UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Maria Silvana Alcantara Costa

SOBRE SUBVARIEDADES COM SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL DOMINADA EM ESPAÇOS DE HADAMARD

Fortaleza
2007

Maria Silvana Alcantara Costa

SOBRE SUBVARIEDADES COM SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL DOMINADA EM ESPAÇOS DE HADAMARD

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutora em Matemática.

Orientador:
Prof. Gregório Pacelli Feitosa Bessa.
Co-Orientador:
Prof. José Fábio Bezerra Montenegro.

Fortaleza
2007

Costa, Maria Silvana Alcantara
C875s Sobre Subvariedades com Segunda Forma Fundamental
Dominada em Espaços de Hadamard/Maria Silvana Alcantara
Costa - Fortaleza: 2007.

Orientador: Prof. Gregório Pacelli Feitosa Bessa.

Co-Orientador: Prof. José Fábio Bezerra Montenegro.

1.Geometria diferencial
CDD 516.36

Dedicatória

À memória dos professores Anilberto Pereira e Maria Cleonice.

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos

A Deus, pelos amigos e pelos Orientadores.

Aos professores G. Pacelli F. Bessa e J. Fábio Montenegro pela orientação, pelos ensinamentos e pela assintência, os quais foram imprescindíveis para o desenvolvimento deste trabalho e por quem tenho imensa admiração.

A minha familia e minhas amigas, Adelaide, Patricia, Julia, Selene e Terezinha, o apoio destas foi fundamental para o ingresso na universidade.

Aos meus professores de graduação do curso de matemática da URCA, Evandro Carlos, Carlos Alberto, Mario de Oliveira e Wilson Hugo, pelo incentivo e apoio.

A meus amigos da pós-graduação em especial a Feliciano, Cicero, Tony, Marcelo, Jobson, Luiza, Cristiane Brandão, Laires, Ricardo e Lyngnys pelas boas conversas na hora do café.

Aos professores Geraldo de Oliveira - (UENF) e Walcy Santos - (UFRJ) pelas correções e sugestões propostas.

Aos professores da pós-graduação em matemática da UFC, em particular a Levi Lima pelas excelentes aulas ministradas e a Luquésio Jorge pelas brilhantes idéias.

A Andrea Costa Dantas pela assintência que sempre tem dado aos alunos.

A todos os amigos da UFC do Campus do Cariri pelo apoio, em especial Vilma Sudério, Luiz Alberto, Luiz Manoel, Marcelo Santiago e José Berthier.

Ao CNPq e CAPES, pois parte deste trabalho foi realizada com o apoio do Conselho Nacional de Pesquisa de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq - Brasil e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-CAPES.

Os números são como as pessoas, se você os tortura eles confessam!
Paul Erdös.

RESUMO

Nosso trabalho tem como objeto de estudo subvariedades em espaços de Hadamard e em espaços produto $N \times \mathbb{R}$ onde N é uma variedade Riemanniana completa com pólo e curvaturas seccionais radiais limitadas superiormente.

Em espaços de Hadamard mostramos que imersões com norma da segunda forma fundamental dominada são próprias e tem topologia finita. As subvariedades do espaço Euclideano com essa condição sobre a segunda forma fundamental tem tom fundamental nulo.

Sobre o espaço produto $N \times \mathbb{R}$, inicialmente estudamos hipersuperfícies imersas contidas em um cilindro vertical. Observamos que, apartir de uma certa limitação no vetor curvatura média, estas hipersuperfícies são não parabólicas. Outro resultado obtido é a não existência de hipersuperfícies completas imersas em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ com curvatura de Ricci com decaimento super quadrático, $Ric_M \geq -c^2\,[1 + \rho_M(x)^2 \cdot \log^2(\rho_M(x) + 2)]$ e curvatura média com $\sup|H| < (n-1)/n$ contidas em um cilindro vertical. Para subvariedades mínimas $M \subset N \times \mathbb{R}$ de dimensão m mostramos que o tom fundamental de domínios limitados $\Omega \subset M$ satisfaz a seguinte desigualdade $\lambda^*(\Omega) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r))$, onde $B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r)$ é a bola geodésica das Formas Espaciais $\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)$ de dimensão $(m-1)$ e curvatura seccional constante κ.

Sumário

Introdução

Nosso trabalho tem como objeto de estudo subvariedades em espaços de Hadamard e em espaços produto $N\times\mathbb{R}$ onde N é uma variedade Riemanniana completa com pólo e curvaturas seccionais radiais limitadas superiormente.

Em espaços de Hadamard mostramos que imersões com norma da segunda forma fundamental dominada são próprias e tem topologia finita. As subvariedades do espaço Euclideano com essa condição sobre a segunda forma fundamental tem tom fundamental nulo.

Sobre o espaço produto $N \times \mathbb{R}$, inicialmente estudamos hipersuperfícies imersas contidas em um cilindro vertical. Observamos que, apartir de uma certa limitação no vetor curvatura média, estas hipersuperfícies são não parabólicas. Outro resultado obtido é a não existência de hipersuperfícies completas imersas em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ com curvatura de Ricci com decaimento super quadrático, $Ric_M \geq -c^2\left[1+\rho_M(x)^2\cdot\log^2(\rho_M(x)+2)\right]$ e curvatura média com $\sup|H| < (n-1)/n$ contidas em um cilindro vertical. Para subvariedades mínimas $M \subset N \times \mathbb{R}$ de dimensão m mostramos que o tom fundamental de domínios limitados $\Omega \subset M$ satisfaz a seguinte desigualdade $\lambda^*(\Omega) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r))$, onde $B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r)$ é a bola geodésica das Formas Espaciais $\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)$ de dimensão $(m-1)$ e curvatura seccional constante κ.

Nós dividimos o trabalho em quatro capítulos onde os assuntos foram distribuidos da seguinte forma. No capítulo 01, fizemos uma breve descrição dos resultados básicos necessários para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes. Dentre eles, destacamos o Teorema de Comparação do Hessiano, o Lema de Isotopia da teoria de Morse e concluimos com algumas considerações sobre o primeiro autovalavor do Laplaciano.

No capítulo seguinte apresentamos o resultado principal deste trabalho da seguinte forma. Começamos definindo a classe das subvariedades com segunda forma fundamental dominada. Consideramos $\varphi : M \to N$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana completa M de dimensão

m em uma variedade de Hadamard N de dimensão n com curvatura seccional $K_N \leq \kappa \leq 0$. Fixamos um ponto $x_0 \in M$ e denotamos $\rho_M(x) = \mathrm{dist}(x_0, x)$ a função distância em M ao ponto x_0. Se $\{C_i\}_{i=0}^{\infty}$ é uma exaustão de M por conjuntos compactos com $x_0 \in C_0$, a sequência $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ definida por

$$a_i(x_0, C_i) = \sup \left\{ \frac{S_\kappa(\rho_M(x))}{C_\kappa(\rho_M(x))} \cdot \|\alpha(x)\|, \, x \in M \backslash C_i \right\},$$

é não decrescente, onde

$$S_\kappa(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sinh(\sqrt{-\kappa}\, t), & se \quad \kappa < 0 \\ \qquad t, & se \quad \kappa = 0, \end{cases}$$

onde $C_\kappa(t) = S'_\kappa(t)$ e α é a segunda forma fundamental de φ em x. Associado a $\varphi(M)$ existe um número $a(M) \in [0, \infty]$ definido por

$$a(M) = \lim_{i \to \infty} a_i(x_0, C_i). \tag{1}$$

Dizemos que $\varphi : M \hookrightarrow N$ tem segunda forma fundamental dominada se $a(M) < 1$. Em [3], Bessa, Jorge e Montenegro mostraram que subvariedades do $\mathbb{R}^n$ com segunda forma fundamental dominada são propriamente imersas e tem topologia finita. Nós estendemos este resultado para subvariedades em espaços de Hadamard. Nosso resultado é o seguinte teorema.

Teorema 0.1. *Seja $\varphi : M \to N$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana completa M de dimensão m em uma variedade de Hadamard N de dimensão n com curvaturas seccionais $K_N \leq \kappa \leq 0$. Suponha que $a(M) < 1$. Então*

a. φ é própria.

b. M tem topologia finita.

Um resultado similar foi obtido para subvariedades mínimas. Neste caso a hipótese será feita sobre a curvatura de Ricci. Fixe um ponto $x_0 \in M$ e considere uma exaustão $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ of M por conjuntos compactos com $x_0 \in B_0$. Denote

$$b_i = \inf \left\{ \frac{S_\kappa^2(\rho_M(x))}{C_\kappa^2(\rho_M(x))} Ric_x(\nu, \nu), x \in M \backslash B_i, |\nu| = 1 \right\}. \tag{2}$$

Pelo lema de Gauss $Ric_x(\nu, \nu) \leq 0$ para todo $x \in M$ e todo $\nu \in T_x M$. Defina $b(M) = \lim_{i \to \infty} b_i \in [-\infty, 0]$. Nestas condições temos.

Teorema 0.2. *Seja $\varphi : M \to N$ uma subvariedade mínima completa M de dimensão m em uma variedade de Hadamard N de dimensão n. Suponha que $b(M) > -1$. Então,*

a. φ é própria.

b. M tem topologia finita.

No capítulo 03 trabalhamos com Hipersuperfícies completas imersas em espaços produto $N \times \mathbb{R}$ onde N é uma variedade Riemanniana completa com pólo e curvaturas seccionais radiais limitadas superiormente por uma constante $-\kappa^2$. Em [4], Bessa e Montenegro mostraram que a curvatura média de hipersuperfícies compactas imersas em $N^n \times \mathbb{R}$ satisfaz $|H| > (n-1)\kappa/n$. Nós estendemos o resultado de Bessa e Montenegro para hipersuperfícies completas imersas cilindricamente limitadas M em $N^n \times \mathbb{R}$ com curvatura de Ricci com decaimentro super quadrático

$$Ric_M \geq -c^2[1 + \rho_M(x)^2 \cdot \log^2(\rho_M(x) + 2)]$$

onde $\rho_M(x) = \operatorname{dist}(x_0, x)$ é a função distância em M ao ponto $x_0 \in M$ e $c = c(x_0) > 0$ é uma constante dependendo de x_0. Este trabalho faz parte de um artigo com G. Pacelli Bessa aceito para publicação no jornal *Differential Geometry and its Applications*. Nós provamos o seguinte resultado.

Teorema 0.3. *Seja N uma variedade Riemanniana completa n-dimensional com pólo e curvaturas seccionais radiais $K_N \leq -\kappa^2 < 0$. Seja $\varphi : M \to N \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície imersa completa. Então*

a. Se $\varphi(M)$ é cilindricamente limitada e tem curvatura média
$|H| < (n-2)\kappa/n$ então M é não parabólica.

b. Se $\varphi(M)$ é cilindricamente limitada e M tem curvatura de Ricci com decaimento super quadrático então $\sup_M |H| \geq (n-1)\kappa/n$

Uma consequencia imediata do teorema (3.5) é a não existência de hipersuperfícies completas imersas em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ com curvatura de Ricci com decaimento super quadrático e curvatura média com $\sup |H| < (n-1)/n$ contida em um cilindro vertical

Finalmente, concluímos este trabalho com estimativas para o tom fundamental de subvariedades em variedades de Hadamard e em $N \times \mathbb{R}$. Para as subvariedades com segunda forma fundamental dominada em espaços de Hadamard a estimativa obtida é a seguinte.

Teorema 0.4. *Seja $\varphi : M \to N$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana completa M de dimensão m em uma variedade de Hadamard N de dimensão n com curvaturas seccionais $\kappa \leq K_N \leq 0$. Suponha que $a(M) < 1$. Então existe $l \in \mathbb{Z}_+$ e uma constante $C = C(H, m, a(M), \kappa)$ tal que*

$$\lambda^*(M) \leq C\lambda^*(\mathbb{N}^l(\kappa)). \tag{3}$$

onde $\mathbb{N}^l(\kappa)$ é a Forma Espacial de curvatura seccional constante κ.

Observemos que se $\mathbb{N}^l(\kappa) = \mathbb{R}^l$, então $\lambda^*(M) = 0$.

Em [6] Bessa e Montenegro dão uma estimativa para autovalores de subvariedades mínimas de uma variedadede Riemanniana N com curvatura seccional radial limitada superiormente. Eles mostram o seguinte resultado.

Teorema 0.5. (Bessa - Montenegro) *Seja N uma variedade Riemanniana completa de dimensão n e curvatura seccional radial $K(x)(\frac{\partial}{\partial t}, v) \leq \kappa$ para todo $x \in B_N(x_0, r)\backslash Cut(x_0)$, e para todo $v \perp \frac{\partial}{\partial t}$ com $|v| \leq 1$. Seja $M \subset N$ uma subvariedade mínima de dimensão m e $\Omega \subset M \cap B_N(x_0, r)$ uma componente conexa. Suponha que a medida de Hausdorff $(n-1)$-dimensional $\mathcal{H}^{n-1}($ $Cut(x_0)$ $\cap B_N(x_0, r)) = 0$. Se $\kappa > 0$ suponha que $r < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$. Então*

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^m(\kappa)}(r)) \tag{4}$$

onde $B_{\mathbb{N}^m(\kappa)}(r)$é a bola geodésica de raio $r > 0$ da Forma Espacial $\mathbb{N}^m(\kappa)$ de curvatura seccional constante κ. Se Ω é limitada então a igualdade em (4) vale quando $\Omega = B_{\mathbb{N}^m(\kappa)}(r)$ e $M = \mathbb{N}^m(\kappa)$.

Para subvariedades mínimas de $N \times \mathbb{R}$ obtemos.

Teorema 0.6. *Seja N uma variedade Riemanniana completa de dimensão n com pólo e curvaturas seccionais radiais limitadas superiormente $K_N \leq \kappa$. Seja $\varphi : M \hookrightarrow N \times \mathbb{R}$ uma subvariedade mínima completa M de dimensão m em uma variedade produto $N \times \mathbb{R}$ e $\Omega \subset M \cap (B_N(r) \times \mathbb{R})$ uma componente conexa. Se $\kappa > 0$ suponha que $r < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$. Então*

$$\lambda^*(\Omega) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r)), \tag{5}$$

onde $B_N(r)$ e $B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r)$ são as bolas geodésicas de raio r respectivamente de N e da Forma Espacial $\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)$ de curvatura seccional constante κ.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo fazemos uma breve descrição dos resultados básicos necessários para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes. Embora não incluimos detalhes das provas desses resultados, colocamos as referências onde podem ser encontrados.

