



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

IGOR PEREIRA CAVALCANTE

ESTUDO DO FLUXO DE STOKES EM UMA CÉLULA UNITÁRIA BIDIMENSIONAL

FORTALEZA

2021

IGOR PEREIRA CAVALCANTE

ESTUDO DO FLUXO DE STOKES EM UMA CÉLULA UNITÁRIA BIDIMENSIONAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Ascânio Dias de Araújo

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C364e Cavalcante, Igor Pereira.

Estudo do fluxo de Stokes em uma célula unitária bidimensional / Igor Pereira Cavalcante. – 2021.
39 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Curso de Física, Fortaleza, 2021.

Orientação: Prof. Dr. Ascânio Dias de Araújo.

1. Fluxo de Stokes. 2. Célula Unitária. 3. Fluidodinâmica. 4. Filtração de leito profundo. 5. Número de Stokes. I. Título.

CDD 530

IGOR PEREIRA CAVALCANTE

ESTUDO DO FLUXO DE STOKES EM UMA CÉLULA UNITÁRIA BIDIMENSIONAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Aprovada em: 02 de Setembro de 2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ascânio Dias de Araújo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Hansjoerg Seybold
ETH, Zurich, Switzerland

Raul Peixoto Silva (Mestrado)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Esta monografia é dedicada aos meus pais, pilares da minha formação como ser humano.

AGRADECIMENTOS

Gostaria primeiramente de agradecer meus pais João Célio e Tania Maria e familiares por me darem todo o suporte nesses longos anos de graduação, sempre me apoiando e sendo compreensíveis e colaborativos com minhas necessidades.

Agradeço também todos meus amigos e colegas que sempre estiveram comigo em todos altos e baixos da vida universitária, em especial Carlos Germano, Cássio César, Pedro Uchoa, Brehmer Braga, Barbara Sales e Antônio Maurício.

A Todas as partidas de jogos dentre outras convivências na Universidade, em especial Magic the gathering, Ping Pong, Xadrez e jogos de tabuleiro, que por muitas vezes serviram de escape e ponto de encontro de amigos e colegas.

Aos professores por todos os conselhos, pela ajuda e pela paciência com a qual guiaram o meu aprendizado e me mostraram de forma cativante as possibilidades que a física/-matemática pode proporcionar, Em especial Humberto Carmona, Carlos William, Nildo Loiola, Saulo Reis, José Ramos e Renivaldo Sondré.

Ao meu orientador Ascânio Dias que apesar da intensa rotina de sua vida acadêmica aceitou me orientar nesta monografia. As suas valiosas indicações fizeram toda a diferença.

O mais corajoso dos atos ainda é pensar com a própria cabeça.

(Coco Chanel)

RESUMO

Neste trabalho, investigamos o comportamento de um sistema de filtração denominado *deep bed filtration* ou filtração de leito profundo. Este método de filtração tem como princípio básico remover pequenas partículas de um fluido por meio de um processo de captura das partículas. Por meio de simulações numéricas, estudamos a eficiência do processo de captura de partículas transportadas por um fluido. O sistema consiste de uma célula unitária com um obstáculo circular de diâmetro D localizado no centro da célula. Por meio da solução analítica do escoamento de um fluido nas vizinhanças deste obstáculo, obtida por Kubawara (MARSHALL *et al.*, 1994), investigamos a trajetória de uma partícula sob a influência do escoamento do fluido (arraste) e de um campo externo. Analisamos dois campos externos, um campo uniforme (gravitacional) e um campo gerado por um dipolo elétrico. Variando a inércia da partícula, por meio do parâmetro adimensional denominado número de Stokes, analisamos a eficiência de captura em várias circunstâncias de lançamento da partícula no interior da célula unitária. Inicialmente, consideramos o caso do escoamento na presença de um campo externo uniforme, identificamos a presença de um Stokes crítico diferente de zero para a captura da partícula, apenas no regime de campo externo igual a zero. No caso de um campo externo gerado por um dipolo elétrico, que depende essencialmente da posição da partícula, o sistema apresenta um valor para o Stokes crítico diferente de zero, mesmo da condição de campo externo diferente de zero. Várias análises são conduzidas para este sistema considerando diferentes intensidade para o valor do campo externo e considerando também o efeito da porosidade do sistema, que muda com o tamanho do obstáculo no interior da célula unitária.

Palavras-chave: Fluxo de Stokes; Célula Unitária; Fluidodinâmica; Filtração de leito profundo; Número de Stokes.

ABSTRACT

In this work, we investigate the behavior of a filtration system called *deep bed filtration*. This filtration method has as its basic principle the removal of small particles from a fluid through a capture process. Through numerical simulations we study the efficiency of the process of capturing particles transported by a fluid. The system consists of a unit cell with a circular obstacle of diameter D located in the center of the cell. Through the analytical solution of the flow of a fluid in the vicinity of this obstacle, obtained by Kubawara (MARSHALL *et al.*, 1994), we investigate the trajectory of a particle under the influence of the fluid flow (drag) and an external field. We analyze two external fields, a uniform (gravitational) field and a field generated by an electric dipole. By varying the particle's inertia, through the dimensionless parameter called Stokes number, we analyzed the capture efficiency in various circumstances of launching the particle inside the unit cell. Initially, we consider the case of the flow in the presence of a uniform external field, we identify the presence of a non-zero critical Stokes for particle capture, only in the zero external field regime. In the case of an external field generated by an electric dipole, which essentially depends on the position of the particle, the system presents a non-zero value for the critical Stokes, even in the non-zero external field condition. Several analyzes are conducted for this system considering different intensity for the external field value and also considering the effect of the system's porosity, which changes with the size of the obstacle inside the unit cell.

Keywords: Stokes Flow; Two-dimensional unit cell; Fluid Dynamics; Deep Bed Filtration; Stokes number.

..

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Variedades de mecanismos de transporte (JEGATHEESAN; VIGNESWARAN, 2005).	14
Figura 2 – Escoamento entre duas placas paralelas, fixada na parte inferior e móvel na parte superior.	16
Figura 3 – Gráfico da tensão de cisalhamento com a taxa de deformação, demonstrando a dependência linear de um fluido newtoniano (MARCELO DE JESUS DIAS DE OLIVEIRA <i>et al.</i> , 2015)	17
Figura 4 – Célula de volume com análise de fluxo de massa.	18
Figura 5 – Célula de volume com análise de fluxo de momento.	19
Figura 6 – Tipo de escoamento relacionado com o número de Reynolds.	22
Figura 7 – Comparação entre o método de Euler e Runge-Kutta.	25
Figura 8 – (a) Mapa de cores do escoamento do fluido em coordenadas polares. (b) Linhas de corrente do escoamento do fluido em coordenadas polares. Célula unitária circular com porosidade de aproximadamente 0.96(Raio do obstáculo equivalente a 0.1).	28
Figura 9 – (a) Mapa de cores do escoamento do fluido em coordenadas cartesianas. (b) Linhas de corrente do escoamento do fluido em coordenadas cartesianas. Célula unitária quadrada com porosidade de aproximadamente 0.96 (Raio do obstáculo equivalente a 0.1).	28
Figura 10 – (a) Trajetória de uma partícula com $St \approx 0$. (b) Trajetória da partícula com $St \approx 0.7$. (c) Trajetória da partícula com $St \gg 1$	29
Figura 11 – Esquema de como funciona a captura da partícula para possíveis trajetórias com o parâmetro de colisão δ (ARAÚJO <i>et al.</i> , 2006).	30
Figura 12 – Parâmetro de captura δ/D em função do número de Stokes. As diferentes cores correspondem a valores da aceleração na direção do escoamento expresso em termos de frações do valor da gravidade g . Estes valores para o parâmetro de captura foram obtidos por meio da integração numérica da equação de newton 3.10 utilizando o método de Runge kutta de 4ª ordem com a solução de Kuwabara. Foi utilizado $F_g = 16$, equação 3.11, porosidade $\varepsilon \approx 0.965$	31

Figura 13 – Gráfico do parâmetro de eficiência/captura em função do número de Stokes. As diferentes curvas/cores estão relacionada com diferentes porosidade da célula unitária, obtidas por meio do aumento do tamanho do raio do círculo no interior da célula. Os valores para porosidade são: $\epsilon_{0.1} \approx 0.965$, $\epsilon_{0.11} \approx 0.961$, $\epsilon_{0.12} \approx 0.955$ e $\epsilon_{0.13} \approx 0.945$. $F_g = 16$	32
Figura 14 – (a) Linhas de campo de como se comporta o dipolo elétrico dentro de uma célula unitária circular. (b) Mapa de cores do dipolo elétrico na célula unitária circular. Célula unitária circular com porosidade de aproximadamente 0.96 (Raio do obstáculo equivalente a 0.1).	33
Figura 15 – (a) Linhas de campo do dipolo elétrico dentro de uma célula unitária quadrática. (b) campo de velocidade devido ao escoamento do fluido nas proximidades do obstáculo no interior da célula unitária. A interação com esses dois campos definirá o comportamento sobre a trajetória da partícula. Célula unitária quadrática com porosidade de aproximadamente 0.965 (Raio do obstáculo equivalente a 0.1).	33
Figura 16 – Gráfico para o parâmetro de captura como função do número de Stokes. As curvas apresentadas em diferentes cores correspondem aos valores do campo elétrico devido a presença do dipolo elétrico. Durante sua trajetória a partícula interage com o escoamento e com o campo devido ao dipolo elétrico. Integração numérica da equação 3.14 utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com a solução de Kuwabara. Porosidade $\epsilon \approx 0.965$	35
Figura 17 – Relação do campo elétrico com a razão do parâmetro de colisão pelo diâmetro (Dipolo elétrico rotacionado 90°). Integração numérica da equação 3.14 utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com a solução de Kuwabara. Porosidade $\epsilon \approx 0.965$	35
Figura 18 – Caso E/100 do gráfico da figura 17 para um dipolo elétrico rotacionado. Os pontos indicam a relação $St-\delta/D$ na qual a partícula foi capturada (Stokes crítico) e a curva sólida representa a projeção que foi traçada entre os dois pontos distantes.	36

Figura 19 – (a) Trajetória da partícula um ponto antes de conseguir escapar do obstáculo.
(b) Trajetória da partícula que conseguiu escapar do obstáculo (representando o "vão" na figura 18). (c) Trajetória da partícula quando volta a colidir com o obstáculo devido o aumento do número de Stokes. 37

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
2.1	Fluidos newtonianos	16
2.2	Equação da Continuidade	17
2.3	Equação Navier-Stokes	19
2.4	Visualização de Escoamentos	21
2.5	Método computacional	23
2.5.1	<i>Método de Runge-Kutta</i>	24
3	RESULTADOS OBTIDOS	26
3.1	Solução de Kuwabara	26
3.2	Eficiência da célula unitária	28
3.2.1	<i>Dipolo elétrico</i>	32
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS	38
	REFERÊNCIAS	39

1 INTRODUÇÃO

Na natureza presenciamos a existência de fluidos, como ocorrem com água em cachoeiras e oceanos ou até mesmo calda de chocolate, mas comumente não pensamos muito sobre a importância de estudá-los. Obviamente podemos imaginar o quanto importante é esse tema, pois o mesmo envolve fluidos como a água que é fundamental para a existência de vida na Terra. O tema também é pertinente para fluidos com comportamento intrigante como é o caso do piche, que trata-se de um fluido altamente viscoso. Este por sua vez era tratado como sólido, até que o professor Thomas Parnell, em 1927 iniciou um interessante (PITCH. . . , 2021) experimento para mostrar que o piche era de fato um líquido. Desde o início do experimento há muito tempo atrás, o piche só pingou 9 vezes comprovando que era um fluido que possui uma viscosidade de 230 trilhões de vezes maior do que a viscosidade da água. Além da propriedade de fluidos como os citados anteriormente, existem situações práticas do cotidiano que abordam o deslocamento e/ou utilização de fluidos em vários processos com grande aplicabilidade e importância tecnológica. Podemos citar como processos relevantes que incluem investigação no tema: aerodinâmica de aviões, foguetes espaciais e desenvolvimento de carros (SOARES, 2013), também são pertinentes ao tema os processos físico/químicos tais como filtração (BELFORT, 1989) e catálises que possuem uma ampla aplicação em indústria petroquímica.

