathrm{SU}_{1,1}$ está contido no espaço vetorial real de dimensão 4

$$\mathbb{W} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} : \ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Mediante a identificação

$$\begin{pmatrix} z & w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{W} \leftrightarrow (z, w) \in \mathbb{C}^2 \leftrightarrow (x, y, u, v) \in \mathbb{R}^{2,2},$$

onde $z = x + iy$ e $w = u + iv$, o produto de matrizes em $\mathbb{W}$ é expresso, em termos das coordenadas $(z, w) \in \mathbb{C}^2$, na forma

$$(z, w)(z', w') = (zz' + \bar{w}'w, w'z + w\bar{z}').$$

Definimos em $\mathbb{W}$ o produto interno pseudo-hermitiano $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{W}}$ que, nas coordenadas lineares (x, y, u, v), é a parte real de $(\cdot, \cdot)$, isto é,

$$(\cdot, \cdot)_{\mathbb{W}} = -dx^2 - dy^2 + du^2 + dv^2.$$

Consideramos sobre $\mathrm{SU}_{1,1}$ a métrica induzida por $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{W}}$, denotada da mesma maneira. Tal métrica é bi-invariante. A expressão nestas coordenadas dos campos Y_1, Y_2 e Y_3 é

$$Y_1 = -y\partial_x + x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v \quad Y_2 = u\partial_x + v\partial_y + x\partial_u + y\partial_v, \quad Y_3 = v\partial_x - u\partial_y - y\partial_u + x\partial_v.$$

Estes campos invariantes à esquerda constituem um referencial ortogonal satisfazendo

$$(Y_1, Y_1) = -1, \quad (Y_2, Y_2) = (Y_3, Y_3) = 1.$$

Denotando por $\bar{\nabla}$ a conexão pseudo-riemanniana em $\mathrm{SU}_{1,1}$, relativamente a métrica fixada há pouco, obtemos

$$\bar{\nabla}_{Y_1} Y_2 = Y_3 = \frac{1}{2}[Y_1, Y_2], \quad \bar{\nabla}_{Y_2} Y_3 = -Y_1 = \frac{1}{2}[Y_2, Y_3], \quad \bar{\nabla}_{Y_3} Y_1 = Y_2 = \frac{1}{2}[Y_3, Y_1].$$

4.3 Esferas de Berger e Espaços Anti de Sitter Exóticos

4.3.1 Esferas de Berger

Considere um parâmetro $\tau > 0$ e o referencial de campos invariantes à esquerda $X_1,\ X_2,\ X_3$ sobre SU_2 fixados na seção anterior. A seguir, definimos métricas invariantes à esquerda em SU_2 que denotamos indistintamente por $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Uma tal métrica é definida de modo que os campos

$$E_1 = \frac{1}{\tau}X_1, \quad E_2 = X_2, \quad E_3 = X_3 \tag{4.5}$$

sejam ortonormais. Em vista de (4.1), temos

$$[E_1, E_2] = \frac{2}{\tau}E_3, \quad [E_2, E_3] = 2\tau E_1, \quad [E_3, E_1] = \frac{2}{\tau}E_2. \tag{4.6}$$

Além disso, demonstra-se que

Lema 4.3.1. *Os campos $E_1,\ E_2$ e E_3 satisfazem*

$$\begin{array}{ccc}
\bar\nabla_{E_1}E_1 = 0 & \bar\nabla_{E_2}E_1 = -\tau E_3 & \bar\nabla_{E_3}E_1 = \tau E_2 \\
\bar\nabla_{E_1}E_2 = \frac{1}{\tau}(2-\tau^2)E_3 & \bar\nabla_{E_2}E_2 = 0 & \bar\nabla_{E_3}E_2 = -\tau E_1 \\
\bar\nabla_{E_1}E_3 = \frac{1}{\tau}(\tau^2-2)E_2 & \bar\nabla_{E_2}E_3 = \tau E_1 & \bar\nabla_{E_3}E_3 = 0,
\end{array}$$

onde $\bar\nabla$ é a conexão riemanniana em $(\mathrm{SU}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Prova. Pela fórmula de Koszul, temos $\langle\bar\nabla_{E_i}E_i, E_k\rangle = \langle[E_k, E_i], E_i\rangle$. Portanto, (4.6) assegura que

$$\langle\bar\nabla_{E_i}E_i, E_k\rangle = 0, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

donde concluímos que $\bar\nabla_{E_i}E_i = 0$ para $i = 1, 2, 3$. Temos, também da fórmula de Koszul,

$$\langle\bar\nabla_{E_1}E_2, E_1\rangle = \langle[E_1, E_2], E_1\rangle, \quad \langle\bar\nabla_{E_1}E_2, E_2\rangle = 0,$$

$$2\langle\bar\nabla_{E_1}E_2, E_3\rangle = \langle[E_1, E_2], E_3\rangle - \langle[E_2, E_3], E_1\rangle + \langle[E_3, E_1], E_2\rangle$$

e, portanto, usando (4.6),

$$\langle\bar\nabla_{E_1}E_2, E_1\rangle = 0, \quad \langle\bar\nabla_{E_1}E_2, E_2\rangle = 0, \quad \langle\bar\nabla_{E_1}E_2, E_3\rangle = \frac{2}{\tau} - \tau.$$

Desta forma, obtemos $\bar\nabla_{E_1}E_2 = \frac{1}{\tau}(2-\tau^2)E_3$ e

$$\bar\nabla_{E_2}E_1 = [E_2, E_1] + \bar\nabla_{E_1}E_2 = -\frac{2}{\tau}E_3 + \frac{1}{\tau}(2-\tau^2)E_3 = -\tau E_3.$$

Novamente pela fórmula de Koszul, chegamos a

$$\langle \bar{\nabla}_{E_2} E_3, E_2 \rangle = \langle [E_2, E_3], E_2 \rangle, \quad \langle \bar{\nabla}_{E_2} E_3, E_3 \rangle = 0$$

$$2\langle \bar{\nabla}_{E_2} E_3, E_1 \rangle = \langle [E_2, E_3], E_1 \rangle - \langle [E_3, E_1], E_2 \rangle + \langle [E_1, E_2], E_3 \rangle$$

e, utilizando (4.6), isto resulta em

$$\langle \bar{\nabla}_{E_2} E_3, E_2 \rangle = 0, \quad \langle \bar{\nabla}_{E_2} E_3, E_3 \rangle = 0, \quad \langle \bar{\nabla}_{E_2} E_3, E_1 \rangle = \tau.$$

Assim, $\bar{\nabla}_{E_2} E_3 = \tau E_1$ e

$$\bar{\nabla}_{E_3} E_2 = [E_3, E_2] + \bar{\nabla}_{E_2} E_3 = -2\tau E_1 + \tau E_1 = -\tau E_1.$$

Como acima, pela fórmula de Koszul, temos

$$\langle \bar{\nabla}_{E_3} E_1, E_3 \rangle = \langle [E_3, E_1], E_3 \rangle, \quad \langle \bar{\nabla}_{E_3} E_1, E_1 \rangle = 0$$

$$2\langle \bar{\nabla}_{E_3} E_1, E_2 \rangle = \langle [E_3, E_1], E_2 \rangle - \langle [E_1, E_2], E_3 \rangle + \langle [E_2, E_3], E_1 \rangle.$$

Logo, (4.6) implica que

$$\langle \bar{\nabla}_{E_3} E_1, E_3 \rangle = 0, \quad \langle \bar{\nabla}_{E_3} E_1, E_1 \rangle = 0, \quad \langle \bar{\nabla}_{E_3} E_1, E_2 \rangle = \tau.$$

Portanto, $\bar{\nabla}_{E_3} E_1 = \tau E_2$ e

$$\bar{\nabla}_{E_1} E_3 = [E_1, E_3] + \bar{\nabla}_{E_3} E_1 = -\frac{2}{\tau} E_1 + \tau E_1 = \frac{1}{\tau}(\tau^2 - 2) E_1.$$

□

Como consequência do lema acima, os símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana de $(\mathrm{SU}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ são

$$\Gamma_{23}^1 = -\Gamma_{32}^1 = \Gamma_{31}^2 = -\Gamma_{21}^3 = \tau, \ \Gamma_{12}^3 = -\Gamma_{13}^2 = \frac{1}{\tau}(2 - \tau^2), \ \text{outros } \Gamma_{ij}^k = 0. \tag{4.7}$$

4.3.2 Espaços Anti de Sitter Exóticos

Fixado o parâmetro $\tau > 0$ como acima, consideramos, desta vez, métricas lorentzianas invariantes à esquerda em $\mathrm{SU}_{1,1}$ que denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Tais métricas são definidas impondo-se que os campos

$$E_1 = \frac{1}{\tau} Y_1, \quad E_2 = Y_2, \quad E_3 = Y_3 \tag{4.8}$$

sejam ortogonais e satisfaçam

$$\langle E_1, E_1\rangle = -1, \quad \langle E_2, E_2\rangle = \langle E_3, E_3\rangle = 1. \tag{4.9}$$

Observamos que, em função de (4.4), temos

$$[E_1, E_2] = \frac{2}{\tau}E_3, \quad [E_2, E_3] = -2\tau E_1, \quad [E_3, E_1] = \frac{2}{\tau}E_2. \tag{4.10}$$

Além disso, demonstramos, de modo análogo ao que fizemos acima, que

Lema 4.3.2. *Os campos $E_1,\ E_2$ e E_3 satisfazem*

$$\begin{array}{lll} \bar\nabla_{E_1}E_1 = 0 & \bar\nabla_{E_2}E_1 = -\tau E_3 & \bar\nabla_{E_3}E_1 = \tau E_2 \\ \bar\nabla_{E_1}E_2 = \frac{1}{\tau}(2-\tau^2)E_3 & \bar\nabla_{E_2}E_2 = 0 & \bar\nabla_{E_3}E_2 = \tau E_1 \\ \bar\nabla_{E_1}E_3 = \frac{1}{\tau}(\tau^2-2)E_2 & \bar\nabla_{E_2}E_3 = -\tau E_1 & \bar\nabla_{E_3}E_3 = 0 \end{array}$$

O lema acima assegura que os símbolos de Christoffel da conexão pseudo-riemanniana de $(\mathrm{SU}_{1,1}, (\cdot,\cdot))$ são

$$\Gamma^1_{32} = -\Gamma^1_{23} = \Gamma^2_{31} = -\Gamma^3_{21} = \tau,\ \Gamma^3_{12} = -\Gamma^2_{13} = \frac{1}{\tau}(2-\tau^2), \quad \text{outros } \Gamma^k_{ij} = 0. \tag{4.11}$$

4.3.3 Descrição Unificada

Nesta seção, unificamos as duas exposições anteriores. Para tal, utilizamos o parâmetro ϵ indicando esferas de Berger quando $\epsilon = 1$ e espaços Anti de Sitter exóticos quando $\epsilon = -1$. Em ambos os contextos, a métrica é denotada por $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Denotamos por $\mathbb{S}^3_{1,\tau}$ o grupo de Lie SU_2 com a métrica invariante à esquerda para a qual os campos $E_1,\ E_2$ e E_3 definidos por (4.5) são ortonormais. Denotamos por $\mathbb{S}^3_{-1,\tau}$ o grupo de Lie $\mathrm{SU}_{1,1}$ munido da pseudo-métrica invariante à esquerda para a qual os campos $E_1,\ E_2$ e E_3 definidos por (4.8) são ortogonais e satisfazem (4.9). As álgebras de Lie serão ambas denotadas por $\mathfrak{g}$. Portanto, em $\mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$, os campos $E_1,\ E_2$ e E_3 satisfazem

$$[E_1, E_2] = \frac{2}{\tau}E_3, \quad [E_2, E_3] = 2\epsilon\tau E_1, \quad [E_3, E_1] = \frac{2}{\tau}E_2. \tag{4.12}$$

$$\langle E_1, E_1\rangle = \epsilon, \quad \langle E_2, E_2\rangle = \langle E_3, E_3\rangle = 1. \tag{4.13}$$

Além disto, como vimos, a conexão de Levi-Civitá é determinada por

$$\begin{array}{lll} \bar\nabla_{E_1}E_1 = 0 & \bar\nabla_{E_2}E_1 = -\tau E_3 & \bar\nabla_{E_3}E_1 = \tau E_2 \\ \bar\nabla_{E_1}E_2 = \frac{1}{\tau}(2-\tau^2)E_3 & \bar\nabla_{E_2}E_2 = 0 & \bar\nabla_{E_3}E_2 = -\epsilon\tau E_1 \\ \bar\nabla_{E_1}E_3 = \frac{1}{\tau}(\tau^2-2)E_2 & \bar\nabla_{E_2}E_3 = \epsilon\tau E_1 & \bar\nabla_{E_3}E_3 = 0 \end{array} \tag{4.14}$$

donde,

$$\begin{array}{cc} \Gamma_{31}^2 = -\Gamma_{21}^3 = \tau & \Gamma_{23}^1 = -\Gamma_{32}^1 = \epsilon\tau \\ \Gamma_{12}^3 = -\Gamma_{13}^2 = \frac{1}{\tau}(2-\tau^2) & \text{outros } \Gamma_{ij}^k = 0 \end{array} \tag{4.15}$$

Com respeito a curvatura, demonstramos

Lema 4.3.3. *O tensor de curvatura $\bar{R}$ em $\mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$ é determinado por*

$$\begin{gathered} \bar{R}(E_1,E_2)E_3 = \bar{R}(E_2,E_3)E_1 = \bar{R}(E_3,E_1)E_2 = 0 \\ \bar{R}(E_1,E_2)E_2 = \epsilon\tau^2 E_1, \quad \bar{R}(E_2,E_3)E_3 = \epsilon(4-3\tau^2)E_2 \\ \bar{R}(E_3,E_1)E_1 = \tau^2 E_3. \end{gathered} \tag{4.16}$$

Portanto, $\mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$ tem curvaturas seccionais iguais a $\epsilon\tau^2$ e $\epsilon(4-3\tau^2)$.

Prova. De fato, pelas equações (4.12), (4.13) e (4.14), obtemos

$$\begin{aligned} \bar{R}(E_1,E_2)E_3 &= \bar{\nabla}_{E_1}\bar{\nabla}_{E_2}E_3 - \bar{\nabla}_{E_2}\bar{\nabla}_{E_1}E_3 - \bar{\nabla}_{[E_1,E_2]}E_3 \\ &= \bar{\nabla}_{E_1}(\epsilon\tau E_1) - \bar{\nabla}_{E_2}(\frac{1}{\tau}(\tau^2-2)E_2) - \bar{\nabla}_{\frac{2}{\tau}E_3}E_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{R}(E_2,E_3)E_1 &= \bar{\nabla}_{E_2}\bar{\nabla}_{E_3}E_1 - \bar{\nabla}_{E_3}\bar{\nabla}_{E_2}E_1 - \bar{\nabla}_{[E_2,E_3]}E_1 \\ &= \bar{\nabla}_{E_2}(\tau E_2) - \bar{\nabla}_{E_3}(-\tau E_3) - \bar{\nabla}_{2\epsilon\tau E_1}E_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{R}(E_3,E_1)E_2 &= \bar{\nabla}_{E_3}\bar{\nabla}_{E_1}E_2 - \bar{\nabla}_{E_1}\bar{\nabla}_{E_3}E_2 - \bar{\nabla}_{[E_3,E_1]}E_2 \\ &= \bar{\nabla}_{E_3}(\frac{1}{\tau}(2-\tau^2)E_3) - \bar{\nabla}_{E_1}(-\epsilon\tau E_1) - \bar{\nabla}_{\frac{2}{\tau}E_2}E_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{R}(E_1,E_2)E_2 &= \bar{\nabla}_{E_1}\bar{\nabla}_{E_2}E_2 - \bar{\nabla}_{E_2}\bar{\nabla}_{E_1}E_2 - \bar{\nabla}_{[E_1,E_2]}E_2 \\ &= -\bar{\nabla}_{E_2}(\frac{1}{\tau}(2-\tau^2)E_3) - \bar{\nabla}_{\frac{2}{\tau}E_3}E_2 \\ &= -\frac{1}{\tau}(2-\tau^2)\epsilon\tau E_1 - \frac{2}{\tau}(-\epsilon\tau E_1) \\ &= \epsilon\tau^2 E_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{R}(E_2,E_3)E_3 &= \bar{\nabla}_{E_2}\bar{\nabla}_{E_3}E_3 - \bar{\nabla}_{E_3}\bar{\nabla}_{E_2}E_3 - \bar{\nabla}_{[E_2,E_3]}E_3 \\ &= -\bar{\nabla}_{E_3}(\epsilon\tau E_1) - \bar{\nabla}_{2\epsilon\tau E_1}E_3 \\ &= -\epsilon\tau\tau E_2 - 2\epsilon\tau\frac{1}{\tau}(\tau^2-2)E_2 \\ &= \epsilon(4-3\tau^2)E_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{R}(E_3, E_1)E_1 &= \bar{\nabla}_{E_3}\bar{\nabla}_{E_1}E_1 - \bar{\nabla}_{E_1}\bar{\nabla}_{E_3}E_1 - \bar{\nabla}_{[E_3,E_1]}E_1 \\
&= -\bar{\nabla}_{E_1}(\tau E_2) - \bar{\nabla}_{\frac{2}{\tau}E_2}E_1 \\
&= -\tau\frac{1}{\tau}(2-\tau^2)E_3 - \frac{2}{\tau}(-\tau E_3) \\
&= \tau^2 E_3.
\end{aligned}$$

Esferas de Berger Lorentzianas

Uma outra variante dos ambientes que ora consideramos é impor em SU_2 a métrica lorentziana definida por

$$\langle E_1, E_1\rangle = -1, \quad \langle E_2, E_2\rangle = 1, \quad \langle E_3, E_3\rangle = 1.$$

Neste caso, mantemos a álgebra de Lie inalterada:

$$[E_1, E_2] = \frac{2}{\tau}E_3, \quad [E_2, E_3] = 2\tau E_1, \quad [E_3, E_1] = \frac{2}{\tau}E_2.$$

Obtemos, seguindo os mesmos cálculos de antes,

$$\begin{array}{ccc}
\bar{\nabla}_{E_1}E_1 = 0 & \bar{\nabla}_{E_2}E_1 = -\epsilon\tau E_3 & \bar{\nabla}_{E_3}E_1 = \epsilon\tau E_2 \\
\bar{\nabla}_{E_1}E_2 = \frac{1}{\tau}(2-\epsilon\tau^2)E_3 & \bar{\nabla}_{E_2}E_2 = 0 & \bar{\nabla}_{E_3}E_2 = -\tau E_1 \\
\bar{\nabla}_{E_1}E_3 = \frac{1}{\tau}(\epsilon\tau^2-2)E_2 & \bar{\nabla}_{E_2}E_3 = \tau E_1 & \bar{\nabla}_{E_3}E_3 = 0
\end{array} \tag{4.17}$$

$$\begin{array}{cc}
\Gamma_{31}^2 = -\Gamma_{21}^3 = \epsilon\tau & \Gamma_{23}^1 = -\Gamma_{32}^1 = \tau \\
\Gamma_{12}^3 = -\Gamma_{13}^2 = \frac{1}{\tau}(2-\epsilon\tau^2) & \text{outros } \Gamma_{ij}^k = 0.
\end{array} \tag{4.18}$$

O tensor de curvatura é, neste caso, determinado por

$$\begin{gathered}
\bar{R}(E_1, E_2)E_3 = \bar{R}(E_2, E_3)E_1 = \bar{R}(E_3, E_1)E_2 = 0 \\
\bar{R}(E_1, E_2)E_2 = \epsilon\tau^2 E_1, \quad \bar{R}(E_2, E_3)E_3 = (4-3\epsilon\tau^2)E_2 \\
\bar{R}(E_3, E_1)E_1 = \tau^2 E_3.
\end{gathered} \tag{4.19}$$

Observamos que, para nenhum valor real de τ, o espaço tem curvatura seccional constante, quando $\epsilon = -1$. Este tipo de ambiente foi recentemente estudado, e.g., em [20].

