UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

RICARDO DE CARVALHO OLIVEIRA

OBJETOS DE APRENDIZAGEM: UMA ESTRATÉGIA PARA FACILITAR A COMPREENSÃO DE LOGARITMOS

FORTALEZA
2013

RICARDO DE CARVALHO OLIVEIRA

OBJETOS DE APRENDIZAGEM: UMA ESTRATÉGIA PARA FACILITAR A COMPREENSÃO DE LOGARITMOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva

FORTALEZA

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

O51o Oliveira, Ricardo de Carvalho
Objetos de aprendizagem : uma estratégia para facilitar a compreensão de logaritmos / Ricardo de Carvalho Oliveira. – 2013.
78 f. : il. color., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2013.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva.

1. Logaritmos. 2. Matemática – Ensino auxiliado por computador. 3. Coleta de dados. I. Título.

CDD 512.922

RICARDO DE CARVALHO OLIVEIRA

OBJETOS DE APRENDIZAGEM: UMA ESTRATÉGIA PARA FACILITAR A COMPREENSÃO DE LOGARITMOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 03 / 08 / 2013.

BANCA EXAMINADORA

Jonatan Floriano da Silva

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Jobson de Q. Oliveira

Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

À minha esposa, Janilse e meu filho, Ricardo Filho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, sobre todas as coisas.

À minha esposa, Janilse e ao meu filho, Ricardo Filho, pelo apoio e incentivo durante todo o curso.

À minha família: Em especial aos meus pais, Raimundo e Olimpia (Netinha), por minha vida. Meus irmãos, Paulo, Sérgio, Alexandre e Verônica, à tia Maria Auxiliadora, às cunhadas Irenilse (e esposo, André) e Islenilse (e esposo, Rui).

Aos colegas de curso, Thiago Pinheiro, Rafael Duarte, Eduvânio Machado, especialmente ao Fernando Hugo (e esposa Marília) pelo grande apoio para desenvolver este estudo, além do valiosíssimo grupo de estudo.

Ao meu orientador, Professor Doutor Jonatan Floriano, pelas orientações, dedicação e excelentes sugestões para a minha dissertação.

À professora Marta Sheila pelos valiosos ensinamentos durante a elaboração deste estudo.

Ao professor Doutor Antônio Barreto pelo apoio e importantes orientações.

Aos professores do PROFMAT/UFC: Marcelo Melo, Marcos Melo, Afonso de Oliveira, Cleon Barroso, Fábio Montenegro, Othon Lopes, Robério Rogério e Valter Nunes, por todo o curso.

Ao professor e amigo-irmão, José Maryval de Oliveira pela revisão ortográfica.

Aos idealizadores do PROFMAT, em especial ao professor Elon Lages Lima.

Ao Núcleo Gestor da EEEM Liceu de Messejana e aos alunos da mesma que participaram deste estudo, tornando-o possível.

“De que me irei ocupar no céu, durante toda a Eternidade, se não me derem uma infinidade de problemas de Matemática para resolver?”.

(AUGUSTIN LOUIS CAUCHY, 1789-1857).

RESUMO

Este estudo trata da utilização dos Objetos de Aprendizagem (OA) em salas de aula, sendo objetivo do mesmo investigar se o uso de objetos de aprendizagem pode facilitar o desenvolvimento de conteúdos em sala de aula, favorecendo ao processo ensino-aprendizagem. O estudo foi desenvolvido com uma turma de 1ª série do ensino médio da Escola Estadual de Ensino Médio Liceu de Messejana situada em Messejana, Ceará. A turma é composta de 36 alunos, que foram divididos em dois grupos, separados de forma aleatória, por sorteio. Um grupo foi denominado grupo de controle, com 26 alunos e outro, denominado grupo experimental, com 10 alunos. Utilizamos para a coleta de dados três instrumentos: questionário socioeconômico, pré-teste e pós-teste. Os resultados apontam que o objetivo foi alcançado, pois percebemos um desempenho superior dos participantes do grupo experimental, com relação aos participantes do grupo de controle. Portanto, os participantes que tiveram as aulas com o OA obtiveram um desempenho melhor.

Palavras-chave: Logaritmos. Ensino Médio. Objetos de aprendizagem.

ABSTRACT

This study deals with the use of Learning Object (LO) in classrooms, with the same aim to investigate whether the use of learning objects can facilitate the development of content in the classroom, facilitating the teaching-learning process. The study was conducted with a group of students from the first year of high school studying at a public school named Liceu de Messejana, located in Messejana, Ceará. The class consists of 36 students, who were divided into two groups, separated randomly in a raffle. One group was called the control group, with 26 students and the other group, called the experimental group, with 10 students. The data was collected from three instruments: socioeconomic questionnaire, pre-test and post-test. The results show that the goal was achieved because we realize superior performance of the experimental group, compared with participants in the control group. Therefore, participants who had classes with LO had a better performance.

Keywords: Logarithms. High School. Learning objects.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AVANT	Ambientes Virtuais de Aprendizagem de Tauá
FINEP	Financiadora de Estudos e Projetos
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
ITA	Instituto Tecnológico da Aeronáutica
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação e Cultura
OA	Objeto de Aprendizagem
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
PETI	Programa de Erradicação do Trabalho Infantil
SEDUC	Secretaria de Educação do Estado do Ceará
TICs	Tecnologias de Informação e Comunicação

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Constatamos um aumento no uso de tecnologias para informações em todos os setores, as pessoas cada vez mais têm acesso a notícias, transações financeiras, lazer e também educação. As chamadas redes sociais estão proporcionando às pessoas a oportunidade de estarem mais próximas, tendo mais amigos, embora fisicamente as distâncias muitas vezes sejam grandes.

A escola, como agente formador da sociedade e das pessoas, não pode estar desatenta a esta realidade na aplicação didática do uso de tecnologias. Os professores também devem se atualizar para que possam preparar os seus alunos, consciente e responsavelmente, participando ativamente desse processo.

Dessa forma os professores, em especial os de matemática, que são constantemente questionados sobre o quanto é importante cada assunto trabalhado, o quanto se utiliza na vida, na prática, tanto os assuntos do ensino fundamental quanto do ensino médio, devem ter o cuidado de se prepararem adquirindo novos formatos para suas aulas.

No caso da matemática, que muitos ainda consideram inatingível, os recursos didáticos também têm evoluído com a tecnologia, com muitos sites de jogos e curiosidades matemáticas, assim como os objetos de aprendizagem (OA) dedicados quase que exclusivamente a essa matéria.

Com a aplicação de novas tecnologias e de objetos de aprendizagem (OA), podemos aumentar as chances para que as mudanças ocorram, pois as aulas tendem a ser mais dinâmicas e chamativas, em geral, abordando os assuntos de maneira mais interessante e com as definições trabalhadas de maneira mais atrativa, muitas vezes respondendo a famosa pergunta: “Para que isso serve?”.

Será então possível que um OA possa auxiliar e facilitar o desenvolvimento de conteúdos em sala de aula, interferindo positivamente no processo de ensino-aprendizagem? O presente estudo pretende buscar respostas para essa questão norteadora desse estudo, cujo objetivo é investigar se o uso de objetos de aprendizagem pode facilitar o desenvolvimento de conteúdos em sala de aula, favorecendo a aprendizagem.

Ao longo de minha trajetória como professor tenho escutado dos alunos o quanto não entendem matemática e, muitas vezes os logaritmos são citados como vilões da disciplina, pois dizem não entender, principalmente as aplicações das propriedades. Surgiu daí o interesse em desenvolver um estudo que pudesse chegar a reduzir esse hiato.

Trataremos o assunto com uma turma de 1ª série do ensino médio, separando em dois grupos sorteados aleatoriamente. Com o primeiro grupo (controle) será trabalhado apenas o método tradicional e com o segundo (experimental) trabalharemos com a metodologia diferenciada, de modo que se verifique se o grupo experimental conseguirá um resultado superior ao grupo de controle, ou seja, se a abordagem diferenciada trará resultados melhores no teste.

O assunto será debatido na sala de aula com o grupo de controle seguindo o conteúdo da forma que é apresentado no OA. O grupo experimental terá acesso ao mesmo conteúdo através do OA, em um laboratório de informática da escola.

A expectativa é de que pelo menos 50% dos participantes possam resolver quatro ou mais das 8 questões propostas, contando que os participantes do grupo experimental atinjam resultado superior devido ao tratamento dado (utilização do OA).

Suponho que a dificuldade será encontrada no entendimento das propriedades bem como nas aplicações das mesmas, pois muitas vezes o aluno chega ao ensino médio com deficiências nos conteúdos do ensino fundamental e sem o hábito de estudar com maior seriedade.

O estudo está organizado da seguinte forma:

Capítulo 1 - Introdução;

Capítulo 2, com o nome "Sobre o Educandus", será apresentado um histórico, definição e as metas do Educandus, bem como uma breve explanação sobre os objetos de aprendizagem. Neste ponto será feita uma apresentação do objeto de aprendizagem utilizado – o OA de Logaritmos.

O capítulo 3, nomeado "Logaritmos: História, definição, propriedades e algumas demonstrações", trará um breve histórico dessa temática apoiado em contribuições de Lima *et al* (2006), Eves (2008), Boyer (2008) entre outros, bem como a caracterização da função logarítmica.

No capítulo 4, denominado "Material e métodos", faremos uma descrição das atividades a serem aplicadas, bem como dos objetivos e as justificativas das escolhas de tais atividades. Trataremos da metodologia apresentando o contexto, os participantes, a condução, bem como os instrumentos, os métodos de coleta dos dados e o tipo de pesquisa.