A filtração granular, é um processo de separação de sólidos do fluido comumente aplicado para remover quantidades de pequenas partículas de vários tipos de fluidos. Este método não é só importante contemporaneamente, mas historicamente também pois já foi evidenciado que egípcios usavam filtração granular para tratamento de água já em 200 aC (TIEN; RAMARAO, 2007). Hoje em dia, indústrias químicas utilizam bastante a técnica de filtração em seus processos de desenvolvimento tecnológico e obtenção de novas patentes. Embora a técnica de filtração seja muito antiga, esta ainda se baseia nos princípios fundamentais, separar partículas por tamanho ou retirar partículas de um fluido por meio de agregação ou retenção.

Existem vários processos que permitem a separação fluido-partícula, Neste trabalho de monografia iremos nos concentrar em um processo chamado de *deep bed filtration* ou filtração de leito profundo, onde as partículas são muito menores do que o tamanho dos poros do filtro, o que difere da filtração granular. Neste processo, as partículas são capturadas em diversas profundidades e é comumente utilizado em uma ampla gama de indústrias tais como a engenharia civil ou ambiental, que utiliza a técnica para tratamento de água de esgoto. O processo ocorre em dois estágios, um estágio definido como inicial e um outro estabelecido como transitório.

No inicial ocorre que as partículas são depositadas nos poros do filtro, enquanto que no estágio transitório, ocorre logo após o estágio inicial e rege o restante do processo, a eficiência do filtro muda de acordo com a área de poros disponíveis, o que significa que o desempenho do filtro varia substancialmente ao longo do estágio transitório. Além disso, essa etapa envolve um conjunto complexo de mecanismos, onde propriedades químicas das partículas são levadas em consideração. Para este trabalho iremos concentrar nossa atenção sobre os efeitos inerciais de captura que ocorrem durante o transporte de partículas em um fluido, que apesar de ser um mecanismo importante no processo de filtração ainda carece de um entendimento mais profundo. Sendo assim, analisaremos o comportamento de uma partícula sendo transportada por um fluido que escoar na vizinhança de um obstáculo circular. Por meio da solução analítica disponível para o escoamento de um fluido na vizinhança do obstáculo circular (MARSHALL *et al.*, 1994), investigamos o comportamento da trajetória de uma partícula com inércia variável. Estudamos várias situações de lançamento para esta partícula por meio de uma integração numérica para sua equação de movimento. Em termos prático esta análise é muito semelhante ao mecanismo de atuação em um sistema de filtração. Estendemos a mesma análise para o caso de uma partícula carregada nas vizinhanças de um dipolo elétrico, onde diferente do sistema partícula/fluido, a existência de forças de longo alcance introduzem um ingrediente a mais no problema. célula (ARAÚJO *et al.*, 2006).

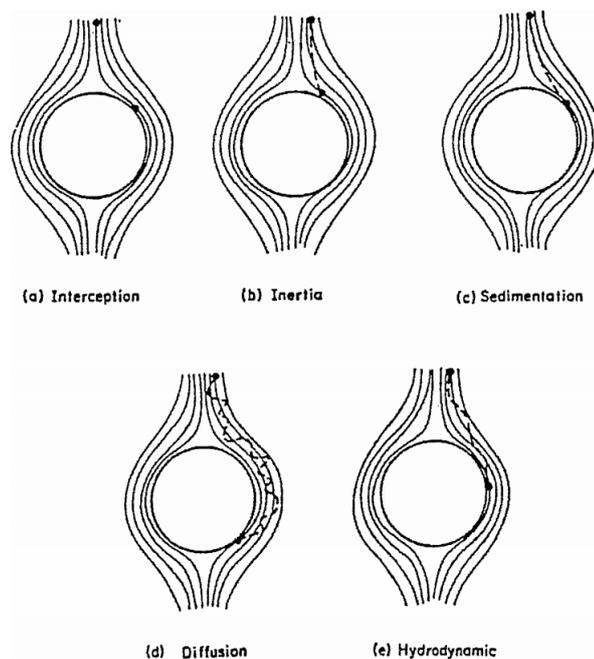


Figura 1 – Variedades de mecanismos de transporte (JEGATHEESAN; VIGNESWARAN, 2005).

Com isso, iremos explorar conceitos básicos importantes relacionado a equação que estabelece os campos de velocidade e pressão para os problemas relacionados com fluidodinâmica, procurando sempre nos orientar para o caso do fluido que estamos trabalhando. Além disso, iremos visitar alguns métodos computacionais que são de suma importância em problemas de fluidodinâmica e foram essenciais para a realização desse trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Fluidos newtonianos

Fluidos reais apresentam resistência á mudança de forma, essa propriedade é conhecida como viscosidade, e a mesma é identificada dentro da mecânica dos fluidos como um fator de proporcionalidade entre a força tangencial ou tensão de cisalhamento e a taxa de deformação angular. Essa definição é usualmente atribuída, imaginando um escoamento entre duas placas paralelas(VIEIRA, 1971). Conforme podemos visualizar na Fig. 2

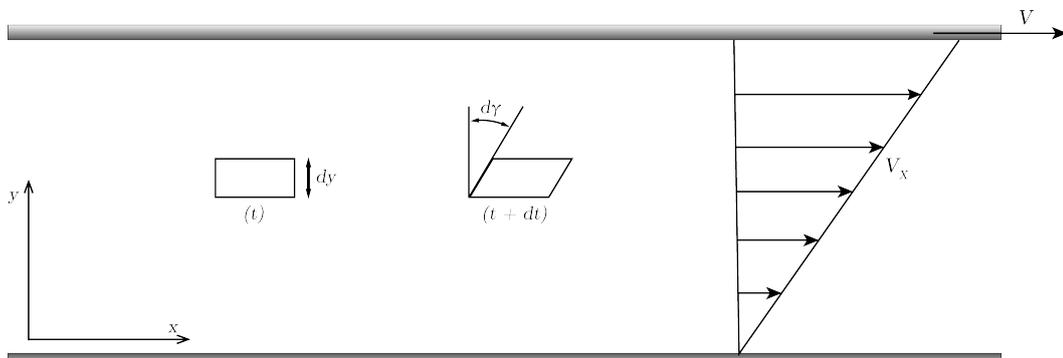


Figura 2 – Escoamento entre duas placas paralelas, fixada na parte inferior e móvel na parte superior.

A força tangencial ou tensão de cisalhamento é definida por meio da seguinte relação:

$$\tau = \frac{F_{tangencial}}{A}. \quad (2.1)$$

A taxa de deformação angular é estabelecida por meio da relação entre as deformações sofridas e o gradiente de velocidades, ou seja:

$$\frac{dV_x}{dy} = \dot{\gamma}. \quad (2.2)$$

Assim, temos a viscosidade(μ) como um fator de proporcionalidade, resultando na expressão

$$\tau = \mu \dot{\gamma}. \quad (2.3)$$

A viscosidade é função das propriedades do fluido, temperatura, pressão e taxa de deformação angular. Assim, fluidos que tem viscosidade independentes de $\dot{\gamma}$ são ditos fluidos newtonianos, em outras palavras, podemos dizer que fluidos newtonianos são aqueles em que a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional a taxa de deformação, apresentando assim, uma

dependência linear. Existem fluidos que apresentam comportamentos mais complexos com dependência da viscosidade com a deformação em forma não linear. Como exemplos de fluidos com este comportamento podemos citar o fluido Herschel-Bulkley, pseudoplástico, plástico de Bingham e dilatante. Todos esses fluidos são considerados fluidos não-Newtoniano e apresentam comportamento diferente do caso Newtoniano conforme mostrado na Fig.3, que exibe o comportamento da tensão de cisalhamento τ como função da deformação du_x/dy . O Plástico de Bingham é um caso especial de um fluido Newtoniano com limiar para o escoamento. O fluido parece sólido até um determinado limiar da tensão de cisalhamento, onde a partir desse limite o mesmo começa a se deformar e conseqüentemente escoar.

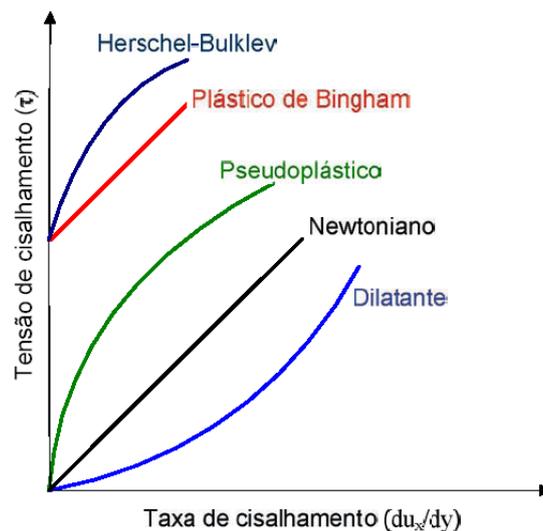


Figura 3 – Gráfico da tensão de cisalhamento com a taxa de deformação, demonstrando a dependência linear de um fluido newtoniano (MARCELO DE JESUS DIAS DE OLIVEIRA *et al.*, 2015)

2.2 Equação da Continuidade

A equação da continuidade é referente a um lei de conservação mais ampla, seja ela de massa, carga ou probabilidade. Ela surge em uma forma generalizada como consequência do teorema de Noether, no qual estabelece que para cada simetria existe uma quantidade conservada. Podemos obter a equação da continuidade a partir desse teorema, entretanto irei explorar o caminho para sua obtenção, através de conceitos mais básicos (BIRD *et al.*, 2006).

