



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO
CIVIL
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

FERNANDO FERREIRA SILVA

**ANÁLISE SÍSMICA DE UMA ESTRUTURA DE CONCRETO NO DOMÍNIO
DO TEMPO E NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA**

FORTALEZA

2021

FERNANDO FERREIRA SILVA

ANÁLISE SÍSMICA DE UMA ESTRUTURA DE CONCRETO NO DOMÍNIO DO
TEMPO E NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Engenheiro Civil.

Orientador: Prof. Dr. Joaquim Eduardo Mota.

Coorientador: Eng. Daniel Barbosa Mapurunga Matos

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- S58a Silva, Fernando Ferreira.
Análise Sísmica de uma Estrutura de Concreto no Domínio do Tempo e no Domínio da Frequência /
Fernando Ferreira Silva. – 2021.
88 f. : il. color.
- Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia,
Curso de Engenharia Civil, Fortaleza, 2021.
Orientação: Prof. Dr. Joaquim Eduardo Mota.
Coorientação: Prof. Dr. Daniel Barbosa Mapurunga Matos.
1. Análise Dinâmica . 2. Sismo. 3. Domínio do Tempo. 4. Domínio da Frequência. 5. NBR-15421. I.
Título.

CDD 620

FERNANDO FERREIRA SILVA

ANÁLISE SÍSMICA DE UMA ESTRUTURA DE CONCRETO NO DOMÍNIO DO
TEMPO E NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Engenheiro Civil.

Aprovada em: 13/04/2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Joaquim Eduardo Mota. (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Eng. Daniel Barbosa Mapurunga Matos
Universidade de Fortaleza (UNIFOR)
Mestrando pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade
Federal do Rio Grande do Sul (PPGEC-UFRGS)

Profa. Dra. Magnólia Maria Campelo Mota
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Joaquim Eduardo Mota e ao Prof. Daniel Matos, pela excelente orientação e paciência.

Aos professores participantes da banca examinadora Joaquim Eduardo Mota e Magnólia Maria Campelo Mota e ao engenheiro Daniel Barbosa Mapurunga Matos pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos colegas que tornaram esse período mais leve, Carlos Henrique Caracas, Eduardo Martins, Maurício Magalhães, Iago Braga e Carlos Victor Brasileiro, pelo apoio e risadas nos momentos de dificuldade.

Aos amigos de uma vida, Bruno Vasconcelos Jácome de Oliveira, Saul Cisne Fontes, Renan Alencar Andrade e Bruno Praça Brasil, pela amizade sincera e simples.

À companheira de vida, Thaís Abreu Luedy, por me motivar, dar energia, apoiar e seguir comigo em todos os momentos.

À minha mãe, pela proteção e luz.

Ao meu pai, pela inspiração, pelo carinho, pela paciência, pelo apoio, pela cobrança e pelo amor.

RESUMO

O Brasil, apesar de se encontrar em uma região de baixa sismicidade, possui uma quantidade considerável de sismos, o que torna importante a análise dinâmica estrutural para um projeto mais assertivo. Este trabalho tem a finalidade de avaliar diversas metodologias de análise dinâmica estrutural de um edifício. Os objetivos específicos são a comparação dos métodos de Newmark e Duhamel para a análise no domínio do tempo, comparação do espectro de pseudoacelerações da norma NBR-15421 (2006) com os espectros de sismos artificiais aleatórios e comparação das metodologias no domínio do tempo com as metodologias no domínio da frequência. A modelagem da estrutura foi feita a partir de uma planilha de cálculo e uso do *software* SATiF em linguagem *Python*. Após a modelagem, utilizou-se as metodologias de Kanai (1961) e Tajimi (1960) e Shinozuka e Jan (1972) para se gerar o sismo artificial aleatório. Foi então aplicado o sismo na estrutura e os resultados foram analisados através das metodologias de Newmark e Duhamel para a análise no domínio do tempo. Em seguida, foi feita a análise no domínio da frequência pelo método da norma brasileira NBR-15421 (2006) e comparado o espectro de pseudoacelerações por ela apresentado, com o espectro gerado a partir dos sismos aleatórios criados na análise no domínio do tempo. Por fim, foi feita uma comparação de todos os métodos e seus resultados e chegou-se à conclusão de que cada método analisado neste trabalho possui vantagens e desvantagens, cabendo ao projetista estrutural utilizar o que melhor se adequa à situação a qual se deseja analisar.

Palavras-chave: Análise Dinâmica. Sismo. Domínio do Tempo. Domínio da Frequência. NBR-15421.

ABSTRACT

Brazil, despite of being a region of low seismicity, has a considerable amount of earthquakes, wich makes important the structural dynamic analysis for a more assertive project. This project aims to test several methodologies of structural dynamic analysis of a building. The specific objectives are the comparison of The Newmark and Duhamel methods for time domain analysis, comparison of the pseudoacceleration spectrum of NBR-15421 (2006) with random artificial earthquake spectra and comparison of time domain methodologies with frequency domain methodologies. The structure modeling was done from a spreadsheet of calculation and use of SATiF software in Python language. After the modeling, the methodologies of Kanai (1961) and Tajimi (1960) and Shinozuka and Jan (1972) were used to generate the ramdom artificial earthquake. The earthquake was then applied to the structure and the results were analyzed using Newmark and Duhamel methodologies for time domain analysis. Then, the frequency domain analysis was performed using the Brazilian standard NBR-15421 (2006) and compared the spectrum of pseudo-accelerations presented by it, with the spectrum generated from the random earthquakes created in the time domain analysis. Finally, a comparison of all methods and their results was made, and it was concluded that each method analyzed in this review has advantages and disadvantages, and it is up to the structural designer to use the one that best suits the situation to be analyzed.

Keywords: Dynamic analysis. Seismicity. Newmark. Duhamel. Kanai and Tajimi. Shinozuka and Jan. Artificial earthquake. Time domain. Frequency domain. NBR-15421. Pseudo-accelerations spectrum.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1– Placas tectônicas do planeta Terra	20
Figura 2 - Hipocentro e epicentro.....	21
Figura 3 – Comportamento das ondas sísmicas.....	24
Figura 4 – Zoneamento sísmico brasileiro	31
Figura 5 – Variação do espectro de resposta de projeto (S_a/a_{gs0}) em função do período (T).....	34
Figura 6 – Modelo sistema com 1 grau de liberdade.....	39
Figura 7 – Sistema para múltiplos graus de liberdade.....	41
Figura 8 – Divisão de uma estrutura para análise do Método dos Elementos Finitos....	49
Figura 9 – Aplicação de aceleração na base de um sistema de um grau de liberdade ...	60
Figura 10 – Modelagem da estrutura.....	65
Figura 11 – 3 primeiros modos de vibração da estrutura	67
Figura 12 – Consistência das matrizes	68
Figura 13 – Aceleração do solo parametrizada	68
Figura 14 – Força no 10º pavimento	69
Figura 15 - Deslocamento no 10º pavimento	70
Figura 16 - Aceleração no 10º pavimento	70
Figura 17 - Deslocamentos no 10º pavimento.....	71
Figura 18 - Comparação dos métodos	72
Figura 19 - Aceleração do solo parametrizada	73
Figura 20 - Força no 10º pavimento	73
Figura 21 – Deslocamento no 10º pavimento.....	74
Figura 22 - Aceleração no 10º pavimento	74
Figura 23 - Deslocamento no 10º pavimento	75
Figura 24 - Comparação dos métodos	76

Figura 25 - Espectro de pseudoacelerações da NBR-15421.....	77
Figura 26 - Espectro de deslocamento de resposta.....	79
Figura 27 – Comparativo de espectros	79
Figura 28 – Espectro de deslocamento de resposta	80
Figura 29 – Comparativo de espectros	81
Figura 30 - Estrutura analisada.....	87
Figura 31 - Seção transversal de vigas e pilares.....	88

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Escala de Mercalli simplificada (1955).....	23
Tabela 2 – Classificação das zonas sísmica pela aceleração sísmica horizontal.....	30
Tabela 3 – Classificação do terreno de fundação	32
Tabela 4 – Fatores de amplificação sísmica do solo	33
Tabela 5 – Categoria sísmica.....	34
Tabela 6 – Fator de importância de utilização.....	35
Tabela 7 – Coeficiente de modificação	37
Tabela 8 – Coeficiente de limitação por período.....	39
Tabela 9 – Frequências naturais	66
Tabela 10 - Comparação métodos	76
Tabela 11 - Comparação dos resultados	81

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Distribuição de sismos no Brasil (2000-2021).....	17
---	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
NBR	Norma Brasileira Regulamentar
SQRSS	Square Root of the Sum of Squares
CQC	Complete Quadratic Combination

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	16
1.1. Objetivos	18
1.1.1. <i>Objetivo geral</i>	18
1.1.2. <i>Objetivos específicos</i>	18
1.1.3. <i>Estrutura do projeto de graduação</i>	18
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	20
2.1. Sismo.....	20
2.1.1. <i>Hipocentro e epicentro</i>	21
2.1.2. <i>Magnitude e intensidade</i>	22
2.1.3. <i>Tipos de Ondas (P, S, Rayleigh e Love)</i>	23
2.2. Análise de Sinais	25
2.3. Função de autocorrelação.....	25
2.4. Densidade espectral de potência	25
2.4.1. <i>Espectro de Kanai e Tajimi</i>	27
2.4.2. <i>Shinozuka e Jan</i>	28
2.4.3. <i>Espectro de Resposta</i>	28
2.5. Análise de múltiplos graus de liberdade.....	29
2.6. Montagem do carregamento sísmico	30
2.6.1. <i>Zoneamento sísmico brasileiro</i>	30
2.6.2. <i>Definição da classe do terreno</i>	31
2.6.3. <i>Definição do espectro de resposta do projeto</i>	32
2.6.4. <i>Categorização das estruturas para análise sísmica</i>	34
2.6.5. <i>Requisitos de análise para a categoria A</i>	35
2.6.6. <i>Análise sísmica pelo método das forças horizontais equivalentes</i>	36
2.7. Equação do equilíbrio dinâmico	39
2.7.1. <i>Para um grau de liberdade</i>	39
2.7.2. <i>Para múltiplos graus de liberdade</i>	41
2.7.3. <i>Análise modal</i>	44
2.7.3.2. <i>Matriz de amortecimento de Rayleigh</i>	47
2.8. Métodos numéricos	49
2.8.1. <i>Método dos Elemento Finitos – MEF</i>	49
2.8.2. <i>Newmark</i>	50
2.8.3. <i>Duhamel</i>	51
2.9. Análise no domínio da frequência.....	52
3. METODOLOGIA	56

3.1. Modelagem da estrutura.....	56
3.1.1. <i>Modelo para análise</i>	56
3.1.2. <i>Importação de dados</i>	56
3.1.5. <i>Frequências naturais e modos de vibração</i>	58
3.1.6. <i>Matriz de amortecimento.....</i>	58
3.2.1. <i>Geração do sinal sísmico artificial.....</i>	59
3.2.2. <i>Método de Shinozuka e Jan</i>	60
3.2.3. <i>Vetor de forças.....</i>	60
3.2.4. <i>Resolução do equilíbrio dinâmico.....</i>	61
3.2.4.1. <i>Método de Newmark.....</i>	62
3.2.4.2. <i>Duhamel</i>	62
3.3. Análise no domínio da frequência.....	62
3.3.1. <i>Análise pelo espectro de pseudoacelerações segundo a NBR-15421.....</i>	63
3.3.2. <i>Análise a partir do espectro de pseudoacelerações do sinal artificial</i>	64
4. RESULTADOS.....	65
4.1. Verificação da modelagem da estrutura	65
4.1.1. <i>Importação dos dados e plotagem da estrutura</i>	65
4.1.2. <i>Frequências naturais e dos modos de vibração.....</i>	66
4.1.3. <i>Matrizes de amortecimento, massa e rigidez</i>	67
4.2. Verificação da análise no domínio do tempo	68
4.2.1. <i>Geração do sismo artificial</i>	68
4.2.2. <i>Vetor de forças.....</i>	69
4.2.3. <i>Resolução da equação de equilíbrio dinâmico</i>	69
4.2.3.1. <i>Newmark.....</i>	70
4.2.3.2. <i>Duhamel</i>	71
4.3. Verificação da análise no domínio da frequência.....	77
4.3.1. <i>Espectro de pseudoacelerações da norma</i>	77
4.3.2. <i>Análise a partir do espectro de pseudoacelerações do sinal artificial</i>	78
5. CONCLUSÃO	83
REFERÊNCIAS	85
APÊNDICE A – CARACTERÍSTICAS FÍSICAS E GEOMÉTRICAS DA ESTRUTURA ANALISADA	87
APÊNDICE B – MÉTODO DISCRETIZADO DE DUHAMEL UTILIZADO NO PROGRAMA SATiF	89

1. INTRODUÇÃO

Cada vez mais são registrados no Brasil eventos sísmicos significativos. Tal fato gera uma questão importante: as estruturas que estão sendo construídas serão capazes de resistir a tais eventos? Por isso, a consideração dos abalos sísmicos está se tornando mais importante na análise estrutural dos edifícios.

O Brasil se encontra em uma região central da placa Sul-Americana, o que o torna menos propenso a atividades sísmicas do que países como Chile e Peru. Entretanto, não se pode descartar as atividades sísmicas que ocorrem em regiões intraplacas, que são complexas e podem acarretar em sismos fortes. Como exemplo, segundo Veloso (2016), janeiro de 2001, um sismo de magnitude 7,6 ocorreu na cidade de Bhuj, Índia, vitimando mais de doze mil pessoas, além de causar grande destruição.

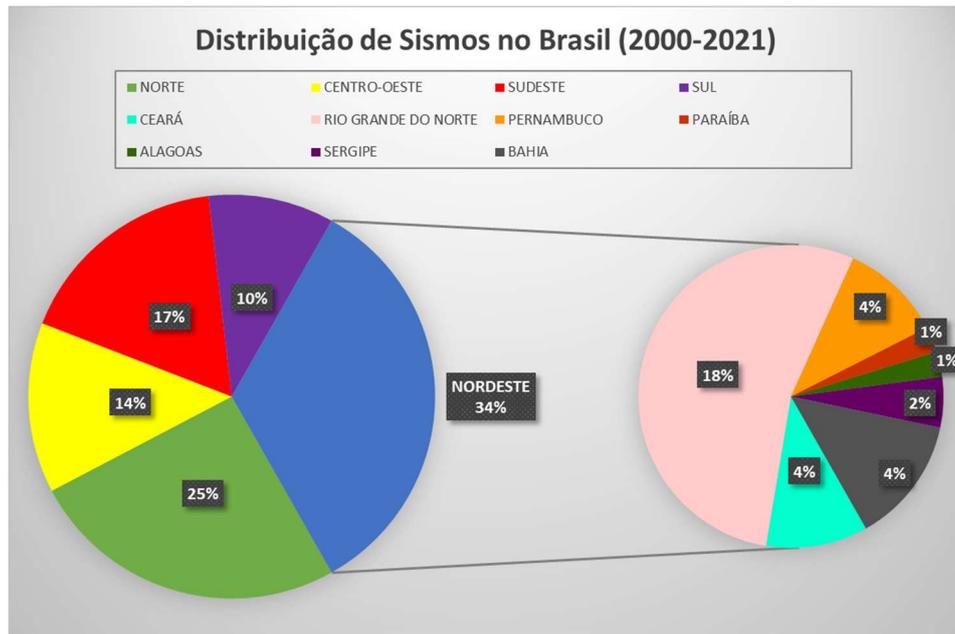
No contexto Brasil, os sismos são mais comuns do que se acredita. A grande maioria das ocorrências são de baixa magnitude e não são sentidas pela população, mas ainda há um número de casos com magnitude superior a 6,0 ML.

Conforme o Gráfico 1 apresentado a seguir, a região Nordeste é a mais afetada por sismos, principalmente nos estados do Ceará, Pernambuco e Rio Grande do Norte. Essa área é formada por diversos fragmentos de rochas antigas, e há várias falhas geológicas nesses fragmentos rochosos.

De acordo com a NBR 15421 (2006), o Ceará se encontra em uma Zona Sísmica de classificação 1, entretanto, existem algumas propostas para que nosso estado seja elevado ao grau 2 de atividade sísmica.

Portanto, fica evidente a necessidade de cada vez mais nos preocuparmos com a atividade sísmica durante a elaboração de um projeto estrutural, colaborando para a segurança das estruturas e conseqüentemente das pessoas.

Gráfico 1 - Distribuição de sismos no Brasil (2000-2021)



Fonte: Centro de Sismologia da USP (2021)

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivo geral

O objetivo geral deste estudo é testar várias metodologias de análise dinâmica no projeto de estruturas de concreto, sujeitas a atividade sísmica, em regiões do Brasil com sismicidade não desprezível.

1.1.2. Objetivos específicos

Comparar os métodos de Newmark e Duhamel para a análise dinâmica estrutural no domínio do tempo;

Comparar o espectro de pseudoacelerações oferecido pela norma brasileira NBR-15421 (2006) com os espectros de pseudoacelerações gerados a partir de um sismo aleatório artificial;

Comparar as metodologias de análise dinâmica estrutural no domínio do tempo com a metodologia de análise no domínio da frequência.

1.1.3. Estrutura do projeto de graduação

O presente projeto possui 5 capítulos:

O primeiro capítulo apresenta a introdução do assunto, justificativa, objetivos e a apresentação da estrutura do projeto.

O capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica, com uma breve visão sobre conceitos de sismologia e o comportamento sísmico no Brasil, conceito de ação sísmica, aspectos da norma brasileira relativos à segurança sísmica de estruturas e conceitos sobre dinâmica de estruturas.

O terceiro capítulo apresenta a metodologia utilizada nas análises dinâmicas realizadas da estrutura em questão.

O capítulo 4 apresenta a discussão dos resultados obtidos nas análises dinâmicas.

O quinto e último capítulo apresenta a conclusão do trabalho.

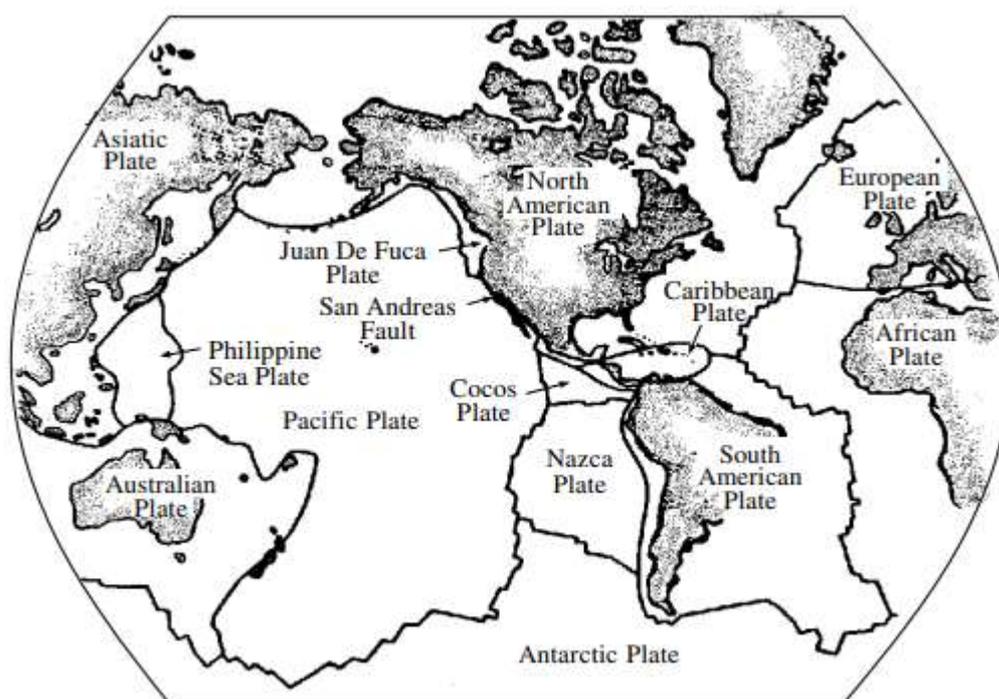
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Sismo

Um sismo é uma liberação de energia devido a movimentações das placas tectônicas na crosta terrestre. A divisão das placas tectônicas ao redor do planeta pode ser observada na Figura 1. Essa liberação de energia pode ser leve e não influenciar em nada na superfície ou pode ser de uma magnitude mais elevada e acabar afetando estruturas, cidades e até mesmo colocando em risco a vida da população.