1.1 O Hessiano da Função Distância

Seja M uma variedade Riemanniana completa, conexa de dimensão m. Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável[1] em M, então o gradiente de f, denotado por grad$f$, é o único campo de vetores que em cada ponto $x \in M$ satisfaz

$$\langle \operatorname{grad} f, X \rangle = X(f), \tag{1.1}$$

para todo $X \in T_xM$. Se a função f é diferenciável, podemos definir o Hessiano de f como a forma bilinear simétrica $\operatorname{Hess} f(x)$: $T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$, dada por

$$\operatorname{Hess} f(x)(X,Y) = (XY\, f)\,(x) - (\nabla_X Y)\,(f)\,(x) \tag{1.2}$$

para todo $x \in M$, $X, Y \in T_xM$, onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

A função distância ao ponto $x_0 \in M$, denotada por $\rho_M(x) = \operatorname{dist}_M(x_0, x)$, é diferenciável em $M\setminus(\operatorname{Cut}(x_0) \cup \{x_0\})$ onde $\operatorname{Cut}(x_0)$ é o cut locus de x_0. Para todo $x \in M\setminus(\operatorname{Cut}(x_0) \cup \{x_0\})$ existe uma única geodésica minimizante $\gamma : [0, \rho(x)] \to M$ ligando x_0 a x. Tome $X \in T_xM$ e extenda-o a um campo

[1]Neste trabalho dizemos que uma função $f : M \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $\Omega \subset M$ se $f \in C^2(\Omega)$.

de Jacobi J ao longo de γ tal que $J(x_0) = 0$ e $J(x) = X$, com $[J, \gamma'] = 0$. Temos por um cálculo direto que o Hessiano de ρ_M é dado por:

$$\operatorname{Hess}\rho(x)(X, X) = \int_0^\rho \left(|\nabla_{\gamma'} J|^2 - \langle R(J, \gamma')\gamma', J\rangle\right) dt. \tag{1.3}$$

Chamaremos de Formas Espaciais as variedades Riemannianas completas, simplesmente conexas de curvatura seccional constante κ e as denotaremos por $\mathbb{N}^n(\kappa)$. Para calcular o Hessiano da função distância das Formas Espaciais $\mathbb{N}^n(\kappa)$ consideremos

$$S_\kappa(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{-\kappa}}\sinh(\sqrt{-\kappa}\, t), & se \quad \kappa < 0 \\ \\ t, & se \quad \kappa = 0, \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{\kappa}}\sin(\sqrt{\kappa}\, t), & se \quad \kappa > 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

e $C_\kappa(t) = S'_\kappa(t)$. Defina $f(t) = S_\kappa(t)/S_\kappa(\rho(x))$, observe que f satisfaz a equação de Jacobi

$$\begin{cases} d^2 f(t)/dt^2 + \kappa f = 0 \\ \\ f(0) = 0, f(\rho(x)) = 1 \end{cases} \tag{1.5}$$

Os campos de Jacobi J ao longo de $\gamma : [0, \rho(x)] \to \mathbb{N}^n(\kappa)$ com $\langle J, \gamma'\rangle = 0$ são dados por

$$J(t) = f(t) \cdot X(t),$$

onde $X(t)$ é um campo de vetores paralelo ao longo de γ tal que $|X(t)| = 1$, $X(0) = X$. Substituindo o campo $J(t) = f(t)X(t)$ na equação (1.3), obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess}\rho(x)(X, X) &= \textstyle\int_0^\rho \left(|(f'(t)|^2 - \langle R(X(t), \gamma')\gamma', X(t)\rangle f^2(t)\right) dt \\ &= \textstyle\int_0^\rho \left(|f'(t)|^2 - \kappa f^2(t)\right) dt \\ &= \begin{cases} \sqrt{-\kappa}\coth(\sqrt{-\kappa}\,\rho(x)), & se \quad \kappa < 0 \\ \\ 1/\rho(x), & se \quad \kappa = 0, \\ \\ \sqrt{\kappa}\cot(\sqrt{\kappa}\,\rho(x)), & se \quad \kappa > 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.6}$$

O Teorema de Comparação do Hessiano, é uma consequência da relação entre as curvaturaa seccionais e os campos de Jacobi.

Teorema 1.1. (Teorema de Comparação do Hessiano) *Seja M uma variedade Riemanniana completa e $x_0, x_1 \in M$. Seja $\gamma : [0, \rho_M(x)] \to M$ uma geodésica minimizante ligando x_0 e x onde $x \notin \mathrm{Cut}(x_0)$ e ρ_M é a função distância a x_0 em M. Se K_γ são as curvaturas seccionais radiais de M ao longo de γ e se $\kappa = \sup K_\gamma$ e $\mu = \inf K_\gamma$, então para qualquer $X \in T_xM$, $X \perp \gamma'(\rho_M(x))$, o Hessiano de ρ_M satisfaz:*

$$\frac{C_\mu(\rho_M(x))}{S_\mu(\rho_M(x))}\|X\|^2 \;\geq\; \mathrm{Hess}\,\rho_M(x)(X,X) \;\geq\; \frac{C_\kappa(\rho_M(x))}{S_\kappa(\rho_M(x))}\|X\|^2 \tag{1.7}$$

Além disso, $\mathrm{Hess}\,\rho_M(x)(\gamma', \gamma') = 0$.

O Laplaciano de uma função suave $f : M \to \mathbb{R}$ é definido como o traço do Hessiano, ou seja,

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess}\, f(x)(X_i, X_i). \tag{1.8}$$

Onde $\{X_1, \cdots, X_m\}$ é uma base ortonormal de T_xM. Portanto o Laplaciano da função distância nas Formas Espaciais $\mathbb{N}^n(\kappa)$ é dado por

$$\Delta\rho(x)(X,X) = \begin{cases} (n-1)\sqrt{-\kappa}\coth(\sqrt{-\kappa}\,\rho(x)), & se \quad \kappa < 0 \\ \\ \dfrac{(n-1)}{\rho(x)}, & se \quad \kappa = 0, \\ \\ (n-1)\sqrt{\kappa}\cot(\sqrt{\kappa}\,\rho(x)), & se \quad \kappa > 0 \end{cases}$$

Vamos agora calcular a expressão do Hessiano e do Laplaciano de uma função diferenciável quando estamos trabalhando com imersões isométricas. Para isso considere M e N variedades Riemannianas completas, de dimensão m e n respectivamente. Seja $\varphi : M \to N$ uma imersão isométrica. Fixemos um ponto $x_0 \in M$ e $y_0 = \varphi(x_0) \in N$. Denote por $\rho_N(y) = \mathrm{dist}(y_0, y)$ a função distância em N ao ponto y_0. Considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função suave e defina $f : M \to \mathbb{R}$ por $f(x) = (g \circ \rho_N \circ \varphi)(x)$. Identificando $X \in T_xM$ com $d\varphi_x(X)$ temos para qualquer $x \in M$ e para todo $X \in T_xM$, que

$$\langle \mathrm{grad}(g \circ \rho_N), X\rangle = \langle \mathrm{grad}\, f, X\rangle \tag{1.9}$$

assim podemos escrever

$$\text{grad}(g \circ \rho_N) = \text{grad}\, f + (\text{grad}(g \circ \rho_N))^{\perp} \tag{1.10}$$

onde $\langle (\text{grad}(g \circ \rho_N))^{\perp}, X \rangle = 0$. Seja $y = \varphi(x)$, usando a equação de Gauss temos que o Hessiano de f em $x \in M$ é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Hess}\, f(X,X) &= X\langle \text{grad}\, f, X\rangle - \langle \nabla_X X, \text{grad}\, f\rangle \\ &= X\langle \text{grad}(g\circ\rho_N), X\rangle - \langle \nabla_X X, \text{grad}(g \circ \rho_N)\rangle \\ &= g'(\rho_N) \cdot [\text{Hess}\,\rho_{\mathrm{N}}(\mathrm{X},\mathrm{X}) + \langle \text{grad}\,\rho_{\mathrm{N}}, \alpha(\mathrm{X},\mathrm{X})\rangle] \\ &\quad + g''(\rho_N) \cdot \langle \text{grad}\,\rho_{\mathrm{N}}, \mathrm{X}\rangle^2 \end{aligned} \tag{1.11}$$

onde α é a segunda forma fundamental da imersão. Tomando o traço em (1.11), com respeito a uma base ortonormal $\{X_1, \ldots X_m\}$ para T_xM, temos então o Laplaciano de f

$$\begin{aligned} \Delta\, f(x) &= g'(\rho_N) \cdot \textstyle\sum_{i=1}^m [\text{Hess}\,\rho_{\mathrm{N}}(\mathrm{X_i},\mathrm{X_i}) + \langle \text{grad}\,\rho_{\mathrm{N}}, \alpha(\mathrm{X_i},\mathrm{X_i})\rangle] \\ &+ g''(\rho_N) \cdot \textstyle\sum_{i=1}^m \langle \text{grad}\,\rho_{\mathrm{N}}, \mathrm{X_i}\rangle^2 \end{aligned} \tag{1.12}$$

As fórmulas (1.11) e (1.12) são conhecidas na literatura, veja [5], [7], [12].

1.2 Pontos Críticos e o Lema de Isotopia

Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e seja $M^a = \{x \in M; f(x) \leq a\}$. Recorde que um ponto $x_0 \in M$ é um ponto crítico de f se $grad\, f(x_0) = 0$. O seguinte lema mostra que na ausência de pontos críticos a topologia dos conjuntos de M^a não mudam.

Lema 1.2. *Se f é própria e $f^{-1}[a,b]$ não contém pontos críticos então M^a é difeomorfo a M^b. Além disso M^a é retrato de deformação de M^b tal que a inclusão $i : M^a \to M^b$ é uma equivalência homotópica.*

Iremos somente apresentar a idéia da prova, para maiores detalhes veja [13]. Considere uma função diferenciável $\eta : M \to \mathbb{R}$ tal que $\eta = 1/|gradf|^2$ no compacto $f^{-1}[a,b]$ e $\eta \equiv 0$ em $M \setminus f^{-1}[a-\epsilon, b+\epsilon]$ para $\epsilon > 0$ pequeno.

O campo de vetores $X = \eta \cdot gradf$ gera um único grupo a um parâmetro de difeomorfismos $\phi_t : M \to M$. Para $q \in M$ fixado a correspondência $t \to f(\phi_t(q))$ é linear e tem derivada $+1$ sempre que $f(\phi_t(q)) \in [a, b]$. Em particular $f(\phi_t(q)) = t + f(q)$. O difeomorfismo $\phi_{b-a} : M \to M$ leva M^a difeomorficamente em M^b. Seja $r_t : M^b \to M^b$, $t \in [0, 1]$ definida por

$$r_t(q) = \begin{cases} q & \text{se} \quad q \in M^a \\ \phi_{t(a-f(q))}(q) & \text{se} \quad q \in \overline{M^b \setminus M^a} \end{cases}$$

Observe que $r_0 = \mathrm{Id}$ e se $q \in M^a$ então $f(r_1(q)) = f(q) \leq a$ e se $q \in \overline{M^b \setminus M^a}$ então $f(r_1(q)) = f(\phi_{(a-f(q))}(q)) = a$. Portanto r_1 é uma retração de M^b em M^a. Além disso, temos que $\phi_t(\partial M^a) = \partial M^{t+a}$ para todo $t \in [0, b-a]$. Logo todo ponto $q \in \overline{M^b \setminus M^a}$ é imagem $\phi_t(q_a)$ de um único ponto $q_a \in \partial M^a$ para algum $t \in [0, b-a]$. A aplicação $\psi : \partial M^a \times [0, b-a] \to \overline{M^b \setminus M^a}$ dada por $\psi(q, t) = \phi_t(q)$ é um difeomorfismo.

Suponha que f não tem pontos críticos em $f^{-1}[a, b]$ para todo $b > a$. Tome $b_1 > b_0 > a$. Pelas considerações acima temos dois grupos a 1-parâmetro ϕ_t^1 e ϕ_t^0 coincidindo no compacto $f^{-1}[a, b_0]$ logo ϕ_t^1 extende ϕ_t^0. Portanto ϕ_t pode ser definido para todo $t \in [0, \infty)$ tal que $f(\phi_t(q)) = t + f(q)$, logo temos que $M \setminus M^a$ é difeomorfo ao produto $\partial M^a \times [0, \infty)$.
O Lemma de Isotopia motiva as seguintes definiçõs.

Definição 1.3. *Seja M uma variedade Riemanniana completa não compacta. Um fim E, com respeito a um subconjunto compacto $\Omega \subset M$, é uma componente conexa ilimitada de $M \backslash \Omega$.*

Definição 1.4. *Uma variedade Riemanniana M é dita ter topologia finita se M é homeomorfa ao interior de uma variedade compacta $\overline{M}$ com bordo $\partial \overline{M}$. Em particular, uma variedade com topologia finita tem finitos fins.*

Observação 1.5.

i. Se existe uma função diferenciável, própria $f : M \to \mathbb{R}$, definida em uma variedade Riemanniana M, sem pontos críticos dentro de uma bola geodésica, então M tem topologia finita.

ii. Existem exemplos de variedades completas não compactas com finitos fins e topologia infinita, ver [18].

1.3 O Primeiro Auto-valor do Laplaciano

Seja $\Omega \subset M$ um aberto conexo limitado em uma varieadade Riemanniana. Os auto-valores do Laplaciano para o problema $\Delta v + \lambda v = 0$, $v \in C^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$[2], formam uma sequência $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \cdots \to \infty$. Onde $H_0^1(\Omega) \backslash \{0\}$ é o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito a norma

$$\|f\|^2 = \int_\Omega f^2 + \int_\Omega |\mathrm{grad} f|^2.$$

Alem disso cada auto-espaço tem dimensão finita e as autofunções associadas $\{v_j\}_{j=1}^\infty$ formam uma base ortonormal de $L^2(M)$, onde $L^2(M)$ é o espaço de Hilbert completo na norma $\|f\|^2 = \int_M f^2$. Os auto-valores do Laplaciano são caracterizados variacionalmente pelo Teorema de Rayleigh, em particular o primeiro auto-valor $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega)$ é dado por

$$\lambda_1(\Omega) = \inf \left\{ \frac{\int_\Omega |\mathrm{grad} f|^2}{\int_\Omega f^2}, f \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\} \right\}. \tag{1.13}$$

Se o aberto Ω não é limitado, o problema $\Delta v + \lambda v = 0$ pode não ter solução $v \in C^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. No entanto, a expressão em (1.13) faz sentido para qualquer aberto Ω. Portanto definimos o tom fundamental $\lambda^*(\Omega)$ de Ω pela expressão (1.13). Em particular se $\Omega = M$ temos o tom fundamental $\lambda^*(M)$ de M e pelo Teorema de Rayleigh $\lambda_1(\Omega) = \lambda^*(\Omega)$ se Ω é limitado.