4.4 Representação Espinorial

4.4.1 Equações de Gauss-Weingarten

Seja $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$ uma imersão isométrica (tipo-espaço, quando $\epsilon = -1$) de uma superfície de Riemann Σ em $\mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$. Seja $z = u + iv$ um parâmetro conforme em Σ, de modo que a métrica (riemanniana) em Σ seja expressa por $ds^2_\Sigma = e^{2\omega}|dz|^2$. Escrevemos

$$X_z = Z^1E_1 + Z^2E_2 + Z^3E_3, \tag{4.20}$$

de modo que

$$\langle X_z, X_z\rangle = \epsilon(Z^1)^2 + (Z^2)^2 + (Z^3)^3 = 0, \tag{4.21}$$

$$\langle X_z, X_{\bar{z}}\rangle = \epsilon|Z^1|^2 + |Z^2|^2 + |Z^3|^3 = \frac{1}{2}e^{2\omega}. \tag{4.22}$$

Observamos que, graças a (1.36) e (4.13), o produto exterior, em termos do referencial $\{E_1, E_2, E_3\}$, satisfaz

$$E_1 \times E_2 = E_3, \quad E_2 \times E_3 = \epsilon E_1, \quad E_3 \times E_1 = E_2. \tag{4.23}$$

Assim, o campo normal da imersão, definido como

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = e^{-2\omega}X_u \times X_v,$$

pode ser expresso por

$$N = 2ie^{-2\omega}\{(\bar{Z}^2Z^3 - Z^2\bar{Z}^3)\epsilon E_1 + (Z^1\bar{Z}^3 - \bar{Z}^1Z^3)E_2 + (\bar{Z}^1Z^2 - Z^1\bar{Z}^2)E_3\}. \tag{4.24}$$

Uma vez que os símbolos de Christoffel Γ^k_{ij} - relativamente ao referencial $\{E_1, E_2, E_3\}$ - da conexão $\bar{\nabla}$ compatível com a métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$ em $\mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$ satisfazem (4.15), obtemos, a partir das equações em (1.46),

$$-\partial_{\bar{z}}Z^1 + \partial_z\bar{Z}^1 - (-Z^2\bar{Z}^3 + \bar{Z}^2Z^3)\epsilon\tau + (-Z^3\bar{Z}^2 + \bar{Z}^3Z^2)\epsilon\tau = 0,$$

$$-\partial_{\bar{z}}Z^2 + \partial_z\bar{Z}^2 - (-Z^3\bar{Z}^1 + \bar{Z}^3Z^1)(\frac{2}{\tau} - \tau) + (-Z^1\bar{Z}^3 + \bar{Z}^1Z^3)\tau = 0,$$

$$-\partial_{\bar{z}}Z^3 + \partial_z\bar{Z}^3 + (-Z^2\bar{Z}^1 + \bar{Z}^2Z^1)(\frac{2}{\tau} - \tau) - (-Z^1\bar{Z}^2 + \bar{Z}^1Z^2)\tau = 0,$$

equações que, por sua vez, reduzem-se respectivamente a

$$-\partial_{\bar{z}}Z^1 + \partial_z\bar{Z}^1 + 2\epsilon\tau(Z^2\bar{Z}^3 - \bar{Z}^2Z^3) = 0 \tag{4.25}$$

$$-\partial_{\bar{z}}Z^2 + \partial_z\bar{Z}^2 + \frac{2}{\tau}(\bar{Z}^1Z^3 - Z^1\bar{Z}^3) = 0, \tag{4.26}$$

$$-\partial_{\bar{z}}Z^3 + \partial_z\bar{Z}^3 + \frac{2}{\tau}(Z^1\bar{Z}^2 - \bar{Z}^1Z^2) = 0. \tag{4.27}$$

A partir de (1.47), (4.24) e, novamente, (4.15), obtemos as equações

$$\partial_{\bar{z}}Z^1 + \partial_z\bar{Z}^1 - (Z^2\bar{Z}^3 + \bar{Z}^2Z^3)\epsilon\tau + (Z^3\bar{Z}^2 + \bar{Z}^3Z^2)\epsilon\tau = 2iH\epsilon(\bar{Z}^2Z^3 - Z^2\bar{Z}^3),$$

$$\partial_{\bar z}Z^2+\partial_z\bar Z^2-(Z^3\bar Z^1+\bar Z^3Z^1)(\frac{2}{\tau}-\tau)+(Z^1\bar Z^3+\bar Z^1Z^3)\tau=2iH(Z^1\bar Z^3-\bar Z^1Z^3),$$

$$\partial_{\bar z}Z^3+\partial_z\bar Z^3-(Z^1\bar Z^2+\bar Z^1Z^2)\tau+(Z^2\bar Z^1+\bar Z^2Z^1)(\frac{2}{\tau}-\tau)=2iH(\bar Z^1Z^2-Z^1\bar Z^2),$$

as quais podem ser respectivamente reescritas como

$$\partial_{\bar z}Z^1+\partial_z\bar Z^1=2iH\epsilon(\bar Z^2Z^3-Z^2\bar Z^3), \tag{4.28}$$

$$\partial_{\bar z}Z^2+\partial_z\bar Z^2+2(\bar Z^1Z^3+Z^1\bar Z^3)(\tau-\frac{1}{\tau})=2iH(Z^1\bar Z^3-\bar Z^1Z^3), \tag{4.29}$$

$$\partial_{\bar z}Z^3+\partial_z\bar Z^3-2(\bar Z^1Z^2+Z^1\bar Z^2)(\tau-\frac{1}{\tau})=2iH(\bar Z^1Z^2-Z^1\bar Z^2). \tag{4.30}$$

Por fim, as equações (1.48) são escritas na forma

$$\partial_zZ^1=2\omega_zZ^1+ie^{-2\omega}q(\bar Z^2Z^3-Z^2\bar Z^3), \tag{4.31}$$

$$\partial_zZ^2+2\Big(\tau-\frac{1}{\tau}\Big)Z^1Z^3=2\omega_zZ^2+i\epsilon e^{-2\omega}q(Z^1\bar Z^3-\bar Z^1Z^3), \tag{4.32}$$

$$\partial_zZ^3-2\Big(\tau-\frac{1}{\tau}\Big)Z^1Z^2=2\omega_zZ^3+i\epsilon e^{-2\omega}q(\bar Z^1Z^2-Z^1\bar Z^2). \tag{4.33}$$

Seja $\hat\omega$ a forma de Maurer-Cartan em $\mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$. Portanto $\hat\omega(E_a)=\hat e_a$. Demonstramos, então, o seguinte resultado de integrabilidade para superfícies em $\mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$.

Proposição 4.4.1. *Seja α uma 1-forma definida em Σ com valores em $\mathfrak{g}$ localmente expressa por*

$$\alpha=\hat e_a\otimes\big(Z^a\mathrm{d}z+\bar Z^a\mathrm{d}\bar z\big),$$

para funções complexas $Z^a(z,\bar z)$ definidas em Σ. Supomos que estas funções satisfazem o sistema (4.25)-(4.33) e as condições iniciais

$$\big(\epsilon(Z^1)^2+(Z^2)^2+(Z^3)^2\big)(z_0)=0,\quad\big(\epsilon|Z^1|^2+|Z^2|^2+|Z^3|^2\big)(z_0)=\frac{1}{2}e^{2\omega(z_0,\bar z_0)},$$

onde $\omega(z\,\bar z)>0$, $H(z,\bar z)$ e $q(z,\bar z)$ são funções dadas em Σ. Então, existe uma imersão isométrica $X:\Sigma\to\mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$ tal que

$$X^{-1}\mathrm{d}X=\alpha,$$

isto é, X é uma primitiva de Darboux de α, $X^*\hat\omega=\alpha$. Além disso, esta imersão tem métrica prescrita

$$e^{2\omega}|\mathrm{d}z|^2$$

e segunda forma fundamental

$$\frac{q}{2}\mathrm{d}z^2+\frac{H}{2}e^{2\omega}\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar z+\frac{\bar q}{2}\mathrm{d}\bar z^2.$$

Prova. Definimos a 1-forma definida em $\Sigma \times \mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$ com valores em $\mathfrak{g}$, dada por

$$\Pi = \pi_\Sigma^* \alpha - \pi^*_{\mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}} \hat{\omega}.$$

Então, podemos verificar que a correspondência

$$\mathcal{D}_{(p,g)} = \ker \Pi_{(p,g)}, \quad (p,g) \in M \times \mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$$

é uma distribuição integrável. Verificamos primeiro que tem posto constante. Considera-se, para tanto, a restrição

$$\pi_{\Sigma * p} : \mathcal{D}_{(p,g)} \to T_p\Sigma,$$

demonstrando que tem núcleo trivial. De fato, dado $(v,w) \in \mathcal{D}_{(p,g)}$ com

$$v = \pi_{\Sigma * p}(v,w) = 0,$$

temos

$$0 = \hat{\omega}(w) - \alpha(v) = \hat{\omega}(w)$$

e, portanto, $w = 0$, posto que $\hat{\omega}_g : T_g\mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau} \to T_e\mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$ é um isomorfismo. Concluímos que $(v,w) = 0$, como desejado.

Finalizamos mostrando que $\pi_{\Sigma * p} : \mathcal{D}_{(p,g)} \to T_p\Sigma$ é um epimorfismo. De fato, dado $v \in T_p\Sigma$, seja $w_e = \alpha(v) \in T_e\mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$. Consideramos, então, o campo invariante à esquerda $W \in \mathfrak{g}$ gerado por w_e, de modo que

$$\hat{\omega}_g(W(g)) - \alpha(v) = w_e - w_e = 0,$$

ou seja, de modo que

$$\Pi(v, W(g)) = 0.$$

Desta forma, demonstramos que a cada $v \in T_p\Sigma$ corresponde um vetor $(v, W(g)) \in \mathcal{D}_{(p,g)}$. Deduzimos, enfim, que a distribuição tem posto constante, igual a 2.

Verificamos a seguir que é uma distribuição integrável. Para tanto, calculamos, omitindo projeções,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Pi &= \mathrm{d}\alpha - \mathrm{d}\hat{\omega} \\
&= \hat{e}_a \otimes \mathrm{d}\big(Z^a \mathrm{d}z + \bar{Z}^a \mathrm{d}\bar{z}\big) - \mathrm{d}\hat{\omega} \\
&= \hat{e}_a \otimes \big(\partial_{\bar{z}} Z^a \mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z + \partial_z \bar{Z}^a \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}\big) + [\hat{\omega}, \hat{\omega}] \\
&= \hat{e}_a \otimes \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}\big(\partial_z \bar{Z}^a - \partial_{\bar{z}} Z^a\big) + [\hat{\omega}, \hat{\omega}].
\end{aligned}$$

Então, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Pi &= \hat{e}_a \otimes \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}\big(\partial_z \bar{Z}^a - \partial_{\bar{z}} Z^a\big) + [\alpha - \Pi, \alpha - \Pi] \\ &= \hat{e}_a \otimes \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}\big(\partial_z \bar{Z}^a - \partial_{\bar{z}} Z^a\big) + [\alpha, \alpha] - [\alpha, \Pi] - [\Pi, \alpha] + [\Pi, \Pi], \end{aligned}$$

o que implica que, módulo Π, vale

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Pi &= \hat{e}_a \otimes \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}\big(\partial_z \bar{Z}^a - \partial_{\bar{z}} Z^a\big) + [\alpha - \Pi, \alpha - \Pi] \\ &= \hat{e}_a \otimes \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}\big(\partial_z \bar{Z}^a - \partial_{\bar{z}} Z^a\big) + [\hat{e}_a, \hat{e}_b] \otimes \big(Z^a \mathrm{d}z + \bar{Z}^a \mathrm{d}\bar{z}\big) \wedge \big(Z^b \mathrm{d}z + \bar{Z}^b \mathrm{d}\bar{z}\big) \\ &= \hat{e}_c \otimes \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}\big(\partial_z \bar{Z}^c - \partial_{\bar{z}} Z^c\big) + \hat{e}_c \otimes \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}\sigma^c_{ab}\big(Z^a \bar{Z}^b - \bar{Z}^a Z^b\big), \end{aligned}$$

onde σ^c_{ab} são as constantes de estrutura de $\mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$.

Por sua vez, as equações (4.25)-(4.27) implicam que

$$\partial_z \bar{Z}^c - \partial_{\bar{z}} Z^c = \Gamma^c_{ba}\big(Z^a \bar{Z}^b - \bar{Z}^a Z^b\big).$$

Portanto, segue que

$$\mathrm{d}\Pi = \hat{e}_c \otimes \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}\,\big(\Gamma^c_{ba} + \sigma^c_{ab}\big)\big(Z^a \bar{Z}^b - \bar{Z}^a Z^b\big).$$

Entretanto, devido ao fato de que a conexão em $\mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$ é compatível com uma métrica invariante à esquerda, os símbolos $\Gamma^c_{ba} + \sigma^c_{ab}$ são simétricos com respeito aos índices inferiores. Então, concluímos que

$$\mathrm{d}\Pi = 0$$

módulo Π. Assim, a distribuição é integrável. Visto que $\pi_{\Sigma * p} : \mathcal{D}_{(p,g)} \to T_p\Sigma$ é um isomorfismo linear, demonstra-se que as folhas integrais da distribuição são, localmente, gráficos de aplicações de abertos de Σ em $\mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$. Um argumento padrão de monodromia (v. [37]) garante que, de fato, uma folha integral é gráfico de uma imersão $X : \Sigma \to \mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$.

Concretamente, dado $(v, w) \in \mathcal{D}_{(p,g)}$, com $g = X(p)$, temos $w = X_{*p} \cdot v$. Daí,

$$\hat{\omega}(X_{*p} \cdot v) - \alpha(v) = 0$$

ou seja,

$$\hat{\omega}(X_{*p} \cdot v) = \sum_{i=1}^{3} \hat{e}_a\big(Z^a \mathrm{d}z(v) - \bar{Z}^a \mathrm{d}\bar{z}(v)\big).$$

Portanto, aplicando-se a ambos os lados desta equação a diferencial L_{g*e} da translação à esquerda por $g = X(p)$, temos

$$X_{*p} \cdot v = \sum_{i=1}^{3} E_a|_{X(p)}\big(Z^a \mathrm{d}z(v) - \bar{Z}^a \mathrm{d}\bar{z}(v)\big).$$

Isto obviamente acarreta que

$$X_z = E_a|_X Z^a, \quad X_{\bar{z}} = E_a|_X \bar{Z}^a. \tag{4.34}$$

Sendo assim, a expressão (4.24) define um campo normal ao longo de X. Além disso, diferenciando (4.34) com respeito a z temos, das equações (4.31)-(4.33),

$$X_{zz} = \sum_{k=1}^{3}\{\partial_z Z^k + \sum_{i,j=1}^{3} Z^i Z^j \Gamma_{ij}^k\}E_k|_X = 2\omega_z X_z + \frac{\epsilon}{2}qN,$$

o que implica que

$$\langle X_{zz}, X_{\bar{z}}\rangle = 2\omega_z\langle X_z, X_{\bar{z}}\rangle \quad \text{e} \quad \langle X_{zz}, X_z\rangle = 2\omega_z\langle X_z, X_z\rangle.$$

Da mesma forma, as equações (4.25)-(4.30) implicam que

$$X_{z\bar{z}} = \frac{\epsilon}{2}He^{2\omega}N$$

o que, por sua vez, garante que

$$\langle X_{z\bar{z}}, X_z\rangle = 0.$$

Portanto,

$$\partial_z\langle X_z, X_{\bar{z}}\rangle = \langle X_{zz}, X_{\bar{z}}\rangle + \langle X_z, X_{z\bar{z}}\rangle = \langle X_{zz}, X_{\bar{z}}\rangle = 2\omega_z\langle X_z, X_{\bar{z}}\rangle,$$

logo

$$\langle X_z, X_{\bar{z}}\rangle = Ke^{2\omega},$$

donde, pela condição inicial sob a função $\langle X_z, X_{\bar{z}}\rangle$, obtemos que métrica induzida em Σ pela imersão X é determinada por

$$\langle X_z, X_{\bar{z}}\rangle = \frac{1}{2}e^{2\omega}.$$

Além disso,

$$\partial_z\langle X_z, X_z\rangle = 2\langle X_{zz}, X_z\rangle = 4\omega_z\langle X_z, X_z\rangle,$$

logo

$$\langle X_z, X_z\rangle = Ce^{4\omega},$$

segue, pela condição inicial sob a função $\langle X_z, X_z\rangle$, que a imersção é conforme. Considerando estes fatos, concluímos que N é um campo normal unitário. Assim, as equações (4.31)-(4.32) implicam que q é a diferencial de Hopf da imersão e as equações (4.28)-(4.29) mostram que H é sua curvatura média.

