UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Francisco José de Andrade

GRÁFICOS CONFORMES COM CURVATURA DE ORDEM SUPERIOR PRESCRITA

Fortaleza
2008

Francisco José de Andrade

GRÁFICOS CONFORMES COM CURVATURA DE ORDEM SUPERIOR PRESCRITA

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração de Geometria Diferencial

Orientador:
Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira.

Fortaleza
2008

Andrade, Francisco José de
A567g Gráficos de Killing Conformes com Curvatura Prescrita/Francisco José de Andrade. 2008.

89j.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira.
Tese (Doutorado). Universidade Federal do Ceará, Departamento de Matemática, 2008.

1 - Geometria Diferencial
2 - Geometria Riemanniana CDD 516.36

Dedico este trabalho a minha esposa Erileuda, aos meus filhos Ezequias e Caio, a meus pais José Manoel e Rita e a meus irmãos: Raimunda, Juraci, Terezinha, Sebastião e Paulo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, antes de tudo, a Jesus Cristo. Agradeço também a todas as pessoas que direta ou indiretamente me ajudaram nesta caminhada. Em particular,

Aos meus pais, por terem acreditado e investido toda a sua vida na educação de seus filhos;

A minha esposa Erileuda e aos meus filhos Ezequias e Caio, por todo sacrifício que têm passado em prol da concretização desse meu objetivo;

Ao prof. Jorge Herbert Soares de Lira, por todo apoio, incentivo e orientação, imprescindíveis para a realização do curso de Doutorado e em especial deste trabalho;

Aos grandes amigos e Professores João Marcos Bezerra do ó, Everaldo Souto de Medeiros, Pedro Hinojosa e Uberlandio Batista Severo, do Departamento de Matemática da UFPB, cuja amizade, incentivo e trabalho (realizando atividades muito além de suas funções de professores) foram cruciais na realização deste nosso objetivo;

A todos os amigos da Pós-graduação em Matemática da UFC, alunos do Doutorado e professores, pela convivência harmoniosa e pelo incentivo constante durante todo esse tempo;

A Andrea Dantas, secretária da Pós-graduação em Matemática da UFC. Quero aproveitar e destacar toda sua competência e prontidão na assistência a todos os alunos da Pós-graduação;

Finalmente, agradeço também a todos os amigos da Unidade Acadêmica do Curso de Ciências Exatas e da Natureza do Campus de Cajazeiras/UFCG – do qual tenho a honra de fazer parte – por todo apoio e incentivo para que eu concluísse o Doutorado;

Ora, a fé é o firme fundamento das coisas que se esperam e a prova das coisas que se não vêem. Porque, por ela, os antigos alcançaram testemunho. Pela fé, entendemos que os mundos, pela palavra de Deus, foram criados; de maneira que aquilo que se vê não foi feito do que é aparente.

Epístola aos Hebreus, 11.1-3.

Resumo

O principal objetivo de nossa investigação é determinar condições para a existência de hipersuperfícies fechadas com curvatura prescrita em produtos *warped* e, mais geralmente, em variedades dotadas de um campo de Killing conforme.

Empreendemos esta análise em duas etapas, a primeira das quais é o estabelecimento de estimativas a *priori* até segunda ordem de uma função cujo gráfico satisfaz a equação diferencial correspondente a condição de curvatura prescrita. A segunda parte consiste em empregar uma variante adequada da teoria do grau ao problema que consideramos.

Abstract

The main purpose of our investigation is to determine conditions for the existence of closed hypersurface with prescribed curvature in products warped and, more usually, in manifolds endowed with conformal Killing vector fields.

We undertook this analysis in two stages, the first one being the establishment of estimates a priori up to second order of a function whose graph satisfies the corresponding differential equation. The second part consists of using an appropriate variant of the theory of the degree to the problem that we considered.

Sumário

Introdução

Entre as áreas mais fecundas e esteticamente soberbas da Geometria Diferencial, distingue-se o estudo das superfícies de curvatura média constante (CMC), cuja história remonta aos primórdios do Cálculo de Variações com a dedução por Lagrange de um critério necessário para que uma superfície minimize área entre aquelas com mesma fronteira. Descrever a superfície em questão de modo não-paramétrico, ou seja, como gráfico de uma função real $z = z(x, y)$ permitiu a Lagrange formular o critério de minimalidade como equivalente ao fato de que z satisfaz uma equação diferencial parcial, a saber,

$$\left(\frac{z^i}{\sqrt{1 + z^k z_k}}\right)_{;i} = 0. \tag{1}$$

Várias soluções desta equação, invariantes por isometrias euclidianas, foram descobertas utilizando-se métodos geométricos baseados, essencialmente, em separação de variáveis. A ligação íntima da teoria de superfícies de curvatura média constante, em especial, de superfícies mínimas, com teoria do potencial e variáveis complexas foi completamente desvelada por Weiertrass. Modernamente, a chamada representação de Weiertrass e a análoga representação de Kenmotsu para o caso geral de curvatura média prescrita, são interpretadas como consequência do fato de que superfícies CMC são soluções de um sistema de equações completamente integrável.

Em outro extremo, um problema igualmente clássico é assegurar a existência de superfícies com curvatura gaussiana prescrita. Em termos não-paramétricos, tais superfícies são dadas localmente como gráfico de uma função satisfazendo a equação tipo *Monge-Ampère*

$$\det(z_{i;j}) = K(x, y, z(x, y))(1 + z^k z_k)^4, \tag{2}$$

onde K denota a curvatura gaussiana do gráfico. Ao passo que (1) resulta em uma expressão linear quanto às derivadas segundas, a equação (2) tem um cárater completamente não-linear. Ademais, a equação de curvatura média é automaticamente elíptica, o que, no caso da equação de Monge-Ampère requer para tanto impor a condição $K > 0$. Em contraponto ao que ocorre com superfícies CMC, não é de modo algum aparente que técnicas de sistemas integráveis permitam encontrar uma pletora de exemplos de curvatura gaussiana constante. Por fim, contrariamente ao que ocorreu historicamente a partir dos desdobramentos do afamado Teorema de Bernstein, até o presente momento um análogo da poderosa Teoria de Medida Geométrica para equações como (2) ainda não teve seu lugar ao sol, a despeito dos notáveis progressos no estudo das chamadas soluções de viscosidade.

As dificuldades teóricas a que aludimos acima também dizem respeito ao estudo de hipersuperfícies em espaços euclidianos com curvaturas de maior ordem prescrita. Mais claramente, por tais curvaturas entendemos as diversas funções simétricas, distintas do traço, que aparecem na expansão do polinômio característico do operador de Weingarten - operador metricamente equiavelente à segunda forma fundamental - da hipersuperfície. Em particular, o determinante do operador de Weingarten corresponde à curvatura de Gauss-Kronecker e generaliza a clássica curvatura gaussiana das superfícies. A curvatura escalar, invariante intrínseco da hipersuperfície, é, por definição, dada pela soma dos produtos de duas curvaturas principais distintas, ou seja, pela segunda das funções simétricas elementares das curvaturas principais. Relembramos ao leitor que curvaturas principais são autovalores do operador de Weingarten.

Desta feita, o problema de existência de hipersuperfícies com curvatura de maior ordem prescrita redunda, em termos de uma descrição não-paramétrica local, na obtenção de soluções de equações de segunda ordem totalmente não-lineares, cuja complexidade é de tal sorte que a própria expressão por extenso destas equações já representa uma tarefa árdua. Consideramos, dado o cárater intrincado do problema, uma façanha que, em uma série de artigos publicados nos anos oitenta, L. Caffarelli, L. Nirenberg e J. Spruck tenham sido capazes de resolver, sob condições geometricamente naturais, o problema de Dirichlet correspondente a uma gama de equações envolvendo os autovalores do hessiano de uma função e, como desdobramento, as curvaturas principais do operador de Weingarten de seu gráfico. Ainda mais surpreendente que não tenham os autores efetivamente utilizado a expressão explícita das equações para resolvê-las, como parecia ser a tônica no caso de curvatura média prescrita, desde os trabalhos de James Serrin. É certo, todavia, que o êxito destes artigos é fortemente baseado em notáveis contribuições de

Calabi, Pogorelov, do próprio Nirenberg e tantos outros matemáticos devotados anteriormente ao estudo da equação de Monge-Ampère. Caffarelli, Nirenberg e Spruck souberam, ainda, utilizar com maestria técnicas já consagradas de equações elípticas, tais como a teoria de Krilov, Safonov e Evans para estimativas de Holder e ferramentas topológicas como o método da continuidade. Por sua, a própria elipticidade das equações em jogo pôde ser estabelecida graças ao estudo precursor de L. Gårding sobre polinômios hiperbólicos. Concomitante e posteriormente, os resultados e técnicas empregadas nestes trabalhos foram retomados, estendidos e modificados por uma coleção ínsigne de matemáticos como Trudinger, Ivochkina, Urbas, Oliker, entre outros. Como exemplo, o tratamento de hipersuperfícies de curvatura de maior ordem prescrita a partir de problemas de evolução é um contributo importante de pesquisadores como Gerhardt, Urbas, Andrews, entre outros.

O artigo que inspira o presente trabalho, pertencente à série a que nos referimos acima, é o fundamental *paper* [7], no qual os autores estudam o problema fechado, ou seja, a existência de uma hipersuperfície fechada no espaço euclidiano quando uma dada função das curvaturas principais é prescrita. Como corolário do resultado de existência principal em [7], fica estabelecida e existência de gráficos fechados com curvatura de maior ordem prescrita por uma função ψ satisfazendo certas condições de crescimento. Tais restrições à função ψ já aparecem nos artigos [27] e [21], precursores de [7], os quais tratam, respectivamente, dos casos de curvatura média prescrita e curvatura de Gauss-Kronecker prescrita. Mais tarde, o problema fechado foi resolvido em espaços elípticos em uma combinação dos trabalhos de Barbosa, Lira e Oliker [5] e do trabalho de Li e Oliker [18]. Em espaços hiperbólicos, o caso de curvatura de Gauss-Kronecker foi estabelecido por Oliker em [22] e o caso geral novamente segue da combinação dos trabalhos de Barbosa, Lira e Oliker [5], desta feita com o trabalho de Jin e Li [19]. Soluções alternativas para o problema envolvendo a curvatura de Gauss-Kronecker no espaço euclidiano foram investigadas por Delanöe [11], Li [17] e outros. Este problema foi estudado para hipersuperfícies convexas em variedades riemannianas por Gerhardt [14]. De fato, a lista de contribuições ao problema é dificilmente exaurida em poucas linhas.

Uma característica comum a teoremas de existência da natureza dos que mencionamos acima é envolverem ambientes com curvatura seccional constante. Isto nos parece uma restrição desnecessária. Como apontado recentemente em [10] e [9], o que parece ser o ingrediente verdadeiramente utilizado para a prova destes resultados, ao menos para o caso da curvatura média, é a existência de simetrias infinitesimais no ambiente, ou, dito de outra forma, de campos com propriedades geométricas, tais como campos de Killing ou, mais geralmente, de campos de Killing conformes.

Motivados por este gênero de raciocínio, reinterpretamos os ambientes euclidiano, elíptico e hiperbólico nos artigos acima como espaços munidos de uma estrutura *warped*. Por sua vez, tais espaços correspondem a uma situação particular de espaços riemannianos dotados de um campo de Killing conforme, a saber, o campo radial, perpendicular às esferas geodésicas do ambiente com centro comum. O propósito de nosso trabalho é, então, determinar condições de natureza similar àquelas presentes em, por exemplo, [7], segundo as quais possamos estabelecer a existência em ambientes riemannianos detentores de um campo de Killing conforme de hipersuperfícies fechadas com alguma função das curvaturas principais prescrita. O contexto natural desejável é, certamente, obtido impondo-se a condição de que o campo de Killing conforme determina uma distribuição ortogonal integrável - uma condição mais fraca do que supô-lo fechado e que, de algum modo, mimetiza a configuração do campo radial em formas espaciais. Todavia, baseados em [9], acreditamos que mesmo a integrabilidade da distribuição não seja estritamente necessária. Por razões técnicas e, em parte, para simplificar a exposição, detemo-nos nesta tese no caso de campo de Killing conforme fechado, o que implica que o ambiente que, de fato, consideramos é localmente isométrico a um espaço *warped*. Apontamos que, de todo modo, tal estrutura é suficientemente geral para abrigar o caso de formas espaciais. Espaços *warped* são naturalmente utilizados, em sua versão lorentziana, em Relatividade Geral, onde aparecem sob a alcunha de espaços de Robertson-Walker generalizados, soluções das equações de campo.

Em desdobramentos futuros, pretendemos retomar o problema para o caso geral de um campo de Killing conforme, não necessariamente fechado, com distibuição ortogonal não necessariamente integrável. Ressaltamos, ainda, que as estimativas presentemente demonstradas, se interpretadas como dados locais, permitem, ao lado de estimativas de fronteira adicionais, solucionar o problema de Dirichlet, ou seja, o caso de fronteira não-vazia, a exemplo do que foi feito no espaço euclidiano em [8]. Neste particular, indicamos que o contexto natural parece ser considerar campos de Killing, ou seja, uma distribuição que, quando integrável, resulta em folhas totalmente geodésicas.

Uma descrição mais acurada e formalmente precisa da tese está exposta nas introduções às duas partes distintas do texto, como vê-se adiante.

Capítulo 1

Gráficos com Curvatura Prescrita em Produtos *Warped*

1.1 Introdução

Nesta parte da tese, M^n denota uma variedade riemanniana compacta e I um intervalo aberto em $\mathbb{R}$. Dada uma função positiva diferenciável $h : I \to \mathbb{R}$, consideramos a variedade produto $\bar{M} = I \times M$ dotada da métrica

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 + h^2(t)\,\mathrm{d}\sigma^2, \tag{1.1}$$

onde $\mathrm{d}\sigma^2$ representa a métrica em M. Denotamos a métrica em $\bar{M}$ por $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$.

O gráfico de uma função diferenciável $z : M \to I$ é definido como a hipersuperfície Σ cujos pontos são da forma $X(u) = (z(u), u)$, onde $u \in M$. Tal gráfico é difeomorfo a M e pode ser globalmente orientado por um campo vetorial unitário normal N, para o qual verificamos que $\langle N, \partial_t\rangle < 0$. Com respeito a esta orientação, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ denota o vetor cujas coordenadas λ_i são as curvaturas principais de Σ. Por definição, estas são os autovalores da segunda forma fundamental $B = -\langle \mathrm{d}N, \mathrm{d}X\rangle$ de Σ.

Na análise a seguir, Γ é um cone aberto e convexo em $\mathbb{R}^n$, com vértice na origem e contendo o cone positivo. Supomos que Γ é simétrico com respeito a permutações de coordenadas de seus pontos. Consideramos, ainda, uma função f diferenciável, positiva e côncava definida em Γ. Supomos que f é simétrica em λ_i e que suas derivadas satisfazem $f_i > 0$ em Γ.

Definimos a função F no espaço das matrizes simétricas $n \times n$ por $F(B) =$

$f(\lambda)$, o que nos permite escrever

$$F(B(z(u))) = f(\lambda(X(u))) \tag{1.2}$$

quando a função z é *admissível*, ou seja, desde que $\lambda(X(u)) \in \Gamma$, para todo $u \in M$. Finalmente, dada uma função positiva diferenciável $\psi : \bar{M} \to \mathbb{R}$, é geometricamente pertinente encontrar uma função admissível z que é solução da seguinte equação

$$F(B(z(u))) = \psi(z(u), u), \quad u \in M. \tag{1.3}$$

Naturalmente, é preciso impor algumas condições adicionais sobre a geometria do ambiente e a estrutura das funções f e ψ a fim de prover uma solução para (1.3). Com respeito a geometria ambiente, supomos que as folhas $M_t = \{(t, u) : u \in M\}$ são convexas na média relativamente ao campo vetorial unitário normal $-\partial_t$. Isto é equivalente à condição de que as curvaturas principais $\kappa(t)$ satisfaçam

$$\kappa(t) > 0, \quad t \in I, \tag{1.4}$$

onde $\kappa = h'/h$. Quanto as restrições satisfeitas por f, supomos que existe uma função contínua estritamente crescente δ satisfazendo

$$\sum_i f_i \geq \delta(f), \quad \sum_i f_i \lambda_i \geq \delta(f) \tag{1.5}$$

de modo que $\delta(f) > 0$ sempre que $f \geq c_0 > 0$, para alguma constante positiva c_0. Denotando $\psi_0 = \inf \psi$, requeremos adicionalmente que

$$\limsup_{\lambda \to \partial\Gamma} f(\lambda) \leq \bar{\psi}_0, \tag{1.6}$$

para alguma constante $\bar{\psi}_0 < \psi_0$. Como exemplo das funções de curvatura que consideramos nesta parte da tese, mencionamos as curvaturas médias $f = H_r^{1/r}$, onde

$$\binom{n}{r} H_r = S_r = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_r}, \quad 1 \leq r \leq n. \tag{1.7}$$

Aqui, S_r, $1 \leq r \leq n$, denotão as funções simétricas elementares das curvaturas principais que aparecem na expansão do polinômio característico de B.

Podemos ver que as funções $H_r^{1/r}$ ajustam-se a nossas hipóteses se consideramos um cone de Gårding Γ adequado. De fato, convém tomar Γ como a componente conexa do conjunto $\{\lambda \in \mathbb{R}^n : H_k(\lambda) > 0\}$ contendo o cone positivo. Para detalhes, indicamos as referências [26] e [25]. As condições acima sobre f são todas satisfeitas por $H_r^{1/r}$.

Voltando ao caso geral, indicamos por $k(t)$ a função $f(\kappa(t))$. Seguindo esta notação, enunciamos nosso principal resultado.

Teorema 1.1. *Considere* $\bar{M}^{n+1} = I \times M^n$ *dotada da métrica* warped *definida em* (1.1). *Suponha que* f *e* h *satisfaçam as condições* (1.4)-(1.6). *Dados* t_-, t_+, *com* $t_- < t_+$, *considere a região*

$$\bar{M}_{t_-,t_+} = \{(t,u) : \ t_- \leq t \leq t_+, \, u \in M\}$$

e suponha que ψ *satisfaz as condições*

a) $\psi(t,u) > k(t)$, *para* $t \leq t_-$,

b) $\psi(t,u) < k(t)$, *para* $t \geq t_+$,

c) $\partial_t(h\psi) \leq 0$, *para* $t_- < t < t_+$.

Então, existe uma função diferenciável $z : M^n \to I$ *satisfazendo*

$$F(B(z(u))) - \psi(z(u), u) = 0, \tag{1.8}$$

cujo o gráfico está contido em M_{t_-,t_+}.

Em particular, este teorema assegura a existência de gráficos fechados em que a curvatura $\binom{n}{r} H_r(\lambda) = S_r(\lambda)$ é dada por uma função prescrita. Neste sentido, o Teorema 1.1 acima pode ser visto como uma extensão de resultados de existência encontrados em contribuições anteriores ao tema, notadamente nos trabalhos de [3], [27], [21], [11], [7], [13], [18] e [19]. Nestes artigos, supõe-se que a taxa de variação de ψ é controlada de certo modo pela curvatura das esferas geodésicas do ambiente. Por exemplo, esta hipótese em [7] é estabelecida em termos de nossa notação como $\partial_t(t\psi) \leq 0$ em $\bar{M}_{t_-,t_+}$. Aqui, tal hipótese corresponde ao item (c) no enunciado do teorema acima.

A prova que expomos a seguir combina a teoria do grau desenvolvida por Yan Yan Li em [16] e uma nova prova da estimativa do gradiente.

Pretendemos tornar evidente que as poderosas ferramentas elípticas desenvolvidas nas referências anteriores são flexíveis o bastante para serem usadas em uma situação geométrica significativamente geral. Produtos *warped* constituem uma grande família de variedades riemannianas, que incluem discos geodésicos nas formas espaciais, para uma escolha adequada de I e h. Estes importantes exemplos são conspícuos em Geometria Riemanniana.

Esta parte da tese está organizada como segue. Na Seção 1.2, fixamos a notação e apresentamos alguns preliminares geométricos e analíticos, na seção 1.3 incluimos a descrição detalhada do problema. Na Seção 1.4, mostramos que, sob as hipóteses do Teorema 1.1, a solução do problema permanece na região $\bar{M}_{t_-,t_+}$. Na seção seguinte, calculamos o gradiente e o hessiano de funções que se assemelham as clássicas funções altura e suporte. A estimativa do gradiente é obtida na Seção 1.6. A estimativa do hessiano é demonstrada na Seção 1.7 empregando a técnica apresentada em [19]. A teoria do grau, apropriada para solucionar o problema, é utilizada na última seção e está baseada em [16], [18] e [19].

1.2 Preliminares

No que segue, usamos as letras latinas minúsculas $i, j, \ldots$ para nos referirmos a índices variando de 1 até n e $a, b, \ldots$ para índices variando de 0 até n. A convenção de soma de Einstein é adotada frequentemente neste trabalho. Exceção a estas convenções são explicitamente mencionadas. Levantamento e rebaixamento de índices são livremente empregados.

A conexão riemanniana em $\bar{M}$ correspondente à métrica em (1.1) é denotada no que segue por $\bar{\nabla}$. A conexão usual em M será denotada por ∇'. Os tensores de curvatura em M e $\bar{M}$ sao denotados respectivamente por R e $\bar{R}$.

Considere em M um referencial ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ cujo referencial dual é representado por $\theta^1, \ldots, \theta^n$. As formas de conexão θ^i_j e as formas de curvatura Θ^i_j em M satisfazem as equações de estrutura

$$\mathrm{d}\theta^i + \theta^i_j \wedge \theta^j = 0, \quad \theta^i_j = -\theta^j_i, \tag{1.9}$$

$$\mathrm{d}\theta^i_j + \theta^i_k \wedge \theta^k_j = \Theta^i_j. \tag{1.10}$$

Um referencial ortonormal em $\bar{M}$ pode ser definido por $\bar{e}_i = (1/h)e_i$, $1 \le i \le n$, e $\bar{e}_0 = \partial/\partial t$. O referencial dual associado consiste então das formas $\bar{\theta}^0 = \mathrm{d}t$ e $\bar{\theta}^i = h\theta^i$, $1 \le i \le n$. Um cálculo simples permite obter as formas de conexão $\bar{\theta}^a_b$ e as formas de curvatura $\bar{\Theta}^a_b$ correspondentes segundo as fórmulas

$$\bar{\theta}^i_j = \theta^i_j, \tag{1.11}$$

$$\bar{\theta}^i_0 = (h'/h)\bar{\theta}^i, \tag{1.12}$$

$$\bar{\Theta}^i_j = \Theta^i_j - (h'^2/h^2)\,\bar{\theta}^i \wedge \bar{\theta}^j, \tag{1.13}$$

$$\bar{\Theta}^i_0 = (h''/h)\,\bar{\theta}^0 \wedge \bar{\theta}^i, \tag{1.14}$$

onde $'$ denota a derivada com respeito a t. De fato, temos

$$\mathrm{d}\bar{\theta}^0 = \mathrm{d}^2 t = 0$$

e

$$\mathrm{d}\bar{\theta}^i = \mathrm{d}h \wedge \theta^i + h\mathrm{d}\theta^i = \frac{h'}{h}\,\bar{\theta}^0 \wedge \bar{\theta}^i - \theta^i_j \wedge \bar{\theta}^j.$$

Asssim

$$\mathrm{d}\bar{\theta}^i + \theta^i_j \wedge \bar{\theta}^j + \frac{h'}{h}\bar{\theta}^i \wedge \bar{\theta}^0 = 0.$$

Então

$$\bar{\theta}^i_j = \theta^i_j, \quad \bar{\theta}^i_0 = \frac{h'}{h}\bar{\theta}^i.$$

Obtemos

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\bar{\theta}^i_0 = \big(\frac{h'}{h}\big)'\theta^0 \wedge \bar{\theta}^i + \frac{h'}{h}\mathrm{d}\bar{\theta}^i \\
&= \big(\frac{h'}{h}\big)'\theta^0 \wedge \bar{\theta}^i - \frac{h'}{h}\big(\bar{\theta}^i_j \wedge \bar{\theta}^j + \bar{\theta}^i_0 \wedge \bar{\theta}^0\big) \\
&= \big(\frac{h''}{h} - (\frac{h'}{h})^2\big)\bar{\theta}^0 \wedge \bar{\theta}^i - \frac{h'}{h}\big(\theta^i_j \wedge \bar{\theta}^j + \frac{h'}{h}\bar{\theta}^i \wedge \bar{\theta}^0\big) \\
&= \frac{h''}{h}\bar{\theta}^0 \wedge \bar{\theta}^i - \frac{h'}{h}\theta^i_j \wedge \bar{\theta}^j
\end{aligned}$$

e por outro lado

$$\bar{\theta}^i_k \wedge \bar{\theta}^k_0 = \frac{h'}{h}\theta^i_k \wedge \bar{\theta}^k.$$

Portanto,

$$\bar{\Theta}^i_0 = \mathrm{d}\bar{\theta}^i_0 + \bar{\theta}^i_k \wedge \bar{\theta}^k_0 = \frac{h''}{h}\bar{\theta}^0 \wedge \bar{\theta}^i.$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
&\bar{\Theta}^i_j = \mathrm{d}\bar{\theta}^i_j + \bar{\theta}^i_k \wedge \bar{\theta}^k_j + \bar{\theta}^i_0 \wedge \bar{\theta}^0_j = \mathrm{d}\theta^i_j + \theta^i_k \wedge \theta^k_j - \big(\frac{h'}{h}\big)^2\bar{\theta}^i \wedge \bar{\theta}^j \\
&= \Theta^i_j - \big(\frac{h'}{h}\big)^2\bar{\theta}^i \wedge \bar{\theta}^j.
\end{aligned}$$

Nossa convenção aqui é que

$$\bar{\theta}_i^j = \langle \bar{\nabla} e_i, e_j \rangle, \quad \bar{\Theta}_j^i = \langle \bar{R}(\,\cdot\,,\,\cdot\,) e_j, e_i \rangle,$$

com

$$\bar{R}(v, w) = \bar{\nabla}_v \bar{\nabla}_w - \bar{\nabla}_w \bar{\nabla}_v - \bar{\nabla}_{[v,w]}.$$

O referencial $\bar{e}_a$, definido acima, é adaptado a hipersuperfície de nível $M_t = \{(t,p);\ p \in M\}$. Segue de (1.12) que cada folha M_t é umbílica, com curvaturas principais

$$\kappa(t) = h'(t)/h(t) \tag{1.15}$$

calculadas com respeito ao campo normal unitário *interior* $-\bar{e}_0 = -\partial/\partial t$. Note que, de acordo com a nossa convenção, o operador de Weingarten para estas folhas, com relação a esta orientação, é definido como

$$\langle \bar{\nabla} e_0, e_i \rangle = \bar{\theta}_0^i.$$

Agora, consideramos uma função suave $z : M \to I$, cujo gráfico, por definição, é a hipersuperfície regular

$$\Sigma = \{X(u) = (z(u), u) :\ u \in M\}.$$

O espaço tangente a Σ, em um dado ponto $X(u)$, é gerado pelos vetores

$$X_i = h\, \bar{e}_i + z_i\, \bar{e}_0, \tag{1.16}$$

onde z_i são as componentes da diferencial $\mathrm{d}z = z_i \theta^i$. Denotamos

$$W = \sqrt{h^2 + |\nabla' z|^2}. \tag{1.17}$$

Deste modo, o campo de vetores unitário ao longo de X dado por

$$N = \frac{1}{W}\big(\sum_{i=1}^{n} z^i \bar{e}_i - h\bar{e}_0\big) \tag{1.18}$$

é normal a Σ. Aqui, $|\nabla' z|^2 = z^i z_i$ é o quadrado da norma de $\nabla' z = z^i e_i$. A métrica induzida em Σ tem componentes

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle = h^2 \delta_{ij} + z_i z_j \tag{1.19}$$

e as componentes da sua inversa são dadas por

$$g^{ij} = \frac{1}{h^2}\delta^{ij} - \frac{1}{h^2W^2}z^iz^j. \tag{1.20}$$

Calculamos, agora,

$$\begin{aligned}\bar\nabla X_i &= \big(\mathrm{d}z_i + h\bar\theta_i^0\big)\bar e_0 + \big(\mathrm{d}h\delta_i^j + h\bar\theta_i^j + z_i\bar\theta_0^j\big)\bar e_j \\ &= \big(\mathrm{d}z_i - h'\bar\theta^i\big)\bar e_0 + \big(h'\delta_i^j\bar\theta^0 + h\theta_i^j + \frac{h'}{h}z_i\bar\theta^j\big)\bar e_j \end{aligned}\tag{1.21}$$

e facilmente verificamos que a segunda forma fundamental B de Σ, com componentes (a_{ij}), é determinada por

$$\begin{aligned}\langle\bar\nabla X_i, N\rangle &= -\frac{1}{W}h\big(\mathrm{d}z_i - \theta_i^jz_j\big) + \frac{1}{W}hh'\bar\theta^i \\ &+ \frac{1}{W}\big(h'z_i\bar\theta^0 + \frac{h'}{h}z_iz_j\bar\theta^j\big) \\ &= -\frac{1}{W}z_{ij}\bar\theta^j + \frac{1}{W}hh'\bar\theta^i + \frac{1}{W}\big(h'z_i\bar\theta^0 + \frac{h'}{h}z_iz_j\bar\theta^j\big),\end{aligned}$$

onde z_{ij} são as componentes do Hessiano $\nabla'^2 z = \nabla'\mathrm{d}z$ de z em M. Então

$$a_{ij} = \langle\bar\nabla_{X_j}X_i, N\rangle = \frac{1}{W}\big(-hz_{ij} + 2h'z_iz_j + h^2h'\delta_{ij}\big). \tag{1.22}$$