Devido a caracterização variacional do primeiro auto-valor é comumente admitido que é mais dificil encontar cotas inferiores do que cotas superiores. Uma observação devido a J. Barta [2] nos dá um método (relativamente fácil) para obtenção de cotas inferiores e superiores para o primeiro auto-valor do Laplaciano.

Teorema 1.6 (Barta)**.** *Seja $\Omega \subset M$ um aberto conexo e limitado em uma variedade Riemanniana M com bordo diferenciável. Seja $f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ com $f|\Omega > 0$ e $f|\partial\Omega = 0$. O primeiro autovalor do problema de Dirichlet $\lambda_1(\Omega)$ tem os seguintes cotas.*

$$\sup_\Omega(-\frac{\Delta f}{f}) \geq \lambda_1(\Omega) \geq \inf_\Omega(\frac{-\Delta f}{f}) \tag{1.14}$$

Igualdade em (1.14) se e somente f é uma primeira auto-função de Ω.

[2]Se o bordo $\partial\Omega \neq \emptyset$ é diferenciável por partes então podemos tomar $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, com $v \mid \partial\Omega = 0$.

Observação 1.7. *A desigualdade* $\lambda_1(\Omega) \geq \inf_{\Omega}(\frac{-\Delta f}{f})$ *continua válida sem a hipótese que* $f|\partial\Omega = 0$.

Seja $B_{\mathbb{N}^n(\kappa)}(r)$ a bola geodésica de raio $r > 0$ na Forma Espacial $\mathbb{N}^n(\kappa)$. A métrica g_κ de curvatura seccional constante κ em $\mathbb{N}^n(\kappa) = [0,\infty)\times\mathbb{S}^{n-1}$ pode ser expressa em coordenadas geodésicas por $g_\kappa = dt^2 + S_\kappa^2(t)d\theta^2$, onde $d\theta^2$ é a métrica de curvatura seccional $+1$ em $\mathbb{S}^{n-1}$. A primeira auto-função do Laplaciano $v : B_{\mathbb{N}^n(\kappa)}(r) \to \mathbb{R}$ é radial, i.e. $v(x) = v(t)$, $t = \mathrm{dist}_{\mathbb{N}^n(\kappa)}(x, 0)$. A equação $\Delta v(t) + \lambda_1(B_{\mathbb{N}^n(\kappa)}(r))v(t) = 0$, $v \mid \partial B_{\mathbb{N}^n(\kappa)}(r) = 0$ pode ser expressa em coordenadas geodésicas por

$$v''(t) + (n-1)\frac{C_\kappa(t)}{S_\kappa(t)}v'(t) + \lambda_1(B_{\mathbb{N}^n(\kappa)}(r))v(t) = 0, \ \forall\, t \in (0,r). \tag{1.15}$$

com $v(0) = 1$, $v(r) = 0$. É conhecido que as primeiras auto-funções não mudam de sinal, como v é radial podemos considerar v definida em $[-r, r]$ com um máximo local em $t = 0$. Logo $v'(0) = 0$. Avaliando a equacão (1.15) em t_0, obtemos $v''(t_0) + \lambda_1 v(t_0) = 0$. Como $v > 0$ em $(-r, r)$ então $v''(t_0) < 0$, logo t_0 é um máximo local de v. Assim, v é constante em $[0, t_0]$ ou v tem um mínimo local em $[0, t_0]$. Devido a equação diferencial (1.15) ambas as possibilidades não podem acontecer. Assim tal ponto t_0 não existe. Portanto $v'(t) \neq 0$ para todo $t \in (0, r]$. Sendo v positiva em $[0, r)$ e $v(r) = 0$ então, nos resta que $v'(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, r]$.

Capítulo 2

Subvariedades com Segunda Forma Fundamental Dominada

Neste capítulo discutiremos alguns aspectos da geometria das subvariedades em espaços de Hadamard para que sejam próprias e com topologia finita. Sejam M variedade Riemanniana completa de dimensão m e N uma variedade de Hadamard de dimensão n com curvatura seccional $K_N \leq \kappa \leq 0$. Seja $\varphi : M \to N$ uma imersão isométrica. Fixe um ponto $x_0 \in M$ com $y_0 = \varphi(x_0)$. Em todo o texto denotaremos por $\rho_M(x) = \mathrm{dist}(x_0, x)$ a função distância intrínseca em M ao ponto x_0 e $\rho_N(y) = \mathrm{dist}(y_0, y)$ a função distância intrínseca em N ao ponto y_0. Seja $\{C_i\}_{i=0}^{\infty}$ uma exaustão de M por conjuntos compactos com $x_0 \in C_0$. Defina uma sequência não-crescente $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$ por

$$a_i(x_0, C_i) = \sup\left\{\frac{S_\kappa(\rho_M(x))}{C_\kappa(\rho_M(x))} \cdot \|\alpha(x)\|,\, x \in M \backslash C_i\right\},$$

onde

$$S_\kappa(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sinh(\sqrt{-\kappa}\, t), & se \quad \kappa < 0 \\ \qquad t, & se \quad \kappa = 0, \end{cases}$$

$C_\kappa(t) = S'_\kappa(t)$ e α é a segunda forma fundamental de φ em x. Observe que os escalares $a_i(x_0, C_i)$ dependem do ponto x_0 e da exaustão $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$. Associado a $\varphi(M)$ existe um número $a(M) \in [0, \infty]$ definido por

$$a(M) = \lim_{i \to \infty} a_i(x_0, C_i). \tag{2.1}$$

Veja que $a(M)$ não depende da exaustão e nem do ponto base x_0. Veja também que $a(M) < \infty \Leftrightarrow a_1 < \infty \Leftrightarrow a_k < \infty$ para todo k.

Definição 2.1. *Seja $\varphi : M \to N$ uma imersão de uma variedade Riemanniana completa M de dimensão m em uma variedade de Hadamard N de dimensão n com curvatura seccional $K_N \leq \kappa \leq 0$. Dizemos que $\varphi(M)$ tem segunda forma fundamental dominada se $a(M) < 1$.*

Em um recente paper [3], Bessa, Jorge and Montenegro provaram que subvariedades imersas completas do $\mathbb{R}^n$, com $a(M) < 1$, é própria e tem topologia finita. Nós generalizamos este resultado para subvariedades de variedades de Hadamard.

Teorema 2.2. *Seja $\varphi : M \to N$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana completa M de dimensão m em uma variedade de Hadamard N de dimensão n com todas as curvaturas seccionais $K_N \leq \kappa \leq 0$. Suponha que $a(M) < 1$. Então*

a. φ é própria.

b. M tem topologia finita.

2.1 Prova do Teorema 2.2

a. φ é própria:

Desde que $a(M) < 1$, temos que para cada $c \in (a(M), 1)$, existe i tal que $a_i(x_0, C_i) \in (a(M), c)$. Isto significa que existe uma bola geodésica $B_M(r_0) \subset M$, $C_i \subset B_M(r_0)$, centrada em x_0 com raio $r_0 > 0$ tal que

$$\frac{S_\kappa(\rho_M(x))}{C_\kappa(\rho_M(x))}\|\alpha(x)\| \leq c < 1, \quad \forall\, x \in M\backslash B_M(r_0). \tag{2.2}$$

Se $\sup K_N = 0$, considere $\mathrm{f}(x) = g(\rho_N(\varphi(x))) = \rho_N(\varphi(x))^2$. Pela equação (1.11) do capítulo 01 o Hessiano de f em x, é dado por

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess} \mathrm{f}(x)(X,X) &= 2\,[\rho_N \operatorname{Hess} \rho_N(X,X) \\ &\quad + \rho_N \langle \operatorname{grad} \rho_N, \alpha(X,X)\rangle + \langle \operatorname{grad} \rho_N, X\rangle^2](y), \end{aligned}$$

onde $y = \varphi(x)$. Considere $\bar{\sigma} : [0, \rho_N(y)] \to N$ uma geodésica mínima ligando y_0 a y. Dado $X \in T_yN$ podemos decompor o vetor $X = X^\perp + X^\top$ com $X^\top = \langle X, \operatorname{grad}\rho_N\rangle \operatorname{grad}\rho_N$ e $X^\perp \perp \operatorname{grad}\rho_N$. Pelo teorema de Comparação do Hessiano segue que

$$\mathrm{Hess}\rho_N(y)(X,X) \geq \frac{1}{\rho_N(y)}|X^\perp|^2. \tag{2.3}$$

Portanto para $x \in M \backslash B_M(x_0)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hessf}(x)(X,X) &= 2\,[\rho_N\ \mathrm{Hess}\rho_N(X,X) + \langle \mathrm{grad}\rho_N, X\rangle^2 \\ &\quad + \rho_N\ \langle \mathrm{grad}\rho_N, \alpha(X,X)\rangle](y) \\ &\geq 2\,[\rho_N\ \frac{1}{\rho_N}|X^\perp|^2 + |X^\top|^2 + \rho_N\ \langle \mathrm{grad}\rho_N, \alpha(X,X)\rangle(y)] \\ &\geq 2\,[\,|X^\perp|^2 + |X^\top|^2 - \rho_M(x)\ \|\alpha(x)\||X|^2] \\ &\geq 2(1-c)|X|^2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Da segunda para a terceira desigualdade usamos que $\rho_N(\varphi(x)) \leq \rho_M(x)$. Seja $\sigma : [0, \rho(x)] \to M$ uma geodésica mínima ligando x_0 a $x \in M \backslash B_M(x_0)$. Temos que

$$(\mathrm{f} \circ \sigma)''(\mathrm{t}) = \mathrm{Hessf}(\sigma(\mathrm{t}))(\sigma', \sigma') \geq 2(1-\mathrm{c}) \ \ \forall \ \ \mathrm{t} \geq \mathrm{r}_0, \tag{2.5}$$

para $t \leq r_0$. E para $t \leq r_0$, $(\mathrm{f} \circ \sigma)''(\mathrm{t}) \geq \mathrm{b}$, onde

$$b = \inf\left\{\mathrm{Hess\,f}(x)(\nu,\nu), x \in B_M(r_0), |\nu| = 1\right\}. \tag{2.6}$$

Portanto

$$\begin{aligned} (\mathrm{f}\circ\sigma)'(s) &= (\mathrm{f}\circ\sigma)'(0) + \textstyle\int_0^s (\mathrm{f}\circ\sigma)''(\tau)d\tau \\ &\geq (\mathrm{f}\circ\sigma)'(0) + \textstyle\int_0^{r_0} b d\tau + \int_{r_0}^s 2(1-c)d\tau \\ &= (\mathrm{f}\circ\sigma)'(0) + br_0 + 2(1-c)(s-r_0). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Como $\rho_N(\varphi(x_0)) = \mathrm{dist}(y_0, y_0) = 0$ então $(\mathrm{f}\circ\sigma)'(0) = 0$, e $\mathrm{f}(x_0) = 0$, logo

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) &= \int_0^{\rho_M(x)} (\mathrm{f}\circ\sigma)'(s)ds \\ &\geq \int_0^{\rho_M(x)} \{br_0 + 2(1-c)(s-r_0)\}\, ds \\ &= br_0\rho_M(x) + 2(1-c)(\tfrac{\rho_M(x)^2}{2} - r_0\rho_M(x)) \\ &= (1-c)\rho_M(x)^2 + (b - 2(1-c))r_0\rho_M(x) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Assim $\mathrm{f}(x) = \rho_N(\varphi(x))^2 \geq (1-c)\rho_M(x)^2 + (b-2(1-c))r_0\rho_M(x)$ para todo $x \in M\backslash B_M(r_0)$. Portanto φ é própria.

Suponha agora que $\sup K_N = \kappa < 0$. Sem perda de generalidade podemos supor que $\kappa = -1$. Considere a função $\mathrm{f}(x) = \cosh(\rho_N(\varphi(x)))$, logo o Hessiano de f é dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}\, \mathrm{f}(x)(X,X) &= \sinh(\rho_N(y))\mathrm{Hess}\, \rho_N(y)(X,X) \\ &\quad + \cosh(\rho_N(y))\langle \mathrm{grad}\, \rho_N(y), X\rangle^2 \\ &\quad + \sinh(\rho_N(y))\langle \mathrm{grad}\, \rho_N, \alpha(X,X)\rangle \end{aligned} \tag{2.9}$$

Pelo Teorema de comparação do Hessiano temos que

$$\mathrm{Hess}\rho_N(y)(X,X) \geq \frac{\cosh(\rho_N(y))}{\sinh(\rho_N(y))}|X^\perp|^2. \tag{2.10}$$

Como $a(M) < 1$, então

$$\|\alpha(x)\| \leq c\,\frac{\cosh(\rho_M(x))}{\sinh(\rho_M(x))} \leq c\frac{\cosh(\rho_N(y))}{\sinh(\rho_N(y))} \tag{2.11}$$

para todo $x \in M\backslash B_M(r_0)$. Portanto da equação (2.9), obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}\, \mathrm{f}(x)(X,X) &\geq \cosh(\rho_N(y))|X^\perp|^2 + \cosh(\rho_N(y))|X^\top|^2 \\ &\quad - \sinh(\rho_N(y))\|\alpha(x)\||X|^2 \\ &\geq \cosh(\rho_N(y))|X|^2 - c\cdot\cosh(\rho_N(y))|X|^2 \\ &= \cosh(\rho_N(y))(1-c)|X|^2 \\ &= (1-c)|X|^2. \end{aligned} \tag{2.12}$$

para todo $x \in M \backslash B_M(r_0)$. Note que a desigualdade acima é análoga a desigualdade (2.4). Então procedendo de forma similar ao caso onde $k = 0$, chegamos à seguinte desigualdade

$$\mathrm{f}(x) = \cosh(\rho_N(\varphi(x))) \geq (1-c)\rho_M(x)^2 + (b + 2\kappa(1-c))r_0\rho_M(x) + 1$$

E assim φ é própria.

b. M tem topologia finita:

Relembrando que $\varphi : M \to N$ é uma subvariedade completa m-dimensional com $a(M) < 1$ imersa em de uma variedade de Hadamard n-dimensional N. Sem perda de generalidade podemos supor que a função distância extrínseca de M definida por $R(x) = \rho_N(\varphi(x))$ é uma função de Morse. Seja $B_N(r_0)$ a bola geodésica de N centrada em y_0 e raio $r_0 > 0$. Denote $S_{r_0} = \partial B_N(r_0)$. Como $a(M) < 1$ e φ é própria, então podemos tomar $r_0 > 0$ de forma que

$$\frac{S_\kappa(\rho_M(x))}{C_\kappa(\rho_M(x))}\|\alpha(x)\| \leq c < 1, \quad \forall \ x \in M \backslash \varphi^{-1}(B_N(r_0)) \tag{2.13}$$

e que φ seja transversal a esfera geodésica S_{r_0}. Seja $\Gamma_{r_0} = \varphi(M) \cap S_{r_0} \neq \emptyset$ e $\Lambda_{r_0} = \varphi^{-1}(\Gamma_{r_0})$. Para cada $x \in \Lambda_{r_0}$ temos um aberto $U_x \subset M$ contendo x, tal que $\varphi|U_x$ é um mergulho e $\varphi(U_x)$ é transversal às esferas geodésicas S_r, para cada $r \in (r_0 - \delta(x), r_0 + \delta(x))$, $\delta(x) > 0$ pequeno. Temos da teoria de transversalidade que $\varphi(U_x) \cap S_r \subset \Gamma_r$ é uma subvariedade de dimensão $(m-1)$ para cada $r \in (r_0 - \delta(x), r_0 + \delta(x))$. Seja $y = \varphi(x) \in \varphi(U_x) \cap S_r$. Temos que $\dim(T_y(\varphi(U_x) \cap S_r))= \dim T_y\varphi(U_x) - 1$, portanto existe apenas um vetor (unitário) $\nu(y) \in T_{\bar{y}}\varphi(U_x)$ tal que

$$T_y\varphi(U_x) = T_y(\varphi(U_x) \cap S_r) \oplus [\![d\varphi(\bar{y}) \cdot \nu]\!],$$

com $\langle d\varphi(\bar{y}) \cdot \nu, \mathrm{grad}\rho_N(y)\rangle > 0$ onde $[\![d\varphi(\bar{y}) \cdot \nu(y)]\!]$ é o espaço vetorial gerado por $d\varphi(\bar{y}) \cdot \nu$. Essa escolha define um campo diferenciável de vetores ν em $U_x \subset \varphi^{-1}(B_N(r_0 + \delta(x)) \backslash B_N(r_0 - \delta(x)))$. Como Λ_{r_0} é compacto, podemos escolher uma sequência finita $\{x_1, ...x_k\} \subset \Lambda_{r_0}$ e $\delta = \min\{\delta(x_1), ..., \delta(x_k)\}$ tal que usando partição da unidade o procedimento anterior constroi um campo diferenciável ν em $V = \varphi^{-1}(B_N(r_0 + \delta) \backslash B_N(r_0 - \delta))$. Considere a função ψ em V definida por

$$\psi(x) = \langle d\varphi(\bar{y}) \cdot \nu, \mathrm{grad}\rho_N\rangle_{\varphi(x)}. \tag{2.14}$$

Para cada $x \in \Lambda_{r_0}$ fixado, considere a solução $\xi(t,x)$ do seguinte problema em M:

$$\begin{cases} \xi_t(t,x) &= \dfrac{1}{\psi}\nu(\xi(t,x)) \\ \\ \xi(0,x) &= x \end{cases} \tag{2.15}$$

Para provar que M tem topologia finita iremos mostrar que ao longo das curvas integrais $t \mapsto \xi(t,x)$ não existem pontos críticos de $R = \rho_N \circ \varphi$. Para isso consideremos a função $t \mapsto \psi(\xi(t,x)) = \langle d\varphi(\bar{y}) \cdot \nu, \mathrm{grad}\rho_N\rangle_{\varphi(\xi(t,x))}$. Para simplificar a notação identificaremos $d\varphi \cdot \nu = \nu$ e $d\varphi \cdot \xi_t = \xi_t$ e observemos que

$$\begin{aligned} \psi_t &= \xi_t\langle \mathrm{grad}\rho_N, \nu\rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\xi_t}\mathrm{grad}\rho_N, \nu\rangle + \langle \mathrm{grad}\rho_N, \bar{\nabla}_{\xi_t}\nu\rangle \\ &= \frac{1}{\psi}\langle \bar{\nabla}_{\nu}\mathrm{grad}\rho_N, \nu\rangle + \frac{1}{\psi}\langle \mathrm{grad}\rho_N, \nabla_\nu\nu + \alpha(\nu,\nu)\rangle \\ &= \frac{1}{\psi}\mathrm{Hess}\rho_N(\nu,\nu) + \frac{1}{\psi}\left[\langle \mathrm{grad}\rho_N, \nabla_\nu\nu\rangle + \langle \mathrm{grad}\rho_N, \alpha(\nu,\nu)\rangle\right] \\ &= \frac{1}{\psi}\left[\mathrm{Hess}\rho_N(\nu,\nu) + \langle \mathrm{grad}\rho_N, \nabla_\nu\nu\rangle + \langle \mathrm{grad}\rho_N, \alpha(\nu,\nu)\rangle\right]. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Portanto temos ao longo da curva $t \mapsto \xi(t,x)$ a seguinte equação diferencial

$$\psi_t\psi = \mathrm{Hess}\rho_N(\nu,\nu) + \langle \mathrm{grad}\rho_N, \nabla_\nu\nu\rangle + \langle \mathrm{grad}\rho_N, \alpha(\nu,\nu)\rangle. \tag{2.17}$$

Pela equação (2.14) podemos escrever

$$\mathrm{grad}\rho_N = \psi\nu + \sqrt{1-\psi^2}\nu^* \tag{2.18}$$

onde $\nu^* \perp T_{\varphi(\xi(t,x))}\varphi(M)$. Portanto

$$\mathrm{grad}R = \psi\nu \tag{2.19}$$

Como$\langle \nu,\nu\rangle = 1$, temos que $\langle \nabla_\nu\nu, \nu\rangle = 0$. Pela equação (2.19) segue que

$$\langle \mathrm{grad}\rho_N, \nabla_\nu\nu\rangle = \langle \mathrm{grad}R, \nabla_\nu\nu\rangle = \psi\langle \nu, \nabla_\nu\nu\rangle = 0. \tag{2.20}$$

Por outro lado podemos expressar ν em termos de gradρ_N da seguinte forma,

$$\nu(\varphi(x)) = \psi(x)\mathrm{grad}\rho_N + \sqrt{1-\psi^2}\,\omega \tag{2.21}$$

onde $\langle \mathrm{grad}\rho_N, \omega\rangle = 0$, $|\omega| = 1$. Substituindo as equações (2.18), (2.20) e (2.21) na equação (2.17), obtemos

$$\psi_t\psi = (1-\psi^2)\mathrm{Hess}\rho_N(\omega,\omega) + \sqrt{1-\psi^2}\langle \nu^*, \alpha(\nu,\nu)\rangle \tag{2.22}$$

Portanto

$$\frac{\psi_t\psi}{\sqrt{1-\psi^2}} = \sqrt{1-\psi^2}\,\mathrm{Hess}\rho_N(\omega,\omega) + \langle \nu^*, \alpha(\nu,\nu)\rangle \tag{2.23}$$

Observe que $\dfrac{\psi_t\psi}{\sqrt{1-\psi^2}} = -(\sqrt{1-\psi^2})_t$, assim chegamos a seguinte equação diferencial ao longo de $t \mapsto \xi(t,x)$

$$-(\sqrt{1-\psi^2})_t = \sqrt{1-\psi^2}\,\mathrm{Hess}\rho_N(\omega,\omega) + \langle \nu^*, \alpha(\nu,\nu)\rangle \tag{2.24}$$

Como consequência do Teorema de comparação do Hessiano, temos que

$$\mathrm{Hess}\rho_N(\omega,\omega) \geq \frac{C_\kappa}{S_\kappa}(\rho_N) \tag{2.25}$$

Substituindo na equação diferencial (2.24) chegamos na seguinte desigualdade

$$-(\sqrt{1-\psi^2})_t \geq \sqrt{1-\psi^2}\,\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(\rho_N) + \langle \nu^*, \alpha(\nu,\nu)\rangle \tag{2.26}$$

Por (2.19) temos que

$$R_t = \langle \mathrm{grad}R, \frac{1}{\psi}\nu\rangle = \langle \psi\nu, \frac{1}{\psi}\nu\rangle = 1 \tag{2.27}$$

logo

$$R(\xi(t,x)) = \rho_N(\varphi(\xi(t,x))) = t + r_0. \tag{2.28}$$

Assim, podemos escrever $\dfrac{C_\kappa}{S_\kappa}(\rho_N(\varphi(\xi(t,x)))) = \dfrac{C_\kappa}{S_\kappa}(t+r_0)$, então

$$-(\sqrt{1-\psi^2})_t \geq \sqrt{1-\psi^2}\,\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t+r_0) + \langle \nu^*, \alpha(\nu,\nu)\rangle \tag{2.29}$$

Multiplicando (2.29) por $S_\kappa(t+r_0)$, obtemos a seguinte desigualdade

$$\left[S_\kappa(t+r_0)\sqrt{1-\psi^2}\right]_t \leq -S_\kappa(t+r_0)\langle\nu^*,\alpha(\nu,\nu)\rangle \tag{2.30}$$

Integrando (2.30) de 0 a t, obtemos

$$\begin{aligned} S_\kappa(t+r_0)\sqrt{1-\psi^2(\xi(t,x))} &\leq S_\kappa(r_0)\sqrt{1-\psi^2(\xi(0,x))} \\ &+ \textstyle\int_0^t -S_k(s+r_0)\langle\nu^*,\alpha(\nu,\nu)\rangle ds. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Dividindo a equação (2.31) por $S_\kappa(t+r_0)$, obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\psi^2(\xi(t,x)))} &\leq \frac{S_\kappa(r_0)}{S_k(t+r_0)}\sqrt{1-\psi^2(\xi(0,x))} \\ &+ \frac{1}{S_\kappa(t+r_0)}\int_0^t S_\kappa(s+r_0)(-\langle\nu^*,\alpha(\nu,\nu)\rangle)ds \end{aligned} \tag{2.32}$$

Como $a(M)<1$ e $\rho_N(\varphi(\xi(t,x)))=t+r_0$, temos então que

$$\begin{aligned} -\langle\nu^*,\alpha(\xi(t,x))(\nu,\nu)\rangle &\leq \|\alpha(\xi(t,x)))\| < c\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(\rho_M(\xi(t,x))) \\ &< c\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(\rho_N(\varphi(\xi(t,x)))) = c\frac{C_\kappa(t+r_0)}{S_\kappa(t+r_0)}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Substituindo $\varphi(\xi(0,x))=\varphi(x)=y$ e (2.33) em (2.32), temos para todo $t\geq 0$ que

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\psi^2(\xi(t,x))} &\leq \frac{S_\kappa(r_0)}{S_\kappa(t+r_0)}\sqrt{1-\psi^2(x)} + \frac{c}{S_\kappa(t+r_0)}\int_0^t C_\kappa(s+r_0)ds \\ &\leq \frac{1}{S_\kappa(t+r_0)}\left[S_\kappa(r_0)\sqrt{1-\psi^2(x)} + c(S_\kappa(t+r_0)-S_\kappa(r_0))\right] \\ &\leq \frac{S_\kappa(r_0)}{S_\kappa(t+r_0)}(\sqrt{1-\psi^2(x)}-c)+c \\ &\leq \max\left(\sup_{x\in V}\sqrt{1-\psi^2(x)},c\right) = \eta. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Assim, ao longo das curvas integrais $t \mapsto \xi(t,x)$, temos que $\sqrt{1-\psi^2(\xi(t,x))} < \eta < 1$, logo não existem pontos críticos da função $R(x) = \rho_N(\varphi(x))$. Sendo R uma função de Morse, seus pontos críticos são isolados. Como $B_M(r_0)$ é compacta, existe apenas uma quantidade finita deles. Pelo lemma de Isotopia $\varphi(M)$ tem topologia finita. Em particular a subvariedade tem uma quantidade finita de fins.

Temos uma versão do teorema (2.2) para subvariedades mínimas de variedades de Hadamard. Neste caso a hipótese será feita sobre a curvatura de Ricci. Como veremos na próxima seção.

2.2 Mínimas com Topologia Finita

Dado $x \in M$ e $\nu \in T_xM$ tal que $\{e_1, ..., e_{m-1}, e_m = \nu\}$ é uma base ortonormal de T_xM. Relembrando que a curvatura de Ricci na direção $\nu \in T_xM$ é dado por

$$Ric_x(\nu,\nu) = \sum_{i=1}^{m-1} K_M(e_i,\nu). \tag{2.35}$$

Vamos ao seguinte lemma.

Lema 2.3. *Seja M uma subvariedade mímina completa de dimensão m em uma variedade de Hadamard N de dimensão n. Se $\{e_1, ..., e_{m-1}, e_m = \nu\}$ é uma base ortonormal de T_xM, então*

$$Ric_x(\nu,\nu) \leq -\sum_{i=1}^{m} |\alpha(e_i,\nu)|^2.$$

Prova: Seja N é uma variedade de Hadamard com $\sup K_N = \kappa \leq 0$. Considere $\{e_1, ..., e_{m-1}, e_m = \nu\}$ é uma base ortonormal de T_xM. Como φ é mínima,temos pela equação de Gauss, que

$$\begin{aligned} Ric_x(\nu,\nu) &\leq (m-1)\kappa - \sum_{i=1}^{m} |\alpha(e_i,e_m)|^2 \\ &\leq -\sum_{i=1}^{m} |\alpha(e_i,e_m)|^2. \end{aligned} \tag{2.36}$$

e isto conclui o lema.

Como na seção (2.1), fixe um ponto $x_0 \in M$ e considere uma exaustão $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ of M por conjuntos compactos com $x_0 \in B_0$. Denote

$$b_i = \inf\left\{\frac{S_\kappa^2(\rho_M(x))}{C_\kappa^2(\rho_M(x))} Ric_x(X,X), x \in M\backslash B_i, |X| = 1\right\}. \tag{2.37}$$

Pelo lema (2.3) temos que $Ric_x(\nu,\nu) \leq 0$ para todo $x \in M$ e todo $\nu \in T_xM$, logo os escalares b_i forma uma sequencia não-decrescente $b_0 \leq b_1 \leq \cdots \leq 0$. Defina $b(M) = \lim_{i\to\infty} b_i \in [-\infty, 0]$. O número $b(M)$ também não depende da exaustão nem do ponto base x_0. Nestas condições uma versão do teorema (2.2) para subvariedades mínimas é a seguinte.

Teorema 2.4. *Seja $\varphi : M \to N$ uma subvariedade mínima completa M de dimensão m de uma variedade de Hadamard N de dimensão n. Suponha que $b(M) > -1$ então,*

a. φ é própria.

b. $\varphi(M)$ tem topologia finita.