Portanto, o estudo dos sismos e como eles nos afetam é de extrema importância para a sociedade, seja para a prevenção de acidentes, seja para simplesmente entender como funciona o planeta Terra.

Figura 1– Placas tectônicas do planeta Terra

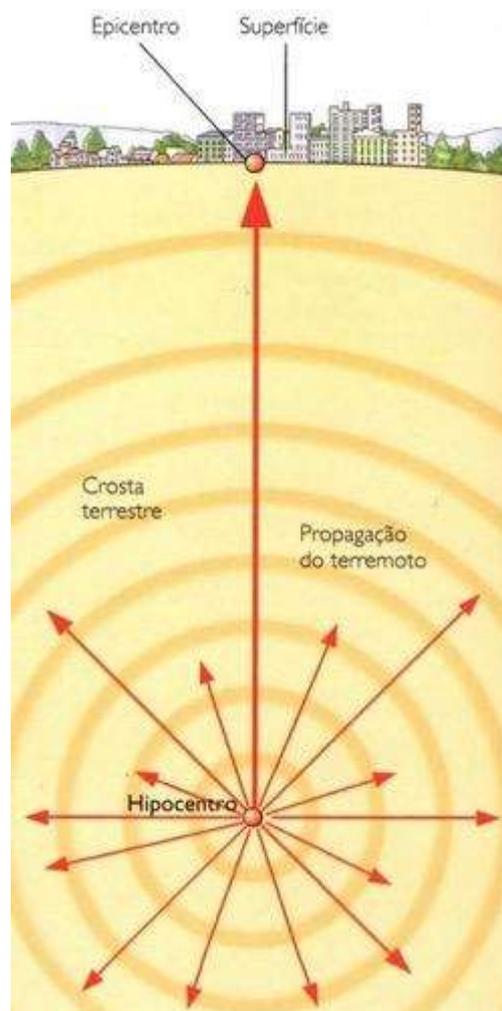


Fonte: Clough & Penzien (1993).

2.1.1. *Hipocentro e epicentro*

Segundo Hampshire e Lima (2008), o ponto onde o sismo se origina é chamado hipocentro ou foco, e geralmente fica em camadas profundas da crosta terrestre. O ponto na superfície da Terra diretamente acima do hipocentro é chamado epicentro. A Figura 2 demonstra de forma clara a localização do epicentro e do hipocentro de um sismo.

Figura 2 - Hipocentro e epicentro



Fonte: <https://www.coladaweb.com/wp-content/uploads/2014/12/terremoto.jpg>, acesso em 05/03/2021

2.1.2. Magnitude e intensidade

Segundo Hampshire e Lima (2008), os sismos são medidos, de forma absoluta, pela energia que liberam. Essa medida é chamada de magnitude. A *Escala Richter de Magnitude* é a mais utilizada e é calculada com o logaritmo decimal da amplitude máxima do registro sísmico, em micron (10^{-6}m), registrada por um sismógrafo do tipo Wood-Anderson, a uma distância de 100 km do epicentro do sismo. Como na grande maioria das vezes não é possível se ter um sismógrafo a essa exata distância, é preciso fazer uma correção que pode ser escrita pela Equação 1.

$$M = \log_{10} A - \log_{10} A_0 \quad (1)$$

onde A é a amplitude máxima registrada durante o sismo e A_0 é um fator de correção que corresponde a uma leitura do sismógrafo produzido por um sistema padrão ou de calibração. Geralmente é adotado como 0,001mm. A energia E liberada, em Joules, por um sismo de magnitude M na escala Richter é avaliada empiricamente como na Equação 2.

$$\log_{10} E = 11,4 + 1,5M \quad (2)$$

Embora a magnitude calcule a energia liberada por um sismo, ela não avalia os danos por ele causados, que são diferentes em cada local do mundo. A *intensidade* é a medida desses danos. Entende-se que um mesmo sismo receberá classificações diferentes de intensidade em diferentes locais, sendo os de maior intensidade em locais mais próximos ao epicentro.

A classificação mais utilizada para a intensidade dos sismos é a *Escala Modificada de Mercalli (MMI)* mostrada na tabela a seguir.

Tabela 1 - Escala de Mercalli simplificada (1955)

I	Imperceptível	Não sentido. Apenas registrado pelos sismógrafos.
II	Muito fraco	Sentido por um muito reduzido número de pessoas em repouso, em especial pelas que habitam em andares elevados
III	Fraco	Sentido por um pequeno número de pessoas. Bem sentido nos andares elevados.
IV	Moderado	Sentido dentro das habitações, podendo despertar do sono um pequeno número de pessoas. Nota-se a vibração de portas janelas e das louças dentro dos armários.
V	Forte	Praticamente sentido por toda a população, fazendo acordar muita gente. Há queda de alguns objetos menos estáveis e param os pêndulos dos relógios. Abrem-se pequenas fendas nos estuques das paredes.
VI	Bastante forte	Provoca início de pânico nas populações. Produzem-se leves danos nas habitações, caindo algumas chaminés. O mobiliário menos pesado é deslocado.
VII	Muito forte	Caem muitas chaminés. Há estragos ilimitados em edifícios de boa construção, mas importantes e generalizados nas construções mais frágeis. Facilmente perceptível pelos condutores de veículos automóveis em trânsito. Desencadeia pânico geral nas populações.
VIII	Ruinoso	Danos acentuados em construções sólidas. Os edifícios de muito boa construção sofrem alguns danos. Caem campanários e chaminés de fábricas.
IX	Desastroso	Desmoronamento de alguns edifícios. Há danos consideráveis em construções muito sólidas.
X	Destruidor	Abrem-se fendas no solo. Há cortes nas canalizações, torção nas vias de caminho de ferro e empolamentos e fissuração nas estradas.
XI	Catastrófico	Destruição de quase totalidade dos edifícios, mesmo os mais sólidos. Caem pontes, diques e barragens. Destruição das redes de canalização e das vias de comunicação. Formam-se grandes fendas no terreno, acompanhadas de desligamento. Há grandes escorregamentos de terrenos.
XII	Cataclismo	Destruição total. Modificação de topografia. Nunca foi presenciado no período histórico.

Fonte: Centro de Sismologia da USP (2021)

2.1.3. Tipos de Ondas (*P*, *S*, *Rayleigh* e *Love*)

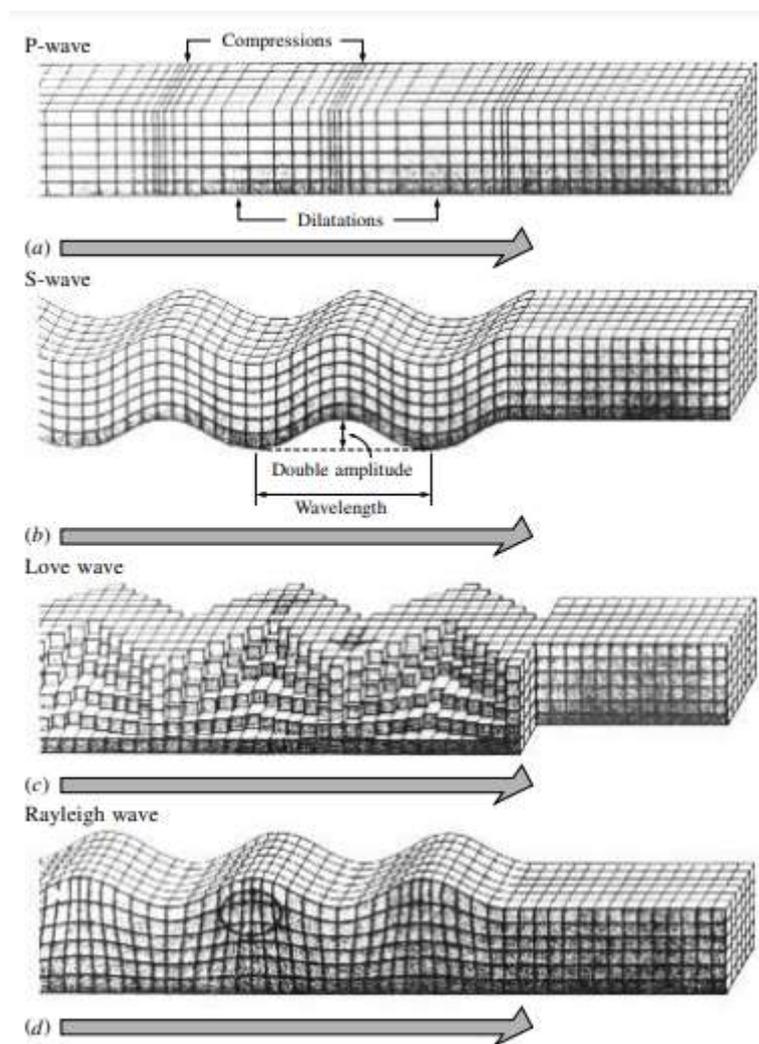
Segundo Clough e Penzien (1993), a massa de rocha que compõe a crosta terrestre está em constante movimento e está sujeita a grandes pressões e, conseqüentemente, a grandes deformações. Quando essas deformações se tornam maiores que a capacidade de deformação dos materiais dentro dessas rochas, ocorre a ruptura das mesmas. Essa ruptura está associada com uma súbita liberação de energia, que é então transmitida através da terra por meio de ondas vibratórias em todas as direções ao redor daquele ponto.

Dois tipos de ondas podem ser identificados nas movimentações de terremoto que ocorrem no interior da terra: ondas “P”, em que as partículas do material se movem longitudinalmente à propagação da onda, alternando entre deformações de compressão e distensão, e ondas “S”, nas quais as partículas se movem perpendicularmente à propagação da onda. As ondas “P” são chamadas assim pelo fato de sua velocidade através da rocha ser maior e elas chegarem primeiro em algum ponto de referência. Já as ondas “S” se movem de forma mais lenta e chegam depois em algum ponto de referência.

Clough e Penzien (1993) ainda comentam que quando uma onda de vibração energética está se propagando perto da superfície da terra, dois outros tipos de onda podem ser identificados: as ondas conhecidas como ondas de Rayleigh e as conhecidas como ondas de Love.

As ondas de Rayleigh possuem características de compressão e distensão semelhantes às ondas P, a grande diferença é a amplitude das ondas de Rayleigh diminui com a distância abaixo da superfície da terra. Da mesma forma, as ondas de Love possuem características de cisalhamento semelhantes às ondas S, com sua amplitude diminuindo rapidamente com o aumento da distância em relação a superfície. A figura 3 ilustra os quatro tipos de ondas sísmicas.

Figura 3 – Comportamento das ondas sísmicas



Fonte: Bruce A. Bolt, Nuclear Explosions and Earthquakes: The Parted Veil (1976)

2.2. Análise de Sinais

De acordo com Clough e Penzien (1993), existem vários componentes que podem ser identificados por um acelerograma que dariam uma descrição completa do sismo que estaria atuando na estrutura a ser avaliada. Entretanto, os pontos mais importantes dos dados obtidos de cada componente, do ponto de vista de efetividade na produção de uma resposta da estrutura, são a amplitude, a frequência e duração. Esses sinais são analisados e ajudam na caracterização e cálculos de uma análise dinâmica.

2.3. Função de autocorrelação

Segundo Newland (1987), a função de autocorrelação de um processo aleatório $x(t)$ pode ser encontrada utilizando o valor médio do produto $x(t) x(t + \tau)$. Esta função mede a correlação do sinal com ele mesmo, comparando seus valores em diferentes instantes de tempo. Levando-se em conta um processo estacionário, $E[x(t) x(t + \tau)]$ será independente do tempo absoluto t e dependerá somente de τ . Então, sendo considerado um processo aleatório estacionário, Newland (1987) define a função de autocorrelação $R_x(\tau)$, como apresentado na Equação 3.

$$R_x(\tau) = E[x(t) x(t + \tau)] \quad (3)$$

sendo $x(t)$ o valor do sinal em um instante de tempo t , $x(t + \tau)$ o valor do sinal em um instante de tempo $(t + \tau)$, ou seja, em um momento seguinte a t . $E[\]$ representa o valor esperado. Os valores de $R_x(\tau)$ variam no intervalo de -1 a 1, sendo 1 a indicação de uma correlação perfeita, -1 para uma anticorrelação perfeita e 0 a ausência de correlação.

2.4. Densidade espectral de potência

De acordo com Ricker (2003), a densidade espectral é definida como uma função real positiva de uma frequência variável associada com um processo estocástico, ou uma função determinada do tempo, que possua dimensão de energia ou força por

Hertz, normalmente chamada apenas por espectro de sinal. Consequentemente, a densidade espectral auxilia na captura da frequência do processo estocástico e identifica periodicidades.

Newland (1987) define a densidade espectral de potência de um processo x através da transformada de Fourier da função de autocorrelação apresentada a seguir

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (4)$$

e sua transformada inversa

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (5)$$

Onde a densidade espectral $S_x(\omega)$, é uma função da frequência angular ω .

Segundo Newland (1987), a propriedade mais importante da densidade espectral fica evidente quando se tem $\tau = 0$.

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (6)$$

E pela definição da função de autocorrelação $R_x(\tau)$ obtêm-se:

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (7)$$

Ou seja, a variância de um processo aleatório estacionário com média zero é dado pela área abaixo do gráfico de densidade espectral de potência S_x em função da frequência angular ω .

2.4.1. Espectro de Kanai e Tajimi

Kanai (1961) e Tajimi (1960) propuseram um modelo empírico para gerar um acelerograma de excitação sísmica artificial. A excitação é modelada como um processo aleatório estacionário idealizado, a partir de um ruído branco gaussiano filtrado, utilizando a frequência natural e a razão de amortecimento crítico próprios do solo. A excitação é definida a partir de um espectro de densidade de potência. Este modelo é o mais utilizado na análise de estruturas sob ação de sismos.

As equações a seguir ilustram as equações desenvolvidas.

$$S(\omega) = S_0 \left[\frac{\omega_s^4 + \omega_s^2 \zeta_s^2 \omega^2}{(\omega^2 - \omega_s^2)^2 + \omega_s^2 \zeta_s^2 \omega^2} \right] \quad (8)$$

$$S_0 = \frac{0,03 \zeta_s}{\pi \omega_s (4 \zeta_s^2 + 1)}$$

Onde, ω_s representa a frequência harmônica do solo, ζ_s é a razão de amortecimento do solo e S_0 é densidade espectral constante.

Os valores de frequência e de amortecimento com base em Seya, Talbott e Hwang (1993), podem ser observados na Tabela 2.

Tabela 2 - Valores de frequência e amortecimento

Tipo de Solo	ω_g (Rad/s)	ζ_g	Duração total (s)
Rocha	8π	0,60	15
Solo duro	5π	0,60	20
Solo mole	$2,4\pi$		25

Fonte: Adaptado de Seya, Talbott e Hwang (1993).

2.4.2. *Shinozuka e Jan*

Shinozuka e Jan (1972) apresentaram um método eficiente para análise no domínio do tempo de estruturas lineares sob excitações aleatórias definidas por uma função de densidade espectral de potência. O método possibilita a avaliação da evolução temporal da excitação. O sinal é gerado através de uma série de funções cosseno, frequências igualmente espaçadas e ângulos de fase aleatórios. O método é definido pela Equação 9.

$$\ddot{Y}_g = \sum_{k=1}^N \sqrt{2S_W(f_k)\Delta f_k} \cos(2\pi f_k t + \phi_k) \quad (9)$$

sendo $\ddot{Y}_g(t)$ o sinal da aceleração imposta pela excitação em função do tempo, em m/s^2 . N é o número de intervalos Δf_k da banda de frequências na qual o espectro está definido, sendo $\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$, medido em Hz. O ângulo de fase aleatório ϕ_k medido em radianos, varia de 0 a 2π com função distribuição de probabilidade uniforme. Este artifício concede um certo grau de aleatoriedade na determinação do registro temporal da excitação.

Schaan (2012) estudou o processo de geração de um registro de excitação sísmica utilizando o espectro de densidade de potência proposto por Kanai-Tajimi. Através do método de Shinozuka e Jan (1972) simulou a excitação em relação ao tempo e utilizou estes dados para avaliar a resposta dinâmica da mesma estrutura analisada por Mohebbi et al. (2012).

2.4.3. *Espectro de Resposta*

Um espectro de resposta pode ser definido, segundo Hampshire e Lima (2008), como um gráfico que mostra a maior resposta, seja em termos de deslocamentos, velocidades, acelerações ou qualquer outra grandeza, em função do período natural ou da

frequência natural para um sistema de um grau de liberdade, considerando uma determinada excitação. Os espectros de resposta referentes à aceleração se mostram especialmente importantes na caracterização dos efeitos sísmicos, pois sua relação com as forças inerciais desenvolvidas pela excitação dinâmica é direta. A Equação 10 revela como é feito o cálculo dos espectros de pseudoaceleração.

$$S_a(\omega_n) = \omega_n^2 S_d(\omega_n) \quad (10)$$

onde, S_d é o deslocamento espectral do sistema e ω_n é a frequência natural de vibração do sistema.

2.5. Análise de múltiplos graus de liberdade

Para a análise de uma estrutura é muito comum se utilizar o método da rigidez direta, que é um método de cálculo aplicável a estruturas hiperestáticas de barras que se comportam de forma linear. A matriz de rigidez de uma estrutura em estudo, corresponde ao número de graus de liberdade considerados. Além disso, a matriz de rigidez é uma matriz de transformação linear: transforma o vetor dos deslocamentos no vetor das ações.

Segundo Hampshire e Lima (2008), a matriz de massa é obtida de forma semelhante à matriz de rigidez, ou seja, a partir das matrizes de massa dos elementos constituintes do modelo. Existem duas formulações mais comuns para a matriz de massa, a matriz de massa discreta e matriz de massa consistente.

A matriz de massa discreta é obtida concentrando as massas dos elementos da estrutura, seguindo o critério de preservação da posição de seus centros de massa, nos pontos nodais do elemento. Essa abordagem mais simples, em geral, oferece bons resultados. Clough e Penzien (1993) chamam esse método de *lumped mass matrix*.