Por fim, calculamos as componentes $a_j^i = \sum_k g^{ik}a_{kj}$ do operador de Weingarten A^Σ. Por comodidade, em uma vizinhança de um dado ponto de M em que $\nabla'z \neq 0$, escolhemos $e_1 = \nabla'z/|\nabla'z|$. Com esta escolha, definimos um referencial que denominamos *especial*. Deste modo, em um referencial especial, obtemos $\mathrm{d}z = z_1\theta^1$. Como as matrizes g_{ij} e g^{ij} são diagonais em um tal referencial, deduzimos

$$\begin{aligned}a_1^1 &= \frac{1}{W^3}\big(-hz_{11} + 2h'z_1^2 + h^2h'\big), \\ a_i^1 &= -\frac{h}{W^3}z_{1i} \qquad \text{para} \quad 2 \le i \le n, \\ a_j^i &= \frac{1}{h^2W}\big(-hz_{ij} + h^2h'\delta_{ij}\big) \qquad \text{para} \quad 2 \le i,j \le n.\end{aligned}\tag{1.23}$$

Referenciais especiais são úteis no cálculo das segundas e terceiras derivadas de z. Por definição, o hessiano de z é

$$z_{ik}\theta^k = \nabla'^2 z(e_i;\cdot) = \mathrm{d}z_i - \theta_i^kz_k. \tag{1.24}$$

A terceira derivada de z é definida por

$$z_{ijk}\theta^k = \nabla'^3(e_i, e_j; \cdot)\theta^k = \mathrm{d}z_{ij} - \theta_i^k z_{kj} - \theta_j^k z_{ik}. \tag{1.25}$$

Concluímos de (1.24) que, utilizando-se um referencial especial, obtém-se

$$z_{1i}\theta^i = \mathrm{d}z_1 - \theta_1^k z_k = \mathrm{d}z_1$$

e para $i > 1$

$$z_{ij}\theta^j = \mathrm{d}z_i - \theta_i^j z_j = -\theta_i^1 z_1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} z_{1i} &= z_{1i} && \text{for} \quad 1 \leq i \leq n && (1.26)\\ -z_1\theta_i^1 &= z_{ij}\theta^j && \text{for} \quad 1 < i \leq n. && (1.27)\end{aligned}$$

Em particular, como, $z_{1i} = \mathrm{d}z_i(e_1) = 0$, obtemos

$$z_{1i} = 0, \quad 1 < i \leq n. \tag{1.28}$$

Usando (1.25), (1.26) e (1.27) temos

$$\begin{aligned} z_{1,jk}\theta^k &= dz_{1,j} + z_{1,k}\theta_j^k = dz_{1j} + z_{1k}\theta_j^k = z_{1jk}\theta^k - \sum_{i=2}^{n} z_{ij}\theta_1^i \\ &= z_{1jk}\theta^k + \frac{1}{z_1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=2}^{n} z_{ij}z_{ik}\theta^k. \end{aligned}$$

Portanto,

$$z_{1,ii} = z_{1ii} + \frac{1}{z_1}\sum_{i=2}^{n} z_{ki}^2 \tag{1.29}$$

Calculando a diferencial exterior em ambos os lados de (1.24), deduzimos a identidade de Ricci

$$z_{ijk}\theta^j \wedge \theta^k = \Theta_i^r z_r. \tag{1.30}$$

Aplicando-se ambos os lados aos campos de vetores e_j, e_k, resulta que

$$z_{ijk} - z_{ikj} = \Theta_i^r(e_j, e_k)z_r = z^r\langle R(e_j, e_k)e_i, e_r\rangle$$

e, em particular,

$$z_{1ii} - z_{ii1} = z_{i1i} - z_{ii1} = K_i z_1, \tag{1.31}$$

onde

$$K_i = \langle R(e_1, e_i)e_i, e_1 \rangle. \tag{1.32}$$

Consideramos, agora, o referencial adaptado $E_0 = N, E_1, \ldots, E_n$ definido em um aberto de Σ. Representando por ω^a as formas duais correspondentes, por ω_b^a as formas de conexão e $\bar{\Omega}_b^a$ as formas de curvaturas, obtemos

$$d\omega^i + \omega_j^i \wedge \omega^j = 0, \quad \omega_j^i = -\omega_i^j, \tag{1.33}$$

$$d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k = \Omega_j^i, \tag{1.34}$$

onde Ω_j^i são as formas de curvaturas de Σ, as quais, pelo fato de Σ ser uma hipersuperfície de $\bar{M}$, são dadas a partir da equação de Gauss por

$$\Omega_j^i = \bar{\Omega}_j^i - \omega_0^i \wedge \omega_j^0. \tag{1.35}$$

Os coeficientes a_{ij} da segunda forma fundamental são, por sua vez, dados pela equação de Weingarten

$$\omega_i^0 = a_{ij}\, \omega^j. \tag{1.36}$$

Denotamos

$$K_{ij} = \Omega_j^i(E_i, E_j)$$

e

$$\bar{K}_{ij} = \bar{\Omega}_j^i(E_i, E_j) = \langle \bar{R}(E_i, E_j)E_j, E_i \rangle.$$

Portanto, como consequência das equações de Gauss (1.35) e Weingarten (1.36), obtemos

$$K_{ij} = \bar{K}_{ij} + a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2. \tag{1.37}$$

A equação de Codazzi é uma fórmula para comutar as primeiras derivadas de a_{ij}, deduzida a partir da diferenciação de (1.36):

$$a_{ij;k}\omega^j \wedge \omega^k = \bar{\Omega}_i^0. \tag{1.38}$$

Outra identidade de Ricci, demasiado útil, refere-se à quarta derivada covariante de z. Graças a expressão (1.22), é suficiente derivarmos uma regra de comutação para as segundas derivadas covariantes de a_{ij}. Na sequência, indicamos a derivada covariante em Σ alternativamente por ∇ e por um ponto-e-vírgula. Relembramos que

$$\begin{aligned}
\nabla a_{ij} &= \mathrm{d}a_{ij} - a_{kj}\,\omega_i^k - a_{ik}\,\omega_j^k = a_{ij;k}\,\omega^k, &(1.39)\\
\nabla a_{ij;k} &= \mathrm{d}a_{ij;k} - a_{mj;k}\,\omega_i^m - a_{im;k}\,\omega_j^m - a_{ij;m}\,\omega_k^m\\
&= a_{ij;km}\,\omega^m. &(1.40)
\end{aligned}$$

Lema 1.2. *Sejam $\bar{X}$ um ponto em Σ e $E_0 = N$, $E_1, \ldots, E_n$ um referencial adaptado a Σ tal que cada $E_i|_{\bar{X}}$ é uma direção principal e $\omega_i^k|_{\bar{X}} = 0$. Então, no ponto $\bar{X}$, temos*

$$a_{ii;11} - a_{11;ii} = a_{11}a_{ii}^2 - a_{11}^2 a_{ii} + \bar{R}_{i0i0}\,a_{11} - \bar{R}_{1010}\,a_{ii} + \bar{R}_{i1i0;1} - \bar{R}_{1i10;i}.$$

Prova. Diferenciando a equação (1.39), obtemos

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{d}a_{kj}\wedge\omega_i^k - \mathrm{d}a_{ik}\wedge\omega_j^k - a_{kj}\big(\Omega_i^k - \omega_r^k\wedge\omega_i^r\big) - a_{ik}\big(\Omega_j^k - \omega_r^k\wedge\omega_j^r\big)\\
&= \mathrm{d}a_{ij;k}\wedge\omega^k - a_{ij;k}\omega_r^k\wedge\omega^r.
\end{aligned}$$

Substituindo (1.39) na última equação deduzimos, após renomear índices,

$$\begin{aligned}
&-\big(a_{kj;r}\omega^r + a_{rj}\omega_k^r + a_{kr}\omega_j^r\big)\wedge\omega_i^k - \big(a_{ik;r}\omega^r + a_{rk}\omega_i^r + a_{ir}\omega_k^r\big)\wedge\omega_j^k\\
&+a_{rj}\omega_k^r\wedge\omega_i^k + a_{ir}\omega_k^r\wedge\omega_j^k - a_{kj}\Omega_i^k - a_{ik}\Omega_j^k\\
&= \mathrm{d}a_{ij;k}\wedge\omega^k - a_{ij;r}\omega_k^r\wedge\omega^k.
\end{aligned}$$

Após o cancelamento de alguns termos, resta-nos

$$\begin{aligned}
a_{ij;kr}\omega^r\wedge\omega^k &= \big(\mathrm{d}a_{ij;k} - a_{ij;r}\omega_k^r - a_{rj;k}\omega_r^i - a_{ir;k}\omega_r^j\big)\wedge\omega^k\\
&= -a_{kj}\Omega_i^k - a_{ik}\Omega_j^k.
\end{aligned}$$

Então, concluímos que

$$a_{ij;kr}\omega^k\wedge\omega^r = a_{kj}\Omega_i^k + a_{ik}\Omega_j^k. \tag{1.41}$$

Em particular,

$$a_{ij;ij} - a_{ij;ji} = a_{kj}\Omega_i^k(E_i, E_j) + a_{ik}\Omega_j^k(E_i, E_j)$$

e usando-se o fato de que a_{ij} é diagonal em $\bar{X}$, infere-se que

$$\begin{aligned}
a_{ij;ij} - a_{ij;ji} &= a_{jj}\Omega_i^j(E_i, E_j) + a_{ii}\Omega_j^i(E_i, E_j)\\
&= -a_{jj}K_{ij} + a_{ii}K_{ij} = -a_{jj}(\bar{K}_{ij} + a_{ii}a_{jj}) + a_{ii}(\bar{K}_{ij} + a_{ii}a_{jj}).
\end{aligned}$$

Portanto, usando a simetria $K_{ij} = K_{ji}$, concluí-se que

$$a_{i1;i1} - a_{i1;1i} = -a_{11}(\bar{K}_{1i} + a_{ii}a_{11}) + a_{ii}(\bar{K}_{1i} + a_{ii}a_{11}). \tag{1.42}$$

Entretanto, empregando a equação de Codazzi (1.38), verifica-se que

$$a_{ii;1} - a_{i1;i} = \bar{\Omega}_i^0(E_i, E_1) = \langle \bar{R}(E_i, E_1)E_i, E_0\rangle$$

e diferenciando-se ambos os lados na expressão anterior e considerando-se o fato de que o referencial satisfaz $\omega_i^k = 0$ em $\bar{X}$, calcula-se por fim

$$\begin{aligned}
&a_{ii;11} - a_{i1;i1} = \mathrm{d}a_{ii;1}(E_1) - \mathrm{d}a_{i1;i}(E_1) = \bar{\nabla}\bar{R}(E_i, E_1, E_i, E_0; E_1)\\
&+a_{11}\langle \bar{R}(E_i, E_0)E_i, E_0\rangle - a_{11}\langle \bar{R}(E_i, E_1)E_i, E_1\rangle\\
&= \bar{R}_{i1i0;1} + a_{11}\bar{R}_{i0i0} + a_{11}\bar{K}_{1i}.
\end{aligned}$$

Similarmente obtemos, permutando 1 e i na expressão anterior

$$a_{11;ii} - a_{1i;1i} = \bar{R}_{1i10;i} + a_{ii}\bar{R}_{1010} + a_{ii}\bar{K}_{1i}.$$

Portanto, combinando as expressões resultantes, concluímos que

$$\begin{aligned}
a_{ii;11} - a_{11;ii} &= a_{11}a_{ii}^2 - a_{11}^2 a_{ii} + \bar{R}_{i0i0}\, a_{11} - \bar{R}_{1010}\, a_{ii}\\
&+ \bar{R}_{i1i0;1} - \bar{R}_{1i10;i}.
\end{aligned}$$

Assim, o lema está provado. ■

O referencial E_a pode ser obtido a partir do referencial $N, X_1, \ldots, X_n$ pelo processo de Gram-Schmidt. Como este último referencial depende apenas de z e ∇z, concluímos que as componentes de $\bar{R}$ e $\bar{\nabla}\bar{R}$, calculadas em termos do referencial E_a, também dependem unicamente de z e ∇z.

1.3 A Equação da Curvatura Prescrita

Formulamos, nesta seção, o problema de existência de gráficos em $\bar{M}$ com curvatura prescrita em termos analíticos. Para mais detalhes, indicamos as referências [6], [4] e [25]. Consideramos f e Γ definidos como anteriormente. Então, dada a segunda forma fundamental (a_{ij}) do gráfico Σ de uma função admissível z, definimos

$$F\big((a_{ij})\big) = f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

onde λ_i são os autovalores da matriz (a_{ij}) calculados com respeito a métrica induzida (g_{ij}), ou seja, são os autovalores do operador de Weingarten (a^i_j) em Σ. É conveniente denotar o vetor das curvaturas principais $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ por λ. Funções admissíveis são funções para as quais λ pertence a Γ.

Podemos considerar F como uma aplicação de $\mathbb{R}^{n^2}$ sobre $\mathbb{R}$ dada por um polinômio nas variáveis a_{ij}, onde estas componentes podem, por sua vez, ser consideradas como funções reais de $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ nas variáveis z_{ij}, z_i e z.

Relembramos que estamos interessados em assegurar a existência de uma função admissível z satisfazendo

$$F\big((a_{ij})\big) = \psi(z(u), u), \quad u \in M,$$

para alguma função positiva prescrita ψ. Recordamos que é exigido que f seja uma função positiva, diferenciável, côncava e simétrica satisfazendo

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial \lambda_i} > 0, \tag{1.43}$$

e, para alguma constante positiva $\bar{\psi}_0 < \psi_0$, onde $\psi_0 = \inf \psi$,

$$\limsup_{\lambda \to \partial \Gamma} f(\lambda) \leq \bar{\psi}_0. \tag{1.44}$$

Ademais, dadas constantes $\mu_2 \geq \mu_1 > 0$ e o conjunto $\Gamma_{\mu_1,\mu_2} = \{\lambda \in \Gamma : \mu_1 \leq f(\lambda) \leq \mu_2\}$ correspondente, supomos que, em pontos de Γ_{μ_1,μ_2}, vale

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \geq \delta(f) \tag{1.45}$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \lambda_i \geq \delta(f), \tag{1.46}$$

para uma dada função δ estritamente crescente, contínua e positiva dependente de μ_2, μ_1. A concavidade de f e (1.43) implicam que

$$f(s\lambda) \geq s f(\lambda), \quad \text{para} \;\; 0 < s < 1 \tag{1.47}$$

e

$$\sum_i f_i \lambda_i \leq f. \tag{1.48}$$

De fato temos, para $0 < \varepsilon < s < 1$,

$$f(s\lambda + (1-s)\varepsilon\lambda) \geq sf(\lambda) + (1-s)f(\varepsilon\lambda) \geq sf(\lambda)$$

e a desigualdade (1.47) segue se tomamos $\varepsilon \to 0$. Provamos a desigualdade (1.48) escrevendo, para $0 < s < 1$,

$$\frac{f(s\lambda) - f(\lambda)}{s-1} \leq \frac{sf(\lambda) - f(\lambda)}{s-1} = f(\lambda)$$

Tomando o limite, quando $s \to 1^-$, temos $\frac{\mathrm{d}f(s\lambda)}{\mathrm{d}s} \leq f(\lambda)$ e, portanto,

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial \lambda_i}\lambda_i \leq f(\lambda).$$

Usando a concavidade, a simetria de de f e (1.44) podemos provar, seguindo [7], que

$$\sum_i \lambda_i \geq \delta > 0$$

para $\lambda \in \Gamma$, tal que $f(\lambda) \geq \psi_0$. De fato, o conjunto

$$\Gamma_\psi = \{\lambda \in \Gamma : f(\lambda) \geq \psi_0\}$$

é fechado em $\mathbb{R}^n$, convexo e simétrico. A convexidade segue da concavidade de f pois dado λ, μ em Γ_ψ temos

$$f((1-s)\lambda + s\mu) \geq (1-s)f(\lambda) + sf(\mu) \geq \psi_0.$$

A simetria com respeito a permutação de duas coordenadas de algum vetor $\lambda \in \Gamma_\psi$ segue da simetria de f, visto que

$$f(\ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_i, \ldots) = f(\ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_j, \ldots).$$

Portanto o ponto de Γ_ψ mais próximo da origem é da forma $(\lambda_0, \ldots, \lambda_0)$. Caso contrário, se este ponto λ contém duas coordenadas distintas, digamos $\lambda_i \neq \lambda_j$, então o ponto μ obtido de λ por inverter as posições de λ_i e λ_j será também um mínimo, pela mera definição de distância. Portanto, pela convexidade de Γ_ψ, o segmento de reta cujos pontos extremos são λ e μ está contido neste conjunto. Por outro lado, é claro que seu ponto médio está mais perto da origem que seus extremos. Esta contradição implica que todas as componentes de λ são iguais. Além disto $\lambda_0 \neq 0$, pois $\limsup_{\lambda \to \partial\Gamma} f(\lambda) \leq \bar{\psi}_0$.

Demonstramos, deste modo, que todo $\lambda \in \Gamma_\psi$ está localizado acima do hiperplano

$$H = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}^n : \sum_i \lambda_i = n\lambda_0\Big\},$$

que é, obviamente, um hiperplano suporte do conjunto convexo Γ_ψ no ponto $(\lambda_0, \ldots, \lambda_0)$. De fato, sua direção normal é determinada pelo segmento ligando a origem ao ponto de mínima distância. Assim, todo $\lambda \in \Gamma_\psi$ está necessariamente contido na parte convexa do cone Γ que está acima de H. Este fato geométrico implica que limitações *por cima* das curvaturas principais asseguram imediatamente limitações *por baixo* destas curvaturas.

A seguir, destacamos algumas propriedades analíticas úteis da aplicação F. Observamos que F possui o mesmo grau de diferenciabilidade que f. Denotamos a primeira e a segunda derivadas de F, respectivamente, por

$$F^{ij} = \frac{\partial F}{\partial a_{ij}} \tag{1.49}$$

e

$$F^{ij,kl} = \frac{\partial^2 F}{\partial a_{ij}\partial a_{kl}}. \tag{1.50}$$

As funções F^{ij} são componentes de um tensor contravariante de valência dois. De fato, sob uma mudança de variáveis em que

$$\hat{a}_{kl} = M^i_k M^j_l a_{ij},$$

calculamos

$$F^{ij} = \frac{\partial F}{\partial a_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial \hat{a}_{kl}}\frac{\partial \hat{a}_{kl}}{\partial a_{ij}} = \hat{F}^{kl} M^i_k M^j_l.$$

Estas derivadas podem ser mais facilmente calculadas ao supormos que a matriz (a_{ij}) é diagonal com respeito a (g_{ij}), devido ao seguinte lema.

Lema 1.3. *Se (a_{ij}) é diagonal em $\bar{X} \in \Sigma$, então a matrix (F^{ij}) é também diagonal em $\bar{X}$ com autovalores positivos f_i. Além disto, F é côncava e suas derivadas de segunda ordem são dadas por*

$$F^{ij,kl}\eta_{ij}\eta_{kl} = \sum_{k,l} f_{kl}\eta_{kk}\eta_{ll} + \sum_{k\neq l} \frac{f_k - f_l}{\lambda_k - \lambda_l}\eta_{kl}^2. \tag{1.51}$$

Finalmente, temos

$$\frac{f_i - f_j}{\lambda_i - \lambda_j} \leq 0. \tag{1.52}$$

Prova. Temos

$$F^{ij} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial \lambda_k}\frac{\partial \lambda_k}{\partial a_{ij}} = \sum_k f_k \frac{\partial \lambda_k}{\partial a_{ij}} \tag{1.53}$$

e

$$F^{ij,rs} = \sum_{k,l} f_{kl}\frac{\partial \lambda_k}{\partial a_{ij}}\frac{\partial \lambda_l}{\partial a_{rs}} + \sum_k f_k \frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial a_{ij}\partial a_{rs}}. \tag{1.54}$$

Portanto, devemos calcular a taxa de variação dos autovalores da matriz (a_{ij}) com respeito a variação de seus componentes. Definimos então uma variação a dois parâmetros de (a_{ij}) por

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + tb_{ij} + sc_{ij},$$

para certas matrizes (b_{ij}) e (c_{ij}) a serem determinadas depois. Portanto, devemos expandir o polinômio característico

$$p(\lambda, t, s) = \det\left(\tilde{a}_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right)$$

em potências de t e s. Para isto, supomos que (a_{ij}) é diagonal em $\bar{X}$ com

$$(a_{ij}) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Supomos, ademais, que os autovalores de (a_{ij}) são simples. Sendo assim, denotamos por $\lambda = \lambda(s,t)$ um autovalor de $(\tilde{a}_{ij})$, isto é,

$$0 = p(\lambda, t, s) = \det\left\{\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix} + t(b_{ij}) + s(c_{ij})\right\}.$$

Expandindo o determinante, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= (\lambda_1 - \lambda)\ldots(\lambda_n - \lambda) + \sum_i (\lambda_1 - \lambda)\ldots(tb_{ii} + sc_{ii})\ldots(\lambda_n - \lambda) \\
&+ \sum_{i<j} (\lambda_1 - \lambda)\ldots(tb_{ii} + sc_{ii})\ldots(tb_{jj} + sc_{jj})\ldots(\lambda_n - \lambda) \\
&- \sum_{i<j} (\lambda_1 - \lambda)\ldots(tb_{ij} + sc_{ij})\ldots(tb_{ji} + sc_{ij})\ldots(\lambda_n - \lambda) \\
&+ O(|(t,s)|^3).
\end{aligned}$$

Portanto, diferenciando com respeito a t, em $t = 0$, temos

$$0 = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\sum_i (\lambda_1 - \lambda) \dots \underbrace{\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}}_{i} \dots (\lambda_n - \lambda)$$

$$+ \sum_i (\lambda_1 - \lambda) \dots b_{ii} \dots (\lambda_n - \lambda)$$

$$- \sum_{i \neq j} (\lambda_1 - \lambda) \dots sc_{ii} \dots \underbrace{\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}}_{j} \dots (\lambda_n - \lambda)$$

$$+ \sum_{i<j} (\lambda_1 - \lambda) \dots b_{ii} \dots sc_{jj} \dots (\lambda_n - \lambda)$$

$$+ \sum_{i<j} (\lambda_1 - \lambda) \dots sc_{ii} \dots b_{jj} \dots (\lambda_n - \lambda)$$

$$- \sum_{i<j} \sum_{l \neq i,j} (\lambda_1 - \lambda) \dots sc_{ii} \dots sc_{jj} \dots \underbrace{\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}}_{l} \dots (\lambda_n - \lambda)$$

$$- \sum_{i<j} (\lambda_1 - \lambda) \dots b_{ij} \dots sc_{ji} \dots (\lambda_n - \lambda)$$

$$- \sum_{i<j} (\lambda_1 - \lambda) \dots sc_{ij} \dots b_{ji} \dots (\lambda_n - \lambda)$$

$$+ \sum_{i<j} \sum_{l \neq i,j} (\lambda_1 - \lambda) \dots sc_{ij} \dots sc_{ji} \dots \underbrace{\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}}_{l} \dots (\lambda_n - \lambda) + O(s^2).$$

Desta vez, diferenciando com respeito a s, em $s = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}t\mathrm{d}s} &= -\sum_i (\lambda_1 - \lambda)\ldots \underbrace{\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}t\mathrm{d}s}}_{i} \ldots (\lambda_n - \lambda) \\
&+ \sum_{i\neq j} (\lambda_1 - \lambda)\ldots \underbrace{\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}}_{i} \ldots \underbrace{\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s}}_{j} \ldots (\lambda_n - \lambda) \\
&- \sum_{i\neq j} (\lambda_1 - \lambda)\ldots b_{ii} \ldots \underbrace{\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s}}_{j} \ldots (\lambda_n - \lambda) \\
&- \sum_{i\neq j} (\lambda_1 - \lambda)\ldots c_{ii} \ldots \underbrace{\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}}_{j} \ldots (\lambda_n - \lambda) \\
&+ \sum_{i<j} (\lambda_1 - \lambda)\ldots b_{ii} \ldots c_{jj} \ldots (\lambda_n - \lambda) \\
&+ \sum_{i<j} (\lambda_1 - \lambda)\ldots c_{ii} \ldots b_{jj} \ldots (\lambda_n - \lambda) \\
&- \sum_{i<j} (\lambda_1 - \lambda)\ldots b_{ij} \ldots c_{ji} \ldots (\lambda_n - \lambda) \\
&- \sum_{i<j} (\lambda_1 - \lambda)\ldots c_{ij} \ldots b_{ji} \ldots (\lambda_n - \lambda).
\end{aligned}$$

Uma vez que $\lambda|_{t=0}$ é um autovalor de (a_{ij}), então necessariamente $\lambda = \lambda_k$ para algum k, em $t = 0$. Como os autovalores de (a_{ij}) são supostos simples, resulta que $(\lambda_i - \lambda) \neq 0$ para $i \neq k$ em $t = 0$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}|_{s,t=0} = -\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}(\lambda_1 - \lambda)\ldots(\widehat{\lambda_k - \lambda})\ldots(\lambda_n - \lambda) \\
&+ (\lambda_1 - \lambda)\ldots b_{kk} \ldots (\lambda_n - \lambda).
\end{aligned}$$

Esta última equação implica que escolhendo-se $b_{kk} = 1$ ou $b_{kk} = 0$ obtém-se, respectivamente,

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = 1$$

ou

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Em particular, as derivadas direcionais de λ com respeito aos caminhos

$$t \mapsto (a_{ij}) + t\mathsf{e}_{kk}$$

e

$$t \mapsto (a_{ij}) + t\mathsf{e}_{lm},$$

onde $l \neq k$ ou $m \neq k$ e e_{rs} é a matriz com 1 na entrada rs e 0 em todas as entradas restantes, são dadas respectivamente por

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial a_{kk}} = 1, \quad \frac{\partial \lambda_k}{\partial a_{lm}} = 0,$$

onde $l \neq k$ ou $m \neq k$. Como estas funções asssumem valores no conjunto discreto $\{0,1\}$, então, por continuidade, concluímos que estas expressões são válidas para todas as matrizes (a_{ij}), com possíveis autovalores múltiplos.

Agora, usamos a expansão acima para obter informação de segunda ordem. Temos para $b_{kk} = 1$ (as outras entradas de (b_{ij}) sendo nulas)

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \lambda_k}{\partial a_{kk}} = 1$$

e

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}t\mathrm{d}s} &= -(\lambda_1 - \lambda)\ldots \underbrace{\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}t\mathrm{d}s}}_{k} \ldots (\lambda_n - \lambda) \\
&+ \sum_{i\neq k} (\lambda_1 - \lambda)\ldots \underbrace{\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}}_{i} \ldots \underbrace{\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s}}_{k} \ldots (\lambda_n - \lambda) \\
&- \sum_{i\neq k} (\lambda_1 - \lambda)\ldots c_{ii} \ldots (\widehat{\lambda_k - \lambda}) \ldots (\lambda_n - \lambda) - \sum_{i\neq k} (\lambda_1 - \lambda)\ldots c_{kk} \ldots \underbrace{\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}}_{i} \ldots (\lambda_n - \lambda) \\
&+ \sum_{k<i} (\lambda_1 - \lambda)\ldots (\widehat{\lambda_k - \lambda}) \ldots c_{ii} \ldots (\lambda_n - \lambda) \\
&+ \sum_{i<k} (\lambda_1 - \lambda)\ldots c_{ii} \ldots (\widehat{\lambda_k - \lambda}) \ldots (\lambda_n - \lambda),
\end{aligned}$$

o que implica

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}t\mathrm{d}s} &= -(\lambda_1 - \lambda)\dots\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}t\mathrm{d}s}}_{k}\dots(\lambda_n - \lambda) \\
&+ \sum_{i\neq k}(\lambda_1 - \lambda)\dots\underbrace{\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}}_{i}\dots\underbrace{\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s}}_{k}\dots(\lambda_n - \lambda) \\
&- \sum_{i\neq k}(\lambda_1 - \lambda)\dots c_{kk}\dots\underbrace{\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}}_{i}\dots(\lambda_n - \lambda).
\end{aligned}
$$

Assim, se escolhemos $c_{kk} = 1$ e as outras entradas nulas em (c_{ij}), obtemos $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial\lambda_k}{\partial a_{kk}} = 1$ e os dois últimos termos no lado direito da última equação se cancelam. Por outro lado, se escolhemos $c_{lm} = 1$ para algum $l \neq k$ ou $m \neq k$ e as outras entradas (em particular c_{kk}) iguais a zero, então $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial\lambda_k}{\partial a_{lm}} = 0$ e, neste caso, estes dois termos são ambos nulos. De qualquer maneira, temos

$$
(\lambda_1 - \lambda)\dots\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}t\mathrm{d}s}}_{k}\dots(\lambda_n - \lambda) = 0
$$

e

$$
\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}t\mathrm{d}s}\Big|_{s,t=0} = \frac{\partial^2\lambda}{\partial a_{ij}\partial a_{kk}} = 0 \tag{1.55}
$$

para todos os valores de i, j.