O capítulo 5 – "Análise dos resultados" trará o método de análise e os resultados que serão apresentados e discutidos.

Por fim, no capítulo 6 serão destacadas as conclusões e será feita uma avaliação geral deste estudo levando em consideração os objetivos, a análise e discussão dos resultados.

Contamos que este estudo possa incentivar cada vez mais os colegas professores e seus alunos a fazerem uso das tecnologias, em especial dos OA, tornando o processo de ensino-aprendizagem mais confortável e fazendo com que o “medo” da matemática possa ser minimizado.

2 SOBRE O EDUCANDUS

2.1 Breve histórico

A Educandus[1] é uma empresa jovem, inovadora, formada na sua essência por engenheiros do Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA), com cerca de 150 funcionários entre professores, programadores, administradores e diretores, distribuídos em 5 (cinco) estados: São Paulo, Rio de Janeiro, Pernambuco, Bahia e Ceará. A Educandus desenvolve, de forma ágil e flexível, soluções para o mercado utilizando as Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) aplicadas à Educação.

Criada em 1990, por engenheiros do ITA com experiência em Educação e Tecnologia da Informação, a Educandus vem atuando no desenvolvimento de sistemas para avaliação da aprendizagem, conteúdos em multimídia, portal educacional, capacitação e formação continuada de professores. O foco da empresa centra-se na incorporação de novas tecnologias ao processo de ensino e aprendizagem.

Em 1996, a Educandus se estabelece como empresa de excelência no fornecimento de conteúdos multimídia em nível nacional. Conteúdos, apresentados de forma contextualizada, com linguagem clara e interativa, através de animações, simuladores, jogos e vídeos, atendiam especialmente a rede privada de ensino.

Em 1998, a Educandus expande o seu campo de atuação comercial e passa a atender o setor público de ensino. O atendimento à Secretaria de Educação do Rio Grande do Norte marca essa nova fase.

Em 2002, a empresa amplia ainda mais sua atuação na área pública atendendo às Secretarias de Educação dos estados de São Paulo, Ceará e Pernambuco, além do atendimento às mais de 300 escolas particulares.

Em 2003, são iniciados projetos com ênfase na internet. Nascia o Portal Educandus WEB. Além dos conteúdos multimídia já disponíveis na versão off-line, o Portal trazia ferramentas de autoria para o professor, monitoramento da aprendizagem *(LMS – Learning Management System)* para docentes e gestores, central de comunicação, incluindo professor online para usuários em geral, entre várias outras ferramentas.

---

[1] Informações disponíveis em: http://www.educandus.com.br Acesso em: 30/05/2013 às 10h00min.

Em 2004, ocorre a implantação do Projeto Escola de Juventude em parceria com a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. Um projeto inovador que atendeu mais de 30.000 alunos na modalidade EJA – Educação de Jovens e Adultos. O acesso aos conteúdos via web, garantiu ao final do projeto, em 2006, a formação de mais de 12.000 alunos. O sucesso do projeto garantiu à Educandus uma expansão do uso do Portal e dos Conteúdos para 2.800 escolas do Estado, tanto na modalidade EJA quanto Regular.

Em 2006, a Educandus continua com um crescimento exponencial através das expansões dos projetos na área pública, além de superar a marca de 400 escolas da rede privada de ensino. Recebe o Prêmio Master Escolas e firma parceria com a Faber Castell, desenvolvendo o SOS Natureza que cumpre, desde então, um papel importante na formação da consciência ambiental das crianças. O SOS Natureza é um Ambiente Virtual de Aprendizagem on-line destinado aos alunos do Ensino Fundamental e constitui-se como uma estratégia para auxiliar professores no processo de formação de sujeitos capazes de compreender o mundo e de agir de forma crítica e consciente, através de práticas educativas voltadas à sensibilização da coletividade sobre as questões ambientais e à sua organização e participação na defesa da qualidade do meio ambiente.

As atividades são apresentadas de forma contextualizada, a partir de histórias animadas sobre problemas ambientais, que permitem ao aluno avançar na aprendizagem de forma divertida. Os jogos são randômicos, a fim de evitar que as crianças se desestimulem e oferecem níveis de dificuldades diferenciados como forma desafiadora de estimular o processo educativo. Através desses projetos ambientais, o aluno pode vivenciar na prática os temas abordados no SOS NATUREZA e terá oportunidade de observar, experimentar, pesquisar, analisar, a fim de construir o conhecimento através da vivência e da prática.

Em 2007, a Educandus é contemplada com o apoio da Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP), através da Chamada Pública de Subvenção Econômica à Inovação 01 ⁄ 2006, numa concorrência com mais de 1.000 projetos apresentados. Implanta o Programa de Erradicação do Trabalho Infantil (PETI) em parceria com a Secretaria de Educação de Salvador que vem garantindo acesso, via internet, para mais de 150.000 alunos do Ensino Fundamental, além de contribuir no aumento do desempenho dos discentes no curso regular.

No final de 2007 e ao longo de 2008, a empresa amplia sua atuação no mercado, atendendo ao governo do estado do Ceará, através de uma parceria com a Secretaria de Educação do Estado (SEDUC). O projeto E-Jovem foi um marco histórico no estado, garantindo, através de cursos técnicos e profissionalizantes na área de informática básica e avançada, acesso ao mercado de trabalho. Também é firmada uma parceria com a Secretaria de Educação de Tauá, através do projeto dos Ambientes Virtuais de Aprendizagem de Tauá (AVANT). Esse projeto busca proporcionar aos educadores e educandos da rede pública municipal de ensino, o uso da internet através do acesso a um portal educativo.

Em 2009, a empresa já atende mais de 500 escolas privadas. Inicia o projeto com a Secretaria Municipal de Fortaleza com o objetivo de atender alunos de 4º, 5º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental das escolas públicas, objetivando o aumento do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) do município para 2010. Ainda em 2009, ocorre o Projeto Professor Conectado, da Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco, que disponibilizou um notebook para cada professor da rede (26.000 professores), com os conteúdos multimidiáticos da Educandus instalados. A Educandus também inicia uma parceria através do portal NET Educação, um dos projetos de responsabilidade social da NET. É um portal dirigido a professores, pais e alunos de escolas públicas. Entre outras informações, os usuários encontram conteúdos didáticos dirigidos às disciplinas que compõem o Ensino Fundamental I, o Fundamental II e o Ensino Médio.

Em 2010, com vistas a ampliar a sua participação de mercado em nível nacional, a Educandus conclui um importante contrato com a Editora FTD. Os produtos da Educandus serão disseminados por 20 colégios que hoje integram a Rede Marista de Educação. Com isso, a perspectiva é de que Educandus e FTD ofereçam juntas um novo e completo sistema de ensino, que envolva conteúdos impressos, multimídias e também Online. Nesse ano a Educandus também firma uma parceria com as redes católicas para desenvolvimento do Portal Futurum. Outra novidade é que agora o SOS Natureza também faz parte do Guia de Tecnologias do MEC.

2.1.1 Portal WEB e Conteúdo Multimídia

O Portal Web é um ambiente criado para instituições de ensino, educadores, pais e alunos da Educação Infantil ao Ensino Médio. O portal oferece um espaço virtual personalizado, com conteúdos, ferramentas e serviços exclusivos aos usuários.

A Educandus desenvolve conteúdos multimídia através de uma equipe especializada de professores, programadores e designers, que garantem um acervo completo para todas as disciplinas da Educação Básica. Os conteúdos são desenvolvidos através de Objetos de Aprendizagem e possuem grande dinamismo e interatividade, capaz de despertar no aluno interesse e curiosidade para o estudo das disciplinas. São conteúdos de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e têm o respaldo do MEC por constar no Guia de Tecnologias Educacionais.

Além das aulas web, Laboratórios Virtuais foram preparados para facilitar o entendimento dos professores em relação a diversas situações práticas. Outra iniciativa da empresa foi a elaboração de uma Mapoteca utilizada por alunos e professores como apoio e suporte pedagógico. A empresa também se preocupou em desenvolver conteúdos específicos como Lógica, Informática Básica e Avançada, Inglês Instrumental, entre outros conteúdos para atender a projetos profissionalizantes, além de mais de 500 jogos educativos e diversos modelos 3D que são muito atrativos e, facilitam a compreensão de conceitos trabalhados durante as aulas.

A interface da aula possibilita listar todas as páginas, mudar a cor de fundo, fazer perguntas ao professor web, indicar erros e/ou sugestões, ampliar ou reduzir a tela, fazer comentários pessoais ou para alunos (no caso de professor), além de outros recursos.

Os Conteúdos passam por um processo contínuo de melhoria através das sugestões dos usuários e das alterações e ajustes necessários, tais como Reforma Ortográfica e o Novo ENEM por exemplo.

A Educandus possui uma solução híbrida para as escolas ou instituições cuja velocidade da internet é baixa, através da utilização de um servidor local, onde parte das aplicações fica residente neste servidor e outra remotamente (Servidor WEB), minimizando dependência de altas taxas de comunicação no acesso à internet. Esse modelo já foi testado e aprovado em diversas escolas clientes da empresa.

Existe ainda um projeto que visa à integração do *Wiimote* (controle remoto do Wii) ao PC, para ampliar ainda mais a atratividade dos jogos educacionais, fortalecendo a produção e retenção do conhecimento. A Engine, entendida como o ambiente de geração de jogos baseado na integração do TORQUE e FLASH com a interface homem/máquina do Wii, proporcionará recursos visuais 3-D aos jogos, ainda mais avançados do que os do próprio Wii, com alta produtividade na criação dos jogos.