Prova A prova deste resultado é similar a prova do teorema (2.2). Para provar que φ é própria, fixe um ponto $x_0 \in M$ e denote por $y_0 = \varphi(x_0) \in N$. Como $b(M) > -1$, dada uma constante positiva c onde $-c^2 \in (-1, b(M))$, existe i tal que $b_i \in (-c^2, b(M))$. Logo existe uma bola geodésica $B_M(r_0)$ centrada em x_0 de raio $r_0 > 0$ tal que

$$\frac{S_\kappa^2(\rho_M(x))}{C_\kappa^2(\rho_M(x))}\, Ric_x(X,X) \geq -c^2 > -1, \quad \forall\, x \in M\backslash B_M(r_0). \tag{2.38}$$

Se $\sup K_N = 0$, considere $g(t) = t^2$. Então $\mathrm{f}(x) = \rho_N(\varphi(x))^2$. Pela equação (1.11) o Hessiano of f em x, é dado por

$$\begin{aligned}\operatorname{Hess}\mathrm{f}(x)(X,X) &= 2\,[\rho_N \operatorname{Hess}\rho_N(X,X)\\ &\quad +\rho_N\,\langle \operatorname{grad}\rho_N, \alpha(X,X)\rangle + \langle \operatorname{grad}\rho_N, X\rangle^2](y),\end{aligned}$$

Suponha que $X = e_m = X^{\top} + X^{\perp}$. Pelo Teorema de Comparação do Hessiano e o pelo Lema (2.3) temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathrm{Hess}\,\mathrm{f}(X,X) &\geq |X^{\top}|^2 + |X^{\perp}|^2 - \rho_N\, |\alpha(x)(X,X)| \\ &\geq (1-\rho_M\, |\alpha(x)(X,X)| \\ &\geq (1-\rho_M\, \sqrt{-Ric_x(X,X)}) \end{aligned} \tag{2.39}$$

Como $b(M) > -1$, temos pela desigualdade (2.38) que

$$\mathrm{Hess}\,\mathrm{f}(x)(X,X) \geq 2(1-c). \tag{2.40}$$

for every $x \in M \backslash B_M(r_0)$. Observe que esta desigualdade é exatamente a desigualdade (2.4) do teorema (2.2). Procedendo de forma similar ao teorema (2.2) obtemos, para o caso onde $\sup K_M = 0$, que

$$\mathrm{f}(x) = \rho_N(\varphi(x))^2 \geq (1-c)\rho_M(x)^2 + (b - 2(1-c))r_0\rho_M(x)$$

para todo $x \in M$. Uma desigualdade similar é obtida também quando $\sup K_N = \kappa < 0$ para a função $f(x) = \cosh(\sqrt{-\kappa}\rho_N(\varphi(x)))$. Neste caso, a desigualdade encontrada é a seguinte

$$\mathrm{f}(x) = \cosh(\rho_N(\varphi(x))) \geq (1-c)\rho_M(x)^2 + (b + 2\kappa(1-c))r_0\rho_M(x) + 1.$$

Segue então que a subvariedade mínima é propriamente imersa. Para mostrar que a subvariedade tem topologia finita basta proceder de forma análoga ao teorema(2.2).

Capítulo 3

Hipersuperfícies Cilindricamente Limitadas em $N \times \mathbb{R}$

Dos trabalhos de Barbosa-Kenmotsu-Oshikiri em [1] e Salavessa [16], temos que se um gráfico inteiro de uma função diferenciável $f : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ tem curvatura média constante H então $|H| \leq (n-1)/n$. Por outro lado, Bessa e Montenegro em [4], mostraram que hipersuperfícies compactas imersas em $N^n \times \mathbb{R}$ onde se N é uma variedade Riemanniana n-dimensional com pólo e curvaturas seccionais radiais $K_\gamma \leq -\kappa^2 < 0$, satisfaz $|H| > (n-1)\kappa/n$. Neste capítulo iremos estender o resultado de Bessa e Montenegro para H-hipersuperfícies completas cilindricamente limitadas de $N^n \times \mathbb{R}$ com curvatura de Ricci com decaimento super quadrático

$$Ric_M \geq -c^2[1 + \rho(x)^2 \cdot \log^2(\rho(x) + 2)] \tag{3.1}$$

onde $c = c(x_0) > 0$ é uma constante dependendo de x_0. Nós mostramos que $\sup |H| > (n-1)\kappa/n$. Este trabalho faz parte de um artigo com G. Pacelli Bessa aceito para publicação no jornal *Differential Geometry and its Applications.*

3.1 Subvariedades Cilindricamente Limitadas

Consideremos M uma variedade Riemanniana completa de m-dimensional e $\rho_M(x) = \mathrm{dist}_M(x_0, x)$ a função distância em M ao ponto $x_0 \in M$.

Seguindo a notação do capítulo 01, vamos a algumas definições.

Definição 3.1. *Dizemos que uma variedade Riemanniana completa M tem curvatura de Ricci com decaimento super quadrático se*

$$Ric_M \geq -c^2[1 + \rho_M(x)^2 \cdot \log^2(\rho_M(x) + 2)]. \tag{3.2}$$

onde $c = c(x_0) > 0$ é uma constante dependendo de x_0.

Se N é uma variedade Riemanniana de dimensão n considere a variedade produto $N \times \mathbb{R}$ e $p : N \times \mathbb{R} \to N$ a projeção no primeiro fator $p(y, t) = y$.

Definição 3.2. *Uma subvariedade imersa $M \subset N \times \mathbb{R}$ é Cilindricamente Limitada se $p(M)$ é um subconjunto limitado de N.*

Para a prova do teorema principal deste capítulo, iremos precisar de dois resultados básicos, o Teorema de Comparação do Hessiano apresentado no capítulo 01 e o Princípio do Máximo de Omori-yau cuja versão que apresentaremos aqui deve-se a Chen-Xin e pode ser encontrada em [19].

Teorema (Princípio do Máximo de Omori-Yau)- Seja M uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci com decaimento super quadrático. Seja $u : M \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 limitada superiormente. Então para qualquer sequência $\epsilon_k \to 0$ de números positivos existe uma sequência de pontos $x_k \in M$ tais que

a. $\lim\limits_{k\to\infty} u(x_k) = sup_M u$

b. $|\text{grad}u|(x_k) < \epsilon_k$

c. $\Delta u(x_k) < \epsilon_k$.

Iremos mostrar também que hipersuperfícies cilindricamente limitadas com certa limitação no vetor curvatura média limitado são não-parabólicas. Relembrando a definição de não parabolicidade:

Definição 3.3. *Uma variedade Riemanniana M é não-parabólica se M admite funções subharmônicas limitadas não-constante.*

Vamos ao resultado principal deste capítulo, os demais resultados seguem como consequência deste.

Teorema 3.4. *Seja N uma variedade Riemanniana completa n-dimensional com um pólo e curvaturas seccionais radiais $K_N \leq -\kappa^2 < 0$. Suponha que $\varphi : M \to N \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície imersa completa. Então*

a. Se $\varphi(M)$ é cilindricamente limitada e tem curvatura média $|H| < (n-2)\kappa/n$ então M é não parabólica.

b. Se $\varphi(M)$ é cilindricamente limitada e M tem curvatura de Ricci com decaimento super quadrático então $\sup_M |H| \geq (n-1)\kappa/n$

Prova: Seja $\varphi : M \to N \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica. Considere a função distância $\rho_N(y) = \mathrm{dist}(y_0, y)$ ao pólo $y_0 \in N$, $g : N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, e defina $f = g \circ \varphi : M \to \mathbb{R}$. Se $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base ortonormal de T_xM temos que o laplaciano de f é dado por

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess}g(\varphi(x))(e_i, e_i) + \langle \mathrm{grad}g, \vec{H}\rangle. \tag{3.3}$$

Onde $\vec{H}$ é o vetor curvatura média com norma $||\vec{H}|| = n|H|$. Podemos escolher a base $\{e_1, ..., e_n\}$ para T_xM da seguinte forma: Começaremos com uma base ortonormal para $T_{p(\varphi(x))}N$, $\{\mathrm{grad}\rho_N, \frac{\partial}{\partial\theta_2}, ..., \frac{\partial}{\partial\theta_n}\}$. Agora escolhemos uma base ortonormal para T_xM fazendo

$$e_1 = \langle e_1, \mathrm{grad}\rho_N\rangle \mathrm{grad}\rho_N + \langle e_1, \frac{\partial}{\partial t}\rangle \frac{\partial}{\partial t} + \langle e_1, \frac{\partial}{\partial\theta_1}\rangle \frac{\partial}{\partial\theta_1},$$

e

$$e_2 = \langle e_2, \frac{\partial}{\partial t}\rangle \frac{\partial}{\partial t} + \langle e_2, \frac{\partial}{\partial\theta_2}\rangle \frac{\partial}{\partial\theta_2}$$

e $e_j = \dfrac{\partial}{\partial\theta_j}$, $j = 3, ..., n$. Escolha $g(\varphi(x)) = \rho_N(p(\varphi(x)))$. Calculando o Laplaciano de f nesta base, obtemos:

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) \quad = \quad & \langle e_1, \tfrac{\partial}{\partial\theta_1}\rangle^2 \cdot \mathrm{Hess}\rho_N(\tfrac{\partial}{\partial\theta_1}, \tfrac{\partial}{\partial\theta_1}) \\
& + \langle e_2, \tfrac{\partial}{\partial\theta_2}\rangle^2 \cdot \mathrm{Hess}\rho_N(\tfrac{\partial}{\partial\theta_2}, \tfrac{\partial}{\partial\theta_2}) \\
& + \left(\sum_{i=3}^{n} \mathrm{Hess}\rho_N(e_i, e_i) + \langle \mathrm{grad}\rho_N, \vec{H}\rangle \right)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

onde o lado direito de (3.4) é calculado em $\varphi(x)$. Pelo Teorema de Comparação do Hessiano temos que

$$\begin{aligned}\Delta f(x) \quad &\geq \quad \Big(\langle e_1, \tfrac{\partial}{\partial\theta_1}\rangle^2 + \langle e_2, \tfrac{\partial}{\partial\theta_2}\rangle^2\Big) \cdot \kappa\coth(\kappa\rho_N) \\ &\quad + (\,(n-2)\kappa\coth(\kappa\rho_N) - n|H|\,)\end{aligned} \tag{3.5}$$

Para provar que M é não-parabólica observe que o primeiro termo de (3.5) é não negativo. Logo se $\varphi(M)$ tem vetor curvatura média

$$|H| < \frac{(n-2)}{n}\kappa\coth(\kappa\rho_N),$$

isto implica que $\Delta f(x) > 0$, portanto f é subharmônica. Sendo $\varphi(M)$ cilindricamente limitada, f é uma função subharmônica limitada em M. Então, M é não-parabólica. Assim a primeira parte do teorema está provada.

Suponha agora que $\varphi(M)$ é cilindricamente limitada logo f é limitada. Se M tem curvatura de Ricci com super decaimento quadrático, temos pelo princípio do Máximo de Omori-yau que existe uma sequência $\epsilon_k \to 0$ e uma sequência $x_k \in M$ tais que $\Delta f(x_k) < \epsilon_k$ e $|\mathrm{gradf}(x_k)| < \epsilon_k$. Observe que

$$\mathrm{grad} f(x) = \langle e_1(x), \mathrm{grad}\rho_N(x)\rangle e_1(x)$$

logo

$$|\langle e_1, \mathrm{grad}\rho_N\rangle(x_k)| = |\mathrm{gradf}(x_k)| \to 0$$

se $\epsilon_k \to 0$. Segue então que

$$\langle e_1, \frac{\partial}{\partial t}\rangle^2(x_k) + \langle e_1, \frac{\partial}{\partial\theta_1}\rangle^2(x_k) \to 1.$$

Como

$$\langle e_2, \frac{\partial}{\partial t}\rangle^2 + \langle e_2, \frac{\partial}{\partial\theta_2}\rangle^2 = 1$$

e

$$\langle e_1, \frac{\partial}{\partial t}\rangle^2 + \langle e_2, \frac{\partial}{\partial t}\rangle^2 \leq 1$$

Logo, se $\epsilon_k \to 0$ então

$$\langle e_1, \frac{\partial}{\partial t}\rangle^2(x_k) + \langle e_2, \frac{\partial}{\partial t}\rangle^2 + \langle e_1, \frac{\partial}{\partial\theta_1}\rangle^2(x_k) + \langle e_2, \frac{\partial}{\partial\theta_2}\rangle^2 \to 2.$$

Portanto
$$\langle e_1, \frac{\partial}{\partial\theta_1}\rangle^2(x_k) + \langle e_2, \frac{\partial}{\partial\theta_2}\rangle^2(x_k) \geq 1$$
Avaliando a desigualdade (3.5) em x_k, obtemos
$$\begin{aligned}\epsilon_k > \Delta f(x_k) &\geq \Big(\langle e_1, \tfrac{\partial}{\partial\theta_1}\rangle^2(x_k) + \langle e_2, \tfrac{\partial}{\partial\theta_2}\rangle^2(x_k)\Big)\cdot \coth(\kappa\rho_N(x_k)) \\ &+ (n-2)\kappa\coth(\kappa\rho_N(x_k)) - n|H| \qquad (3.6) \\ &\geq (n-1)\kappa - n|H|\end{aligned}$$
Como $\epsilon_k \to 0$, nos resta que
$$\sup_M |H| > (n-1)\kappa/n.$$
E isto conclui a prova do teorema (3.4).

Fazendo $N = \mathbb{H}^n(-1)$ no teorema (3.4), obtemos o seguinte resultado para hipersuperfícies de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.

Teorema 3.5. *Seja M uma hipersuperfície completa imersa em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Então*

a. Se M é cilindricamente limitada e tem curvatura média
$|H| < (n-2)/n$ então M é não parabólica.

b. Se M é cilindricamente limitada e tem curvatura de Ricci com decaimento super quadrático então $\sup_M |H| \geq (n-1)/n$

Uma consequencia imediata do teorema (3.5) é a não existência de hipersuperfícies completas imersas em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ com curvatura de Ricci com decaimento super quadrático e curvatura média com $\sup |H| < (n-1)/n$ contida em um cilindro vertical, como assegura o corolário abaixo.

Corolário 3.6. *Seja M uma hipersuperfície completa imersa em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ com curvatura de Ricci com decaimento super quadrático. Se* $\sup |H| < (n-1)/n$ *então M não está contida em um cilindro vertical.*

Os resultados acima também são válidos quando a variedade ambiente é $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Essencialmente temos.

Teorema 3.7. *Seja* $\varphi : M \to \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ *uma subvariedade imersa completa.*

a. Se $p(\varphi(M)) \subset B_{\mathbb{S}^n}(r)$, $r < \frac{\pi}{2}$ *e* $\sup_M |H| < (n-2)/n \cot(r)$ *então* M *é não parabólica.*

b. Se $p(\varphi(M)) \subset B_{\mathbb{S}^n}(r)$, $r < \frac{\pi}{2}$ *e* M *tem curvatura de Ricci com decaimento super quadrático então* $\sup_M |H| \geq (n-1)/n \cot(r)$.