Hampshire e Lima (2008) dizem que a matriz de massa consistente é obtida de forma semelhante à matriz de rigidez do elemento. Seus coeficientes são chamados de coeficientes de massa, e a coluna de ordem i é um vetor representativo das forças nodais (forças de inércia) em resposta à aplicação de uma aceleração unitária na direção do grau de liberdade i . Sendo consideradas as forças de inércia no princípio dos trabalhos virtuais, obtém-se a matriz associada àquelas forças, matriz essa chamada de matriz de massa e dada pela Equação 11.

$$\underline{m}_e = \int_{V_e}^V \rho \underline{N}^T \underline{N} dV_e \quad (11)$$

Onde ρ representa a massa por unidade de volume, V_e o volume do elemento e \underline{N} uma matriz contendo funções de interpolação. Diferente da matriz de massa discreta, a matriz consistente não diagonal, fazendo com o que o custo operacional para o seu cálculo seja maior, porém são obtidos melhores resultados se comparado aos da matriz de massa discreta.

2.6. Montagem do carregamento sísmico

2.6.1. Zoneamento sísmico brasileiro

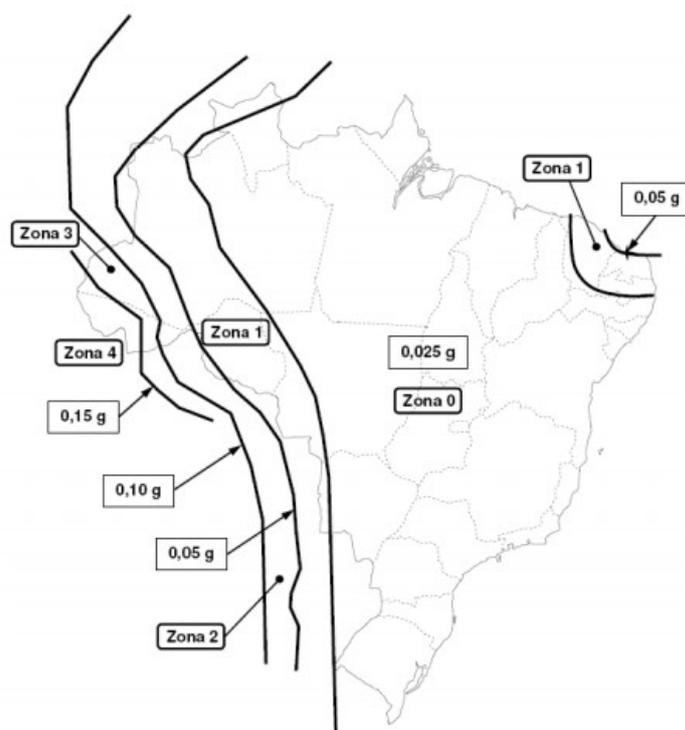
Segundo a NBR 15421 (2006), para se definir as ações sísmicas a serem consideradas em projeto, deve ser considerado o zoneamento sísmico da Figura 3. Cinco zonas sísmicas são definidas, considerando a variação de a_g , aceleração sísmica horizontal característica normalizada para terrenos da Classe B (“Rocha”). A classificação dessas zonas pode ser vista na Tabela 3 e sua divisão no território brasileiro na Figura 4.

Tabela 3 – Classificação das zonas sísmica pela aceleração sísmica horizontal

Zona sísmica	Valores de a_g
Zona 0	$a_g = 0,025g$
Zona 1	$0,025g \leq a_g \leq 0,05g$
Zona 2	$0,05g \leq a_g \leq 0,10g$
Zona 3	$0,10g \leq a_g \leq 0,15g$
Zona 4	$a_g = 0,15g$

Fonte: NBR-15421 (2006)

Figura 4 – Zoneamento sísmico brasileiro



Fonte: NBR-15421 (2006)

2.6.2. Definição da classe do terreno

Seguindo as definições da NBR 15421 (2006), o terreno de fundação deve ser categorizado em uma das classes definidas na Tabela 4, associadas aos valores numéricos dos parâmetros geotécnicos médios dos primeiros 30 m superiores do terreno.

Aonde o valor de velocidade de ondas de cisalhamento \bar{V}_s não for conhecido, é permitida a classificação do terreno a partir do número médio de golpes no ensaio SPT \bar{N} . As classes de rocha, A e B, não podem ser consideradas se houver uma camada superficial de solo superior a 3 m.

Para os solos estratificados, a obtenção dos valores médios de \bar{V}_s e \bar{N} é feita a partir dos valores de cada camada, através das expressões abaixo, aonde d_i é a espessura de cada uma das camadas.

$$\bar{V}_s = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{v_{si}}} \quad (12)$$

$$\bar{N} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{N_i}} \quad (13)$$

Onde, \bar{V}_s é a velocidade média da propagação da onda de cisalhamento, e \bar{N} é número médio de golpes no ensaio SPT.

Tabela 4 – Classificação do terreno de fundação

Classe do terreno	Designação da Classe do terreno	Propriedades médias para os 30 m superiores do terreno	
		\bar{V}_s	\bar{N}
A	Rocha sã	$\bar{V}_s \geq 1500$ m/s	(não aplicável)
B	Rocha	1500 m/s $\geq \bar{V}_s \geq 760$ m/s	(não aplicável)
C	Rocha alterada ou solo muito rígido	760 m/s $\geq \bar{V}_s \geq 370$ m/s	$\bar{N} \geq 50$
D	Solo rígido	370 m/s $\geq \bar{V}_s \geq 180$ m/s	$50 \geq \bar{N} \geq 15$
E	Solo mole	$\bar{V}_s \leq 180$ m/s	$\bar{N} \leq 15$
	-	Qualquer perfil incluindo camada com mais de 3 m de argila mole	
F	-	Solo exigindo avaliação específica, como: 1. Solos vulneráveis à ação sísmica, como solos liquefáveis, argilas muito sensíveis e solos colapsíveis fracamente cimentados; 2. Turfa ou argilas muito orgânicas; 3. Argilas muito plásticas; 4. Estratos muito espessos (≥ 35 m) de argila mole ou média.	

Fonte: NBR-15421 (2006)

2.6.3. Definição do espectro de resposta do projeto

O espectro de resposta do projeto, $S_a(T)$, para acelerações horizontais, é equivalente à resposta elástica de um sistema de um grau de liberdade com uma fração de amortecimento crítico igual a 5%, e definido a partir da aceleração sísmica horizontal característica a_g e da classe do terreno, utilizando as seguintes grandezas:

$$\begin{aligned} a_{gs0} &= C_a a_g \\ a_{gs1} &= C_v a_g \end{aligned} \quad (14)$$

onde, a_{gs0} e a_{gs1} são as acelerações espectrais para os períodos de 0,0s a 1,0s respectivamente, já considerado o efeito de amplificação sísmica do solo. Já C_a e C_v são os fatores de amplificação sísmica do solo, para os períodos de 0,0s a 1,0s, respectivamente, conforme a Tabela 5, em função da aceleração característica de projeto a_g e da classe do terreno. T é o período natural em segundos, associado a cada um dos modos de vibração da estrutura e o espectro de resposta de projeto é considerado como aplicado à base da estrutura.

Tabela 5 – Fatores de amplificação sísmica do solo

Classe do terreno	C_a		C_v	
	$a_g \leq 0,10g$	$a_g = 0,15g$	$a_g \leq 0,10g$	$a_g = 0,15g$
A	0,8	0,8	0,8	0,8
B	1,0	1,0	1,0	1,0
C	1,2	1,2	1,7	1,7
D	1,6	1,5	2,4	2,2
E	2,5	2,1	3,5	3,4

Fonte: NBR-15421 (2006)

Para valores de $0,10g \leq a_g \leq 0,15g$ os valores de C_a e C_v podem ser obtidos por interpolação linear. Os terrenos classificados na seção F, são necessários estudos de amplificação do solo.

O espectro de resposta de projeto, $S_a(T)$, é definido numericamente em três faixas de períodos, expressos em segundos, pelas expressões:

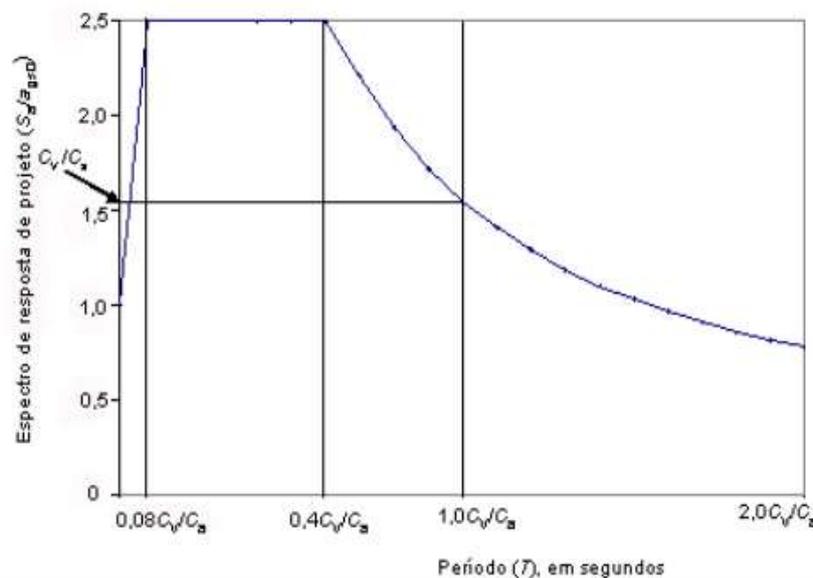
$$S_a(T) = a_{gs0} \left(8,75 \cdot T \cdot \frac{C_a}{C_v} + 1,0 \right) \quad \left(\text{para } 0 \leq T \leq \frac{C_v}{C_a} \cdot 0,08 \right) \quad (15)$$

$$S_a(T) = 2,5 a_{gs0} \quad \left(\text{para } \frac{C_v}{C_a} \cdot 0,08 \leq T \leq \frac{C_v}{C_a} \cdot 0,4 \right) \quad (16)$$

$$S_a(T) = \frac{a_{gs1}}{T} \quad \left(\text{para } T \geq \frac{C_v}{C_a} \cdot 0,4 \right) \quad (17)$$

Se for necessária a definição de um espectro de respostas verticais, a NBR 15421 (2006) diz que, as acelerações desse espectro podem ser tomadas como 50% das acelerações correspondentes definidas para acelerações horizontais. A representação gráfica do espectro de resposta de projeto se encontra na Figura 5.

Figura 5 – Variação do espectro de resposta de projeto (S_a/a_{gs0}) em função do período (T)



Fonte: NBR-15421(2006)

2.6.4. Categorização das estruturas para análise sísmica

Segundo a NBR 15421 (2006), cada sistema estrutural, sendo levada em consideração suas limitações, deve ser classificada em uma categoria sísmica. As categorias são utilizadas para definir sistemas estruturais permitidos, limitações nas irregularidades das estruturas, componentes da estrutura que devem ser projetados quanto à resistência sísmica e os tipos de análises sísmicas que devem ser realizadas. Cada uma dessas categorias corresponde a um fator de importância de utilização (I), conforme a Tabela 7.

Para cada estrutura é definida uma categoria sísmica, em função de sua zona sísmica, de acordo com a Tabela 6.

Tabela 6 – Categoria sísmica

Zona sísmica	Categoria sísmica
Zonas 0 e 1	A
Zona 2	B
Zonas 3 e 4	C

Fonte: NBR-15421 (2006)

Tabela 7 – Fator de importância de utilização

Categoria de utilização	Natureza da ocupação	Fator I
I	Todas as estruturas não classificadas como de categoria II ou III	1,0
II	Estruturas de importância substancial para a preservação da vida humana no caso de ruptura, incluindo, mas não estando limitadas às seguintes: <ul style="list-style-type: none"> - Estruturas em que haja reunião de mais de 300 pessoas em uma única área - Estruturas para educação pré-escolar com capacidade superior a 150 ocupantes - Estruturas para escolas primárias ou secundárias com mais de 250 ocupantes - Estruturas para escolas superiores ou para educação de adultos com mais de 500 ocupantes - Instituições de saúde para mais de 50 pacientes, mas sem instalações de tratamento de emergência ou para cirurgias - Instituições penitenciárias - Quaisquer outras estruturas com mais de 5 000 ocupantes - Instalações de geração de energia, de tratamento de água potável, de tratamento de esgotos e outras instalações de utilidade pública não classificadas como de categoria III - Instalações contendo substâncias químicas ou tóxicas cujo extravasamento possa ser perigoso para a população, não classificadas como de categoria III 	1,25
III	Estruturas definidas como essenciais, incluindo, mas não estando limitadas, às seguintes: <ul style="list-style-type: none"> - Instituições de saúde com instalações de tratamento de emergência ou para cirurgias - Prédios de bombeiros, de instituições de salvamento e policiais e garagens para veículos de emergência - Centros de coordenação, comunicação e operação de emergência e outras instalações necessárias para a resposta em emergência - Instalações de geração de energia e outras instalações necessárias para a manutenção em funcionamento das estruturas classificadas como de categoria III - Torres de controle de aeroportos, centros de controle de tráfego aéreo e hangares de aviões de emergência - Estações de tratamento de água necessárias para a manutenção de fornecimento de água para o combate ao fogo. - Estruturas com funções críticas para a Defesa Nacional - Instalações contendo substâncias químicas ou tóxicas consideradas como altamente perigosas, conforme classificação de autoridade governamental designada para tal. 	1,50

Fonte: NBR-15421 (2006)

2.6.5. Requisitos de análise para a categoria A

Para as estruturas localizadas na zona sísmica 0, não é necessário nenhum requisito antissísmico.

Já as estruturas localizadas na zona sísmica 1, devem apresentar sistemas estruturais resistentes a forças sísmicas horizontais em duas direções ortogonais, inclusive com um mecanismo de resistência a esforços de torção. Além disso, deve resistir a cargas horizontais aplicadas simultaneamente em todos os pisos, e independentemente em cada uma de duas direções ortogonais, um valor de:

$$F_x = 0,01 w_x \quad (18)$$

onde, F_x é a força sísmica de projeto correspondente ao piso x , e w_x é o peso total da estrutura, incluindo o peso operacional de todos os equipamentos fixados na estrutura e dos reservatórios de água. Nas áreas de armazenamento e estacionamento, este peso deve incluir 25% de carga accidental.

2.6.6. Análise sísmica pelo método das forças horizontais equivalentes

Segundo a NBR 15421 (2006), as estruturas de categoria sísmica B e C podem ser analisadas pelo método das forças horizontais equivalentes. A força horizontal total na base da estrutura, em uma dada direção, é determinada de acordo com a Equação 19.

$$H = C_s \cdot W \quad (19)$$

onde, C_s é o coeficiente de resposta sísmica e W é o peso total da estrutura.

O coeficiente de resposta é definido pela Equação 20.

$$C_s = \frac{2,5 \cdot \left(\frac{a_{gs0}}{g}\right)}{\left(\frac{R}{I}\right)} \quad (20)$$

onde a_{gs} é a aceleração espectral para o período de 0,0s, já considerando o efeito de amplificação sísmica no solo, e g é a aceleração da gravidade. I é o fator de utilização e R o coeficiente de modificação, que é definido na Tabela 8.

Tabela 8 – Coeficiente de modificação

Sistema básico sismo-resistente	Coeficiente de modificação da resposta R	Coeficiente de sobre - resistência Ω_0	Coeficiente de amplificação de deslocamentos C_d
Pilares-parede de concreto com detalhamento especial	5	2,5	5
Pilares-parede de concreto com detalhamento usual	4	2,5	4
Pórticos de concreto com detalhamento especial	8	3	5,5
Pórticos de concreto com detalhamento intermediário	5	3	4,5
Pórticos de concreto com detalhamento usual	3	3	2,5
Pórticos de aço momento-resistentes com detalhamento especial	8	3	5,5
Pórticos de aço momento-resistentes com detalhamento intermediário	4,5	3	4
Pórticos de aço momento-resistentes com detalhamento usual	3,5	3	3
Pórticos de aço contraventados em treliça, com detalhamento especial	6	2	5
Pórticos de aço contraventados em treliça, com detalhamento usual	3,25	2	3,25
Sistema dual, composto de pórticos com detalhamento especial e pilares-parede de concreto com detalhamento especial	7	2,5	5,5
Sistema dual, composto de pórticos com detalhamento especial e pilares-parede de concreto com detalhamento usual	6	2,5	5
Sistema dual, composto de pórticos com detalhamento especial e pórticos de aço contraventados em treliça com detalhamento especial	7	2,5	5,5
Sistema dual, composto de pórticos com detalhamento intermediário e pilares-parede de concreto com detalhamento especial	6,5	2,5	5
Sistema dual, composto de pórticos com detalhamento intermediário e pilares-parede de concreto com detalhamento usual	5,5	2,5	4,5
Sistema dual, composto de pórticos com detalhamento usual e pilares-parede de concreto com detalhamento usual	4,5	2,5	4
Estruturas do tipo pêndulo invertido e sistemas de colunas em balanço	2,5	2	2,5

Fonte: NBR-15421 (2006)

O coeficiente de resposta sísmica não precisa ser maior que o valor:

$$C_s = \frac{\left(\frac{a_{gs1}}{g}\right)}{T \left(\frac{R}{T}\right)} \quad (21)$$

Segundo Hampshire e Lima (2008), o período natural da estrutura (T) pode ser obtido por um processo de extração modal, que leva em conta as características mecânicas e de massa da estrutura. O período avaliado desta forma não pode ser maior

do que o produto do coeficiente de limitação do período C_{up} , definido na Tabela 9, pelo período natural da estrutura T_a , obtido através de:

$$T_a = C_T \cdot h_n^x \quad (22)$$

onde os valores dos coeficientes C_T e x são definidos da seguinte forma:

$$C_T = 0,0724 \text{ e } x = 0,8$$

Para estruturas em que as forças sísmicas horizontais são 100% resistidas por pórticos de aço momento-resistentes, não sendo estes ligados a sistemas mais rígidos que impeçam sua livre deformação quando submetidos à ação sísmica;

$$C_T = 0,0466 \text{ e } x = 0,9$$

Para estruturas em que as forças sísmicas horizontais são 100% resistidas por pórticos de concreto, não sendo estes ligados a sistemas mais rígidos que impeçam sua livre deformação quando submetidos à ação sísmica;

$$C_T = 0,0731 \text{ e } x = 0,75$$

Para estruturas em que as forças sísmicas horizontais são resistidas em parte por pórticos de aço contraventados com treliças;

$$C_T = 0,0488 \text{ e } x = 0,75$$

Para todas as outras estruturas.

h_n é a altura, em metros, da estrutura acima da base.

Tabela 9 – Coeficiente de limitação por período

Zona sísmica	Coeficiente de limitação do período (C_{up})
Zona 2	1,7
Zona 3	1,6
Zona 4	1,5

Fonte: NBR-15421 (2006)

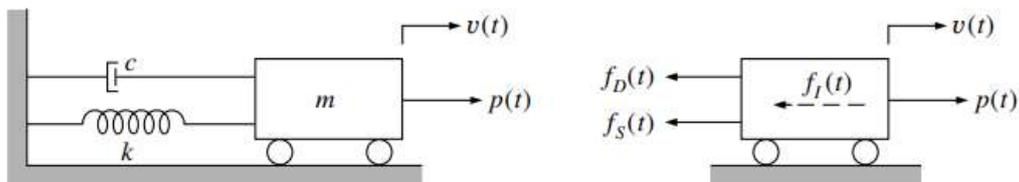
2.7. Equação do equilíbrio dinâmico

2.7.1. Para um grau de liberdade

Utilizando a simbologia de Clough e Penzien (1993), a equação de movimento da Figura 6 é formulada pelo equilíbrio das forças atuantes na massa. As forças atuantes na direção do deslocamento são o carregamento aplicado $p(t)$ e as três forças resistentes, que são originadas do movimento, a força inercial $f_I(t)$, a força de amortecimento $f_D(t)$ e a força elástica $f_K(t)$. A equação de movimento é expressa com o equilíbrio dessas forças.

$$f_I(t) + f_D(t) + f_K(t) = p(t) \quad (23)$$

Figura 6 – Modelo sistema com 1 grau de liberdade



Fonte: Clough e Penzien (1993)

Cada uma das forças resistentes na equação dada, é uma função do deslocamento $v(t)$ ou uma de suas derivadas.