Imagine um volume infinitesimal na forma de um cubo fixo no espaço de um fluido

escoando. Podemos a partir desse volume, fazer uma análise acerca da quantidade de fluido (massa) que entra e sai neste volume. Inicialmente considerando duas das seis faces do cubo onde desta análise resulta a seguinte relação:

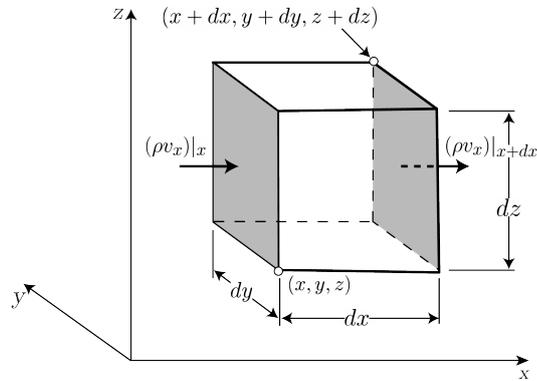


Figura 4 – Célula de volume com análise de fluxo de massa.

$$dxdydz \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_x = dydz[(\rho v_x)|_x - (\rho v_x)|_{x+dx}]. \quad (2.4)$$

Agora considerando outras faces do cubo temos:

$$dxdydz \frac{\partial \rho}{\partial t} = dydz[(\rho v_x)|_x - (\rho v_x)|_{x+dx}] + dxdz[(\rho v_y)|_y - (\rho v_y)|_{y+dy}] + dxdy[(\rho v_z)|_z - (\rho v_z)|_{z+dz}] \quad (2.5)$$

Dividindo tudo por $dxdydz$, e fazendo o limite de dx, dy e dz tendendo a zero, chegaremos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \right) = -(\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v}). \quad (2.6)$$

Obtemos a equação da continuidade, onde o ρv é o fluxo de massa e seu divergente é a taxa de fluxo de massa por unidade de volume. Para fluidos incompressíveis, cujo densidade não muda com a pressão. temos a densidade sempre constante, ou seja usando a equação 2.6 temos:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (2.7)$$

Aproximação de que um fluido é incompressível é bastante corriqueira e aceitável quando se trata de líquidos. Líquidos em geral, apresentam negligenciável variação na densidade para valores elevados da pressão. Quando tratamos de gases, essa aproximação não é válida pois estes variam bastante a densidade com a pressão.

2.3 Equação Navier-Stokes

Na mecânica, as funções horárias para a posição e velocidade que descrevem o movimento dos corpos são essenciais. Sabendo a posição e velocidade do objeto, somos capazes de descrever toda a trajetória do objeto, inclusive inferir quais forças estão atuando. Na fluidodinâmica não é diferente, necessitamos de um conjunto de equações que descrevem o escoamento do fluido, tal equações, são chamadas de Navier-Stokes e continuidade e são baseadas nas Leis de Newton para o movimento de um elemento do fluido. A equação de Navier-Stokes permite determinar os campos de velocidade e de pressão de um fluido em escoamento e foi denominada com esse nome graças a Claude-Louis Navier e George Gabriel Stokes que fizeram varias contribuições na área da mecânica dos fluidos. Podemos obter essa equação partindo de uma ponto lógico fácil de entender, semelhante ao abordado para obtenção da equação da continuidade. Devemos para tanto ponderar a taxa de entrada e/ou saída de momento do nosso elemento de controle, com isso, a taxa de aumento de momento pode expressa pelos seguintes termos:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Taxa de aumento} \\ \text{de momento} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Taxa de momento} \\ \text{entrando} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Taxa de momento} \\ \text{saindo} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Força externa} \\ \text{no fluido} \end{array} \right) \quad (2.8)$$

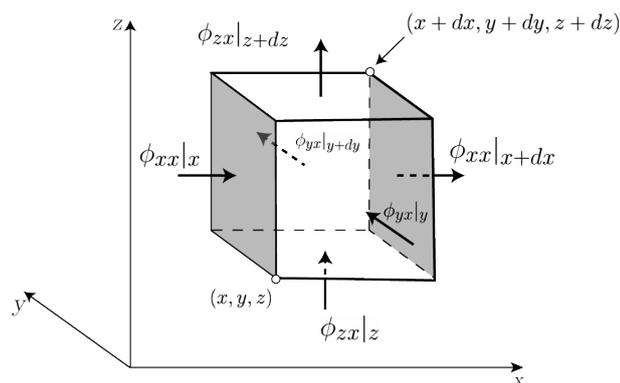


Figura 5 – Célula de volume com análise de fluxo de momento.

Analisando o fluxo de momento nas direção ϕ_x (área sombreada da nossa figura 5 que define o volume de controle) podemos escreve que:

$$dxdydz \frac{\partial v_x}{\partial t} = dydz(\phi_{xx}|_x - \phi_{xx}|_{x+dx}) + dzdx(\phi_{yx}|_y - \phi_{yx}|_{y+dy}) + dxdy(\phi_{zx}|_z - \phi_{zx}|_{z+dz}). \quad (2.9)$$

além disso, temos a força gravitacional atuando sobre o fluido inteiro, portanto:

$$F_x = \rho g_x dx dy dz. \quad (2.10)$$

Dividindo tudo por $dx dy dz$ e fazendo o limite tendendo a zero, teremos:

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \phi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x \quad (2.11)$$

Assim, juntando todas as componentes, temos:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} = -[\nabla \cdot \phi] + \rho g. \quad (2.12)$$

A equação 2.12 já é a equação de movimento que procuramos, na qual descreve o movimento do fluido. Podemos abrir o tensor de fluxo de momento, para ter uma forma mais expandida da mesma:

$$\frac{\partial \rho V}{\partial t} = -[\nabla \cdot \rho V \cdot V] + \nabla p + [\nabla \cdot \tau] + \rho g \quad (2.13)$$

ou ainda substituir o termo antes da igualdade, por uma derivada total dado por:

$$\frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial V}{\partial x} + v_y \frac{\partial V}{\partial y} + v_z \frac{\partial V}{\partial z} \right) = \frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla V) \quad (2.14)$$

utilizando as componentes do tensor de estresse, podemos reduzir para:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \frac{\mu}{3} \nabla(\nabla \cdot V) + \mu \nabla^2 V + \rho g \quad (2.15)$$

Aqui temos sob forma vetorial e mais compacta a equação de Navier-Stokes, na qual descobrimos o campo de velocidades e pressão do fluido, notemos que a equação 2.15 se refere a um fluido compressível e com viscosidade, não necessariamente constante, porém procuraremos trabalhar com ρ e μ constantes, tendo assim um fluido incompressível (equação 2.7):

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 V + \rho g. \quad (2.16)$$

Podemos tornar a equação 2.16 adimensional, que é de nosso interesse, pois nos permite introduzir alguns coeficientes adimensionais que caracterizam os fenômenos de escoamento, como número de Reynolds e o de Froude, falaremos sobre a interpretação e relevância dos mesmos um pouco mais a frente, vamos nos concentrar nas expressões nas quais eles se formam.

$$\mathcal{V} = \frac{V}{V_0}$$

$$\mathcal{P} = \frac{p}{p_0}$$

$$\mathcal{X}_i = \frac{x_i}{l}$$

São respectivamente, a velocidade, pressão e coordenadas adimensionais, quando substituídos na equação 2.16, teremos:

$$(\mathcal{V} \cdot \nabla)\mathcal{V} = -\nabla \mathcal{P} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathcal{V} + \frac{1}{Fr^2} g^* \quad (2.17)$$

onde Re é um número adimensional que expressa a razão entre forças inerciais e forças viscosas comumente chamado de número de Reynolds. Já Fr , também é um número adimensional, mas que expressa a razão entre a força inercial e a força do campo, dado por:

$$Fr^2 = \frac{V_0^2}{gl} \quad (2.18)$$

onde V_0 é a velocidade de escoamento, g a gravidade e l um tamanho característico do sistema.

2.4 Visualização de Escoamentos

A visualização dos campos de velocidade para o escoamento de um fluido é feita por meio das linhas de corrente. As linhas de corrente são linhas imaginárias no interior do escoamento onde a direção do vetor velocidade local é definido como sendo a tangente a esta linha. A intensidade da velocidade é caracterizada pelo adensamento das linhas de corrente. Quanto mais linhas de corrente por unidade de área houver em um determinado local, maior será o valor da magnitude da velocidade neste local.

Olhando a trajetória de partículas transportadas pelo fluido podemos perceber que as mesma tendem a seguir as linhas de corrente no interior do escoamento. A trajetória das partículas no interior do fluido são totalmente coincidentes com as linhas de corrente no limite onde a massa da partícula é muito pequena, neste caso a partícula é denominada *tracer*. Quando transportadas pelo fluido essas partículas apresentam uma inércia muito baixa e simplesmente seguem as linhas de corrente do escoamento.

Existem vários regimes e definições para o escoamento de um fluido tais como o regime laminar e turbulento. Para esta definição é utilizado um número adimensional denominado número de Reynolds. Da equação 2.17 teremos Re um número adimensional que expressa a razão entre forças inerciais e forças viscosas comumente chamado de número de Reynolds e é definido por:

$$Re = \frac{\rho V_0 l}{\mu} \quad (2.19)$$

onde ρ é a densidade do fluido, μ é a viscosidade, V_0 é a velocidade do escoamento e l um tamanho característico do sistema. Normalmente quando o número de Reynolds é superior a 2500 podemos classificar o escoamento como turbulento. Mas esse valor pode depender muito do problema em questão. Usualmente os escoamento ocorrem em regime turbulentos e esse é o regime típico da maioria das aplicações em adutoras, transporte industriais, fluxos em rios, etc. Assim quando temos $Re \ll 1$, as forças viscosas sobressaem com relação as forças inercias, o que nos dá um escoamento laminar.