Prova: Suponha que $\varphi : M \to \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ uma subvariedade imersa completa. Prosseguindo como na prova do teorema (3.4), para $g(\varphi(x)) = \rho_{\mathbb{S}^n}(\varphi(x))$ temos que a desigualdade (3.4), torna-se

$$\Delta f(q) \geq \langle e_2, \tfrac{\partial}{\partial\theta}\rangle^2 \cot(\rho_{\mathbb{S}^n}) + [(n-2)\cot(\rho_{\mathbb{S}^n}) - n|H|](\varphi(x)). \qquad (3.7)$$

Se $p(\varphi(M)) \subset B_{\mathbb{S}^n}(r)$, $r < \frac{\pi}{2}$, e se $\sup_M |H| < (n-2)/n \cot(r)$ então f é uma função limitada e subharmônica, portanto M é não parabólica. Se nas condições anteriores adicionarmos a condição de que a curvatura de Ricci tem decaimento super quadrático , temos pelo Princípio do Máximo de Omori-Yau que

$$\epsilon_k > [(n-1)\cot(\rho_{\mathbb{S}^n}) - n|H|](\varphi(x_k)) = b^2 > 0 \qquad (3.8)$$

Como a sequência $\epsilon_k \to 0$, temos então uma contradição.

Capítulo 4

Estimativas de Autovalores

Neste capítulo obtemos estimativas de autovalores para subvariedades em variedades de Hadamard N, com topologia finita e para domínios de Hipersuperfícies de $N^n \times \mathbb{R}$, onde N é uma variedade Riemanniana completa com curvaturas seccionais radiais limitadas superiormente.

4.1 Um Limite Superior para o Tom Fundamental de Subvariedades em Variedades de Hadamard

No capítulo 02 consideramos imersões isométricas $\varphi : M \to N$ de uma variedade Riemanniana completa M de dimensão m em uma variedades de Hadamard N de dimensão n com $a(M) < 1$. Vimos que tais imersões são próprias e que a função distância $\rho_N \circ \varphi$ não tem pontos críticos fora de conjuntos compactos. Obtivemos um limite superior para o tom fundamental dessas subvariedades em termos do primeiro autovalor de uma Forma Espacial $\mathbb{N}^l(\kappa)$, onde $l = l(m, n, \kappa) \geq m$ e $\kappa \leq 0$. Para subvariedades do espaço produto $N \times \mathbb{R}$, onde N é uma variedade Riemanniana completa de dimensão n com pólo e curvaturas seccionais limitadas superiormente, obtivemos uma estimativa inferior para o tom fundamental em termos de bolas geodésicas das Formas Espaciais. Nosso primeiro resultado é o seguinte.

Teorema 4.1. *Seja $\varphi : M \to N$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana completa M de dimensão m em uma variedade de Hadamard N de dimensão n com curvaturas seccionais $\kappa \leq K_N \leq 0$. Suponha que*

$a(M) < 1$. *Então existe* $l \in \mathbb{Z}_+$ *e uma constante* $C = C(H, m, a(M), \kappa)$ *tal que*

$$\lambda^*(M) \leq C\lambda^*(\mathbb{N}^l(\kappa)). \tag{4.1}$$

onde $\mathbb{N}^l(\kappa)$ *é a Forma Espacial de curvatura seccional constante* κ.

Proof: Seja $\varphi : M \to N$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana completa M de dimensão m em uma variedade de Hadamard N de dimensão n e curvatura seccional limitada $\kappa \leq K_N \leq 0$. Fixe um ponto $x_0 \in M$ e denote $y_0 = \varphi(x_0)$. Relembrando que $\rho_N(y) = \mathrm{dist}(y, y_0)$ é a função distância geodésica de N e $\rho_N(\varphi(x))$ é a distância extrínseca em M. Pelo prova do teorema (2.2) existe um $r_0 > 0$ tal que em $M \backslash \varphi^{-1}(B_N(r_0))$ não existe pontos críticos de $\rho_N(\varphi(x))$, onde $B_N(r_0)$ é a bola geodésica em N centrada em y_0 com raio r_0. Seja $R > r_0$ e Ω a componente conexa de $\varphi^{-1}(B_N(R))$ que contém x_0. Pela teorema (2.2) φ é própria, logo podemos tomar Ω com froteira $\partial\Omega \subset \varphi^{-1}(\partial(B_N(R)))$ suave por partes. Seja $v : B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R) \to \mathbb{R}$ a primeira autofunção da bola geodésica de raio R da Forma Espacial $\mathbb{N}^l(\kappa)$ de dimensão l (l a determinar) e curvatura seccional constante κ. A autofunção v é radial, isto é, $v(x) = v|x|$, e satisfaz a seguinte equação diferencial,

$$v''(t) + (l-1)v'(t)\frac{C_\kappa(t)}{S_\kappa(t)} + \lambda_1(B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R))v(t) = 0 \quad \forall \quad t \in (0, R), \tag{4.2}$$

onde $v(0) = 1$, $v'(0) = 0$. Além disso, $v'(t) < 0$ para todo $t \in (0, R)$. As funções S_κ e C_κ estão definidas em (1.4) e $\lambda_1(B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R))$ é o primeiro autovalor de Dirichlet da bola geodésica $B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R) \subset \mathbb{N}^l(\kappa)$ de raio R. Defina $g : B_N(R) \to \mathbb{R}$ por $g(y) = v \circ \rho_N(y)$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ por $f(x) = g(\varphi(x))$, logo $f > 0$ em Ω e $f|_{\partial\Omega} = 0$. Pelo teorema de Barta temos que $\lambda_1(\Omega) \leq \sup_\Omega(-\Delta f/f)$. Dado um ponto $x \in M$ e $X \in T_xM$, identificando $\varphi_* X = X$, o Hessiano de f, denotado por Hess$f$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}\, f(X,X) &= \mathrm{Hess}\, g(X,X) + \langle \mathrm{grad} g, \alpha(X,X)\rangle \\ &= v''(\rho_N)\langle \mathrm{grad}\rho_N, X\rangle^2 + v'(\rho_N)\mathrm{Hess}\,\rho_N(X,X) \\ &\quad + v'(\rho_N)\langle \mathrm{grad}\rho_N, \alpha(X,X)\rangle. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Seja $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_xM. Fazendo a identificação

$\varphi_* e_i = e_i$ o Laplaciano de f nesta base é dado por

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}[v''(\rho_N)\langle \mathrm{grad}\rho_N, e_i\rangle^2 + v'(\rho_N)\mathrm{Hess}\,\rho_N(e_i,e_i)] \\ &\quad + v'(\rho_N)\langle \mathrm{grad}\rho_N, \vec{H}\rangle.\end{aligned} \tag{4.4}$$

onde $\vec{H} = \sum_{i=1}^{n}\alpha(e_i,e_i)$ é o vetor curvatura média de M. Então dado $x \in \varphi^{-1}(B_N(R))$ escolha uma base ortonormal $\{e_1,...,e_m\}$ para T_xM tomando $\{e_2,...,e_m\}$ tangentes a esfera $\partial B_N(\rho(x))$ de raio $\rho(x) = \rho_N(\varphi(x))$ e $e_1 = \langle e_1, \mathrm{grad}\rho_N\rangle \mathrm{grad}\rho_N + \langle e_1, \partial/\partial\theta\rangle \partial/\partial\theta$ onde $\langle \partial/\partial\theta, \mathrm{grad}\rho_N\rangle = 0$. Para simplicar a notação façamos $t = \rho_N(\varphi(x))$. Temos então que,

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= \sum_{i=1}^{n}[v''(t)\langle \mathrm{grad}\rho_N, e_i\rangle^2 + v'(t)\mathrm{Hess}\,\rho_N(e_i,e_i)] \\ &\quad + v'(t)\langle \mathrm{grad}\rho_N, \vec{H}\rangle \\ &= v''(t)\langle e_1, \mathrm{grad}\rho_N\rangle^2 + v'(t)\langle e_1, \partial/\partial\theta\rangle^2 \mathrm{Hess}\rho_N(\partial/\partial\theta, \partial/\partial\theta) \\ &\quad + \sum_{i=2}^{n} v'(t)\mathrm{Hess}\,\rho_N(e_i,e_i) + v'(t)\langle \mathrm{grad}\rho_N, \vec{H}\rangle\end{aligned} \tag{4.5}$$

Dividindo (4.5) por $-f$, obtemos

$$\begin{aligned}-\frac{\Delta f}{f}(x) &= -\frac{v''}{v}(t)\langle e_1, \mathrm{grad}\rho_N\rangle^2 \\ &\quad -\frac{v'}{v}(t)\langle e_1, \partial/\partial\theta\rangle^2 \mathrm{Hess}\rho_N(\partial/\partial\theta, \partial/\partial\theta) \\ &\quad -\sum_{i=2}^{n}\frac{v'}{v}(t)\mathrm{Hess}\,\rho_N(e_i,e_i) - \frac{v'}{v}(t)\langle \mathrm{grad}\rho_N, \vec{H}\rangle\end{aligned} \tag{4.6}$$

Por hipótese $\kappa \leq K_N \leq 0$ então pelo Teorema de Comparação do Hessiano

$$\mathrm{Hess}\rho_N(X,X) \leq \frac{S_\kappa}{C_\kappa}(t), \tag{4.7}$$

para $X = e_i$, $\partial/\partial\theta$, e pela equação (4.2), temos que

$$-\frac{v''}{v}(t) = (l-1)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t)\frac{v'}{v}(t) + \lambda_1(B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R)) \quad \forall \quad t \in (0,R), \tag{4.8}$$

Substituindo as desigualdades (4.7) e (4.8) em (4.6), e que $\dfrac{v'}{v}(t) \leq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta f}{f}(x) &\leq \left((l-1)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t)\frac{v'}{v}(t) + \lambda_1(B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R))\right)\langle e_1, \mathrm{grad}\rho_N\rangle^2 \\ &\quad -\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t)\frac{v'}{v}(t)\left(\langle e_1, \partial/\partial\theta\rangle^2 + (m-1) + \frac{S_\kappa}{C_\kappa}(t)\|\vec{H}\|\right) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Como $\langle e_1, \mathrm{grad}\rho_N\rangle^2 = 1 - \langle e_1, \partial/\partial\theta\rangle^2$ então

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta f}{f}(x) &\leq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R))\,(1 - \langle e_1, \partial/\partial\theta\rangle^2) \\ &\quad -\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t)\frac{v'}{v}(t)\left(m - l + l\langle e_1, \partial/\partial\theta\rangle^2 + \frac{S_\kappa}{C_\kappa}(t)\|\vec{H}\|\right) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Agora considere $x \in \varphi^{-1}(B_N(R)\backslash B_N(r_0))$. Na segunda parte da prova do teorema (2.2) mostramos que existe um número η tal que $\langle e_1, \partial/\partial\theta\rangle^2(y) < \eta$ para todo $y = \varphi(x)$, onde $x \in M\backslash\varphi^{-1}(B_N(r_0))$. De fato, o raio r_0 é escolhido de forma que em $M\backslash\varphi^{-1}(B_N(r_0))$ não existe ponto crítico de $\rho_N \circ \varphi$. Observe tambem que, pela equação (2.18), x é ponto crítico de $\rho_N \circ \varphi$ se e só se $\langle e_1, \partial/\partial\theta\rangle = \sin\beta(\varphi(x)) = 1$ se e só se $\cos\beta(\varphi(x)) = \langle e_1, \mathrm{grad}\rho_N\rangle = 0$. Na desigualdade (2.34) mostramos que para qualquer $x \in M\backslash\varphi^{-1}(B_N(r_0))$, vale a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \langle e_1, \partial/\partial\theta\rangle(\varphi(x)) &\leq \frac{S_\kappa(r_0)}{S_\kappa(\rho_N(\varphi(x))) + r_0}\,(\sup\sin\beta(\varphi(z)) - c) + c \\ &\leq \max\,(\sup\sin\beta(z), c) = \eta \end{aligned} \tag{4.11}$$

onde $z \in \varphi^{-1}(\partial B_N(r_0))$. Já que $a(M) < 1$, temos que o vetor curvatura média satisfaz

$$\|\vec{H}\|(x) \leq m\|\alpha\|(x) < mc\,(C_\kappa/S_\kappa)\,(\rho_M(x)) < mc\,(C_\kappa/S_\kappa)\,(\rho_N(\varphi(x))$$

Substituindo estas desigualdades em (4.10), obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta f}{f}(x) &\leq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R)) \\ &\quad -\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t)\frac{v'}{v}(t)\,(m - l + l\eta + mc) \end{aligned} \tag{4.12}$$

Escolha $l \in \mathbb{Z}_+$ de forma que $m - l + l\eta + mc \leq 0$. Com esta escolha para l, obtemos da desigualdade (4.12), que para todo $x \in \varphi^{-1}(B_N(R)\backslash B_N(r_0))$

$$-\frac{\Delta f}{f}(x) \leq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R)). \tag{4.13}$$

Agora considere $x \in \varphi^{-1}(B_N(r_0))$. Como $1 - \langle e_1, \partial/\partial\theta\rangle^2 \leq 1$ temos então que $-l + l\langle e_1, \partial/\partial\theta\rangle^2 \leq 0$ logo, pela desigualdade (4.10) temos que

$$-\frac{\Delta f}{f}(x) \leq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R)) - \frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t)\frac{v'}{v}(t)\left(m + \frac{S_\kappa}{C_\kappa}(t)\|\vec{H}\|\right) \tag{4.14}$$

onde $t = \rho_N(\varphi(x))$. Como φ é própria existe uma constante positiva C_0 tal que $\sup_{\varphi^{-1}(B_N(r_0))} \frac{S_\kappa}{C_\kappa}(t)\|\vec{H}\| \leq C_0$. Alem disso, v é uma função positiva não crescente logo $v(t) \geq v(r_0)$. Então

$$\begin{aligned}
-\frac{\Delta f}{f}(x) &\leq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R)) - \frac{C_\kappa(t)}{S_\kappa(t)}\frac{v'(t)}{v(t)}(m + C_0) \\
&\leq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R)) + \frac{t \cdot C_\kappa(t)}{S_\kappa(t)}\left(-\frac{v'(t)}{t}\right) \cdot \frac{(m + C_0)}{v(r_0)} \qquad (4.15) \\
&\leq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R)) + \frac{r_0 \cdot C_\kappa(r_0)}{S_\kappa(r_0)}\left(-\frac{v'(t)}{t}\right) \cdot \frac{(m + C_0)}{v(r_0)}
\end{aligned}$$