A ideia é de grande inovação na educação, desenvolvendo uma solução de baixo custo com a utilização do *Wiimote,* sem a necessidade da console. Imaginemos, por exemplo, o aluno se divertindo em um minigolfe e ao arremessar a bola poder estudar alguns conceitos de Física, como velocidade, distância, tempo, trajetória, lançamento parabólico e suas inter-relações.

Estima-se a utilização deste novo modo de jogar, em larga escala, na certeza de que os jogos educacionais passarão a ser tão envolventes quanto os voltados exclusivamente para entretenimento, que são mais caros e de abrangência limitada, especialmente no Brasil.

2.2 Objetos de Aprendizagem

2.2.1 Apresentação do Objeto de Aprendizagem de Logaritmos

Os alunos foram apresentados ao OA a partir do blog da própria escola[2], onde temos acesso ao link da Educandus[3], patrocinado pelo Governo do Estado, através do projeto E-Jovem.

Na tela inicial (FIGURA 1), os alunos têm acesso aos Conteúdos (Aulas, Laboratórios, Vídeos, Mapotecas, Jogos Flash, Modelos 3D e Jogos 3D) escolhendo o Nível de Ensino (Ensino Fundamental I, Ensino Fundamental II ou Ensino Médio) e a disciplina que será trabalhada (Português, Ciências, Literatura, Artes, Matemática, Física, Biologia, Química, Geografia ou História). Ainda temos acesso a Guia Rápido das Aulas, na Ajuda.

Figura 1 – Tela inicial

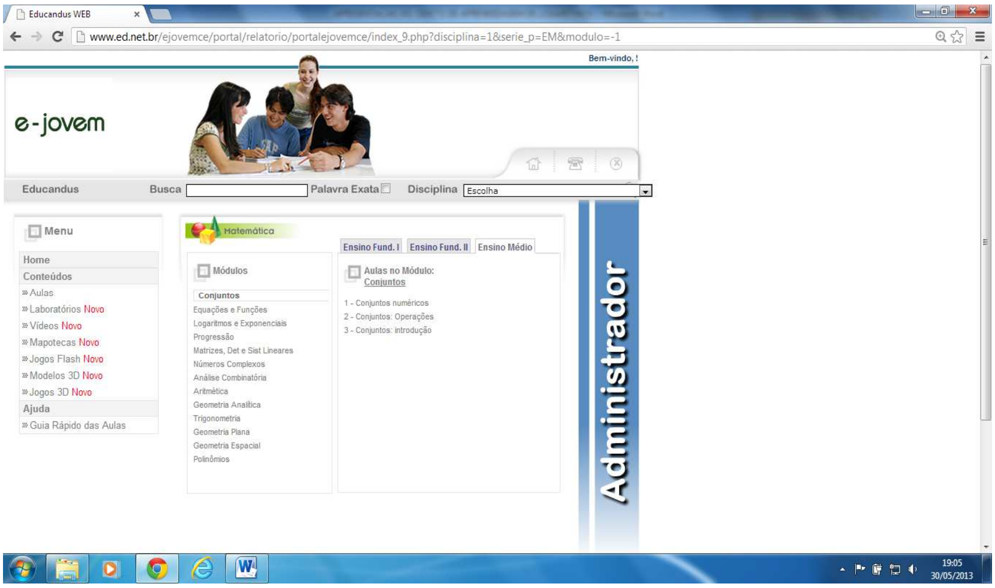
Fonte: Portal Educandus

A figura 2 mostra a segunda tela. Nela podemos ter acesso a vários módulos e às respectivas aulas disponíveis para cada módulo. Os módulos são de: Conjuntos, Equações e

2 http://liceudemessejana.blogspot.com.br/
3 http://www.ed.net.br/ejovemce/portal/relatorio/portalejovemce/index_logado.php?serie_p=EM

Funções, Logaritmos e Exponenciais, Progressões, Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares, Números complexos, Análise Combinatória, Aritmética, Geometria Analítica, Trigonometria, Geometria Plana, Geometria Espacial e Polinômios.

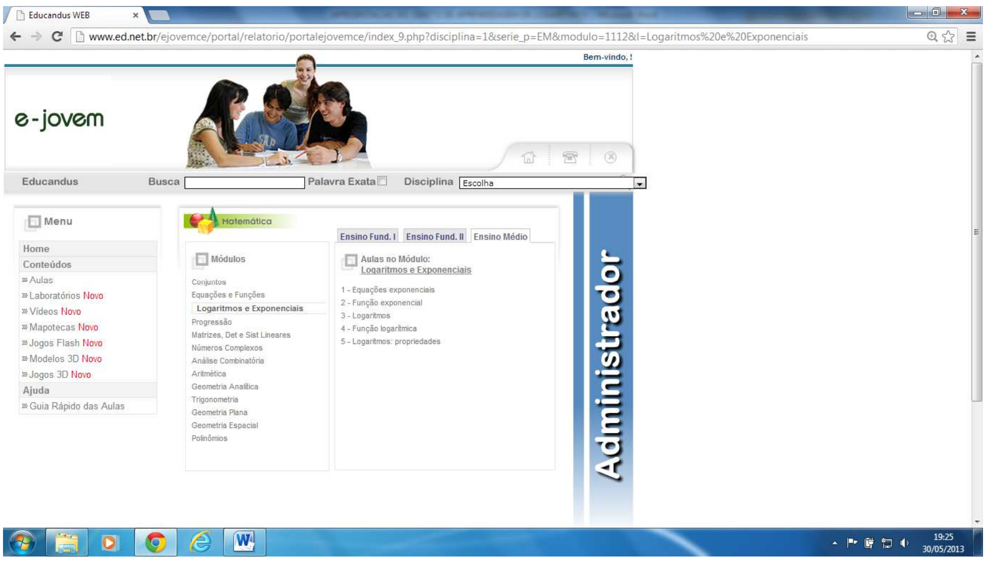
Figura 2 – Módulos e aulas disponíveis



Fonte: Portal Educandus

Na terceira tela encontramos as aulas do módulo Logaritmos e Exponenciais, que são: Equações exponenciais, Função exponencial, Logaritmos, Função logarítmica e Propriedades dos logaritmos, como podemos observar na figura a seguir.

Figura 3 – Aulas do módulo Logaritmo e Exponenciais

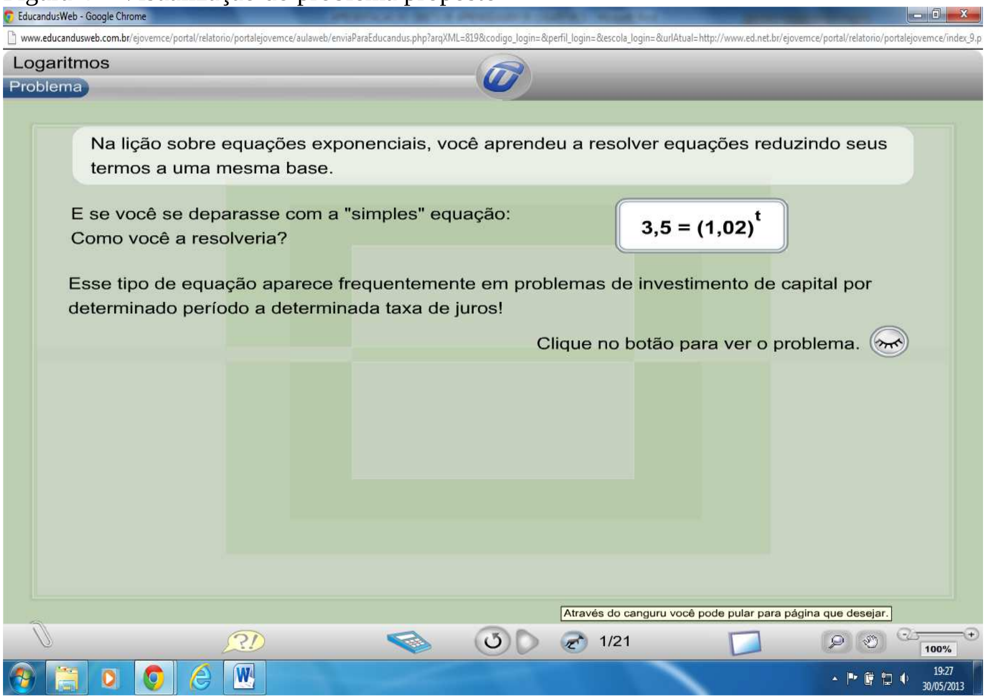


Fonte: Portal Educandus

A figura 4 se refere à quarta tela, na qual o aluno é instigado a raciocinar sobre o assunto anterior, exponenciais, mas especificamente equações exponenciais, para introduzir o assunto logaritmos. Encontramos nessa tela um botão que deve ser utilizado para visualizar o problema proposto.

Na tela 4 e nas demais telas encontramos, ainda, na barra inferior: à esquerda, um clipe que permite ao aluno fazer anotações sobre a página; um balão com os sinais de interrogação e exclamação, onde o aluno pode enviar sugestões, erros ou fazer alguma pergunta. À direita: uma barra deslizante (com opção de digitar o valor desejado) para o zoom; uma lupa para ampliarmos a tela e uma luva para trabalharmos com a tela ampliada; uma "tela" que permite controlar a visibilidade do fundo. No centro: uma calculadora, para auxiliar nos cálculos; um botão que permite recarregar a página; um botão para avançar a página (nas páginas seguintes aparecerá também um botão para retroceder); um botão com uma figura de um canguru que permite "saltar" para uma determinada página e, por fim a indicação de qual página estamos e o total de páginas da aula.