Agora, consideramos uma variação tomando $b_{lm} = 1$ para $l \neq k$ ou $m \neq k$ e pondo as outras entradas iguais a zero (incluindo b_{kk}). Sem perda de generalidade, podemos considerar $c_{nr} = 1$ para $n \neq k$ ou $r \neq k$ e as outras entradas iguais a zero. Como $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\lambda_k}{\partial a_{lm}} = 0$ e $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial\lambda_k}{\partial a_{nr}} = 0$ temos

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}t\mathrm{d}s} &= -(\lambda_1 - \lambda)\dots\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}t\mathrm{d}s}}_{k}\dots(\lambda_n - \lambda) \\
&- \sum_{i<j}(\lambda_1 - \lambda)\dots b_{ij}\dots c_{ji}\dots(\lambda_n - \lambda) \\
&- \sum_{i<j}(\lambda_1 - \lambda)\dots c_{ij}\dots b_{ji}\dots(\lambda_n - \lambda).
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_1-\lambda)\dots\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}t\mathrm{d}s}}_{k}\dots(\lambda_n-\lambda)\\
&=-\sum_{k<j}(\lambda_1-\lambda)\dots b_{kj}\dots c_{jk}\dots(\lambda_n-\lambda)-\sum_{i<k}(\lambda_1-\lambda)\dots b_{ik}\dots c_{ki}\dots(\lambda_n-\lambda)\\
&-\sum_{k<j}(\lambda_1-\lambda)\dots c_{kj}\dots b_{jk}\dots(\lambda_n-\lambda)-\sum_{i<k}(\lambda_1-\lambda)\dots c_{ik}\dots b_{ki}\dots(\lambda_n-\lambda).
\end{aligned}
$$

Então, se escolhemos $b_{km}=1$ para algum $m<k$ e as outras entradas iguais a zero, obtemos

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_1-\lambda)\dots\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}t\mathrm{d}s}}_{k}\dots(\lambda_n-\lambda)\\
&=-(\lambda_1-\lambda)\dots\underbrace{c_{mk}}_{m}\dots\underbrace{b_{km}}_{k}\dots(\lambda_n-\lambda)
\end{aligned}
$$

e portanto

$$\frac{\partial^2\lambda_k}{\partial a_{mk}\partial a_{km}}=\frac{1}{\lambda_k-\lambda_m},$$

se $k>m$. Escolhendo $b_{km}=1$ para algum $k<m$ e as outras entradas iguais a zero, obtemos

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_1-\lambda)\dots\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}t\mathrm{d}s}}_{k}\dots(\lambda_n-\lambda)\\
&=-(\lambda_1-\lambda)\dots\underbrace{b_{km}}_{k}\dots\underbrace{c_{mk}}_{m}\dots(\lambda_n-\lambda)
\end{aligned}
$$

e

$$\frac{\partial^2\lambda_k}{\partial a_{mk}\partial a_{km}}=-\frac{1}{\lambda_m-\lambda_k}$$

para $k<m$. Levantando índices e permutando a ordem, obtemos

$$\frac{\partial^2\lambda_m}{\partial a_{mk}\partial a_{km}}=-\frac{1}{\lambda_k-\lambda_m}$$

para $k>m$.

Aplicando esta fórmula na expressão da derivada de F acima, concluímos que, dado um co-vetor simétrico η_{ij}, arbitrário, temos

$$F^{ij}\eta_{ij} = \sum_i f_i \eta_{ii} \tag{1.56}$$

e

$$\begin{aligned}
\eta_{ij}F^{ij,rs}\eta_{rs} &= \sum_{k,l} f_{kl}\frac{\partial\lambda_k}{\partial a_{ij}}\frac{\partial\lambda_l}{\partial a_{rs}}\eta_{ij}\eta_{rs} + \sum_k f_k \eta_{ij}\frac{\partial^2\lambda_k}{\partial a_{ij}\partial a_{rs}}\eta_{rs} \\
&= \sum_{k,l} f_{kl}\eta_{kk}\eta_{ll} + \sum_{k<m} f_k \frac{\partial^2\lambda_k}{\partial a_{km}\partial a_{mk}}\eta_{km}^2 + \sum_{k>m} f_k \frac{\partial^2\lambda_k}{\partial a_{km}\partial a_{mk}}\eta_{km}^2 \\
&= \sum_{k,l} f_{kl}\eta_{kk}\eta_{ll} + \sum_{k\neq m} \frac{f_k - f_m}{\lambda_k - \lambda_m}\eta_{km}^2.
\end{aligned}$$

Isto conclui a prova do lema.

■

Por definição do operador de Weingarten, temos $a_j^i = g^{ik}a_{kj}$. Assim, calculamos

$$F^{ij} = \frac{\partial F}{\partial a_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial a_l^k}\frac{\partial a_l^k}{\partial a_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial a_j^k}g^{ki} =: F_k^j g^{ki}.$$

Portanto, temos

$$F^{ij}a_{ij} = F_j^i a_i^j$$

e supondo que a matriz (g_{ij}) é diagonal em $\bar{X}$, deduzimos que (F_j^i) é diagonal neste ponto.

Segue também do Lema 1.3 que a matriz (F^{ij}) é positiva-definida. De fato, $F^{ij} = f_i\delta_{ij}$, quando A é diagonal e, portanto, a condição (1.43) implica que $F = \psi$ é elíptica. Observamos que, em função das fórmulas em (1.23), as matrizes com componentes $F^{ij} = \frac{\partial F}{\partial a_{ij}}$ e $\frac{\partial F}{\partial z_{i;j}}$ são, respectivamente, positiva-definida e negativa-definida, o que implica que a equação $F = \psi$ é, de fato, negativa elíptica.

1.4 Estimativas da Altura

Consideramos, agora, para cada s, $0 \leq s \leq 1$, a aplicação

$$\Psi(s,t,u) = s\psi(t,u) + (1-s)\phi(t)k(t), \tag{1.57}$$

onde $k(t) = f(\kappa(t))$ e ϕ é uma função real positiva definida em I, que satisfaz as seguintes condições:

a) $\phi > 0$,

b) $\phi(t) > 1, \quad \text{para} \quad t \leq t_-$,

c) $\phi(t) < 1, \quad \text{para} \quad t \geq t_+$,

d) $\phi'(t) < 0$.

Estas condições implicam a existência de um único ponto $t_0 \in (t_-, t_+)$ tal que $\phi(t_0) = 1$.

Lema 1.4. *Para ψ como no enunciado do Teorema 1.1, ϕ como prescrita acima e a função Ψ definida em* (1.57)*, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

i) $\Psi(1, t, u) = \psi(t, u) \quad e \quad \Psi(0, t, u) = \phi(t)k(t)$

ii) $\Psi(s, t, u) > 0$

iii) $\Psi(s, t, u) > k(t), \quad para \quad t \leq t_-$

iv) $\Psi(s, t, u) < k(t), \quad par \quad t \geq t_+$.

Além disso, é sempre possível escolher-se ϕ satisfazendo as condições anteriores de modo que

v) $\frac{\partial}{\partial t}\Psi(s, t, u) + \kappa(t)\Psi(s, t, u) < 0$

Prova. (i) e (ii) são triviais. Para provar (iii), usamos a hipótese (a) do Teorema 1.1 para concluir que

$$\Psi(s, t, u) \geq k(t)(s + (1 - s)\phi(t)) \geq k(t)$$

com desigualdade estrita para $0 \leq s < 1$, onde usamos a condição (b) acerca de ϕ. A prova de (iv) é análoga. Para demonstrar (v), observamos que

$$\Psi_t = s\psi_t + (1 - s)\phi'(t)k(t) + (1 - s)\phi(t)k'(t).$$

Utilizando a hipótese

$$\psi_t + \kappa\psi \leq 0$$

e a definição de Ψ, obtém-se

$$\begin{aligned}
\Psi_t &\leq -s\kappa\psi + (1-s)\phi'(t)k(t) + (1-s)\phi(t)k'(t) \\
&= -\kappa\Psi + \kappa(t)(1-s)\phi(t)k(t) + (1-s)\phi'(t)k(t) \\
&+ (1-s)\phi(t)k'(t)
\end{aligned} \tag{1.58}$$

A soma do segundo e quarto termos no lado direito da desigualdade acima é

$$(1-s)\phi(t)\big(k(t)\kappa(t) + k'(t)\big).$$

Caso $k(t)\kappa(t) + k'(t) \leq 0$ para todo $t \in I$, então, uma vez que $\phi'(t) < 0$, obtemos (v). Todavia, se $k(t)\kappa(t) + k'(t) > 0$ em algum instante, fixamos $b > 0$ tal que

$$b^2 = \max_{t_- \leq t \leq t_+} \left\{ \kappa(t) + \frac{k'(t)}{k(t)} \right\}$$

Observamos que a soma dos três últimos termos em (1.58) é dada por

$$(1-s)k(t)\left(\phi'(t) + \phi(t)\left(\kappa(t) + \frac{k'(t)}{k(t)}\right)\right). \tag{1.59}$$

Definimos $\phi(t) = e^{-b^2 t + c}$, onde $c > 0$ é escolhida de modo que ϕ satisfaz as condições (a), (b), (c) e (d) acima. Para esta escolha, (1.59) torna-se

$$(1-s)k(t)\phi(t)\left(-b^2 + \kappa(t) + \frac{k'(t)}{k(t)}\right) \leq 0.$$

Isto completa a prova do lema. ■

Para $0 \leq s \leq 1$, considere a família de equações

$$\Upsilon(s,z) = F(a_{ij}(z)) - \Psi(s,z,u) = 0, \quad z = z(u). \tag{1.60}$$

Observe que a função constante $t = t_0$ é solução do problema correspondente a $s = 0$. Denotamos tal solução por z_0. Determinamos uma limitação C^0 para esta homotopia. Mais precisamente, provamos

Proposição 1.5. *Suponha que ψ satisfaz as condições* (a) *e* (b) *no Teorema 1.1. Se $z \in C^2(M)$ é uma solução da equação $\Upsilon(s,z) = 0$ para um dado $0 \leq s \leq 1$, então*

$$t_- < z(u) < t_+, \quad u \in M. \tag{1.61}$$

Prova. Seja $\bar{u}$ um ponto de máximo da função $z(u)$. Sua existência é garantida pela compacidade de M. Suponhamos que $z(\bar{u}) \geq t_+$. Considere então a folha $M_{z(\bar{u})}$ e represente por Σ o gráfico de z. Observe que Σ e $M_{z(\bar{u})}$ são tangentes em $(z(\bar{u}), \bar{u})$. Além disto, com respeito ao vetor normal interior, comum a ambas as hipersuperfícies neste ponto, Σ está acima de $M_{z(\bar{u})}$. Todavia, as curvaturas principais de Σ neste ponto são maiores ou iguais as curvaturas de $\kappa(z(\bar{u}))$. Portanto, pelo fato de que f possui derivadas positivas, concluímos que

$$F(a_{ij}(z)) \geq k(z(\bar{u}))$$

em $(z(\bar{u}), \bar{u})$, o que contradiz (iv) do Lema 1.4. Assim $z(\bar{u}) < t_+$. Trabalhando de forma análoga com o mínimo $\hat{u}$ de $z(u)$, concluímos que $z(\hat{u}) \geq t_-$. Isto finaliza a prova da proposição. ∎

Uma variante desta proposição ainda é verdadeira se removermos a condição de desiqualdade *estrita* nas hipóteses (a) e (b) do teorema. Temos

Proposição 1.6. *Suponha que ψ satisfaz as condições*

a') $\psi(t, u) \geq k(t) \quad$ para $\quad t \leq t_-$,

b') $\psi(t, u) \leq k(t) \quad$ para $\quad t \geq t_+$.

Seja $z \in C^2(M)$ uma solução da equação $\Upsilon(s, z) = 0$ para um dado $0 \leq s \leq 1$. Suponhamos que, para $s = 1$,

$$t_- \leq z(u) \leq t_+, \quad u \in M.$$

Então, ou $z \equiv t_-$ ou $z \equiv t_+$ ou

$$t_- < z(u) < t_+, \quad u \in M. \tag{1.62}$$

Agora, provamos o seguinte resultado de unicidade.

Proposição 1.7. *Fixado $s = 0$, existe uma única solução admissível z_0 da equação $\Upsilon(0, z) = 0$, a saber $z_0 = t_0$, onde t_0 satisfaz $\phi(t_0) = 1$.*

Prova. A prova de que z_0 é solução deste problema segue de

$$\Upsilon(0, z_0) = F(a_{ij}(z_0))) - k(t_0) = f(\kappa(t_0)) - k(t_0) = 0.$$

Seja $\bar{z}$ uma solução admissível de $\Upsilon(0, z) = 0$, ou seja

$$F(a_{ij}(\bar{z})) - \phi(\bar{z})k(\bar{z}) = 0.$$

Seja $\bar{u} \in M$ um ponto de mínimo de $\bar{z}$. Neste ponto, $\nabla'\bar{z} = 0$ e $\nabla'^2\bar{z}$ é positivo-definido. Como $\kappa = \frac{h'}{h}$, calculamos explicitamente em $\bar{u}$

$$g^{ij}(\bar{z}(\bar{u})) = \frac{1}{h^2}\sigma^{ij} - \frac{1}{h^2W^2}\bar{z}^i\bar{z}^j = \frac{1}{h^2(\bar{z}(\bar{u}))}\sigma^{ij}(\bar{u})$$

e

$$\begin{aligned} a_{ij}(\bar{z}(\bar{u})) &= \frac{1}{\sqrt{h^2 + |\nabla'\bar{z}|^2}}\big(- h\bar{z}_{ij} + 2h'\bar{z}_i\bar{z}_j + h^2h'\sigma_{ij}\big) \\ &= -\bar{z}_{ij} + h((\bar{z}(\bar{u}))h'((\bar{z}(\bar{u}))\sigma_{ij}(\bar{u}). \end{aligned}$$

Desta forma, o operador de Weingarten de Σ em $(\bar{z}(\bar{u}), \bar{u})$ é dado por

$$a^i_j = g^{ik}b_{kj} = -\frac{1}{h^2}\sigma^{ik}\bar{z}_{kj} + \frac{h'}{h}\delta^i_j.$$

Portanto, se consideramos um referencial, definido em uma vizinhança de $\bar{u}$, ortonormal em $\bar{u}$, que diagonaliza $\nabla'^2 z$ neste ponto, obtemos, pelo fato de que as entradas da diagonal de $\nabla'^2\bar{z}$ são necessariamente positivas,

$$a^i_j(\bar{z}(\bar{u})) \leq \kappa(\bar{z}(\bar{u}))\delta^i_j.$$

Uma vez que f é crescente com respeito a estes argumentos, temos

$$\phi(\bar{z}(\bar{u}))k(\bar{z}(\bar{u})) = F(a_{ij}(\bar{z}(\bar{u}))) \leq f(\kappa(\bar{z}(\bar{u}))) = k(\bar{z}(\bar{u})) = \phi(t_0)k(\bar{z}(\bar{u})).$$

Assim, sendo ϕ uma função decrescente, concluímos da escolha de $\bar{u}$ como um ponto de mínimo que

$$\bar{z}(u) \geq \bar{z}(\bar{u}) \geq t_0,$$

para todo $u \in M$. De maneira análoga, provamos que

$$\bar{z}(u) \leq t_0,$$

para todo $u \in M$. Portanto, obtemos $z = z_0$. Isto finaliza a prova.

■

1.5 Lemas

Como antes, Σ denota o gráfico de z. Consideramos as funções $\tau : \Sigma \to \mathbb{R}$ e $\eta : \Sigma \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\tau = -h\langle N, \bar{e}_0\rangle \quad \text{e} \quad \eta = -\int h\,\mathrm{d}t \tag{1.63}$$

As seguintes expressões serão utilizadas (somente ali) na estimativa do hessiano de z.

Lema 1.8. *Os campos gradiente das funções τ e η são dados por*

$$\begin{aligned} \nabla\eta &= -h\,\bar{e}_0^T, & (1.64)\\ \nabla\tau &= -A^\Sigma(\nabla\eta) & (1.65) \end{aligned}$$

e as formas hessianas, calculados com respeito a campos vetoriais dados V, W em Σ, são expressas como

$$\begin{aligned} \nabla^2\eta(V,W) &= \tau B(V,W) - h'\langle V, W\rangle, & (1.66)\\ \nabla^2\tau(V,W) &= -\langle \nabla_{\nabla\eta}A^\Sigma V, W\rangle - \langle \bar{R}(\nabla\eta, W)V, N\rangle - \tau\langle A^\Sigma V, A^\Sigma W\rangle \\ &+ h'\langle A^\Sigma V, W\rangle, & (1.67) \end{aligned}$$

onde $\bar{e}_0^T$ denota a projeção na direção tangente do campo de vetores $\bar{e}_0$.

Prova. Para simplificar os cálculos, consideramos um referencial geodésico ortonormal e_a numa vizinhança do ponto $\bar{u}$ em M e associamos o referencial adaptado $N, E_1, \ldots, E_n$ ao longo de Σ. Obtemos, usando (1.16),

$$\mathrm{d}\eta = -h\,\mathrm{d}z = -h\langle \mathrm{d}X, \bar{e}_0\rangle = -h\langle \bar{e}_0^T, \omega^i E_i\rangle$$

e

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tau &= -\mathrm{d}h\langle N, \bar{e}_0\rangle - h\mathrm{d}\langle N, \bar{e}_0\rangle = -\mathrm{d}h\langle N, \bar{e}_0\rangle - h\langle \bar{\nabla}N, \bar{e}_0\rangle - h\langle N, \bar{\nabla}\bar{e}_0\rangle \\ &= -h'\bar{\theta}^0\langle N, \bar{e}_0\rangle + h\langle a_i^j E_j\omega^i, \bar{e}_0\rangle - h\langle N, \bar{\theta}_0^i\bar{e}_i\rangle \\ &= h\langle a_i^j E_j\omega^i, \bar{e}_0\rangle - h'\bar{\theta}^0\langle N, \bar{e}_0\rangle - h'\langle N, \bar{\theta}^i\bar{e}_i\rangle \\ &= h\langle A^\Sigma(E_i), \bar{e}_0^T\rangle\omega^i - h'\langle N, \bar{\theta}^0\bar{e}_0 + \bar{\theta}^i\bar{e}_i\rangle. \end{aligned}$$

Portanto, usando o fato de que A^Σ é auto-adjunto e que $\mathrm{d}X = \bar{\theta}^0\bar{e}_0 + \bar{\theta}^i\bar{e}_i$, obtemos

$$\mathrm{d}\tau = h\langle A^\Sigma(\bar{e}_0^T), \omega^i E_i\rangle. \tag{1.68}$$

Deduzimos, deste modo, que

$$\nabla\eta = -h\bar{e}_0^T \quad \text{e} \quad \nabla\tau = -A^\Sigma(\nabla\eta). \tag{1.69}$$

Como $\tau_i = h\langle a_i^j E_j, \bar{e}_0^T\rangle$, calculamos, usando o fato que $\nabla_{E_k}E_j|_{\bar{X}} = 0$

$$\begin{aligned}
\tau_{i;k} &= h_k\langle a_i^j E_j, \bar{e}_0\rangle + h\langle a_{i;k}^j E_j, \bar{e}_0\rangle + h\langle a_i^j \bar{\nabla}_{E_k}E_j, \bar{e}_0\rangle + h\langle a_i^j E_j, \bar{\nabla}_{E_k}\bar{e}_0\rangle \\
&= h'\langle E_k, \bar{e}_0\rangle\langle a_i^j E_j, \bar{e}_0\rangle + h\langle a_{i;k}^j E_j, \bar{e}_0\rangle + h\langle a_i^j \bar{\nabla}_{E_k}E_j, N\rangle\langle N, \bar{e}_0\rangle + h\langle a_i^j E_j, \bar{\theta}_0^i(E_k)\bar{e}_i\rangle \\
&= h'\langle a_i^j E_j, \bar{\theta}^0(E_k)\bar{e}_0\rangle + h\langle a_{i;k}^j E_j, \bar{e}_0\rangle + h a_i^j a_{kj}\langle N, \bar{e}_0\rangle + h'\langle a_i^j E_j, \bar{\theta}^i(E_k)\bar{e}_i\rangle \\
&= h'\langle a_i^j E_j, E_k\rangle + h\langle a_{i;k}^j E_j, \bar{e}_0\rangle + h a_i^j a_{kj}\langle N, \bar{e}_0\rangle \\
&= h' a_{ik} - a_{i;k}^j \eta_j - \tau a_i^j a_{kj}.
\end{aligned}$$

onde usamos agora que $\mathrm{d}X = \bar{\theta}^0\bar{e}_0 + \bar{\theta}^i\bar{e}_i$ e que $\eta_k = -h\langle\bar{e}_0, E_k\rangle$. Assim, concluímos da equação de Codazzi

$$\begin{aligned}
\nabla^2\tau(V,W) &= h'\langle A^\Sigma V, W\rangle - \langle(\nabla_W A^\Sigma)V, \nabla\eta\rangle - \tau\langle A^\Sigma V, A^\Sigma W\rangle \\
&= h'\langle A^\Sigma V, W\rangle - \langle(\nabla_W A^\Sigma)\nabla\eta, V\rangle - \tau\langle A^\Sigma V, A^\Sigma W\rangle \\
&= h'\langle A^\Sigma V, W\rangle - \langle(\nabla_{\nabla\eta} A^\Sigma)W, V\rangle - \langle\bar{R}(\nabla\eta, W)V, N\rangle - \tau\langle A^\Sigma V, A^\Sigma W\rangle.
\end{aligned}$$

Finalmente, calculamos da expressão $\eta_i = -h\langle E_i, \bar{e}_0\rangle$

$$\begin{aligned}
\eta_{i;k} &= -h_k\langle E_i, \bar{e}_0\rangle - h\langle\bar{\nabla}_{E_k}E_i, \bar{e}_0\rangle - h\langle E_i, \bar{\nabla}_{E_k}\bar{e}_0\rangle \\
&= -h'\langle E_k, \bar{e}_0\rangle\langle E_i, \bar{e}_0\rangle - h\langle\bar{\nabla}_{E_k}E_i, N\rangle\langle N, \bar{e}_0\rangle - h'\langle E_i, \bar{\theta}^i(E_k)\bar{e}_i\rangle \\
&= -h'\langle E_i, \bar{\theta}^0(E_k)\bar{e}_0 + \bar{\theta}^i(E_k)\bar{e}_i\rangle - h\, a_{ik}\langle N, \bar{e}_0\rangle \\
&= -h' g_{ik} + \tau a_{ik}.
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\nabla^2\eta(V,W) = -h'\langle V, W\rangle + \tau\langle A^\Sigma V, W\rangle. \tag{1.70}$$

Isto finaliza a prova do lema. ■

A seguir, estimamos as derivadas de η e ψ. Nas expressões a seguir ∇_i e ∇_{ij} denotarão derivadas covariantes em Σ calculadas com respeito a um referencial adaptado a Σ.

Lema 1.9. *As funções η e ψ satisfazem as seguintes estimativas*

$$|\nabla\eta| \leq C, \quad |\nabla\psi| \leq C, \quad |\nabla^2\psi| \leq C \tag{1.71}$$

onde C são constantes dependentes de ψ, $\nabla'\psi$, $\nabla'^2\psi$ e de estimativas C^0 e C^1 de z.

Prova. A primeira estimativa segue de estimativas C^0 e C^1 de z. De fato, temos $\eta_i = -hz_i$. Para provarmos as demais estimativas, observamos que

$$\nabla_i\psi = X_i(\psi) = e_i(\psi) + z_ie_0(\psi) =: \psi_i + z_i\psi_z.$$

Então, usando (1.20) e denotando $\psi_i = e_i(\psi)$, obtemos

$$\begin{aligned}
|\nabla\psi|^2 &= g^{ij}X_i(\psi)X_j(\psi) = g^{ij}\big(\psi_i + z_i\psi_z\big)\big(\psi_j + z_j\psi_z\big)\\
&= g^{ij}\big(\psi_i\psi_j + z_i\psi_j\psi_z + z_j\psi_i\psi_z + z_iz_j\psi_z^2\big)\\
&= \frac{1}{h^2}\Big(\delta^{ij}\psi_i\psi_j - \frac{z^iz^j}{W^2}\psi_i\psi_j + \delta^{ij}z_i\psi_j\psi_z - \frac{z^iz^j}{W^2}z_i\psi_j\psi_z\\
&+ \delta^{ij}z_j\psi_i\psi_z - \frac{z^iz^j}{W^2}z_j\psi_i\psi_z + \delta^{ij}z_iz_j\psi_z^2 - \frac{z^iz^j}{W^2}z_iz_j\psi_z^2\Big)\\
&= \frac{1}{h^2}\Big(|\nabla'\psi|^2 - \frac{1}{W^2}\langle\nabla'\psi, \nabla'z\rangle^2 + 2\psi_z\langle\nabla'\psi, \nabla'z\rangle\\
&- 2\frac{\psi_z}{W^2}|\nabla'z|^2\langle\nabla'\psi, \nabla'z\rangle + \psi_z^2|\nabla'z|^2 - \frac{\psi_z^2}{W^2}|\nabla'z|^4\Big)\\
&\leq C(|z|_1, |\psi|_1, |\psi_z|)
\end{aligned}$$

Analogamente, podemos (substituindo ψ por $\psi_t = \psi_z$) provar que

$$|\nabla\psi_z| \leq C. \tag{1.72}$$

Temos

$$X_iX_j(\psi) = X_i\big(\psi_j + z_j\psi_z\big) = \psi_{i,j} + z_{i,j}\psi_z + z_j\psi_{zi} + z_i\psi_{zj} + z_iz_j\psi_{zz},$$

onde $\psi_{i,j} = e_ie_j\psi$ e $z_{i,j} = e_ie_j(z)$. Escolhemos um referencial geodésico e_A numa vizinhança de $\bar{u} \in M$. Neste caso, vale que $z_{i,j} = \nabla'_{ij}z = z_{ij}$ em $\bar{u}$. Usando agora o fato de que $\bar{\theta}^a_b = 0$ em $\bar{u}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{X_j}X_i &= \big(\mathrm{d}z_i(X_j) - h'h\theta^i(X_j)\big)\, e_0 + \frac{h'}{h}\left(\delta_i^k\theta^0(X_j) + z_i\theta^k(X_j)\right) e_k\\
&= \big(e_ie_j(z) - h'h\delta_{ij}\big)\, e_0 + \frac{h'}{h}\left(\delta_i^kz_j + z_i\delta_j^k\right) e_k\\
&= \big(z_{ij} - h'h\delta_{ij}\big)\, e_0 + \frac{h'}{h}\left(z_je_i + z_ie_j\right),
\end{aligned}$$

que implica em

$$\langle\nabla_{X_j}X_i, \nabla\psi\rangle = \langle\bar{\nabla}_{X_j}X_i, \nabla\psi\rangle = \big(z_{ij} + h'h\delta_{ij}\big)\,\langle e_0, \nabla\psi\rangle + \frac{h'}{h}\left(z_j\langle e_i, \nabla\psi\rangle + z_i\langle e_j, \nabla\psi\rangle\right)$$

$$= \big(z_{ij} + h'h\delta_{ij}\big)\psi_z + \frac{h'}{h}\big(z_j\psi_i + z_i\psi_j\big).$$

Assim, obtemos

$$\nabla_{ij}\psi = \langle \nabla_{X_j}\nabla\psi, X_j\rangle = \psi_{ij} + z_j\psi_{zi} + z_i\psi_{zj} + z_iz_j\psi_{zz}$$
$$+h'h\delta_{ij}\psi_z - \frac{h'}{h}z_j\psi_i - \frac{h'}{h}z_i\psi_j.$$

Portanto, concluímos que

$$|\nabla^2\psi| \leq C(|z|_1, |\psi|_2, |\psi_z|_1).$$

Isto finaliza a prova do lema. ■

1.6 Estimativa do Gradiente

Nesta seção, provamos uma estimativa *a priori* global para a primeira derivada de z.