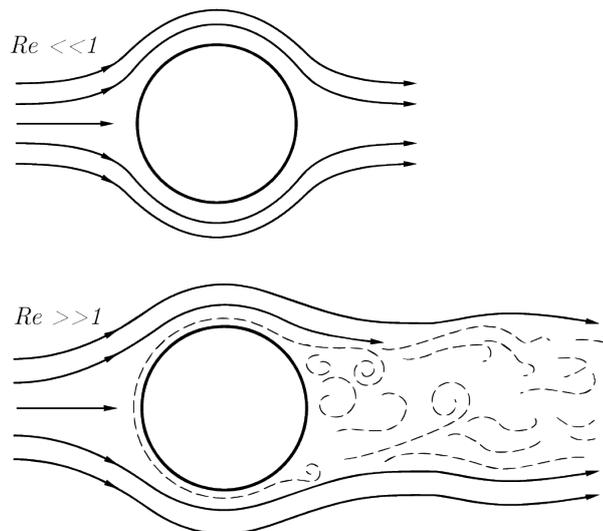


Figura 6 – Tipo de escoamento relacionado com o número de Reynolds.

Dentro dos regimes laminar e turbulento, existem os classificados como estacionários (permanente) ou não estacionários. Para um fluido estacionário o valor da velocidade e pressão não mudam com o tempo, mas podem variar entre posições diferente no interior do escoamento. O escoamento de fluidos podem ainda ser definidos quanto a sua rotação, rotacional ou irrotacional. No rotacional partes do fluido possuem velocidade angular e existe formação de vórtices (redemoinhos) no interior do escoamento. Já o irrotacional, que trata-se de uma aproximação onde os elementos do fluidos são considerados indeformáveis e o efeito da viscosidade é negligenciado.

No caso de escoamento estacionários podemos definir uma função para o caso de um escoamento bidimensional e incompressível na seguinte forma:

$$\Psi = \int (v_x dy - v_y dx) \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v_y &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Vale salientar, que a função corrente por definição satisfaz automaticamente a equação da continuidade. Sendo assim, dentre algumas propriedades dessa função, uma bem interessante é o fato de que duas linhas de corrente Ψ_a e Ψ_b definem um chamado tubo de corrente em que a vazão Q pode ser calculada a partir da equação 2.20 fazendo o caminho $\Psi_a \rightarrow \Psi_b$. Além disso, ela é útil em cálculos analíticos e numéricos reduzindo o número de variáveis dependente do escoamento. Na prática, se eu tiver um campo de velocidades expresso por uma função corrente, eu não precisaria resolver a equação da continuidade.

2.5 Método computacional

Muito problemas físicos envolvem equações diferenciais ordinárias, como por exemplo movimento de projeteis, movimento harmônico, decaimento radioativo e mecânica celeste. Vários desses problemas citados anteriormente, não possuem solução analítica, como por exemplo o movimento de um pêndulo duplo. Diante disso, o objetivo dos métodos computacionais é basicamente contornar esse problema. Partindo de um valor inicial dado podemos trabalhar com os métodos computacionais e determinar valores para solução em momentos posteriores (VETTERLING *et al.*, 1992). Considerando um equação diferencial ordinária (EDO), podemos facilmente exemplificar a utilização de um método computacional bastante conhecido, o método de Euler. Como exemplo para o método de Euler, considere um problema simples de decaimento radioativo, cuja equação diferencial de primeira ordem é dada pela expressão:

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{N}{\tau} \quad (2.22)$$

onde $N(0)$ é o número de núcleos presentes inicialmente. Analisando a expansão em Taylor da equação acima:

$$N(\delta t) = N(0) + \frac{dN}{dt} \delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2N}{dt^2} (\delta t)^2 + \dots \quad (2.23)$$

onde δt é um pequeno distanciamento no tempo com relação ao $t = 0$, logo, podemos saber o valor de $N(\delta t)$ a partir do valor de $N(0)$ e sua derivada. Visto que os termos de derivadas de ordem superiores apresentam uma dependência em potência com o termo δt , que é muito pequeno, podemos desprezar esses termos de ordens superiores e reduzir a expansão para termos de ordens menores apenas, o que resulte em:

$$N(\delta t) \approx N(0) + \frac{dN}{dt} \delta t.$$

Podemos chegar nesse resultado com a definição de derivada, porém vamos dar continuidade ao raciocínio, substituindo o termo da derivada da equação 2.22 pelo termo que acabamos de encontrar:

$$N(t + \delta t) \approx N(t) - \frac{N(t)}{\tau} \delta t$$

A precisão da equação acima, está fundamentalmente relacionada ao tamanho do termo δt , visto que descartamos infinitas potências da serie de taylor, onde esse termo estava presente, mesmo que infimamente. Logo teremos o tamanho do erro com relação a solução analítica relacionada ao tamanho do "passo" que está sendo dado δt . De outro modo podemos escrever:

$$y_{n+1} = y_n + \delta t f(x_n, y_n). \quad (2.24)$$

onde f é uma função relacionada a derivada primeira.

2.5.1 Método de Runge-Kutta

O método de Runge-kutta objetivamente tem o mesmo principio que o método de Euler, entretanto o de Euler avança a solução em um intervalo δt usando informações derivadas do inicio do intervalo, sendo assim, é possível verificar por expansão em série de potências que o erro é uma potência de δt menor. Já no método Runge-Kutta, podemos considerar a equação 2.24 como uma etapa de teste para o ponto médio do intervalo δt , e em seguida usarmos os valores de x_n e y_n para calcular o passo que será dado no intervalo δt .

$$\begin{aligned} k_1 &= \delta t f(x_n, y_n) \\ k_2 &= \delta t f\left(x_n + \frac{1}{2}\delta t, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ y_{n+1} &= y_n + k_2 + \varepsilon(\delta t)^3. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Convencionalmente esse método é de segunda ordem, visto que o seu erro se encontra um termo de $(\delta t)^3$, comumente chamado de método de Runge-kutta de segunda ordem. Sendo assim, podemos elevar ainda mais a ordem desse método, basta seguir o mesmo raciocínio de conseguir o ponto médio do intervalo dado. Para isso iremos tirar uma média ponderada dos valores

encontrados dos pontos médios, logo temos as seguinte expressões:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \delta t f(x_n, y_n) \\
 k_2 &= \delta t f\left(x_n + \frac{1}{2}\delta t, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\
 k_3 &= \delta t f\left(x_n + \frac{1}{2}\delta t, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \\
 k_4 &= \delta t f(x_n + \delta t, y_n + k_4) \\
 y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + \varepsilon(\delta t)^5.
 \end{aligned}
 \tag{2.26}$$

Geralmente o método de Runge-Kutta de quarta ordem é mais preciso ao de segunda ordem, porem nem sempre isso é verdade, dependendo do problema em questão. Diante disso, temos algumas razões para não escolhermos o método de Euler, uma delas é que comparado a outros métodos mais sofisticados, como por exemplo o que acabamos de ver, para o mesmo número de passos obtemos uma solução com uma melhor precisão. Vamos verificar isso, comparando uma curva referente ao movimento resistivo da mecânica clássica de um lançamento de projétil com resistência do ar.

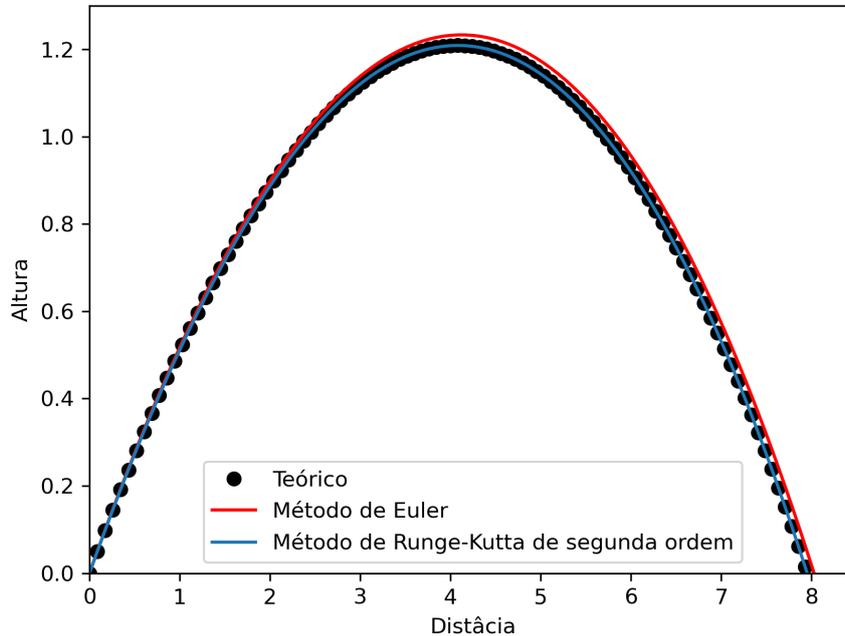


Figura 7 – Comparação entre o método de Euler e Runge-Kutta.

Podemos notar que o método de Runge-Kutta é mais preciso, visto que o mesmo é de segunda ordem, diferente de Euler que possui somente uma ordem.

3 RESULTADOS OBTIDOS

3.1 Solução de Kuwabara

A solução Kuwabara é amplamente utilizada para estudos de escoamento através de filtros fibrosos. Esta solução foi originalmente proposta como uma solução analítica da equação de Navier-Stokes por Kuwabara (MARSHALL *et al.*, 1994), utilizando arranjos periódicos de cilindros para casos em que temos o chamado fluxo de Stokes. Nesse tipo de escoamento as forças inercias são ínfimas comparado as forças viscosas, sendo o números de Reynolds muito pequeno ($Re \ll 1$). Na natureza essa espécie de escoamento ocorre na natação de micro organismos ou fluxo de lava.