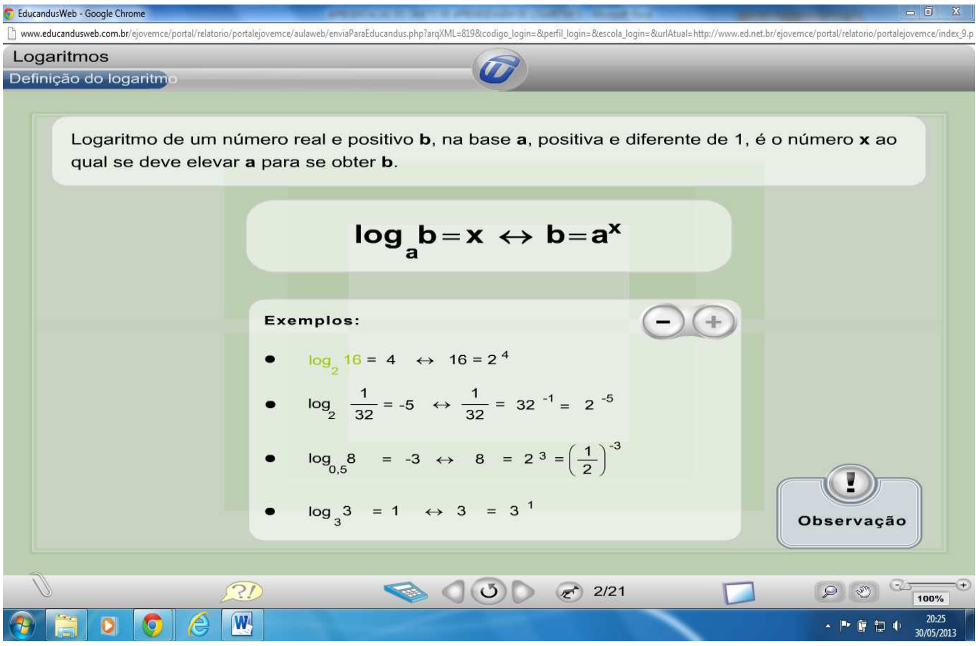
Figura 4 – Visualização do problema proposto



Fonte: Portal Educandus

Na quinta tela (FIGURA 5) temos a Definição do logaritmo, com alguns exemplos que aparecem ao clicar no botão com o sinal +. Temos, ainda, clicando em observação, uma animação para enfatizar a definição.

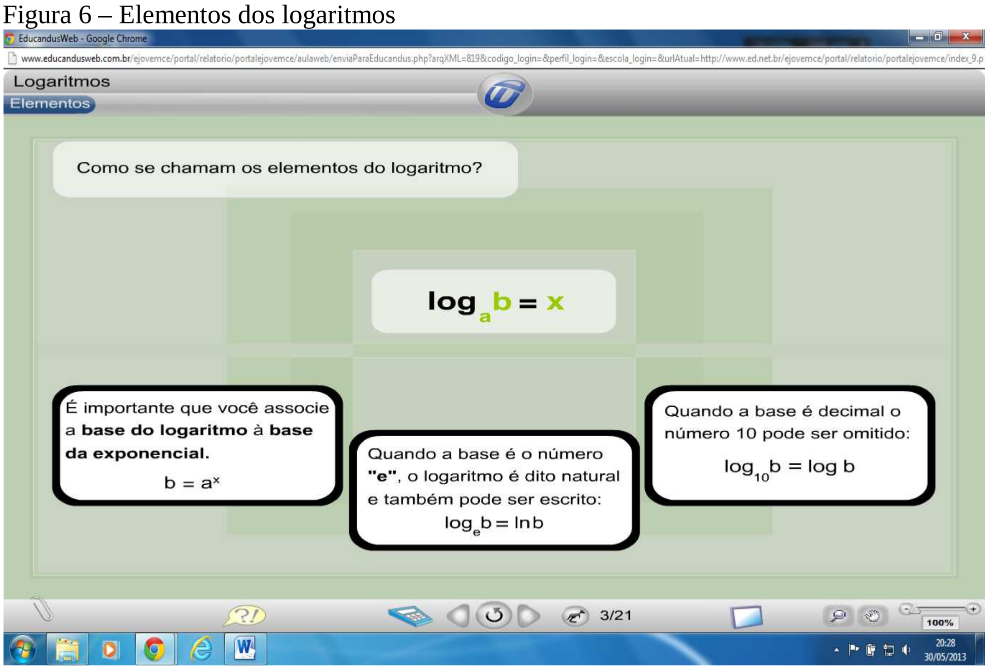
Figura 5 – Definição e exemplos



Fonte: Portal Educandus

A figura 6 apresenta a sexta tela na qual temos os Elementos dos logaritmos e os dois principais “tipos” de logaritmos: os logaritmos de base e os logaritmos de base 10.

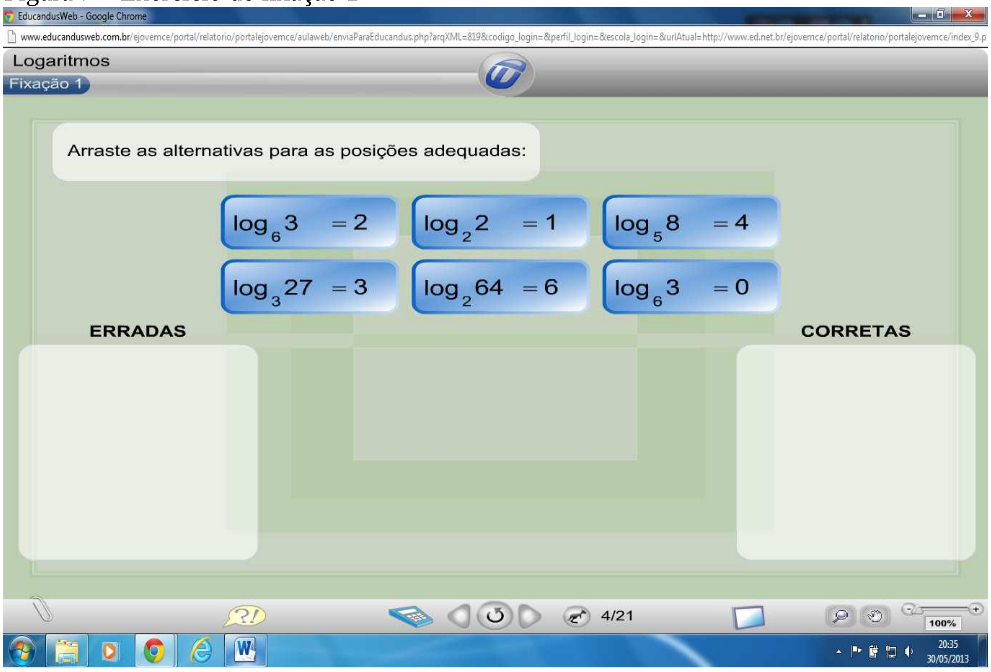
Figura 6 – Elementos dos logaritmos



Fonte: Portal Educandus

Na sétima tela (FIGURA 7), encontramos o Exercício de fixação 1, em que o aluno deve arrastar e soltar cada afirmação para a posição adequada, conforme sua análise. A correção é imediata.

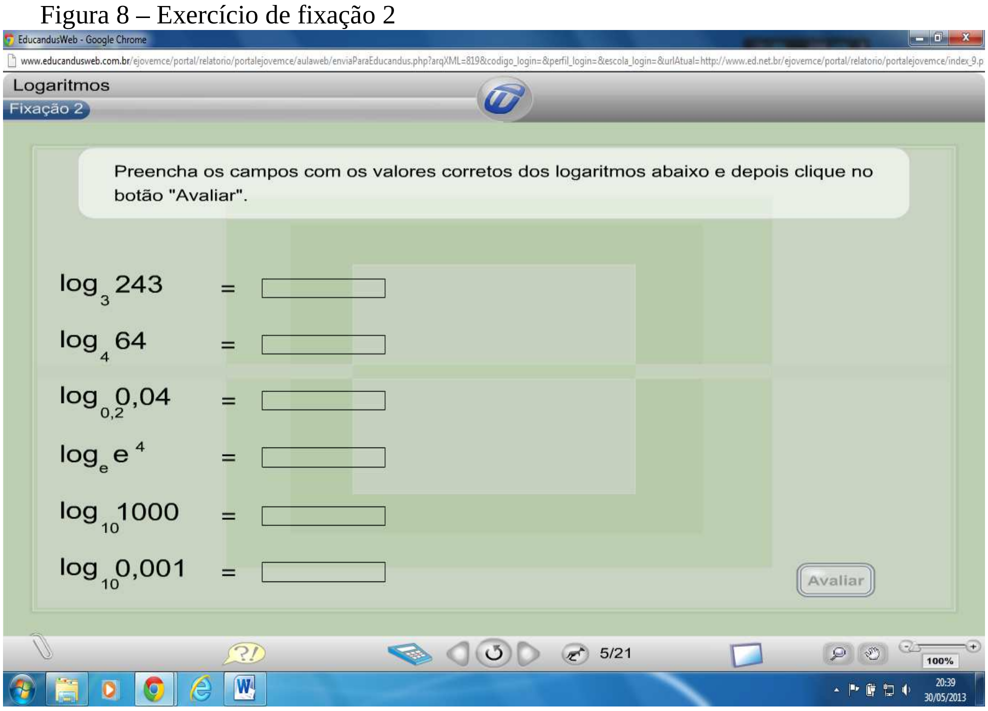
Figura 7 – Exercício de fixação 1



Fonte: Portal Educandus

Na oitava tela, representada na figura 8, encontramos o Exercício de fixação 2, em que o aluno deve indicar o resultado de cada logaritmo, conforme sua análise. O aluno deve preencher todos os espaços para ser avaliado. A correção também é imediata.