Proposição 1.10. *Sob as hipóteses do Teorema 1.1, se z é uma solução da equação $\Upsilon(s, z) = 0$, para algum $0 \leq s \leq 1$, então $|\nabla' z| < C$, onde C é uma constante que depende somente de t_-, t_+ e ψ.*

Prova. Por comodidade, apresentamos a demonstração para $s = 1$. Seja $\chi(z) = |\nabla' z|e^{Az}$, onde A é uma constante positiva a ser escolhida posteriormente. Seja $\bar{u}$ um ponto onde χ atinge seu máximo. Se $\chi(\bar{u}) = 0$ então $|\nabla' z| \equiv 0$ e o resultado é trivial. Assim, podemos assumir que $\chi(\bar{u}) > 0$. Logo, podemos definir um referencial especial numa vizinhança de $\bar{u}$ e a função

$$\ln\chi(z) = \ln|\nabla' z| + Az = \ln z_1 + Az$$

É claro que $\ln\chi$ também atinge seu máximo em $\bar{u}$. Relembramos que no referencial especial $dz = z_1\theta^1$ e $e_1 = \nabla' z/|\nabla' z|$, a segunda forma quadrática de Σ pode ser calculada usando (1.23). Como $\bar{u}$ é um máximo de $\ln\chi$ então, em $\bar{u}$, temos

$$\frac{z_{1i}}{z_1} + Az_i = 0, \tag{1.73}$$

$$\frac{z_{1ii}}{z_1} - \frac{z_{1i}^2}{z_1^2} + Az_{ii} \leq 0. \tag{1.74}$$

Usando (1.26) podemos reescrever (1.73) como $z_{1i} + Az_iz_1 = 0$. Como $z_i = 0$ para $i > 1$, temos que

$$z_{11} = -Az_1^2, \quad z_{1i} = 0, \quad i > 1. \tag{1.75}$$

Substituindo esta expressão em (1.23) obtemos $a_{1i} = 0$ para $i > 1$. Isto implica que a direção e_1, em $\bar{u}$, é principal. Então, podemos girar os outros vetores $e_2, \ldots, e_n$ de forma que também se tornem direções principais em $\bar{u}$. Com esta escolha, temos $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$ em $\bar{u}$. Como consequência disto, inferimos de (1.23) que $z_{ij}(\bar{u}) = 0$, para $i \neq j$. Portanto, o hessiano de z é diagonal em $\bar{u}$. Além disto, usando (1.29), podemos escrever $z_{1,11} = z_{111}$ e $z_{1,ii} = z_{1,ii} + z_{ii}^2/z_1$. Assim podemos reescrever (1.74) como

$$\frac{z_{111}}{z_1} - \frac{z_{11}^2}{z_1^2} + Az_{11} \leq 0, \tag{1.76}$$

$$\frac{z_{1ii}}{z_1} + \frac{z_{1i}^2}{z_1^2} + Az_{ii} \leq 0. \tag{1.77}$$

Também segue da expressão acima que

$$z_{111} - 2A^2 z_1^3 \leq 0 \tag{1.78}$$

e para $j > 1$, usando o fato de que $z_{1j} = 0$ combinado com (1.31), obtemos

$$z_{ii1} \leq -\frac{z_{ii}^2}{z_1} - Az_1 z_{ii} - K_i z_1, \quad \text{para } i > 1\,. \tag{1.79}$$

Agora, podemos começar a reunir todas estas informações para obtermos a estimativa desejada. Iniciamos derivando a equação (1.8) com respeito a direção e_1. Usando o fato de que a matriz (a_j^i) é diagonal em $\bar{u}$ e a observação após o Lema 1.3, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^i \frac{\partial a_i^i}{\partial z_1} z_{11} + \sum_{i=1}^{n} F_i^i \frac{\partial a_i^i}{\partial z} z_1 = \psi_z z_1 - \sum_{i=1}^{n} F_i^i \frac{\partial a_i^i}{\partial z_{ii}} z_{ii1}. \tag{1.80}$$

Derivando a_i^i e usando (1.23), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_1^1}{\partial z_{11}} &= -\frac{h}{W^3}, \\
\frac{\partial a_1^1}{\partial z_1} &= -\frac{3z_1}{W^2} a_1^1 + \frac{4z_1 h'}{W^3}, \\
\frac{\partial a_1^1}{\partial z} &= \left(\frac{h'}{h} - \frac{3hh'}{W^2}\right) a_1^1 + \frac{2}{hW^3}\big(hh'' - h'^2\big) z_1^2 \\
&\quad + \frac{1}{W^3}\big(hh' + h^2 h''\big)
\end{aligned}$$

e para $i > 1$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial a_i^i}{\partial z_{ii}} &= -\frac{1}{hW}, \\
\frac{\partial a_i^i}{\partial z_1} &= -\frac{z_1}{W^2} a_i^i, \\
\frac{\partial a_i^i}{\partial z} &= -h'\left(\frac{h}{W^2} + \frac{1}{h}\right) a_i^i + \frac{(hh')'}{hW}.
\end{aligned}
$$

Substituindo estas expressões em (1.80), usando (1.75) e reorganizando os termos, obtemos

$$
\begin{aligned}
& z_1\left(\frac{3Az_1^2}{W^2} + \frac{h'}{h} - \frac{3hh'}{W^2}\right) F_1^1 a_1^1 \\
& + z_1\left(-\frac{4Az_1^2 h'}{W^3} + \frac{2}{hW^3}(hh'' - h'^2) z_1^2 + \frac{1}{W^3}(hh' + h^2 h'')\right) F_1^1 \\
& + z_1\left(\frac{Az_1^2}{W^2} - h'\left(\frac{h}{W^2} + \frac{1}{h}\right)\right) \sum_{i>1} F_i^i a_i^i + z_1 \frac{(hh')'}{hW} \sum_{i>1} F_i^i \\
& = \psi_z z_1 + F_1^1 \frac{h}{W^3} z_{111} + \sum_{i>1} F_i^i \frac{1}{hW} z_{ii1}.
\end{aligned} \tag{1.81}
$$

Usando (1.78) e (1.79) podemos estimar o lado direito de (1.81) por

$$
\begin{aligned}
& \text{RHS} \le \psi_z z_1 + F_1^1 \frac{2A^2 h z_1^3}{W^3} - Az_1 \sum_{i>1} F_i^i \frac{z_{ii}}{hW} - \frac{z_1}{hW} \sum_{i>1} F_i^i K_i \\
& \le \psi_z z_1 + Az_1 \sum_i F_i^i a_i^i + F_1^1 \left(\frac{A^2 h z_1^3}{W^3} - Az_1 \frac{h'}{W^3}(2z_1^2 + h^2)\right) \\
& - \left(\frac{Ah' z_1}{W} + \frac{z_1}{hW} \min_i K_i\right) \sum_{i>1} F_i^i,
\end{aligned} \tag{1.82}
$$

onde usamos as expressões de a_1^1 e a_i^i dadas em (1.23) e o fato de que $F_i^i > 0$. Transpondo o termo em $\sum_{i>1} F_i^i$ do lado direito da desigualdade (1.82) para o lado esquerdo de (1.81) e adicionando-o ao termo em $\sum_i F_i^i$ já existente e, por fim, escolhendo A tal que

$$
Ah'h + (h'h)' + \min_i K_i > 0, \tag{1.83}
$$

usando o fato de que $h' > 0$ e $\sum_i F_i^i > 0$, resulta em um termo positivo que pode ser descartado. Note que $K_i = \langle R(e_1, e_i)e_1, e_i\rangle$ não depende das derivadas de z. Isto juntamente com o fato de que h e suas derivadas são uniformemente limitadas na região $\bar{M}_{t_-,t_+}$ mostra que podemos escolher arbitrariamente $A \geq A_0$, para algum A_0 que depende somente de t_-, t_+ e $|z|_0$. Podemos reescrever o lado esquerdo da inequação resultante de (1.81) após estas manipulações como

$$\mathrm{LHS} \geq z_1 \left(\frac{Az_1^2}{W^2} - \frac{hh'}{W^2} - \frac{h'}{h} \right) \sum_i F_i^i a_i^i + z_1 \left(\frac{2Az_1^2}{W^2} + \frac{2h'}{h} - \frac{2hh'}{W^2} \right) F_1^1 a_1^1$$
$$+ \frac{z_1}{W^3} \left(-4Ah'z_1^2 + \frac{2z_1^2}{h} \left(hh'' - h'^2 \right) + hh' + h^2h'' \right) F_1^1 \tag{1.84}$$

Transpomos o termo F_1^1 do lado direito de (1.82) para o lado direito de (1.84) e adicionando-o ao termo em F_1^1 já existente. Transpondo, finalmente, o termo em $\sum_i F_i^i a_i^i$ do lado direito de (1.84) para o lado direito da desigualdade (1.82), obtendo a seguinte expressão para o lado direito:

$$\mathrm{RHS} \leq \psi_z z_1 + Az_1 \sum_i F_i^i a_i^i - z_1 \sum_i F_i^i a_i^i \left(\frac{Az_1^2}{W^2} - \frac{hh'}{W^2} - \frac{h'}{h} \right).$$

Escrevemos o lado esquerdo resultante como

$$\mathrm{LHS} \geq 2z_1 \left(\frac{Az_1^2}{W^2} + \frac{h'}{h} - \frac{hh'}{W^2} \right) F_1^1 a_1^1 + \frac{z_1}{W^3} \left(\frac{2z_1^2}{h}(hh'' - h'^2) \right.$$
$$\left. + hh' + h^2h'' + Ah'(-2z_1^2 + h^2) - A^2 z_1^2 h \right) F_1^1. \tag{1.85}$$

Finalmente, substituindo a expressão de a_1^1 em (1.23) na desigualdade (1.85) e juntando a expressão resultante a (1.85), obtemos

$$\frac{2z_1}{W^3} \left(\frac{Az_1^2}{W^2} + \frac{h'}{h} - \frac{hh'}{W^2} \right) \left(Ahz_1^2 + 2h'z_1^2 + h^2h' \right) F_1^1 + \frac{z_1}{W^3} \left(\frac{2z_1^2}{h}(hh'' - h'^2) \right.$$
$$\left. + hh' + h^2h'' + Ah'(-2z_1^2 + h^2) - A^2 z_1^2 h \right) F_1^1$$
$$\leq \psi_z z_1 + Az_1 \sum_i F_i^i a_i^i - z_1 \sum_i F_i^i a_i^i \left(\frac{Az_1^2}{W^2} - \frac{hh'}{W^2} - \frac{h'}{h} \right) \tag{1.86}$$

Observe que, dado que $z_1/W \leq 1$ e $W \geq h$ em Σ, os coeficientes de F_1^1 no lado esquerdo da desigualdade (1.86) são todos limitados de modo uniforme. Uma vez que $h'/h \geq 0$ e $h^2/W^2 \leq 1$, temos

$$\frac{h'}{h} - \frac{hh'}{W^2} = \frac{h'}{h}\big(1 - \frac{h^2}{W^2}\big) \geq 0.$$

Portanto, o primeiro termo do lado esquerdo em (1.86) é não-negativo. É possível considerarmos a desigualdade (1.86) como uma inequação polinomial em A da forma

$$F_1^1\big(aA^2+bA+c\big) \leq \psi_z z_1+Az_1\sum_i F_i^i a_i^i - z_1\sum_i F_i^i a_i^i\big(\frac{Az_1^2}{W^2}-\frac{hh'}{W^2}-\frac{h'}{h}\big), \quad (1.87)$$

onde a, b e c são coeficientes uniformemente limitados por constantes dependendo unicamente de h, h' e h''. Mais explicitamente,

$$\begin{aligned}
&F_1^1\frac{hz_1^3}{W^3}\big(\frac{z_1^2}{W^2} - \frac{h^2}{W^2}\big)A^2 + F_1^1\Big(\frac{2z_1^3}{W^3}\big(\frac{2h'z_1^2}{W^2} + \frac{h^2h'}{W^2}\big) + \frac{2hz_1^3}{W^3}\big(\frac{h'}{h} - \frac{hh'}{W^2}\big)\\
&+\frac{h'z_1}{W}\big(- \frac{2z_1^2}{W^2} + \frac{h^2}{W^2}\big)\Big)A + F_1^1\Big(\frac{2z_1}{W}\big(\frac{h'}{h} - \frac{hh'}{W^2}\big)\big(\frac{2h'z_1^2}{W^2} + \frac{h^2h'}{W^2}\big)\\
&+\frac{2z_1^3}{hW^3}\big(hh'' - h'^2\big) + \frac{z_1}{W}\big(\frac{hh'}{W^2} + \frac{h^2h''}{W^2}\big)\Big)\\
&\leq \psi_z z_1 + Az_1\sum_i F_i^i a_i^i - z_1\sum_i F_i^i a_i^i\big(\frac{Az_1^2}{W^2} - \frac{hh'}{W^2} - \frac{h'}{h}\big)
\end{aligned}$$

Supomos inicialmente que F_1^1 seja uniformemente limitado de zero, isto é, que exista uma constante $C > 0$ tal que $F_1^1 \geq C$ em Σ. Neste caso, obtemos

$$aA^2+bA+c \leq \frac{1}{C}\Big(\psi_z z_1+Az_1\sum_i F_i^i a_i^i - z_1\sum_i F_i^i a_i^i\big(\frac{Az_1^2}{W^2}-\frac{hh'}{W^2}-\frac{h'}{h}\big)\Big), \quad (1.88)$$

Suponhamos que o coeficiente a é estritamente positivo, ou seja, que

$$a = \frac{hz_1^3}{W^5}(z_1^2 - h^2)F_1^1 > 0 \quad (1.89)$$

De outro modo, estamos feitos, uma vez que decorreria a estimativa trivial $z_1 \leq h(z)$ e, portanto, $z_1 < h(t_+)$. Assim, supondo $a > 0$, visto que $\delta \leq \sum_i F_i^i a_i^i \leq \psi$, obtemos uma contradição, tomando A suficientemente grande, com o fato de que temos um polinômio quadrático à esquerda em (1.88) com coeficiente de maior ordem positivo e, à direita em (1.88), temos um polinômio linear em A.

A segunda possibilidade é de que F_1^1 não seja uniformemente limitado por baixo. Neste caso, denotando $x = z_1/W$ e, deste modo, substituindo

$$x^2 = \frac{z_1^2}{W^2}, \quad \frac{h^2}{W^2} = 1 - x^2 \tag{1.90}$$

em (1.86), escrevemos o lado esquerdo desta desigualdade na forma

$$\begin{aligned}
&\frac{2z_1}{W}\left(\frac{Az_1^2}{W^2} + \frac{h'}{h}\big(1 - \frac{h^2}{W^2}\big)\right)\left(\frac{Ahz_1^2}{W^2} + \frac{2h'z_1^2}{W^2} + \frac{h^2h'}{W^2}\right)F_1^1 + \frac{z_1}{W}\Bigg(\frac{2z_1^2}{hW^2}(hh'' - h'^2)\\
&+\frac{h'}{h}\frac{h^2}{W^2} + \frac{h^2h''}{W^2} + Ah'\big(-\frac{2z_1^2}{W^2} + \frac{h^2}{W^2}\big) - \frac{A^2z_1^2h}{W^2}\Bigg)F_1^1\\
&= F_1^1\Big(2\big(A + \frac{h'}{h}\big)(Ah + h')x^5 + \big(h'' - \frac{h'}{h} - Ah' - A^2h\big)x^3\\
&+\big(h'' + \frac{h'}{h} + Ah'\big)x\Big).
\end{aligned} \tag{1.91}$$

Observamos que podemos supor, sem perda de generalidade, que $x \sim 1$, visto que, caso contrário, existe uma constante positiva α estritamente menor que 1 tal que $x^2 \leq \alpha$. Neste caso, vale a estimativa

$$(1-\alpha)z_1^2 \leq \alpha h^2.$$

Portanto, a expressão polinomial em x acima tem, no limite $x \sim 1$, coeficientes uniformemente limitados se fixamos $A = A_0$. Deste modo, visto que supomos que $F_1^1 \sim 0$, assimilamos o lado direito da igualdade em (1.91) a um dado $\varepsilon > 0$ com $\varepsilon \sim 0$,

$$\varepsilon \leq \psi_1 + z_1\big(\psi_z + \frac{h'}{h}\sum_i F_i^i a_i^i + A_0\sum_i F_i^i a_i^i + \frac{1}{W^2}\big(h'h - A_0 z_1^2\big)\sum_i F_i^i a_i^i\big) \tag{1.92}$$

Utilizando a desigualdade $\psi \geq \sum_i F_i^i a_i^i$, temos

$$\varepsilon \leq \psi_1 + z_1\big(\psi_z + \frac{h'}{h}\psi + A_0\sum_i F_i^i a_i^i + \frac{1}{W^2}h'h\psi - \frac{1}{W^2}A_0 z_1^2\sum_i F_i^i a_i^i\big). \tag{1.93}$$

Portanto,

$$\varepsilon W^2 - \big(\psi_z + \frac{h'}{h}\psi\big)z_1 W^2 \leq z_1\big(A_0(W^2 - z_1^2)\sum_i F_i^i a_i^i + h'h\psi\big). \tag{1.94}$$

Obtemos

$$\varepsilon W^2 - \big(\psi_z + \frac{h'}{h}\psi\big) z_1 W^2 \leq A_0 h^2 \psi + h' h \psi. \tag{1.95}$$

Portanto, se supusermos $\partial_t(h\psi) \leq 0$, ou seja, se supusermos

$$\psi_z + \frac{h'}{h}\psi \leq 0 \tag{1.96}$$

e escolhendo-se

$$\varepsilon \ll \frac{1}{W^2},$$

obtemos uma estimativa para $z_1|_{\bar{u}}$. Isto completa a prova da Proposição 1.10.

■

1.7 Estimativa do Hessiano

Esta seção é dedicada à prova da estimativa do hessiano. Mostramos a seguir que os termos da segunda forma fundamental são limitados superiormente. Combinando isto com o fato geométrico mencionado na Seção 1.3, isto determina uma limitação uniforme para B. Como dispomos de estimativas C^0 e C^1, esta informação, juntamente com (1.23), permite-nos obter uma estimativa uniforme para o hessiano.

Proposição 1.11. *Sob as hipóteses do Teorema 1.1, se z é uma solução da equação $\Upsilon(s,z) = 0$, para algum $0 \leq s \leq 1$, então $|\nabla'^2 z| < C$, onde C é uma constante que depende somente de t_-, t_+, ψ e $|\nabla' z|_0$.*

Prova. Apresentamos a prova apenas para $s = 1$. Definimos a seguinte função no fibrado tangente unitário de Σ

$$\tilde{\zeta}(u,\xi) = B(\xi,\xi)\, e^{\varphi(\tau) - \beta\eta}, \tag{1.97}$$

onde $u \in M$ e ξ é um vetor unitário tangente a Σ em $(z(u), u)$. As funções τ e η estão definidas em (1.63), a constante $\beta > 0$ é escolhida posteriormente e a função real φ é definida a seguir. Note que, por definição, a função τ é limitada por constantes dependendo das estimativas de z e $\nabla' z$. Assim, é possível escolher $a > 0$ tal que $\tau \geq 2a$. Então, definimos

$$\varphi(\tau) = -\ln(\tau - a). \tag{1.98}$$

Diferenciando φ com respeito a τ verificamos

$$\ddot{\varphi} - (1+\epsilon)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{(\tau-a)^2} - \frac{1+\epsilon}{(\tau-a)^2} = -\frac{\epsilon}{(\tau-a)^2} < 0. \tag{1.99}$$

Pela escolha de a e dada uma constante positiva arbitrária C, temos

$$\begin{aligned} &-(1+\dot{\varphi}\tau) + C(\ddot{\varphi} - (1+\epsilon)\dot{\varphi}^2) = -1 + \frac{\tau}{\tau-a} - \frac{C\epsilon}{(\tau-a)^2} \\ &\geq \frac{a^2}{2(\tau-a)^2} \geq \hat{C}. \end{aligned}$$

para alguma constante positiva $\hat{C}$ dependendo das estimativas de z e $\nabla' z$.

Supomos que o máximo de $\tilde{\zeta}$ é atingido em um ponto $\bar{u}$ e ao longo da direção $\bar{\xi}$ tangente a $\bar{X} = (z(\bar{u}), \bar{u})$. Podemos escolher um referencial geodésico ortonormal E_a, numa vizinhança de $\bar{X}$, como definido na Seção 1.2, tal que $\omega_i^k|_{\bar{X}} = 0$. Podemos girar este referencial de modo que $\bar{\xi} = E_1$ em $\bar{X}$.

Consideramos a função local $a_{11} = B(E_1, E_1)$. Verificamos facilmente que a função

$$\zeta(u) = a_{11}\, e^{\varphi(\tau)-\beta\eta} \tag{1.100}$$

atinge um máximo em $\bar{X}$. Portanto, calculamos em $\bar{u}$ as derivadas logarítmicas

$$0 = (\ln\zeta)_i = \frac{a_{11;i}}{a_{11}} + \dot{\varphi}\tau_i - \beta\eta_i \tag{1.101}$$

e a matriz hessiana, com componentes

$$(\ln\zeta)_{i;j} = \frac{a_{11;ij}}{a_{11}} - \frac{a_{11;i}a_{11;j}}{a_{11}^2} + \dot{\varphi}\tau_{i;j} + \ddot{\varphi}\tau_i\tau_j - \beta\eta_{i;j}$$

é negativa-definida. Portanto

$$\begin{aligned} F^{ij}(\ln\zeta)_{ij} &= \frac{1}{a_{11}}F^{ij}a_{11;ij} - \frac{1}{a_{11}^2}F^{ij}a_{11;i}a_{11;j} + \dot{\varphi}F^{ij}\tau_{i;j} \\ &+ \ddot{\varphi}F^{ij}\tau_i\tau_j - \beta F^{ij}\eta_{i;j} \leq 0 \end{aligned} \tag{1.102}$$

É claro que a_{11} é o maior autovalor de B e, sendo assim, $a_{1i} = 0$ para $i \neq 1$. Portanto, podemos girar o complemento ortogonal de E_1 de modo que, no referencial resultante, a matriz (a_{ij}) é diagonal em $\bar{X}$. Do Lema 1.3, segue que

(F^{ij}) é também diagonal com $F^{ii} = f_i$. Denotamos $\lambda_i = a_{ii}(\bar{u})$ e escolhemos índices tais que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n.$$

Além disto, supomos, sem perda de generalidade, que $\lambda_1 > 1$ em $\bar{u}$. Então, de acordo com o Lema 1.3, temos

$$f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n.$$

De (1.102), obtemos

$$\sum_i \Big(\frac{1}{\lambda_1} f_i a_{11;ii} - \frac{1}{\lambda_1^2} f_i |a_{11;i}|^2 + \dot{\varphi} f_i \tau_{i;i} + \ddot{\varphi} f_i |\tau_i|^2 - \beta f_i \eta_{i;i}\Big) \leq 0. \quad (1.103)$$

Agora, diferenciando covariantemente a equação (1.8) na direção de E_1 com respeito a métrica (g_{ij}) em Σ, obtemos

$$F^{ij} a_{ij;1} = \psi_1$$

e diferenciando novamente, deduzimos

$$F^{ij} a_{ij;11} + F^{ij,kl} a_{ij;1} a_{kl;1} = \psi_{1;1}. \quad (1.104)$$

Da identidade de Ricci no Lema 1.2, temos

$$\sum_{i,j} F^{ij} a_{ij;11} = \sum_i F^{ii} a_{ii;11} = \sum_i \big(f_i a_{11;ii} + \lambda_1 f_i \lambda_i^2 - \lambda_1^2 f_i \lambda_i$$
$$+ \lambda_1 f_i \bar{R}_{i0i0} - \bar{R}_{1010} f_i \lambda_i + f_i \bar{R}_{i1i0;1} - f_i \bar{R}_{1i10;i}\big)$$

e usando o fato que $\delta(f) \leq \sum_i f_i \lambda_i \leq f = \psi$ obtemos

$$F^{ij} a_{ij;11} \leq -\lambda_1^2 \delta + |\bar{R}_{1010}| \psi + \sum_i \big(f_i a_{11;ii} + \lambda_1 f_i \lambda_i^2 + \lambda_1 f_i \bar{R}_{i0i0}$$
$$+ f_i \bar{R}_{i0i0;1} - f_i \bar{R}_{1010;i}\big).$$

Combinando estas expressões e (1.104) obtemos

$$\sum_i f_i a_{11;ii} \geq \psi_{1;1} - F^{ij,kl} a_{ij;1} a_{kl;1} + \lambda_1^2 \delta - |\bar{R}_{1010}| \psi$$
$$+ \sum_i \big(- \lambda_1 f_i \lambda_i^2 - \lambda_1 f_i \bar{R}_{i0i0} - f_i \bar{R}_{i0i0;1} + f_i \bar{R}_{1010;i}\big).$$

Substituindo esta expressão em (1.103) obtemos

$$\frac{1}{\lambda_1}\Big(\psi_{1;1} - F^{ij,kl}a_{ij;1}a_{kl;1} + \lambda_1^2\delta - |\bar{R}_{1010}|\psi + \sum_i \big(-\lambda_1 f_i\lambda_i^2 - \lambda_1 f_i\bar{R}_{i0i0}$$
$$-f_i\bar{R}_{i0i0;1} + f_i\bar{R}_{1010;i}\big)\Big) + \sum_i \Big(-\frac{1}{\lambda_1^2}f_i|a_{11;i}|^2 + \dot{\varphi}f_i\tau_{i;i} + \ddot{\varphi}f_i|\tau_i|^2$$
$$-\beta f_i\eta_{i;i}\Big) \leq 0.$$

Portanto, temos

$$\frac{\psi_{1;1}}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1}\big(\delta\lambda_1^2 - \psi|\bar{R}_{1010}|\big) - \frac{1}{\lambda_1}F^{ij,kl}a_{ij;1}a_{kl;1} - \sum_i f_i\lambda_i^2 - \sum_i f_i\bar{R}_{i0i0}$$
$$-\frac{1}{\lambda_1}\sum_i f_i\big(\bar{R}_{i0i0;1} - \bar{R}_{1010;i}\big) + \sum_i \Big(-\frac{1}{\lambda_1^2}f_i|a_{11;i}|^2 + \dot{\varphi}f_i\tau_{i;i} + \ddot{\varphi}f_i|\tau_i|^2$$
$$-\beta f_i\eta_{i;i}\Big) \leq 0.$$

De (1.66) temos, em $\bar{X}$,

$$\beta\sum_i f_i\eta_{i;i} = \beta\sum_i \big(\tau f_i a_{ii} - h' f_i g_{ii}\big) \leq \beta\big(\tau\psi - h'T\big),$$

onde $T = \sum_i f_i$. De (1.67), denotando

$$\bar{R}_{ki} := \langle \bar{R}(E_k, E_i)E_i, N\rangle = \bar{\Omega}_i^0(E_k, E_i)$$

e usando que $\dot{\varphi} < 0$ em $\bar{X}$, deduzimos

$$\dot{\varphi}\sum_i f_i\tau_{i;i} \geq -\dot{\varphi}\Big(\sum_{i,k}\eta^k f_i a_{ii;k} + \sum_{i,k}\eta^k\bar{R}_{ki}f_i\Big) - \dot{\varphi}\tau\sum_i f_i\lambda_i^2 + \dot{\varphi}h'\psi$$
$$= -\dot{\varphi}\Big(\sum_k \eta^k\psi_k + \sum_{i,k}\eta^k\bar{R}_{ki}f_i\Big) - \dot{\varphi}\tau\sum_i f_i\lambda_i^2 + \dot{\varphi}h'\psi.$$

Usando (1.71) e que, em $\bar{X}$, existe uma certa constante positiva C_k tal que

$$\sum_i \bar{R}_{ki}f_i \leq C_k T,$$

obtemos

$$|\dot{\varphi}\eta^k(\psi_k + C_kT)| - \dot{\varphi}h'\psi \leq |\dot{\varphi}||\nabla\eta|(|\nabla\psi| + CT) + |\dot{\varphi}|C \leq |\dot{\varphi}|(C + CT)$$

o que assegura que

$$-\dot{\varphi}\big(\eta^k(\psi_k + C_k T)\big) + \dot{\varphi} h' \psi \geq -|\dot{\varphi}|(C + CT).$$

Portanto

$$\dot{\varphi} \sum_i f_i \tau_{i;i} \geq -|\dot{\varphi}|(C + CT) - \dot{\varphi}\tau \sum_i f_i \lambda_i^2.$$

Agora supondo, sem perda de generalidade, que

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{C} \sum_i |\bar{R}_{i0i0;1} - \bar{R}_{1010;i}|,$$

para algum $C > 0$. Além disto, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\lambda_1 \geq 1$, o que acarreta

$$-\frac{1}{\lambda_1}\psi |\bar{R}_{1010}| \geq -C \quad \text{e} \quad \frac{\psi_{1;1}}{\lambda_1} \geq -C$$

para alguma constante positiva C. Finalmente, temos

$$-\sum_i f_i \bar{R}_{i0i0} \geq -T \max_i |\bar{R}_{i0i0}| \geq -CT.$$

Então, concluímos destas desigualdades que

$$\begin{aligned}
&-C - CT + \delta\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} F^{ij,kl} a_{ij;1} a_{kl;1} - \sum_i f_i \lambda_i^2 \\
&-\frac{1}{\lambda_1^2} \sum_i f_i |a_{11;i}|^2 - |\dot{\varphi}|(C + CT) - \dot{\varphi}\tau \sum_i f_i \lambda_i^2 + \ddot{\varphi} \sum_i f_i |\tau_i|^2 \\
&-\beta\big(\tau\psi - h'T\big) \leq 0
\end{aligned} \tag{1.105}$$

Finalmente, segue igualmente de (1.101), para todo $\epsilon > 0$, a desigualdade

$$\frac{1}{\lambda_1^2} f_i |a_{11;i}|^2 = f_i |\dot{\varphi}\tau_i - \beta\eta_i|^2 \leq (1 + \frac{1}{\epsilon})\beta^2 f_i |\eta_i|^2 + (1 + \epsilon)\dot{\varphi}^2 f_i |\tau_i|^2. \tag{1.106}$$

Agora, para prosseguimos a análise, consideramos dois casos.

1º Caso. Neste caso, supomos que $\lambda_n \leq -\theta\lambda_1$ para alguma constante positiva θ escolhida posteriormente.