Pelo lema (4.3) $-\frac{v'(t)}{t} \leq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R))$. Substituindo em (4.15), obtemos

$$-\frac{\Delta f}{f}(x) \leq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R))\left(1 + r_0\frac{C_\kappa(r_0)}{S_\kappa(r_0)}\frac{1}{v(r_0)}(m + C_0)\right) \tag{4.16}$$

Assim, para todo $x \in \varphi^{-1}(B_N(R))$ temos das desigualdades (4.13) e (4.16) que

$$\sup_\Omega\left(-\frac{\Delta f}{f}(x)\right) \leq \left(1 + r_0\frac{C_\kappa(r_0)}{S_\kappa(r_0)}\frac{1}{v(r_0)}(m + C_0)\right)\lambda_1(B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R)) \tag{4.17}$$

Pelo teorema de Barta

$$\lambda_1(\Omega) \leq \left(1 + r_0\frac{C_\kappa(r_0)}{S_\kappa(r_0)}\frac{1}{v(r_0)}(m + C_0)\right)\lambda_1(B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R)) \tag{4.18}$$

Suponha que $R = R_1 < R_2 < R_3 < \cdots \leq \infty$ e para cada i, considere $\Omega_i \subset \varphi^{-1}(\bar{B}_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R_i))$ uma componente conexa. Como M é completa e φ é própria então a sequência $\{\Omega\}_{i=1}^{\infty}$ é uma exaustão de M por conjuntos compactos. Logo a desigualdade (4.18) vale para cada $i = 1, 2, \cdots$, isto é

$$\lambda^*(\Omega_i) \leq C\lambda^*(B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R_i)) \tag{4.19}$$

Se $i \to \infty$, temos que

$$\lambda_1(B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R_i)) \to \lambda^*(\mathbb{N}^l(\kappa)) \tag{4.20}$$

Como $0 \leq \lambda^*(M) \leq \lambda^*(\Omega_i)$. Então por (4.19) e (4.20), obtemos

$$\lambda^*(M) \leq C\lambda^*(\mathbb{N}^l(\kappa)). \tag{4.21}$$

Como consequencia do teorema (4.1), obtemos

Corolário 4.2. *Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}^n$ uma subvariedade completa de dimensão m em $\mathbb{R}^n$. Suponha que $a(M) < 1$. Então*

$$\lambda^*(M) = 0. \tag{4.22}$$

Agora vamos ao lema citado na prova do teorema (4.1).

Lema 4.3. *Seja $v : B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R) \to \mathbb{R}$ a primeira autofunção positiva da bola geodésica $B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R)$ da Forma espacial $\mathbb{N}^l(\kappa)$ de dimensão l e curvatura seccional constante $\kappa \leq 0$ e $\lambda_1(B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R))$ o primeiro autovalor de $B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R)$. Então $v''(t) > -\lambda_1(B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R))$ e*

$$-\frac{v'(t)}{t} < \lambda_1(B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R)). \tag{4.23}$$

Proof: Denote $\lambda_1 =: \lambda_1(B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R))$. Como v satisfaz equação diferencial

$$v''(t) + (l-1)v'(t)\frac{C_\kappa(t)}{S_\kappa(t)} + \lambda_1(B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R))v(t) = 0. \tag{4.24}$$

com $v(0) = 1$, $v'(0) = 0$, $v'(t) < 0$ e $v(t) \leq 1$, então

$$0 = v''(t) + (l-1)v'(t)\frac{C_\kappa(t)}{S_\kappa(t)} + \lambda_1(B_{\mathbb{N}^l(\kappa)}(R))v(t) \leq v''(t) + \lambda_1 \tag{4.25}$$

Portanto $v''(t) > -\lambda_1$. Defina uma função $h : [0, R] \to \mathbb{R}$ por

$$h(t) = \lambda_1 t + v'(t). \tag{4.26}$$

Logo $h(0) = 0$ e $h'(t) = v''(t) + \lambda_1 \geq 0$. Segue que h é não decrescente, logo $h(t) \geq 0$ para todo $t \in (0, R)$. E isto conclui o lema.

4.2 Estimativa de Autovalor em $N \times \mathbb{R}$

Seja N uma variaedade Riemanniana completa de dimensão n com pólo y_0, e curvatura seccional radial limitada superiormente por uma constante não nula e $\mathbb{R}$ a reta real. Considere a variedade produto $N \times \mathbb{R}$. Nesta seção vamos considerar subvariedades mínimas $M \subset N \times \mathbb{R}$ de dimensão m. Nós obtivemos uma estimativa para o tom fundamental de domínios de M em termos do primeiro autovalor de bolas geodésicas das Formas Espaciais $\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)$ de dimensão $m-1$. Bessa e Montenegro em [6] dão a seguinte estimativa para autovalores de subvariedades mínimas de uma variedade Riemanniana N com curvaturas secionais radiais limitadas superiormente.

Teorema 4.4. (Bessa - Montenegro) *Seja N uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional radial $K(x)(\frac{\partial}{\partial t}, v) \leq \kappa$ para todo $x \in B_N(x_0, r)\backslash Cut(x_0)$, e para todo $v \perp \frac{\partial}{\partial t}$ com $|v| \leq 1$. Seja $M \subset N$ uma subvariedade mínima de dimensão m e $\Omega \subset M \cap B_N(x_0, r)$ uma componente conexa. Suponha que a medida de Hausdorff $(n-1)$-dimensional $\mathcal{H}^{n-1}(\ Cut(x_0)\ \cap B_N(x_0, r)) = 0$. Se $\kappa > 0$ suponha que $r < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$. Então*

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^m(\kappa)}(r)) \tag{4.27}$$

onde $B_{\mathbb{N}^m(\kappa)}(r)$é a bola geodésica de raio $r > 0$ da Forma Espacial $\mathbb{N}^m(\kappa)$ de curvatura seccional constante κ. Se Ω é limitada então a igualdade em (4.27) vale quando $\Omega = B_{\mathbb{N}^m(\kappa)}(r)$ e $M = \mathbb{N}^m(\kappa)$.

Para componentes conexas de subvariedades mínimas de $N \times \mathbb{R}$ obtivemos o seguinte resultado.

Teorema 4.5. *Seja N uma variedade Riemanniana completa de dimensão n com pólo e curvaturas seccionais radiais limitadas superiormente $K_N \leq \kappa$. Seja $\varphi : M \hookrightarrow N \times \mathbb{R}$ uma subvariedade mínima completa M de dimensão m em uma variedade produto $N \times \mathbb{R}$ e $\Omega \subset M \cap (B_N(r) \times \mathbb{R})$ uma componente conexa. Se $\kappa > 0$ suponha que $r < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$. Então*

$$\lambda^*(\Omega) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r)), \tag{4.28}$$

onde $B_N(r)$ e $B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r)$ são as bolas geodésicas de raio r respectivamente de N e da Forma Espacial $\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)$ de curvatura seccional constante κ. A igualdade em (4.28) ocorre se tomarmos $M = \mathbb{H}^{m-1}(-1) \times \mathbb{R}$, $N = \mathbb{H}^m(-1)$ e $\Omega = B_{\mathbb{H}^{m-1}(-1)}(r) \times \mathbb{R} = (\mathbb{H}^{m-1}(-1) \times \mathbb{R}) \cap \big(B_{\mathbb{H}^m(-1)}(r) \times \mathbb{R}\big)$.

Prova: Seja $\varphi : M \hookrightarrow N \times \mathbb{R}$ uma subvariedade mínima de dimensão m. Dado $y_0 \in N$ denote $\rho_N(y) = \text{dist}(y_0, y)$ a função distância ao ponto $y_0 \in N$. Considere $v : B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r) \to \mathbb{R}$ a primeira autofunção positiva associada ao primeiro autovalor $\lambda_1(B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r)) =: \lambda_1$ da Forma Espacial $\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)$ de dimensão $m-1$ de curvatura seccional constante κ. A autofunção v é radial e satisfaz a seguinte equação diferencial

$$v''(t) + (m-2)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t)v'(t) + \lambda_1(B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r))v(t) = 0, \quad t \in (0, r). \tag{4.29}$$

onde $v(0) = 1$. Defina $g : B_N(r) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(y, t) = v \circ \rho_N \circ p(y, t)$, onde $p : N \times \mathbb{R} \to N$ é a projeção no primeiro fator, $p(y, t) = y$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ por $f(x) = g \circ \varphi(x)$. Já que φ é mínima então o Laplaciano de f é dado por

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{m} \text{Hess}\, g(\varphi(x))\,(e_i, e_i)$$

Para cada $x \in \Omega$, vamos tomar uma base ortonormal $\{e_1, \ldots e_n\}$ para T_xM da seguinte forma. Começaremos escolhendo uma base ortonormal (em coordenadas polares) $\{\text{grad}\rho_N, \frac{\partial}{\partial\theta_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}}\}$ para $T_{p(\varphi(x))}N$ onde $\frac{\partial}{\partial\theta_i}$, $i = 1, ..., n-1$ forma uma base ortonormal de $S_r^{n-1} = \partial(B_N(r))$. Então para T_xM façamos

$$e_1 = \langle e_1, \text{grad}\rho_N\rangle\text{grad}\rho_N + \langle e_1, \frac{\partial}{\partial s}\rangle\frac{\partial}{\partial s} + \langle e_1, \frac{\partial}{\partial\theta_1}\rangle\frac{\partial}{\partial\theta_1} \tag{4.30}$$

$$e_2 = \langle e_2, \frac{\partial}{\partial s}\rangle\frac{\partial}{\partial s} + \langle e_2, \frac{\partial}{\partial\theta_2}\rangle\frac{\partial}{\partial\theta_2} \tag{4.31}$$

e $e_j = \dfrac{\partial}{\partial\theta_j}$, para $j = 3, ..., m$. Como

$$\langle\nabla_{e_i}\text{grad}\,\rho_N, e_i\rangle = \begin{cases} \langle e_1, \frac{\partial}{\partial\theta_1}\rangle^2\text{Hess}(\frac{\partial}{\partial\theta_1}, \frac{\partial}{\partial\theta_1}) & se \quad i = 1 \\ \langle e_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\rangle^2\text{Hess}\,\rho_N(\frac{\partial}{\partial\theta_2}, \frac{\partial}{\partial\theta_2}) & se \quad i = 2, \\ \text{Hess}\,\rho_N(e_i, e_i) & se \quad i \geq 3 \end{cases} \tag{4.32}$$

O Laplaciano de f é dado por

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= v''(\rho_N)\langle e_1, \mathrm{grad}\rho_N\rangle^2 \\
&\quad + v'(\rho_N)\langle e_1, \frac{\partial}{\partial\theta_1}\rangle^2 \mathrm{Hess}\ \rho_N(\frac{\partial}{\partial\theta_1}, \frac{\partial}{\partial\theta_1}) \\
&\quad + v'(\rho_N)\sum_{i=3}^{m} \mathrm{Hess}\ \rho_N(e_i, e_i) \\
&\quad + v'(\rho_N)\langle e_2, \frac{\partial}{\partial\theta_2}\rangle^2 \mathrm{Hess}\ \rho_N(\frac{\partial}{\partial\theta_2}, \frac{\partial}{\partial\theta_2})
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Para simplificar a notação façamos $\rho_N(\varphi(x)) = t$ e observemos que

$$\langle e_1, \mathrm{grad}\rho_N\rangle^2 = 1 - \langle e_1, \frac{\partial}{\partial s}\rangle^2 - \langle e_1, \frac{\partial}{\partial\theta_1}\rangle^2.$$

Substituindo em (4.33), obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta f &= v''(t) + v'(t)\sum_{i=3}^{m} \mathrm{Hess}\ \rho_N(e_i, e_i) \\
&\quad - v''(t)\left(\langle e_1, \frac{\partial}{\partial s}\rangle^2 + \langle e_1, \frac{\partial}{\partial\theta_1}\rangle^2\right) \\
&\quad + v'(t)\langle e_1, \frac{\partial}{\partial\theta_1}\rangle^2 \mathrm{Hess}\ \rho_N(\frac{\partial}{\partial\theta_1}, \frac{\partial}{\partial\theta_1}) \\
&\quad + v'(t)\langle e_2, \frac{\partial}{\partial\theta_2}\rangle^2 \mathrm{Hess}\ \rho_N(\frac{\partial}{\partial\theta_2}, \frac{\partial}{\partial\theta_2})
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Como $v'(t) < 0$, temos pelo Teorema de Comparação do Hessiano que

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &\leq v''(t) + (m-2)\frac{C_\kappa(t)}{S_\kappa(t)} v'(t) \\
&\quad - v''(t)\left(\langle e_1, \frac{\partial}{\partial s}\rangle^2 + \langle e_1, \frac{\partial}{\partial\theta_1}\rangle^2\right) \\
&\quad + v'(t)\frac{C_\kappa(t)}{S_\kappa(t)}\left(\langle e_1, \frac{\partial}{\partial\theta_1}\rangle^2 + \langle e_2, \frac{\partial}{\partial\theta_2}\rangle^2\right)
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Dividindo (4.35) por $-f$, e usando a equação (4.29), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{-\Delta f}{f}(x) \quad &\geq \quad \lambda_1(B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r)) \\ &+\frac{v''(t)}{v(t)}\left(\langle e_1, \frac{\partial}{\partial s}\rangle^2 + \langle e_1, \frac{\partial}{\partial \theta_1}\rangle^2\right) \\ &-\frac{v'(t)}{v(t)}\frac{C_\kappa(t)}{S_\kappa(t)}\left(\langle e_1, \frac{\partial}{\partial \theta_1}\rangle^2 + \langle e_2, \frac{\partial}{\partial_2}\rangle^2\right)\end{aligned} \tag{4.36}$$

Como

$$\langle e_1, \frac{\partial}{\partial s}\rangle^2 + \langle e_2, \frac{\partial}{\partial s}\rangle^2 \leq 1$$

temos então que

$$\begin{aligned}\langle e_1, \frac{\partial}{\partial \theta_1}\rangle^2 + \langle e_2, \frac{\partial}{\partial \theta_2}\rangle^2 \quad &= \quad \langle e_1, \frac{\partial}{\partial \theta_1}\rangle^2 + 1 - \langle e_2, \frac{\partial}{\partial t}\rangle^2 \\ &\geq \quad \langle e_1, \frac{\partial}{\partial \theta_1}\rangle^2 + \langle e_1, \frac{\partial}{\partial s}\rangle^2\end{aligned} \tag{4.37}$$

Substituindo em (4.36), ficamos com o seguinte

$$\begin{aligned}\frac{-\Delta f}{f}(x) \quad &\geq \quad \lambda_1(B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r)) \\ &+\left(\frac{v''(t)}{v(t)} - \frac{v'(t)}{v(t)}\frac{C_\kappa(t)}{S_\kappa(t)}\right)\left(\langle e_1, \frac{\partial}{\partial \theta_1}\rangle^2 + \langle e_1, \frac{\partial}{\partial s}\rangle^2\right)\end{aligned} \tag{4.38}$$

Novamente pela equação (4.29), temos que

$$\frac{v''(t)}{v(t)} - \frac{v'(t)}{v(t)}\frac{C_\kappa(t)}{S_\kappa(t)} = -(m-1)\frac{v'(t)}{v(t)}\frac{C_\kappa(t)}{S_\kappa(t)} - \lambda_1(B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r))$$

Pelo lemma (4.6) abaixo, veja também [3], vimos que

$$(m-1)\, v'(t)\frac{C_\kappa(t)}{S_\kappa(t)} + \lambda_1(B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r))v(t) < 0.$$

Temos então que o segundo e termo de (4.38) é não negativo. Logo

$$-\frac{\Delta f}{f} \geq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r)). \tag{4.39}$$

Pelo Teorema de Barta obtemos que

$$\lambda^*(\Omega) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(R)) \tag{4.40}$$

Para o caso da igualdade, observe que $M = \mathbb{H}^{m-1}(-1) \times \mathbb{R}$ é totalmente geodésica em $\mathbb{H}^m(-1) \times \mathbb{R}$. Então, se tomarmos

$$\Omega = B_{\mathbb{H}^{m-1}(-1)}(r) \times \mathbb{R} = \big(\mathbb{H}^{m-1}(-1) \times \mathbb{R}\big) \cap \big(B_{\mathbb{H}^m(-1)}(r) \times \mathbb{R}\big)$$

temos que

$$\lambda^*(\Omega) = \lambda_1(B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r)) \tag{4.41}$$

e isto conclui a prova do teorema.