Estes argumentos encerram a prova. $\square$

4.4.2 Uma Equação de Dirac

Observamos que a equação polinomial dada em (4.21) tem uma solução da forma

$$Z^1 = \psi_1\bar{\psi}_2, \quad Z^2 = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2), \quad Z^3 = \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2), \tag{4.35}$$

com as funções ψ_1 e ψ_2 verificando

$$Z^2 + iZ^3 = -\epsilon\psi_1^2, \quad \bar{Z}^2 + i\bar{Z}^3 = \psi_2^2. \tag{4.36}$$

Além disso, a expressão da métrica de Σ em termos de ψ_1 e ψ_2 é

$$e^{\omega} = |\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2 \tag{4.37}$$

e, uma vez que,

$$\bar{Z}^2 Z^3 - Z^3\bar{Z}^3 = \frac{i}{2}(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2),$$

$$Z^1\bar{Z}^3 - \bar{Z}^1 Z^3 = -\frac{i}{2}(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2),$$

$$\bar{Z}^1 Z^2 - Z^1\bar{Z}^2 = \frac{1}{2}(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2),$$

usando (4.24) e (4.37), deduzimos que a expressão do vetor normal em termos das funções ψ_1 e ψ_2 é

$$N = e^{-w}\{(|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2)E_1 + (\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)E_2 + i(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2)E_3\}. \tag{4.38}$$

Deduzimos, agora, as expressões explícitas para os potenciais U e V que satisfazem (2.28). Ao somarmos a equação (4.25) à equação (4.26) multiplicada por i, obtemos

$$-\partial_{\bar{z}}(Z^1 + iZ^2) + \partial_z(\bar{Z}^1 + i\bar{Z}^2) + \frac{2}{\tau}\bar{Z}^1(Z^3 - iZ^2) - \frac{2}{\tau}Z^1(\bar{Z}^3 - i\bar{Z}^2) = 0,$$

que pode ser reescrita como

$$-\partial_{\bar{z}}(Z^1 + iZ^2) + \partial_z(\bar{Z}^1 + i\bar{Z}^2) - \frac{2i}{\tau}\bar{Z}^1(Z^2 + iZ^3) + \frac{2i}{\tau}Z^1(\bar{Z}^2 + i\bar{Z}^3) = 0$$

e ao usarmos (4.36), se transforma em

$$-\partial_{\bar{z}}(-\epsilon\psi_1^2) + \partial_z(\psi_2^2) - \frac{2i}{\tau}\bar{\psi}_1\psi_2(-\epsilon\psi_1^2) + \frac{2i}{\tau}\psi_1\bar{\psi}_2(\psi_2^2) = 0,$$

que é equivalente a

$$2\epsilon\psi_1\partial_{\bar z}\psi_1 + 2\psi_2\partial_{\bar z}\psi_2 + \frac{2i}{\tau}\psi_1\psi_2(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) = 0.$$

Por (2.28), segue que

$$\epsilon V - U = -\frac{i}{\tau}(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2). \tag{4.39}$$

Agora, ao somarmos a expressão (4.28) à equação (4.29) multiplicada por i, obtemos

$$\begin{aligned}\partial_{\bar z}(Z^1 + iZ^2) + \partial_z(\bar Z^1 + i\bar Z^2) + 2(\tau - \frac{1}{\tau})\{\bar Z^1(Z^3 - iZ^2) + Z^1(\bar Z^3 - i\bar Z^2)\}\\ = 2iH\{Z^1(\bar Z^3 - i\bar Z^2) - \bar Z^1(Z^3 - iZ^2)\},\end{aligned}$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\partial_{\bar z}(Z^1 + iZ^2) + \partial_z(\bar Z^1 + i\bar Z^2) - 2i(\tau - \frac{1}{\tau})\{\bar Z^1(Z^2 + iZ^3) + Z^1(\bar Z^2 + i\bar Z^3)\}\\ = 2H\{Z^1(\bar Z^2 + i\bar Z^3) - \bar Z^1(Z^2 + iZ^3)\}.\end{aligned}$$

Usando as expressões em (4.36), assim como a definição de Z^3 em (4.35), deduzimos a equação

$$\begin{aligned}\partial_{\bar z}(-\epsilon\psi_1^2) + \partial_z(\psi_2^2) - 2i(\tau - \frac{1}{\tau})\{\bar\psi_1\psi_2(-\epsilon\psi_1^2) + \psi_1\bar\psi_2(\psi_2^2)\}\\ = 2H\{\psi_1\bar\psi_2(\psi_2^2) - \bar\psi_1\psi_2(-\epsilon\psi_1^2)\},\end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned}-2\epsilon\psi_1\partial_{\bar z}\psi_1 + 2\psi_2\partial_z\psi_2 - 2i(\tau - \frac{1}{\tau})\psi_1\psi_2(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\\ = 2H\psi_1\psi_2(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2),\end{aligned}$$

expressão que, por sua vez, nos fornece

$$\epsilon V + U = -H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) - i(\tau - \frac{1}{\tau})(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2), \tag{4.40}$$

onde, utilizamos novamente (2.28). Assim, as expressões (4.39) e (4.40) geram um sistema de equações lineares em U e V, cuja solução é

$$U = -\frac{1}{2}\{(H - \frac{i}{\tau})(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i(\tau - \frac{1}{\tau})(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\}, \tag{4.41}$$

$$V = -\frac{\epsilon}{2}\{(H + \frac{i}{\tau})(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i(\tau - \frac{1}{\tau})(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\}. \tag{4.42}$$

Estos cálculos permitem demostrar a seguinte

Proposição 4.4.2. *Seja $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$ uma imersão isométrica de uma superfície de Riemann Σ em $\mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$. Então o campo de espinores*

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

definido pelas equações (4.20) *e* (4.35)*, satisfaz a equação de Dirac $\mathcal{D}\psi = 0$, onde*

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_z \\ -\partial_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix},$$

$$U = -\frac{1}{2}\{(H - \frac{i}{\tau})(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i(\tau - \frac{1}{\tau})(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\}$$

e

$$V = -\frac{\epsilon}{2}\{(H + \frac{i}{\tau})(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i(\tau - \frac{1}{\tau})(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\}.$$

Observação 8. *No caso da esfera* SU_2*, isto é, $\epsilon = 1$ e $\tau = 1$, obtemos*

$$U = -\frac{1}{2}(H - i)(|\psi_2|^2 + |\psi_1|^2), \quad V = -\frac{1}{2}(H + i)(|\psi_2|^2 + |\psi_1|^2)$$

e no caso do espaço AdS $\mathrm{SU}_{1,1}$*, isto é, $\epsilon = -1$ e $\tau = 1$, obtemos*

$$U = -\frac{1}{2}(H - i)(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2), \quad V = \frac{i}{2}(H + i)(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2)\}.$$

A Proposição 4.4.1 pode ser enunciada em termos de ψ_1 e ψ_2 na seguinte forma, o que assegura uma recíproca para a Proposição 4.4.2.

Teorema 4.4.1. *Consideramos, em uma superfície de Riemann simplesmente conexa Σ, dados $\psi_1\sqrt{dz}$, $\psi_2\sqrt{dz}$, satisfazendo a equação de Dirac $\mathcal{D}\psi = 0$, onde*

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_z \\ -\partial_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix},$$

$$U = -\frac{1}{2}\{(H - \frac{i}{\tau})(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i(\tau - \frac{1}{\tau})(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\}$$

e

$$V = -\frac{\epsilon}{2}\{(H + \frac{i}{\tau})(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i(\tau - \frac{1}{\tau})(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\}.$$

Supomos que ψ_1 e ψ_2 satisfazem o sistema de primeira ordem

$$\begin{pmatrix} \epsilon\bar{\psi}_1 & \psi_2 \\ -\bar{\psi}_2 & \psi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_z\psi_1 \\ \partial_z\bar{\psi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\omega}\omega_z - i(\tau - \frac{1}{\tau})\psi_1\bar{\psi}_2(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2) \\ \frac{q}{2} + 2i(\frac{1}{\tau} - \tau)\psi_1^2\bar{\psi}_2^2 \end{pmatrix} \tag{4.43}$$

onde $\omega > 0$, q e H são funções definidas em Σ. Então, existe uma imersão isométrica $X : \Sigma \to \mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$ com curvatura média H, tal que

$$\mathrm{d}X = X_z dz + X_{\bar{z}} d\bar{z}$$

ou seja, representada pelas fórmulas (4.20) *e* (4.35)*.*

Prova. A prova do teorema segue da Proposição 4.4.1 se demonstrarmos que o sistema de primeira ordem (4.43) provém das equações (4.31)-(4.33).

Para tanto, somamos a equação (4.32) à equação (4.33) multiplicada por i, obtendo

$$\partial_z(Z^2+iZ^3)+2\Big(\tau-\frac{1}{\tau}\Big)Z^1\big(Z^3-iZ^2\big) = 2\omega_z\big(Z^2+iZ^3\big)+i\epsilon e^{-2\omega}q\big(Z^1(\bar{Z}^3-i\bar{Z}^2)-\bar{Z}^1(Z^3-iZ^2)\big),$$

o que pode ser reescrito, usando (4.36) e a expressão $Z^1 = \psi_1\bar{\psi}_2$, como

$$-\epsilon\partial_z\psi_1^2 + 2i\epsilon\Big(\tau - \frac{1}{\tau}\Big)\psi_1^3\bar{\psi}_2 = -2\epsilon\omega_z\psi_1^2 + \epsilon e^{-2\omega}q\big(\psi_1\psi_2|\psi_2|^2 + \epsilon\psi_1\psi_2|\psi_1|^2\big),$$

que vem a ser, levando em conta a expressão (4.37), após divisão por -2ϵ,

$$\psi_1\partial_z\psi_1 - i\Big(\tau - \frac{1}{\tau}\Big)\psi_1^3\bar{\psi}_2 = \omega_z\psi_1^2 - e^{-\omega}\,\frac{q}{2}\psi_1\psi_2,$$

expressão equivalente a

$$\psi_1\partial_z\psi_1 = \psi_1\Big(\omega_z\psi_1 + i\big(\tau - \frac{1}{\tau}\big)\psi_1^2\bar{\psi}_2 - e^{-\omega}\,\frac{q}{2}\psi_2\Big). \tag{4.44}$$

Agora, reescrevemos a equação (4.31) como

$$\partial_z(\psi_1\bar{\psi}_2) = 2\omega_z\psi_1\bar{\psi}_2 - e^{-2\omega}\frac{q}{2}\big(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2\big)\big(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2\big),$$

donde obtemos, considerando (4.37),

$$\bar{\psi}_2\partial_z\psi_1 + \psi_1\partial_z\bar{\psi}_2 = 2\omega_z\psi_1\bar{\psi}_2 - e^{-\omega}\,\frac{q}{2}\big(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2\big). \tag{4.45}$$

Supondo, momentaneamente, $\psi_1 \neq 0$, e substituindo a equação

$$\partial_z\psi_1 = \omega_z\psi_1 + i\big(\tau - \frac{1}{\tau}\big)\psi_1^2\bar{\psi}_2 - e^{-\omega}\,\frac{q}{2}\psi_2$$

no primeiro termo do lado direito em (4.45), obtemos

$$\psi_1\partial_z\bar{\psi}_2 = \psi_1\Big(\omega_z\bar{\psi}_2 - i\big(\tau - \frac{1}{\tau}\big)\psi_1\bar{\psi}_2^2 + \epsilon e^{-\omega}\,\frac{q}{2}\bar{\psi}_1\Big). \tag{4.46}$$

Obviamente, as equações (4.44) e (4.46) nada informam em pontos em que $\psi_1 = 0$. O sistema de equações

$$\begin{aligned}\partial_z\psi_1 &= \omega_z\psi_1 + i\big(\tau - \frac{1}{\tau}\big)\psi_1^2\bar{\psi}_2 - e^{-\omega}\frac{q}{2}\psi_2, &(4.47)\\ \partial_z\bar{\psi}_2 &= \omega_z\bar{\psi}_2 - i\big(\tau - \frac{1}{\tau}\big)\psi_1\bar{\psi}_2^2 + \epsilon e^{-\omega}\frac{q}{2}\bar{\psi}_1 &(4.48)\end{aligned}$$

equivale, nos pontos em que $\psi_1 \neq 0$, ao sistema (4.31)-(4.33). □

Observamos que o sistema (4.43) pode ser obtido da seguinte maneira. Inicialmente, calculamos a derivada em relação a z da expressão da métrica, obtendo

$$e^{\omega}\omega_z = \psi_2\partial_z\bar{\psi}_2 + \epsilon\bar{\psi}_1\partial_z\psi_1 + (\epsilon\bar{V} - U)\psi_1\bar{\psi}_2,$$

donde, pela expressão dos espinores U e V dados (4.41) e (4.42), obtemos

$$\psi_2\partial_z\bar{\psi}_2 + \epsilon\bar{\psi}_1\partial_z\psi_1 = e^{\omega}\omega_z - i(\tau - \frac{1}{\tau})\psi_1\bar{\psi}_2(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2). \quad (4.49)$$

Continuamos, determinando a expressão da diferencial de Hopf em termos das funções ψ_1 e ψ_2. Temos, de (4.35) e (4.38),

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\partial_z(Z^i)\langle E_i, N\rangle &= e^{-\omega}\{\epsilon(\psi_1\partial_z\bar{\psi}_2 + \bar{\psi}_2\partial_z\psi_1)(|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2)\\ &+ (\bar{\psi}_2\partial_z\bar{\psi}_2 - \epsilon\psi_1\partial_z\psi_1)(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)\\ &- (\bar{\psi}_2\partial_z\bar{\psi}_2 + \epsilon\psi_1\partial_z\psi_1)(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2)\}\\ &= e^{-\omega}\{[\epsilon\psi_1(|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2) + \bar{\psi}_2(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2) - \bar{\psi}_2(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2)]\partial_z\bar{\psi}_2\\ &+ [\bar{\psi}_2(|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2) - \psi_1(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2) - \psi_1(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2)]\epsilon\partial_z\psi_1\}\\ &= e^{-\omega}\{[\psi_1(\epsilon|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) + 2\psi_1|\psi_2|^2]\partial_z\bar{\psi}_2\\ &+ [\bar{\psi}_2(|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2) - 2\bar{\psi}_2|\psi_1|^2]\epsilon\partial_z\psi_1\}\\ &= e^{-\omega}\{\psi_1(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)\partial_z\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_2(|\psi_1|^2 + \epsilon|\psi_2|^2)\epsilon\partial_z\psi_1\}\\ &= e^{-\omega}(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)(\psi_1\partial_z\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_2\partial_z\psi_1)\\ &= \psi_1\partial_z\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_2\partial_z\psi_1.\end{aligned}$$

Por outro lado, de (4.35) e (4.15), obtemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{ijk} Z^i Z^j \Gamma_{ij}^k \langle E_k, N\rangle \ &= \ \{Z^1 Z^3 \tau - Z^1 Z^3 (\frac{2}{\tau} - \tau)\}\langle E_2, N\rangle \\
&+ \{-Z^1 Z^2 \tau + Z^1 Z^2 (\frac{2}{\tau} - \tau)\}\langle E_3, N\rangle \\
&= \ -2(\frac{1}{\tau} - \tau) Z^1 Z^3 \langle E_2, N\rangle + 2(\frac{1}{\tau} - \tau) Z^1 Z^2 \langle E_3, N\rangle \\
&= \ 2(\frac{1}{\tau} - \tau) Z^1 \{Z^2 \langle E_3, N\rangle - Z^3 \langle E_2, N\rangle\} \\
&= \ ie^{-\omega}\psi_1 \bar{\psi}_2 (\frac{1}{\tau} - \tau)\{(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2) - (\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)\} \\
&= \ ie^{-\omega}\psi_1 \bar{\psi}_2 (\frac{1}{\tau} - \tau)\{-2\psi_1\bar{\psi}_2(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)\} \\
&= \ -2ie^{-\omega}\psi_1^2 \bar{\psi}_2^2 (\frac{1}{\tau} - \tau)(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) \\
&= \ -2i\psi_1^2 \bar{\psi}_2^2 (\frac{1}{\tau} - \tau).
\end{aligned}
$$

Combinando estas duas últimas relações, em função de (1.49), deduzimos

$$
\psi_1 \partial_z \bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_2 \partial_z \psi_1 = \frac{q}{2} + 2i(\frac{1}{\tau} - \tau)\psi_1^2 \bar{\psi}_2^2. \tag{4.50}
$$

4.5 Uma Diferencial Quadrática Holomorfa

Calculamos, no que segue, $\langle \bar{R}(\partial_{\bar{z}}, \partial_z)\partial_z, N\rangle$ em termos das funções ψ_1 e ψ_2. Como no cápitulo anterior, temos

$$
\begin{aligned}
&\langle \bar{R}(\partial_{\bar{z}}, \partial_z)\partial_z, N\rangle \\
&= \ (\bar{Z}^1 Z^2 - Z^1 \bar{Z}^2)\{Z^1 N^2 \langle \bar{R}(E_1, E_2)E_1, E_2\rangle + Z^2 N^1 \langle \bar{R}(E_1, E_2)E_2, E_1\rangle\} \\
&+ (\bar{Z}^1 Z^3 - Z^1 \bar{Z}^3)\{Z^1 N^3 \langle \bar{R}(E_1, E_3)E_1, E_3\rangle + Z^3 N^1 \langle \bar{R}(E_1, E_3)E_3, E_1\rangle\} \\
&+ (\bar{Z}^2 Z^3 - Z^2 \bar{Z}^3)\{Z^2 N^3 \langle \bar{R}(E_2, E_3)E_2, E_3\rangle + Z^3 N^2 \langle \bar{R}(E_2, E_3)E_3, E_2\rangle\}
\end{aligned}
$$

onde, as funções N^i, $(i = 1, 2, 3)$ são as componente do vetor normal N em relação ao referencial $\{E_1, E_2, E_3\}$. De (4.16) segue que

$$
\begin{aligned}
&\langle \bar{R}(\partial_{\bar{z}}, \partial_z)\partial_z, N\rangle = (\bar{Z}^1 Z^2 - Z^1\bar{Z}^2)\{-Z^1N^2\epsilon\tau^2\langle E_1, E_1\rangle + Z^2N^1\epsilon\tau^2\langle E_1, E_1\rangle\} \\
&+ (\bar{Z}^1Z^3 - Z^1\bar{Z}^3)\{-Z^1N^3\tau^2 + Z^3N^1\tau^2\langle E_3, E_3\rangle\} \\
&+ (\bar{Z}^2Z^3 - Z^2\bar{Z}^3)\{-Z^2N^3\epsilon(4-3\tau^2) + Z^3N^2\epsilon(4-3\tau^2)\} \\
&= \tau^2(\bar{Z}^1Z^2 - Z^1\bar{Z}^2)(-Z^1N^2 + Z^2N^1) + \tau^2(\bar{Z}^1Z^3 - Z^1\bar{Z}^3)(-Z^1N^3 + Z^3N^1) \\
&+ (4-3\tau^2)(\bar{Z}^2Z^3 - Z^2\bar{Z}^3)\epsilon(-Z^2N^3 + Z^3N^2) \\
&= \tau^2\frac{1}{2ie^{-2\omega}}N^3(Z^2N^1 - Z^1N^2) - \tau^2\frac{1}{2ie^{-2\omega}}N^2(Z^3N^1 - Z^1N^3) \\
&+ (4-3\tau^2)\frac{1}{2ie^{-2\omega}}N^1(Z^3N^2 - Z^2N^3) \\
&= -\frac{i}{2}e^{2\omega}\tau^2\{Z^2N^1N^3 - Z^1N^2N^3 - Z^3N^1N^2 + Z^1N^2N^3 \\
&- 3Z^3N^1N^2 + 3Z^2N^1N^3\} - 2ie^{2\omega}N^1(Z^3N^2 - Z^2N^3) \\
&= -\frac{i}{2}e^{2\omega}\tau^2\{4Z^2N^1N^3 - 4Z^3N^1N^2\} + 2ie^{2\omega}N^1(Z^2N^3 - Z^3N^2) \\
&= 2ie^{2\omega}N^1(Z^2N^3 - Z^3N^2)(1-\tau^2)
\end{aligned}
$$

onde, acima, usamos (4.24). De (4.38) e (4.35), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\langle \bar{R}(\partial_{\bar{z}}, \partial_z)\partial_z, N\rangle \;=\; 2i(1-\tau^2)e^{2\omega}N^1\{Z^2N^3 - Z^3N^2\} \\
&= 2i(1-\tau^2)e^{2\omega}e^{-w}(|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2)\{\frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)e^{-\omega}i(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2) \\
&- \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)e^{-\omega}(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)\} \\
&= -(1-\tau^2)(|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2)\{\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2^3 - \psi_1\bar{\psi}_2|\psi_2|^2 - \epsilon\psi_1\bar{\psi}_2|\psi_1|^2 + \epsilon\psi_1^3\psi_2 \\
&- (\psi_1\bar{\psi}_2|\psi_2|^2 + \bar{\psi}_2^3\bar{\psi}_1 + \epsilon\psi_1^3\psi_2 + \epsilon\psi_1\bar{\psi}_2|\psi_1|^2)\} \\
&= (1-\tau^2)(|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2)2(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)\psi_1\bar{\psi}_2 \\
&= -2\epsilon(1-\tau^2)(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)\psi_1\bar{\psi}_2 \\
&= -2\epsilon(1-\tau^2)(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4)\psi_1\bar{\psi}_2.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}}(Z^1) \;&=\; \partial_{\bar{z}}(\psi_1\bar{\psi}_2) \;=\; \psi_1\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_2 + \bar{\psi}_2\partial_{\bar{z}}\psi_1 \\
&=\; \psi_1(-\bar{U}\bar{\psi}_1) + \bar{\psi}_2V\psi_2 \;=\; -\bar{U}|\psi_1|^2 + V|\psi_2|^2.
\end{aligned}
$$