Somando os termos em (1.106), obtemos

$$\frac{1}{\lambda_1^2}\sum_i f_i|a_{11;i}|^2 \leq (1+\frac{1}{\epsilon})\beta^2\sum_i f_i|\eta_i|^2 + (1+\epsilon)\dot{\varphi}^2\sum_i f_i|\tau_i|^2$$
$$\leq (1+\frac{1}{\epsilon})\beta^2 CT + (1+\epsilon)\dot{\varphi}^2\sum_i f_i|\tau_i|^2$$

para todo $\epsilon > 0$. Então,

$$-C - CT + \delta\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1}F^{ij,kl}a_{ij;1}a_{kl;1} - (1+\dot{\varphi}\tau)\sum_i f_i\lambda_i^2$$
$$-(1+\frac{1}{\epsilon})\beta^2 CT - (1+\epsilon)\dot{\varphi}^2\sum_i f_i|\tau_i|^2$$
$$-|\dot{\varphi}|(C+CT) + \ddot{\varphi}\sum_i f_i|\tau_i|^2 - \beta\big(\tau\psi - h'T\big) \leq 0$$

e portanto

$$\delta\lambda_1 - C - C|\dot{\varphi}| - \frac{1}{\lambda_1}F^{ij,kl}a_{ij;1}a_{kl;1}$$
$$-\big(C + C|\varphi'| - h'\beta + C(1+\frac{1}{\epsilon})\beta^2\big)T$$
$$-(1+\dot{\varphi}\tau)\sum_i f_i\lambda_i^2 + \big(\ddot{\varphi} - (1+\epsilon)\dot{\varphi}^2\big)\sum_i f_i|\tau_i|^2 - \beta\tau\psi \leq 0.$$

Usando (1.65) e o fato de que $\big(a_{ij}\big)$ é diagonal em $\bar{X}$, calculamos

$$\sum_i f_i|\tau_i|^2 = \sum_i f_i\lambda_i^2|\eta_i|^2 \leq C\sum_i f_i\lambda_i^2. \tag{1.107}$$

Assim

$$\delta\lambda_1 - C - C|\dot{\varphi}| - \frac{1}{\lambda_1}F^{ij,kl}a_{ij;1}a_{kl;1}$$
$$-\big(C + C|\dot{\varphi}| - h'\beta + C(1+\frac{1}{\epsilon})\beta^2\big)T$$
$$+\big(-(1+\dot{\varphi}\tau) + C(\ddot{\varphi} - (1+\epsilon)\dot{\varphi}^2)\big)\sum_i f_i\lambda_i^2 - \beta\tau\psi \leq 0. \tag{1.108}$$

Agora, usando a concavidade de F, podemos descartar o quarto termo no lado esquerdo de (1.108), que é não-negativo, e assim obtermos

$$-C_1(\beta) - C_2(\beta)T + \delta\lambda_1 + \hat{C}\sum_i f_i\lambda_i^2 \leq 0,$$

onde C_1 depende linearmente de β e C_2 depende quadraticamente de β. Como $f_n \geq \frac{1}{n}T$, temos

$$\sum_i f_i\lambda_i^2 \geq f_n\lambda_n^2 \geq \frac{1}{n}\theta^2 T\lambda_1^2.$$

Então

$$-C_1 - C_2 T + \delta\lambda_1 + \hat{C}\frac{1}{n}\theta^2 T\lambda_1^2 \leq 0.$$

Esta desigualdade mostra que λ_1 é limitado. De fato, o lado esquerdo desta desigualdade pode ser visto como um polinômio em λ_1 e portanto

$$\lambda_1 \leq \lambda_+,$$

onde

$$\lambda_+ = \inf_T \left\{ -\frac{\delta}{2\hat{C}\frac{1}{n}\theta^2 T} + \left(\frac{\delta^2 + 4\hat{C}\frac{1}{n}\theta^2 T(C_1 + C_2 T)}{4\hat{C}^2\frac{1}{n^2}\theta^4 T^2}\right)^{1/2} \right\}.$$

De outro modo, observamos que os coeficientes dos termos em $T = \sum_i F_i^i$ satisfazem

$$\hat{C}\frac{1}{n}\theta^2\lambda_1^2 - C_2 \geq 0$$

para $\lambda_1 \geq \bar{C}$, para uma dada constante positiva $\bar{C}$. Supondo que isto seja válido, pois, caso contrário, estimamos automaticamente λ_1, temos, usando a hipótese $\sum_i F_i^i \geq \delta$,

$$-C_1 - C_2\delta + \delta\lambda_1 + \hat{C}\frac{1}{n}\theta^2\delta\lambda_1^2 \leq 0.$$

Assim, reobtemos a limitação de λ_1 em termos da raiz de um polinômio quadrático mas, desta feita, sem referência explícita a T.

2º Caso. Neste caso, supomos que $\lambda_n \geq -\theta\lambda_1$ e agrupamos os índices em $\{1,...,n\}$ em dois conjuntos $I_1 = \{j; f_j \leq 4f_1\}$ e $I_2 = \{j; f_j > 4f_1\}$. Assim, $\lambda_i \geq -\theta\lambda_1$. Usando (1.106) obtemos, para $i \in I_1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_1^2} f_i |a_{11;i}|^2 &\leq (1+\epsilon)\dot{\varphi}^2 f_i |\tau_i|^2 + (1+\frac{1}{\epsilon})(\beta)^2 f_i |\eta_i|^2 \\ &\leq (1+\epsilon)\dot{\varphi}^2 f_i |\tau_i|^2 + C(1+\frac{1}{\epsilon})(\beta)^2 f_1.\end{aligned}$$

Portanto, segue de (1.105) que

$$\begin{aligned}&-C - CT + \delta\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} F^{ij,kl} a_{ij;1} a_{kl;1} - \big(1+\dot{\varphi}\tau\big)\sum_i f_i \lambda_i^2 \\ &-\frac{1}{\lambda_1^2}\sum_{j\in I_2} f_j |a_{11;j}|^2 - |\dot{\varphi}|(C+CT) + \big(\ddot{\varphi} - (1+\epsilon)\dot{\varphi}^2\big)\sum_i f_i |\tau_i|^2 \\ &-C(1+\frac{1}{\epsilon})\beta^2 f_1 - \beta\big(\tau\psi - h'T\big) \leq 0.\end{aligned}$$

Note que acrescentamos a desigualdade acima o termo não positvo

$$-(1+\epsilon)|\dot{\varphi}|^2 \sum_{i\in I_2} f_i |\tau_i|^2.$$

Temos

$$|\tau_i| = |\lambda_i \eta_i| \leq C\lambda_i$$

e, como no caso anterior, podemos mostrar que

$$-\big(1+\dot{\varphi}\tau\big)\sum_i f_i \lambda_i^2 + \big(\ddot{\varphi} - (1+\epsilon)\dot{\varphi}^2\big)\sum_i f_i |\tau_i|^2 \geq \hat{C}\sum_i f_i \lambda_i^2, \qquad (1.109)$$

para alguma constante positiva $\hat{C}$. Então, temos

$$\begin{aligned}&-C - CT + \delta\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} F^{ij,kl} a_{ij;1} a_{kl;1} + \hat{C}\sum_i f_i \lambda_i^2 \\ &-\frac{1}{\lambda_1^2}\sum_{j\in I_2} f_j |a_{11;j}|^2 - |\dot{\varphi}|(C+CT) - C\big(1+\frac{1}{\epsilon}\big)\beta^2 f_1 - \beta\big(\tau\psi - h'T\big) \leq 0.\end{aligned}$$

Denotando $\bar{R}_{j1} = \bar{\Omega}_1^0(E_j, E_1)$ obtemos do Lema 1.3, do fato que $1 \notin I_2$ e da equação de Codazzi, a expressão

$$-\frac{1}{\lambda_1} F^{ij,kl} a_{ij;1} a_{kl;1} \geq -\frac{2}{\lambda_1}\sum_{j\in I_2}\frac{f_1 - f_j}{\lambda_1 - \lambda_j}(a_{1j;1})^2 = -\frac{2}{\lambda_1}\sum_{j\in I_2}\frac{f_1 - f_j}{\lambda_1 - \lambda_j}\big(a_{11;j} + \bar{R}_{j1}\big)^2.$$

Afirmamos que, para todo $j \in I_2$, vale a desigualdade

$$-\frac{2}{\lambda_1}\frac{f_1 - f_j}{\lambda_1 - \lambda_j} \geq \frac{f_j}{\lambda_1^2}.$$

Isto é equivalente a

$$2f_1\lambda_1 \leq f_j\lambda_1 + f_j\lambda_j.$$

É claro que $j \in I_2$ implica $f_j > 4f_1$. Se $\lambda_j \geq 0$, isto é óbvio. Se $\lambda_j < 0$, então $-\theta\lambda_1 \leq \lambda_j < 0$, e deste modo

$$f_j\lambda_1 + f_j\lambda_j \geq (1-\theta)f_j\lambda_1 \geq 4(1-\theta)f_1\lambda_1 \geq 2f_1\lambda_1,$$

se escolhermos $\theta = 1/2$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\lambda_1}F^{ij,kl}a_{ij;1}a_{kl;1} &\geq \sum_{j\in I_2}\frac{f_j}{\lambda_1^2}(a_{11;j} + \bar{R}_{j1})^2 \\
&= \sum_{j\in I_2}\frac{f_j}{\lambda_1^2}(a_{11;j})^2 + 2\sum_{j\in I_2}\frac{f_j}{\lambda_1^2}a_{11;j}\bar{R}_{j1} + \sum_{j\in I_2}\frac{f_j}{\lambda_1^2}(\bar{R}_{j1})^2.
\end{aligned}$$

Descartando o terceiro termo do lado direito e substituindo esta expressão na desigualdade acima e usando (1.109), obtemos

$$\begin{aligned}
&-C - CT + \delta\lambda_1 + \sum_{j\in I_2}\frac{f_j}{\lambda_1^2}(a_{11;j})^2 + 2\sum_{j\in I_2}\frac{f_j}{\lambda_1^2}a_{11;j}\bar{R}_{j1} \\
&+\hat{C}\sum_i f_i\lambda_i^2 - \frac{1}{\lambda_1^2}\sum_{j\in I_2} f_j|a_{11;j}|^2 - |\dot{\varphi}|(C + CT) - C(1+\frac{1}{\epsilon})\beta^2 f_1 \\
&-\beta\big(\tau\psi - h'T\big) \leq 0.
\end{aligned}$$

Assim de (1.98), temos

$$\begin{aligned}
&-C - CT + \delta\lambda_1 + 2\sum_{j\in I_2}\frac{f_j}{\lambda_1}(-\dot{\varphi}\tau_j + \beta\eta_j)\bar{R}_{j1} \\
&+\hat{C}\sum_i f_i\lambda_i^2 - |\dot{\varphi}|(C + CT) - C(1+\frac{1}{\epsilon})\beta^2 f_1 - \beta\big(\tau\psi - h'T\big) \leq 0.
\end{aligned}$$

Agora, estimamos

$$2\frac{f_j}{\lambda_1}(-\dot{\varphi}\tau_j)\bar{R}_{j1} = 2\frac{f_j}{\lambda_1}\dot{\varphi}\lambda_j\eta_j\bar{R}_{j1} \geq 2\frac{f_j}{\lambda_1}\dot{\varphi}|\lambda_j||\eta_j\bar{R}_{j1}| \geq 2f_j\dot{\varphi}|\eta_j\bar{R}_{j1}|,$$

onde usamos que $\dot{\varphi} < 0$, $\lambda_j \leq \lambda_1$ e $-\lambda_j \leq \theta\lambda_1 < \lambda_1$. Podemos supor também sem perda de generalidade que

$$\lambda_1 \geq \frac{3|\eta_j \bar{R}_{j1}|}{h'}$$

para todo $j \in I_2$. Isto é equivalente a

$$\frac{h'}{3} \geq \frac{|\eta_j \bar{R}_{j1}|}{\lambda_1}$$

o que nos dar

$$-2\sum_{j\in I_2} \beta\frac{f_j}{\lambda_1}|\eta_j \bar{R}_{j1}| \geq -2\sum_{j\in I_2} \frac{\beta f_j h'}{3} = -2\frac{\beta h'}{3}T.$$

Estas desigualdades implicam que

$$\begin{aligned}&-C - CT + \delta\lambda_1 + 2\sum_{j\in I_2} f_j\dot{\varphi}|\eta_j\bar{R}_{j1}| - 2\frac{\beta h'}{3}T\\ &+\hat{C}\sum_i f_i\lambda_i^2 - |\dot{\varphi}|(C + CT) - C\big(1 + \frac{1}{\epsilon}\big)\beta^2 f_1 - \beta\big(\tau\psi - h'T\big) \leq 0.\end{aligned}$$

Como $\sum_{j\in I_2} f_j \leq T$, $|\eta_j\bar{R}_{j1}| \leq C$, $\dot{\varphi} < 0$, temos

$$-C - \big(C + C|\dot{\varphi}| + 2\beta\frac{h'}{3} - \beta h'\big)T - C\big(1 + \frac{1}{\epsilon}\big)\beta^2 f_1 + \delta\lambda_1 + \hat{C}f_1\lambda_1^2 \leq 0.$$

Escolhendo $\beta > 0$ suficientemente grande, o termo em T é positivo e pode ser descartado, o que nos permite escrever

$$-C - C_2(\beta)f_1 + \delta\lambda_1 + \hat{C}f_1\lambda_1^2 \leq 0, \tag{1.110}$$

onde C_2 depende quadraticamente de β. Dai, segue a limitação superior de λ

$$\lambda \leq \hat{\lambda}_+$$

onde

$$\hat{\lambda}_+ = \inf_{f_1}\left\{ -\frac{\delta}{2\hat{C}f_1} + \left(\frac{\delta^2 + 4\hat{C}f_1(C + C_2 f_1)}{4\hat{C}^2 f_1^2}\right)^{1/2}\right\}.$$

Novamente, cabe analisar aqui as duas possibilidades, uma segunda a qual f_1 permanece limitado de zero. A segunda em que $f_1 \to 0$. Neste segundo caso, a inequação (1.110) reduz-se a

$$\varepsilon - C + \delta\lambda_1 \leq 0$$

para algum $\varepsilon \sim 0$. Esta inequação acarreta uma limitação imediata para λ_1, visto que $\delta > 0$.

■

1.8 Prova do Teorema

Para a prova do teorema, empregamos a teoria do grau para equações elípticas não-lineares desenvolvida por Yan Yan Li [16].

Nas Seções 1.4 e 1.6 acima, provamos que funções admissíveis z, soluções da equação $\Upsilon(s, z) = 0$, para algum $0 \leq s \leq 1$, satisfazem as seguintes limitações

$$t_- < z(u) < t_+, \quad u \in M \tag{1.111}$$

e

$$|z|_2 \leq C \tag{1.112}$$

para alguma constante C que depende de n, t_-, t_+ e ψ. Então a estimativa $C^{4,\alpha}$, para algum $\alpha \in [0, 1]$, segue da estimativa (1.112) e de resultados de L. C. Evans e N. V. Krylov como expostos no Teorema 17.16 em [15]. De fato, a estimativa $C^{4,\alpha}$ provém da estimativa C^2 utilizando-se a teoria de soluções fortes de equações elípticas de segunda ordem, combinada com a teoria clássica de Schauder. Assim, temos

$$|z|_{4,\alpha} < C \tag{1.113}$$

para alguma constante $C > 0$.

Fixado α, denotamos por $C_a^{4,\alpha}(M)$ o subconjunto de $C^{4,\alpha}(M)$ consistindo de funções adimssíveis para F e definimos, como na Seção 1.2, a homotopia

$$\Upsilon(s, \cdot\,) : C_a^{4,\alpha}(M) \to C^{2,\alpha}(M), \quad 0 \leq s \leq 1 \tag{1.114}$$

por

$$\Upsilon(s, z) = F(a_{ij}(z)) - \Psi(s, z, u), \quad z = z(u) \tag{1.115}$$

e consideramos a família de equações

$$\Upsilon(s,z)=0. \tag{1.116}$$

Para aplicamos a teoria do grau, necessitamos provar certas afirmações, etapas intermediária no emprego do método.

É fácil ver, devido as estimativas C^0 e C^1, que existe $\hat{C}>0$ satifazendo

$$\hat{C}\leq\Psi(s,z(u),u)\leq\frac{1}{\hat{C}},\quad u\in M, \tag{1.117}$$

para $0\leq s\leq 1$ e toda $z\in C^{4,\alpha}(M)$ satisfazendo (1.111) e (1.113). Agora, se $z\in C_a^{4,\alpha}(M)$ é uma solução de $\Upsilon(s,z)=0$ para algum $0\leq s\leq 1$, então

$$F(a_{ij}(z))=\Psi(s,z(u),u)$$

e, obviamente,

$$\hat{C}\leq F(a_{ij}(z(u)))\leq\frac{1}{\hat{C}},\quad u\in M. \tag{1.118}$$

Além disso, podemos verificar que existe algum conjunto aberto limitado $V\subset\Gamma$ com $\bar{V}\subset\Gamma$ tal que, se

$$\hat{C}\leq f(\lambda_1(z(u)),\ldots,\lambda_n(z(u)))\leq\frac{1}{\hat{C}}$$

e $z\in C^{4,\alpha}(M)$ satisfazendo (1.111) e (1.113) então

$$\lambda(z(u))\in V. \tag{1.119}$$

Em particular, por (1.118), concluímos que a matriz $(a_{ij}(z))$ satisfaz

$$\lambda(a_{ij}(z))\in V. \tag{1.120}$$

Deste modo, definimos o conjunto aberto $\mathcal{O}$ em $C_a^{4,\alpha}(M)$ consistindo das funções admissíveis satisfazendo (1.111), (1.113) e (1.120). Portanto, a exposição imediatamente anterior mostra que qualquer solução admissível z de $\Upsilon(s,z)=0$, para algum $0\leq s\leq 1$, está contida em $\mathcal{O}$. Em particular, se consideramos a restrição

$$\Upsilon:\bar{\mathcal{O}}\subset C_a^{4,\alpha}(M)\to C^{2\,\alpha}(M), \tag{1.121}$$

então concluímos que $\Upsilon(s,z)=0$ não possui soluções em $\partial\mathcal{O}$, isto é,

$$\Upsilon(s,\,\cdot\,)^{-1}(0)\cap\partial\mathcal{O}=\emptyset,\quad 0\le s\le 1. \tag{1.122}$$

Portanto, de acordo com a Definição 2.2 em [16], o grau $\deg(\Upsilon(s,\,\cdot\,),\mathcal{O},0)$ está bem definido para todo $0\le s\le 1$.

A Proposição 1.9 consiste no fato de que $z_0=t_0$ é a única solução da equação $\Upsilon(0,z)=0$ em $C_a^{4,\alpha}(M)$. Devemos provar agora que a derivada de Frechét $\Upsilon_z(0,z_0)$, calculada em uma vizinhança de z_0, é um operador invertível de $C^{4,\alpha}(M)$ sobre $C^{2,\alpha}(M)$. Calculando

$$\Upsilon(0,\rho z_0)=F(a_{ij}(\rho z_0))-\phi(\rho t_0)k(\rho t_0)=k(\rho t_0)-\phi(\rho t_0)k(\rho t_0)$$

e usando que $\phi(t_0)=1$ e $\phi'(t_0)<0$, obtemos

$$\Upsilon_z(0,z_0)\cdot z_0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\Upsilon(0,\rho z_0)|_{\rho=1}=-\phi'(t_0)t_0k(t_0)>0$$

Por outro lado, como obviamente $\nabla' z_0=0$ e $\nabla'^2 z_0=0$, $\Upsilon_z(0,z_0)\cdot z_0$ é exatamente um múltiplo do termo de ordem zero de $\Upsilon_z(0,z_0)$. Assim, concluímos que $\Upsilon_z(0,z_0)$ é um operador elíptico negativo-definido e invertível. Finalmente, calculamos $\deg(\Upsilon(1,\,\cdot\,),\mathcal{O},0)$. Da Proposição 2.2 em [16], segue-se que $\deg(\Upsilon(s,\,\cdot\,),\mathcal{O},0)$ é independente de s. Em particular,

$$\deg(\Upsilon(1,\,\cdot\,),\mathcal{O},0)=\deg(\Upsilon(0,\,\cdot\,),\mathcal{O},0).$$

Por outro lado, como já mencionado, a equação $\Upsilon(0,z)=0$ possui uma única solução admissível z_0 e o operador linearizado $\Upsilon_z(0,z_0)$ é invertível. Portanto, pela Proposição 2.3 em [16], obtemos

$$\deg(\Upsilon(0,\,\cdot\,),\mathcal{O},0)=\deg(\Upsilon_z(0,z_0),\mathcal{O},0).$$

Portanto, uma vez que

$$\deg(\Upsilon_z(0,z_0),\mathcal{O},0)=\pm1,$$

temos

$$\deg(\Upsilon(1,\,\cdot\,),\mathcal{O},0)\neq 0.$$

Potanto, a equação $\Upsilon(1,z)=0$ possui pelo menos uma solução $z\in\mathcal{O}$. Isto completa a prova do Teorema 1.1.

1.9 Apêndice

Yan Yan Li em [16] demonstra, seguindo o artigo [12], a existência de um número inteiro, invariante por homotopia, associado a problemas elípticos totalmente não-lineares.

Apresentamos sucintamente a seguir a construção do grau empreendida em [16]. Iniciamos considerando uma variedade riemanniana, M, compacta n-dimensional e um operador diferencial

$$G : \mathcal{O} \subset C^{4,\alpha}(M) \to C^{2,\alpha}(M) \tag{1.123}$$

definido em um subconjunto aberto e limitado $\mathcal{O}$ de $C^{4,\alpha}(M)$. Mais precisamente, consideramos uma aplicação $g \in C^{3,\alpha}(M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2})$ e escrevemos

$$G[z] = g(u, z, \nabla' z, \nabla'^2 z), \quad z \in \mathcal{O}, \tag{1.124}$$

onde $\nabla' z$ e $\nabla'^2 z$ denotam o gradiente e o hessiano de $z \in \mathcal{O}$. Definimos, então, o isomorfismo linear $S : C^{2,\alpha}(M) \to C^{\alpha}(M)$ por

$$S[z] = -\Delta z + z \tag{1.125}$$

e a composição $\tilde{G} = S \circ G$, ou seja, o operador $\tilde{G} : \mathcal{O} \subset C^{4,\alpha}(M) \to C^{\alpha}(M)$

$$\tilde{G}[z] = -\Delta G[z] + G[z]. \tag{1.126}$$

Observamos que $\tilde{G}[z]$ pode ser localmente escrito na forma

$$\tilde{G}[z] = a^{kl}(u, z, \nabla' z, \nabla'^2 z) z^i_{k;li} + C_0(u, z, \nabla' z, \nabla'^2 z, \nabla'^3 z), \tag{1.127}$$

onde $z^i_{k;li} = \sigma^{ij} z_{k;lij}$, os coeficientes a^{kl} são dados por

$$a^{kl}(u, z, \nabla' z, \nabla'^2 z) = -g_{kl}(u, z, \nabla' z, \nabla'^2 z) \tag{1.128}$$

onde g_{kl} denota a derivada parcial $\frac{\partial g}{\partial r_{kl}}$ de g com respeito a uma das últimas n^2 entradas (correspondentes ao hesssiano de z). Finalmente, C_0 é um operador diferencial contínuo de terceira ordem. Fixado $z \in \mathcal{O}$, definimos o operador $L_z : C^{4,\alpha}(M) \to C^{\alpha}(M)$ do seguinte modo

$$L_z[w] = a^{kl}(u, z, \nabla' z, \nabla'^2 z) w^i_{k;li} + C_0(u, z, \nabla' z, \nabla'^2 z, \nabla'^3 z). \tag{1.129}$$

Por definição, temos $L_z[z] = \tilde{G}[z]$. Por fim, fixado um número real N, definimos $C_z^N : C^{4,\alpha}(M) \to C^\alpha(M)$ como o operador compacto

$$C_z^N[w] = N\big(\Delta w - w\big) + C_0(u, z, \nabla' z, \nabla'^2 z, \nabla'^3 z). \tag{1.130}$$

A compacidade segue do fato de atuarmos com um operador diferencial de segunda ordem em funções em um conjunto limitado de $C^{4,\alpha}(M)$ e do Teorema de Ascoli-Arzelá aplicado a imersão $C^{4,\alpha}(M) \subset C^{2,\alpha}(M)$. Agora, escrevemos

$$L_z = M_z^N + C_z^N, \tag{1.131}$$

onde $M_z^N : C^{4,\alpha}(M) \to C^\alpha(M)$ é dado por

$$M_z^N[w] = a^{kl}(u, z, \nabla' z, \nabla'^2 z) w^i_{k;li} + N\big(- \Delta w + w\big). \tag{1.132}$$

Por estarmos considerando operadores elípticos negativos definidos, supomos a matriz (a^{kl}) positiva-definida. Desta formam enunciamos o seguinte resultado demonstrado em [16], o qual apresentamos de modo ligeiramente distinto.

Teorema 1.12. *(Theorem 2.1 em [16]) Seja $\beta > 0$ tal que*

$$a^{kl}(u, z(u), \nabla' z(u), \nabla'^2 z(u))\, \xi_k \xi_l \geq \beta |\xi|^2$$

para todo vetor $\xi \in \mathbb{R}^n$ e todo ponto $u \in M$. Existe uma constante N_0, dependendo da norma $C^{1,\alpha}$ da matriz (a^{kl}), de β e n, tal que, para todo número real $N > N_0$, o operador $M_z^N : C^{4,\alpha}(M) \to C^\alpha(M)$ é um isomorfismo.

A idéia por trás da demonstração deste teorema é, inicialmente, usar o fato de que M_z^N tem o mesmo índice que o operador de Fredholm de índice zero

$$w \mapsto \Delta^2 w - \Delta w + w. \tag{1.133}$$

Deste modo, para verificar que, para N suficientemente grande, M_z^N é um isomorfismo, é suficiente demonstrar que é injetivo. Para tanto, estima-se por integração por partes, para uma dada constante N_0,

$$\begin{aligned} \int M_z^N[w] S[w] \;&\geq\; \frac{\beta}{2} \int |\nabla \Delta w|^2 + (N - N_0) \int |\Delta w|^2 \\ &+\; (N - N_0) \int |\nabla w|^2 + (N - N_0) \int w^2, \end{aligned}$$

o que garante, graças ao fato de que S é um isomorfismo, que $w = 0$ se $M_z^N[w] = 0$ para $N > N_0$.

Observamos que, graças ao fato de que S é um isomorfismo, temos $G[z] = 0$ para algum $z \in \bar{\mathcal{O}}$ se, e somente se, $\tilde{G}[z] = 0$ e, portanto, se, e somente se, $z + (M_z^N)^{-1} C_z^N[z] = 0$. Utilizando o fato de que $(M_z^N)^{-1} \circ C_z^N$ é um operador compacto, para $N > N_0$, definimos, seguindo [16],

Definição 1.13. *(Definition 2.2 em [16]). Seja $G : \mathcal{O} \subset C^{4,\alpha}(M) \to C^{2,\alpha}(M)$ um operador elíptico, onde $\mathcal{O} \subset C^{4,\alpha}(M)$ é um subconjunto aberto e limitado. Suponhamos que $\partial\mathcal{O} \cap G^{-1}(0) = \emptyset$. Definimos o grau de F no conjunto $\mathcal{O}$ em 0 por*

$$\deg(G, \mathcal{O}, 0) := \deg_{L.S.}(z \mapsto z + (M_z^N)^{-1} C_z^N[z], \mathcal{O}, 0), \tag{1.134}$$

onde $N > N_0$ e e $\deg_{L.S.}$ denota o grau de Leray-Schauder.

Justificamos a definição acima fazendo as seguintes observações, como em [16]:

- A aplicação $z \mapsto z + (M_z^N)^{-1} C_z^N[z]$ é da forma $Id + Compacto : \mathcal{O} \to C^{4,\alpha}(M)$. Assim, podemos definir o grau de Leray-Schauder desta aplicação.
- O grau definido acima é independente da escolha de $N > N_0$, de acordo com a invariância por homotopia do grau de Leray-Schauder.

O grau definido acima possui a seguinte propriedade, demonstradas em [16] e baseada nos fato análogo - a invariância por homotopia - para a teoria do grau clássica.

Proposição 1.14. *(Proposition 2.2 em [16]) Seja $\mathcal{O} \subset C^{4,\alpha}(M)$ um subconjunto aberto e limitado. Considere uma aplicação*

$$H \in C([0,1] \times M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}),$$

tal que $s \mapsto H(s, \cdot)$ é contínua de $[0,1]$ em $C^{3,\alpha}(M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2})$. Suponhamos que exista $\beta > 0$ tal que, dados $z \in \mathcal{O}$, $u \in M$, $s \in [0,1]$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$ quaisquer, temos

$$-\frac{\partial H}{\partial r_{kl}}(s, u, z(u), \nabla' z(u), \nabla'^2 z(u))\xi_k \xi_l \geq \beta |\xi|^2.$$

Além disso, admitamos que, para todo $z \in \partial\mathcal{O}$ e para $0 \leq s \leq 1$ qualquer,

$$H(s, \cdot, z, \nabla' z, \nabla'^2 z) \neq 0 \in C^{2,\alpha}(M).$$

Sendo assim,

$$\deg(z \mapsto H(0, \cdot, z, \nabla' z, \nabla'^2 z), \mathcal{O}, 0) = \deg(z \mapsto H(1, \cdot, z, \nabla' z, \nabla'^2 z), \mathcal{O}, 0). \tag{1.135}$$

A propriedade fundamental que relaciona o grau de operadores não-lineares ao grau de seu linearizado é a seguinte.

Proposição 1.15. *(Proposition 2.3 em [16]). Seja $G : C^{4,\alpha}(M) \to C^{2,\alpha}(M)$ um operador elíptico em uma vizinhança de z_0 tal que $G[z_0] = 0$. Suponhamos que G é Frechét diferenciável em z_0 com derivada $G_z(z_0)$ invertível. Então z_0 é um ponto isolado de $G^{-1}(0)$. Além disto,*

$$\deg(G, \mathcal{O}, 0) = \deg(G_z(z_0), \mathcal{O}, 0), \tag{1.136}$$

onde $\mathcal{O}$ é qualquer vizinhança aberta de z_0 em $C^{4,\alpha}(M)$ que não contém qualquer outro ponto de $G^{-1}(0)$ além de z_0 e na qual G é elíptico.