Inicialmente utilizamos a solução analítica de Kubawara para investigar a eficiência de uma célula de filtro unitária. Para esta célula unitária analisamos a eficiência de captura para partículas que são transportada pelo fluido nas proximidade de um cilindro no limite do escoamento de Stokes. Para tanto, iremos precisar da função de linha gerada a partir da solução para o escoamento estabelecida por Kuwabara e da solução da equação do movimento de uma partícula no interior deste escoamento. A primeira apesar de parecer complexa, como dito anteriormente, pode ser simplificada usando a equação 2.17 utilizando a aproximação relacionada ao número de Reynolds, para um fluido incompressível (equação 2.7). Com base nestas equações teremos:

$$Re \left((\mathcal{V} \nabla \mathcal{V}) + \nabla \mathcal{P} - \frac{g^*}{Fr^2} \right) = \nabla^2 \mathcal{V}$$

$$\nabla^2 V = 0.$$

Podemos verificar que a equação de Navier-Stokes, após algumas simplificações assume uma forma linear. Utilizando a equação 2.20 obtemos facilmente que:

$$\nabla^4 \Psi = \Delta^2 \Psi = 0 \tag{3.1}$$

onde o Δ é um operador dado por ∇^2 . Tendo as componentes da velocidade é possível resolver a equação biharmônica [3.1] para o fluxo de Stokes (HAYEK, 2000). Considerando as condições de contorno referentes ao arranjo periódico de uma célula unitária na forma

$$v_r(r = R) = v_\theta(r = R) = 0. \tag{3.2}$$

Para as velocidades em coordenadas polares na superfície do obstáculo, e para o raio maior que

o obstáculo teremos:

$$\begin{aligned} v_r(r = R + dr) &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ v_\theta(r = R + dr) &= -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \\ \omega(r = R + dr) &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde ω é a vorticidade. A solução da equação 3.1 pode ser expressa na forma:

$$\Psi(r, \theta) = R \left[C_1 \left(\frac{r}{R} \right)^3 + C_2 \frac{r}{R} + C_3 \frac{R}{r} + C_4 \frac{r}{R} \ln \left(\frac{r}{R} \right) \right] \text{sen}(\theta), \quad (3.4)$$

onde as constantes são dadas por:

$$\begin{aligned} C_4 &= \frac{4}{2\ln(\varepsilon) + 3 - 4\varepsilon + \varepsilon^2} \\ C_1 &= -\frac{\varepsilon C_4}{4} \\ C_3 &= C_1 + \frac{C_4}{2} \\ C_2 &= -C_1 - C_3 \end{aligned} \quad (3.5)$$

e a porosidade ε é dada por:

$$\varepsilon = 1 - \pi R^2. \quad (3.6)$$

Com a função que define as linhas de campo no interior do escoamento em mãos, equação 3.3 ou seja, as respectivas funções:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r} R \left[C_1 \left(\frac{r}{R} \right)^3 + C_2 \frac{r}{R} + C_3 \frac{R}{r} + C_4 \frac{r}{R} \ln \left(\frac{r}{R} \right) \right] \cos(\theta) \\ v_\theta &= -R \left[C_1 \left(\frac{3r^2}{R^3} \right) + \frac{C_2}{R} - C_3 \frac{R}{r^2} + \frac{C_4}{R} \ln \left(\frac{r}{R} \right) + C_4 \right] \text{sen}(\theta) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Com base nessas funções podemos facilmente obter as curvas que representam as linhas de corrente e o seu respectivo mapa de cores para as velocidades no interior do escoamento para uma célula unitária, conforme exibido na figura 8.

Para efeito de simplicidade, iremos transformar esse campo de velocidades para coordenadas cartesianas com o objetivo de facilitar o tratamento da partícula transportada pelo fluido durante o escoamento. Considerando os termos entre colchetes da equação 3.7 como γ e β , podemos expressar os componentes da velocidade v_x e v_y em coordenadas cartesianas na forma:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{1}{r^3} R (\gamma x^2 + \beta y^2) \\ v_y &= \frac{1}{r^3} R (\gamma xy - \sqrt{x^2 + y^2} \beta xy). \end{aligned} \quad (3.8)$$

As linhas de corrente e os valores da velocidade obtidas por meio das expressões em coordenadas cartesianas, estão representadas na figura 9. As cores indicam a magnitude das mesmas, sendo em ordem crescente do azul ao vermelho.

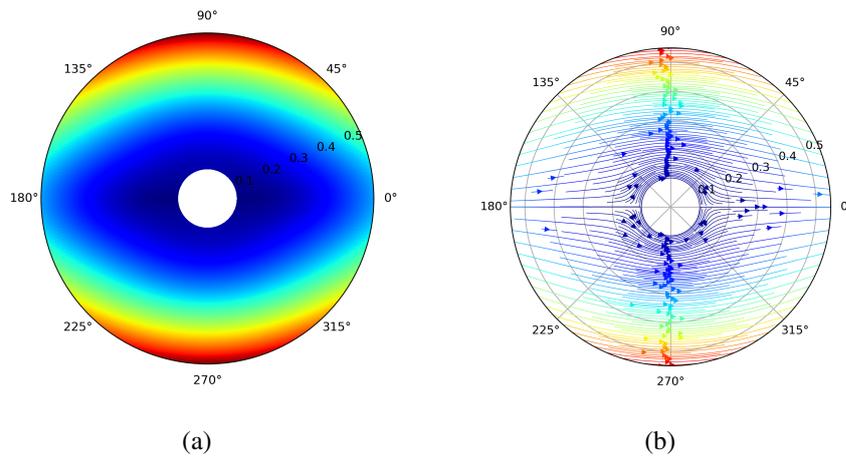


Figura 8 – (a) Mapa de cores do escoamento do fluido em coordenadas polares. (b) Linhas de corrente do escoamento do fluido em coordenadas polares. Célula unitária circular com porosidade de aproximadamente 0.96(Raio do obstáculo equivalente a 0.1).

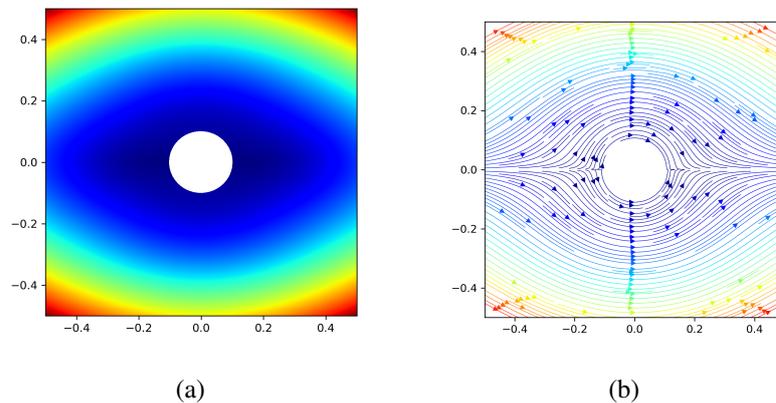


Figura 9 – (a) Mapa de cores do escoamento do fluido em coordenadas cartesianas. (b) Linhas de corrente do escoamento do fluido em coordenadas cartesianas. Célula unitária quadrada com porosidade de aproximadamente 0.96 (Raio do obstáculo equivalente a 0.1).

3.2 Eficiência da célula unitária

Como dito anteriormente, iremos nos concentrar no chamado *deep bed filtration*, no qual consiste em um método de filtragem utilizado para remover pequenas partículas em líquidos. Este método envolve um conjunto de mecanismos físicos, porém dentre vários presentes no método, vamos nos concentrar no inercial que é o mais importante na maioria dos casos práticos. Conforme as partículas sentem a presença do campo de velocidades, as mesmas são transportadas pelas linhas de corrente, entretanto devido sua inércia, as partículas nem sempre tendem a seguir precisamente as linhas. Caso uma partícula possua inércia suficiente ela pode seguir uma trajetória que levará a uma colisão com o obstáculo característico do filtro. Essa propriedade da partícula é medida através de uma constante adimensional comumente chamada

de número de Stokes:

$$S_t = \frac{V d_p^2 \rho_p}{18 l \mu} \quad (3.9)$$

onde d_p e ρ_p são respectivamente o diâmetro e a densidade da partícula, μ e V são a viscosidade e velocidade do fluido respectivamente, enquanto que l é o comprimento característico do obstáculo, podemos ver como a partícula se comporta para cada número de Stokes na figura 10.

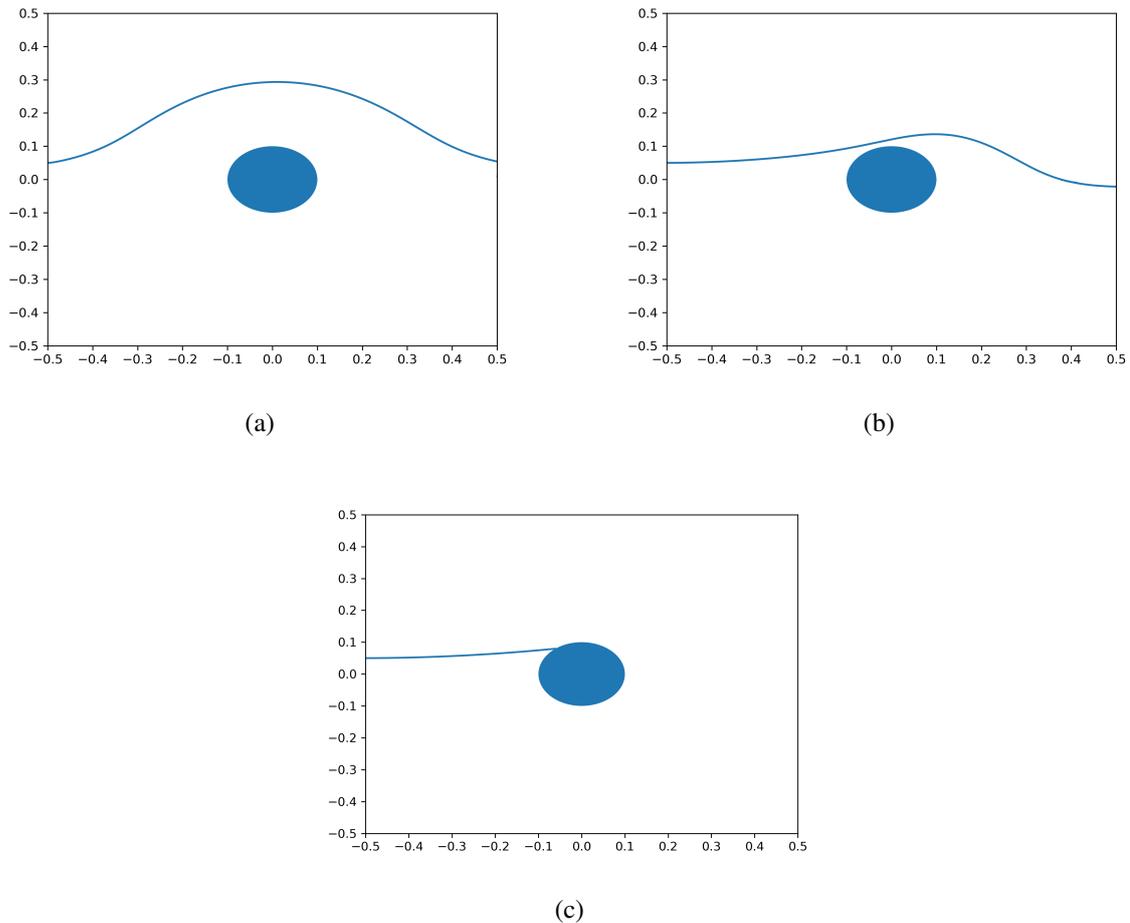


Figura 10 – (a) Trajetória de uma partícula com $St \approx 0$. (b) Trajetória da partícula com $St \approx 0.7$. (c) Trajetória da partícula com $St \gg 1$.