Logo, por (4.41) e (4.42), obtemos

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar z}(Z^1) &= -\bar U|\psi_1|^2 + V|\psi_2|^2\\
&= \frac{1}{2}|\psi_1|^2\{(H+\frac{i}{\tau})(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2) - i(\tau-\frac{1}{\tau})(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)\}\\
&- \frac{\epsilon}{2}|\psi_2|^2\{(H+\frac{i}{\tau})(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2) + i(\tau-\frac{1}{\tau})(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)\}\\
&= \frac{1}{2}(H+\frac{i}{\tau})(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)\{|\psi_1|^2-\epsilon|\psi_2|^2\}\\
&+ \frac{1}{2}i(\tau-\frac{1}{\tau})(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)\{-|\psi_1|^2-\epsilon|\psi_2|^2\}\\
&= -\frac{\epsilon}{2}(H+\frac{i}{\tau})(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)\{|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2\}\\
&- \frac{\epsilon}{2}i(\tau-\frac{1}{\tau})(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)\{|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2\}\\
&= -\frac{\epsilon}{2}(|\psi_2|^4-|\psi_1|^4)\{H+\frac{i}{\tau}+i(\tau-\frac{1}{\tau})\}\\
&= -\frac{\epsilon}{2}(H+i\tau)(|\psi_2|^4-|\psi_1|^4).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\partial_{\bar z}(Z^1)^2 = 2Z^1\partial_{\bar z}Z^1 = -\epsilon(H+i\tau)(|\psi_2|^4-|\psi_1|^4)\psi_1\bar\psi_2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle \bar R(\partial_{\bar z},\partial_z)\partial_z, N\rangle &= -2\epsilon(1-\tau^2)(|\psi_2|^4-|\psi_1|^4)\psi_1\bar\psi_2\\
&= -2\epsilon(1-\tau^2)\left(\frac{-\epsilon}{H+i\tau}\partial_{\bar z}(Z^1)^2\right)\\
&= 2(1-\tau^2)\frac{1}{H+i\tau}\partial_{\bar z}(Z^1)^2\\
&= 2(1-\tau^2)\left\{\partial_{\bar z}\left(\frac{(Z^1)^2}{H+i\tau}\right) - \partial_{\bar z}\left(\frac{1}{H+i\tau}\right)(Z^1)^2\right\}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\left(\frac{q}{2} - 2(1-\tau^2)\frac{(Z^1)^2}{H+i\tau}\right)_{\bar z} = \frac{\epsilon}{2}e^{2\omega}H_z - 2(1-\tau^2)\left(\frac{1}{H+i\tau}\right)_{\bar z}(Z^1)^2. \tag{4.51}$$

Esta fórmula fornece

Proposição 4.5.1. *Para uma superfície de curvatura média constante em $\mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$, a forma diferencial quadrática*

$$\tilde Q dz^2 = \left(\frac{q}{2} - 2(1-\tau^2)\frac{(Z^1)^2}{H+i\tau}\right)dz^2$$

é holomorfa.

Além disso,

Proposição 4.5.2. *Se a diferencial $\tilde{Q}dz^2$ é holomorfa, então a superfície na esfera de Berger $\mathbb{S}^3_{1,\tau}$ que verifica $1-\tau^2=\tau^2$ tem curvatura média constante.*

Prova. Procedemos por contradição. Suponha que, em um aberto, tenhamos $H_z \neq 0$. Logo, de (4.51),

$$\frac{\epsilon}{2}e^{2\omega}H_z = 2(1-\tau^2)\left(\frac{1}{H+i\tau}\right)_{\bar{z}}(Z^1)^2 = -\frac{2(1-\tau^2)}{(H+i\tau)^2}H_{\bar{z}}(Z^1)^2.$$

Como $\epsilon = 1$, $e^{\omega} = |\psi_2|^2 + |\psi_1|^2$ e $Z^1 = \psi_1\bar{\psi}_2$, a equação acima torna-se, em modulo,

$$\frac{1}{2}(|\psi_2|^2 + |\psi_1|^2)^2|H_z| = \frac{2(1-\tau^2)}{H^2+\tau^2}|H_{\bar{z}}||\psi_1|^2|\psi_2|^2,$$

que, pela suposição, pode ser reescrita como

$$(H^2+\tau^2)(|\psi_2|^2+|\psi_1|^2)^2 = 4(1-\tau^2)|\psi_2|^2|\psi_1|^2.$$

Uma vez que $1-\tau^2=\tau^2$, obtemos

$$H^2(|\psi_2|^2+|\psi_1|^2)^2 + \tau^2(|\psi_2|^2-|\psi_1|^2)^2 = 0,$$

a identidade acima sendo válida se, e somente se, $|\psi_2| = |\psi_1|$ e $H=0$, i.e., se a superfície é mínima, o que contradiz a suposição e prova a proposição. □

4.6 A Aplicação de Gauss

Doravante, estudamos a aplicação de Gauss da imersão isométrica de uma superfície de Riemann em $\mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$ via uma projeção estereográfica conveniente. Denotamos

$$\mathbb{S}^2_1 = \{(a,b,c) \in T_e\mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau} : a^2+b^2+c^2 = 1\}$$

$$\mathbb{S}^2_{-1} = \{(a,b,c) \in T_e\mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau} : \epsilon a^2+b^2+c^2 = \epsilon, \quad c>0\},$$

e, como sempre, pomos $\hat{e}_j = E_j(e)$. onde, acima, identificamos o vetor $a\hat{e}_1 + b\hat{e}_2 + c\hat{e}_3 \in T_e\mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$ a terna (a,b,c) A projeção estereográfica, na esfera $\mathbb{S}^2_1$, com respeito ao ponto $\mathrm{N}_1 = (1,0,0)$ é dada por

$$\pi_1 : \mathbb{S}^2_1 \to \bar{\mathbb{C}}, \quad \pi_1(a,b,c) = \frac{b}{1-a} + i\frac{c}{1-a}, \quad \pi_1(\mathrm{N}_1) = \infty$$

e tem inversa

$$\pi_1^{-1} : \bar{\mathbb{C}} \to \mathbb{S}^2_1,\ \pi_1^{-1}(w) = \frac{1}{1+|w|^2}(|w|^2-1, 2Re(w), 2Im(w)),\ \pi_1^{-1}(\infty) = \mathrm{N}_1.$$

Analogamente, a projeção estereográfica, em $\mathbb{S}^2_{-1}$, com relação ao ponto $S_1 = (-1, 0, 0)$ tem imagens no disco $\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$, e é dada por

$$\pi_{-1} : \mathbb{S}^2_{-1} \to \mathbb{D}, \quad \pi_{-1}(a, b, c) = \frac{b}{1+a} + i\frac{c}{1+a}$$

tendo inversa

$$\pi_{-1}^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{S}^2_{-1}, \quad \pi_{-1}^{-1}(w) = \frac{1}{1-|w|^2}(1+|w|^2, 2Re(w), 2Im(w)).$$

Englobamos ambas as possibilidades, escrevendo

$$\pi_\epsilon(a, b, c) = \frac{b}{1-\epsilon a} + i\frac{c}{1-\epsilon a}, \tag{4.52}$$

$$\pi_\epsilon^{-1}(w) = \frac{1}{1+\epsilon|w|^2}(|w|^2 - \epsilon, 2Re(w), 2Im(w)), \tag{4.53}$$

onde

$$\pi_\epsilon : \mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau} - \{P_\epsilon\} \to \mathbb{D}_\epsilon$$

sendo $P_1 = N_1$, $P_{-1} = S_1$, $\mathbb{D}_1 = \mathbb{C}$ e $\mathbb{D}_{-1} = \mathbb{D}$.

Dadas a imersão $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$ e o parâmetro conforme local z, definimos as funções

$$f = \bar{\psi}_2^2, \qquad g = \frac{\psi_1}{\bar{\psi}_2}, \tag{4.54}$$

de modo que

$$Z^1 = gf, \quad Z^2 = \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f, \quad Z^3 = \frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f.$$

Além disso,

Lema 4.6.1. *Dada a imersão isométrica $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$, a métrica e o vetor normal são expressos, em termos das funções f e g, por*

$$e^{2\omega} = |f|^2(1+\epsilon|g|^2)^2, \quad (e^\omega = |f|(1+\epsilon|g|^2) \tag{4.55}$$

$$N = \frac{1}{1+\epsilon|g|^2}\{(|g|^2 - \epsilon)E_1 + 2Re(g)E_2 + 2Im(g)E_3\}. \tag{4.56}$$

Temos, ainda,

Lema 4.6.2. *Dada a imersão isométrica $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$, a aplicação de Gauss $\eta : \Sigma \to \mathbb{S}^2_\epsilon$ satisfaz $\pi_\epsilon(\eta) = g$. Isto é, composta com a projeção estereográfica adequada, a aplicação de Gauss é dada por g.*

A equação de Dirac é equivalente ao seguinte sistema de equações de primeira ordem em f e g.

Lema 4.6.3. *As funções f e g associadas à imersão isométrica $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$ satisfazem*

$$f_{\bar z} = |f|^2\bar g\{(H+\frac{i}{\tau})(1+\epsilon|g|^2) - i(\tau-\frac{1}{\tau})(1-\epsilon|g|^2)\} \tag{4.57}$$

$$g_{\bar z} = -\frac{\epsilon\bar f}{2}\{(H+\frac{i}{\tau})(1+\epsilon|g|^2)^2 + i(\tau-\frac{1}{\tau})(1-\epsilon|g|^2)^2\}. \tag{4.58}$$

Prova. Usando a definição das funções f e g em termos de ψ_1 e ψ_2 dada em (4.54), assim como a equação de Dirac (2.28) com potenciais U e V expressos em (4.41) e (4.42), concluímos que a derivada de f em relação a $\bar z$ é calculada segundo

$$\begin{aligned}
f_{\bar z} &= 2\bar\psi_2\partial_{\bar z}\bar\psi_2 = -2\bar\psi_1\bar\psi_2\bar U\\
&= \bar\psi_1\bar\psi_2\{(H+\frac{i}{\tau})(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2) - i(\tau-\frac{1}{\tau})(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)\}\\
&= \bar g|f|\{(H+\frac{i}{\tau})(|f|+\epsilon|g|^2|f|) - i(\tau-\frac{1}{\tau})(|f|-\epsilon|g|^2|f|)\}\\
&= |f|^2\bar g\{(H+\frac{i}{\tau})(1+\epsilon|g|^2) - i(\tau-\frac{1}{\tau})(1-\epsilon|g|^2)\}
\end{aligned}$$

e, para a derivada de g em relação $\bar z$, obtemos

$$\begin{aligned}
g_{\bar z} &= \frac{1}{\bar\psi_2^2}\{\bar\psi_2\partial_{\bar z}\psi_1 - \psi_1\partial_{\bar z}\bar\psi_2\} = \frac{1}{\bar\psi_2^2}\{\bar\psi_2V\psi_2 - \psi_1(-\bar U\bar\psi_1)\}\\
&= \frac{1}{\bar\psi_2^2}\{|\psi_2|^2V + |\psi_1|^2\bar U\}\\
&= -\frac{|\psi_2|^2}{\bar\psi_2^2}\frac{\epsilon}{2}\{(H+\frac{i}{\tau})(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2) + i(\tau-\frac{1}{\tau})(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)\}\\
&- \frac{|\psi_1|^2}{\bar\psi_2^2}\frac{1}{2}\{(H+\frac{i}{\tau})(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2) - i(\tau-\frac{1}{\tau})(|\psi_2|^2-\epsilon|\psi_1|^2)\}\\
&= -\frac{|f|}{f}\frac{\epsilon}{2}\{(H+\frac{i}{\tau})(|f|+\epsilon|g|^2|f|) + i(\tau-\frac{1}{\tau})(|f|-\epsilon|g|^2|f|)\}\\
&- \frac{|g|^2|f|}{f}\frac{1}{2}\{(H+\frac{i}{\tau})(|f|+\epsilon|g|^2|f|) - i(\tau-\frac{1}{\tau})(|f|-\epsilon|g|^2|f|)\}\\
&= -\frac{\epsilon\bar f}{2}\{(H+\frac{i}{\tau})(1+\epsilon|g|^2) + i(\tau-\frac{1}{\tau})(1-\epsilon|g|^2)\}\\
&- \frac{|g|^2\bar f}{2}\{(H+\frac{i}{\tau})(1+\epsilon|g|^2) - i(\tau-\frac{1}{\tau})(1-\epsilon|g|^2)\}\\
&= -\frac{\bar f}{2}\{(H+\frac{i}{\tau})(1+\epsilon|g|^2)(\epsilon+|g|^2) + i(\tau-\frac{1}{\tau})(1-\epsilon|g|^2)(\epsilon-|g|^2)\}\\
&= -\frac{\epsilon\bar f}{2}\{(H+\frac{i}{\tau})(1+\epsilon|g|^2)^2 + i(\tau-\frac{1}{\tau})(1-\epsilon|g|^2)^2\}.
\end{aligned}$$

□

Uma consequência imediata destas equações é enunciada abaixo.

Lema 4.6.4. *Se a imersão isométrica $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$ é mínima, então*

$$f_{\bar{z}} = i|f|^2\bar{g}\{\frac{2}{\tau} - \tau(1-\epsilon|g|^2)\} \tag{4.59}$$

e

$$g_{\bar{z}} = -\frac{i}{2}\epsilon\bar{f}\{\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2 + \tau(1-\epsilon|g|^2)^2\}. \tag{4.60}$$

Além disso,

$$g_{z\bar{z}} - 2\epsilon\frac{\frac{2}{\tau^2} - (1-\epsilon|g|^2)}{\frac{4\epsilon}{\tau^2}|g|^2 + (1-\epsilon|g|^2)^2}\bar{g}g_{\bar{z}}g_z = 0. \tag{4.61}$$

Prova. As equações (4.59) e (4.60), respectivamente, decorrem imediatamente de (4.57) e (4.58). Com respeito a (4.61), temos, pelo fato de que (4.60) fornece

$$\frac{2\epsilon}{\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2 + \tau(1-\epsilon|g|^2)^2}g_{\bar{z}} = -i\bar{f} \in \mathcal{C}^\infty,$$

$$\begin{aligned}
g_{z\bar{z}} &= -\frac{i}{2}\epsilon\bar{f}_z\{\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2 + \tau(1-\epsilon|g|^2)^2\} \\
&- \frac{i}{2}\epsilon\bar{f}\{\frac{4\epsilon}{\tau}(g\bar{g}_z + \bar{g}g_z) - 2\epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)(g\bar{g}_z + \bar{g}g_z)\} \\
&= -\frac{i}{2}\epsilon\{\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2 + \tau(1-\epsilon|g|^2)^2\}\{-i|f|^2g[\frac{2}{\tau} - \tau(1-\epsilon|g|^2)]\} \\
&- \frac{i}{2}\epsilon\bar{f}\{\frac{4\epsilon}{\tau} - 2\epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)\}(g\bar{g}_z + \bar{g}g_z) \\
&= -\frac{1}{2}\epsilon|f|^2g\{\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2 + \tau(1-\epsilon|g|^2)^2\}\{\frac{2}{\tau} - \tau(1-\epsilon|g|^2)\} \\
&- \frac{i}{2}\epsilon\bar{f}g\{\frac{4\epsilon}{\tau} - 2\epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)\}\{\frac{i}{2}\epsilon f[\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2 + \tau(1-\epsilon|g|^2)^2]\} \\
&- \frac{i}{2}\epsilon\bar{f}\{\frac{4\epsilon}{\tau} - 2\epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)\}\bar{g}g_z \\
&= -\frac{1}{2}\epsilon|f|^2g\{\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2 + \tau(1-\epsilon|g|^2)^2\}\{\frac{2}{\tau} - \tau(1-\epsilon|g|^2)\} \\
&- i\bar{f}g\{\frac{2}{\tau} - \tau(1-\epsilon|g|^2)\}\{\frac{i}{2}\epsilon f[\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2 + \tau(1-\epsilon|g|^2)^2]\} \\
&- \frac{i}{2}\epsilon\bar{f}\{\frac{4\epsilon}{\tau} - 2\epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2)\}\bar{g}g_z \\
&= (-i\bar{f})\{\frac{2}{\tau} - \tau(1-\epsilon|g|^2)\}\bar{g}g_z \\
&= 2\epsilon\frac{\frac{2}{\tau} - \tau(1-\epsilon|g|^2)}{\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2 + \tau(1-\epsilon|g|^2)^2}\bar{g}g_{\bar{z}}g_z \\
&= 2\epsilon\frac{\frac{2}{\tau^2} - (1-\epsilon|g|^2)}{\frac{4\epsilon}{\tau^2}|g|^2 + (1-\epsilon|g|^2)^2}\bar{g}g_{\bar{z}}g_z
\end{aligned}$$

□

Observação 9. *A equação (4.61) é equivalente a*

$$g_{z\bar{z}} - 2\epsilon\frac{\frac{2}{\tau^2} - 1 + \epsilon|g|^2}{\frac{4}{\tau^2}(1-\frac{1}{\tau^2}) + (\frac{2}{\tau^2} - 1 + \epsilon|g|^2)^2}\bar{g}g_{\bar{z}}g_z = 0 \tag{4.62}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
g_{z\bar{z}} &= 2\epsilon \frac{\frac{2}{\tau^2} - (1 - \epsilon|g|^2)}{\frac{4\epsilon}{\tau^2}|g|^2 + 1 - 2\epsilon|g|^2 + |g|^4} \bar{g} g_{\bar{z}} g_z \\
&= 2\epsilon \frac{\frac{2}{\tau^2} - 1 + \epsilon|g|^2}{1 + 2\epsilon(\frac{2}{\tau^2} - 1)|g|^2 + |g|^4} \bar{g} g_{\bar{z}} g_z \\
&= 2\epsilon \frac{\frac{2}{\tau^2} - 1 + \epsilon|g|^2}{1 - (\frac{2}{\tau^2} - 1)^2 + (\frac{2}{\tau^2} - 1 + \epsilon|g|^2)^2} \bar{g} g_{\bar{z}} g_z \\
&= 2\epsilon \frac{\frac{2}{\tau^2} - 1 + \epsilon|g|^2}{\frac{4}{\tau^2}(1 - \frac{1}{\tau^2}) + (\frac{2}{\tau^2} - 1 + \epsilon|g|^2)^2} \bar{g} g_{\bar{z}} g_z.
\end{aligned}$$

□

É possível interpretar a equação (4.85) como a equação de uma aplicação harmônica definida em Σ. Primeiro, observamos que

Observação 10. *Definimos, para $\epsilon = -1$ e $0 < \tau \leq 1$, a constante $r_0 = \frac{1}{\tau}(1 - \sqrt{1 - \tau^2})$. Sendo assim, a expressão*

$$\frac{4}{\tau^2}(1 - \frac{1}{\tau^2}) + [\frac{2}{\tau^2} - 1 + \epsilon|w|^2]^2$$

é positiva no disco $\mathbb{D}_{r_0} = \{w : |w| < r_0\}$.

Para uma prova deste fato, veja o apêndice.