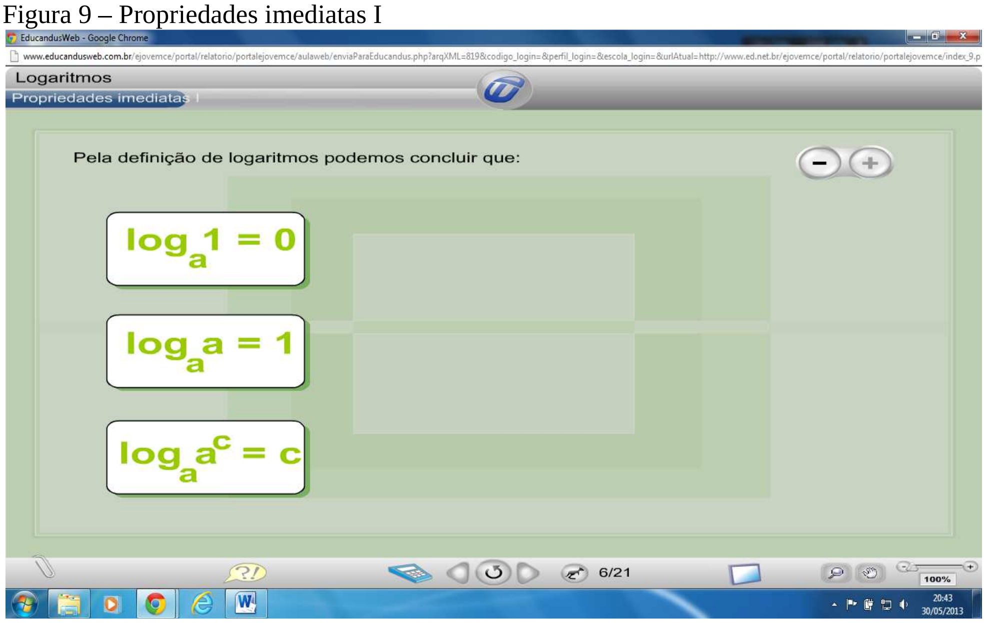
Figura 8 – Exercício de fixação 2



Fonte: Portal Educandus

A tela seguinte é a nona e está representada na figura 9. Nessa tela temos as Propriedades imediatas I. O aluno deve clicar no botão + para ver essas propriedades. Ao passar o cursor do mouse sobre cada propriedade o aluno visualiza uma nova caixa com a prova da propriedade e exemplos da mesma.

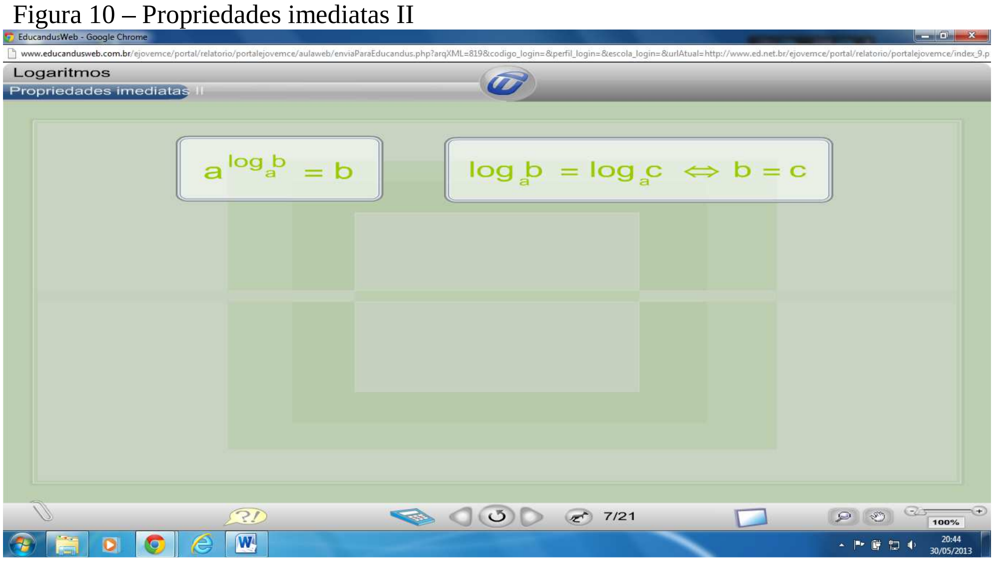
Figura 9 – Propriedades imediatas I



Fonte: Portal Educandus

Na décima tela (FIGURA 10) se encontram as Propriedades imediatas II. Ao clicar em uma das caixas das propriedades aparecerá uma nova caixa com um sinal de +. Ao clicar nesse sinal o aluno visualiza as demonstrações e exemplos de cada propriedade destacada.

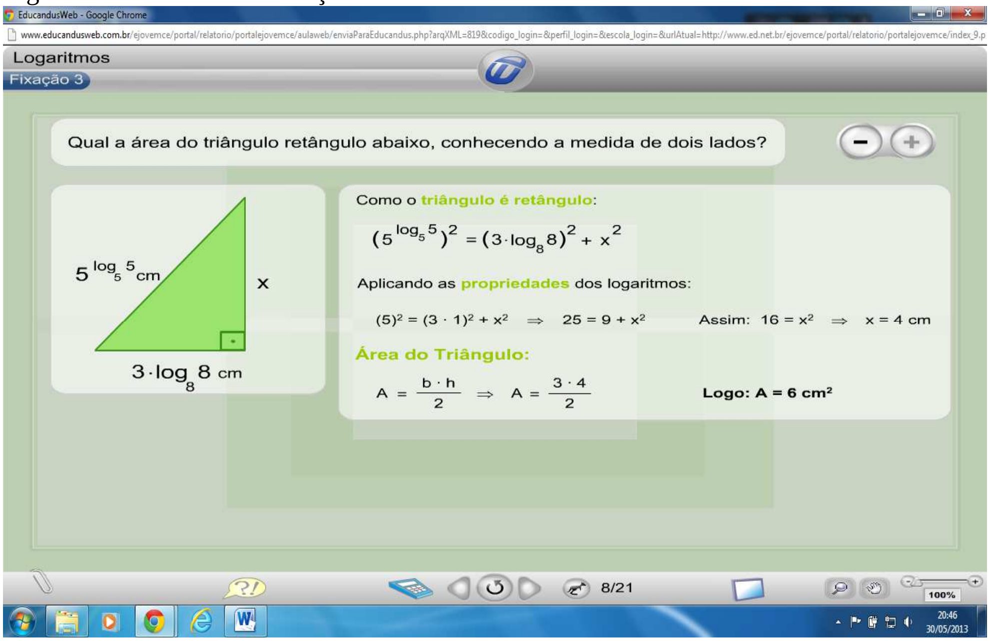
Figura 10 – Propriedades imediatas II



Fonte: Portal Educandus

Na décima primeira tela (FIGURA 11) temos o Exercício de fixação 3. Após a tentativa de resolver o exercício, o aluno tem que clicar no botão + para visualizar a resolução.

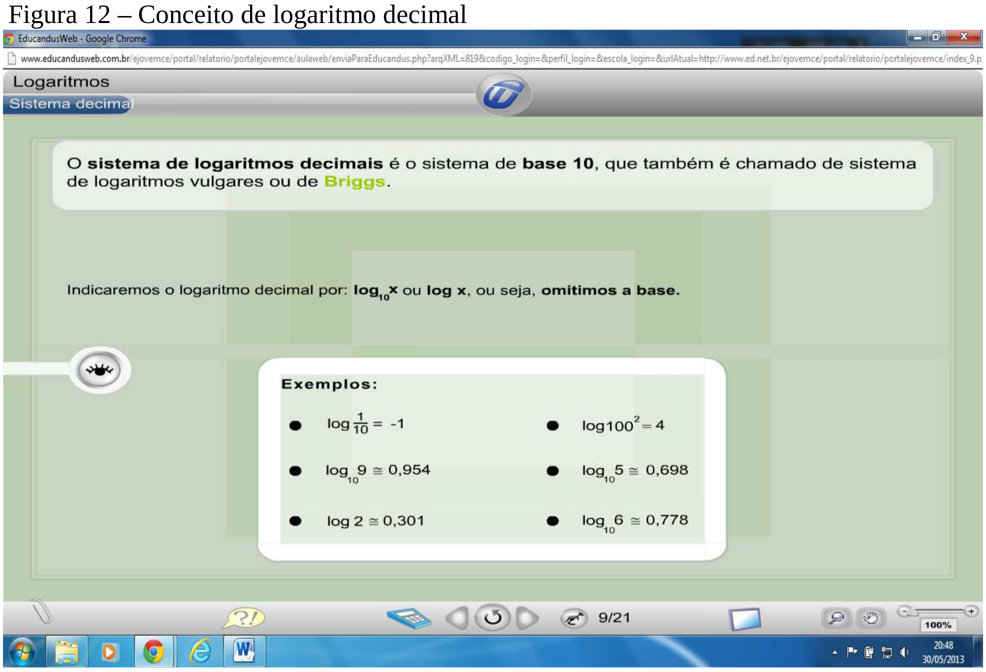
Figura 11 – Exercício de fixação 3



Fonte: Portal Educandus

A tela seguinte é a décima segunda (FIGURA 12). Nessa tela é apresentado o Conceito de logaritmo decimal e alguns exemplos para que o aluno possa assimilá-lo.