Para o caso em estudo, tratamos com uma célula de tamanho unitário bidimensional com um obstáculo circular de diâmetro D inserido no interior da célula. A porosidade na célula é calculada com base na equação 3.6 e para o campo de velocidade no interior da célula utilizamos a solução de Kubawara. Negligenciando a transferência de momento da partícula para o fluido (partícula muito pequena), podemos assumir que as forças de arraste e gravitacional são as únicas forças relevantes atuante na partícula. Com base nessas primícias, podemos calcular a trajetória de uma partícula transportada pelo fluido a partir da solução da Segunda Lei de Newton sobre a

partícula, que pode ser escrita na forma:

$$\frac{du_p}{dt} = \frac{u - u_p}{S_t} + F_g \frac{g}{|g|}. \quad (3.10)$$

O parâmetro F_g é uma constante adimensional:

$$F_g = \frac{(\rho - \rho_p)l|g|}{v^2\rho_p}. \quad (3.11)$$

Na equação de movimento da partícula u e u_p são velocidades adimensionais do fluido e da partícula respectivamente. Com base nesta equação de movimento iremos investigar o movimento de uma partícula lançada na entrada da caixa unitária com uma velocidade igual a velocidade do fluido na entrada. A partícula será lançada de uma posição δ distante do eixo Ox na direção orthogonal ao mesmo conforme ilustrado na figura 11. Para testar a eficiência do filtro, devemos procurar qual a distância crítica δ no qual a partícula é sempre capturada pelo obstáculo e acima desta a partícula segue o seu caminho livremente no interior do escoamento. No nosso estudo, capturada significa colidir com o obstáculo. A eficiência de captura das partículas é definida por $\delta = 2y$ conforme a figura 11. A análise sobre a eficiência de captura será conduzida em função do número de Stokes, que define a inércia da partícula. No caso em que $S_t \rightarrow \infty$ teremos um comportamento puramente balístico, nos dando total eficiência, enquanto que $S_t \rightarrow 0$ teríamos um comportamento de uma partícula tipo *tracer* que segue as linhas de corrente do escoamento, resultando em uma eficiência nula, ou seja, nenhuma captura.

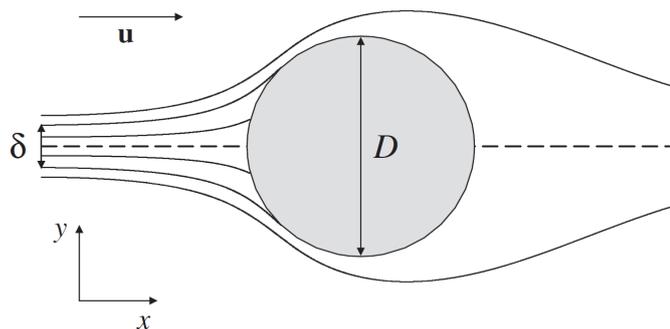


Figura 11 – Esquema de como funciona a captura da partícula para possíveis trajetórias com o parâmetro de colisão δ (ARAÚJO *et al.*, 2006).

É importante ressaltar que a força gravitacional está na direção horizontal, e como podemos imaginar, ela vai ser essencial para caracterizar o número de stokes necessário para a colisão da partícula com o obstáculo (Stokes crítico). O resultado para o parâmetro de colisão, definido como sendo δ/D , em função do número de Stokes S_t é mostrado na figura 12. As

diferentes curvas (cores) correspondem aos valores da aceleração na direção do escoamento definidos em termos de frações da gravidade local g .

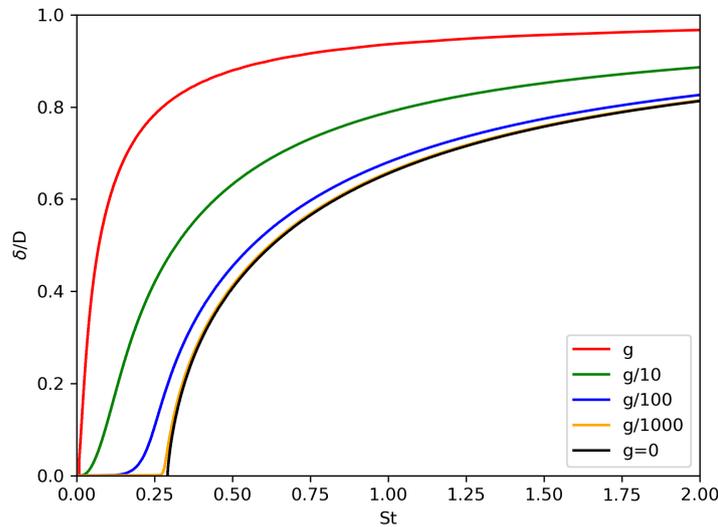


Figura 12 – Parâmetro de captura δ/D em função do número de Stokes. As diferentes cores correspondem a valores da aceleração na direção do escoamento expresso em termos de frações do valor da gravidade g . Estes valores para o parâmetro de captura foram obtidos por meio da integração numérica da equação de Newton 3.10 utilizando o método de Runge kutta de 4ª ordem com a solução de Kuwabara. Foi utilizado $F_g = 16$, equação 3.11, porosidade $\varepsilon \approx 0.965$.

Como podemos perceber quanto maior o número de Stokes, maior a eficiência na captura de partículas. Em particular, quando existe uma aceleração diferente de zero na direção do escoamento, necessitamos de um número de Stokes menor para uma melhor eficiência, enquanto que para uma aceleração nula necessitamos de um número de Stokes específico para que consigamos alguma eficiência. Uma outra análise conduzida diz respeito ao efeito da porosidade da célula sobre a eficiência de captura. A porosidade é controlada por meio do tamanho do obstáculo. Quanto maior o obstáculo no interior da célula unitária menor será a parte vazia na célula, que corresponde ao valor da porosidade. Os resultados desta análise são mostrados na figura 13.

Podemos notar que a tendência da curva é se aproximar do eixo vertical para um mesmo valor do número de Stokes a medida em que obstáculo fica maior, o que implica que quanto maior o obstáculo maior a eficiência. Já vimos que existe uma diferença nas curvas de acordo com o raio do obstáculo, porém podemos dizer que para porosidades mais baixas todas apresentam um mesmo formato para o crescimento do parâmetro δ/D em função do número de Stokes.

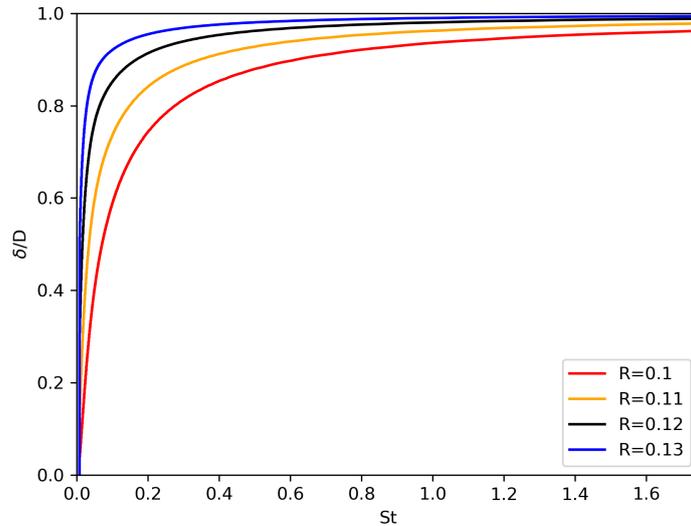


Figura 13 – Gráfico do parâmetro de eficiência/captura em função do número de Stokes. As diferentes curvas/cores estão relacionada com diferentes porosidade da célula unitária, obtidas por meio do aumento do tamanho do raio do círculo no interior da célula. Os valores para porosidade são: $\epsilon_{0.1} \approx 0.965$, $\epsilon_{0.11} \approx 0.961$, $\epsilon_{0.12} \approx 0.955$ e $\epsilon_{0.13} \approx 0.945$. $F_g = 16$.

3.2.1 Dipolo elétrico

Nesta seção conduziremos a mesma análise de eficiência considerando além do escoamento de fluido nas proximidades do obstáculo a presença de um dipolo elétrico no interior da célula unitária. Este dipolo elétrico é criado devido a presença de cargas de sinal opostos nos dois semicírculos (superior/inferior) do nosso obstáculo. Iremos analisar apenas a condição onde a partícula lançada no interior do escoamento possui uma carga positiva constante. Agora no lugar de um campo gravitacional uniforme estabelecido na direção do escoamento temos um campo tipo dipolo elétrico atuando sobre a partícula carregada positivamente devido a presença de cargas no obstáculo. Neste caso, devido a natureza da força elétrica existe uma interação de longo alcance atuando na partícula durante o seu movimento que muda conforme a posição da partícula no interior do fluido. Além do campo de velocidades devido ao escoamento do fluido que atua na forma de uma força de arraste, teremos a força elétrica sobre a partícula carregada. A expressão para o campo elétrico no interior da célula é obtida por meio da equação 3.12(GRIFFITHS *et al.*, 1999) a seguir:

$$E_{dip} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos(\theta)\hat{r} + \sin(\theta)\hat{\theta}) \quad (3.12)$$

e sua correspondente em coordenadas cartesianas:

$$E_{dip} = \frac{3p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\left(\left(\frac{x}{r} \right)^2 - \frac{1}{3} \right) \hat{x} + \frac{xy}{r^2} \hat{y} \right]. \quad (3.13)$$

Com base na equação 3.12 podemos construir os gráficos que mostram as linhas de campo elétrico e mapa de cores para a intensidade do campo em coordenadas polares, conforme as figuras 14 (a) e (b). Usando a expressão correspondente para o caso de coordenadas cartesianas obtemos as figuras.15(a) e em (b) mostramos o campo de velocidades devido ao escoamento do fluido no interior da célula unitária.

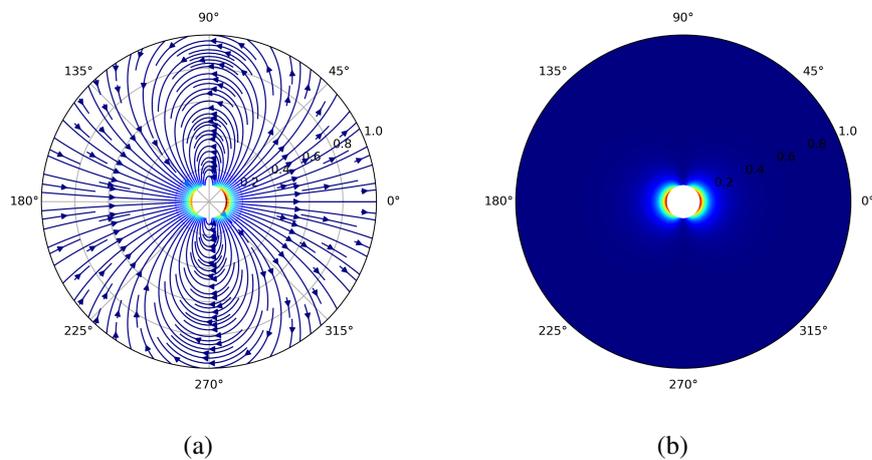


Figura 14 – (a) Linhas de campo de como se comporta o dipolo elétrico dentro de uma célula unitária circular. (b) Mapa de cores do dipolo elétrico na célula unitária circular. Célula unitária circular com porosidade de aproximadamente 0.96 (Raio do obstáculo equivalente a 0.1).