Em concordância com o princípio de d’Alambert, a força inercial é um produto da massa e da aceleração, evidente na Equação 24.

$$f_I(t) = m \dot{v}(t) \quad (24)$$

Assumindo um mecanismo de amortecimento viscoso, a força de amortecimento é o produto entre a constante c e a velocidade (Equação 25).

$$f_D(t) = c \dot{v}(t) \quad (25)$$

Por fim, a força elástica é o produto da rigidez da mola e o deslocamento (Equação 26).

$$f_K(t) = k v(t) \quad (26)$$

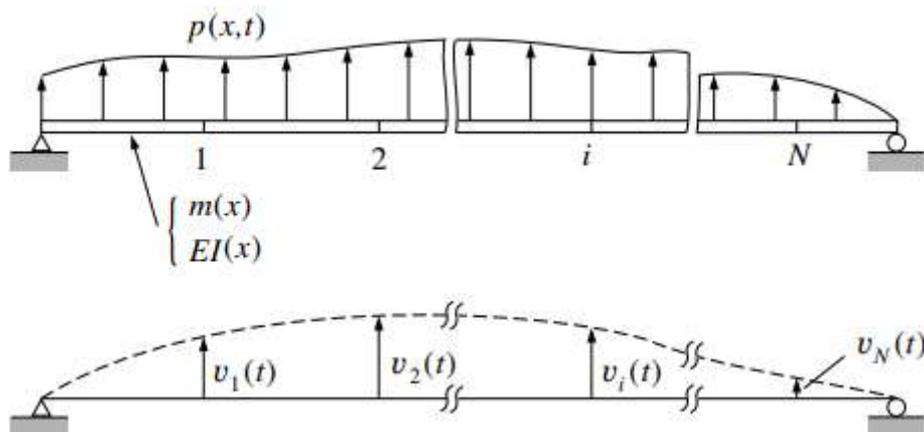
A equação do equilíbrio dinâmico para um grau de liberdade fica da seguinte forma

$$m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + k v(t) = p(t) \quad (27)$$

2.7.2. Para múltiplos graus de liberdade

Um exemplo típico de um caso de múltiplos graus de liberdade é o da viga na Figura 7.

Figura 7 – Sistema para múltiplos graus de liberdade



Fonte: Clough e Penzien (1993)

Segundo Clough e Penzien (1993), a equação de movimento para o sistema da figura acima pode ser descrita com a utilização do equilíbrio das forças efetivas com seus respectivos graus de liberdade. Geralmente, existem quatro tipos de força envolvidas em um ponto i : a carga externa $p_i(t)$ e as forças resultantes do movimento, inercial f_{Ii} , de amortecimento f_{Di} , e elástica f_{Si} . Dessa forma, cada um dos graus de liberdade pode ser expresso como

$$\begin{aligned}
 f_{I1} + f_{D1} + f_{S1} &= p_1(t) \\
 f_{I2} + f_{D2} + f_{S2} &= p_2(t) \\
 f_{I3} + f_{D3} + f_{S3} &= p_3(t) \\
 &\vdots \\
 f_{Ii} + f_{Di} + f_{Si} &= p_i(t)
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

ou ainda, as forças vetoriais representadas na forma matricial

$$\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = \mathbf{p}(t)
 \tag{29}$$

Clough e Penzien (1993) dizem que cada uma das forças resistentes pode ser expressa de uma forma mais conveniente de acordo com coeficientes adequados. A força elástica depende do coeficiente de rigidez k_{ij} , onde a força correspondente à coordenada i associada a um deslocamento unitário de coordenada j . Dessa forma, a força elástica pode ser expressa da seguinte forma

$$f_{Si} = k_{i1}v_1 + k_{i2}v_2 + k_{i3}v_3 + \dots + k_{iN}v_N \quad (30)$$

onde a força elástica depende em cada ponto da estrutura, do deslocamento naquele ponto.

Na forma matricial, o total de interações da estrutura pode ser escrito

$$\begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \\ \vdots \\ f_{Si} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2i} & \dots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & \dots & k_{ii} & \dots & k_{iN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (31)$$

ou, simbolicamente,

$$\mathbf{f}_S = \mathbf{K} \mathbf{v} \quad (32)$$

onde o coeficiente \mathbf{K} representa a matriz de rigidez da estrutura e \mathbf{v} é o vetor deslocamento.

Da mesma forma, segundo Clough e Penzien (1993), assumindo que o amortecimento depende da velocidade, as forças de amortecimento podem ser descritas de forma similar.

$$\begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \\ \vdots \\ f_{Di} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1i} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2i} & \dots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \dots & c_{ii} & \dots & c_{iN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \vdots \\ \dot{v}_N \end{Bmatrix} \quad (33)$$

onde \dot{v}_i representa a velocidade do deslocamento de coordenada i e os coeficientes c_{ij} são chamados de coeficientes de amortecimento. Simbolicamente, a Equação 33 pode ser escrita

$$\mathbf{f}_D = \mathbf{C} \dot{\mathbf{v}} \quad (34)$$

na qual a matriz de amortecimento da estrutura é representada por \mathbf{C} e a velocidade vetorial por $\dot{\mathbf{v}}$. De forma similar, Clough e Penzien (1993) dizem que as forças inerciais podem ser expressas em função de coeficientes de massa.

$$\begin{Bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \\ \vdots \\ f_{Ii} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1i} & \cdots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2i} & \cdots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{i1} & m_{i2} & m_{i3} & \cdots & m_{ii} & \cdots & m_{iN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \vdots \\ \ddot{v}_i \end{Bmatrix} \quad (35)$$

onde \ddot{v}_i é a aceleração do deslocamento de coordenada i e os coeficientes m_{ij} são os coeficientes de massa. Simbolicamente, a Equação 35 pode ser escrita como

$$\mathbf{f}_I = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{v}} \quad (36)$$

onde a matriz de massa da estrutura é representada por \mathbf{M} e $\ddot{\mathbf{v}}$ é a aceleração vetorial.

Substituindo na Equação 29, as Equações 34, 35 e 36, se obtém o completo equilíbrio dinâmico da estrutura, sendo considerado todos os seus graus de liberdade.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{v}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (37)$$

essa equação é equivalente à equação do sistema com apenas um grau de liberdade.

2.7.3. Análise modal

A análise modal utiliza os parâmetros de massa e flexibilidade da estrutura analisada, para encontrar os períodos de vibração em que pode entrar em ressonância. Esse conceito é muito importante para a adequação das estruturas aos possíveis sismos na região em que ela se encontra. Se a estrutura possuir frequência natural que coincida com a dos sismos da região, ela pode entrar em ressonância e sofrer danos estruturais.

2.7.3.1. Autovalores e autovetores

Segundo Souza Lima e Santos (2008), levando-se em consideração um sistema sujeito a uma condição de vibração livre, ou seja, sem amortecimentos, pode-se particularizar a equação de equilíbrio dinâmico

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{v}(t) = \mathbf{0} \quad (38)$$

Assume-se que a vibração livre do sistema de acordo com um de seus modos de vibração possa ser representada por

$$\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\phi}_j q_j(t) \quad (39)$$

onde $\boldsymbol{\phi}_j$ é um vetor constante que fisicamente representa uma deformada e $\mathbf{q}_j(t)$ uma função harmônica na forma

$$q_j(t) = A_j \cos(\omega_{n_j} t) + B_j \sin(\omega_{n_j} t) \quad (40)$$

A_j e B_j são constantes de integração que dependem das condições iniciais do movimento. Logo temos que

$$\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\phi}_j [A_j \cos(\omega_{n_j} t) + B_j \sin(\omega_{n_j} t)] \quad (41)$$

e ainda que

$$\left(-\omega_{n_j}^2 \mathbf{M} \phi_j + \mathbf{K} \phi_j\right) q_j(t) = 0 \quad (42)$$

O resultado da igualdade em que $q_j(t) = 0$ significa que não há movimento no sistema, portanto não sendo interessante para a análise dinâmica de uma estrutura. O outro modo para a igualdade ser verdadeira é que a parcela entre parênteses seja nula, o que nos leva a

$$\omega_{n_j}^2 \mathbf{M} \phi_j = \mathbf{K} \phi_j \quad (43)$$

ou ainda

$$\left(\mathbf{K} - \omega_{n_j}^2 \mathbf{M}\right) \phi_j = 0 \quad (44)$$

Novamente, se for considerado que a parcela ϕ_j é nula, significa que não há movimento no sistema, o que não possui relevância para a análise dinâmica de uma estrutura. Portanto, tem-se que

$$\det \left| \mathbf{K} - \omega_{n_j}^2 \mathbf{M} \right| = 0 \quad (45)$$

Desenvolvendo o determinante nos dá um polinômio de ordem N, sendo N o total de graus de liberdade, em relação a $\omega_{n_j}^2$, chamado *polinômio característico*. As N raízes desse polinômio, chamadas de *autovalores*, fornecem N frequências circulares ω_{n_j} , que podem ser ordenadas de forma crescente, sendo ω_{n_1} , a frequência fundamental, e as seguintes harmônicos superiores.

Com os valores encontrados de ω_{n_j} , calcula-se vetores ϕ_j chamados de *autovetores*. Não é possível encontrar os valores absolutos para os vetores, pois existem N equações e N + 1 incógnitas, representadas pelas N componentes de ϕ_j e por ω_{n_j} . No

entanto, ainda segundo Souza Lima e Santos (2008), isso não é um problema, pois apenas importarão os valores relativos entre as componentes de ϕ_j .

Dessa forma, atribui-se um valor a uma das componentes do vetor, escolhida para referência, determinando os valores relativos das demais componentes. Esse processo se chama normalização. Uma das normalizações mais comuns, é em relação a matriz de massa e fica da seguinte forma

$$\phi_j = \frac{\phi_j}{\sqrt{\phi_j^T \mathbf{M} \phi_j}} \quad (46)$$

Um exemplo com um sistema de três graus de liberdade ficaria da seguinte forma:

$$\phi_j = \begin{bmatrix} \varphi_{1,1} \\ \varphi_{2,1} \\ \varphi_{3,1} \end{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{\begin{bmatrix} \varphi_{1,1} & \varphi_{2,1} & \varphi_{3,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & m_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & m_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{1,1} \\ \varphi_{2,1} \\ \varphi_{3,1} \end{bmatrix}}} \right) \quad (47)$$

Os N autovetores podem ser agrupados em uma matriz (matriz modal), onde cada coluna representa um autovetor.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \cdots & \phi_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N,1} & \cdots & \phi_{N,N} \end{bmatrix} \quad (48)$$

Os N autovalores podem ser agrupados em uma matriz diagonal chamada de *matriz espectral*.

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_j & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{n_1}^2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_{n_j}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \omega_{n_N}^2 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Dessa forma, a equação 43 pode ser reescrita como

$$\mathbf{M} \Phi \lambda = \mathbf{K} \Phi \quad (50)$$

2.7.3.2. Matriz de amortecimento de Rayleigh

Para se resolver um sistema amortecido com vários graus de liberdade, é necessário definir a matriz de amortecimento, que pode ser encontrada em função dos coeficientes de Rayleigh (α e β). O cálculo desses coeficientes é feito a partir de dados experimentais de acordo com as equações que serão apresentadas. A equação que representa o movimento de um sistema livre amortecido é dada por

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{C} \ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{v}(t) = \mathbf{0} \quad (51)$$

onde \mathbf{M} é a matriz de massa, \mathbf{C} é a matriz de amortecimento e \mathbf{K} é a matriz de rigidez.

De acordo com Mohammad et al. (1995), Man Liu e Gorman (1995), e Esgandari et al. (2013), o Amortecimento de Rayleigh pode ser definido na sua forma geral como

$$\mathbf{c} = \mathbf{M} \sum_{k=0}^{p-1} a_k (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K})^k \quad (52)$$

onde, a_k é o k -ésimo coeficiente de proporcionalidade, e p é o número de termos que serão considerados no somatório.

Levando-se em consideração o caso mais simples de amortecimento proporcional, onde são definidos apenas dois termos ($p = 2$), temos

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} [\alpha_0 (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K})^0 + \alpha_1 (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K})^1] \quad (53)$$

$$\mathbf{C} = \alpha_0 \mathbf{M} + \alpha_1 \mathbf{K} \quad (54)$$

Adota $\alpha_0 = \alpha$ e $\alpha_1 = \beta$.

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (55)$$

A equação acima é expressa em função de dois coeficientes, chamados coeficientes de Rayleigh. Para o cálculo desses coeficientes, são realizados cálculos experimentais da razão de amortecimento e da frequência de vibração. A razão de amortecimento é definida por

$$2\zeta_i = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k \omega_i^{2k-1} \quad (56)$$

Considerando mais uma vez apenas dois termos ($p = 2$)

$$2\zeta_i = \alpha \omega_i^{-1} + \beta \omega_i \quad (57)$$

$$\zeta_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta \omega_i}{2} \quad (58)$$

Através de análises modais experimentais, são obtidos dois vetores, um com frequência de vibração dos modos e outro com a razão de amortecimento referente a cada um. Com esses dois vetores, são usadas as equações para o cálculo de α e β

$$\zeta_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta \omega_i}{2} \quad (59)$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\omega}{2} \\ \frac{1}{2\omega} & \frac{\omega}{2} \end{bmatrix}^{-1} \underline{\zeta} \quad (60)$$

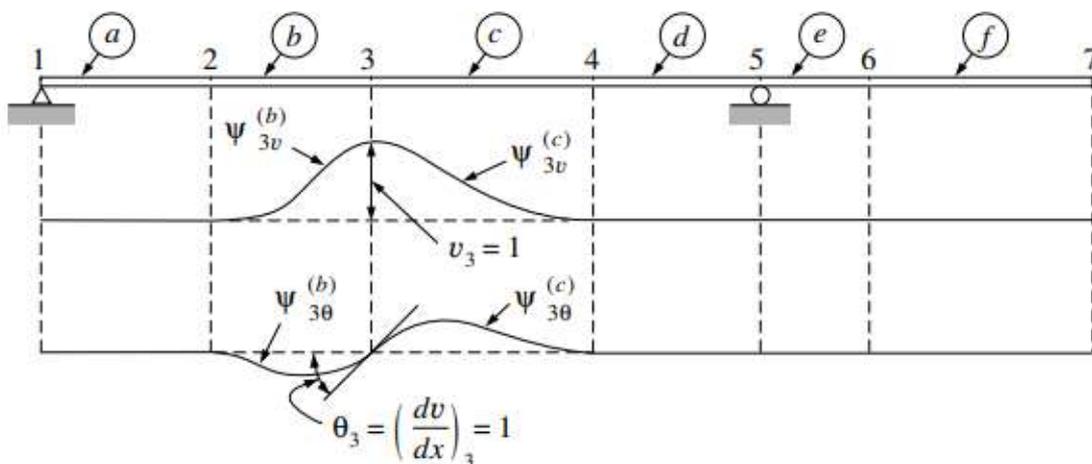
2.8. Métodos numéricos

2.8.1. Método dos Elementos Finitos – MEF

O MEF é um método desenvolvido com a finalidade de aproximar soluções das complexas equações diferenciais que descrevem os fenômenos físicos. A vantagem desse método consiste em tornar possível a aplicação e solução dessas equações diferenciais, levando em consideração as diferentes complexidades, como geometrias reais e não linearidades.

A base dessa metodologia está no método de discretizar espacialmente as geometrias em elementos mais simples, que podem ser identificados e transcritos para um domínio regular, onde as equações podem ser mais facilmente integradas em elementos isoparamétricos de limites fixos. Segundo Antunes (2014), a partição do domínio do corpo a ser analisado por MEF, em subdomínios mais simples, permite que as equações diferenciais sejam simplificadas por um sistema de equações lineares, mantendo a qualidade dos resultados. Na Figura 8 pode-se ver um exemplo de como a divisão dos elementos é feita.

Figura 8 – Divisão de uma estrutura para análise do Método dos Elementos Finitos



Fonte: Clough e Penzien (1993)

2.8.2. Newmark

Newmark (1965) desenvolveu um método implícito de integração direta das equações de movimento de um sistema dinâmico. De acordo com Miguel (2006), métodos de integração direta se resumem em procedimentos numéricos que não requerem o cálculo prévio das características da estrutura, sendo seguida uma metodologia de passo a passo. A convergência do método depende do tamanho do intervalo de tempo definido e da precisão da função adotada para representar a aceleração dentro do intervalo. Os métodos implícitos utilizam a equação do movimento no instante $t + \Delta t$ para calcular a resposta nesse mesmo instante, sendo a metodologia desenvolvida por Newmark mais eficiente entre métodos implícitos.

A variação do deslocamento, velocidade e aceleração são descritas pelas equações a seguir.

$$\vec{x}(t_{i+1}) = (a_0 \mathbf{M} + a_5 \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} [\vec{F}(t_{i+1}) + \mathbf{M}([\vec{x}(t_i) + a_1 \vec{\dot{x}}(t_i) + a_2 \vec{\ddot{x}}(t_i)]) + \mathbf{C}[a_5 \vec{x}(t_i) + a_6 \vec{\dot{x}}(t_i) + a_7 \vec{\ddot{x}}(t_i)]] \quad (61)$$

$$\vec{\dot{x}}(t_{i+1}) = a_5 [\vec{x}(t_{i+1}) - \vec{x}(t_i)] - a_6 \vec{\dot{x}}(t_i) - a_7 \vec{\ddot{x}}(t_i) \quad (62)$$

$$\vec{\ddot{x}}(t_{i+1}) = a_0 [\vec{x}(t_{i+1}) - \vec{x}(t_i)] - a_1 \vec{\dot{x}}(t_i) - a_2 \vec{\ddot{x}}(t_i) \quad (63)$$

Onde os vetores $\vec{x}(t_{i+1})$, $\vec{\dot{x}}(t_{i+1})$ e $\vec{\ddot{x}}(t_{i+1})$ representam o deslocamento, a velocidade e a aceleração no instante de tempo $t + \Delta t$. Os vetores $\vec{x}(t_i)$, $\vec{\dot{x}}(t_i)$ e $\vec{\ddot{x}}(t_i)$ representam o deslocamento, a velocidade e a aceleração no instante t . \mathbf{M} , \mathbf{K} e \mathbf{C} são as matrizes de massa, rigidez e amortecimento do sistema.

As constantes a_0, a_1, a_2, a_5, a_6 e a_7 são parâmetros do método de Newmark definidos pelo conjunto de Equações 64 a 69.

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \quad (64)$$

$$a_1 = \frac{1}{\alpha \Delta t} \quad (65)$$

$$a_2 = \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \quad (66)$$

$$a_5 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \quad (67)$$

$$a_6 = \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \quad (68)$$

$$a_7 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \quad (69)$$

Onde os parâmetros α e δ estão diretamente relacionados à estabilidade do processo. Segundo Miguel (2006), quando definidos como $\alpha = 0,25$ e $\delta = 0,5$ o método é incondicionalmente estável no tratamento de problemas lineares.