Proposição 4.6.1. *Seja $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$ uma imersão isométrica mínima. Suponha que a aplicação de Gauss g de X satisfaz $g : \Sigma \to \mathbb{D}^\tau_\epsilon$, onde*

$$\mathbb{D}^\tau_\epsilon = \begin{cases} \mathbb{C}, & \epsilon = 1, \ \ 0 < \tau \\ \mathbb{D}_{r_0}, & \epsilon = -1, \ \ 0 < \tau \leq 1. \end{cases}$$

Então, g é harmônica sobre $\mathbb{D}^\tau_\epsilon$ considerado com a métrica

$$ds^2_{\epsilon,\tau} = \lambda^2_{\epsilon,\tau}(w)|dw|^2 = \frac{1}{\frac{4}{\tau^2}(1 - \frac{1}{\tau^2}) + [\frac{2}{\tau^2} - 1 + \epsilon|w|^2]^2}|dw|^2. \tag{4.63}$$

Prova. Temos

$$\begin{aligned}
(\lambda_{\epsilon,\tau})_w(w) &= -\frac{1}{2}\left\{\frac{4}{\tau^2}(1 - \frac{1}{\tau^2}) + [\frac{2}{\tau^2} - 1 + \epsilon|w|^2]^2\right\}^{-3/2} 2(\frac{2}{\tau^2} - 1 + \epsilon|w|^2)\epsilon\bar{w} \\
&= -\epsilon \frac{\frac{2}{\tau^2} - 1 + \epsilon|w|^2}{\left\{\frac{4}{\tau^2}(1 - \frac{1}{\tau^2}) + [\frac{2}{\tau^2} - 1 + \epsilon|w|^2]^2\right\}^{3/2}} \bar{w}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{2}{\lambda_{\epsilon,\tau}(g)}\left(\lambda_{\epsilon,\tau}\right)_w(g) \quad = \quad -2\epsilon\frac{\frac{2}{\tau^2}-1+\epsilon|g|^2}{\frac{4}{\tau^2}(1-\frac{1}{\tau^2})+[\frac{2}{\tau^2}-1+\epsilon|g|^2]^2}\bar{g}.$$

Assim, a equação (4.85) pode ser reescrita como

$$g_{z\bar{z}}+\frac{2}{\lambda_{\epsilon,\tau}(g)}\left(\lambda_{\epsilon,\tau}\right)_w(g)g_z g_{\bar{z}}=0,$$

que expressa, por (1.55), a harmonicidade de g. □

Com esta informação, demonstramos com as notações dadas acima,

Proposição 4.6.2. *Se a aplicação de Gauss g de uma superfície mínima em $\mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$ satisfaz $g:\Sigma\to\mathbb{D}^\tau_\epsilon$, então a diferencial de Abresch-Rosenberg da superfície mínima em $\mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$ é um multiplo escalar da diferencial de Hopf associada a sua aplicação de Gauss g.*

Prova. A diferencial de Abresch-Rosenberg de uma superfície mínima $X:\Sigma\looparrowright\mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$ é dada por

$$\tilde{Q}_0 dz^2=\left(\frac{q}{2}-2(1-\tau^2)\frac{(Z^1)^2}{i\tau}\right)dz^2$$

e a diferencial de Hopf da aplicação de Gauss de X é

$$\tilde{G}dz^2=\lambda^2_{\epsilon,\tau}(g(z))g_z\bar{g}_z dz^2.$$

Expressamos, então, as funções $\tilde{Q}_0$ e $\tilde{G}$ em termos das funções ψ_1 e ψ_2 e suas derivadas. Temos, por (4.50),

$$\frac{q}{2}=\psi_1\partial_z\bar{\psi}_2+\bar{\psi}_2\partial_z\psi_1-2i(\frac{1}{\tau}-\tau)\psi_1^2\bar{\psi}_2^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_0 &= \psi_1\partial_z\bar{\psi}_2-\bar{\psi}_2\partial_z\psi_1-2i(\frac{1}{\tau}-\tau)\psi_1^2\bar{\psi}_2^2-2(1-\tau^2)\frac{\psi_1^2\bar{\psi}_2^2}{i\tau}\\ &= \psi_1\partial_z\bar{\psi}_2-\bar{\psi}_2\partial_z\psi_1.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos $g=\frac{\psi_1}{\bar{\psi}_2}$, o que garante que

$$g_z=\frac{1}{\bar{\psi}_2^2}\{\bar{\psi}_2\partial_z\psi_1-\psi_1\partial_z\bar{\psi}_2\}.$$

Ademais, de (4.60), obtemos

$$\bar{g}_z=\overline{g_{\bar{z}}}=\frac{i}{2}\epsilon f\{\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2+\tau(1-\epsilon|g|^2)^2\}.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\tilde{G} &= \lambda^2_{\epsilon,\tau}(g(z))g_z\bar{g}_z \\
&= \frac{1}{\frac{4\epsilon}{\tau^2}|g|^2+(1-\epsilon|g|^2)^2}\frac{i}{2}\epsilon f\{\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2+\tau(1-\epsilon|g|^2)^2\}g_z \\
&= \frac{i}{2}\epsilon f\frac{\tau}{\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2+\tau(1-\epsilon|g|^2)^2}\{\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2+\tau(1-\epsilon|g|^2)^2\}g_z \\
&= \frac{i}{2}\epsilon\tau f g_z \\
&= \frac{i}{2}\epsilon\tau\{\bar{\psi}_2\partial_z\psi_1-\psi_1\partial_z\bar{\psi}_2\},
\end{aligned}
$$

dado que $f=\bar{\psi}_2^2$. Portanto, $\tilde{G}=-\frac{i}{2}\epsilon\tau\tilde{Q}_0$. □

As equações em (4.43), que compõem o conjunto de equações de Gauss-Weingarten suficientes para a integrabilidade de uma imersão isométrica com segunda forma fundamental prescrita, podem ser reescritas em termos de f e g.

Lema 4.6.5. *As funções f e g associadas à imersão isométrica $X:\Sigma\looparrowright\mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$ satisfazem*

$$f_z=2\big(\omega_z f+\epsilon\frac{q}{2}e^{-\omega}\bar{g}|f|+i(\frac{1}{\tau}-\tau)gf^2\big) \tag{4.64}$$

$$g_z=-\frac{1}{f}(\frac{q}{2}+2i(\frac{1}{\tau}-\tau)(gf)^2\big) \tag{4.65}$$

Prova. Para a derivada de f em relação a z, temos, por (4.48),

$$
\begin{aligned}
f_z &= 2\bar{\psi}_2\partial_z\bar{\psi}_2 \\
&= 2\bar{\psi}_2\big(\omega_z\bar{\psi}_2+\epsilon\frac{q}{2}e^{-\omega}\bar{\psi}_1+i(\frac{1}{\tau}-\tau)\psi_1\bar{\psi}_2^2\big) \\
&= 2\big(\omega_z f+\epsilon\frac{q}{2}e^{-\omega}\bar{g}|f|+i(\frac{1}{\tau}-\tau)gf^2\big)
\end{aligned}
$$

e para a derivada de g em relação a z, temos de (4.47) e (4.48),

$$
\begin{aligned}
g_z &= \frac{\bar{\psi}_2\partial_z\psi_1-\psi_1\partial_z\bar{\psi}_2}{\bar{\psi}_2^2} \\
&= \frac{1}{\bar{\psi}_2^2}\big(\bar{\psi}_2(\omega_z\psi_1-\frac{q}{2}e^{-\omega}\psi_2-i(\frac{1}{\tau}-\tau)\psi_1^2\bar{\psi}_2) \\
&- \psi_1(\omega_z\bar{\psi}_2+\epsilon\frac{q}{2}e^{-\omega}\bar{\psi}_1+i(\frac{1}{\tau}-\tau)\psi_1\bar{\psi}_2^2)\big) \\
&= \frac{1}{f}\big(-\frac{q}{2}e^{-\omega}(|\psi_2|^2+\epsilon|\psi_1|^2)-2i(\frac{1}{\tau}-\tau)(\psi_1\bar{\psi}_2)^2\big) \\
&= -\frac{1}{f}(\frac{q}{2}+2i(\frac{1}{\tau}-\tau)(gf)^2\big).
\end{aligned}
$$

□

Verificamos, ainda

Lema 4.6.6. *As funções f e g associadas à imersão isométrica $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$ satisfazem*

$$(fg)_z = 2\omega_z fg + \epsilon\frac{q}{2}\frac{|g|^2-\epsilon}{1+\epsilon|g|^2} \tag{4.66}$$

$$\frac{1}{2}\big((1-\epsilon g^2)f\big)_z = \omega_z(1-\epsilon g^2)f + \epsilon q\frac{Re(g)}{1+\epsilon|g|^2} + i\big(\frac{1}{\tau}-\tau\big)\big(1+\epsilon g^2\big)f^2 g \tag{4.67}$$

$$\frac{i}{2}\big((1+\epsilon g^2)f\big)_z = i\omega_z\big(1+\epsilon g^2\big)f + i\epsilon q\frac{Im(g)}{1+\epsilon|g|^2} - \big(\frac{1}{\tau}+\tau\big)\big(1-\epsilon g^2\big)f^2 g \tag{4.68}$$

Prova. Usando o lema anterior junto com a expressão da métrica dada em (4.55), calculamos

$$\begin{aligned}
(fg)_z &= f_z g + f g_z \\
&= 2g\big(\omega_z f + \epsilon\frac{q}{2}e^{-\omega}\bar{g}|f| + i(\frac{1}{\tau}-\tau)gf^2\big) + (-\frac{q}{2} - 2i(\frac{1}{\tau}-\tau)(gf)^2\big) \\
&= 2\omega_z fg + \epsilon\frac{q}{2}\big(2e^{-\omega}|f||g|^2 - \epsilon\big) \\
&= 2\omega_z fg + \epsilon\frac{q}{2}\left(2\frac{|f||g|^2}{|f|(1+\epsilon|g|^2)} - \epsilon\right) \\
&= 2\omega_z fg + \epsilon\frac{q}{2}\frac{|g|^2-\epsilon}{1+\epsilon|g|^2}.
\end{aligned}$$

Temos, igualmente,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\big((1-\epsilon g^2)f\big)_z &= -\epsilon fgg_z + \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f_z \\
&= \epsilon g(\frac{q}{2} + 2i(\frac{1}{\tau}-\tau)(gf)^2\big) \\
&+ \big(1-\epsilon g^2\big)\big(\omega_z f + \epsilon\frac{q}{2}e^{-\omega}\bar{g}|f| + i(\frac{1}{\tau}-\tau)gf^2\big) \\
&= \omega_z(1-\epsilon g^2)f + \frac{\epsilon}{2}q\big(g + (1-\epsilon g^2)e^{-\omega}\bar{g}f^2\big) \\
&+ i(\frac{1}{\tau}-\tau\big)fg\big(2\epsilon fg^2 + (1-\epsilon g^2)f\big) \\
&= \omega_z(1-\epsilon g^2)f + \frac{\epsilon}{2}q\left(g + \frac{(1-\epsilon g^2)\bar{g}}{1+\epsilon|g|^2}\right) \\
&+ i(\frac{1}{\tau}-\tau\big)\big(f+\epsilon fg^2\big)fg \\
&= \omega_z(1-\epsilon g^2)f + \frac{\epsilon}{2}q\frac{g+\bar{g}+\epsilon g|g|^2 - \epsilon g^2\bar{g}}{1+\epsilon|g|^2} \\
&+ i(\frac{1}{\tau}-\tau\big)\big(1+\epsilon g^2\big)f^2 g \\
&= \omega_z(1-\epsilon g^2)f + \epsilon q\frac{Re(g)}{1+\epsilon|g|^2} + i\big(\frac{1}{\tau}-\tau\big)\big(1+\epsilon g^2\big)f^2 g,
\end{aligned}$$

Por fim, calculamos

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2}\big((1+\epsilon g^2)f\big)_z &= -i\epsilon g\big(\frac{q}{2}+2i(\frac{1}{\tau}-\tau)(gf)^2\big)\\
&+ i\big(1+\epsilon g^2\big)\big(\omega_z f+\epsilon\frac{q}{2}e^{-\omega}\bar{g}|f|+i(\frac{1}{\tau}-\tau)gf^2\big)\\
&= i\omega_z\big(1+\epsilon g^2\big)f+i\frac{\epsilon}{2}q\big(-g+(1+\epsilon g^2)e^{-\omega}\bar{g}|f|\big)\\
&+ \big(\frac{1}{\tau}-\tau\big)fg\big(2\epsilon fg^2-(1+\epsilon g^2)f\big)\\
&= i\omega_z\big(1+\epsilon g^2\big)f+i\frac{\epsilon}{2}q\big(-g+\frac{1+\epsilon g^2}{1+\epsilon|g|^2}\bar{g}\big)\\
&+ \big(\frac{1}{\tau}-\tau\big)f^2g\big(-1+\epsilon g^2\big)\\
&= i\omega_z\big(1+\epsilon g^2\big)f+i\frac{\epsilon}{2}q\frac{-g+\bar{g}-\epsilon g|g|^2+\epsilon g^2\bar{g}}{1+\epsilon|g|^2}\\
&+ \big(\frac{1}{\tau}-\tau\big)f^2g\big(-1+\epsilon g^2\big)\\
&= i\omega_z\big(1+\epsilon g^2\big)f+i\epsilon q\frac{Im(g)}{1+\epsilon|g|^2}-\big(\frac{1}{\tau}-\tau\big)f^2g\big(1-\epsilon g^2\big).
\end{aligned}$$

□

De modo análogo, temos

Lema 4.6.7. *As funções f e g associadas à imersão isométrica $X:\Sigma \looparrowright \mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$ mínima satisfazem*

$$(fg)_{\bar{z}} = -\frac{i\epsilon\tau}{2}|f|^2(1-|g|^4) \tag{4.69}$$

$$\left(\frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f\right)_{\bar{z}} = \frac{i}{2}|f|^2\{\tau g(1+\epsilon\bar{g}^2)-\frac{1}{\tau}(\tau^2-2)\bar{g}(1+\epsilon g^2)\} \tag{4.70}$$

$$\left(\frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f\right)_{\bar{z}} = \frac{1}{2}|f|^2\{\tau g(1-\epsilon\bar{g}^2)-\frac{1}{\tau}(2-\tau^2)\bar{g}(1+\epsilon g^2)\} \tag{4.71}$$

Prova. Usando as relações (4.59) e (4.60), temos

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}}(fg) &= g\partial_{\bar{z}}f+f\partial_{\bar{z}}g\\
&= gi|f|^2\bar{g}\{\frac{2}{\tau}-\tau(1-\epsilon|g|^2)\}-f\frac{i}{2}\epsilon\bar{f}\{\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2+\tau(1-\epsilon|g|^2)^2\}\\
&= i|f|^2|g|^2\{\frac{2}{\tau}-\tau(1-\epsilon|g|^2)\}-\frac{i}{2}\epsilon|f|^2\{\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2+\tau(1-\epsilon|g|^2)^2\}\\
&= i\epsilon|f|^2\{\epsilon|g|^2[\frac{2}{\tau}-\tau(1-\epsilon|g|^2)]-\frac{1}{2}[\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2+\tau(1-\epsilon|g|^2)^2]\}\\
&= i\epsilon|f|^2\{\frac{2\epsilon}{\tau}|g|^2-\epsilon|g|^2\tau(1-\epsilon|g|^2)-\frac{2\epsilon}{\tau}|g|^2-\frac{\tau}{2}(1-\epsilon|g|^2)^2\}\\
&= -i\epsilon|f|^2\tau(1-\epsilon|g|^2)\{\epsilon|g|^2+\frac{1}{2}(1-\epsilon|g|^2)\}\\
&= -i\epsilon|f|^2\tau(1-\epsilon|g|^2)\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\epsilon|g|^2\}\\
&= -\frac{i\epsilon\tau}{2}|f|^2(1-|g|^4),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f\right)_{\bar z} &= \frac{1}{2}(-2\epsilon g g_{\bar z})f+\frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f_{\bar z}\\
&= -\epsilon g f g_{\bar z}+\frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f_{\bar z}\\
&= \epsilon g f\frac{i}{2}\epsilon\bar f\{\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2+\tau(1-\epsilon|g|^2)^2\}+\frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)i|f|^2\bar g\{\frac{2}{\tau}-\tau(1-\epsilon|g|^2)\}\\
&= \frac{i}{2}|f|^2\{g(\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2+\tau-2\epsilon\tau|g|^2+\tau|g|^4)+\bar g(1-\epsilon g^2)(\frac{2}{\tau}-\tau+\tau\epsilon|g|^2)\}\\
&= \frac{i}{2}|f|^2\{g(\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2+\tau-2\epsilon\tau|g|^2)+\bar g(\frac{2}{\tau}-\tau+\tau\epsilon|g|^2-\frac{2\epsilon}{\tau}g^2+\epsilon\tau g^2)\}\\
&= \frac{i}{2}|f|^2\{2\epsilon(\frac{2}{\tau}-\tau)g|g|^2+\tau g+(\frac{2}{\tau}-\tau)\bar g+\tau\epsilon\bar g|g|^2-\frac{2\epsilon}{\tau}g|g|^2+\epsilon\tau g|g|^2\}\\
&= \frac{i}{2}|f|^2\{2\epsilon(\frac{2}{\tau}-\tau)g|g|^2+\tau g+(\frac{2}{\tau}-\tau)\bar g+\tau\epsilon g\bar g^2-\epsilon g|g|^2(\frac{2}{\tau}-\tau)\}\\
&= \frac{i}{2}|f|^2\{\tau g(1+\epsilon\bar g^2)+(\frac{2}{\tau}-\tau)\bar g(1+\epsilon g^2)\}\\
&= \frac{i}{2}|f|^2\{\tau g(1+\epsilon\bar g^2)-\frac{1}{\tau}(\tau^2-2)\bar g(1+\epsilon g^2)\}
\end{aligned}
$$

e, por fim,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f\right)_{\bar z} &= \frac{i}{2}(2\epsilon g g_{\bar z})f+\frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f_{\bar z}\\
&= i\epsilon g f g_{\bar z}+\frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f_{\bar z}\\
&= -i\epsilon g f\frac{i}{2}\epsilon\bar f\{\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2+\tau(1-\epsilon|g|^2)^2\}+\frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)i|f|^2\bar g\{\frac{2}{\tau}-\tau(1-\epsilon|g|^2)\}\\
&= \frac{1}{2}|f|^2\{g(\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2+\tau-2\epsilon\tau|g|^2+\tau|g|^4)-\bar g(1+\epsilon g^2)(\frac{2}{\tau}-\tau+\tau\epsilon|g|^2)\}\\
&= \frac{1}{2}|f|^2\{g(\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2+\tau-2\epsilon\tau|g|^2)-\bar g[\frac{2}{\tau}-\tau+\tau\epsilon|g|^2+(\frac{2}{\tau}-\tau)\epsilon g^2]\}\\
&= \frac{1}{2}|f|^2\{2\epsilon(\frac{2}{\tau}-\tau)g|g|^2+\tau g-(\frac{2}{\tau}-\tau)\bar g-\tau\epsilon\bar g|g|^2-(\frac{2}{\tau}-\tau)\epsilon g|g|^2\}\\
&= \frac{1}{2}|f|^2\{\epsilon(\frac{2}{\tau}-\tau)\bar g g^2+\tau g+(\frac{2}{\tau}-\tau)\bar g-\tau\epsilon g\bar g^2\}\\
&= \frac{1}{2}|f|^2\{(\frac{2}{\tau}-\tau)\bar g(1+\epsilon g^2)+\tau g(1-\epsilon\bar g^2)\}\\
&= \frac{1}{2}|f|^2\{\tau g(1-\epsilon\bar g^2)-\frac{1}{\tau}(2-\tau^2)\bar g(1+\epsilon g^2)\}.
\end{aligned}
$$

□

Estamos, enfim, aptos a enunciar o principal resultado deste capítulo.