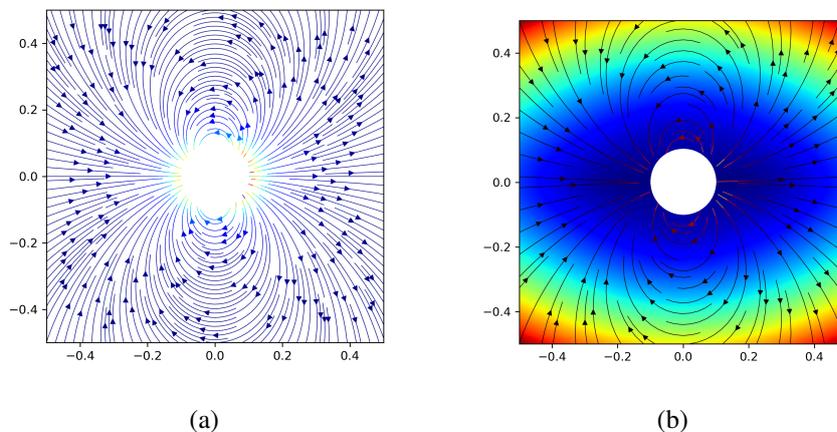


Figura 15 – (a) Linhas de campo do dipolo elétrico dentro de uma célula unitária quadrática. (b) campo de velocidade devido ao escoamento do fluido nas proximidades do obstáculo no interior da célula unitária. A interação com esses dois campos definirá o comportamento sobre a trajetória da partícula. Célula unitária quadrática com porosidade de aproximadamente 0.965 (Raio do obstáculo equivalente a 0.1).

Utilizaremos a mesma equação de Newton 3.10 para descrever a trajetória nesse novo caso, substituindo a força gravitacional adimensional por uma força elétrica adimensional. A equação que define o movimento da partícula nesta nova condição, escoamento do fluido e dipolo elétrico, pode ser expressa na forma:

$$\frac{du_p}{dt} = \frac{u - u_p}{S_t} + F_e. \quad (3.14)$$

Para esta configuração (dipolo elétrico/fluido) o gráfico do parâmetro de eficiência apresenta mudanças significativas com a presença de um campo gerado pela presença do dipolo, conforme podemos ver na figura 16. Comparado ao gráfico para o campo com aceleração uniforme (caso gravitacional) a eficiência pode ser bem maior com o parâmetro δ/D assumindo valores que chegam a três vezes o tamanho do obstáculo. Esse efeito certamente advém da natureza de longo alcance para o campo tipo dipolo elétrico. Para valores elevados do número de Stokes não há mais captura quando os campos são mais intensos, linhas sólidas vermelha e verde, para os valores E e $E/10$ respectivamente. O parâmetro de eficiência cresce até um valor limite e atinge uma saturação. A medida que reduzimos o valor do campo (alterando a magnitude de p) as curvas apresentam um comportamento bem peculiar. Para o valor do campo $E/100$ (curva azul) esta apresenta inicialmente um crescimento semelhante as curvas para alto valor de campo, mas em seguida exibe uma pequena inflexão e novamente um crescimento muito suave. Esta está no limite do comportamento para campos baixos. Quando o campo é nulo (curva preta) recuperamos o comportamento já mencionado com a presença de um valor crítico para o Stokes. Considerando um valor para o campo $E/1000$, obtemos um comportamento interessante para o parâmetro de eficiência. Esse cresce de forma suave e se estabiliza em um comportamento muito parecido ao caso de campo nulo. A partir de um valor para o Stokes as curvas ficam muito semelhantes. Vale salientar que mesmo devido ao comportamento do campo elétrico ser do tipo $1/r^3$, para distâncias elevadas no lançamento δ/D o efeito do escoamento não consegue livrar a partícula da captura. Apenas quando o efeito de inércia é forte a partícula consegue escapar da situação de captura. O escoamento passa a ser o aspecto dominante sobre a trajetória da partícula. Isso explica a ausência da condição de captura considerando os valores de campo elétrico E e $E/10$.

Para efeito de comparação realizamos um estudo adicional, nas mesmas condições de escoamento e dipolo elétrico, agora considerando um dipolo elétrico rotacionado de 90° em relação ao estudo anterior. O resultado para o parâmetro de eficiência em função do número de Stokes é mostrado na figura 17. As curva apresentam uma mudança no comportamento

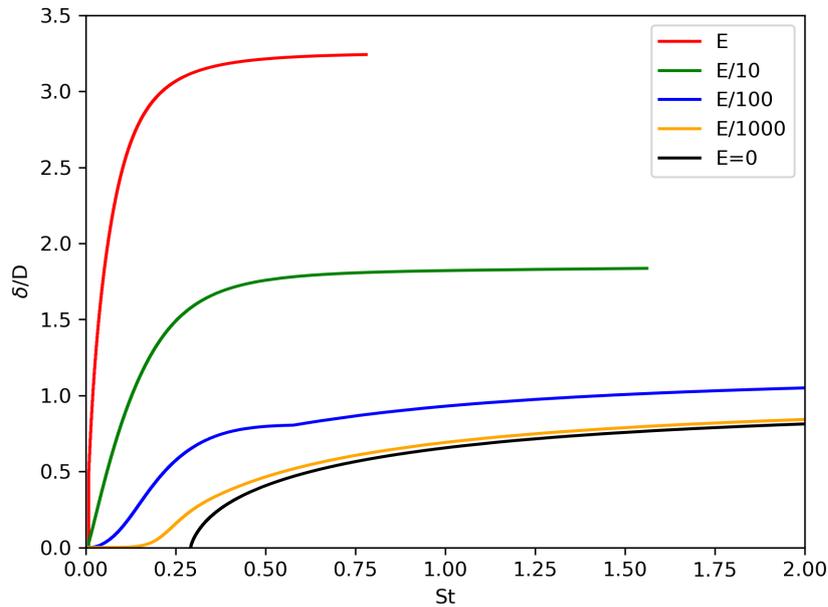


Figura 16 – Gráfico para o parâmetro de captura como função do número de Stokes. As curvas apresentadas em diferentes cores correspondem aos valores do campo elétrico devido a presença do dipolo elétrico. Durante sua trajetória a partícula interage com o escoamento e com o campo devido ao dipolo elétrico. Integração numérica da equação 3.14 utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com a solução de Kuwabara. Porosidade $\varepsilon \approx 0.965$.

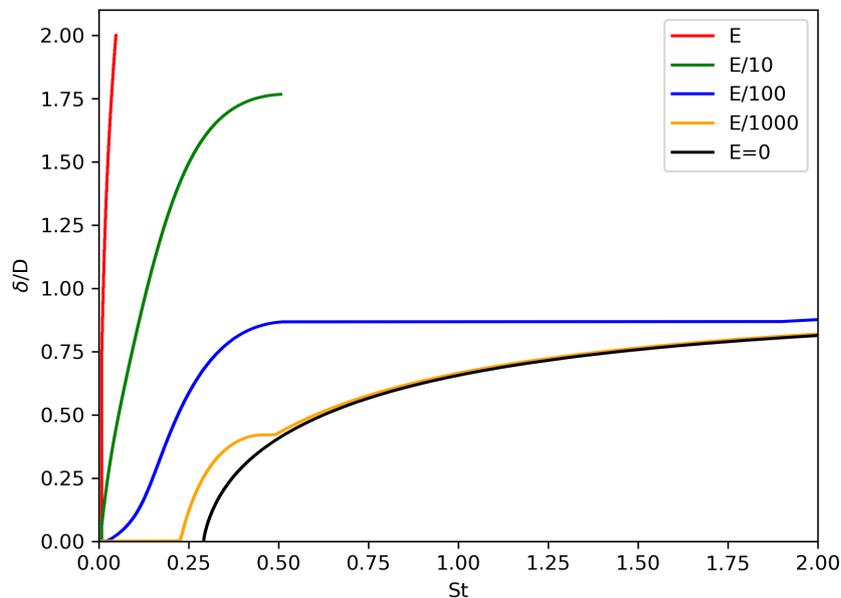


Figura 17 – Relação do campo elétrico com a razão do parâmetro de colisão pelo diâmetro (Dipolo elétrico rotacionado 90°). Integração numérica da equação 3.14 utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com a solução de Kuwabara. Porosidade $\varepsilon \approx 0.965$.

quanto ao limite de captura. O parâmetro de captura δ/D no caso de campos elevados E e $E/10$ agora apresentam um crescimento mais acentuado em função do número de Stokes e um limite

para a eficiência de captura com valores menores para o parâmetro St . Neste caso as partículas não são mais aprisionadas e seguem o escoamento em valores de inércia menores. No caso de valor mais baixo $E/1000$ a partícula apresenta um comportamento crítico semelhante ao caso de campo nulo. Adicional a este novo comportamento, a curva exibe um crescimento acentuado para valores baixos de Stokes e em seguida uma inflexão, para então seguir um comportamento semelhante ao caso observado para um campo nulo. Quando o valor do campo é $E/100$ ocorre um comportamento inusitado. O parâmetro de eficiência exibe uma descontinuidade, ou seja, inicialmente a partícula é aprisionada para valores de Stokes. Em seguida a medida que aumentamos o valor do Stokes, surge uma região, intervalo de valores de Stokes, no qual não há captura para a partícula. Em seguida para valores mais elevados aparece novamente uma região onde a partícula passa a ser capturada novamente. Para melhor visualização mostramos o comportamento para essa curva (curva azul) na figura 18. Nesta figura exibimos apenas a curva correspondente ao caso $E/100$. Neste gráfico é possível visualizar a região descontínua, correspondente ao intervalo de valores do parâmetro St onde não há captura. Em seguida é possível visualizar um crescimento nos valores de δ/D .