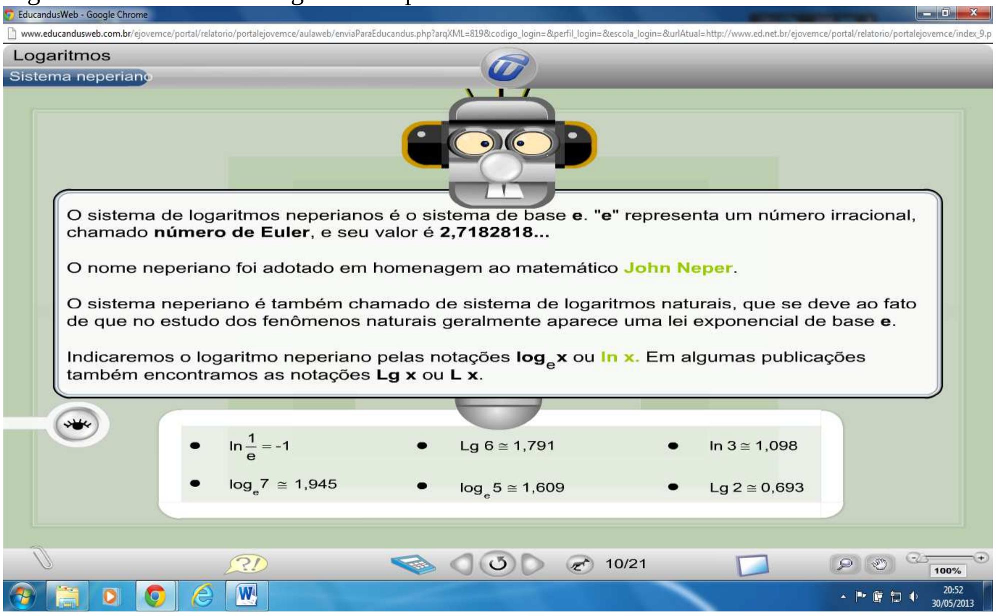
Figura 12 – Conceito de logaritmo decimal



Fonte: Portal Educandus

A próxima tela é décima terceira, representada pela figura 13 a seguir. Nessa tela temos o Conceito de logaritmo neperiano e, também alguns exemplos, a fim de que o aluno possa compreender melhor tal conceito.

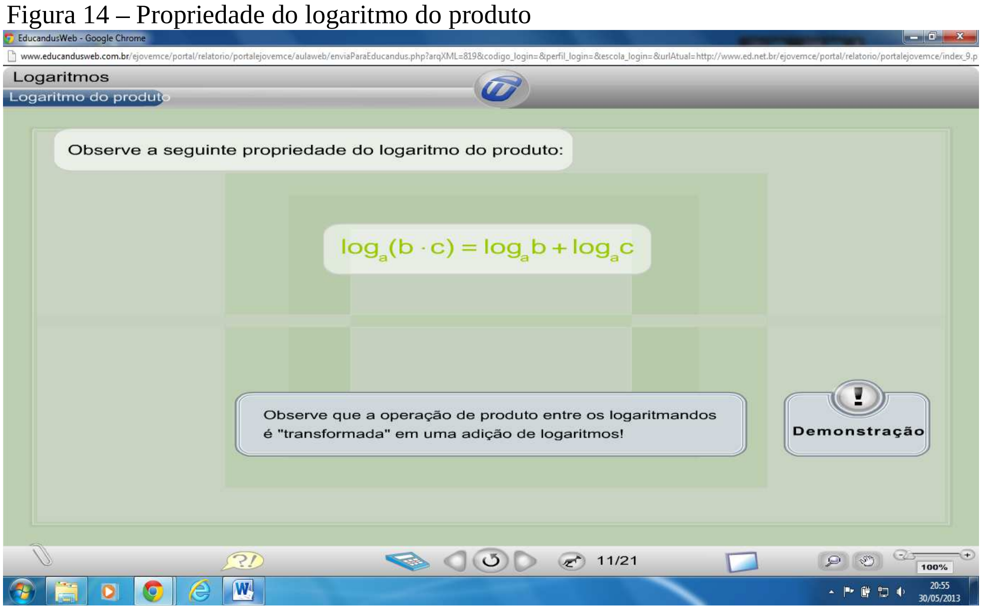
Figura 13 – Conceito de logaritmo neperiano



Fonte: Portal Educandus

Na décima quarta tela (FIGURA 14) temos a Propriedade do logaritmo do produto, com a demonstração. O aluno deve clicar no botão demonstração para visualizar a mesma.

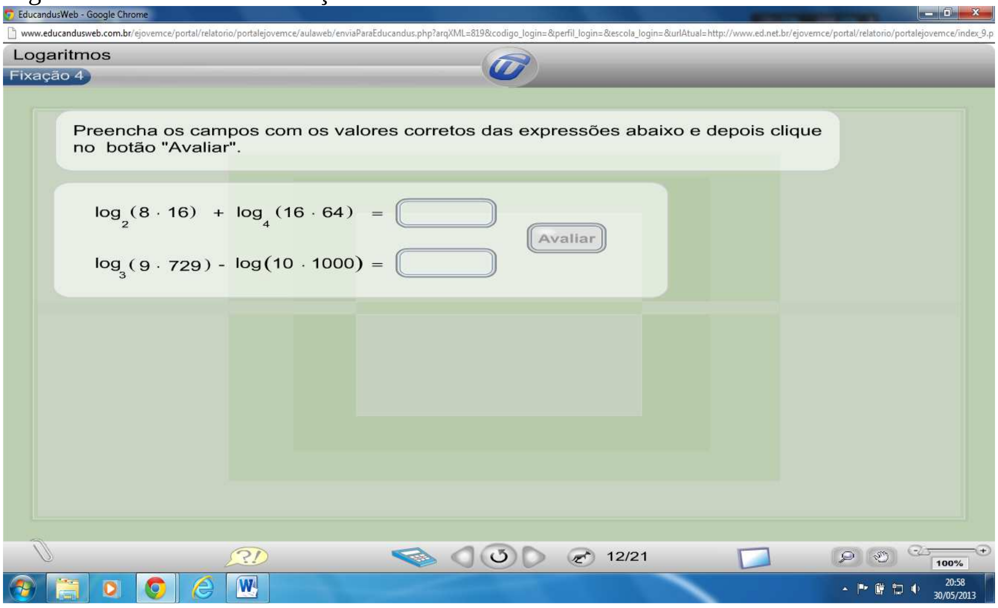
Figura 14 – Propriedade do logaritmo do produto



Fonte: Portal Educandus

Na décima quinta tela, demonstrada na figura 15, encontramos o Exercício de fixação 4. O aluno deve preencher os espaços, conforme sua análise. Em seguida deve clicar no botão indicado para ser avaliado.

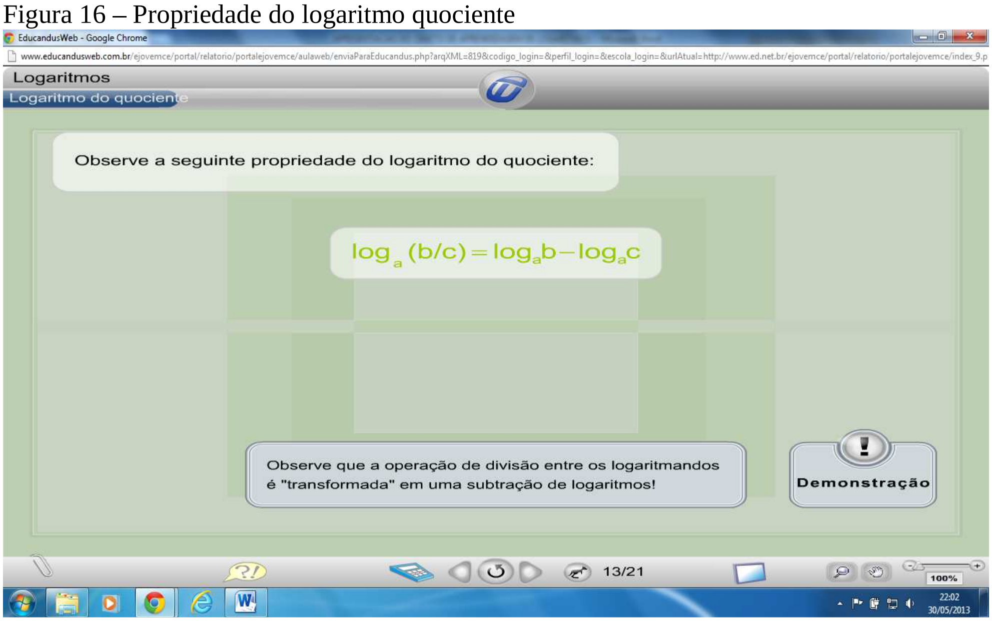
Figura 15 – Exercício de fixação 4



Fonte: Portal Educandus

Na décima sexta tela, demonstrada na figura 16, temos a Propriedade do logaritmo do quociente, com a demonstração. O aluno deve clicar no botão demonstração para visualizá-la.