2.8.3. Duhamel

Segundo Clough e Penzien (1993), o método de Duhamel consiste na utilização da integral de convolução para a determinação da resposta de uma estrutura submetida a um carregamento dinâmico. Este método possui como limitação o uso de estruturas de comportamento linear com apenas um grau de liberdade, sendo bastante utilizada em conjunto com a análise modal de estruturas. Por não ser integrado em relação ao tempo, este método tende a ser bem mais rápido que os outros, dispensando a necessidade de grande esforço computacional.

A equação da integral de Duhamel pode ser expressa da seguinte forma

$$v(t) = \int_0^t p(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad t \geq 0 \quad (70)$$

$$h(t - \tau) = \frac{1}{m\omega} \sin \omega (t - \tau) \quad (71)$$

onde $h(t - \tau)$ é conhecida como função de resposta ao impulso unitário, pois ela expressa a resposta do sistema de um grau de liberdade a um impulso puro de unidade de magnitude em um instante $t = \tau$.

2.9. Análise no domínio da frequência

Para melhor entendimento dos processos a seguir, é necessário lembrar do que foi apresentado no Tópico 1.7.3.1 sobre a análise modal de uma estrutura com múltiplos graus de liberdade. De acordo com Clough e Penzien (1993) a análise modal permite a resolução de um problema de MGDG – Múltiplos Graus de Liberdade, a partir da resolução de vários problemas de 1 Grau de Liberdade. Isto é possível devido a ortogonalidade dos autovalores e autovetores obtidos da seguinte expressão:

$$\omega_{n_j}^2 \mathbf{M} \phi_j = \mathbf{K} \phi_j \quad (72)$$

Escrevendo o deslocamento total como o somatório dos deslocamentos em cada modo, tem-se:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n u_n \phi_n \quad (73)$$

em que n é o número de modos da estrutura.

Portanto, pode-se escrever o equilíbrio modal por meio da seguinte equação:

$$M\ddot{u}_n \phi_n + C\dot{u}_n \phi_n + K u_n \phi_n = \mathbf{F} \quad (74)$$

A força sísmica pode ser calculada pelo produto da massa associada a cada grau de liberdade, um vetor de projeções e a aceleração sísmica. Reescrevendo, portanto, a Equação 74, temos que:

$$M\ddot{u}_n \phi_n + C\dot{u}_n \phi_n + K u_n \phi_n = \mathbf{M} \mathbf{B} a_g \quad (75)$$

Multiplicando todos os termos da equação pelo transposto do autovetor, chega-se a seguinte expressão:

$$M_n \ddot{u}_n + C_n \dot{u}_n + K_n u_n = L_n a_g \quad (76)$$

em que M_n , C_n , K_n e L_n são os valores modais, que podem ser definidos da seguinte forma:

$$M_n = \boldsymbol{\phi}_n^t M \boldsymbol{\phi}_n \quad (77)$$

$$C_n = \boldsymbol{\phi}_n^t C \boldsymbol{\phi}_n \quad (78)$$

$$K_n = \boldsymbol{\phi}_n^t K \boldsymbol{\phi}_n \quad (79)$$

$$L_n = -\boldsymbol{\phi}_n^t L \mathbf{B} \quad (80)$$

Dividindo ambos os lados da Equação 76 pela massa modal, tem-se o seguinte:

$$\ddot{u}_n + 2\zeta\omega_n\dot{u}_n + \omega_n^2 u_n = \frac{L_n}{M_n} \mathbf{a}_g \quad (81)$$

Agora, para o cálculo da força estática equivalente, utiliza-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{F}_{est} = K \mathbf{u} \quad (82)$$

Usando a forma desacoplada do deslocamento, escreve-se:

$$\mathbf{F}_{est} = K \sum_1^n \boldsymbol{\phi}_n u_n \quad (83)$$

Lembrando do problema dos autovetores e autovalores mostrados na Equação 72, pode-se reescrever a Equação 83 da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_{est} = M \sum_1^n \omega_n^2 \boldsymbol{\phi}_n u_n \quad (84)$$

Analisando agora o problema no domínio da frequência com o intuito de se obter o maior valor possível de deslocamento, pode-se dizer que:

$$u_{n,máx} = \frac{L_n}{M_n} Su(\omega_n) \quad (85)$$

Podendo-se, finalmente, escrever a equação da força estática equivalente.

$$\mathbf{F}_{est} = \mathbf{M} comb \left[\omega_n^2 \frac{L_n}{M_n} Su(\omega_n) \boldsymbol{\phi}_n \right] \quad (86)$$

Perceba que se pode substituir o termo $\omega_n^2 Su$ pelo espectro de pseudoacelerações:

$$\mathbf{F}_{est} = \mathbf{M} comb \left[\frac{L_n}{M_n} Sa(\omega_n) \boldsymbol{\phi}_n \right] \quad (87)$$

Visto que os valores máximos nem sempre ocorrem no mesmo instante de tempo, substitui-se o somatório por uma determinada combinação de modos. As combinações mais famosas são:

- **Square root of the sum of squares (SQRSS)**

$$\mathbf{u}_{máx} = \sqrt{\sum \mathbf{u}_{i,máx}^2} \quad (88)$$

- **Complete quadratic combination (CQC)**

$$\mathbf{u}_{máx} = \sqrt{\sum_i \sum_j \rho_{ij} \mathbf{u}_{i,máx} \mathbf{u}_{j,máx}} \quad (89)$$

$$\rho_{ij} = \frac{8\zeta(1 + \beta_{ij})\beta_{ij}^{\frac{3}{2}}}{(1 - \beta_{ij}^2)^2 + 4\zeta^2\beta_{ij}(1 + \beta_{ij}^2)^2} \quad (90)$$

$$\beta_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j} \quad (91)$$

Para se saber quantos modos devem ser considerados, utiliza-se do fator de contribuição modal:

$$W_i = \frac{\left(\frac{L_n^2}{M_n}\right)}{M_t} \quad (92)$$

A NBR-15421 (2006) define que quando for realizada a análise pelo método espectral sejam utilizados modos de vibração que capturem, no mínimo, 90% da massa total da estrutura em cada uma das direções ortogonais consideradas no processo.

Além disso, as respostas modais podem ser combinadas pela regra SQRSS em casos que os modos de vibração da estrutura possuam frequências afastadas, sendo considerado como critério para sua utilização que as diferenças entre os valores sejam, no mínimo, 10%. Para valores menores que 10%, utiliza-se a regra de combinação mais precisa, como a CQC. A combinação entre as respostas pela aplicação dos espectros em cada direção também deve ser feita com atenção, dando preferência ao método SQRSS.

3. METODOLOGIA

Este capítulo tem como objetivo apresentar os métodos e as ferramentas utilizadas para o alcance dos resultados apresentados no Capítulo 4 do presente trabalho. Para tal, em parceria com o engenheiro Daniel Barbosa Mapurunga Matos (<http://lattes.cnpq.br/8503316813603672>), desenvolve-se o programa SATiF (*sismic analysis on time and frequency domain*) em linguagem *Python*, seguindo o paradigma de programação orientada a objetos. Para a confecção deste programa, utiliza-se os softwares *Spyder* e *Jupyter* notebook, fornecidas pela distribuição *Anaconda*, sendo utilizado como base o programa *Mechanical Vibrations* (2021).

Este capítulo está dividido em 3 tópicos principais: modelagem da estrutura, análise no domínio do tempo e análise no domínio das frequências, os quais estão apresentados de forma a descrever os procedimentos utilizados para a realização de cada um desses.

3.1. Modelagem da estrutura

3.1.1. Modelo para análise

A estrutura adotada neste trabalho é a de um edifício, representada por um pórtico 2D composto por elementos de barra. O edifício possui 10 pavimentos tipo, com fundação engastada em rocha e é constituído em concreto armado de resistência característica à compressão de 25 MPa. A modelagem do edifício é feita a partir de 70 barras, delimitadas por 44 nós, cada qual contendo 3 graus de liberdade: deslocamento horizontal, deslocamento vertical e rotação em torno do eixo z. As características físicas e geométricas da estrutura se encontram de forma mais detalhada no Apêndice B.

3.1.2. Importação de dados

O primeiro passo para a análise da estrutura proposta é a definição de suas coordenadas globais e de suas propriedades geométricas. A partir disso, cria-se um arquivo em Excel denominado "Arquivo_Base" onde são lançadas as coordenadas dos

nós em relação aos eixos x e y bem como os nós inicial e final de cada barra. Além disso, define-se as dimensões das seções transversais das vigas e pilares a fim de se obter a área e o momento de inércia de cada elemento. A seguir, cria-se o objeto “vib” dentro do módulo SATif, onde este é confeccionado a partir das características inseridas na planilha eletrônica, de modo a ser possível a criação dos vetores de coordenadas x e y , bem como das matrizes de conectividade (Matrizes ID). Neste trabalho, são utilizadas duas matrizes ID: uma referente aos nós e outra aos graus de liberdade. A primeira matriz permite saber o nó inicial e final de cada barra, conseguindo, assim, determinar as coordenadas de cada uma, a partir dos vetores C_x e C_y . Dessa forma, em posse das coordenadas que delimitam cada barra, o comprimento de cada uma destas é calculado pela diferença entre dois pontos, sendo esses armazenados nos vetores L_x e L_y . Finalmente, para a constituição da matriz de rotação, determina-se cossenos diretores de cada barra, sendo estes iguais a 0 ou 1, uma vez que as barras utilizadas para a confecção do pórtico são horizontais ou verticais, respectivamente.

3.1.3. Matrizes de rigidez e de massa

Ainda durante a criação do objeto “vib”, para a montagem das matrizes globais de massa e rigidez, é realizada a superposição das matrizes de cada barra de pórtico plano. Por se tratarem de 44 nós com 3 graus de liberdade cada, as matrizes resultantes deste processo são de ordem 132×132 . A superposição é conduzida através de um código que opera na seguinte sequência:

- Montagem das matrizes de rigidez e massa locais de cada barra a partir das suas características geométricas;
- Rotação das matrizes para o sistema de coordenadas global;
- Criação das matrizes temporárias para alocação das matrizes locais;
- Superposição das matrizes através de um *loop*: uma vez que se tem a posição dos nós e os graus de liberdade referentes a cada um, por meio das matrizes de conectividade, é possível combinar os graus de liberdade de cada barra e posicioná-los corretamente para a montagem da matriz de rigidez global.

Portanto, a finalização da criação do objeto “vib” consiste na criação de dois atributos, um contendo a matriz de rigidez global da estrutura e outro contendo a sua matriz de massa consistente.

3.1.4. Restrição dos graus de liberdade

Uma vez que a fundação da edificação é engastada em rocha, os primeiros 9 graus de liberdade, referentes aos nós da base, são restringidos utilizando o método “Rest” a fim de modelar os apoios como de terceiro gênero. Para tal, as linhas e colunas destes graus são retiradas da matriz de rigidez global da estrutura. Tal solução inviabiliza o cálculo das reações e dos esforços a qual cada barra está submetida, porém, como neste trabalho visa-se analisar somente os deslocamentos e acelerações dos nós, este tipo de solução é mais viável por garantir um menor custo computacional.

3.1.5. Frequências naturais e modos de vibração

Após a restrição dos graus de liberdade, mediante as matrizes globais com os devidos graus de liberdade restringidos, foi possível a obtenção das frequências naturais e dos modos de vibração por meio da resolução de um problema de autovalores e autovetores, realizado a partir da biblioteca *scipy*. A fim de visualizar os modos e as frequências naturais, plotam-se os 3 primeiros modos de vibração assim como as suas respectivas frequências. O processo supracitado é realizado a partir do método “eig” disponível para o objeto em estudo.

3.1.6. Matriz de amortecimento

A matriz de amortecimento utilizada é obtida pelo método de Rayleigh, utilizando um método de mesmo nome, como demonstrado no Tópico 1.4.3.2. O método de Rayleigh consiste no uso da matriz ortogonal aos autovetores da estrutura, o que garante a possibilidade da realização de uma análise modal da estrutura. Para isso, a matriz de amortecimento é montada como uma combinação das matrizes de massa e rigidez. A razão de amortecimento para os dois primeiros modos, por se tratar de um

edifício de concreto armado, é igual a 5% do valor crítico, conforme prescrito pela ABNT NBR 15421 (2006).

De posse das matrizes de rigidez, massa e amortecimento, utiliza-se a ferramenta “*pcolormesh*” do módulo “*matplotlib.pyplot*” para realizar a plotagem destas 3 matrizes, a fim de verificar a consistências das mesmas, ou seja, verificar se as mesmas foram confeccionadas da forma correta.

3.2. Análise da estrutura no domínio do tempo

A análise no domínio do tempo consiste na criação e aplicação de um vetor de cargas sísmicas ao sistema em estudo. No caso deste trabalho, cria-se um sinal aleatório por meio do espectro de Kanai (1961) e Tajimi (1960), refina-se esse sinal e aplica-se o mesmo na base da edificação. A partir de procedimentos numéricos, é possível realizar o cálculo dos deslocamentos e acelerações de cada nó do pórtico em questão, resolvendo a equação de equilíbrio dinâmico (Equação 37).

3.2.1. Geração do sinal sísmico artificial

A geração do sinal de excitação sísmica consiste na determinação da função de densidade espectral de potência proposta por Kanai (1961) e Tajimi (1960), a partir do tipo de fundação e do *peak ground acceleration (PGA)*, que consiste no valor máximo de aceleração do sinal do sismo. A partir deste método, é possível visualizar as frequências predominantes do sinal gerado, ou seja, as frequências que transportam maior energia.

Para a análise neste trabalho, utiliza-se a função “Signal”, tendo como valores de entrada o $PGA = 0,15$, que coincide no máximo valor encontrado na NBR-15421 (2006) e fundação assente em rocha. Para a discretização do sinal, utilizou-se um tempo total de 50s com o intervalo de tempo variando de 0.01s até 0.05s, o que resulta entre 1000 e 5000 elementos.

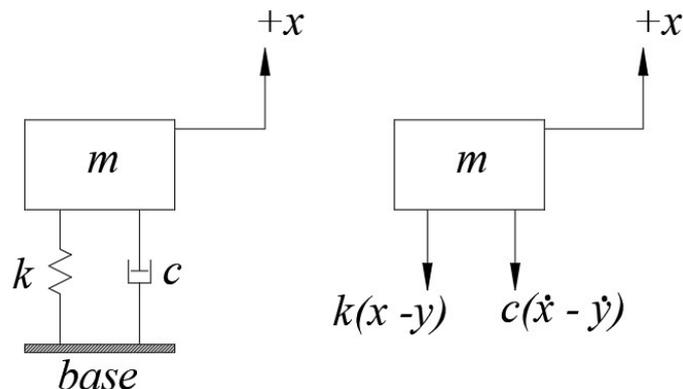
3.2.2. Método de Shinozuka e Jan

Sendo considerada o espectro definido no domínio da frequência como um dado de entrada, o sinal é transformado para o domínio do tempo através do método proposto por Shinozuka e Jan (1972), demonstrado no Tópico 2.4.2. A união do método de Shinozuka e Jan (1972) com o espectro de Kanai (1961) e Tajimi (1960) produz uma resposta estacionária para o sinal de acelerações, o que não representa com veracidade um sinal real de um sismo. A fim de tornar o sinal mais semelhante com um real, utiliza-se uma função de envoltória que simula a chegada das ondas P e S com um determinado intervalo de tempo, assim como a atenuação do sinal decorrente da dissipação de energia das ondas sísmicas.

3.2.3. Vetor de forças

De posse do sinal de aceleração no domínio do tempo, é necessário a criação do vetor de forças que atuará na estrutura. Para tal, utiliza-se o conceito de aplicação de uma aceleração na base da estrutura, que consiste, num sistema de um grau de liberdade, na multiplicação da massa associada em cada nó pela aceleração externa. A Figura 9 exemplifica esta situação.

Figura 9 – Aplicação de aceleração na base de um sistema de um grau de liberdade



Fonte: Autor (2021)

Aplicando a equação os valores vistos na Figura 9 na equação de equilíbrio dinâmico, tem-se a Equação 93.

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \quad (93)$$

Tomando o movimento relativo entre a base e o sistema como $z = x - y$, pode-se reescrever a Equação 93 da seguinte forma:

$$m(z'' - \ddot{y}) + c\dot{z} + kz = 0 \quad (94)$$

Portanto, para a análise sísmica, tomando como consideração o movimento relativo entre a base e o sistema, o vetor de forças pode ser calculado como o produto da massa pelo sinal de aceleração. No caso de um sistema com múltiplos graus de liberdade, além do produto entre a matriz de massa e o vetor de acelerações, é necessário utilizar um vetor direcional B, o qual aplica o sinal de aceleração apenas nos graus de liberdade correspondentes a coordenada analisada. No caso deste trabalho, o sinal do sismo é aplicado apenas na horizontal, portanto, o vetor B é composto de zeros nas posições correspondentes ao deslocamento vertical e a rotação em relação ao eixo z e em 1 para os graus de liberdade correspondentes ao deslocamento horizontal. A Equação 95 demonstra o procedimento utilizado para o cálculo do vetor de forças.

$$\vec{F} = -M\vec{B}\vec{a} \quad (95)$$

O método utilizado para a determinação deste vetor de forças chama-se “Sismo” e tem como valor de entrada o sinal gerado pelo espectro de Kanai (1961) e Tajimi (1960).

3.2.4. Resolução do equilíbrio dinâmico

A resolução da equação de equilíbrio dinâmico é realizada de duas formas: pelo método de Newmark e pelo método de Duhamel. Após as duas resoluções, é feita a análise das vantagens e desvantagens de cada método, usando como parâmetros praticidade, confiabilidade e custo computacional.

3.2.4.1. Método de Newmark

A equação de equilíbrio dinâmico do problema é solucionada primeiramente a partir do método de integração numérica de Newmark, apresentado no Tópico 2.4.2, utilizando como coeficientes os valores de $\alpha = 0.25$ e $\gamma = 0.50$, a fim de tornar o método estável. Neste método, visa-se analisar o tempo de processamento e o passo temporal necessário para que o método funcione adequadamente. Portanto, são analisados os mesmos intervalos definidos na geração do sinal, variando de 1000 a 5000 pontos de discretização. Neste procedimento, são analisados os valores de deslocamento e aceleração do último pavimento da estrutura em questão, a partir do método “Newmark”.

3.2.4.2. Duhamel

Como visto no Tópico 2.4.3, o método de Duhamel é válido apenas para estruturas de comportamento linear que possuam apenas um grau de liberdade. Portanto, para aplicação deste método na estrutura em questão, é necessário a utilização da análise modal, descrita no Tópico 2.3.3. É calculado, portanto, pelo método de Duhamel, a resposta correspondente a cada modo de vibração, que posteriormente são multiplicados pelos seus autovetores correspondentes para obter o vetor deslocamento real. Para a utilização deste método, faz-se uso do primeiro ao quarto modo de vibração, utilizando os métodos “Modal” e “Duhamel”.

Após a realização da análise feita pelos dois métodos, compara-se os dois a fim de se verificar a vantagem e a desvantagem de cada um deles.