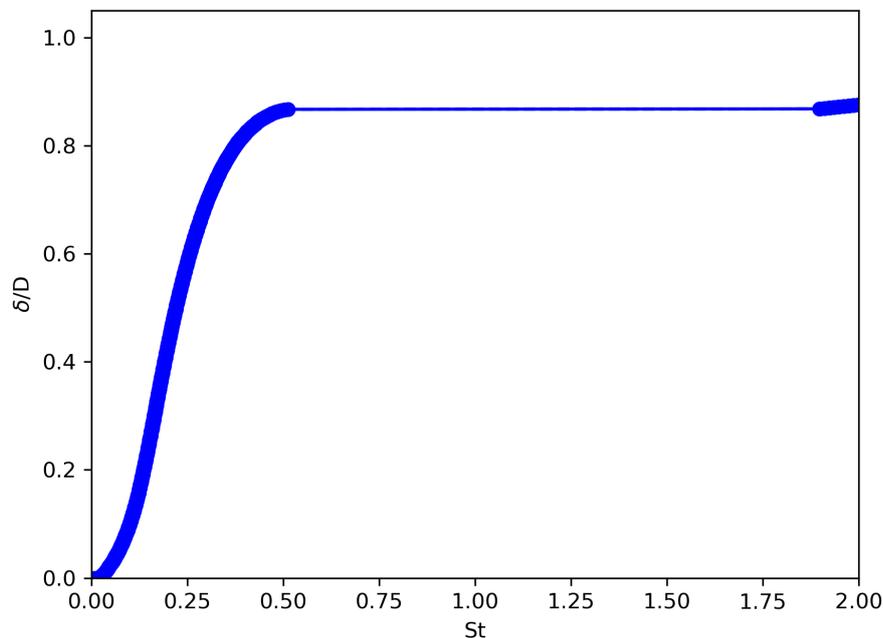


Figura 18 – Caso $E/100$ do gráfico da figura 17 para um dipolo elétrico rotacionado. Os pontos indicam a relação St - δ/D na qual a partícula foi capturada (Stokes crítico) e a curva sólida representa a projeção que foi traçada entre os dois pontos distantes.

Nesse caso especial o que acontece é que a partícula está sendo aprisionada no lado

direito do obstáculo, ela passa pela origem do sistema, perto o suficiente para que o campo faça a mesma voltar. Isso ocorre antes do parâmetro de colisão passar do diâmetro. Devido a este efeito a partícula volta a ser aprisionada quando o número de Stokes passa a ser suficientemente grande como podemos ver na figura 19.

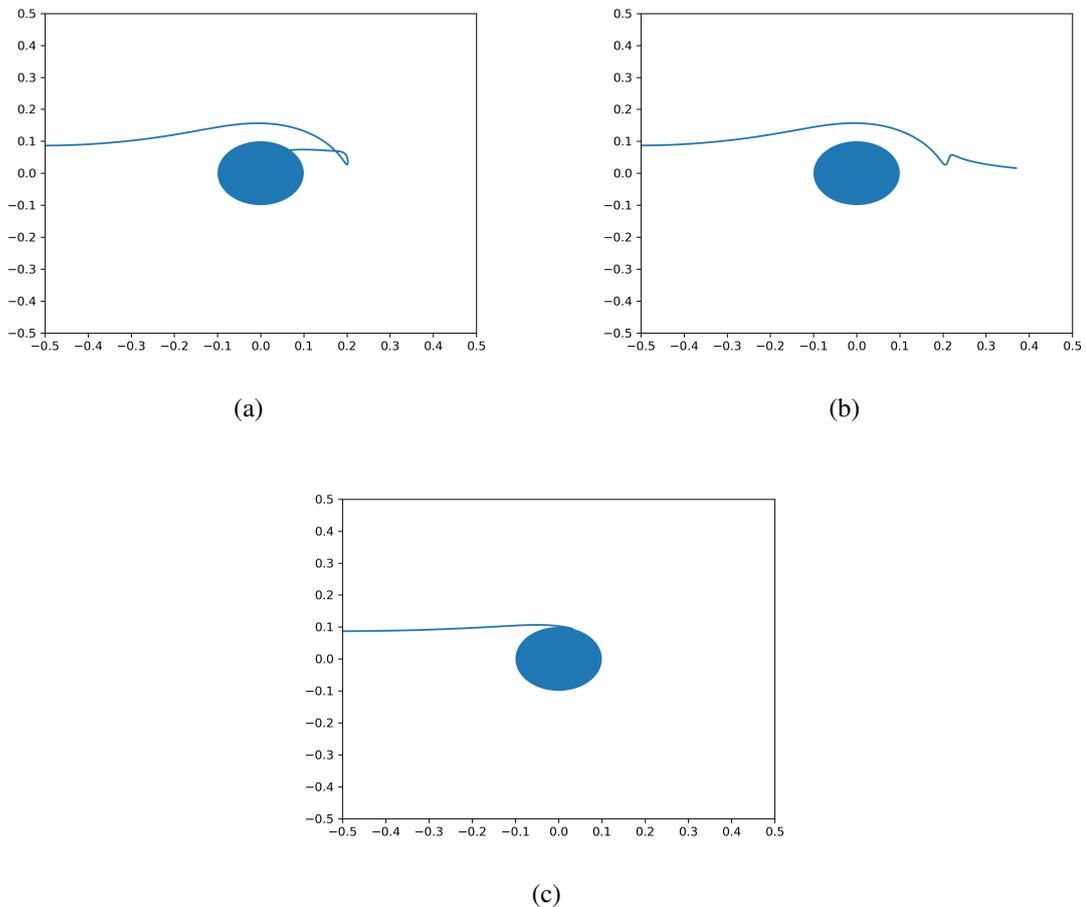


Figura 19 – (a) Trajetória da partícula um ponto antes de conseguir escapar do obstáculo. (b) Trajetória da partícula que conseguiu escapar do obstáculo (representando o "vão" na figura 18). (c) Trajetória da partícula quando volta a colidir com o obstáculo devido ao aumento do número de Stokes.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho, realizamos uma investigação numérica sobre o processo de captura de partículas durante o escoamento nas proximidades de um obstáculo. Este fenômeno de captura incorpora os ingrediente básicos presente nos processos de filtração bastante comum na indústria petroquímica e Empresas fornecedoras de água potável. Em particular, investigamos o processo de captura de partículas lançadas no interior de um escoamento nas proximidade de um obstáculo circular, em função da distância de lançamento normalizada δ/D ortogonal a direção do escoamento. Analisamos para quais distância de lançamento de uma partícula, esta colide com um obstáculo em função do parâmetro número de Stokes, que define basicamente a inércia da partícula. Para esta configuração incluímos em adição ao campo de escoamento do fluido a presença de uma campo externo, gravitacional e/ou elétrico. No primeiro caso, campo gravitacional uniforme, analisamos o parâmetro de eficiência/captura δ/D para diferentes valores do campo externo uniforme. Observamos a presença de um valor crítico de captura para o parâmetro Stokes, apenas na condição de campo externo nulo. Diferente do caso com campo uniforme, ou seja, no caso de um campo elétrico gerado pela presença de um dipolo elétrico, existe a possibilidade de um Stokes crítico para campo externo baixo, diferente de zero. Acreditamos que a natureza de longo alcance e também a dependência do campo com a posição (não uniformidade) sejam os aspectos que possibilitam a existência de um Stokes crítico mesmo na presença de uma campo externo diferente de zero. Acreditamos que o estudo apresentado nesta monografia, possa ajudar a melhorar a compreensão a cerca dos processos básicos existente nos processos de filtração.

Para trabalhos futuros, esperamos investigar considerando mais casos para o valor do campo externo. Estender o estudo para um meio poroso desordenado se estabelece como uma tarefa natural, onde além do efeito local no campo de escoamento teremos efeitos diversos devido a presença de vários obstáculos no interior do meio poroso.

Nesta perspectiva futura, devemos utilizar simulações de meios porosos, replicando um processo de filtração com todos os elementos adicionados nesse trabalho e para inúmeras partículas, com objetivo de obtermos o número médio que consegue passar pelo filtro, qual profundidade cada uma irá conseguir parar e por fim estudarmos diferentes fluidos dos quais não poderemos linearizar a equação de Navier-Stokes juntamente com outros mecanismos de transportes, requerindo assim uma solução numérica para essas equações.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, A. D.; ANDRADE, J. S.; HERRMANN, H. J. Critical role of gravity in filters. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 97, n. 13, set. 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.97.138001>.
- BELFORT, G. Fluid mechanics in membrane filtration: Recent developments. **Journal of Membrane Science**, Elsevier BV, v. 40, n. 2, p. 123–147, jan. 1989. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0376-7388\(89\)89001-5](https://doi.org/10.1016/0376-7388(89)89001-5).
- BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. **Transport Phenomena** -. New York: John Wiley Sons, 2006. ISBN 978-0-470-11539-8.
- GRIFFITHS, D. J.; GRIFFITHS, P. D. J.; GRIFFITHS, v. J.; COLLEGE, R. **Introduction to Electrodynamics** -. London: Prentice Hall, 1999. ISBN 978-0-138-05326-0.
- HAYEK, S. **Advanced Mathematical Methods in Science and Engineering** -. Boca Raton, Fla: CRC Press, 2000. ISBN 978-0-824-70466-7.
- JEGATHEESAN, V.; VIGNESWARAN, S. Deep bed filtration: Mathematical models and observations. **Critical Reviews in Environmental Science and Technology**, Informa UK Limited, v. 35, n. 6, p. 515–569, nov. 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/10643380500326432>.
- MARCELO DE JESUS DIAS DE OLIVEIRA; GIHAD MOHAMAD; LARISSA DEGLIUMINI KIRCHHOF. **Avaliação do tempo de Consolidação de argamassas colantes através de métodos reológicos**. Unpublished, 2015. Disponível em: <http://rgdoi.net/10.13140/RG.2.1.2720.2400>.
- MARSHALL, H.; SAHRAOUI, M.; KAVIANY, M. An improved analytic solution for analysis of particle trajectories in fibrous, two-dimensional filters. **Physics of Fluids**, AIP Publishing, v. 6, n. 2, p. 507–520, fev. 1994. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.868346>.
- PITCH drop experiment. **School of Mathematics and Physics**, Feb 2021. Disponível em: smp.uq.edu.au/pitch-drop-experiment.
- SOARES, R. F. **Estudo Fluidodinâmico Computacional (CDF) Aplicado à Aerodinâmica do Esporte Automobilístico**. Unpublished, 2013. Disponível em: <http://rgdoi.net/10.13140/2.1.2247.2488>.
- TIEN, C.; RAMARAO, B. V. **Granular Filtration of Aerosols and Hydrosols** -. Amsterdam: Elsevier, 2007. ISBN 978-1-856-17458-9.
- VETTERLING, W. T.; VETTERLING, W. T.; PRESS, W. H.; PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; FLANNERY, B. P.; FLANNERY, B. P. **Numerical Recipes - Example Book C**. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. ISBN 978-0-521-43720-2.
- VIEIRA, R. C. d. C. **Atlas de mecânica dos fluidos - fluidodinâmica**. [S. l.]: Editôra E. Blücher, 1971.