Finalmente, enunciamos o seguinte cálculo do grau do operador linearizado $G_z(z_0)$. Observamos que, em termos da notação fixada acima neste apêndice, temos

$$\begin{aligned} G_z(z_0) \cdot w &= -a^{kl}(u, z_0(u), \nabla' z_0(u), \nabla'^2 z_0(u)) w_{k;l} \\ &+ b^k(u, z_0(u), \nabla' z_0(u), \nabla'^2 z_0(u)) w_k \\ &+ c(u, z_0(u), \nabla' z_0(u), \nabla'^2 z_0(u)) w, \end{aligned} \tag{1.137}$$

onde $b^k = \frac{\partial g}{\partial p_k}(u, z_0, \nabla' z_0, \nabla'^2 z_0)$ e $c = \frac{\partial g}{\partial z}(u, z_0, \nabla' z_0, \nabla'^2 z_0)$. Aqui, denotamos por p_k uma das entradas em g referentes ao gradiente.

Proposição 1.16. *(Proposition 2.4 em [16]). Suponhamos que $G_z(z_0) \cdot z_0 \neq 0$. Neste caso,*

$$\deg(G_z(z_0), \mathcal{O}, 0) = \sum_{\lambda_i < 0} (-1)^{\beta_i},$$

onde λ_i é um autovalor negativo de $G_z(z_0)$ com multiplicidade algébrica β_i. Desta vez, $\mathcal{O}$ é um aberto qualquer em $C^{4,\alpha}(M)$ contendo z_0.

Empregamos, todavia, um outro expediente para calcular o grau do operador linearizado. Procedendo como acima, verificamos que $\deg(G_z(z_0), \mathcal{O}, 0)$ é definido como o grau de Leray-Schauder de um dado operador da forma $I-K$, onde K é compacto. De fato, podemos ver isto diretamente, multiplicando $G_z(z_0)$ pela inversa da parte principal. De todo modo, temos

$$\deg_{L.S.}(I - K, \mathcal{O}, 0) = (-1)^{\sum_{\mu_i > 1} \gamma_i}, \tag{1.138}$$

onde μ_i são os autovalores de K maiores que 1 com multiplicidade algébrica γ_i. Aqui, $\mathcal{O}$ é uma vizinhança aberta limitada de z_0 a qual não contém soluções de $G_z(z_0) \cdot w = 0$. Para uma demonstração deste fato, remetemos o leitor a referência [20]. Com isto, concluímos que

$$\deg(G_z(z_0), \mathcal{O}, 0) = \pm 1. \tag{1.139}$$

Capítulo 2

Gráficos de Killing Conformes com Curvatura Prescrita

2.1 Introdução

O espaço ambiente que ora consideramos é uma variedade riemanniana completa $\bar{M}^{n+1}$ dotada de um campo vetorial conforme Y. Isto significa que existe uma função $\rho \in C^\infty(\bar{M})$ tal que

$$\pounds_Y g = 2\rho g, \tag{2.1}$$

onde g representa a métrica em $\bar{M}$. Supomos que não existem pontos singulares de Y em $\bar{M}$. Deste modo, a correspondência

$$\bar{u} \in \bar{M} \mapsto \ker \omega_u,$$

onde ω é a 1-forma metricamente equivalente a Y, define uma distribuição que denotamos por $\mathcal{D}$. Supomos que $\mathcal{D}$ é integrável. Neste caso, as variedades integrais de $\mathcal{D}$ constituem uma folheação de $\bar{M}$ por hipersuperfícies umbílicas. Fixada uma destas variedades integrais, que denotamos por M, o fluxo gerado por Y, com valores iniciais em M, será denotado por $\Phi : \mathbb{R}\times M \to \bar{M}$. Fixado $t \in \mathbb{R}$, a aplicação $\Phi_t = \Phi(t, \cdot\,)$ é uma aplicação localmente conforme. Por definição, as folhas integrais de $\mathcal{D}$ coincidem com as hipersuperfíces de nível $M_t = \{\Phi_t(u) : u \in M\}$. Representamos por $\kappa(t, u)$ o valor das curvaturas principais de M_t.

Supomos que M é compacta. Dada uma função z definida em M, o *gráfico de Killing conforme* de z é a hipersuperfície em $\bar{M}$ dada por

$$\Sigma = \{X(u) = \Phi(z(u), u) : \quad u \in M\}. \tag{2.2}$$

Tal gráfico pode ser globalmente orientado por um campo vetorial unitário N satisfazendo $\langle N, Y\rangle < 0$. Com respeito a esta orientação, λ é o vetor cujos componentes λ_i são as curvaturas principais de Σ. Por definição, estas são os autovalores da segunda forma fundamental $B = -\langle dN, dX\rangle$ de Σ.

No que segue, Γ representa um cone aberto e convexo em $\mathbb{R}^n$ com vértice na origem e contendo o cone positivo. Supomos que Γ é simétrico com respeito as coordenadas de seus pontos. Representamos por f uma função diferenciável, positiva, côncava e definida em Γ. Supomos que f é simétrica em λ_i e que suas derivadas satisfazem $f_i > 0$ em Γ.

Definimos uma função F no espaço das matrizes simétricas $n \times n$ por $F(B) = f(\lambda)$ e escrevemos

$$F(B(X(u))) = f(\lambda(X(u))),$$

quando a função z é suposta *admissível*, ou seja, quando $\lambda(X(u)) \in \Gamma$, para todo $u \in M$. Finalmente, dada uma função positiva diferenciável $\psi : \bar{M} \to \mathbb{R}$, consideramos o problema de encontrar-se uma função admissível z que seja solução da seguinte equação

$$F(B(X(u))) = \psi(X(u)), \quad u \in M. \tag{2.3}$$

Naturalmente, é necessário impor algumas condições adicionais sobre a geometria do ambiente e na estrutura das funções f e ψ a fim de prover uma solução para (2.3). Concernente a geometria do ambiente, supomos que as folhas M_t são convexas na média com respeito ao campo vetorial unitário normal interior $-Y$. Isto é equivalente a

$$\kappa(t, u) > 0, \quad t \in \mathbb{R}, u \in M. \tag{2.4}$$

Além disso, consideramos a situação particular em que κ depende unicamente de t, ou seja, em que a curvatura das folhas não depende do ponto. Finalmente, supomos que as linhas de fluxo de Y podem ser reparametrizadas como geodésicas. Como demonstrado adiante, estas hipóteses implicam que $\bar{M}$ é, de fato, localmente isométrica a um espaço *warped*.

Com respeito a função f, supomos que existe uma função contínua estritamente crescente δ satisfazendo $f_i > 0$,

$$\sum_i f_i \geq \delta(f), \quad \sum_i f_i\lambda_i \geq \delta(f) \tag{2.5}$$

e $\delta(f) > 0$ sempre que $f \geq c_0 > 0$, para alguma constante positiva c_0. Denotando $\psi_0 = \inf \psi$, supomos, por fim, que

$$\limsup_{\lambda \to \partial\Gamma} f(\lambda) \leq \bar{\psi}_0, \tag{2.6}$$

para alguma constante $\bar{\psi}_0 < \psi_0$. Denotamos $k(t) = f(\kappa(t))$ e definimos $h(t)$ por $\kappa(t) = h'(t)/|Y|h(t)$. Seguindo esta notação, enunciamos o principal resultado desta parte da tese.

Teorema 2.1. *Considere $(\bar{M}, g)$ variedade riemanniana dotada de um campo Killing conforme Y tal que*

$$\pounds_Y g = \rho g, \tag{2.7}$$

para alguma função ρ em $\bar{M}$. Supomos que a distribuição

$$\mathcal{D}(\bar{u}) = \ker g|_{\bar{u}}(Y, \cdot) \tag{2.8}$$

é integrável, com folhas integrais compactas, cujas curvaturas principais são constantes. Finalmente, admitimos que as curvas integrais

$$t \mapsto \Phi_t(u), \quad t \in \mathbb{R}, u \in M \tag{2.9}$$

de Y são pré-geodésicas. Admitimos, ainda, as hipóteses (2.4)-(2.6)*. Dados t_-, t_+, com $t_- < t_+$, seja $\bar{M}_{t_-,t_+} = \{\Phi(t,u) : t_- \leq t \leq t_+, u \in M\}$ e suponha que ψ satisfaz as condições*

a) $\psi(t,u) > k(t)$, para $t \leq t_-$,

b) $\psi(t,u) < k(t)$, para $t \geq t_+$,

c) $\partial_t(h(t)\psi) \leq 0$.

Então, existe uma função diferenciável $z : M^n \to I$ satisfazendo

$$F(B(X(u))) - \psi(X(u)) = 0. \tag{2.10}$$

Visto que o ambiente que consideramos é, sob as hipóteses geométricas acima, localmente isométrico a um espaço warped, podemos entender este resultado de existência como uma extensão daquele apresentado na parte precedente da tese.

Em resumo, esta segunda parte está organizada do seguinte modo. Nas Seções 2.2 e 2.3, fixamos a notação e indicamos alguns fatos geométricos e analíticos. Na Seção 2.4, mostramos que, sob as hipóteses do Teorema 2.1, a solução do problema permanece na região $\bar{M}_{t_-,t_+}$. Na seção seguinte, calculamos o gradiente e o hessiano de funções que se assemelham as clássicas funções altura e suporte. A estimativa do gradiente é obtida na Seção 2.6. A estimativa do hessiano, dada a completa similitude com aquela exposta na primeira parte, é apenas esboçada. A aplicação da teoria do grau, última etapa da prova, é omitida para evitar redundância.

2.2 Preliminares

Fixado $t \in \mathbb{R}$, a aplicação $\Phi_t = \Phi(t, \cdot)$ é localmente conforme, ou seja, existe uma função diferenciável h definida em um aberto de $\bar{M}$ tal que

$$\langle \Phi_{t*}(u) \cdot V, \Phi_{t*}(u) \cdot W \rangle_{\Phi_t(u)} = h^2(\Phi_t(u)) \langle V, W \rangle|_u, \tag{2.11}$$

onde $u \in M$ e V, W são campos vetoriais em $\bar{M}$. Mais concisamente, temos

$$\Phi_t^* g(u) = h^2(t, u) g(u). \tag{2.12}$$

Agora, deduzimos a relação entre h e ρ. Denotamos $\bar{u} = \Phi_t(u)$. Dado um vetor U tangente a $\bar{M}$ em u, seja $V = \Phi_{t*}(u) \cdot U$ vetor tangente a $\bar{M}$ em $\bar{u}$. Assim, calculamos o lado esquerdo da equação

$$\pounds_Y g|_{\bar{u}}(V, V) = 2\rho(\bar{u}) g|_{\bar{u}}(V, V) \tag{2.13}$$

do seguinte modo

$$\begin{aligned}
\pounds_Y g|_{\bar{u}}(V, V) &= \lim_{s \to 0} \frac{g|_{\Phi_s(\bar{u})}(\Phi_{s*}(\bar{u}) \cdot V, \Phi_{s*}(\bar{u}) \cdot V) - g|_{\bar{u}}(V, V)}{s} \\
&= \lim_{s \to 0} \frac{g|_{\Phi_{s+t}(u)}(\Phi_{s+t*}(u) \cdot U, \Phi_{s+t*}(u) \cdot U) - g|_{\Phi_t(u)}(\Phi_{t*}(u) \cdot U, \Phi_{t*}(u) \cdot U)}{s} \\
&= \lim_{s \to 0} \frac{\Phi_{s+t}^* g|_u(U, U) - \Phi_t^* g|_u(U, U)}{s} \\
&= \lim_{s \to 0} \frac{h^2(t+s, u) - h^2(t, u)}{s} \, g|_u(U, U) \\
&= 2h(t, u) \frac{\partial h}{\partial t}(t, u) \, g|_u(U, U).
\end{aligned}$$

Entretanto

$$g|_{\bar{u}}(V,V) = g|_{\Phi_t(u)}(\Phi_{t*}(u)\cdot U, \Phi_{t*}(u)\cdot U) = \Phi_t^* g|_u(U,U) = h^2(t,u) g|_u(U,U).$$

Combinando estas expressões, concluímos que

$$\pounds_Y g|_{\bar{u}}(V,V) = 2h(t,u)\frac{\partial h}{\partial t}(t,u)\,\frac{1}{h^2(t,u)} g|_{\bar{u}}(V,V) = \frac{1}{h(t,u)}\frac{\partial h}{\partial t}(t,u) g|_{\bar{u}}(V,V).$$

Isto significa que

$$\rho(t,u) = \frac{\partial_t h}{h}(t,u). \tag{2.14}$$

Finalmente, usando o fato de que o fluxo preserva o campo Y, demonstramos que

$$|Y(t,u)|^2 = h^2(t,u)|Y(u)|^2. \tag{2.15}$$

De fato, uma vez que $\Phi_{s+t} = \Phi_s \Phi_t$, calculamos

$$\begin{aligned} \Phi_{t*}(u)\cdot Y(u) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|_{s=0}\Phi_t(\Phi_s(u)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|_{s=0}\Phi_{s+t}(u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|_{s=0}\Phi_s(\Phi_t(u)) \\ &= Y(\Phi_t(u)) = Y(t,u) \end{aligned}$$

e, portanto, (2.15) segue imediatamente da expressão (2.11) aplicada ao próprio campo Y. Denotamos por $\bar{\nabla}$ a conexão riemanniana associada à métrica g em $\bar{M}$. A definição de derivada de Lie de tensores acarreta que

$$\pounds_Y g(V,W) = Y\langle V,W\rangle - \langle [Y,V],W\rangle - \langle V,[Y,W]\rangle,$$

onde V,W são campos vetoriais em $\bar{M}$. Portanto, da definição de campo de Killing conforme, resulta que

$$\begin{aligned} 2\rho\langle V,W\rangle &= \langle \bar{\nabla}_Y V, W\rangle + \langle V, \bar{\nabla}_Y W\rangle - \langle \bar{\nabla}_Y V - \bar{\nabla}_V Y, W\rangle \\ &- \langle V, \bar{\nabla}_Y W - \bar{\nabla}_W Y\rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_V Y, W\rangle + \langle V, \bar{\nabla}_W Y\rangle. \end{aligned}$$

Deduzimos, deste modo, a equação de Killing conforme

$$\langle \bar{\nabla}_V Y, W\rangle + \langle V, \bar{\nabla}_W Y\rangle = 2\rho\langle V,W\rangle. \tag{2.16}$$

A hipótese de integrabilidade da distribuição $\bar{u} \in \bar{M} \mapsto \mathcal{D}(\bar{u})$ implica que as folhas integrais M_t são totalmente umbílicas. De fato, dados dois campos

V, W tangentes à distribuição $\mathcal{D}$, a condição de integrabilidade de Frobenius implica que $\mathrm{d}\omega(V,W) = 0$ e, portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}\omega(V,W) = V(\omega(W)) - W(\omega(V)) - \omega([V,W]) \\ &= V(\langle Y, W\rangle) - W(\langle Y, V\rangle) - \langle Y, [V,W]\rangle \\ &= \langle \bar\nabla_V Y, W\rangle + \langle Y, \bar\nabla_V W\rangle - \langle \bar\nabla_W Y, V\rangle - \langle Y, \bar\nabla_W V\rangle - \langle Y, [V,W]\rangle \\ &= \langle \bar\nabla_V Y, W\rangle - \langle \bar\nabla_W Y, V\rangle. \end{aligned}$$

Deste cálculo e de (2.16), temos

$$\langle \bar\nabla_V Y, W\rangle = \rho\langle V, W\rangle, \tag{2.17}$$

para qualquer par de vetores V, W tangentes às folhas integrais. Portanto

$$\langle \bar\nabla_V W, \frac{Y}{|Y|}\rangle = -\frac{\rho}{|Y|}\langle V, W\rangle, \tag{2.18}$$

o que implica que as folhas integrais são umbílicas e têm curvaturas principais dadas por $\rho/|Y|$ com respeito a orientação $-Y/|Y|$. Considerando a relação obtida acima entre as funções ρ e h, as curvaturas principais podem igualmente ser expressas por

$$\kappa(t,u) = \frac{h_t}{h}\frac{1}{|Y|}. \tag{2.19}$$

A partir do fluxo $\Phi : \mathbb{R} \times M \to \bar M$ gerado por Y, podemos considerar um sistema de coodenadas locais em $\bar M$ como segue. Seja $x^1, \ldots, x^n$ um sistema de coordenadas locais em torno de um dado ponto $u \in M$. Então, a um ponto $\bar u \in \bar M$ da forma $\bar u = \Phi(t,u)$, associamos as coordenadas

$$\bar u \mapsto (t, x^1, ..., x^n) \tag{2.20}$$

caso $x^1, \ldots, x^n$ sejam as coordenadas de $u \in M$. Os campos coordenados correspondentes são dados por

$$\partial_0|_{\bar u} = Y(\bar u), \quad \partial_i|_{\bar u} = \Phi_{t*} \cdot \partial_i|_u. \tag{2.21}$$

As componentes da métrica ambiente, que ora denotamos por $\mathrm{d}s^2$, são dados em termos do sistema de coordenadas definido acima por

$$\hat\sigma_{00} = \langle \partial_0, \partial_0\rangle = |Y|^2, \quad \hat\sigma_{0i} = \langle \partial_0, \partial_i\rangle = 0 \tag{2.22}$$

e

$$\hat{\sigma}_{ij}|_{\bar{u}} = \langle \Phi_{t*} \cdot \partial_i, \Phi_{t*} \cdot \partial_j \rangle = h^2(\bar{u}) \langle \partial_i, \partial_j \rangle = h^2(t,u)\sigma_{ij}|_u, \tag{2.23}$$

onde σ_{ij} são as componentes da métrica $\mathrm{d}\sigma^2$ em M em termos das coordenadas x^i. Deste modo, se denotarmos $|Y|^2 = \gamma^{-1}$, resulta que

$$\mathrm{d}s^2 = \gamma^{-1}(t,u)\mathrm{d}t^2 + h^2(t,u)\mathrm{d}\sigma^2. \tag{2.24}$$

Alternativamente, uma vez que $|Y|^2(t,u) = h^2(t,u)|Y|^2$, podemos escrever

$$\mathrm{d}s^2 = h^2(t,u)\big(\gamma^{-1}(u)\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\sigma^2\big). \tag{2.25}$$

Em particular, o gradiente da função t é dado por

$$\bar{\nabla} t = \hat{\sigma}^{ij}\partial_i t \partial_j = \hat{\sigma}^{00}\partial_0 = |Y|^{-2}Y =: \gamma Y.$$

Deste modo, as hipersuperfícies de nível M_t são folhas perpendiculares ao campo $\bar{\nabla} t = \gamma Y$.

2.3 Gráficos de Killing Conformes

O gráfico de Killing conforme Σ associado a uma função $z : M \to \mathbb{R}$ é a hipersuperfície dada por

$$\Sigma = \{X(u) = \Phi(z(u), u) : \quad u \in M\}. \tag{2.26}$$

Podemos considerar Σ como o lugar geométrico definido por

$$\zeta(t,u) = z(u) - t = 0. \tag{2.27}$$

Nas coordenadas $t, x^1 \ldots, x^n$ definidas acima, temos a seguinte parametrização de Σ

$$X(u) \in \Sigma \mapsto \big(z(x^1, \ldots, x^n), x^1, \ldots, x^n\big). \tag{2.28}$$

Obtemos, deste modo, a seguinte base para o espaço tangente a Σ no ponto $X(u)$

$$X_i = z_i \partial_0|_{X(u)} + \partial_i|_{X(u)}, \tag{2.29}$$

onde $z_i = \frac{\partial z}{\partial x^i}$. Logo, a métrica induzida em Σ tem componentes dadas por

$$g_{ij} = h^2(z(u),u)\sigma_{ij}(u) + \gamma^{-1}(z(u),u)z_i z_j = h^2(t,u)\bigg(\sigma_{ij}(u) + \frac{z_i z_j}{\gamma(u)}\bigg).$$

Denotando, para uma função β a determinar,

$$g^{ij} = \frac{1}{h^2(t,u)}\big(\sigma^{ij} + \beta z^i z^j\big), \tag{2.30}$$

temos

$$\delta^i_k = g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k + \gamma^{-1}(u) z^i z_k + \beta z^i z_k + \beta\gamma^{-1}(u) z^i |\nabla' z|^2 z_k, \tag{2.31}$$

onde $\nabla' z = \sigma^{ij} z_i e_j = z^j e_j$ é o gradiente de z calculado com respeito a métrica $d\sigma^2$ em M. Portanto,

$$\gamma^{-1}(u) + \beta + \beta\gamma^{-1}(u)|\nabla' z|^2 = 0, \tag{2.32}$$

ou seja,

$$\beta = \frac{-1}{\gamma(u) + |\nabla' z|^2}.$$

Sendo assim, resta concluirmos que

$$g^{ij}|_{X(u)} = \frac{1}{h^2(z(u),u)}\left(\sigma^{ij}(u) - \frac{z^i z^j}{\gamma(u) + |\nabla' z|^2}\right). \tag{2.33}$$

Uma orientação para Σ pode ser dada pelo campo vetorial

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}\zeta|_{X(u)} &= \hat{\sigma}^{00}\zeta_t \partial_0|_{X(u)} + \hat{\sigma}^{ij}\zeta_i \partial_j|_{X(u)} \\
&= -\gamma(z(u),u)\partial_0|_{X(u)} + h^{-2}(t,u)\sigma^{ij}(u) z_i \partial_j|_{X(u)} \\
&= -\gamma(z(u),u)\partial_0|_{X(u)} + h^{-2}(t,u) z_j \Phi_{z(u)\,*}(u)\cdot \partial_j|_u \\
&= -\gamma(z(u),u)\partial_0|_{X(u)} + h^{-2}(t,u) \Phi_{z(u)\,*}(u)\cdot z^j \partial_j|_u \\
&= -\gamma(z(u),u)\partial_0|_{X(u)} + h^{-2}(t,u) \Phi_{z(u)\,*}(u)\cdot \nabla' z(u).
\end{aligned}$$

Então, orientamos Σ pelo campo vetorial unitário dado por

$$N = \frac{1}{W}\bar{\nabla}\zeta, \tag{2.34}$$

onde

$$\begin{aligned}
W^2 &= |\bar{\nabla}\zeta|^2 = \langle \gamma\partial_0, \gamma\partial_0\rangle|_{X(u)} + h^{-4}(t,u)\langle \Phi_{z(u)\,*}\cdot\nabla' z(u), \Phi_{z(u)\,*}\cdot \nabla' z(u)\rangle \\
&= \gamma^2(z(u),u)|Y|^2(z(u),u) + h^{-2}(t,u)|\nabla' z(u))|^2 \\
&= \gamma(z(u),u) + h^{-2}(t,u)|\nabla' z(u)|^2 \\
&= \frac{1}{h^2(t,u)}\big(\gamma(u) + |\nabla' z(u)|^2\big).
\end{aligned}$$

Infere-se imediatamente destes cálculos que

$$\langle Y, N\rangle = -\frac{1}{W} < 0 \tag{2.35}$$

e, além disso, que

$$g^{ij}(\bar{u}) \;=\; \frac{1}{h^2}\bigg(\sigma^{ij} - \frac{z^i z^j}{h^2 W^2}\bigg). \tag{2.36}$$

Agora, obtemos uma expressão explícita para a segunda forma fundamental do gráficos de Killing conforme Σ usando as coodenadas $t, x^1, \ldots, x^n$ definidas acima. Como o campo vetorial $\bar{\nabla}\zeta$ é normal a Σ, as componentes da segunda forma fundamental são dadas por

$$a_{ij} = \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, N\rangle = \frac{1}{W}\langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, \bar{\nabla}\zeta\rangle. \tag{2.37}$$

Entretanto, calculamos

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{X_i} X_j &= \bar{\nabla}_{z_i\partial_0+\partial_i}\big(z_j\partial_0 + \partial_j\big) = z_{ij}\partial_0 + z_j\bar{\nabla}_{X_i}\partial_0 + z_i\bar{\nabla}_{\partial_0}\partial_j + \bar{\nabla}_{\partial_i}\partial_j\\ &= z_{ij}\partial_0 + z_j z_i\bar{\nabla}_{\partial_0}\partial_0 + z_j\bar{\nabla}_{\partial_i}\partial_0 + z_i\bar{\nabla}_{\partial_0}\partial_j + \bar{\nabla}_{\partial_i}\partial_j.\end{aligned}$$

Considerando que

$$\bar{\nabla}\zeta = -\gamma(z(u), u)\partial_0|_{X(u)} + h^{-2}(t,u)\Phi_{z(u)\,*}(u)\cdot\nabla' z(u),$$

obtemos

$$\begin{aligned}&Wa_{ij} = -\gamma z_{ij}\langle\partial_0,\partial_0\rangle - \gamma z_j z_i\langle\bar{\nabla}_{\partial_0}\partial_0,\partial_0\rangle - \gamma z_j\langle\bar{\nabla}_{\partial_i}\partial_0,\partial_0\rangle - \gamma z_i\langle\bar{\nabla}_{\partial_j}\partial_0,\partial_0\rangle\\ &-\gamma\langle\bar{\nabla}_{\partial_i}\partial_j,\partial_0\rangle + h^{-2}z_j z_i\langle\bar{\nabla}_{\partial_0}\partial_0,\Phi_*\,\nabla' z\rangle + h^{-2}z_j\langle\bar{\nabla}_{\partial_i}\partial_0,\Phi_*\,\nabla' z\rangle\\ &+h^{-2}z_i\langle\bar{\nabla}_{\partial_0}\partial_j,\Phi_*\,\bar{\nabla}' z\rangle + h^{-2}\langle\bar{\nabla}_{\partial_i}\partial_j,\Phi_*\,\nabla' z\rangle.\end{aligned}$$

Doravante, supomos que $h(t,u) = h(t)$. Isto acarreta que duas folhas integrais quaisquer estão munidas de métricas homotéticas. Mais precisamente, dados $u \in M$ e $\bar{u} = \Phi_t(u) \in M_t$, temos

$$\hat{\sigma}_{ij}|_{\bar{u}} = \langle\partial_i|_{\bar{u}},\partial_j|_{\bar{u}}\rangle = h^2(t)\langle\partial_i|_u,\partial_j|_u\rangle = h^2(t)\sigma_{ij}|_u. \tag{2.38}$$

Neste caso, as conexões riemannianas induzidas em M e M_t são determinadas pelos mesmos símbolos de Christoffel. Em particular, uma vez que $\Phi_{z(u)\,*}(u)\cdot\nabla' z(u)$ é tangente a $M_{z(u)}$, concluímos que

$$\begin{aligned}&\langle\bar{\nabla}_{\partial_i}\partial_j|_{X(u)},\Phi_{z(u)\,*}(u)\cdot\nabla' z(u)\rangle = \langle\Phi_{z(u)\,*}(u)\cdot\bar{\nabla}_{\partial_i}\partial_j|_u,\Phi_{z(u)\,*}(u)\cdot\nabla' z(u)\rangle\\ &= h^2(t)\langle\bar{\nabla}_{\partial_i}\partial_j|_u,\nabla' z|_u\rangle = h^2(t)\langle\nabla'_{\partial_i}\partial_j|_u,\nabla' z|_u\rangle.\end{aligned}$$

Agora, observamos que, graças a umbilicidade das folhas M_t, resulta que

$$\begin{aligned}\langle\bar{\nabla}_{\partial_i}\partial_j,\partial_0\rangle &= -\rho\langle\partial_i|_{X(u)},\partial_j|_{X(u)}\rangle = -\rho(z(u),u)h^2(z(u))\sigma_{ij}|_u\\ &= -h(z(u))h_t(z(u))\sigma_{ij}|_u.\end{aligned}$$

Analogamente, calculamos

$$\begin{aligned}\langle\bar{\nabla}_{\partial_i}\partial_0,\Phi_*\nabla' z\rangle &= \langle\bar{\nabla}_{\partial_i}\partial_0|_{X(u)},z^j\partial_j|_{X(u)}\rangle = z^j\rho\langle\partial_i|_{X(u)},\partial_j|_{X(u)}\rangle = z^j\frac{h_t}{h}h^2\sigma_{ij}|_u\\ &= \sigma_{ij}z^j hh_t = z_i h(z(u))h_t(z(u)).\end{aligned}$$

Finalmente, determinamos os termos envolvendo a aceleração das linhas de fluxo

$$\begin{aligned}\langle\bar{\nabla}_{\partial_0}\partial_0,\partial_0\rangle|_{X(u)} &= \frac{1}{2}\partial_t|_{t=z(u)}\big(h^2(t)|Y|^2(u)\big) = hh_t|Y|^2(u) = \frac{h_t}{h}|Y|^2(z(u),u)\\ &= \frac{h_t}{h}|_{z(u)}\,\gamma^{-1}(z(u),u)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}-\langle\bar{\nabla}_{\partial_0}\partial_0,\partial_i\rangle|_{X(u)} &= \langle\bar{\nabla}_{\partial_i}\partial_0,\partial_0\rangle|_{X(u)} = \frac{1}{2}\partial_i|_{X(u)}\big(|Y|^2(t,u)\big) = \frac{1}{2}\partial_i|_{X(u)}\big(h^2(y)|Y|^2(u)\big)\\ &= \frac{1}{2}h^2(t)\partial_i\gamma^{-1}|_u.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle\bar{\nabla}_{\partial_0}\partial_0|_{X(u)},\Phi_{z(u)*}(u)\cdot\nabla' z|_u\rangle = -\frac{1}{2}h^2(t)z^k\partial_k\gamma^{-1}|_u.$$