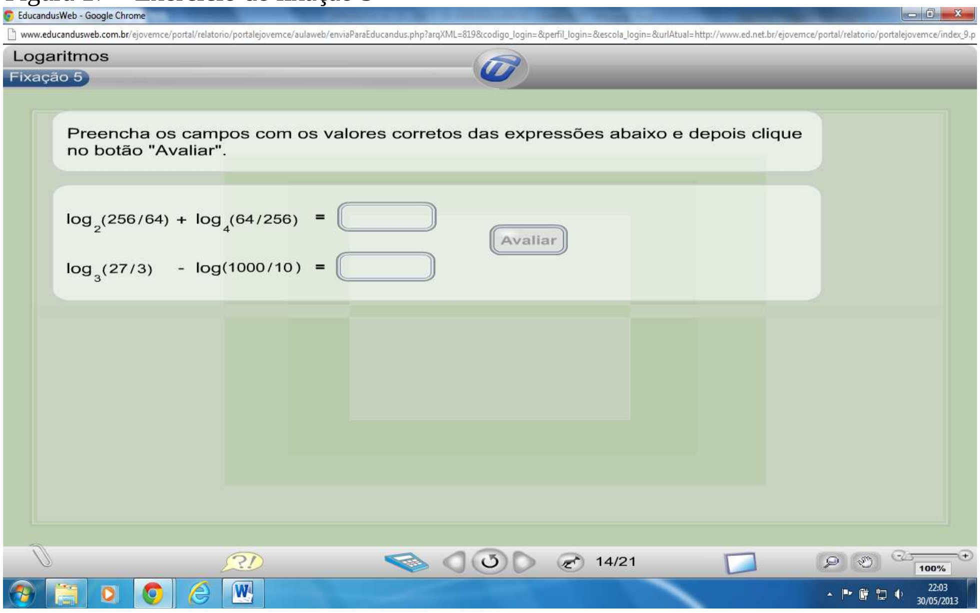
Figura 16 – Propriedade do logaritmo quociente



Fonte: Portal Educandus

A próxima tela é a décima sétima. Nela temos o Exercício de fixação 5, em que o aluno deve preencher os espaços, conforme sua análise. Em seguida deve clicar no botão ao lado para ser avaliado (FIGURA 17).

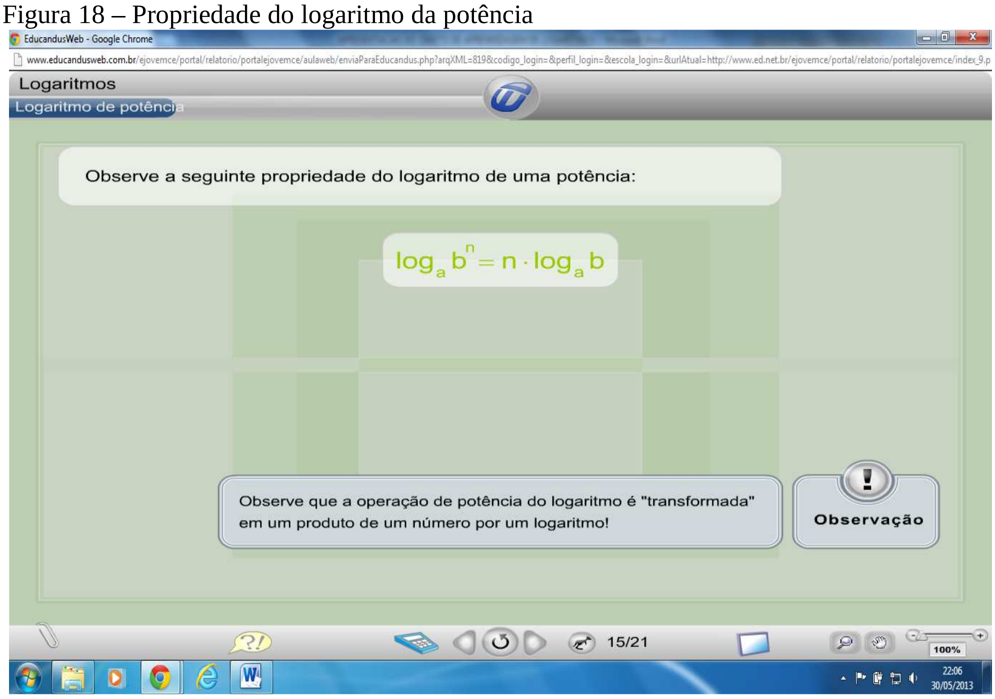
Figura 17 – Exercício de fixação 5



Fonte: Portal Educandus

Na décima oitava tela, temos a Propriedade do logaritmo da potência e uma demonstração. Para visualizá-la, o aluno deve clicar no botão observação, localizado à direita.

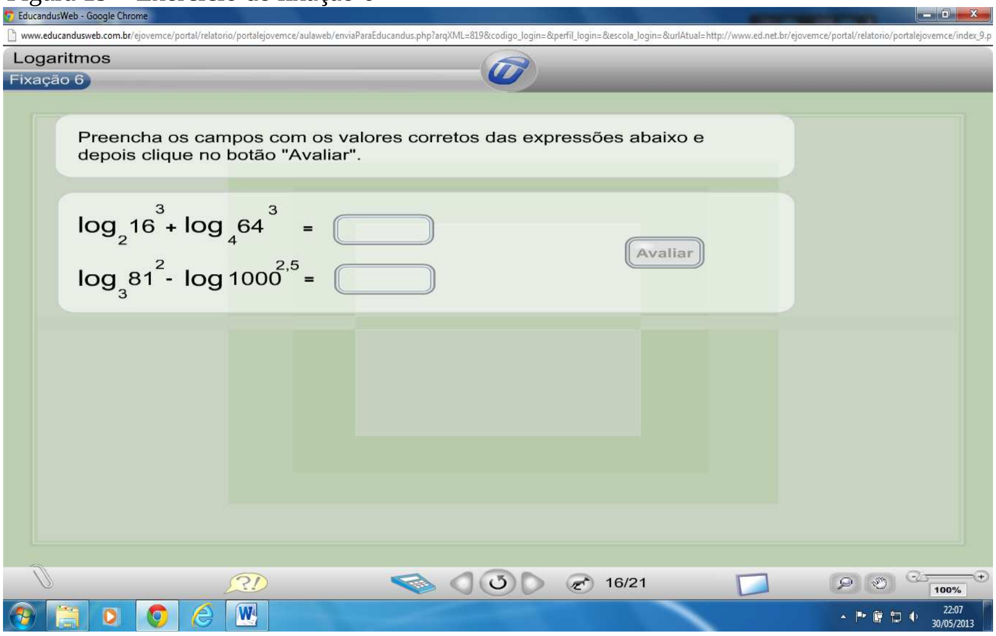
Figura 18 – Propriedade do logaritmo da potência



Fonte: Portal Educandus

A décima nona tela apresenta o Exercício de fixação 6. Para ser avaliado o aluno deve preencher os espaços, conforme sua análise e depois clicar no botão à direita (FIGURA 19).

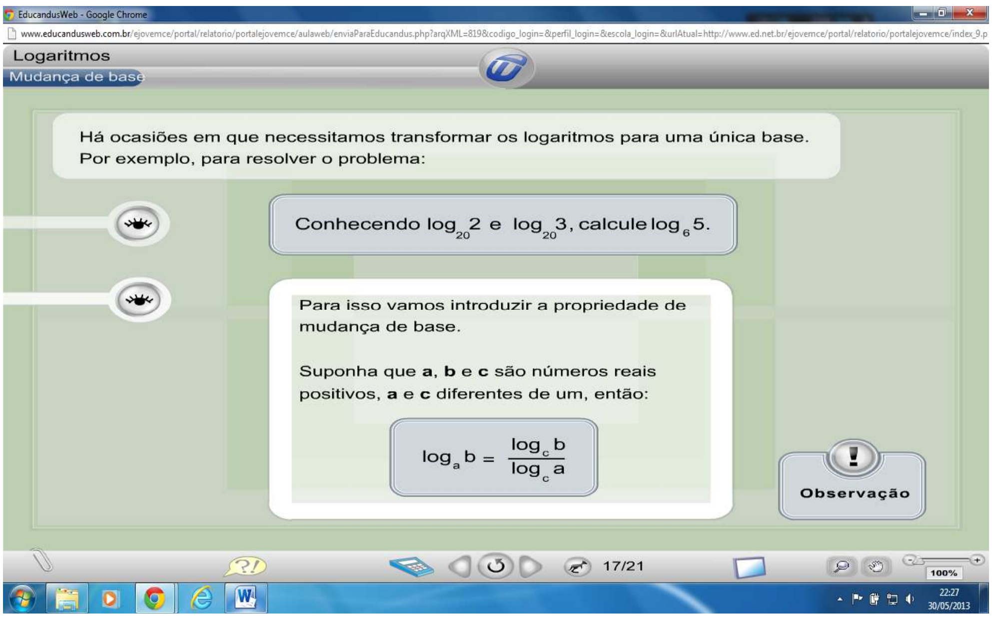
Figura 19 – Exercício de fixação 6



Fonte: Portal Educandus

Na tela seguinte, vigésima, temos a Mudança de base de um logaritmo, com a demonstração. O aluno deve clicar no botão observação para visualizar a mesma, como podemos ver na figura 20.