Teorema 4.6.1. *Seja Σ uma superfície de Riemann simplesmente conexa e orientada. Dada uma aplicação $g:\Sigma\to(\mathbb{D}^\tau_\epsilon,\lambda^2_{\epsilon,\tau})$ harmônica nunca holomorfa, existe uma imersão conforme mínima, $X:\Sigma\looparrowright\mathbb{S}_{\epsilon,\tau}$ representada por*

$$X^{-1}X_z=-\frac{i\epsilon}{\tau}\lambda^2_{\epsilon,\tau}(g)\{2\bar g_z g\hat e_1+(1-\epsilon g^2)\bar g_z\hat e_2+(1+\epsilon g^2)\bar g_z\hat e_3\}, \tag{4.72}$$

com aplicação de Gauss g.

Prova. Definimos

$$f = -2\frac{i\epsilon}{\tau}\lambda^2_{\epsilon,\tau}(g)\bar{g}_z = -\frac{2i\epsilon}{\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2 + \tau(1-\epsilon|g|^2)^2}\bar{g}_z, \tag{4.73}$$

de modo que os componentes em (4.72) são escritos em termos de f e g do modo usual, a saber,

$$Z^1 = gf, \quad Z^2 = \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f, \quad Z^3 = \frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f. \tag{4.74}$$

Pela Proposição 4.4.1, basta verificarmos que as funções satisfazem o sistema (4.25)-(4.30) para $H = 0$. Cumpre observar que, neste caso particular, basta verificarmos se a equação

$$\Upsilon := \sum_{k=1}^{3}\{\partial_{\bar{z}}Z^k + \sum_{i,j=1}^{3} Z^i\bar{Z}^j\Gamma^k_{ji}\}\hat{e}_k = 0 \tag{4.75}$$

é satisfeita.

A partir de (4.73), calculamos

$$\bar{g}_z = \frac{f}{-2i\epsilon}\{\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2 + \tau(1-\epsilon|g|^2)^2\} = \frac{i\epsilon}{2}f\{\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2 + \tau(1-\epsilon|g|^2)^2\}.$$

Portanto,

$$g_{\bar{z}} = -\frac{i\epsilon}{2}\bar{f}\{\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2 + \tau(1-\epsilon|g|^2)^2\}$$

isto é, deduzimos (4.60). Pela harmonicidade de g, temos

$$g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = \frac{2\epsilon}{G}\{\frac{2}{\tau} - \tau(1-\epsilon|g|^2)\}\bar{g}g_{\bar{z}}g_z,$$

onde $G := \frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2 + \tau(1-\epsilon|g|^2)^2$. Concluímos que

$$\begin{aligned}
f_{\bar{z}} &= -\frac{2i\epsilon}{G^2}\{\bar{g}_{z\bar{z}}G - \bar{g}_z[\frac{4\epsilon}{\tau}(g\bar{g}_{\bar{z}} + \bar{g}g_{\bar{z}}) - 2\epsilon(1-\epsilon|g|^2)(g\bar{g}_{\bar{z}} + \bar{g}g_{\bar{z}})]\} \\
&= -\frac{2i\epsilon}{G^2}\{\overline{g_{\bar{z}z}}G - \bar{g}_z[\frac{4\epsilon}{\tau} - 2\epsilon(1-\epsilon|g|^2)](g\bar{g}_{\bar{z}} + \bar{g}g_{\bar{z}})\} \\
&= -\frac{2i\epsilon}{G^2}\{2\epsilon[\frac{2}{\tau} - \tau(1-\epsilon|g|^2)]g\bar{g}_z\bar{g}_{\bar{z}} - 2\epsilon\bar{g}_z[\frac{2}{\tau} - \tau(1-\epsilon|g|^2)](g\bar{g}_{\bar{z}} + \bar{g}g_{\bar{z}})\} \\
&= -\frac{2i\epsilon}{G^2}2\epsilon[\frac{2}{\tau} - \tau(1-\epsilon|g|^2)]\{g\bar{g}_z\bar{g}_{\bar{z}} - \bar{g}_z(g\bar{g}_{\bar{z}} + \bar{g}g_{\bar{z}})\} \\
&= -i[\frac{2}{\tau} - \tau(1-\epsilon|g|^2)]\bar{g}\frac{2i\epsilon\bar{g}_z}{G}\frac{2i\epsilon g_{\bar{z}}}{G} \\
&= i[\frac{2}{\tau} - \tau(1-\epsilon|g|^2)]\bar{g}f\bar{f} \\
&= i|f|^2\bar{g}\{\frac{2}{\tau} - \tau(1-\epsilon|g|^2)\},
\end{aligned}$$

o que equivale a (4.59). Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\Upsilon &= \partial_{\bar z}(fg)\hat e_1 + \partial_{\bar z}(\frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f)\hat e_2 + \partial_{\bar z}(\frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f)\hat e_3 \\
&+ fg\sum_{i,k=1}^{3}\bar Z^i\Gamma_{i1}^k\hat e_k + \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f\sum_{i,k=1}^{3}\bar Z^i\Gamma_{i2}^k\hat e_k + \frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)f\sum_{i,k=1}^{3}\bar Z^i\Gamma_{i3}^k\hat e_k.
\end{aligned}$$

Todavia,

$$\sum_{i,k=1}^{3}\bar Z^i\Gamma_{i1}^k\hat e_k = -\frac{\tau}{2}(1-\epsilon\bar g^2)\bar f\hat e_3 - \frac{i\tau}{2}(1+\epsilon\bar g^2)\bar f\hat e_2,$$

$$\sum_{i,k=1}^{3}\bar Z^i\Gamma_{i2}^k\hat e_k = \frac{1}{\tau}(2-\tau^2)\bar f\bar g\hat e_3 + \frac{i\epsilon\tau}{2}(1+\epsilon\bar g^2)\bar f\hat e_1,$$

$$\sum_{i,k=1}^{3}\bar Z^i\Gamma_{i3}^k\hat e_k = \frac{1}{\tau}(\tau^2-2)\bar f\bar g\hat e_2 + \frac{\epsilon\tau}{2}(1-\epsilon\bar g^2)\bar f\hat e_1.$$

Estes cálculos resultam em

$$\begin{aligned}
\Upsilon &= \partial_{\bar z}(fg)\hat e_1 + \partial_{\bar z}(\frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f)\hat e_2 + \partial_{\bar z}(\frac{1}{2}(1+\epsilon g^2)f)\hat e_3 \\
&+ fg\{-\frac{\tau}{2}(1-\epsilon\bar g^2)\bar f\hat e_3 - \frac{i\tau}{2}(1+\epsilon\bar g^2)\bar f\hat e_2\} \\
&+ \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f\{\frac{1}{\tau}(2-\tau^2)\bar f\bar g\hat e_3 + \frac{i\epsilon\tau}{2}(1+\epsilon\bar g^2)\bar f\hat e_1\} \\
&+ \frac{1}{2}(1+\epsilon g^2)f\{\frac{1}{\tau}(\tau^2-2)\bar f\bar g\hat e_2 + \frac{\epsilon\tau}{2}(1-\epsilon\bar g^2)\bar f\hat e_1\} \\
&= \{\partial_{\bar z}(fg) + \frac{i\epsilon\tau}{4}|f|^2[(1-\epsilon g^2)(1+\epsilon\bar g^2) + (1+\epsilon g^2)(1-\epsilon\bar g^2)]\}\hat e_1 \\
&+ \{\partial_{\bar z}(\frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f) + \frac{i}{2}|f|^2[\frac{1}{\tau}(\tau^2-2)\bar g(1+\epsilon g^2) - \tau g(1+\epsilon\bar g^2)]\}\hat e_2 \\
&+ \{\partial_{\bar z}(\frac{1}{2}(1+\epsilon g^2)f) + \frac{1}{2}|f|^2[\frac{1}{\tau}(2-\tau^2)\bar g(1-\epsilon g^2) - \tau g(1-\epsilon\bar g^2)]\}\hat e_3 \\
&= \{\partial_{\bar z}(fg) + \frac{i\epsilon\tau}{2}|f|^2(1-|g|^4)\}\hat e_1 \\
&+ \{\partial_{\bar z}(\frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f) + \frac{i}{2}|f|^2[\frac{1}{\tau}(\tau^2-2)\bar g(1+\epsilon g^2) - \tau g(1+\epsilon\bar g^2)]\}\hat e_2 \\
&+ \{\partial_{\bar z}(\frac{1}{2}(1+\epsilon g^2)f) + \frac{1}{2}|f|^2[\frac{1}{\tau}(2-\tau^2)\bar g(1-\epsilon g^2) - \tau g(1-\epsilon\bar g^2)]\}\hat e_3.
\end{aligned}$$

Agora, como as expressões das derivadas $\partial_{\bar z}(fg)$, $\partial_{\bar z}(\frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)f)$ e $\partial_{\bar z}(\frac{i}{2}(1-\epsilon g^2)f)$ obtidas no lema anterior são estabelecidas a partir das equações (4.59) e (4.60), podemos substituí-las na expressão acima, o que nos permite obter $\Upsilon = 0$.

Concluímos, a partir da Proposição 4.4.1, a existência de uma imersão conforme mínima. Além disso, segue dos dois primeiros lemas desta seção que g é a aplicação de Gauss da imersão X. Portanto, o teorema está demonstrado. □

Complementamos o teorema acima com a seguinte

Observação 11. *A expressão da métrica induzida em Σ, e a função componente da diferencial de Hopf da imersão X dada no teorema anterior podem ser expressas em termos da função harmônica g. A saber, a expressão da métrica é*

$$e^{\omega} = \frac{2}{\tau}\lambda^2_{\epsilon,\tau}(g)|\bar{g}_z|(1+\epsilon|g|^2) = \frac{2}{\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2 + \tau(1-\epsilon|g|^2)^2}|\bar{g}_z|(1+\epsilon|g|^2) \tag{4.76}$$

e a função componente da diferencial de Hopf é

$$\frac{q}{2} = \frac{2i\epsilon}{\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2 + \tau(1-\epsilon|g|^2)^2}\bar{g}_z g_z + 2i(\frac{1}{\tau} - \tau)\frac{4}{(\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2 + \tau(1-\epsilon|g|^2)^2)^2}\bar{g}_z^2 g^2. \tag{4.77}$$

De fato, pela definição da função f, dada em (4.73), obtemos, de (4.77),

$$\frac{q}{2} = -fg_z + 2i\left(\frac{1}{\tau} - \tau\right)g^2 f^2 \tag{4.78}$$

isto é, (4.65); e, de (4.76),

$$e^{\omega} = |f|(1+\epsilon|g|^2). \tag{4.79}$$

Derivando esta expressão em relação a z, obtemos de (4.78), (4.59) e (4.60)

$$\begin{aligned}
e^{\omega}\omega_z &= \frac{1}{2|f|}(\bar{f}f_z + f\bar{f}_z)(1+\epsilon|g|^2) + \epsilon|f|(\bar{g}g_z + g\bar{g}_z) \\
&= \frac{e^{\omega}}{2|f|^2}\left\{\bar{f}f_z - igf|f|^2\left[\frac{2}{\tau} - \tau(1-\epsilon|g|^2)\right]\right\} \\
&+ \frac{\epsilon e^{\omega}}{1+\epsilon|g|^2}\left\{-\frac{\bar{g}}{f}\left[\frac{q}{2} + 2i\left(\frac{1}{\tau} - \tau\right)g^2 f^2\right] + \frac{i\epsilon}{2}gf\left[\frac{4\epsilon}{\tau}|g|^2 + \tau(1-\epsilon|g|^2)^2\right]\right\}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\omega_z &= \frac{1}{2|f|^2}\bar{f}f_z - \frac{\epsilon}{1+\epsilon|g|^2}\frac{\bar{g}q}{2f} - \frac{igf}{2}\left[\frac{2}{\tau} - \tau(1-\epsilon|g|^2)\right] \\
&+ \frac{i\epsilon gf}{1+\epsilon|g|^2}\left\{-2(\frac{1}{\tau}-\tau)|g|^2 + \frac{\epsilon}{2}\left(\tau + (\frac{4\epsilon}{\tau} - 2\epsilon\tau)|g|^2 + \tau|g|^4\right)\right\} \\
&= \frac{\bar{f}f_z}{2|f|^2} - \frac{\epsilon e^{-\omega}|f|\bar{g}q}{2f} - \frac{igf}{2}\left[\frac{2}{\tau} - \tau(1-\epsilon|g|^2)\right] \\
&+ \frac{i\epsilon gf}{1+\epsilon|g|^2}\left\{\frac{\epsilon}{2}\tau + \tau|g|^2 + \frac{\epsilon}{2}\tau|g|^4\right\} \\
&= \frac{\bar{f}f_z}{2|f|^2} - \frac{\epsilon e^{-\omega}|f|\bar{g}q}{2f} - \frac{igf}{2}\left[\frac{2}{\tau} - \tau(1-\epsilon|g|^2)\right] \\
&+ \frac{i\epsilon gf}{1+\epsilon|g|^2}\frac{\epsilon}{2}\tau(1+\epsilon|g|^2)^2 \\
&= \frac{\bar{f}f_z}{2|f|^2} - \frac{\epsilon e^{-\omega}|f|\bar{g}q}{2f} + \frac{igf}{2}\left\{-\frac{2}{\tau} + \tau(1-\epsilon|g|^2) + \tau(1+\epsilon|g|^2)\right\} \\
&= \frac{f_z}{2f} - \frac{\epsilon e^{-\omega}|f|\bar{g}q}{2f} - igf(\frac{1}{\tau} - \tau).
\end{aligned}$$

Deste cálculo, deduzimos que a derivada de f em relação a z é

$$f_z = 2\left(\omega_z f + \epsilon\frac{q}{2}e^{-\omega}\bar{g}|f| + i(\frac{1}{\tau} - \tau)gf^2\right), \tag{4.80}$$

isto é, (4.64). Finalmente, para mostrar que a expressão (4.77), ou equivalentemente, a expressão (4.78) é, de fato, a função componente da diferencial de Hopf, verificamos as equações (4.31)-(4.33). Isto é, equivalente a mostrar que

$$\sum_{k=1}^{3}\{\partial_z Z^k + \sum_{i,j=1}^{3} Z^i Z^j \Gamma_{ji}^k\}\hat{e}_k = \sum_{k=1}^{3}\{2\omega_z Z^k + \frac{\epsilon}{2}qN^k\}\hat{e}_k, \tag{4.81}$$

o que segue diretamente do Lema 4.6.6, pois as derivadas de f e g em relação a z, verificam, respectivamente, (4.64) e (4.65).

Finalizamos esta seção apresentando alguns resultados quando o espaço ambiente é a esfera, SU_2, ou o espaço Anti de Sitter, $\mathrm{SU}_{1,1}$.

Lema 4.6.8. *Se $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{S}^3_{\epsilon,1}$ é uma imersão isométrica, então*

$$f_{\bar{z}} = |f|^2\bar{g}(H+i)(1+\epsilon|g|^2) \tag{4.82}$$

$$g_{\bar{z}} = -\frac{1}{2}\epsilon\bar{f}(H+i)(1+\epsilon|g|^2)^2. \tag{4.83}$$

Além disso,

$$g_{z\bar{z}} + \frac{\epsilon}{2}\bar{f}H_z(1+\epsilon|g|^2)^2 - \frac{2\epsilon}{1+\epsilon|g|^2}\bar{g}g_{\bar{z}}g_z = 0 \tag{4.84}$$

Prova. As duas primeiras equações decorrem de (4.57) e (4.58). Com respeito a terceira, temos, pelo fato de que (4.83) fornece

$$2\epsilon\frac{g_{\bar{z}}}{(1+\epsilon|g|^2)^2} = -(H+i)\bar{f} \in \mathcal{C}^\infty,$$

segue o cálculo

$$\begin{aligned}
g_{z\bar{z}} &= -\frac{\epsilon}{2}\bar{f}_z(H+i)(1+\epsilon|g|^2)^2 \\
&- \frac{\epsilon}{2}\bar{f}\{H_z(1+\epsilon|g|^2)^2 + 2\epsilon(H+i)(1+\epsilon|g|^2)(g\bar{g}_z+\bar{g}g_z)\} \\
&= -\frac{\epsilon}{2}(H+i)(1+\epsilon|g|^2)^2\{|f|^2 g(H-i)(1+\epsilon|g|^2)\} \\
&- \frac{\epsilon}{2}\bar{f}2\epsilon(H+i)(1+\epsilon|g|^2)g\{-\frac{1}{2}\epsilon\bar{f}(H-i)(1+\epsilon|g|^2)^2\} \\
&- \frac{\epsilon}{2}\bar{f}H_z(1+\epsilon|g|^2)^2 - \frac{\epsilon}{2}\bar{f}2\epsilon(H+i)(1+\epsilon|g|^2)\bar{g}g_z \\
&= -\frac{\epsilon}{2}|f|^2 g(H^2-i^2)(1+\epsilon|g|^2)^3 + \bar{f}\epsilon(H^2-i^2)(1+\epsilon|g|^2)^3 g\{\frac{1}{2}\epsilon\bar{f}\} \\
&- \frac{\epsilon}{2}\bar{f}H_z(1+\epsilon|g|^2)^2 - \bar{f}(H+i)(1+\epsilon|g|^2)\bar{g}g_z \\
&= -\frac{\epsilon}{2}\bar{f}H_z(1+\epsilon|g|^2)^2 + \frac{2\epsilon}{1+\epsilon|g|^2}\bar{g}g_{\bar{z}}g_z.
\end{aligned}$$

□

Como consequência do lema acima, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.6.2. *Seja $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{S}^3_{\epsilon,1}$ uma imersão isométrica. Se a curvatura média de X é constante, então a aplicação de Gauss de X, $g : \Sigma \longrightarrow (\mathbb{D}_\epsilon, ds^2_\epsilon)$, onde*

$$\mathbb{D}_\epsilon = \begin{cases} \mathbb{C}, & \epsilon = 1 \\ \mathbb{D}, & \epsilon = -1 \end{cases} \quad e \quad ds^2_\epsilon = \frac{1}{(1+\epsilon|w|^2)^2}|dw|^2,$$

é harmônica. Isto é,

$$g_{z\bar{z}} - \frac{2\epsilon}{1+\epsilon|g|^2}\bar{g}g_{\bar{z}}g_z = 0.$$

4.6.1 Exemplos

Na Esfera e nas Esferas de Berger

Seja Σ uma superfície de Riemann simplesmente conexa e suponha que $z = u + iv$ seja um parâmetro conforme de Σ. Nesta seção, determinamos algumas soluções da equação

$$g_{z\bar{z}} - 2\frac{\frac{2}{\tau^2} - 1 + |g|^2}{\frac{4}{\tau^2}|g|^2 + (1-|g|^2)^2}\bar{g}g_{\bar{z}}g_z = 0, \tag{4.85}$$

com g nunca holomorfa. Isto é equivalente a determinar funções harmônicas $\eta : \Sigma \to \mathbb{S}^2 \subset T_e\mathbb{S}^3_{1,\tau}$ onde, sobre $\mathbb{S}^2$, consideramos a métrica conforme, que, no sistema de coordenadas

$$w \in \mathbb{C} \quad \overset{\pi_1^{-1}}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{1+|w|^2}(|w|^2-1, 2Re(w), 2Im(w)) \in \mathbb{S}^2, \tag{4.86}$$

é dada por

$$ds^2 = \lambda^2_{1,\tau}(w)|dw|^2 = \frac{1}{\frac{4}{\tau^2}|w|^2 + (1-|w|^2)^2}|dw|^2. \tag{4.87}$$

De fato, g é uma representação nas coordenadas conformes z de Σ e w de $\mathbb{S}^2$ (com métrica $ds^2 = \lambda^2_{1,\tau}|dw|^2$) da função η. Lembre que tal aplicação g fornece uma imersão mínima X de Σ na esfera de Berger $\mathbb{S}^3_{1,\tau}$, $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{S}^3_{1\tau}$, cuja derivada em relação a z é dada por

$$X_z = -\frac{i}{\tau}\lambda^2_{1,\tau}(g)\{2\bar{g}_z g E_1 + (1-g^2)\bar{g}_z E_2 + (1+g^2)\bar{g}_z E_3\} \tag{4.88}$$

onde $\{E_1, E_2, E_3\}$ é o referencial ortonormal de campos invariantes à esquerda na esfera de Berger definidos em (4.5).