3.3. Análise no domínio da frequência

Para a análise no domínio da frequência, são utilizadas duas abordagens: a utilização da norma NBR-15421 (2006) e a utilização do espectro de pseudoacelerações correspondente ao sinal analisado no domínio do tempo. Apesar de já se esperar uma pequena divergência, visto que a norma brasileira apresenta um espectro genérico de pseudoacelerações, que depende da zona e da classe do terreno em análise, comparam-se os espectros analisados, assim como o valor máximo de deslocamento encontrado em cada uma das abordagens. Por fim, comparam-se os valores máximos encontrados no

domínio do tempo com os valores encontrados no domínio da frequência, visando estabelecer qual o mais confiável e o mais prático de ser utilizado. Para ambas as abordagens vistas nos tópicos seguintes, há a necessidade da realização da análise modal da estrutura.

3.3.1. Análise pelo espectro de pseudoacelerações segundo a NBR-15421

Segundo a NBR-15421 (2006), demonstrada no Tópico 2.2, a estrutura é avaliada como se localizando na Zona 3, visando uma análise com o maior valor de PGA apresentado por esta norma. Tal zona possui aceleração sísmica horizontal entre de 0.15g, mesmo valor utilizado nas análises no domínio do tempo. A categoria de solo utilizada é a B, visto que na modelagem da estrutura considerou-se a estrutura como engastada em rocha, fazendo com que seus fatores de amplificação sísmica, C_a e C_v , sejam 1,0 e 1,0, respectivamente.

A partir destas informações, monta-se o espectro de pseudoacelerações a partir do método “Pseudo”, exibindo os seus valores com escala horizontal logarítmica, de forma a padronizar a sua visualização.

Em posse do espectro de pseudoacelerações, é possível realizar o procedimento para a determinação do deslocamento máximo de cada nó da estrutura. Para isso, é necessário descobrir quantos modos devem ser analisados na estrutura utilizando o fator de participação de massa encontrado no Tópico 2.1.5. Utilizando a Equação 97, calcula-se, então a força máxima equivalente em cada modo e, ao resolver o sistema mostrado na Eq. 96, obtém-se o valor máximo para cada modo.

$$\vec{F} = K \vec{x} \quad (96)$$

A partir do valor de deslocamento máximo de cada modo, utiliza-se as combinações SQRSS e CQC para determinar o deslocamento máximo relativo a todos os modos analisados. A realização de todo este procedimento é feita pelo método “FreqDomain”.

3.3.2. Análise a partir do espectro de pseudoacelerações do sinal artificial

Para ser possível a realização de uma análise mais realista entre os métodos do domínio da frequência e os métodos no domínio do tempo, decide-se por determinar o espectro de pseudoacelerações a partir do sinal artificial explicitado no Tópico 3.2.1. Para isso, aplica-se este sinal em vários sistemas de um grau de liberdade, cada um com uma frequência natural distinta e de mesmo fator de amortecimento igual a 5%. A partir da aplicação deste sinal e resolvendo cada um dos sistemas pelo método de Duhamel, é possível definir o deslocamento máximo relativo a cada período natural da estrutura, o que resulta no espectro de resposta em deslocamento daquele sinal. A partir deste espectro, multiplicando o mesmo pelo quadrado da frequência natural obtém-se o espectro de pseudoacelerações correspondente ao sinal artificial.

De posse destes valores, realiza-se o mesmo procedimento descrito no Tópico 3.3.1 a fim da determinação dos valores máximos de deslocamento.

3.4. Comparação dos métodos analisados

De posse dos resultados obtidos pela análise no domínio do tempo e no domínio da frequência, é possível verificar as vantagens e as desvantagens de cada método, as quais serão discutidas no Capítulo 4 deste trabalho.

4. RESULTADOS

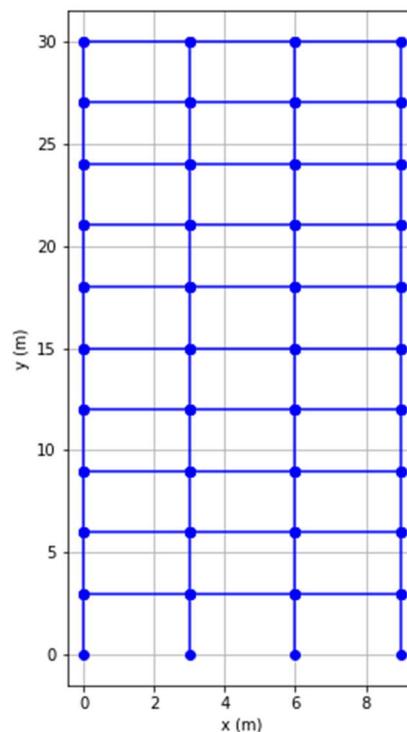
Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos através das rotinas computacionais aplicadas e posteriormente discutidos os seus significados. Por fim, é feita uma comparação entre os dados obtidos da análise dinâmica de uma estrutura sujeita a uma excitação sísmica através do domínio do tempo, com uma análise feita através do domínio da frequência.

4.1. Verificação da modelagem da estrutura

4.1.1. Importação dos dados e plotagem da estrutura

Após a importação da planilha eletrônica de nome “ARQUIVO_BASE”, onde foram inseridas as características físicas e geométricas da estrutura, é possível a elaboração da plotagem da estrutura em questão, como é mostrado na Figura 10.

Figura 10 – Modelagem da estrutura



Fica evidente pela configuração da estrutura mostrada na Figura 10, que a modelagem obtida da estrutura, como previsto, é exatamente a especificada no Tópico 3.1.1, sendo uma estrutura um pórtico 2D de 10 pavimento com 30 m de altura e os nós e as barras nas posições desejadas.

4.1.2. Frequências naturais e dos modos de vibração

Com os graus de liberdade restringidos na base, para a representação da fundação fixada em rocha, é possível o cálculo do problema de autovalores e autovetores da estrutura. Então, chega-se aos seguintes valores das frequências naturais da Tabela 10 e é possível plotar os modos de vibração da estrutura de acordo com a Figura 11.

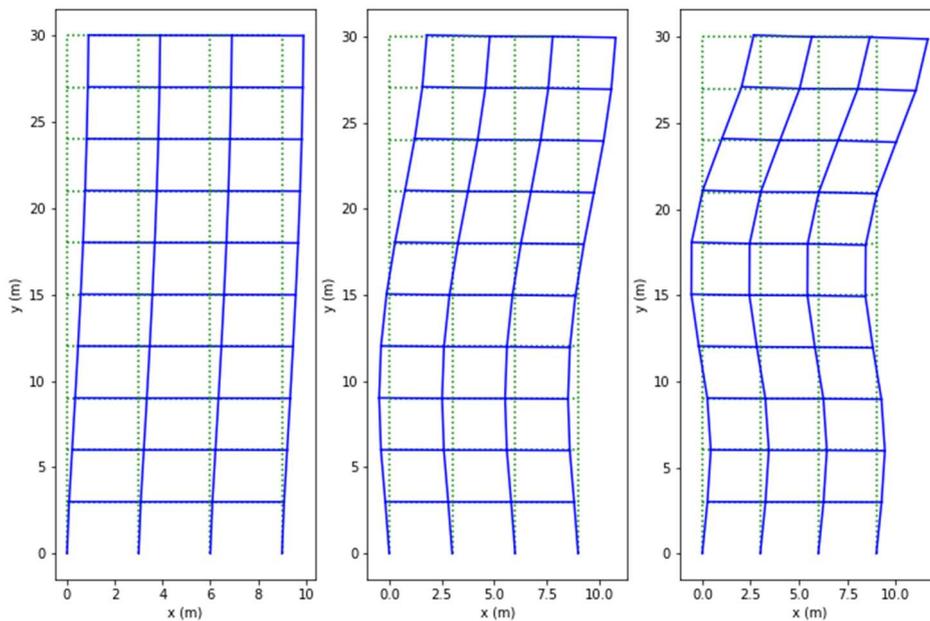
Tabela 10 – Frequências naturais

Frequência natural 1	1.33 Hz
Frequência natural 2	4.06 Hz
Frequência natural 3	7.09 Hz

Fonte: Autor (2021)

Vale ressaltar, que há a possibilidade de se encontrar até 132 valores para as frequências naturais da estrutura, entretanto, para a análise proposta neste trabalho, esse intervalo é suficiente para a obtenção de resultados satisfatórios.

Figura 11 – 3 primeiros modos de vibração da estrutura



Fonte: Autor (2021)

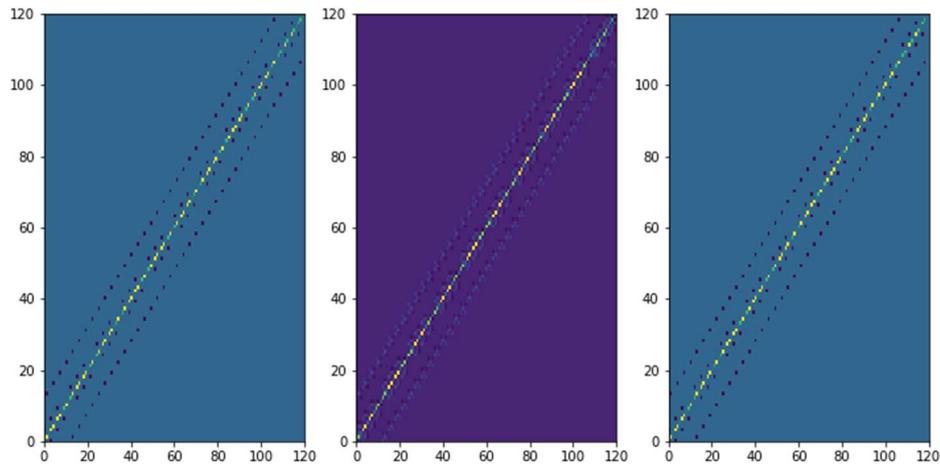
4.1.3. Matrizes de amortecimento, massa e rigidez

Utilizando um fator de amortecimento de 5%, como especificado no Tópico 3.1.6, obteve-se a matriz de amortecimento de Rayleigh.

Para a verificação da aptidão das matrizes para os cálculos, é feita a verificação da consistência das matrizes, através da plotagem dos mapas de cor de cada matriz, como pode ser visto na Figura 12.

Com uma matriz operável o mapa de cor deve mostrar uma diagonal bem preenchida, com os números ao redor todos zero. Como se pode observar na Figura 12, as matrizes satisfazem a verificação e estão aptas para os cálculos.

Figura 12 – Consistência das matrizes



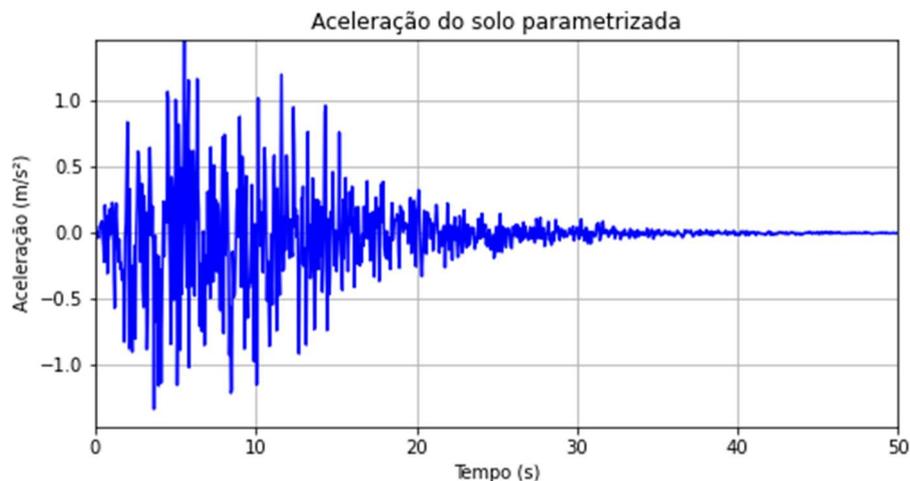
Fonte: Autor (2021)

4.2. Verificação da análise no domínio do tempo

4.2.1. Geração do sismo artificial

Sendo considerado um $PGA = 0,15$, que é o maior valor para o território brasileiro, fundação engastada em rocha e um passo temporal de $0,05s$, é utilizada a metodologia de Kanai (1961) e Tajimi (1960) e a metodologia de Shinozuka e Jan (1972), para se encontrar os valores de aceleração do solo parametrizados e plotou-se o gráfico que é exposto na Figura 13.

Figura 13 – Aceleração do solo parametrizada



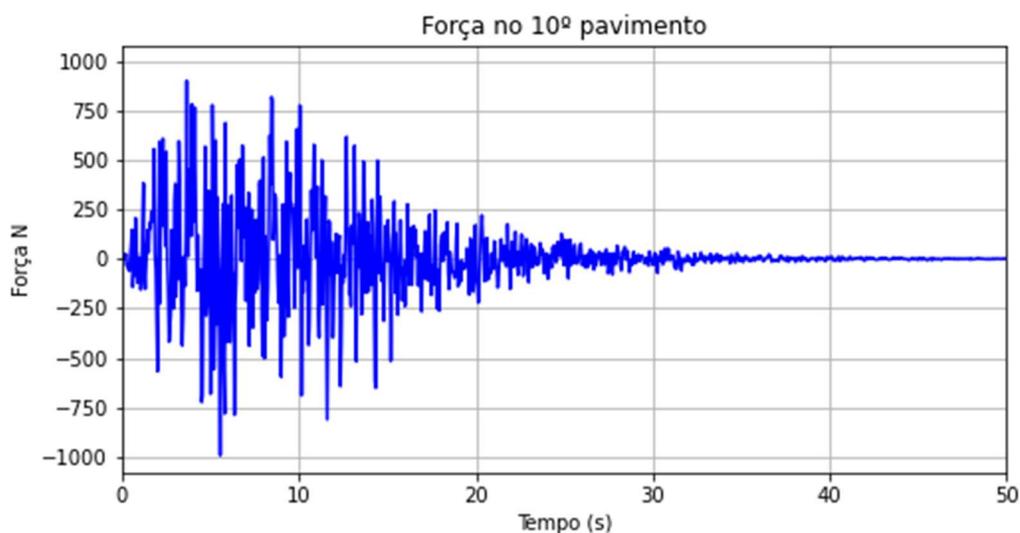
Fonte: Autor (2021)

Percebe-se, portanto, que o sinal obtido possui maior semelhança com um sismo real já que não apresenta comportamento estacionário. Isto se deve à função de forma utilizada para a confecção deste sinal.

4.2.2. Vetor de forças

De posse das acelerações, o sismo é então aplicado na base da estrutura e é calculada a força resultante em todos os nós da estrutura. A Figura 14 ilustra o deslocamento no décimo pavimento, que foi o escolhido devido à sua altura mais elevada o que conseqüentemente fará com que ele sofra deslocamentos de maior intensidade.

Figura 14 – Força no 10º pavimento



Fonte: Autor (2021)

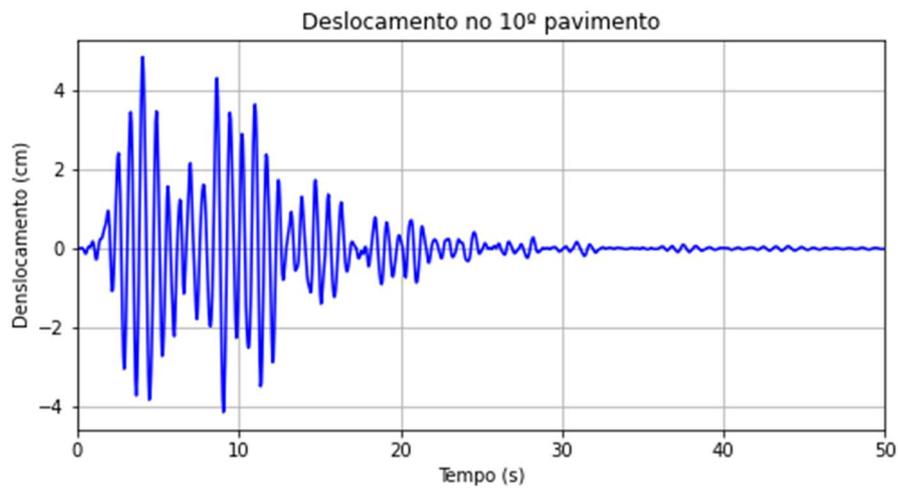
4.2.3. Resolução da equação de equilíbrio dinâmico

Com a força modelada, é resolvida a equação do equilíbrio dinâmico pelos dois métodos considerados: método de Newmark e método de Duhamel.

4.2.3.1. Newmark

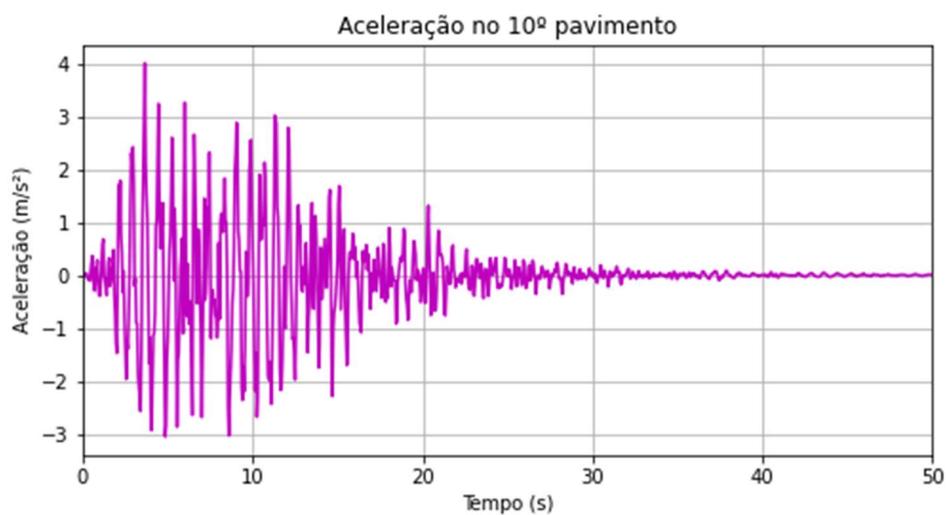
Através do método de Newmark, é possível obter o valor dos deslocamentos (Figura 15) e das acelerações (Figura 16) no décimo pavimento. O tempo gasto para a operação é de 0,16990 segundos.

Figura 15 - Deslocamento no 10º pavimento



Fonte: Autor (2021)

Figura 16 - Aceleração no 10º pavimento

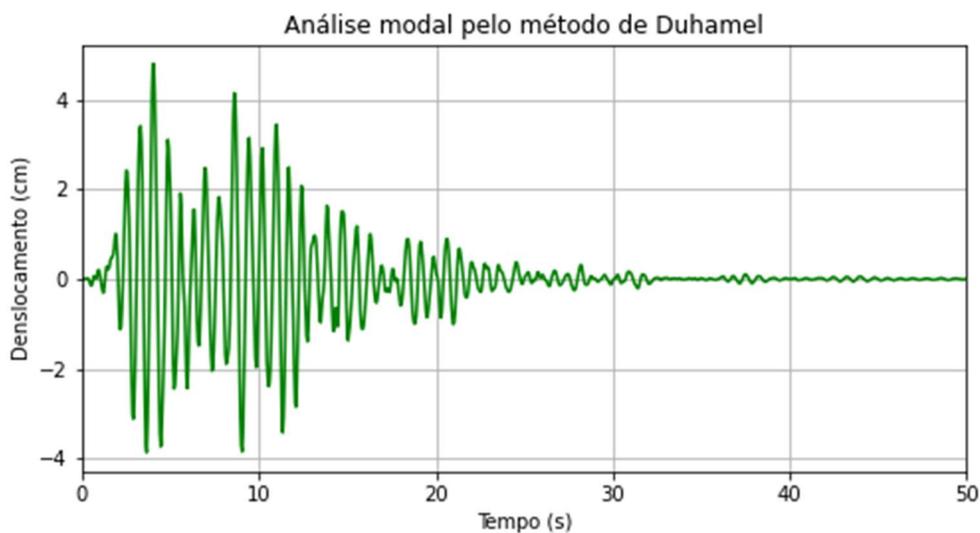


Fonte: Autor (2021)

4.2.3.2. Duhamel

Para a análise através do método de Duhamel, são considerados dois modos de vibração, pois são os modos que mais se aproximam da frequência do sismo que transmite maior energia. Após a análise modal, é aplicada a metodologia de Duhamel e são encontrados os deslocamentos (Figura 17). O tempo gasto para a operação é de 0,00199 segundos.