Vamos ao lema que usamos para demonstrar o teorema (4.5).

Lema 4.6. *Seja $v : B_{\mathbb{N}^n(\kappa)}(r) \to \mathbb{R}$ a primeira autofunção positiva associada ao primeiro autovalor $\lambda_1(B_{\mathbb{N}^n(\kappa)}(r)) =: \lambda_1$ com $v = 0$ em $\partial B_{\mathbb{N}^n(\kappa)}(r)$. Então*

$$n\frac{C_{\kappa(t)}}{S_\kappa(t)} + \lambda_1(B_{\mathbb{N}^n(\kappa)}(r))v(t) < 0, t \in (0, r). \tag{4.42}$$

Prova: Suponha inicialmente que $\kappa < 0$, logo

$$S_\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sinh(\sqrt{-\kappa}t)$$

Considere a seguinte função $\mu(t) = \cosh(\sqrt{-\kappa}t)^{\frac{\lambda_1}{n\kappa}} = C_\kappa(t)^{\frac{\lambda_1}{n\kappa}}$. Logo

$$\mu'(t) = -\frac{\lambda_1}{n}\, S_\kappa(t)\, C_\kappa(t)^{\frac{\lambda_1}{n\kappa}-1}.$$

Assim

$$\begin{aligned} (v'\mu - \mu' v)(t) &= v'(t)\, C_\kappa^{\frac{\lambda_1}{nk}}(t) + \tfrac{\lambda_1}{n} S_\kappa(t)\, C_\kappa(t)^{\frac{\lambda_1}{n\kappa}-1} v(t) \\ &= \tfrac{1}{n}\, C_\kappa(t)^{\frac{\lambda_1}{n\kappa}-1}\, S_\kappa(t) \left(n\tfrac{C_\kappa(t)}{S_\kappa(t)} v'(t) + \lambda_1 v(t)\right). \end{aligned} \tag{4.43}$$

Já que

$$\frac{1}{n}\, C_\kappa(t)^{\frac{\lambda_1}{n\kappa}-1}\, S_\kappa(t) > 0 \quad \forall t \in (0, r)$$

então, provar que

$$n\frac{C_\kappa(t)}{S_\kappa(t)} v'(t) + \lambda_1 v(t) < 0$$

é equivalente a mostrar que

$$v'(t)\mu(t) - \mu'(t)v(t) < 0. \tag{4.44}$$

Como v é autofunção do Lapalaciano v, temos

$$v''(t) + (n-1)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t)v'(t) + \lambda_1(B_{\mathbb{H}^n(\kappa)}(r))v(t) = 0, \quad t \in (0, r). \tag{4.45}$$

Multiplicando (4.45) por S_κ^{n-1}, chegamos a seguinte igualdade

$$\left(S_\kappa^{n-1}\ v'\right)'(t) + \lambda_1 S_\kappa^{n-1}(t)\ v(t) = 0 \quad t \in (0, r). \tag{4.46}$$

E para a função $\mu(t) = C_\kappa(t)^{\frac{\lambda_1}{n\kappa}}$, temos que

$$\mu'(t) \ \ = \ \ -\tfrac{\lambda_1}{n}\ S_\kappa(t)\ C_\kappa(t)^{\frac{\lambda_1}{n\kappa}-1} = -\tfrac{\lambda_1}{n}\tfrac{S_\kappa(t)}{C_\kappa(t)}\mu(t) \tag{4.47}$$

logo

$$\mu''(t) = -\lambda_1\left(\frac{1}{nC_\kappa^2(t)} - \frac{\lambda_1}{n^2}\frac{S_\kappa^2(t)}{C_\kappa^2(t)}\right)\mu(t). \tag{4.48}$$

Multiplicando (4.48) por $S_\kappa^{n-1}(t)$, obtemos

$$S_\kappa^{n-1}(t)\mu''(t) + \lambda_1 S_\kappa^{n-1}(t)\left(\tfrac{1}{nC_\kappa^2(t)} - \tfrac{\lambda_1}{n^2}\tfrac{S_\kappa^2(t)}{C_\kappa^2(t)}\right)\mu(t) = 0. \tag{4.49}$$

Adicionando e subtraindo

$$(n-1)\mu'(t)S_\kappa^{n-2}C_\kappa(t) = -(n-1)\tfrac{\lambda_1}{n}S_\kappa^{n-1}(t)\mu(t) \tag{4.50}$$

obtemos

$$(S_\kappa^{n-1}(t)\mu')'(t) + \lambda_1 S_\kappa^{n-1}(t)\left(\tfrac{n-1}{n} + \tfrac{1}{nC_\kappa^2(t)} - \tfrac{\lambda_1}{n^2}\tfrac{S_\kappa^2(t)}{C_\kappa^2(t)}\right)\mu(t) = 0 \tag{4.51}$$

portanto, as funções v e μ satisfazem as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} &\left(S_\kappa^{n-1}\ v'\right)'(t) + \lambda_1 S_\kappa^{n-1}(t)\ v(t) &&= 0 \\ &\left(S_\kappa^{n-1}\mu'\right)'(t) + \lambda_1 S_\kappa^{n-1}(t)\left(\tfrac{n-1}{n} + \tfrac{1}{nC_\kappa^2(t)} - \tfrac{\lambda_1}{n^2}\tfrac{S_\kappa^2(t)}{C_\kappa^2(t)}\right)\mu(t) &&= 0 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Em (4.52) vamos multiplicar a primeira equação por μ, a segunda por por $-v$ e addiciona-las. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}\left((S_\kappa^{n-1}\, v')'\, \mu - (S_\kappa^{n-1}\, \mu')'\, v'\right)(t) &= \lambda_1 S_\kappa^{n-1}(t)\left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{nC_\kappa^2(t)}\right)(\mu v)(t) \\ &+ \lambda_1 S_\kappa^{n-1}(t)\left(\tfrac{\lambda_1}{n^2}\frac{S_\kappa^2(t)}{C_\kappa^2(t)}\right)(\mu v)(t)\end{aligned}$$

Integrando de 0 to t, ficamos com o seguinte

$$S_\kappa^{n-1}\left(v'\mu - \mu' v\right)(t) = -\int_0^t \left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{nC_\kappa^2(s)} + \tfrac{\lambda_1}{n^2}\tfrac{S_\kappa^2(s)}{C_\kappa^2(s)}\right)\left(\lambda_1 S_\kappa^{n-1}\mu v\right)(s)ds$$

Como

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{nC_\kappa^2(s)} + \frac{\lambda_1}{n^2}\frac{S_\kappa^2(s)}{C_\kappa^2(s)}\right)\left(\lambda_1 S_\kappa^{n-1}\mu v\right)(s) > 0$$

então

$$v'(t)\mu(t) - \mu'(t)v(t) < 0 \quad for \;\; t \in (0, r).$$

Vamos agora ao caso onde $\kappa > 0$. Neste caso temos que

$$S_\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin \sqrt{\kappa} t$$

para $t \in (0, r)$ com $r < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Defina $\mu(t) = \cos(\sqrt{\kappa}t)^{\frac{-\lambda_1}{n\kappa}} = C_\kappa^{\frac{-\lambda_1}{n\kappa}}$. Assim

$$\begin{aligned}\mu'(t) &= -\frac{\lambda_1}{n\kappa}\cos(\sqrt{\kappa}t)^{\frac{-\lambda_1}{n\kappa}-1}\left(-\sqrt{\kappa}\sin(\sqrt{\kappa}t)\right) \\ &= \frac{\lambda_1}{n} C_\kappa(t)^{\frac{-\lambda_1}{n\kappa}-1} S_\kappa(t)\end{aligned} \tag{4.53}$$

E procedendo de forma similar que o caso onde $\kappa < 0$, temos que v e μ satisfazem as seguintes identidades

$$\begin{aligned}&\left(S_\kappa^{n-1}\, v'\right)'(t) + \lambda_1 S_\kappa^{n-1}(t)\, v(t) = 0 \\ &(S_\kappa^{n-1}(t)\mu')'(t) - \lambda_1 S_\kappa^{n-1}(t)\left(\tfrac{n-1}{n} + \tfrac{1}{nC_\kappa^2(t)} + \tfrac{\lambda_1}{n^2}\tfrac{S_\kappa^2(t)}{C_\kappa^2(t)}\right)\mu(t) = 0\end{aligned} \tag{4.54}$$

Em (4.54) multiplicamos a primeira equação por μ, a segunda por $-v$ adicionamos ambas e integrando de 0 a t chegamos a seguinte identidade

$$S_\kappa^{n-1}(v'\mu - \mu' v)(t) = -\int_0^t \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{nC_\kappa^2} + \frac{\lambda_1}{n^2}\frac{S_\kappa^2}{C_\kappa^2}\right)\left(\lambda_1 S_\kappa^{n-1}\mu v\right) ds$$

O termo

$$\lambda_1 S_\kappa^{n-1}(t)\left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{nC_\kappa^2(t)} + \frac{\lambda_1}{n^2}\frac{S_\kappa^2(t)}{C_\kappa^2(t)}\right)\mu(t)v(t) > 0$$

Logo

$$v'(t)\mu(t) - \mu'(t)v(t) < 0 \quad for \;\; t \in (0, r), \;\; r < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

Assim concluimos a prova do teorema. O lema acima também é válido quando $\kappa = 0$. Neste caso basta tomarmos $\mu = \exp^{-\dfrac{\lambda_1 t^2}{2m}}$ e proceder como nos casos acima.

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, João Lucas Marques ; KENMTSU, K. ; OSHIKIRI O. Foliations by hypersurfaces with constant mean curvature. *Mathematische Zeitschrift,* Berlin, v. 207, p. 97-108, (1991).

[2] BARTA, J. Sur la vibration fundamental d'une membrene *Compets Rendus de L'Academie des Sciences*, Paris, v. 204, p. 472-473, 1937.

[3] BESSA, G. P. ; JORGE, L. ; MONTENEGRO J. F. Complete submanifolds of $\mathbb{R}^n$ with finite topology. Preprint.

[4] BESSA, G. P. ; MONTENEGRO J. F. On compact H-hypersurfaces of $N \times \mathbb{R}$. Preprint.

[5] ________. Eigenvalue estimates for submanifolds with locally bounded mean curvature. *Annals of Global Analysis and Geometry*, Amsterdam, v.24, p. 279-290, 2003.

[6] ________. An extension of Barta's theorem and geometric applications.*Annals of Global Analysis and Geometry*, Amsterdam, v.31, p. 345-362, 2007.

[7] BESSA, G. P. ; JORGE, L. ; LIMA, B. ; MONTENEGRO, J. F. Fundamental tone estimates for elliptic operators in divergence form and geometric applications. *Anais da Academia Brasileira de Ciências* v. 78 p. 391-404, 2006.

[8] BESSA, G. P. ; COSTA, M. Silvana. On cylindrically bounded H-hypersurfaces of $N \times \mathbb{R}$. *To appear in Differential Geometry and its Applications.*

[9] CALABI, E. *Quelques applications l'analyse complexa aus surfaces d'aire minima:* Together with Topics in Complex Manifolds by Hugo Rossi.) Les press de l'universités de Montreal, 1968.

[10] CHAVEL, I. *Eigenvalues in Riemannian Geometric.* New York: Academic Press, 1984, 362 p.

[11] CHENG, S. Y. Eigenfunctions and eigenvalues of the Laplacian, In:*Differential geometry.* Providence, R. I. : American Mathematical Society, 1975. v. 27, part. 2, p. 185-193.(Proceedings of symposia in pure mathematics)

[12] JORGE, L. ; KOUTROFIOTIS, D. An estimate for the curvature of bounded submanifolds. *American Journal Mathematics*, Baltimore, v. 103, p. 711-725, 1980.

[13] MILNOR, J. *Morse theory.* Princeton: Univiversity, c1963.153p (Annals of mathematics studies n. 51)

[14] SCHOEN, R. ; YAU, S. T. *Lectures on Differential Geometry.* Conference proceeedings and lectures notes in geometry and topology. vol. 1, 1994.

[15] OMORI, H. Isometric immersion of Riemannian manifolds. *Journal of Mathematics Society of Japan*, v. 19, p. 205-214, 1967.

[16] SALAVESSA, I. *Graphs with parallel mean curvature and a variational problem in conformal geometry.* 1988. Tese.(university of Warick)

[17] SALAVESSA, I. Graphs with parallel mean curvature. *Proceedings of the American Mathematical Society,* Providence, v. 107, p. 449-458, 1989.

[18] SHA, J. ; YANG, D. Examples of positive Ricci curvature. *Journal Differential Geometry* v. 29(1) p. 95-103, 1989.

[19] XIN, Y. *Geometry of Harmonic maps* Boston: (Birkhauser, c1996. 241 p. Progress in nonlinear differential equations and their aplications, v.23).