Substituindo estas expressões na fórmula acima para a_{ij}, temos

$$\begin{aligned}Wa_{ij} &= -z_{ij}-\frac{h_t}{h}|_{X(u)}z_iz_j-\frac{1}{2}\frac{\partial_i\gamma^{-1}}{\gamma^{-1}}|_u z_j-\frac{1}{2}\frac{\partial_j\gamma^{-1}}{\gamma^{-1}}|_u z_i\\ &+ \gamma hh_t\sigma_{ij}-\frac{1}{2}z_iz_jz^k\partial_k\gamma^{-1}|_u+2\frac{h_t}{h}|_{X(u)}z_iz_j\\ &+ \langle\nabla'_{\partial_i}\partial_j,\nabla' z\rangle.\end{aligned}$$

Uma vez que $z_{i;j} = z_{ij}-\langle\nabla'_{\partial_i}\partial_j,\nabla' z\rangle$ são as componentes da hessiana de z em M, escrevemos, ao agrupar termos na expressão precedente,

$$\begin{aligned}Wa_{ij} &= -z_{i;j}+\frac{h_t}{h}z_iz_j+\frac{h_t}{h}\gamma\sigma_{ij}\\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial_i\gamma}{\gamma}z_j+\frac{1}{2}\frac{\partial_j\gamma}{\gamma}z_i+\frac{1}{2}z_iz_jz^k\frac{\partial_k\gamma}{\gamma^2},\end{aligned}\tag{2.39}$$

onde γ e suas derivadas são calculadas em $u \in M$. Assim, as componentes do endomorfismo de Weingarten são dadas por

$$\begin{aligned}
h^4W^3a^i_k &= h^4W^3g^{ij}a_{jk}\\
&= \big(h^2W^2\sigma^{ij} - z^iz^j\big)\big(- z_{j;k} + \frac{h_t}{h}z_jz_k + \frac{h_t}{h}\gamma\sigma_{jk}\\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial_j\gamma}{\gamma}z_k + \frac{1}{2}\frac{\partial_k\gamma}{\gamma}z_j + \frac{1}{2}z_jz_kz^l\frac{\partial_l\gamma}{\gamma^2}\big)\\
&= -\big(h^2W^2\sigma^{ij} - z^iz^j\big)z_{j;k} + h^2W^2\big(\frac{h_t}{h}z^iz_k + \frac{h_t}{h}\gamma\delta^i_k + \frac{1}{2}\frac{\gamma_i}{\gamma}z^k + \frac{1}{2}\frac{\gamma_k}{\gamma}z^i\\
&+ \frac{1}{2}z^iz_kz^l\frac{\gamma_l}{\gamma^2}\big) - \frac{h_t}{h}z^iz_k|\nabla' z|^2 - \frac{h_t}{h}\gamma z^iz_k - \frac{1}{2}\frac{z^j\gamma_j}{\gamma}z^iz_k - \frac{1}{2}z^i\frac{\gamma_k}{\gamma}|\nabla' z|^2\\
&- \frac{1}{2}z^iz_k|\nabla' z|^2z^l\frac{\gamma_l}{\gamma^2}\\
&= -\big(h^2W^2\sigma^{ij} - z^iz^j\big)z_{j;k} + \frac{h_t}{h}z^iz_k\big(h^2W^2 - |\nabla' z|^2 - \gamma\big)\\
&+ \frac{1}{2}z^iz_kz^j\frac{\gamma_j}{\gamma^2}\big(h^2W^2 - |\nabla' z|^2 - \gamma\big)\\
&+ \frac{1}{2}z^i\frac{\gamma_k}{\gamma}\big(h^2W^2 - |\nabla' z|^2\big) + \frac{1}{2}\frac{\gamma_i}{\gamma}z^kh^2W^2 + \frac{h_t}{h}h^2W^2\gamma\delta^i_k\\
&= -\big(h^2W^2\sigma^{ij} - z^iz^j\big)z_{j;k} + \frac{1}{2}z^i\gamma_k + h^2W^2\big(\frac{1}{2}\frac{\gamma_i}{\gamma}z^k + \frac{h_t}{h}\gamma\delta^i_k\big)
\end{aligned}$$

2.4 Estimativas da Altura

Consideramos, agora, para cada s, $0 \leq s \leq 1$, a aplicação

$$\Psi(s,t,u) = s\psi(t,u) + (1-s)\phi(t)k(t), \tag{2.40}$$

onde $k(t) = f(\kappa(t))$ e ϕ é uma função real positiva definida em I, que satisfaz as seguintes condições:

a) $\phi > 0$,

b) $\phi(t) > 1, \quad$ para $\quad t \leq t_-$,

c) $\phi(t) < 1, \quad$ para $\quad t \geq t_+$,

d) $\phi'(t) < 0$.

Estas condições implicam a existência de um único ponto $t_0 \in (t_-, t_+)$ tal que $\phi(t_0) = 1$.

Lema 2.2. *Para ψ como no enunciado do Teorema 2.1, ϕ como prescrita acima e a função Ψ definida em* (1.57)*, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

i) $\Psi(1, t, u) = \psi(t, u)$ *e* $\Psi(0, t, u) = \phi(t)k(t)$

ii) $\Psi(s, t, u) > 0$

iii) $\Psi(s, t, u) > k(t)$, *para* $t \leq t_-$

iv) $\Psi(s, t, u) < k(t)$, *par* $t \geq t_+$.

Ademais, é sempre possível escolher-se ϕ satisfazendo as condições anteriores de modo que

v) $\frac{\partial}{\partial t}\Psi(s, t, u) + \kappa(t)\Psi(s, t, u) < 0.$

Para $0 \leq s \leq 1$, considere a família de equações

$$\Upsilon(s, z) = F(a_{ij}(z)) - \Psi(s, z, u) = 0, \quad z = z(u). \tag{2.41}$$

Observe que a função $z_0 : u \to t_0$ é solução do problema correspondendo a $s = 0$. Determinamos uma limitação C^0 para esta homotopia. Mais precisamente, provamos

Proposição 2.3. *Suponha que ψ satisfaz a condição* (a) *e* (b) *no Teorema 2.1. Se $z \in C^2(M)$ é uma solução da equação $\Upsilon(s, z) = 0$, para um dado $0 \leq s \leq 1$, então*

$$t_- < z(u) < t_+, \quad u \in M. \tag{2.42}$$

Esta proposição ainda é verdadeira se removermos a condição de desiqualdade estrita nas hipóteses (a) e (b) do Teorema 2.1. Temos

Proposição 2.4. *Suponha que ψ satisfaz as condições*

a') $\psi(t, u) \geq k(t)$ *para* $t \leq t_-$ *e*

b') $\psi(t, u) \leq k(t)$ *para* $t \geq t_+$.

Seja $z \in C^2(M)$ uma solução da equação $\Upsilon(s,z) = 0$ para um dado $0 \leq s \leq 1$ e suponha que, para $s = 1$,

$$t_- \leq z(u) \leq t_+, \quad u \in M,$$

então ou $z \equiv t_-$ ou $z \equiv t_+$ ou

$$t_- < z(u) < t_+, \quad u \in M. \tag{2.43}$$

Agora, provamos o seguinte resultado de unicidade.

Proposição 2.5. *Fixado $s = 0$ existe uma única solução admissível z_0 da equação $\Upsilon(0,z) = 0$, a saber $z_0 = t_0$, onde t_0 satisfaz $\phi(t_0) = 1$.*

Prova. A prova de que z_0 é solução deste problema segue de

$$\Upsilon(0, z_0) = F(a_{ij}(z_0))) - k(t_0) = f(\kappa(t_0)) - k(t_0) = 0.$$

Seja $\bar{z}$ uma solução admissível de $\Upsilon(0,z) = 0$, ou seja

$$F(a_{ij}(\bar{z})) - \phi(\bar{z})k(\bar{z}) = 0.$$

Seja $\bar{u} \in M$ um ponto de mínimo de $\bar{z}$. Neste ponto $\nabla' \bar{z} = 0$ e $\nabla'^2 \bar{z}$ é positivo-definido. Como

$$\kappa(t) = \gamma^{\frac{1}{2}}(t,u)\frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{\gamma^{\frac{1}{2}}(u)}{h(t)}\rho(t,u),$$

calculamos explicitamente, usando que $\bar{z}_i(\bar{u}) = 0$, que

$$g^{ij}(\bar{z}(\bar{u})) = \frac{1}{h^2}\sigma^{ij} - \frac{1}{h^4 W^2}\bar{z}^i \bar{z}^j = \frac{1}{h^2(\bar{z}(\bar{u}))}\sigma^{ij}(\bar{u})$$

e

$$a_{ij}(\bar{u}) = -\frac{h(\bar{z}(\bar{u}))}{\gamma^{1/2}(\bar{u})}\bar{z}_{i;j} + h^2(\bar{z}(\bar{u}))\kappa(\bar{z}(\bar{u}))\sigma_{ij}$$

Portanto, o operador de Weingarten de Σ em $(\bar{z}(\bar{u}), \bar{u})$ é dado por

$$a^i_j(\bar{u}) = g^{ik}a_{kj} = -\frac{\gamma^{-\frac{1}{2}}(\bar{u})}{h(z(\bar{u}))}\sigma^{ik}\bar{z}_{k;j} + \kappa(\bar{z}(\bar{u}))\delta^i_j.$$

Deste modo, dado um referencial coordenado definido em uma vizinhança de $\bar{u}$, ortonormal em $\bar{u}$, diagonalizando $\nabla'^2\bar{z}$ neste ponto, obtemos, pelo fato que as entradas da diagonal de $\nabla'^2\bar{z}$ são necessariamente positivas,

$$a^i_j(\bar{z}(\bar{u})) \leq \kappa(\bar{z}(\bar{u}))\delta^i_j$$

e como f é crescente com respeito ao seu argumento

$$\phi(\bar{z}(\bar{u}))k(\bar{z}(\bar{u})) = F(a_{ij}(\bar{z}(\bar{u}))) \leq f(\kappa(\bar{z}(\bar{u}))) = k(\bar{z}(\bar{u}_)) = \phi(t_0)k(\bar{z}(\bar{u})).$$

Assim, sendo ϕ uma função decrescente, concluímos da escolha de $\bar{u}$ como um ponto de mínimo que

$$\bar{z}(u) \geq \bar{z}(\bar{u}) \geq t_0,$$

para todo $u \in M$. De maneira análoga, provamos que

$$\bar{z}(u) \leq t_0,$$

para todo $u \in M$. Portanto, obtemos $\bar{z} = z_0$. Isto finaliza a prova.

■

2.5 Lemas

Supomos que $|Y|^2(u)$ é constante ao longo da folha M. Juntamente com o fato de que $h(t,u) = h(t)$, isto implica que $|Y|$ é constante ao longo de cada folha M_t. Podemos, sem perda de generalidade, supormos $|Y|(u) \equiv 1$ em M.

Na prova do lema abaixo, verificamos incidentalmente que estas condições sobre h e Y implicam que as linhas de fluxo, quando parametrizadas pelo arco $\bar{t}$, são geodésicas. Mais precisamente, constatamos que

$$\bar{\nabla}_{\frac{Y}{|Y|}}\frac{Y}{|Y|} = 0. \tag{2.44}$$

Além disto, a expressão local da métrica g em $\bar{M}$ exposta acima passa a ser

$$h^2(t)\mathrm{d}t^2 + h^2(t)\mathrm{d}\sigma^2. \tag{2.45}$$

Portanto, se considerarmos a mudança de variáveis $t \mapsto \bar{t}$ dada por

$$\mathrm{d}\bar{t} = h(t)\mathrm{d}t, \tag{2.46}$$

a métrica passa a ser localmente dada por

$$\mathrm{d}\bar{t}^2 + h^2(t(\bar{t}))\mathrm{d}\sigma^2, \tag{2.47}$$

ou seja, uma métrica *warped*. Observamos que os campos coordenados na direção das linhas de fluxo são relacionados por

$$\partial_{\bar{t}} = \frac{1}{h(t)}\partial_t = \frac{1}{h(t)}Y. \tag{2.48}$$

Além disso, o campo vetorial unitário $\partial_{\bar{t}}$ corresponde ao campo vertical $\bar{e}_0$ da primeira parte da tese. Considerando a isometria local entre os dois ambientes, é natural definirmos as funções

$$\tau = -h(t(\bar{t}))\langle N, \partial_{\bar{t}}\rangle, \quad \eta = -\int h(\bar{t})\mathrm{d}\bar{t} \tag{2.49}$$

ou, em termos da variável t,

$$\tau = -\langle N, Y\rangle, \quad \eta = -\int h(t)\mathrm{d}t. \tag{2.50}$$

As seguintes fórmulas são úteis na estimativa do hessiano.

Lema 2.6. *Os campos gradiente das funções τ e η são dados por*

$$\begin{aligned} \nabla\eta &= -\frac{1}{h}Y^T, & (2.51)\\ \nabla\tau &= -hA^{\Sigma}(\nabla\eta), & (2.52) \end{aligned}$$

e as formas hessianas destas funções, calculadas com respeito a campos vetorias dados V, W em Σ, são

$$\begin{aligned} \nabla^2\eta(V,W) &= \frac{1}{h}\tau\langle AV, W\rangle - \frac{h'}{h^2}\langle V, W\rangle - h'\langle\nabla\eta, V\rangle\langle\nabla\eta, W\rangle, & (2.53)\\ \nabla^2\tau(V,W) &= -\frac{1}{h}\langle(\nabla_{\nabla\eta}A)V, W\rangle - \frac{1}{h}\langle\bar{R}(V,\nabla\eta)N, W\rangle - \tau\langle AV, AW\rangle \\ &+ \frac{h'}{h}\langle AV, W\rangle, & (2.54) \end{aligned}$$

onde Y^T denota a projeção na direção tangente do campo Y.

Prova. É conveniente decompormos um campo vetorial V em $\bar{M}$ em componentes paralelas as linhas de fluxo e tangentes as folhas integrais, ou seja, escrevermos $V = V^{||} + V^{\perp}$, onde

$$V^{||} = \langle V, \frac{Y}{|Y|}\rangle \frac{Y}{|Y|}. \tag{2.55}$$

Temos, usando o fato de que as folhas integrais são umbílicas

$$\begin{aligned}
V\langle N, Y\rangle &= \langle \bar{\nabla}_V N, Y\rangle + \langle N, \bar{\nabla}_V Y\rangle = -\langle A(V), Y\rangle + \langle N, \bar{\nabla}_{V^{||}} Y\rangle + \langle N, \nabla_{V^{\perp}} Y\rangle \\
&= -\langle A(Y^T), V\rangle + \frac{1}{|Y|}\langle \frac{Y}{|Y|}, V\rangle\langle N, \bar{\nabla}_Y Y\rangle + \langle N, \rho V^{\perp}\rangle \\
&= -\langle A(Y^T), V\rangle + \frac{1}{|Y|}\langle \frac{Y}{|Y|}, V\rangle\langle N, \bar{\nabla}_Y Y\rangle + \rho\langle N, V - V^{||}\rangle \\
&= -\langle A(Y^T), V\rangle + \frac{1}{|Y|}\langle \frac{Y}{|Y|}, V\rangle\langle N, \bar{\nabla}_Y Y\rangle - \rho\langle N, V^{||}\rangle \\
&= -\langle A(Y^T), V\rangle + \frac{1}{|Y|}\langle \frac{Y}{|Y|}, V\rangle\langle N, \bar{\nabla}_Y Y\rangle - \frac{1}{|Y|}\langle \frac{Y}{|Y|}, V\rangle\rho\langle N, Y\rangle.
\end{aligned}$$

Entretanto, pela equação de Killing conforme (2.16), temos, dado um campo vetorial arbitrário U em $\bar{M}$,

$$\begin{aligned}
2\rho\langle Y, U\rangle &= \langle \bar{\nabla}_Y Y, U\rangle + \langle \bar{\nabla}_U Y, Y\rangle = \langle \bar{\nabla}_Y Y, U\rangle + \frac{1}{2}U\langle Y, Y\rangle \\
&= \langle \bar{\nabla}_Y Y, U\rangle + \frac{1}{2}U(h^2(t)|Y|^2(u)) = \langle \bar{\nabla}_Y Y, U\rangle + \frac{1}{2}U(h^2(t)) \\
&= \langle \bar{\nabla}_Y Y, U\rangle + hh_t\langle U, \bar{\nabla} t\rangle = \langle \bar{\nabla}_Y Y, U\rangle + hh_t\langle U, \gamma Y\rangle \\
&= \langle \bar{\nabla}_Y Y, U\rangle + \frac{h_t}{h}\langle U, Y\rangle.
\end{aligned}$$

Assim, uma vez que $\rho = h_t/h$, concluímos, dado que U é arbitrariamente fixado, que vale a seguinte equação

$$\bar{\nabla}_Y Y = \rho Y. \tag{2.56}$$

Isto também poderia ser facilmente verificado a partir de (2.16) aplicada apenas ao campo Y, uma vez que decorre do fato de que $|Y|(u)$ é constante que $\gamma(u)$ é constante e portanto, que a aceleraçao $\bar{\nabla}_Y Y$ não tem componentes perpendiculares a Y. Constata-se facilmente que (2.56) equivale a

$$\bar{\nabla}_{\frac{Y}{|Y|}} \frac{Y}{|Y|} = 0. \tag{2.57}$$

Voltando ao cálculo acima, concluímos que

$$V\langle N, Y\rangle = -\langle A(Y^T), V\rangle, \tag{2.58}$$

ou seja,

$$\nabla\tau = A(Y^T). \tag{2.59}$$

Agora, passamos ao cálculo do hessiano de τ. Temos

$$\begin{aligned}
\langle\nabla_V\nabla\tau, W\rangle &= \langle\nabla_V A(Y^T), W\rangle = \langle(\nabla_V A)Y^T, W\rangle + \langle A(\nabla_V Y^T), W\rangle \\
&= \langle(\nabla_{Y^T}A)V, W\rangle + \langle\bar{R}(V, Y^T)N, W\rangle + \langle\nabla_V Y^T, AW\rangle \\
&= \langle(\nabla_{Y^T}A)V, W\rangle + \langle\bar{R}(V, Y^T)N, W\rangle + \langle\bar{\nabla}_V(Y - \langle Y, N\rangle N), AW\rangle \\
&= \langle(\nabla_{Y^T}A)V, W\rangle + \langle\bar{R}(V, Y^T)N, W\rangle + \langle\bar{\nabla}_V Y, AW\rangle - \langle Y, N\rangle\langle\bar{\nabla}_V N, AW\rangle \\
&= \langle(\nabla_{Y^T}A)V, W\rangle + \langle\bar{R}(V, Y^T)N, W\rangle + \langle\bar{\nabla}_V Y, AW\rangle + \langle Y, N\rangle\langle AV, AW\rangle.
\end{aligned}$$

Entretanto

$$\begin{aligned}
&\langle\bar{\nabla}_V Y, AW\rangle = \langle\bar{\nabla}_{V^{||}} Y, AW\rangle + \langle\bar{\nabla}_{V^{\perp}} Y, AW\rangle = \frac{1}{|Y|}\langle\frac{Y}{|Y|}, V\rangle\langle\bar{\nabla}_Y Y, AW\rangle + \rho\langle V^{\perp}, AW\rangle \\
&= \frac{1}{|Y|}\langle\frac{Y}{|Y|}, V\rangle\langle\rho Y, AW\rangle + \rho\langle V, AW\rangle - \frac{1}{|Y|}\langle\frac{Y}{|Y|}, V\rangle\langle\rho Y, AW\rangle \\
&= \rho\langle V, AW\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\langle\nabla_V\nabla\tau, W\rangle = \langle(\nabla_{Y^T}A)V, W\rangle + \langle\bar{R}(V, Y^T)N, W\rangle + \rho\langle AV, W\rangle - \tau\langle AV, AW\rangle.$$

Agora, calculamos, considerando que $\gamma(t,u) = \gamma(u)h^{-2}(t) = h^{-2}(t)$,

$$\bar{\nabla}\eta = -h(t)\bar{\nabla}t = -\frac{1}{h(t)}Y$$

e, desta forma,

$$\nabla\eta = -\frac{1}{h}Y^T.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\langle\nabla_V\nabla\eta, W\rangle &= -V(\frac{1}{h})\langle Y, W\rangle - \frac{1}{h}\langle\bar{\nabla}_V(Y - \langle Y, N\rangle N), W\rangle \\
&= -\frac{h'}{h^2}\langle Y, V\rangle\langle Y, W\rangle - \frac{1}{h}\langle\bar{\nabla}_V Y, W\rangle + \frac{1}{h}\langle Y, N\rangle\langle\bar{\nabla}_V N, W\rangle \\
&= -\frac{h'}{h^2}\langle Y, V\rangle\langle Y, W\rangle - \frac{\rho}{h}\langle V, W\rangle - \frac{1}{h}\langle Y, N\rangle\langle AV, W\rangle.
\end{aligned}$$

■

A exemplo da parte anterior da tese, estimamos as derivadas de η e ψ. Nas expressões a seguir, ∇_i e ∇_{ij} denotam derivadas covariantes em Σ calculadas com respeito a um referencial adaptado a Σ.

Lema 2.7. *As funções η e ψ satisfazem as seguintes estimativas*

$$|\nabla\eta| \le C, \quad |\nabla\psi| \le C, \quad |\nabla^2\psi| \le C \tag{2.60}$$

onde C é uma constante dependente de ψ, $\nabla'\psi$, $\nabla'^2\psi$ e de estimativas C^0 e C^1 de z.

2.6 Estimativa do Gradiente

Nesta seção, determinamos uma estimativa *a priori* global para a primeira derivada de z.

Proposição 2.8. *Sob as hipóteses do Teorema 2.1, se $z(u)$ é uma solução da equação $\Upsilon(s,z) = 0$, para algum $0 \le s \le 1$, então $|\nabla' z| < C$, onde C é uma constante que depende unicamente de t_-, t_+ e ψ.*

Prova. Apresentamos a prova apenas para $s = 1$. Consideramos em Σ a função

$$\chi = ve^{2Az},$$

onde $v = z^i z_i$ é o quadrado da norma do gradiente de z e A é uma constante positiva a ser escolhida posteriormente. Admitimos que χ atinge um máximo em um ponto $\bar{u} \in \Sigma$. Neste ponto, podemos supor que $|\nabla' z| \neq 0$. Caso contrário, a estimativa é trivial. Isto permite escolhermos um sistema de coodenadas normais locais $x^1, \ldots, x^n$ tal que $\partial_1 = \nabla' z / |\nabla' z|$, $\sigma_{ij} = \delta^i_j$ e $\nabla \partial_j|_{\bar{u}} = 0$. Portanto em $\bar{u}$, temos

$$\begin{aligned} z_1 &= |\nabla' z| > 0, \\ z_j &= 0 \ \text{ para } \ j \neq 1, \\ 0 &= \chi_j = 2Ae^{2Cz} z_j v + e^{2Az} v_j, \\ 0 &\ge \big(\chi_{i;j}\big). \end{aligned}$$

Sendo

$$v_j = \nabla_j\big(z^l z_l\big) = z^l{}_{;j} z_l + z^l z_{l;j} = 2z^l z_{l;j},$$

obtemos, em $\bar{u}$,

$$0 = \chi_j = 2e^{2Az}\big(Az_j v + z^l z_{l;j}\big)$$

e daí

$$z^l z_{l;j} = -Az_j v. \tag{2.61}$$

Além disso,

$$v_j = 2z^l z_{l;j} = -2Az_j v. \tag{2.62}$$

Isto implica que

$$\begin{aligned} z_{1;1} &= -Av \\ z_{1;j} &= 0, \quad \text{para} \quad j \neq 1. \end{aligned}$$

Após uma rotação dos vetores coordenados ∂_i, $i \geq 2$, podemos supor que $\big(z_{i;j}\big)$ é diagonal. Reunimos todas estas informações para obtermos a estimativa desejada. Iniciamos diferenciando covariantemente a equação $F = \psi$ com respeito a métrica σ_{ij} em M. Obtemos

$$F_i^k a_{k;l}^i = \psi_z z_l + \psi_l, \tag{2.63}$$

onde o subscrito z em ψ denota derivada com respeito a z. Então, contraímos a expressão (2.63) acima com o gradiente z^l, obtendo

$$z^l F_i^k a_{k;l}^i = \psi_z z_l z^l + \psi_l z^l = \psi_z |\nabla' z|^2 + \psi_l z^l. \tag{2.64}$$

Denotando a função escalar $F_i^k a_k^i$ por $\hat{\psi}$, temos

$$\begin{aligned} z^l (W^3 h^4 a_k^i)_{;l} F_i^k &= z^l W_{;l}^3 h^4 a_k^i F_i^k + z^l W^3 (h^4 a_k^i)_{;l} F_i^k \\ &= z^l W_{;l}^3 h^4 \hat{\psi} + W^3 h^4 (\psi_z |\nabla' z|^2 + \psi_l z^l). \end{aligned}$$

Relembrando que

$$\begin{aligned} W^3 h^4 a_k^i &= -\big(h^2 W^2 \sigma^{ij} - z^i z^j\big) z_{j;k} + h^2 W^2 \frac{h_t}{h} \gamma \delta_k^i \\ &= -\big((\gamma + v)\sigma^{ij} - z^i z^j\big) z_{j;k} + \gamma(\gamma + v) \frac{h_t}{h} \delta_k^i, \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} & W^3 h^4 (\psi_z |\nabla' z|^2 + \psi_l z^l) + z^l W_{;l}^3 h^4 \psi = z^l (W^3 h^4 a_k^i)_{;l} F_i^k = \\ & = -z^l \big(((\gamma + v)\sigma^{ij} - z^i z^j) z_{j;k}\big)_{;l} F_i^k \\ & + z^l \big((\gamma^2 + \gamma v) \frac{h_t}{h} \delta_k^i\big)_{;l} F_i^k \\ & =: A_1 + A_2. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Observamos que em $\bar{u}$

$$A_2 = \gamma v_l z^l \frac{h_t}{h} \delta_k^i F_i^k = -2A\gamma v^2 \frac{h_t}{h} F_i^i.$$

Calculamos igualmente

$$\begin{aligned}
-A_1 &= z^1\big(((\gamma+v)\sigma^{ij} - z^i z^j)z_{j;k}\big)_{;1} F_i^k \\
&= z^1 v_1 \sigma^{ij} z_{j;k} F_i^k - (z^1 z^i_{\ ;1} z^j + z^1 z^i z^j_{\ ;1}) z_{j;k} F_i^k \\
&+ z^1\big((\gamma+v)\sigma^{ij} - z^i z^j\big) z_{j;k1} F_i^k \\
&= -2Av^2 z^i_{\ ;k} F_i^k - 2A^2 v^3 F_1^1 + \big((\gamma+v)\sigma^{ij} - z^i z^j\big) z^1 z_{j;k1} F_i^k.
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando a expressão obtida acima para o operador de Weingrten, escrevemos no ponto $\bar{u}$

$$\begin{aligned}
&-(\gamma+v) z^i_{\ ;k} F_i^k = h^4 W^3 a_k^i F_i^k + Av^2 F_1^1 - \gamma(\gamma+v)\frac{h_t}{h}\delta_k^i F_i^k \\
&= W^3 h^4 \hat{\psi} + Av^2 F_1^1 - \gamma(\gamma+v)\frac{h_t}{h} F_i^i \\
&:= B + Av^2 F_1^1,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$-z^i_{\ ;k} F_i^k = \frac{B + A\gamma^2 F_1^1}{\gamma+v} - AF_1^1 \frac{\gamma^2 - v^2}{\gamma+v} = \frac{B + A\gamma^2 F_1^1}{\gamma+v} - AF_1^1(\gamma - v). \quad (2.66)$$

Assim, substituindo este termo acima, obtemos

$$\begin{aligned}
&-A_1 = 2Av^2\Big(\frac{B + A\gamma^2 F_1^1}{\gamma+v} - AF_1^1(\gamma-v)\Big) - 2A^2 v^3 F_1^1 \\
&+\big((\gamma+v)\sigma^{ij} - z^i z^j\big) z^1 z_{j;k1} F_i^k \\
&= 2Av^2\Big(\frac{B + A\gamma^2 F_1^1}{\gamma+v}\Big) \\
&-2A^2 v^2 \gamma F_1^1 + \big((\gamma+v)\sigma^{ij} - z^i z^j\big) z^1 z_{j;k1} F_i^k \\
&= \frac{2Av^2}{\gamma+v} B + \frac{2A^2\gamma^2 F_1^1}{\gamma+v} v^2 - 2A^2 v^2 \gamma F_1^1 \\
&+\big((\gamma+v)\sigma^{ij} - z^i z^j\big) z^1 z_{j;k1} F_i^k \\
&:= \frac{2Av^2}{\gamma+v} B - \frac{2A^2 \gamma F_1^1}{\gamma+v} v^3 + D^{jk} z^1 z_{j;k1}
\end{aligned}$$

Trataremos agora do termo $D^{jk}z^1 z_{j;k1}$. Para isto usaremos a segunda derivada de χ

$$
\begin{aligned}
\chi_{j;k} &= 4Ae^{2Az}z_k\big(Az_jv + z^l z_{l;j}\big) + 2e^{2Az}\big(Az_{j;k}v + Az_jv_k + z^l{}_{;k}z_{l;j} + z^l z_{l;jk}\big)\\
&= 2e^{2Az}\big(2A^2z_jz_kv + 2Az_kz^lz_{l;j} + Az_{j;k}v + 2Az_jz^lz_{l;k} + z^l{}_{;k}z_{l;j} + z^lz_{l;jk}\big).
\end{aligned}
$$