Exemplo 1. Sejam $\Sigma = \mathbb{C}$ e $g(z) = c\bar{z}$, onde c é uma constante não nula. Logo $g_{\bar{z}} = c$ e $g_z = 0$. Portanto, é imediato que g é nunca holomorfa e satisfaz (4.85). Note que neste caso,

$$X_z = -\frac{i}{\tau}\lambda^2_{1,\tau}(c\bar{z})\{2|c|^2\bar{z}E_1 + (1-(c\bar{z})^2)\bar{c}E_2 + (1+(c\bar{z})^2)\bar{c}E_3\}$$

Exemplo 2. Seja $\Sigma = \mathbb{C}$ e $g(z) = g(u+iv) = \cos v + i\sin v$. Note que $|g|^2 = 1$. Além disso, temos

$$\begin{aligned} g_z &= \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v})(\cos v + i\sin v) \\ &= -\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial v}(\cos v + i\sin v) \\ &= -\frac{i}{2}(-\sin v + i\cos v) \\ &= \frac{1}{2}g. \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos $g_{\bar{z}} = -\frac{1}{2}g$ e $g_{z\bar{z}} = -\frac{1}{4}g$. Assim,

$$\bar{g}g_z g_{\bar{z}} = \bar{g}\frac{1}{2}g(-\frac{1}{2}g) = -\frac{1}{4}g$$

e

$$2\frac{\frac{2}{\tau^2} - 1 + |g|^2}{\frac{4}{\tau^2}|g|^2 + (1-|g|^2)^2} = 1,$$

donde segue que g satisfaz (4.85).

Exemplo 3. Suponha que $\tau = 1$. Seja $\Sigma = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$ e

$$g(z) = g(u + iv) = (a + ib)\frac{\sin v}{1 + \cos v}$$

onde $a^2 + b^2 = 1$. Temos

$$\begin{aligned} g_z &= \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v})\{(a+ib)\frac{\sin v}{1+\cos v}\} \\ &= -(a+ib)\frac{i}{2}\frac{d}{dv}(\frac{\sin v}{1+\cos v}) \\ &= -\frac{i}{2}(a+ib)\frac{\cos v(1+\cos v) - \sin v(-\sin v)}{(1+\cos v)^2} \\ &= -\frac{i}{2}(a+ib)\frac{\cos v + \cos^2 v + \sin^2 v}{(1+\cos v)^2} \\ &= -\frac{i}{2}(a+ib)\frac{1}{1+\cos v}. \end{aligned}$$

Analogamente, $g_{\bar{z}} = \frac{i}{2}(a+ib)\frac{1}{1+\cos v}$ e

$$\begin{aligned} g_{z\bar{z}} &= \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v})\{-\frac{i}{2}(a+ib)\frac{1}{1+\cos v}\} \\ &= \frac{1}{4}(a+ib)\frac{d}{dv}(\frac{1}{1+\cos v}) \\ &= \frac{1}{4}(a+ib)\frac{\sin v}{(1+\cos v)^2}. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $\tau = 1$, temos

$$2\frac{\frac{2}{\tau^2} - 1 + |g|^2}{\frac{4}{\tau^2}|g|^2 + (1-|g|^2)^2} = 2\frac{1}{1+|g|^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 2\frac{1}{1+|g|^2}\bar{g}g_{\bar{z}}g_z &= 2\frac{1}{1+\frac{\sin^2 v}{(1+\cos v)^2}}\frac{\sin v}{1+\cos v}\frac{1}{4}(a+ib)\frac{1}{(1+\cos v)^2} \\ &= \frac{1}{2}(a+ib)\frac{1}{1+\frac{\sin^2 v}{(1+\cos v)^2}}\frac{\sin v}{(1+\cos v)^3} \\ &= \frac{1}{2}(a+ib)\frac{\sin v}{[(1+\cos v)^2 + \sin^2 v](1+\cos v)} \\ &= \frac{1}{2}(a+ib)\frac{\sin v}{(2+2\cos v)(1+\cos v)} \\ &= \frac{1}{4}(a+ib)\frac{\sin v}{(1+\cos v)^2} \\ &= g_{z\bar{z}} \end{aligned}$$

Exemplo 4. (Imagem de geodésicas) Suponha que $\alpha(v)$, $v \in I$ é um segmento de geodésica sobre a esfera $\mathbb{S}^2$ cuja métrica em relação ao sistema de coordenadas (4.86) é dada por (4.87). Suponha ainda, que $\alpha(v)$ é representada neste sistema de coordenadas por

$$(x_1(v), x_2(v)), \quad (v \in I).$$

Temos

$$\frac{d^2x_k}{dv^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dv}\frac{dx_j}{dv} = 0, \quad (k = 1, 2) \tag{4.89}$$

onde Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel da conexão. Logo

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = -2x_1 \frac{\frac{2}{\tau^2} - 1 + x_1^2 + x_2^2}{\frac{4}{\tau^2}(x_1^2 + x_2^2) + (1 - x_1^2 - x_2^2)^2}$$

pois,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{\lambda_{1,\tau}} \frac{\partial}{\partial x_1} \lambda_{1,\tau} \\
&= -\frac{1}{2}\{\frac{4}{\tau^2}(x_1^2 + x_2^2) + (1 - x_1^2 - x_2^2)^2\}^{-3/2+1/2}\{\frac{8}{\tau^2}x_1 - 2(1 - x_1^2 - x_2^2)2x_1\} \\
&= -2x_1 \frac{\frac{2}{\tau^2} - 1 + x_1^2 + x_2^2}{\frac{4}{\tau^2}(x_1^2 + x_2^2) + (1 - x_1^2 - x_2^2)^2}
\end{aligned}$$

e

$$\Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2 = -2x_2 \frac{\frac{2}{\tau^2} - 1 + x_1^2 + x_2^2}{\frac{4}{\tau^2}(x_1^2 + x_2^2) + (1 - x_1^2 - x_2^2)^2}.$$

Agora, a primeira equação ($k = 1$) em (4.89) é

$$\frac{d^2x_1}{dv^2} + \Gamma_{11}^1 \left(\left(\frac{dx_1}{dv}\right)^2 - \left(\frac{dx_2}{dv}\right)^2 \right) + 2\Gamma_{22}^2 \frac{dx_1}{dv}\frac{dx_2}{dv} = 0. \tag{4.90}$$

Analogamente, verificamos que a segunda equação em (4.89) é

$$\frac{d^2x_2}{dv^2} + \Gamma_{22}^2 \left(\left(\frac{dx_2}{dv}\right)^2 - \left(\frac{dx_1}{dv}\right)^2 \right) + 2\Gamma_{11}^1 \frac{dx_1}{dv}\frac{dx_2}{dv} = 0. \tag{4.91}$$

Ao somarmos a equação (4.90) com (4.91) multiplicada por i, obtemos

$$\frac{d^2x_1}{dv^2} + i\frac{d^2x_2}{dv^2} + \left(\Gamma_{11}^1 - i\Gamma_{22}^2\right) \left(\left(\frac{dx_1}{dv}\right)^2 - \left(\frac{dx_2}{dv}\right)^2 \right) + 2\left(\Gamma_{22}^2 + i\Gamma_{11}^1\right) \frac{dx_1}{dv}\frac{dx_2}{dv} = 0,$$

isto é,

$$\frac{d^2x_1}{dv^2} + i\frac{d^2x_2}{dv^2} + \left(\Gamma_{11}^1 - i\Gamma_{22}^2\right) \left(\left(\frac{dx_1}{dv}\right)^2 - \left(\frac{dx_2}{dv}\right)^2 + 2i\frac{dx_1}{dv}\frac{dx_2}{dv} \right) = 0 \tag{4.92}$$

Esta equação nos permite afirmar que a aplicação,

$$g(z) = g(u+iv) = x_1(v) + ix_2(v), \quad u \in \mathbb{R},\, v \in I$$

satisfaz a equação (4.85). De fato, temos

$$\begin{aligned} g_z &= \partial_z x_1 + i\partial_z x_2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right)x_1 + i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right)x_2 \\ &= -\frac{i}{2}\frac{dx_1}{dv} + \frac{1}{2}\frac{dx_2}{dv}. \end{aligned}$$

Analogamente, $g_{\bar z} = \frac{i}{2}\frac{dx_1}{dv} - \frac{1}{2}\frac{dx_2}{dv}$. Portanto,

$$g_z g_{\bar z} = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{dx_1}{dv}\right)^2 - \left(\frac{dx_2}{dv}\right)^2 + 2i\frac{dx_1}{dv}\frac{dx_2}{dv}\right).$$

Além disso, $g_{z\bar z} = \frac{1}{4}\left(\frac{d^2x_1}{dv^2} + i\frac{d^2x_2}{dv^2}\right)$. Assim, a equação (4.92) é em termos de g,

$$\frac{1}{4}g_{z\bar z} + \left(\Gamma_{11}^1 - i\Gamma_{22}^2\right)\frac{1}{4}g_z g_{\bar z} = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 - i\Gamma_{22}^2 &= \Gamma_{11}^1(g(z)) - i\Gamma_{22}^2(g(z)) \\ &= \frac{1}{\lambda_{1,\tau}(g(z))}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\lambda_{1,\tau}\right)(g(z)) - \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\lambda_{1,\tau}\right)(g(z))\right\} \\ &= \frac{2}{\lambda_{1,\tau}(g(z))}\left(\lambda_{1,\tau}\right)_w(g(z)) \\ &= -2\frac{\frac{2}{\tau^2} - 1 + |g|^2}{\frac{4}{\tau^2}|g|^2 + (1-|g|^2)^2}\bar g g_{\bar z} g_z \end{aligned}$$

Portanto, a equação (4.92) é (4.85).

Exemplo 5. (Separação de variáveis) Suponha que $g(u+iv) = e^{iu}\varphi(v)$ seja uma solução da equação (4.85). Então, temos

$$\begin{aligned} g_z &= \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v})e^{iu}\varphi(v) \\ &= \frac{1}{2}\{\frac{\partial}{\partial u}(e^{iu}\varphi(v)) - i\frac{\partial}{\partial u}(e^{iu}\varphi(v))\} \\ &= \frac{1}{2}\{e^{iu}i\varphi(v) - ie^{iu}\varphi'(v)\} \\ &= \frac{i}{2}e^{iu}(\varphi - \varphi'). \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos $g_{\bar{z}} = \frac{i}{2}e^{iu}(\varphi + \varphi')$ e

$$\begin{aligned} g_{\bar{z}z} &= \frac{\partial}{\partial z}(g_{\bar{z}}) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v})[\frac{i}{2}e^{iu}(\varphi + \varphi')] \\ &= \frac{i}{4}\{\frac{\partial}{\partial v}[e^{iu}(\varphi + \varphi')] - i\frac{\partial}{\partial u}[e^{iu}(\varphi + \varphi')]\} \\ &= \frac{i}{4}\{ie^{iu}(\varphi + \varphi') - ie^{iu}(\varphi' + \varphi'')\} \\ &= -\frac{1}{4}e^{iu}(\varphi + \varphi' - \varphi' - \varphi'') \\ &= -\frac{1}{4}e^{iu}(\varphi - \varphi''). \end{aligned}$$

Agora, como $|g|^2 = \varphi^2$ e

$$\begin{aligned} \bar{g}g_z g_{\bar{z}} &= e^{-iu}\varphi\frac{i}{2}e^{iu}(\varphi + \varphi')\frac{i}{2}e^{iu}(\varphi - \varphi') \\ &= -\frac{1}{4}e^{iu}\varphi(\varphi^2 - (\varphi')^2), \end{aligned}$$

segue que a equação (4.85) é equivalente a

$$-\frac{1}{4}e^{iu}(\varphi - \varphi'') = -2\frac{\frac{2}{\tau^2} - 1 + \varphi^2}{\frac{4}{\tau^2}\varphi^2 + (1-\varphi^2)^2}\frac{1}{4}e^{iu}\varphi(\varphi^2 - (\varphi')^2),$$

isto é,

$$\varphi'' - \varphi = 2\frac{\frac{2}{\tau^2} - 1 + \varphi^2}{\frac{4}{\tau^2}\varphi^2 + (1-\varphi^2)^2}\varphi((\varphi')^2 - \varphi^2) \tag{4.93}$$

Assim, se a é uma constante não nula e φ é uma função real definida sobre um intervalo aberto I satisfazendo

$$(\varphi')^2 - \varphi^2 = a\{\frac{4}{\tau^2}\varphi^2 + (1-\varphi^2)^2\}, \tag{4.94}$$

com singularidades isoladas, então a aplicação

$$g(z) = g(u + iv) = e^{iu}\varphi(v), \quad u \in \mathbb{R},\ v \in I$$

satisfaz a equação (4.85). De fato, derivando (4.94), obtemos

$$2\varphi'\varphi'' - 2\varphi\varphi' = a\{\frac{4}{\tau^2}2\varphi\varphi' + 2(1-\varphi^2)(-2\varphi\varphi')\}.$$

Logo, como as singularidades de φ são isoladas, obtemos

$$\begin{aligned} \varphi'' - \varphi &= a\{\frac{4}{\tau^2}\varphi - 2(1-\varphi^2)\varphi\} \\ &= 2a\varphi\{\frac{2}{\tau^2}\varphi - (1-\varphi^2)\} \\ &= 2\varphi\frac{(\varphi')^2 - \varphi^2}{\frac{4}{\tau^2}\varphi^2 + (1-\varphi^2)^2}\{\frac{2}{\tau^2}\varphi - 1 + \varphi^2\} \\ &= 2\varphi\frac{\frac{2}{\tau^2}\varphi - 1 + \varphi^2}{\frac{4}{\tau^2}\varphi^2 + (1-\varphi^2)^2}\{(\varphi')^2 - \varphi^2\}, \end{aligned}$$

ou seja, a equação (4.93). Por exemplo, se $\tau > 1$ e $a = \frac{\tau^2}{4(\tau^2-1)}$, então a equação (4.94) torna-se

$$\begin{aligned}
(\varphi')^2 &= \frac{\tau^2}{4(\tau^2-1)}\{\frac{4}{\tau^2}\varphi^2 + (1-\varphi^2)^2\} + \varphi^2 \\
&= \frac{\tau^2}{4(\tau^2-1)}\{\frac{4}{\tau^2}\varphi^2 + 1 - 2\varphi^2 + \varphi^4\} + \varphi^2 \\
&= \frac{\tau^2}{4(\tau^2-1)}(1+\varphi^4) + \{1 + \frac{\tau^2}{4(\tau^2-1)}(\frac{4}{\tau^2} - 2)\}\varphi^2 \\
&= \frac{\tau^2}{4(\tau^2-1)}(1+\varphi^4) + (1 + \frac{2-\tau^2}{2(\tau^2-1)})\varphi^2 \\
&= \frac{\tau^2}{4(\tau^2-1)}(1+\varphi^4) + \frac{\tau^2}{2(\tau^2-1)}\varphi^2 \\
&= \frac{\tau^2}{4(\tau^2-1)}(1+\varphi^2)^2.
\end{aligned}$$

Assim, escolhendo φ tal que $\varphi(0) = 0$ e $\varphi' > 0$, obtemos

$$\frac{\varphi'}{1+\varphi^2} = \frac{\tau}{2\sqrt{\tau^2-1}},$$

donde

$$\arctan\varphi(v) - \arctan\varphi(0) = \frac{\tau}{2\sqrt{\tau^2-1}}(v-0)$$

Portanto,

$$\varphi(v) = \tan(\frac{\tau}{2\sqrt{\tau^2-1}}v).$$

4.7 Apêndice

A seguir, apresentamos os cálculos feitos para determinar o coeficiente da métrica conforme sobre $\mathbb{D}_\epsilon^\tau$ para a qual a imersão isométrica mínima $X : \Sigma \looparrowright \mathbb{S}^3_{\epsilon,\tau}$ tem aplicação de Gauss harmônica. Lembramos que quando X é mínima, então

$$g_{z\bar{z}} - 2\epsilon\frac{\frac{2}{\tau^2} - 1 + \epsilon|g|^2}{\frac{4}{\tau^2}(1-\frac{1}{\tau^2}) + (\frac{2}{\tau^2} - 1 + \epsilon|g|^2)^2}\bar{g}g_{\bar{z}}g_z = 0$$

Inicialmente, analisamos o sinal da expressão

$$\frac{4}{\tau^2}(1-\frac{1}{\tau^2}) + [\frac{2}{\tau^2} - 1 + \epsilon|w|^2]^2.$$

Escrevendo $w = x + iy$, definimos

$$A(x,y,\epsilon) := \frac{2}{\tau^2}(2-\frac{2}{\tau^2}) + [\frac{2}{\tau^2} - 1 + \epsilon(x^2+y^2)]^2.$$

Temos, deste modo,

$$A(x, y, \epsilon) = \frac{4\epsilon}{\tau^2}(x^2 + y^2) + \{1 - \epsilon(x^2 + y^2)\}^2.$$

Assim, para $\epsilon = 1$,

$$A(x, y, 1) = \frac{4}{\tau^2}(x^2 + y^2) + \{1 - (x^2 + y^2)\}^2 > 0.$$

Para $\epsilon = -1$, podemos supor que $0 \leq x^2 + y^2 < 1$, pois, neste caso, $|g| < 1$. Assim,

$$-\frac{4}{\tau^2} < -\frac{4}{\tau^2}(x^2 + y^2) \leq 0 \;\text{ e }\; 1 \leq \{1 + (x^2 + y^2)\}^2 < 4.$$

Logo,

$$-\frac{4}{\tau^2} + 1 < A(x, y, -1) < 4.$$

Portanto, $A(x, y, -1) > 0$ quando $-\frac{4}{\tau^2} + 1 \geq 0$ (i.e. $\tau \geq 2$). Observamos, ainda, que $A(0, 0, -1) = 1$ e a equação $A(x, y, -1) = 0$ é equivalente a

$$h(r) := -\frac{4}{\tau^2}r^2 + (1 + r^2)^2 = 0, \text{ onde } r^2 = x^2 + y^2.$$

Logo,

$$1 + r^2 = \frac{2}{\tau}r$$

equação cuja solução é, quando $1 - \tau^2 \geq 0$ (i.e. $0 < \tau \leq 1$),

$$r_1 = \frac{1}{\tau}(1 + \sqrt{1 - \tau^2}) \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1}{\tau}(1 - \sqrt{1 - \tau^2}).$$

Temos $r_1 \geq 1$. De fato,

$$0 < \tau \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\tau} \geq 1 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{\tau}(1 + \sqrt{1 - \tau^2}) \geq 1 + \sqrt{1 - \tau^2} \geq 1.$$

Por outro lado, $0 < r_2 \leq 1$. De fato,

$$\begin{aligned}
0 < \tau \leq 1 \quad &\Rightarrow \quad 2\tau^2 \leq 2\tau \\
&\Rightarrow \quad 1 - 2\tau + \tau^2 \leq 1 - \tau^2 \\
&\Rightarrow \quad 1 - \tau \leq \sqrt{1 - \tau^2} \\
&\Rightarrow \quad 1 - \sqrt{1 - \tau^2} \leq \tau \\
&\Rightarrow \quad r_2 = \frac{1}{\tau}(1 - \sqrt{1 - \tau^2}) \leq 1.
\end{aligned}$$

Portanto, a equação $A(x, y, -1) = 0$, onde $(x, y) \in \bar{\mathbb{D}}$, tem solução radial quando $0 < \tau \leq 1$ e é $r_0 := \frac{1}{\tau}(1 - \sqrt{1 - \tau^2})$ $(= x^2 + y^2)$. Note que $r_1 = r_0 + \frac{2}{\tau}\sqrt{1 - \tau^2}$ e quando $\tau = 1$, então $r_0 = 1$. Além disso, para $\tau > 1$ e $(x, y) \in \mathbb{D}$, temos $A(x, y, -1) >> 0$.