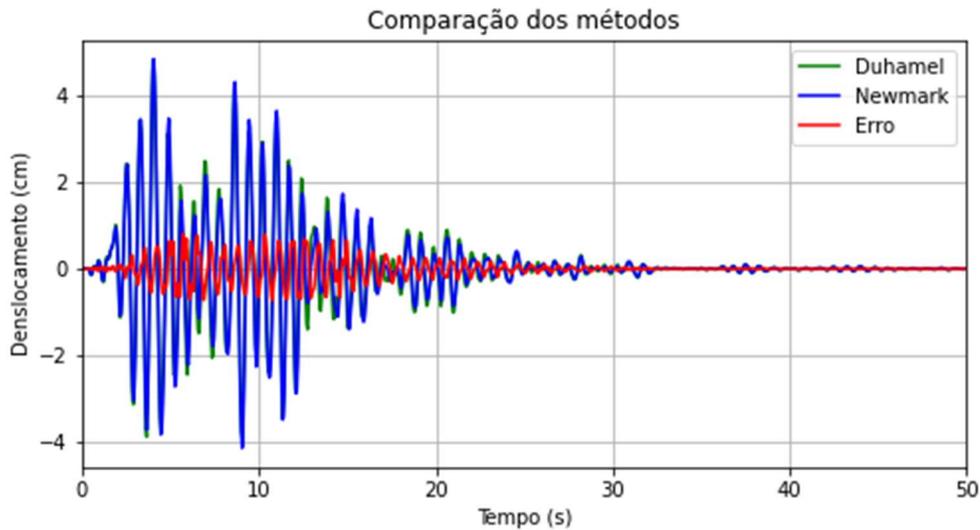
Figura 17 - Deslocamentos no 10º pavimento



Fonte: Autor (2021)

Em caráter de comparação é feita a plotagem dos dois deslocamentos em um único gráfico, para se ter uma ideia melhor do erro encontrado entre os dois, como pode ser observado na Figura 18.

Figura 18 - Comparação dos métodos



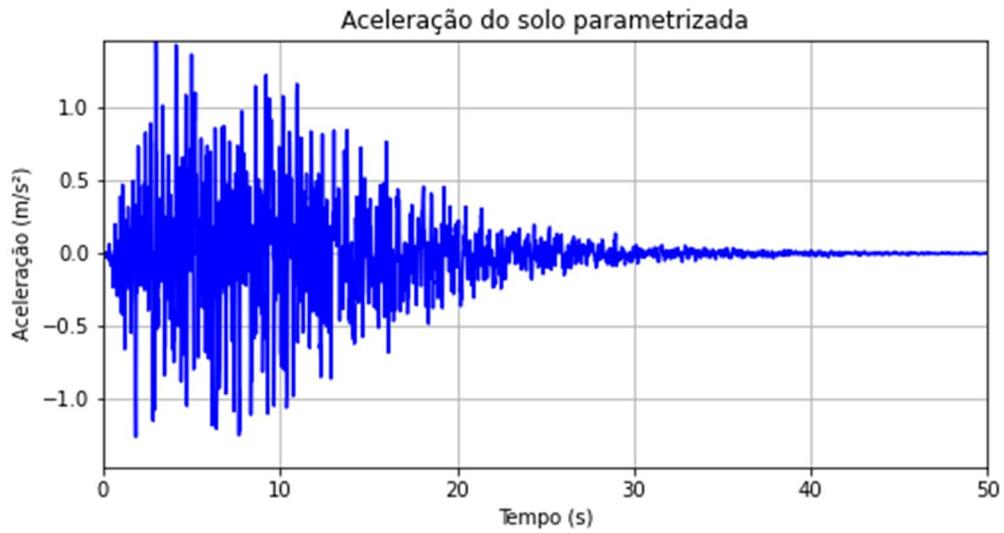
Fonte: Autor (2021)

Na comparação dos dois métodos é encontrado um erro de 1,72% e um deslocamento máximo de 4,40797 cm. Pela análise do gráfico apresentado na Figura 18, percebe-se que há um erro considerável entre os dois métodos. Esse erro pode ser ocasionado pela pouca quantidade de modos na análise pelo método de Duhamel ou pela escolha de um passo temporal muito elevado na análise pelo método de Newmark.

Com a análise feita até esse ponto, não é possível a determinação de qual das duas possibilidades advém o erro. Portanto, é feita uma nova análise dinâmica em que o passo temporal considerado é o de 0,01s e dessa forma, poder comparar melhor os dois métodos.

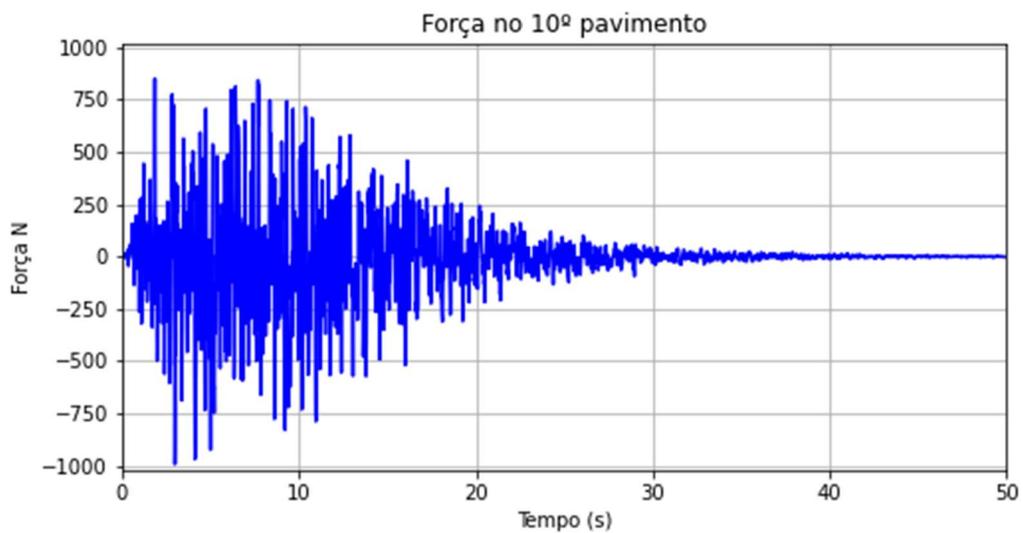
Agora, analisando os dados gerados a partir de um passo temporal de 0,01s e PGA de 0,15, são obtidos os resultados pelo método de Newmark visíveis nas Figuras 19, 20, 21 e 22.

Figura 19 - Aceleração do solo parametrizada



Fonte: Autor (2021)

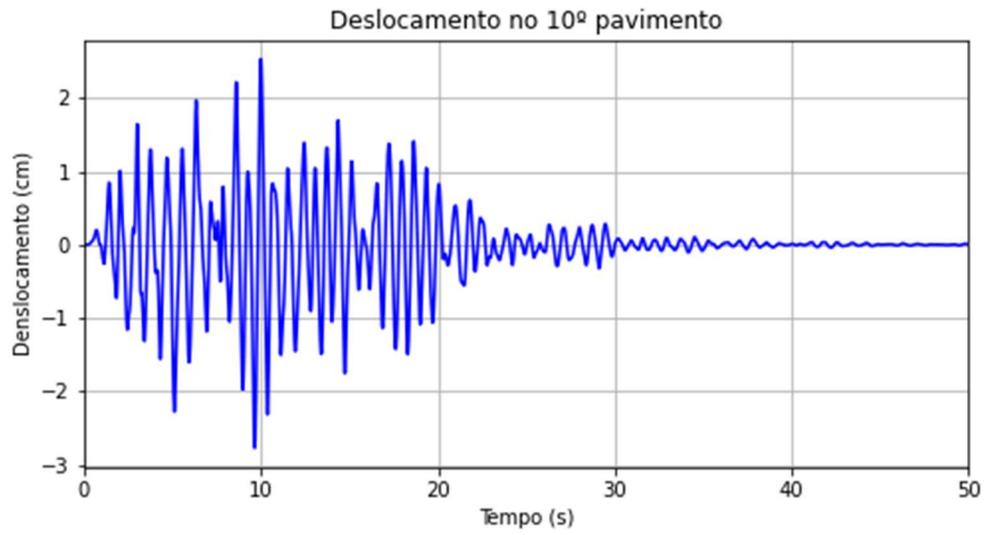
Figura 20 - Força no 10º pavimento



Fonte: Autor (2021)

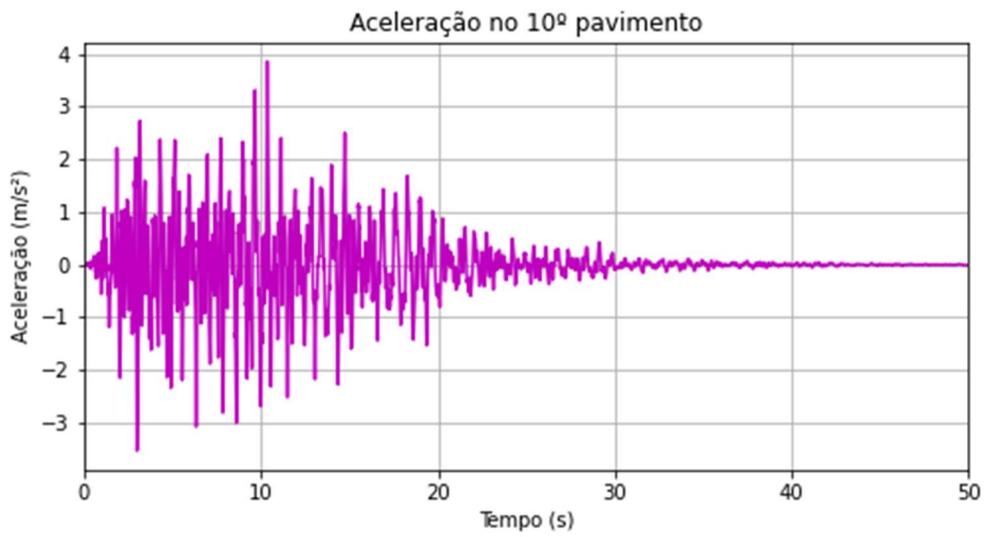
São encontrados os novos valores para os deslocamentos (Figura 20) e das acelerações (Figura 21) no décimo pavimento. O tempo gasto para a operação é de 0,69361 segundos.

Figura 21 – Deslocamento no 10º pavimento



Fonte: Autor (2021)

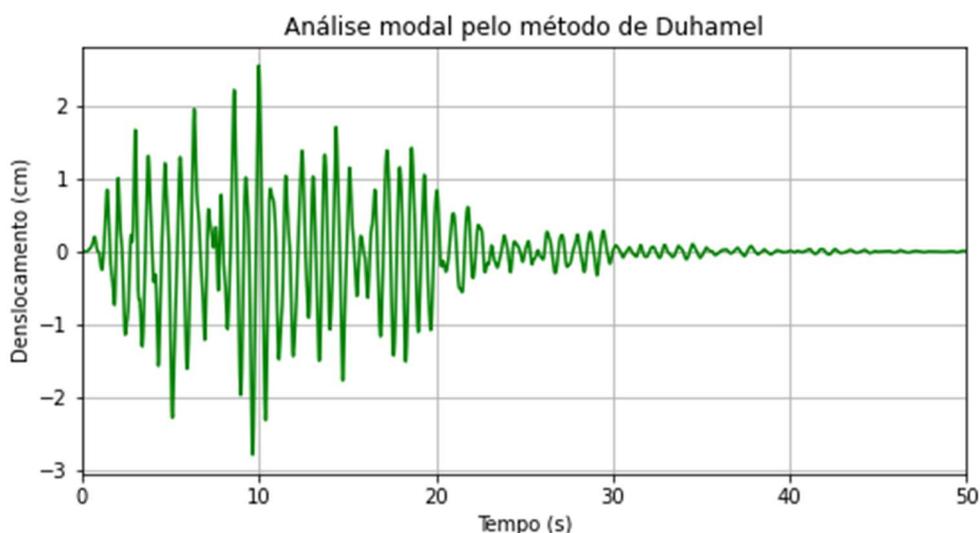
Figura 22 - Aceleração no 10º pavimento



Fonte: Autor (2021)

Para a análise através do método de Duhamel utilizando o novo passo temporal de 0,01s, mais uma vez são considerados dois modos de vibração. Após a análise modal, é aplicada a metodologia de Duhamel e são encontrados os deslocamentos (Figura 23). O tempo gasto para a operação é de 0,0029962 segundos.

Figura 23 - Deslocamento no 10º pavimento

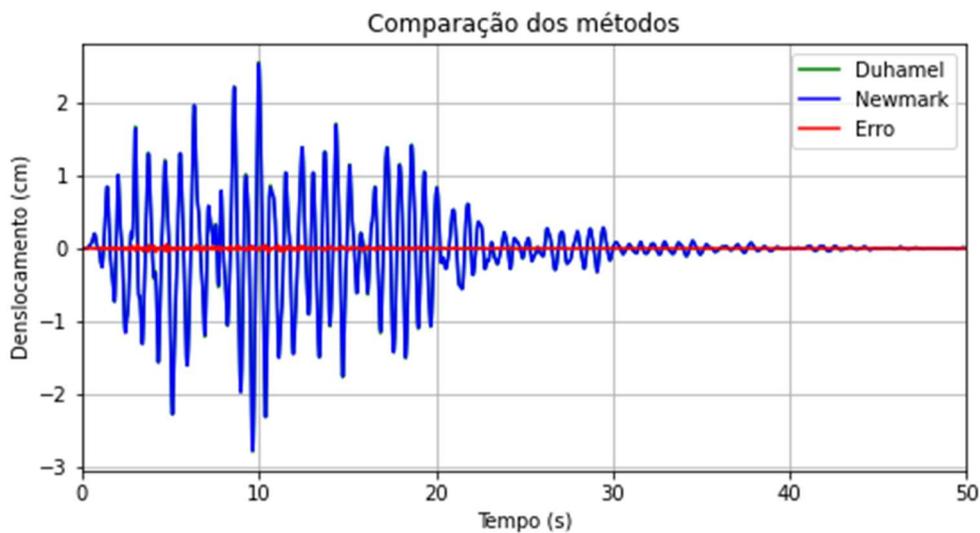


Fonte: Autor (2021)

Novamente, é feita a plotagem dos deslocamentos obtidos pelos dois métodos, para uma melhor comparação (Figura 24). Na comparação dos dois métodos é encontrado um erro de 0,6024% e um deslocamento máximo de 2,5550 cm. Pela análise do gráfico apresentado na Figura 22, percebe-se que o erro entre os dois métodos é quase nulo.

Com a segunda comparação não há alteração no número de modos na análise pelo método de Duhamel e sim no passo temporal na análise pelo método de Newmark. Isso nos mostra que a metodologia de Duhamel é bem mais precisa que a metodologia de Newmark, mesmo para passos temporais grandes demais. A Tabela 11 exemplifica bem esse resultado. O método de Duhamel é 8538% mais rápido que o de Newmark para um passo de 0,05s, e 23151% mais rápido para um passo de 0,01s. O que nos leva a concluir que o método de Duhamel não é sensível à variação de passo temporal.

Figura 24 - Comparação dos métodos



Fonte: Autor (2021)

Tabela 11 - Comparação métodos

Método	Passo temporal (s)	
	0,05	0,01
Newmark	0,16990	0,69361
Duhamel	0,001990	0,002996
Diferença (%)	8538%	23151%

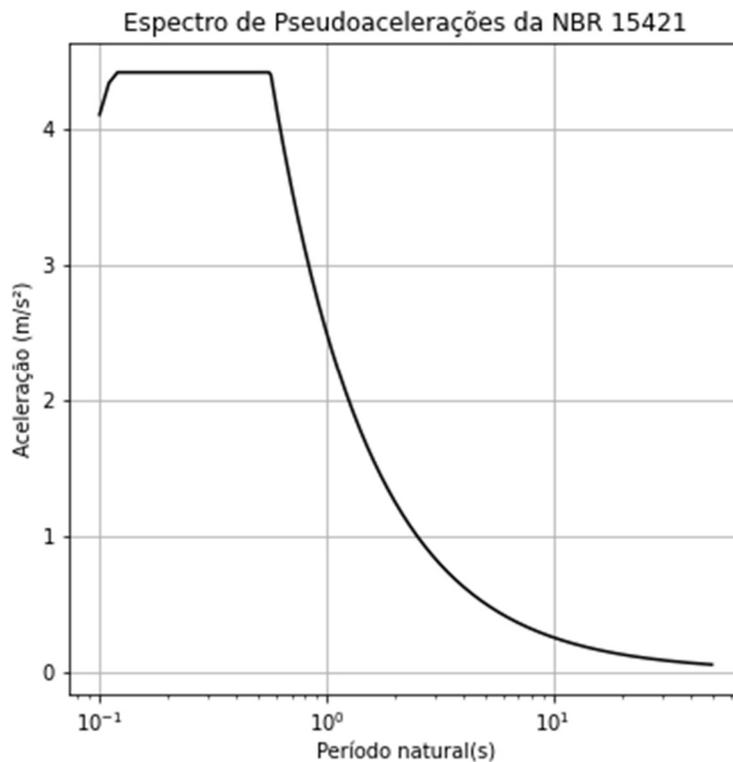
Fonte: Autor (2021)

4.3. Verificação da análise no domínio da frequência

4.3.1. Espectro de pseudoacelerações da norma

É considerado um PGA de 0,15 e categoria 2, com fundação engastada em rocha. Com esses dados, monta-se o espectro de pseudoacelerações segundo a norma NBR-15421 e obtêm-se o gráfico em escala logarítmica apresentado na Figura 25.

Figura 25 - Espectro de pseudoacelerações da NBR-15421



Fonte: Autor (2021)

De posse do espectro de pseudoacelerações, calcula-se o número de modos necessários de acordo com o seu fator de participação modal. Chega-se ao resultado de que 4 modos possuíam um fator de contribuição modal de 91,54%, atingindo o valor mínimo exigido em norma.

Dessa forma, é então calculada a força em cada nó da estrutura para se encontrar a força equivalente máxima em cada modo analisado. Então, calcula-se os deslocamentos máximos de cada modo analisado.

A partir do valor de deslocamento máximo de cada modo, utiliza-se as combinações SQRSS e CQC para determinar o deslocamento máximo relativo a todos os modos analisados. O valor máximo do deslocamento calculado pela combinação SQRSS é 6,244627 cm, já o valor máximo do deslocamento calculado pela combinação CQC é de 6,242741 cm. Nota-se que a diferença dos resultados entre os dois tipos de combinação é quase nula.