Do critério para ponto de máximo e da elipticidade da equação segue que

$$0 \geq D^{jk}\chi_{j;k}.$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
0 &\geq 2A^2D^{jk}z_jz_kv + 2AD^{jk}z_kz^lz_{l;j} + AD^{jk}z_{j;k}v + 2AD^{jk}z_jz^lz_{l;k} + D^{jk}z^l_{;k}z_{l;j} + D^{jk}z^lz_{l;jk}\\
&= F_i^k(\gamma+v)(2A^2z^iz_kv + 2A\sigma^{ij}z_k(-Az_jv) + Avz^i_{;k} - 2A^2vz^iz_k + z^l_{;k}z^i_{;l}) - F_i^k(2A^2z^iz_kv^2\\
&\quad +2Az^iz_kz^l(-Avz_j) + Az^i(-Avz_k)v + 2Az^iv(-Avz_k) + z^iz^jz^l_{;k}z_{l;j}) + D^{jk}z^lz_{l;jk}\\
&= (\gamma+v)(2A^2v^2F_1^1 - 2A^2z^iz_kF_i^kv + Az^i_{;k}F_i^kv - 2A^2z^iz_kF_i^kv + z^l_{;k}z^i_{;l}F_i^k)\\
&\quad -(2A^2v^3F_1^1 - 2A^2v^3F_1^1 - A^2v^3F_1^1 - 2A^2v^3F_1^1 + A^2v^3F_1^1) + D^{jk}z^lz_{l;jk}\\
&= (\gamma+v)(Avz^i{}_{;k}F_i^k + z^l{}_{;k}z^i{}_{;l}F_i^k) - 2A^2v^2\gamma F_1^1 + D^{jk}z^lz_{l;jk}.
\end{aligned}
$$

como $z_{i;k}$ é diagonal, obtemos

$$F_i^kz^l_{;k}z^i_{;l} = F_l^l(z^l_{;l})^2 \geq F_1^1(z^1_{;1})^2 = F_1^1A^2v^2$$

o que nos permite escrever

$$
\begin{aligned}
D^{jk}z^lz_{l;jk} &\leq 2A^2v^2\gamma F_1^1 - \big(\gamma+v\big)\big(Avz^i_{;k}F_i^k + z^l_{;k}z^i{}_{;l}F_i^k\big)\\
&\leq 2A^2v^2\gamma F_1^1 - (\gamma+v)Avz^i_{;k}F_i^k - (\gamma+v)A^2v^2F_1^1\\
&= 2A^2\gamma v^2F_1^1 + Av(B + Av^2F_1^1) - (\gamma+v)A^2v^2F_1^1\\
&= 2A^2\gamma v^2F_1^1 + AvB - \gamma A^2v^2F_1^1\\
&= Av(A\gamma vF_1^1 + B). \qquad (2.67)
\end{aligned}
$$

Agora, usamos a identidade de Ricci para o hessiano $z_{i;j}$ de z na forma

$$z_{i;jk} - z_{k;ij} = R_{ijkm}z^m. \qquad (2.68)$$

Usando (2.68), (2.67) e $R_{jklm}z^l z^m = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
D^{jk}z^1 z_{j;k1} &= F_i^k((\gamma+v)\sigma^{ij} - z^i z^j)z^l z_{j;kl} \\
&= F_i^k\big(\gamma+v\big)\sigma^{ij}z^l z_{j;kl} - z^i z^j z^l z_{j;kl}F_i^k \\
&= F_i^k\big(\gamma+v\big)\sigma^{ij}z^l\big(z_{l;jk} + R_{jklm}z^m\big) - z^i z^j z^l\big(z_{l;jk} + R_{jklm}z^m\big)F_i^k \\
&= \big(\gamma+v\big)\sigma^{ij}z^l z_{l;jk} - z^i z^j z^l z_{l;jk}F_i^k + \big(\gamma+v\big)\sigma^{ij}R_{jklm}z^l z^m F_i^k - R_{jklm}z^i z^j z^l z^m F_i^k \\
&= \big(\gamma+v\big)\sigma^{ij}z^l z_{l;jk}F_i^k - z^i z^j z^l z_{l;jk}F_i^k \\
&= F_i^k((\gamma+v)\sigma^{ij} - z^i z^j)z^l z_{l;jk} \\
&= D^{jk}z^l z_{l;jk} \\
&\leq Av(A\gamma v F_1^1 + B).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
-A_1 &\leq \frac{2Av^2}{\gamma+v}B - \frac{2A^2\gamma F_1^1}{\gamma+v}v^3 + Av(A\gamma v F_1^1 + B) \\
&= \frac{1}{\gamma+v}(3Av^2 + Av\gamma)B + \frac{1}{\gamma+v}(A^2\gamma^2 F_1^1 - A^2\gamma v F_1^1)v^2.
\end{aligned}$$

e, deste modo,

$$\begin{aligned}
-(\gamma+v)(A_1+A_2) &\leq (3Av^2 + Av\gamma)B + (A^2\gamma^2 F_1^1 - A^2\gamma v F_1^1)v^2 \\
&\quad +2A\gamma(\gamma+v)v^2\frac{h_t}{h}F_i^i.
\end{aligned}$$

Calculando

$$(3Av^2 + Av\gamma)B = (3Av^2 + Av\gamma)(W^3 h^4\hat{\psi} - \gamma(\gamma+v)\frac{h_t}{h}F_i^i),$$

obtemos

$$-(\gamma+v)(A_1+A_2) \leq (3Av^2 + Av\gamma)(W^3 h^4\hat{\psi} - \gamma(\gamma+v)\frac{h_t}{h}F_i^i) + (A^2\gamma^2 F_1^1 - A^2\gamma v F_1^1)v^2$$
$$+2A\gamma(\gamma+v)v^2\frac{h_t}{h}F_i^i$$

ou

$$\begin{aligned}
&-(\gamma+v)(A_1+A_2) \leq A(3v^2 + v\gamma)W^3 h^4\hat{\psi} + A^2(\gamma^2 - \gamma v)F_1^1 v^2 \\
&-A(v^2 + \gamma v)\gamma(\gamma+v)\frac{h_t}{h}F_i^i.
\end{aligned}$$

Além disto, uma vez que

$$z^l W^3_{;l} = -\frac{3}{h^2} A W v^2,$$

a expressão (2.65) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} &-(\gamma+v)W^3h^4(\psi_z v + \psi_1 v^{\frac{1}{2}}) + (\gamma+v)\frac{3}{h^2}AWv^2h^4\hat{\psi} \\ &\leq A(3v^2+v\gamma)W^3h^4\hat{\psi} + A^2(\gamma^2-\gamma v)F^1_1 v^2 \\ &-A(v^2+\gamma v)\gamma(\gamma+v)\frac{h_t}{h}F^i_i. \end{aligned}$$

ou, descartando o último termo,

$$\begin{aligned} &-(\gamma+v)W^3h^4(\psi_z v + \psi_1 v^{1/2}) + (\gamma+v)\frac{3}{h^2}AWv^2h^4\hat{\psi} \\ &\leq A(3v^2+v\gamma)W^3h^4\hat{\psi} + A^2(\gamma^2-\gamma v)F^1_1 v^2. \end{aligned}$$

Todavia, a partir da condição

$$\psi_z + \frac{h'}{h}\psi \leq 0, \tag{2.69}$$

reescrevemos esta desigualdade como

$$\begin{aligned} &(\gamma+v)W^3h^4(\frac{h'}{h}\psi v - \psi_1 v^{1/2}) + (\gamma+v)\frac{3}{h^2}AWv^2h^4\hat{\psi} \\ &\leq A(3v^2+v\gamma)W^3h^4\hat{\psi} + A^2(\gamma^2-\gamma v)F^1_1 v^2. \end{aligned}$$

Podemos supor, sem perda de generalidade,

$$\frac{h'}{h}\psi v - \psi_1 v^{1/2} > 0.$$

Para F^1_1 limitado de zero uniformemente, digamos $F^1_1 \geq C$, entendemos esta desigualdade, após divisão por F^1_1, como uma inequação polinomial em A da forma

$$aA^2 + bA + c \geq 0$$

onde

$$a = \gamma(\gamma - v).$$

Pela arbitrariedade de A neste caso, concluímos que o coeficiente a é necessariamente não-negativo. Portanto,

$$\gamma \geq v.$$

Todavia, caso $F_1^1 \to 0$, a expressão residual que obtemos é, quando posta em termos de potências de v,

$$\begin{aligned} &h^4 \frac{h'}{h} \psi v^2 W^3 - 3Ah^4 \hat{\psi} v^2 W^3 \leq h^4 \psi_1 v^{3/2} W^3 - \gamma W^3 h^4 (\frac{h'}{h} \psi v - \psi_1 v^{1/2}) \\ &+A\gamma v W^3 h^4 \hat{\psi} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, se escolhermos A de modo que

$$\frac{h'}{h} \psi - 3A\hat{\psi} =: \hat{C} > 0, \tag{2.70}$$

obtemos

$$\begin{aligned} &\hat{C} h^4 \psi v^2 W^3 \leq h^4 \psi_1 v^{3/2} W^3 - \gamma W^3 h^4 (\frac{h'}{h} \psi v - \psi_1 v^{1/2}) \\ &+A\gamma v W^3 h^4 \hat{\psi} + \varepsilon = O(v^3), \end{aligned}$$

o que assegura novamente uma limitação para v, visto que $v^2 W^3 = O(v^{7/2})$.

■

2.7 Estimativa do Hessiano

Nesta seção, procedemos de modo análogo ao exposto na seção correspondente da primeira parte. Definimos a seguinte função no fibrado tangente de Σ:

$$\tilde{\zeta}(u, \xi) = B(\xi, \xi)\, e^{\varphi(\tau) - \beta\eta}, \tag{2.71}$$

onde $u \in M$ e ξ é um vetor unitário tangente a Σ, em $(z(u), u)$. As funções τ e η estão definidas em (2.50), a constante $\beta > 0$ é escolhida posteriormente. Note que, por definição, a função τ é limitada por uma constante dependendo das estimativas de z e $\nabla' z$. Assim, é possível escolher $a > 0$ tal que $\tau \geq 2a$. Então, definimos

$$\varphi(\tau) = -\ln(\tau - a). \tag{2.72}$$

Diferenciando φ, com respeito a τ, verificamos

$$\ddot{\varphi} - (1+\epsilon)\dot{\varphi}^2 = -\frac{\epsilon}{(\tau - a)^2} < 0 \tag{2.73}$$

e pela escolha de a e fazendo $\epsilon = a^2/2C$, para uma constante positiva arbitrária C, temos

$$-(1+\dot{\varphi}\tau) + C(\ddot{\varphi} - (1+\epsilon)\dot{\varphi}^2) \geq \frac{a^2}{2(\tau - a)^2} \geq \hat{C}.$$

para alguma constante positiva $\hat{C}$ dependendo das estimativas de z e $\nabla' z$.

Supomos que o máximo de $\tilde{\zeta}$ é atingido em um ponto $\bar{u}$ e ao longo de uma direção $\bar{\xi}$, tangente a Σ em $\bar{X} = (z(\bar{u}), \bar{u})$. Podemos escolher um referencial geodésico ortonormal E_a definido em uma vizinhança de $\bar{X}$, tal que $\omega_i^k|_{\bar{X}} = 0$. Podemos girar este referencial de modo que $\bar{\xi} = E_1$ em $\bar{X}$. Consideramos a função local $a_{11} = B(E_1, E_1)$. Verificamos facilmente que a função

$$\zeta(p) = a_{11}\, e^{\varphi(\tau) - \beta\eta} \tag{2.74}$$

atinge um máximo em $\bar{X}$. Portanto, em $\bar{u}$, temos

$$0 = (\ln \zeta)_i = \frac{a_{11;i}}{a_{11}} + \dot{\varphi}\tau_i - \beta\eta_i \tag{2.75}$$

e

$$(\ln \zeta)_{i;j} = \frac{a_{11;ij}}{a_{11}} - \frac{a_{11;i}a_{11;j}}{a_{11}^2} + \dot{\varphi}\tau_{i;j} + \ddot{\varphi}\tau_i\tau_j - \beta\eta_{i;j}$$

é negativa-definida. Portanto

$$\begin{aligned} F^{ij}(\ln \zeta)_{ij} &= \frac{1}{a_{11}}F^{ij}a_{11;ij} - \frac{1}{a_{11}^2}F^{ij}a_{11;i}a_{11;j} + \dot{\varphi}F^{ij}\tau_{i;j} \\ &+ \ddot{\varphi}F^{ij}\tau_i\tau_j - \beta F^{ij}\eta_{i;j} \leq 0 \end{aligned} \tag{2.76}$$

É claro que a_{11} é o maior autovalor de B e portanto $a_{1i} = 0$ para $i \neq 1$. Portanto, podemos girar o complemento ortogonal de E_1 de modo que, no referencial resultante, a matriz (a_{ij}) seja diagonal em $\bar{X}$. Segue que (F^{ij}) é também diagonal com $F^{ii} = f_i$. Denotamos $\lambda_i = a_{ii}(\bar{X})$ e escolhemos índices de forma que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n.$$

Então,

$$f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n.$$

De (2.76) obtemos

$$\sum_i \Big(\frac{1}{\lambda_1} f_i a_{11;ii} - \frac{1}{\lambda_1^2} f_i |a_{11;i}|^2 + \dot{\varphi} f_i \tau_{i;i} + \ddot{\varphi} f_i |\tau_i|^2 - \beta f_i \eta_{i;i} \Big) \leq 0. \tag{2.77}$$

Agora, diferenciando a equação $F = \psi$ na direção de E_1 covariantemente com respeito a métrica (g_{ij}) em Σ, obtemos

$$F^{ij} a_{ij;1} = \psi_1$$

e diferenciando novamente, deduzimos

$$F^{ij} a_{ij;11} + F^{ij,kl} a_{ij;1} a_{kl;1} = \psi_{1;1}. \tag{2.78}$$

Da identidade de Ricci, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} F^{ij} a_{ij;11} = \sum_i F^{ii} a_{ii;11} = \sum_i \big(& f_i a_{11;ii} + \lambda_1 f_i \lambda_i^2 - \lambda_1^2 f_i \lambda_i \\ & + \lambda_1 f_i \bar{R}_{i0i0} - \bar{R}_{1010} f_i \lambda_i + f_i \bar{R}_{i1i0;1} - f_i \bar{R}_{1i10;i} \big) \end{aligned}$$

e usando que $\delta(f) \leq \sum_i f_i \lambda_i \leq f = \psi$, obtemos

$$\begin{aligned} F^{ij} a_{ij;11} \leq & -\lambda_1^2 \delta + |\bar{R}_{1010}| \psi + \sum_i \big(f_i a_{11;ii} + \lambda_1 f_i \lambda_i^2 + \lambda_1 f_i \bar{R}_{i0i0} \\ & + f_i \bar{R}_{i0i0;1} - f_i \bar{R}_{1010;i} \big). \end{aligned}$$

Combinando esta expressão e (2.78), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_i f_i a_{11;ii} \geq & \ \psi_{1;1} - F^{ij,kl} a_{ij;1} a_{kl;1} + \lambda_1^2 \delta - |\bar{R}_{1010}| \psi \\ & + \sum_i \big(-\lambda_1 f_i \lambda_i^2 - \lambda_1 f_i \bar{R}_{i0i0} - f_i \bar{R}_{i0i0;1} + f_i \bar{R}_{1010;i} \big). \end{aligned}$$

Substituindo esta expressão em (2.77), concluímos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda_1} \Big(\psi_{1;1} - F^{ij,kl} a_{ij;1} a_{kl;1} + \lambda_1^2 \delta - |\bar{R}_{1010}| \psi + \sum_i \big(-\lambda_1 f_i \lambda_i^2 - \lambda_1 f_i \bar{R}_{i0i0} \\ & - f_i \bar{R}_{i0i0;1} + f_i \bar{R}_{1010;i} \big) \Big) + \sum_i \Big(-\frac{1}{\lambda_1^2} f_i |a_{11;i}|^2 + \dot{\varphi} f_i \tau_{i;i} + \ddot{\varphi} f_i |\tau_i|^2 \\ & - \beta f_i \eta_{i;i} \Big) \leq 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}&\frac{\psi_{1;1}}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_1}\big(\delta\lambda_1^2-\psi|\bar{R}_{1010}|\big)-\frac{1}{\lambda_1}F^{ij,kl}a_{ij;1}a_{kl;1}-\sum_i f_i\lambda_i^2-\sum_i f_i\bar{R}_{i0i0}\\&-\frac{1}{\lambda_1}\sum_i f_i\big(\bar{R}_{i0i0;1}-\bar{R}_{1010;i}\big)+\sum_i\Big(-\frac{1}{\lambda_1^2}f_i|a_{11;i}|^2+\dot{\varphi}f_i\tau_{i;i}+\ddot{\varphi}f_i|\tau_i|^2\\&-\beta f_i\eta_{i;i}\Big)\le 0.\end{aligned}$$

De (2.53) temos, em $\bar{X}$

$$\beta\sum_i f_i\eta_{i;i}=\beta\sum_i\big(\frac{1}{h}\tau f_i a_{ii}-\frac{h'}{h^2}f_i g_{ii}-h'h^2 f_i(\eta_i)^2\big)\le\beta\big(\frac{1}{h}\tau\psi-(\frac{h'}{h^2}-h'h^2C)T\big),$$

onde $T=\sum_i f_i$. De (2.54), denotando

$$\bar{R}_{ki}:=\langle\bar{R}(E_k,E_i)E_i,N\rangle=\bar{\Omega}_i^0(E_k,E_i)$$

e usando que $\dot{\varphi}<0$, obtemos, em $\bar{X}$,

$$\begin{aligned}&\dot{\varphi}\sum_i f_i\tau_{i;i}=-\dot{\varphi}h\Big(\sum_{i,k}\eta^k f_i a_{ii;k}+\sum_{i,k}\eta^k\bar{R}_{ki}f_i\Big)-\dot{\varphi}\tau\sum_i f_i\lambda_i^2\\&+\dot{\varphi}\frac{h'}{h}\sum_i f_i\lambda_i\\&\ge-\dot{\varphi}h\Big(\sum_k\eta^k\psi_k+\sum_{i,k}\eta^k\bar{R}_{ki}f_i\Big)-\dot{\varphi}\tau\sum_i f_i\lambda_i^2+\dot{\varphi}\frac{h'}{h}\psi\\&\ge-C|\dot{\varphi}|(C+CT)-\dot{\varphi}\tau\sum_i f_i\lambda_i^2.\end{aligned}$$

Agora supomos, sem perda de generalidade, que

$$\lambda_1\ge\frac{1}{C}\sum_i|\bar{R}_{i0i0;1}-\bar{R}_{1010;i}|,$$

para algum $C>0$. Além disto, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\lambda_1\ge 1$, o que implica

$$-\frac{1}{\lambda_1}\psi|\bar{R}_{1010}|\ge -C\quad\text{e}\quad\frac{\psi_{1;1}}{\lambda_1}\ge -C$$

para alguma constante positiva C. Finalmente, temos

$$-\sum_i f_i \bar{R}_{i0i0} \geq -T \max_i |\bar{R}_{i0i0}| \geq -CT.$$

Então, concluímos destas desigualdades que

$$\begin{aligned}
&-C - CT + \delta\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} F^{ij,kl} a_{ij;1} a_{kl;1} - \sum_i f_i \lambda_i^2 \\
&-\frac{1}{\lambda_1^2} \sum_i f_i |a_{11;i}|^2 - C|\dot{\varphi}|(C + CT) - \dot{\varphi}\tau \sum_i f_i \lambda_i^2 + \ddot{\varphi} \sum_i f_i |\tau_i|^2 \\
&-\beta\big(h\tau\psi - h'(1 - \frac{1}{h^2} C)T\big) \leq 0 \qquad (2.79)
\end{aligned}$$

Finalmente, também temos de (2.75), para todo $\epsilon > 0$, a desigualdade

$$\frac{1}{\lambda_1^2} f_i |a_{11;i}|^2 = f_i |\dot{\varphi}\tau_i - \beta\eta_i|^2 \leq (1 + \frac{1}{\epsilon})\beta^2 f_i |\eta_i|^2 + (1 + \epsilon)\dot{\varphi}^2 f_i |\tau_i|^2. \quad (2.80)$$

Agora, para prosseguimos nossa análise, consideramos dois casos.

1º Caso. Neste caso, supomos que $\lambda_n \leq -\theta\lambda_1$, para alguma constante positiva θ escolhida posteriormente.

Somando os termos em (2.80) e usando o Lema 2.7, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda_1^2} \sum_i f_i |a_{11;i}|^2 \leq (1 + \frac{1}{\epsilon})\beta^2 \sum_i f_i |\eta_i|^2 + (1 + \epsilon)\dot{\varphi}^2 \sum_i f_i |\tau_i|^2 \\
&\leq (1 + \frac{1}{\epsilon})\beta^2 CT + (1 + \epsilon)\dot{\varphi}^2 \sum_i f_i |\tau_i|^2
\end{aligned}$$

para todo $\epsilon > 0$. Então,

$$\begin{aligned}
&-C - CT + \delta\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} F^{ij,kl} a_{ij;1} a_{kl;1} - (1 + \dot{\varphi}\tau) \sum_i f_i \lambda_i^2 \\
&-(1 + \frac{1}{\epsilon})\beta^2 CT - (1 + \epsilon)\dot{\varphi}^2 \sum_i f_i |\tau_i|^2 \\
&-C|\dot{\varphi}|(C + CT) + \ddot{\varphi} \sum_i f_i |\tau_i|^2 - \beta\big(\tau h\psi - h'(1 - \frac{1}{h^2} C)T\big) \leq 0
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
&\delta\lambda_1 - C - C|\dot{\varphi}| - \frac{1}{\lambda_1}F^{ij,kl}a_{ij;1}a_{kl;1} \\
&-\big(C + C|\dot{\varphi}| - h'(1+\frac{1}{h^2}C)\beta + C(1+\frac{1}{\epsilon})\beta^2\big)T \\
&-(1+\tau)\sum_i f_i\lambda_i^2 + \big(\ddot{\varphi} - (1+\epsilon)\dot{\varphi}^2\big)\sum_i f_i|\tau_i|^2 - \beta h\tau\psi \leq 0.
\end{aligned}$$

Usando (2.52) e o fato de que $\big(a_{ij}\big)$ é diagonal em $\bar{X}$, calculamos

$$\sum_i f_i|\tau_i|^2 = \sum_i f_i h^2\lambda_i^2|\eta_i|^2 \leq C\sum_i f_i\lambda_i^2. \tag{2.81}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\delta\lambda_1 - C - C|\dot{\varphi}| - \frac{1}{\lambda_1}F^{ij,kl}a_{ij;1}a_{kl;1} \\
&-\big(C + C|\dot{\varphi}| - h'(1+\frac{1}{h^2}C)\beta + C(1+\frac{1}{\epsilon})\beta^2\big)T \\
&+\big(-(1+\dot{\varphi}\tau) + C(\ddot{\varphi} - (1+\epsilon)\dot{\varphi}^2)\big)\sum_i f_i\lambda_i^2 - \beta h\tau\psi \leq 0.
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Agora, usando a concavidade de F podemos descartar o quarto termo no lado esquerdo de (2.82), visto que é não-negativo, obtém-se

$$-C_1(\beta) - C_2(\beta)T + \delta\lambda_1 + \hat{C}\sum_i f_i\lambda_i^2 \leq 0,$$

onde C_1 depende linearmente de β e C_2 depende quadraticamente de β. Como $f_n \geq \frac{1}{n}T$, temos

$$\sum_i f_i\lambda_i^2 \geq f_n\lambda_n^2 \geq \frac{1}{n}\theta^2 T\lambda_1^2.$$

Então

$$-C_1 - C_2T + \delta\lambda_1 + \hat{C}\frac{1}{n}\theta^2 T\lambda_1^2 \leq 0.$$

A partir deste ponto, procedemos como anteriormente para concluirmos que λ_1 é limitado por cima.

$2^{\underline{o}}$ Caso. Neste caso, assumimos que $\lambda_n \geq -\theta\lambda_1$. Procedendo como anteriormente e escolhendo $\beta > 0$ suficientemente grande, obtemos

$$-C - C_2(\beta)f_1 + \delta\lambda_1 + \hat{C}f_1\lambda_1^2 \leq 0, \tag{2.83}$$

onde C_2 depende quadraticamente de β. Disto segue a limitação superior de λ.

Referências Bibliográficas

[1] ANDREWS, B. Contraction of convex hypersurfaces in Euclidean spaces, *Calculus and Variations Partial Differential Equations*,v. 2, p. 151-171, 1994.

[2] BAKELMAN, I.; KANTOR, B. Estimates for solutions of quasilinear elliptic equations connected with problems of geometry in the large, *Mat. Sb.*, V. 91, P. 336-349, 1973. English transl.: Math. USSR Sb. V. 20, P. 348-363, 1973.

[3] ______, Existence of spherically homeomorphic hypersurfaces in Euclidean space with prescribed mean curvatur,*Geometry and Topology.* V. 1, p.3-10, 1974.

[4] BARBOSA, J. L.; COLARES, A. G. Stability of Hypersurfaces with Constant r-Mean Curvature, *Annals of Global Analysis and Geometry*,V. 15, p. 277-297, 1997.

[5] BARBOSA, J. L.; LIRA, J de; OLIKER, V. I. A priori estimates for starshaped compact hypersurfaces with prescribed mth curvature function in space forms,*Nonlinear problems in mathematical physics and related topics* I. New York:Kluwer, 2002, p. 35-52.

[6] CAFFARELLI, L.; NIREBERG, L.; SPRUCK, J. The Dirichlet probem for Nonlinear second order elliptic equations, III: Functions of the eigenvalues of the Hessian. *Acta Math*, v. 155, p. 261-301, 1985.

[7] ______. Nonlinear second order elliptic equations, IV. Starshaped compact Weingarten hypersurfaces, *Current Topics in Partial Differential Equations.* Kinokunia, Tokyo, p. 1-26, 1986.

[8] ______. Nonlinear second order elliptic equations. V. The Dirichlet Problem for Weingarten Hypersurfaces, *Comm. Pure Appl. Math.*, v. 41, p. 47-70, 1988.

[9] DAJCZER, M.; LIRA, J. de. Killing graphs with prescribed mean curvature and Riemannian submersions. *Annales de l'Institute Henri Poincaré*. (a ser publicado)

[10] DAJCZER, M., HINOJOZA, P.; LIRA, J DE . Killing graphs with prescribed mean curvature. *Calc. Var. Partial Differential Equations*. (a ser publicado)

[11] DELANOE, Ph., Plongements radiaux $S^n \rightarrow R^{n+1}$courbure de Gauss positive prescrite. *Ann. Sci. École Norm. sup.*, V. 4, p. 635-649, 1985.

[12] FITZPATRICK, P. M.; PEJSACHOWICZ, J. An Extension of Leray-Schauder degree for fully nonlinear elliptic problems. *Proceedings of Symposia in Pure Math.* v. 45, p. 425-438.

[13] GERHARDT, C. Closed hypersurfaces of prescribed mean curvature in locally conformally flat Riemannian manifolds. *Jornaul Differential Geometry*, v. 48, p. 587-613, 1998.

[14] ______. Hypersurfaces of prescribed Weingarten curvature,*Math. Z.* v. 234. p. 167-194, 1997.

[15] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, 2001. 517P.

[16] Li, Y. Y., Degree theory for second order nonolinear elliptic operators and its applictions,*Communications in Partial Diferential Equations*, v. 14, p. 1541-1579, 1989.

[17] ______. Group invariant convex convex hypersufarces with prescribed Gauss-Kronecker curvature,*Contemp. Math.* v. 205, p. 203-218, 1997.

[18] LI, Y. Y.; OLIKER, V. I. Starshaped compact hypersurfaces with prescribed m-th mean curvature in elliptic space, *Journal of Partial Differential Equations*, v. 15, p. 68-80, 2002.

[19] LI, Y. Y.; QINIAN, J. Starshaped compact hypersurfaces with prescribed m-th mean curvature in hyperbolic space, *Discrete contin. Dyn. Syst.*, v. 15, p. 367-377, 2006.

[20] NIRENBERG, L.; ARTINO, R. *Topics in nonlinear functional analysis*, Providence, R. I.: American Mathematical Society, 2001. 145p.

[21] OLIKER, V. I. Hypersurfaces in R^{n+1} with prescribed Gaussian curvature and related equations of Monge-Ampere type, *Commun. in PDE's*, v. 9, n. 8, p. 807-838, 1984.

[22] ______. The Gauss curvature and Minkowski problems in space forms. *Contemp. Math.*, v. 101, p. 107-123, 1989.

[23] ROSENBERG, H.; SPRUCK, J. On the existence of convex hypersurfaces of constant Gaussian curvature in hyperbolic space,*Journal Differential Geometry,* v. 40, p. 379-409, 1994.

[24] SHENG, W.; URBAS, J.; WANG, X.-J. Interior curvature bounds for a class of curvature equations, *Duke Math. J.*, v. 123, n. 2, p. 1-27, 2004.

[25] SPRUCK, J. Geometric aspects of the theory of fully nonlinear elliptic equations, *Global theory of minimal surfaces*, p. 283-309, 2005.

[26] TRUDINGER, N. On the Dirichlet problem for Hessian equations, *Acta Math.*, v. 175, n. 2, p. 151-164, 1995.

[27] TREIBERGS, A.; WEI, W. Embedded hypersurfaces with prescribed mean curvature. *J. Differential Geometry*, v.18, n. 3, p. 513-521, 1983.