Concluímos que a expressão $A(x,y,\epsilon)$ é positiva em

$$\mathbb{D}_\epsilon^\tau = \begin{cases} \mathbb{C}, & \epsilon = 1, \ \ 0 < \tau \\ \mathbb{D}_{r_0}, & \epsilon = -1, \ 0 < \tau \leq 1. \end{cases}$$

De agora em diante, vamos considerar $(x,y) \in \mathbb{D}_\epsilon^\tau$.

Para obter a harmonicidade de g, observamos que, em vista de (1.54), os símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana da métrica $g_{ij} = \lambda^2\delta_{ij}$ sobre $\mathbb{D}_\epsilon^\tau$ devem satisfazer

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda_x}{\lambda} = -2\epsilon \frac{\frac{2}{\tau^2} - 1 + \epsilon(x^2+y^2)}{\frac{2}{\tau^2}(2-\frac{2}{\tau^2}) + [\frac{2}{\tau^2} - 1 + \epsilon(x^2+y^2)]^2} x \tag{4.95}$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{\lambda_y}{\lambda} = -2\epsilon \frac{\frac{2}{\tau^2} - 1 + \epsilon(x^2+y^2)}{\frac{2}{\tau^2}(2-\frac{2}{\tau^2}) + [\frac{2}{\tau^2} - 1 + \epsilon(x^2+y^2)]^2} y. \tag{4.96}$$

Seja $\mu = \frac{2}{\tau^2} - 1$, logo $\frac{2}{\tau^2} = 1 + \mu$ e $2 - \frac{2}{\tau^2} = 1 - \mu$. Assim, as equações (4.95) e (4.96) podem ser escritas como

$$(\ln\lambda)_x = -2\epsilon \frac{\mu + \epsilon(x^2+y^2)}{1 - \mu^2 + [\mu + \epsilon(x^2+y^2)]^2} x \tag{4.97}$$

$$(\ln\lambda)_y = -2\epsilon \frac{\mu + \epsilon(x^2+y^2)}{1 - \mu^2 + [\mu + \epsilon(x^2+y^2)]^2} y. \tag{4.98}$$

Temos

$$\begin{aligned} (\ln\lambda)_{xy} &= -\frac{2\epsilon x}{\{1-\mu^2+[\mu+\epsilon(x^2+y^2)]^2\}^2}\{2\epsilon y[1-\mu^2+(\mu+\epsilon(x^2+y^2))^2] \\ &\quad -[\mu+\epsilon(x^2+y^2)]2[\mu+\epsilon(x^2+y^2)]2\epsilon y\} \\ &= \frac{-4\epsilon^2 xy}{\{1-\mu^2+[\mu+\epsilon(x^2+y^2)]^2\}^2}\{1-\mu^2+[\mu+\epsilon(x^2+y^2)]^2 \\ &\quad -2[\mu+\epsilon(x^2+y^2)]^2\} \\ &= \frac{-4\epsilon^2 xy}{\{1-\mu^2+[\mu+\epsilon(x^2+y^2)]^2\}^2}\{1-\mu^2-[\mu+\epsilon(x^2+y^2)]^2\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\ln\lambda)_{yx} &= -\frac{2\epsilon y}{\{1-\mu^2+[\mu+\epsilon(x^2+y^2)]^2\}^2}\{2\epsilon x[1-\mu^2+(\mu+\epsilon(x^2+y^2))^2] \\ &\quad -[\mu+\epsilon(x^2+y^2)]2[\mu+\epsilon(x^2+y^2)]2\epsilon x\} \\ &= \frac{-4\epsilon^2 xy}{\{1-\mu^2+[\mu+\epsilon(x^2+y^2)]^2\}^2}\{1-\mu^2+[\mu+\epsilon(x^2+y^2)]^2 \\ &\quad -2[\mu+\epsilon(x^2+y^2)]^2\} \\ &= \frac{-4\epsilon^2 xy}{\{1-\mu^2+[\mu+\epsilon(x^2+y^2)]^2\}^2}\{1-\mu^2-[\mu+\epsilon(x^2+y^2)]^2\}. \end{aligned}$$

Portanto $(\ln\lambda)_{xy} = (\ln\lambda)_{yx}$. Logo em um domínio simplesmente conexo, temos

$$\ln\lambda = -2\epsilon \int^x \frac{\mu+\epsilon(x^2+y^2)}{1-\mu^2+[\mu+\epsilon(x^2+y^2)]^2} x dx$$

Agora, para resolvermos a integral acima, fazemos $z = \mu + \epsilon(x^2 + y^2)$ de modo que $dz = 2\epsilon x dx$. Logo,

$$2\epsilon \int \frac{\mu + \epsilon(x^2+y^2)}{1 - \mu^2 + [\mu + \epsilon(x^2+y^2)]^2} x dx = \int \frac{z}{1-\mu^2+z^2} dz = \frac{1}{2}\ln(1-\mu^2+z^2) + C.$$

Portanto,

$$\ln \lambda = -\frac{1}{2}\ln\{1-\mu^2+[\mu+\epsilon(x^2+y^2)]^2\} + C(y),$$

donde

$$\begin{aligned}(\ln\lambda)_y &= -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\mu^2+[\mu+\epsilon(x^2+y^2)]^2}\{2[\mu+\epsilon(x^2+y^2)]2\epsilon y\} + C'(y) \\ &= -2\epsilon\frac{\mu+\epsilon(x^2+y^2)}{1-\mu^2+[\mu+\epsilon(x^2+y^2)]^2} y + C'(y).\end{aligned}$$

Portanto, de (4.98) segue que $C'(y) = 0$. Tomamos $C(y) = C = 0$ e concluímos que

$$\ln\lambda = -\frac{1}{2}\ln\{1-\mu^2+[\mu+\epsilon(x^2+y^2)]^2\},$$

isto é,

$$\lambda^2(w) = \lambda^2_{\epsilon,\tau}(w) = \frac{1}{\frac{4}{\tau^2}(1-\frac{1}{\tau^2}) + [\frac{2}{\tau^2} - 1 + \epsilon|w|^2]^2} \tag{4.99}$$

equivalentemente,

$$\lambda^2_{\epsilon,\tau}(w) = \frac{1}{\frac{4\epsilon}{\tau^2}|w|^2 + (1-\epsilon|w|^2)^2} \tag{4.100}$$

No caso em que $\epsilon = -1$, podemos estabelecer

Proposição 4.7.1. *Para $0 < \tau \leq 1$, o disco $\mathbb{D}_{r_0}$ com coordenadas $w = x + iy$ e métrica Riemanniana conforme,*

$$ds^2 = \lambda^2_{-1,\tau}|dw|^2 \quad \text{onde} \quad \lambda^2_{-1,\tau}(w) = \frac{1}{-\frac{4}{\tau^2}|w|^2 + (1+|w|^2)^2}$$

é completa.

Prova. De fato, é suficiente mostrar que as curvas da forma

$$\alpha(r) = (a,b)r, \quad r \in [0, r_0) \quad \text{onde} \quad a^2 + b^2 = 1$$

têm comprimento infinito. Lembramos que

$$r_0 = \frac{1}{\tau}(1 - \sqrt{1-\tau^2}) \quad \text{e} \quad r_1 = \frac{1}{\tau}(1 + \sqrt{1-\tau^2})$$

são as soluções da equação $1 - \frac{2}{\tau}r + r^2 = 0$. Assim, se $0 < \tau \leq 1$ e $0 \leq r \leq r_0 - \delta$, onde $\delta > 0$ é pequeno, as funções

$$h_1(r) = \frac{r_1 - r}{r_0 - r} = 1 + \frac{2\sqrt{1-\tau^2}}{\tau(r_0 - r)}$$

$$h_2(r) = \frac{r_1 + r}{r_0 + r} = 1 + \frac{2\sqrt{1-\tau^2}}{\tau(r_0 + r)}$$

satisfazem

$$h_1'(r) = \frac{2\sqrt{1-\tau^2}}{\tau(r_0 - r)^2} \quad \text{e} \quad h_2'(r) = -\frac{2\sqrt{1-\tau^2}}{\tau(r_0 + r)^2}.$$

Assim, h_1 é crescente e h_2 é decrescente em $0 \leq r \leq r_0 - \delta$. Portanto

$$h_1(r) = \frac{r_1 - r}{r_0 - r} \leq h_1(r_0 - \delta) = 1 + \frac{2\sqrt{1-\tau^2}}{\tau\delta} =: C_1(\tau, \delta)$$

$$h_2(r) = \frac{r_1 + r}{r_0 + r} \leq h_+(0) = 1 + \frac{2\sqrt{1-\tau^2}}{\tau r_0} =: C_2(\tau)$$

Segue que, em $0 \leq r \leq r_0 - \delta$, temos

$$r_1^2 - r^2 \leq C(\tau, \delta)(r_0^2 - r^2)$$

onde $C = C_1 C_2$. Isto nos permite concluir que, quando $0 < \tau \leq 1$ e $0 \leq r \leq r_0 - \delta$, ocorre

$$-\frac{4}{\tau^2}r^2 + (1 + r^2)^2 \leq C(\tau, \delta)(r_0^2 - r^2)^2. \tag{4.101}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
(1 + r^2)^2 - \frac{4}{\tau^2}r^2 &= (1 + r^2 - \frac{2}{\tau}r)(1 + r^2 + \frac{2}{\tau}r) \\
&= (r - r_0)(r - r_1)(r + r_0)(r + r_1) \\
&= (r^2 - r_0^2)(r^2 - r_1^2) \\
&= (r_0^2 - r^2)(r_1^2 - r^2) \\
&\leq C(\tau, \delta)(r_0^2 - r^2)^2.
\end{aligned}$$

Assim, de (4.101), obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^{r_0} |\alpha'(r)| dr &= \lim_{\delta \downarrow 0} \int_0^{r_0-\delta} \frac{dr}{\sqrt{-\frac{4}{\tau^2}r^2 + (1+r^2)^2}} \\
&\geq \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{C(\tau,\delta)}} \int_0^{r_0-\delta} \frac{dr}{r_0^2 - r^2} \\
&= \frac{1}{2r_0\sqrt{C_2(\tau)}} \lim_{\delta \downarrow 0} \sqrt{\frac{\tau\delta}{\tau\delta + 2\sqrt{1-\tau^2}}} \int_0^{r_0-\delta} \{\frac{1}{r_0+r} + \frac{1}{r_0-r}\} dr \\
&= \frac{1}{2r_0\sqrt{C_2(\tau)}} \lim_{\delta \downarrow 0} \sqrt{\frac{\tau\delta}{\tau\delta + 2\sqrt{1-\tau^2}}} \left(\ln\left(\frac{r_0+r}{r_0-r}\right) \Big|_{r=0}^{r=r_0-\delta} \right) \\
&= \frac{1}{2r_0\sqrt{C_2(\tau)}} \lim_{\delta \downarrow 0} \sqrt{\frac{\tau\delta}{\tau\delta + 2\sqrt{1-\tau^2}}} \ln(\frac{2r_0-\delta}{\delta}) \\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] ABRESH, U.; ROSENBERGH, H. Generalized Hopf differentials. *Mat. Contemp.*, v. 28, p. 1-28, 2005.

[2] BAÑADOS, M.; TEITELBOIM, C.; ZANELLI, J., Geometry of the $2+1$ black hole. *Phys. Rev. D.*, v. 48, n. 4, p. 1506-1525, 1993.

[3] BARBOSA, J. L. M.; COLARES, A.G. *Minimal surfaces in* $\mathbb{R}^3$. Berlin: Sringer-Verlag, 1986. 121 p. (Lecture Notes in Mathematics, 1195).

[4] BERDINSKY, D. A.; TAIMANOV, I. A. Surfaces in three-dimensional Lie groups. *Siberian Math. J.*, v. 46, n.6, p. 1005-1019, 2205.

[5] BERDINSKY, D. A.; TAIMANOV, I. A. Surfaces of revolution in the Heisenberg group and the spectral generalization of the Willmore functional. *Siberian Math. J.*, v. 48, n. 3, p. 395-407, 2007.

[6] BOBENKO, A. All constant mean curvature tori in $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{H}^3$ in terms of theta-functions. *Math. Ann.*, v. 290, p. 209-245, 1991.

[7] BRANDER, D.; ROSSMAN, W.; SCHMITT, N. Holomorphic representation of constant mean curvature surfaces in Minkowski space: consequences of non-compactness in loop group methods. 2008. preprint.

[8] CAVALCANTE, M. P.; LIRA, J. H. de Examples and structure of CMC surfaces in some riemannian and lorentzian homogeneous space. *Michigan Math. J.*, v. 55, p. 163-181, 2007.

[9] CHEEGER, J.; EBIN, D. *Comparison theorems in riemannian geometry.* Amsterdam: North-Holland, 1975. 174 p.

[10] DANIEL, B. The Gauss map of minimal sufaces in the Heisenberg group. arXiv:math.DG/0606299 v1.

[11] DANIEL, B. Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds. *Comment. Math. Helv.*, v. 82, n. 1, p. 87-131, 2007.

[12] DARBOUX, G. *Leçons sur la théorie générale des surfaces.* Chelsea. AMS, 1972.

[13] DORFMEISTER, J.; PEDIT, F.; WU, H.Y., Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces. *Comm. in Analysis and Geom.*, v. 6, p. 633-668, 1998.

[14] EISENHARD, L. P. *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces.* New York: Dover 1909. 493 p.

[15] FRIEDRICH, T. On the spinor representation of surfaces in Euclidean 3-space. *J. Geom. Phys.*, v. 28, p. 1-2, 143-157, 1998.

[16] FOKAS, A.; GELFAND, I. M. Surfaces on Lie groups, on Lie algebras, and their integrability. *Comm. Math. Phys.*, v. 177, n.1, p. 203-220, 1996.

[17] FERNÁNDEZ, I.; MIRA, P. Harmonic maps and constant mean curvature surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Amer. J. Math.*, v. 129, p. 1144-1181, 2007.

[18] FUJIMORI, S.; KOBAYASHI, S. P.; ROSSMAN, W., *Loop group methods for constant mean curvature surfaces,* Rokko Lectures in Math. **17**, 2005.

[19] HÉLEIN, F. *Constant mean curvature surfaces, harmonic maps and integrable systems.* Boston: Birkhäuser, 2001. 122 p.

[20] HURTADO, A. Instability of Hopf vector fields on Lorentzian Berger spheres, ArXiv: 0803.2487v1[math.DG], 2008.

[21] INOGUCHI, J. I. Minimal surfaces in the 3-dimensional Heisenberg group. *Differential Geometry - Dynamical Systems*, v. 10, p. 163-169, 2008.

[22] JOST, J. *Riemannian geometry and geometric analysis*, Springer-Verlag, 1998. 455 p.

[23] KENMOTSU, K. Weiertrass formula for surfaces of prescribed mean curvature, *Math. Ann.*, v. 245, p. 89-99, 1979.

[24] KOKUBU, M. Weierstrass representation for minimal surfaces in hyperbolic space, *Tôhoku Math. J.*, v. 49, p. 367-377, 1997.

[25] KONOPELCHENKO, B.; TAIMANOV, I. Constant mean curvature surfaces via an integrable dynamical system, *J. Phys. A.*, v. 29, n. 6, p. 1261-1265, 1996.

[26] KUSNER, R.; SCHMITT, N. The spinor representation of surfaces in space. 1996. preprint.

[27] LEE, J. M. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature.* Berlin: Springer-Verlag, 1997. 244 p.

[28] MERCURI, F.; MONTALDO, S.; PIU, P. A Weierstrass representation formula for minimal surfaces in $\mathbb{H}_3$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Acta Math. Sinica*, v. 22, n. 6, p. 1603-1612, 2006.

[29] MIRA, P. *Geometría de las superficies maximales en el espacio de Lorentz-Minkowski.* Tesina de Licenciatura, Universidad de Murcia, 2000.

[30] MORGAN, J. *The Seiberg-Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds.* New York: Mathematical Notes, 44. Princeton, Princeton University Press, 1996. 128 p.

[31] O'NEILL, B. *Semi-Riemannian geometry: with applications to relativity.* New York: Academic Press, 1983. 468 p.

[32] PETERSEN, P. *Riemannian geometry*, 2nd ed. Berlin: Springer,(Graduate texts in Mathematics), 2006.

[33] PINKALL, U.; STERLING, I. On the classification of constant mean curvature tori. *Annals of Math.,* v. 130, p. 407-451, 1989.

[34] PUZIO, R. The Gauss map and 2+1 gravity, *Class. Quantum Grav.*, v. 11, p. 2667-2675, 1994.

[35] RUH, E.; WILMS, J. The tension field of the Gauss map, *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 149, p. 569-573, 1970.

[36] SÁ EARD, R.; TOUBIANA, E. A Weierstrass-Kenmotsu formula for prescribed mean curvature surfaces in hyperbolic space, *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie,* v. 19, 9-23, Année 2000-2001.

[37] SHARPE, R. W. *Differential Geometry: Cartan's generalization of Klein's erlangen program,* Berlin: Springer, 1997. 421 p.

[38] SPRUCK, J. *The elliptic sinh Gordon equation and the construction of toroidal soap bubbles.* Calculus of variations and partial differential equations, (Lecture Notes in Math., 1340), Berlin: Springer, 1988.

[39] TAIMANOV, I. A. Dirac operators and conformal invariants of tori in three-dimensional space, *Proc. Steklov Inst. Math.*, v. 244, n. 1 p. 233-263, 2004.

[40] VALTANCOLI, P. $(2+1)$ gravity on Riemann surfaces in conformal gauge. *Classical Quantum Gravity*, v. 14, n. 7, p. 1795-1809, 1997.

[41] VITÓRIO, F. M. A., *Imersões isométricas em produtos riemannianos e no espaço anti-de Sitter*, Tese (Doutorado em Matemática), Universidade Federal do Ceará, 2007. 130 f.

[42] WENTE, H. Counterexample to a conjecture of H. Hopf, *Pacific J. Math.*, v. 121, p. 193-243, 1986.

[43] XIN, Y. *Minimal submanifolds and related topics.* Singapure: World Scientific, 2003. 262 p.