Percebe-se que os valores para os deslocamentos máximos encontrados pela metodologia da norma são relativamente maiores do que os encontrados no domínio do tempo, para o mesmo passo temporal de 0,05s. Isso é esperado, pois a análise feita pela norma é feita com uma base estatística que sempre tenderá para uma maior segurança da estrutura.

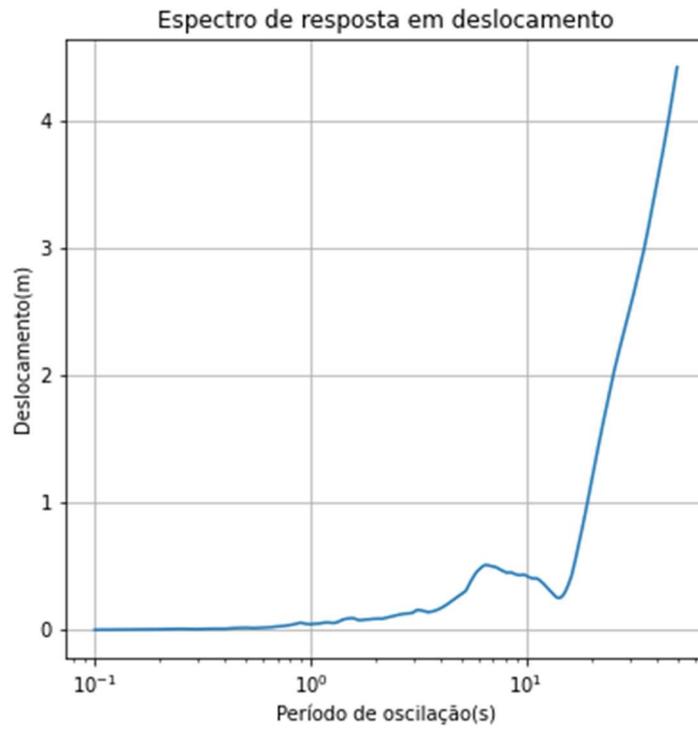
4.3.2. Análise a partir do espectro de pseudoacelerações do sinal artificial

A partir do sinal gerado na análise pelo domínio do tempo, com passo temporal igual a 0,05s, cria-se um espectro de deslocamento de resposta, representado na Figura 26. Com esse espectro, cria-se um espectro de pseudoacelerações e repete-se a metodologia de cálculo empregada no Tópico 4.3.1.

Para essa análise são considerados 4 modos, com fator de contribuição modal de 91,54% e utilizando a combinação SQRSS chega-se a um valor máximo de deslocamento de 3,877148 cm.

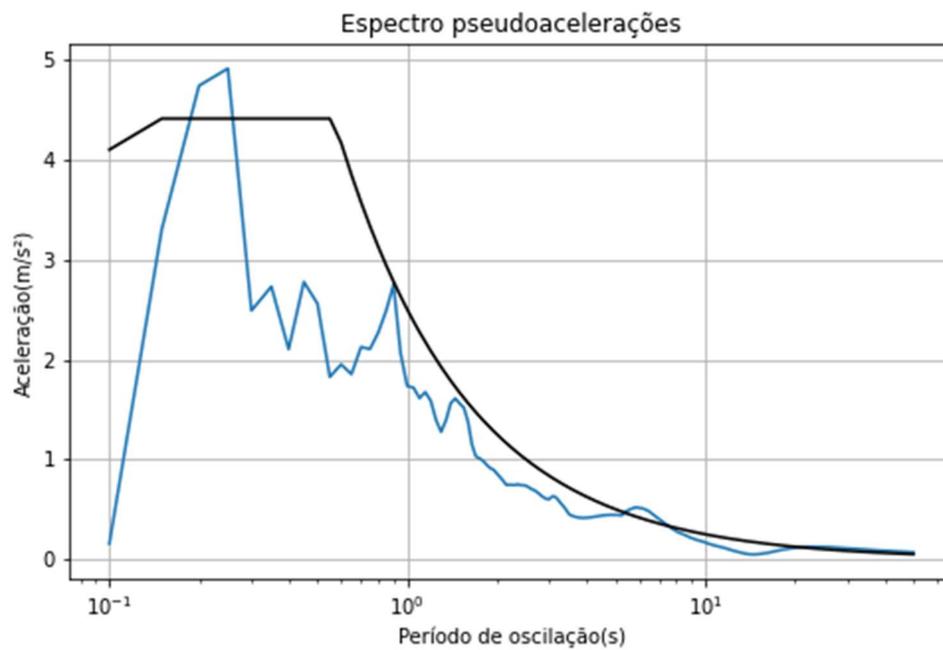
Para efeito de comparação, é feita a plotagem do espectro de pseudoacelerações da norma junto com o espectro originado do sinal artificial (Figura 27).

Figura 26 - Espectro de deslocamento de resposta



Fonte: Autor (2021)

Figura 27 – Comparativo de espectros



Fonte: Autor (2021)

Na sequência, a partir do sinal gerado na análise pelo domínio do tempo, agora um com passo temporal igual a 0,01s, cria-se novamente um espectro de deslocamento de resposta, representado na Figura 28. Com esse espectro, cria-se um espectro de pseudoacelerações e repete-se a metodologia de cálculo empregada no Tópico 4.3.1.

Para essa análise são considerados 4 modos, com fator de contribuição modal de 91,54% e utilizando a combinação SQRSS a um valor máximo de deslocamento de 2,82817 cm.

Para efeito de comparação, é feita a plotagem do espectro de pseudoacelerações da norma junto com o espectro originado do sinal artificial (Figura 29).

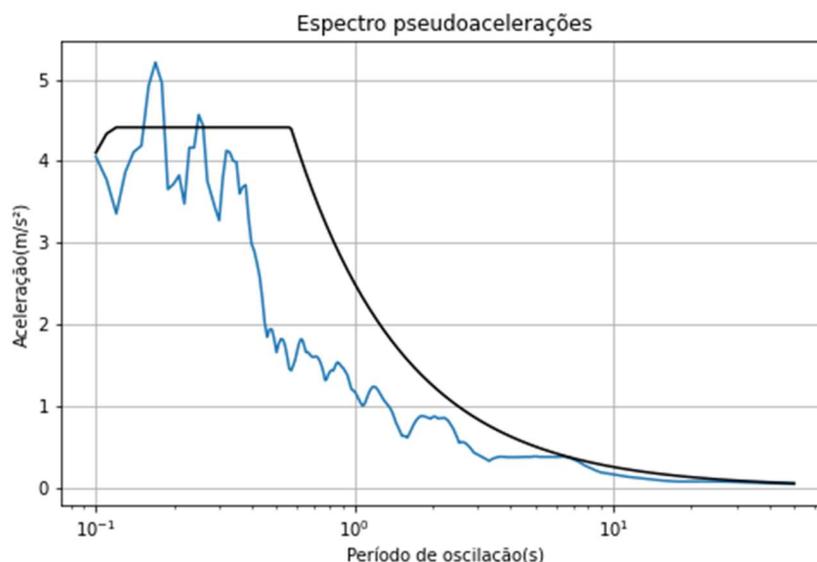
A comparação dos deslocamentos obtidos em cada método é exposta na Tabela 12.

Figura 28 – Espectro de deslocamento de resposta



Fonte: Autor (2021)

Figura 29 – Comparativo de espectros



Fonte: Autor (2021)

Tabela 12 - Comparação dos resultados

Domínio	Método	Deslocamento no Passo Temporal (cm)	
		0,05 s	0,01 s
Tempo	Newmark	4,407970	2,555000
	Duhamel	4,483787	2,570391
Frequência	NBR-15421	SQRSS	6,244627
		CQC	6,242741
	Sísimo Artificial	SQRSS	3,877148

Fonte: Autor (2021)

A partir das várias análises realizadas e com os resultados obtidos, nota-se que cada método possui características interessantes de serem comentadas.

A análise no domínio do tempo pelo método de Newmark se mostra muito eficaz no cálculo dos deslocamentos e acelerações da estrutura, sem haver a necessidade de derivação do sinal, quando comparado ao método de Duhamel. O método de Duhamel, apesar de não ser tão completo, apresenta um custo operacional muito inferior em relação à Newmark, o que em estruturas muito complexas acaba se tornando um fator muito importante. Além disso, Duhamel nos fornece o tempo exato do deslocamento máximo, o que Newmark não nos traz.

Já a análise no domínio da frequência nos fornece o método com menor custo operacional entre os métodos citados. Além desse fator, é uma metodologia baseada em análise estatística e guiado por norma, o que nos fornece a possibilidade de análises em diversas situações, sem haver a necessidade de geração de um sismo artificial particular para a análise. Essa metodologia de análise se mostrou bastante conservadora, pois os valores encontrados para os deslocamentos máximos são bem maiores que os encontrados pelas análises no domínio do tempo, o que favorece a segurança da estrutura.

5. CONCLUSÃO

Apesar das baixas magnitudes sísmicas atuantes no território brasileiro, já é constatado que a análise de uma estrutura submetida à esforços sísmicos se torna indispensável para o correto dimensionamento dos elementos que constituirão esta estrutura.

A partir da linguagem *Python*, utilizando paradigmas de orientação a objetos, foi possível confeccionar um programa de forma simples, a partir das ferramentas *Spyder* e *Jupyter Notebook*, que se mostrou bastante eficiente para a resolução dos problemas propostos.

Neste trabalho, apresentou-se variados métodos para a análise de uma estrutura submetida a sismo, que foram divididas em duas categorias: análise no domínio do tempo e análise no domínio da frequência. Na primeira observou-se uma maior demanda de esforço computacional, visto que houve a necessidade da criação de um sinal aleatório a partir da união dos métodos de Kanai (1961) e Tajimi (1960) e Shinozuka e Jan (1972). Quanto à resolução da equação de equilíbrio dinâmico, o método de Newmark se mostrou sensível à variação do passo temporal, podendo produzir resultados não satisfatórios caso se utilize um passo temporal muito grande ou exigindo esforço computacional desnecessário caso utilizado um passo temporal muito pequeno. Já o método de Duhamel, apresentou maior precisão independente do passo temporal, considerando poucos modos de vibração, o que garantiu uma grande diferença percentual entre os tempos de processamento, quando comparado ao método de Newmark.

A análise no domínio da frequência se mostrou bastante simples ao considerar as orientações disponíveis na NBR-15421 (2006), sendo necessário apenas o conhecimento das características físicas da estrutura, como as matrizes de rigidez, massa e amortecimento, e o espectro de pseudoacelerações disponível nessa mesma norma, que é confeccionado a partir da zona sísmica e categoria de terreno à qual a estrutura se encontra. Esta análise apresentou os maiores valores de deslocamento encontrados neste trabalho. Isso se deve ao formato do espectro que esta norma apresenta, onde as acelerações contidas entre os períodos naturais de 1 e 10 segundos, são as de maior magnitude.

A criação de um espectro de pseudoacelerações a partir do espectro de resposta em deslocamento dos sinais aleatórios analisados, se mostrou bastante simples e a sua utilização para o cálculo dos deslocamentos máximos equivalentes, se mostrou bastante assertiva, quando comparado aos valores encontrados pelos métodos de Newmark e Duhamel.

Por fim, nota-se que cada método analisado neste trabalho possui vantagens e desvantagens, cabendo ao projetista estrutural utilizar o que melhor se adequa à situação a qual se deseja analisar. Por exemplo, se há necessidade de uma verificação de serviço a nível de conforto, o método de Newmark se mostra mais adequado, visto que, no seu procedimento as acelerações da estrutura já são calculadas. No caso em que se deseja saber o instante de tempo em que ocorre o máximo deslocamento na estrutura, o método de Duhamel se mostra mais rápido e eficiente. Quando a análise requer apenas os máximos deslocamentos afim de descobrir os esforços máximos que atuam em cada elemento estrutura, a análise no domínio da frequência há de ser utilizada, pois é a que exige menor esforço computacional e a que se encontra na grande maioria dos *softwares* comerciais encontrados.

5.1. Recomendação de trabalhos futuros

Como recomendação de trabalhos futuros, cita-se:

- Utilizar os métodos citados neste trabalho em estruturas de maior complexidade, como pórticos 3D considerando as lajes como diafragmas rígidos;
- Comparação da norma brasileira NBR-15421 (2006) com outras normas de prestígio internacionais;
- Considerar a alvenaria como elemento de contraventamento em estruturas e verificar a sua contribuição para que a estrutura resista aos esforços sísmicos.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT), **NBR 15421, Projeto de Estruturas Resistentes a Sismos – Procedimento**. Rio de Janeiro, 2006.

KANAI, K.; “**An empirical formula for the spectrum of strong earthquake motions.**” Bulletin Earthquake Research Institute, University of Tokyo 39: 85–95. 1961.

MOHEBBI, M. et al; “**Designing optimal multiple tuned mass dampers using genetic algorithms (GAs) for mitigating the seismic response of structures.**” Journal of Vibration and Control 2012; DOI: 10.1177/1077546311434520.

NEWLAND, D. E.; “**An Introduction to Random Vibration and Spectral Analysis**”, 2aed, Longman, New York, 1987.

NEWMARK, N. M.; “**A Method of Computation for Structural Dynamics**”, ASCE Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 85, No. EM3, 1959.

SCHAAN, P. S. “**Geração de Excitação Sísmica Através do Espectro de KanaiTajimi**”. Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

SHINOZUKA, M, JAN C.M.; “**Digital simulation of random process and its applications.**” J Sound Vib 1972; 25:111–8.

TAJIMI, H.; “**A statistical method of determining the maximum response of a building structure during an earth- quake.**” In Proceedings of 2nd World Conference in Earthquake Engineering, Tokyo, Japan, July, pp. 781–797. 1960.

LIMA, Silvio S.; SANTOS, Sérgio Hampshire C.; “**Análise dinâmica das estruturas**”. 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda., 2009. 192 p.

VELOSO, Alberto. Os surpreendentes terremotos intraplaca. **Boletim SBGF**. N 96, p. 10, 2016.

MIGUEL, L. F. F.; **“Introdução ao Estudo de Vibrações”** Notas de Aula, UFRGS, 1ª edição, 2006.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **“Dynamics of structures”**, 2nd edition, McGraw Hill, New York, 1993.

MENDONÇA, Gustavo Henrique. **“Terremotos no Brasil”**; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/brasil/terremotos-no-brasil.html>. Acesso em 12 de setembro de 2020 às 10:08.

RICKER, Dennis W. **“Echo Signal Processing”**, 1st edition, The Pennsylvania State University. Kluwer Academic Publishers, (2003).

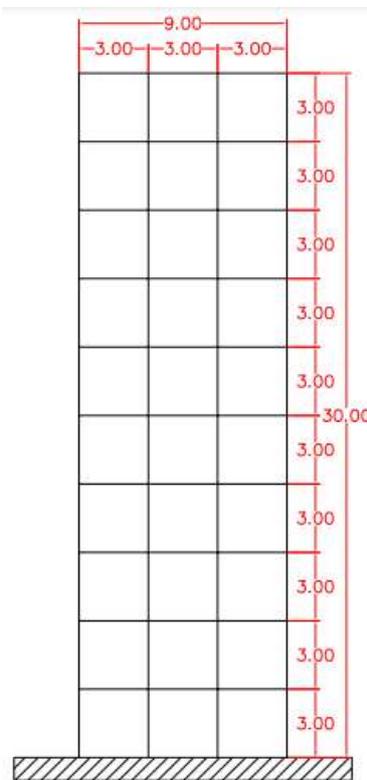
MATOS, Daniel Barbosa Mapurunga. (2021, April 13). Mechanical Vibrations (Version 4.0). Zenodo. <http://doi.org/10.5281/zenodo.4683774> .

SEYA, H., TALBOTT, M. E., and HWANG, H. H. M., (1993). Probabilistic seismic analysis of a steel frame structure. *Probabilistic Engeneering Mechanics*, 8, 127-136.

APÊNDICE A – CARACTERÍSTICAS FÍSICAS E GEOMÉTRICAS DA ESTRUTURA ANALISADA

- Pórtico 2D;
- 10 pavimentos tipo;
- Fundação engastada em rocha;
- Constituído de concreto armado;
- Resistência característica à compressão de 25MPa;
- Módulo de elasticidade igual a $5600\sqrt{f_{ck}}$, que resulta em um valor de 28GPa;
- Densidade utilizada igual a 2500 kg/m^3 .

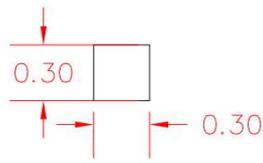
Figura 30 - Estrutura analisada



Estrutura analisada

Fonte: Autor (2021)

Figura 31 - Seção transversal de vigas e pilares



Seção transversal de
vigas e pilares (m)

Fonte: Autor (2021)

APÊNDICE B – MÉTODO DISCRETIZADO DE DUHAMEL UTILIZADO NO PROGRAMA SATiF

A solução geral da equação de equilíbrio de um sistema de 1 Grau de Liberdade submetido a um carregamento geral $F(\tau)$ pode ser descrita pela convolução do carregamento com a resposta do impulso, como mostrado na Equação 96.

$$u(t) = u_0(t) + \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t \exp[-\zeta\omega_n(t-\tau)] \sin \omega_D(t-\tau) F(\tau) d\tau \quad (96)$$

onde, $u_0(t)$ é a resposta do sistema às condições iniciais. Considerando a identidade trigonométrica da Equação 97,

$$\sin \omega_D(t-\tau) = \sin \omega_D t \sin \omega_D \tau - \cos \omega_D t \cos \omega_D \tau \quad (97)$$

e desconsiderando as condições iniciais, temos a Equação 98.

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D} \left[\frac{A(t) \sin \omega_D t - B(t) \cos \omega_D t}{\exp(-\zeta\omega_n t)} \right] \quad (98)$$

onde,

$$A(t) = \int_0^t \exp(-\zeta\omega_n \tau) \cos \omega_D t F(\tau) d\tau \quad (99)$$

$$B(t) = \int_0^t \exp(-\zeta\omega_n \tau) \sin \omega_D t F(\tau) d\tau \quad (100)$$

As reformulações apresentadas mostram que se pode usar recursos para poupar o tempo computacional gasto nos cálculos das funções trigonométricas. Usando o tempo discretizado $\tau_i = i\Delta\tau$, se obtém as seguintes equações:

$$e_i = \exp(-\zeta\omega_n \tau_i) \quad (101)$$

$$s_i = \sin \omega_D \tau_i \quad (102)$$

$$c_i = \cos \omega_D \tau_i \quad (103)$$

$$F_i = F(\tau_i) \quad (104)$$

As funções $A_i = A(t_i)$ e $B_i = B(t_i)$ podem ser recalculadas como somas cumulativas das Equações 105 e 106.

$$A_i = \Delta\tau \sum_{j=0}^i e_j c_j F_j \quad (105)$$

$$B_i = \Delta\tau \sum_{j=0}^i e_j s_j F_j \quad (106)$$

A solução é finalmente obtida como a Equação 107.

$$u_i = u_{0i} + \frac{1}{m\omega_D} \left(\frac{A_i s_i - B_i c_i}{e_i} \right) \quad (107)$$

onde as respostas às condições iniciais (com deslocamento u_0 e velocidade v_0) na Equação 108.

$$u_{0i} = \frac{1}{e_i} \left[u_0 c_i + \left(\frac{v_0 + u_0 \zeta \omega_n}{\omega_D} \right) s_i \right] \quad (108)$$