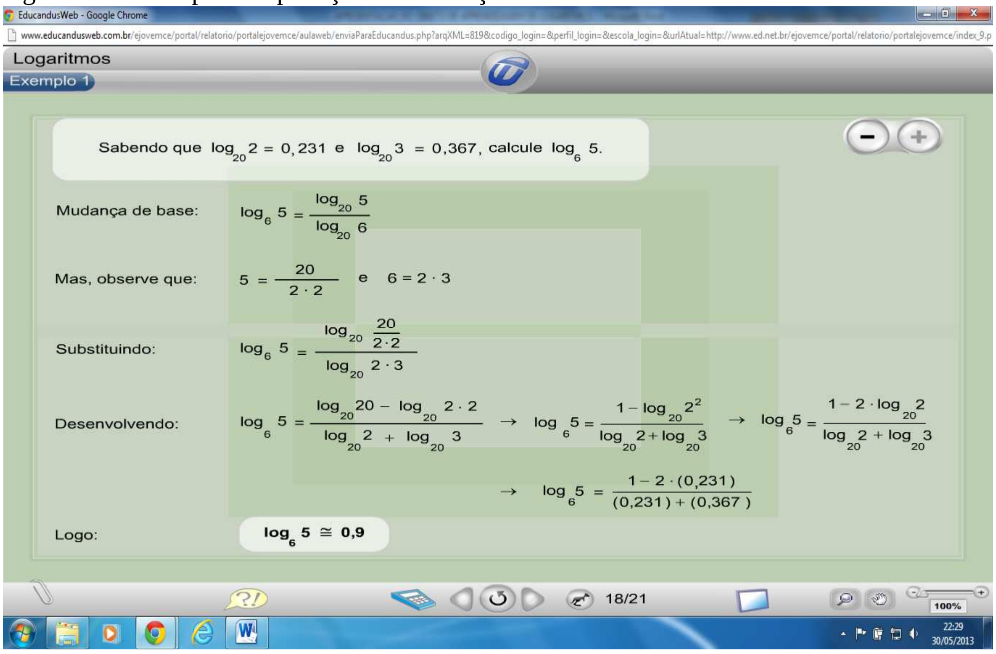
Figura 20 – Mudança de base de um logaritmo



Fonte: Portal Educandus

A figura 21 representa a vigésima primeira tela. Nela podemos observar um Exemplo da aplicação da mudança de base. O aluno deve clicar no botão + para visualizar.

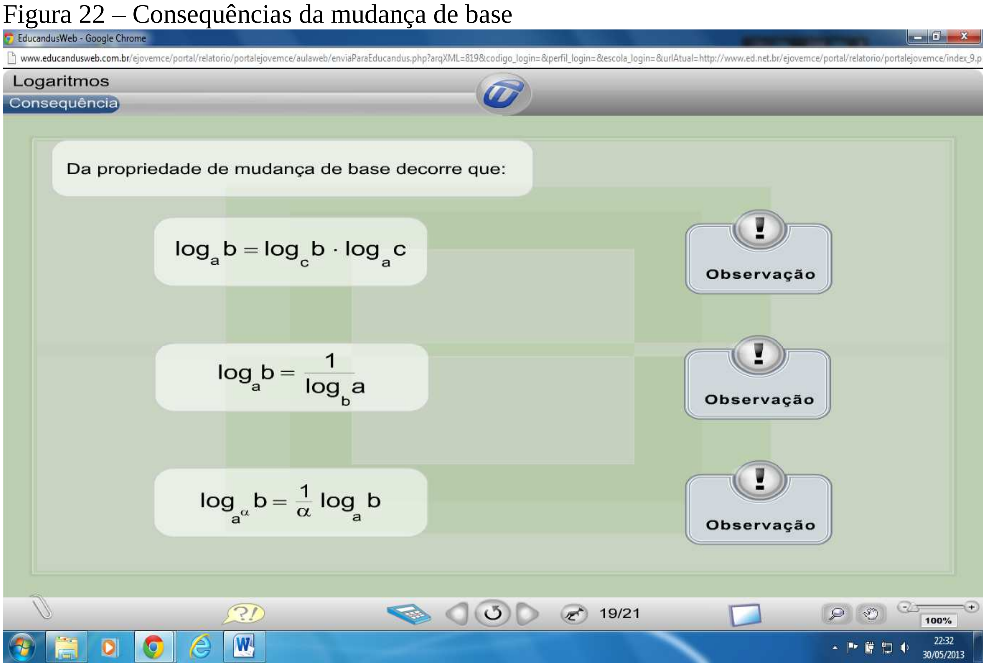
Figura 21 – Exemplo da aplicação de mudança de base



Fonte: Portal Educandus

A figura 22 mostra a vigésima segunda tela. Nessa tela temos três Consequências da mudança de base, em que as duas primeiras têm as demonstrações (o aluno deve clicar no botão observação para visualizar) e a terceira é deixada como exercício para o aluno.

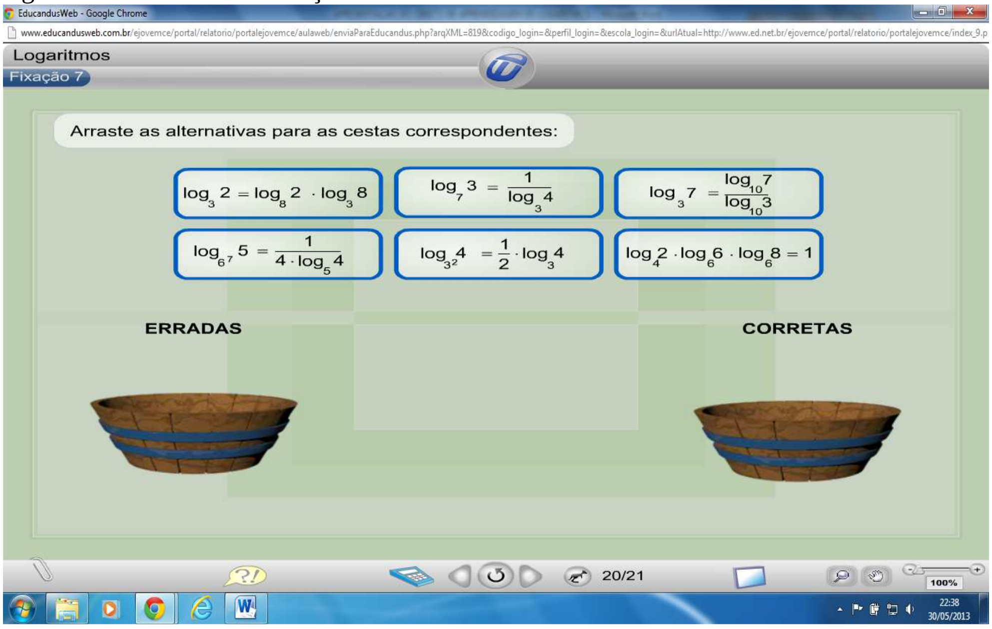
Figura 22 – Consequências da mudança de base



Fonte: Portal Educandus

Na vigésima terceira tela (FIGURA 23), encontramos o Exercício de fixação 7. O aluno deve arrastar e soltar cada afirmação para a cesta adequada, conforme sua análise. A correção é imediata.

Figura 23 – Exercício de fixação 7



Fonte: Portal Educandus

Por fim, na vigésima quarta tela (FIGURA 24), o aluno é convidado a responder um breve Questionário sobre o conteúdo abordado na aula.

Figura 24 – Questionário sobre o conteúdo abordado

Fonte: Portal Educandus

O Objeto de Aprendizagem apresentado, como outros, oferece recursos digitais que podem ser aplicados na aprendizagem dos logaritmos em vários contextos, ampliando significativamente os nossos recursos didáticos, pois oferecem propriedades interessantes como: animações, imagens estáticas e animadas, áudio, simulações de exercícios, atividades e permitem ao usuário rever cada detalhe a qualquer momento. Importante ainda, pois podemos aplicar o OA de forma presencial ou à distância.

3 LOGARITMOS: HISTÓRIA, DEFINIÇÃO, PROPRIEDADES E ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES

3.1 Breve Histórico

Uma das maiores vantagens da criação dos logaritmos é, sem dúvida, podermos transformar multiplicações em adições e divisões em subtrações. Hoje, com as modernas calculadoras e avançadíssimos computadores, calcular multiplicações e ⁄ ou divisões com números muito grandes tornaram-se tarefas fáceis, porém, antigamente quando os estudiosos queriam desenvolver cálculos na astronomia, navegações ou mesmo de juros, a dificuldade era extremamente maior.

> No fim do século XVI, o desenvolvimento da Astronomia e da Navegação exigia longos e laboriosos cálculos aritméticos. Um auxílio precioso já fora obtido com a recente invenção das frações decimais, embora ainda não suficientemente difundida. Mesmo assim, achar um método que permitisse efetuar com presteza multiplicações, divisões, potenciações e extração de raízes era, nos anos próximos de 1600, um problema fundamental (LIMA, 1996, p.1).

John Napier (ou Neper), conhecido como Barão de Murchiston, não tinha a matemática como profissão. Para ele só alguns tópicos da matemática despertavam interesse, normalmente os que se referiam à computação e trigonometria. Napier criou bastões em que itens de tabuadas de multiplicação eram esculpidos numa forma que se prestava ao uso prático, esses bastões ficaram conhecidos como as “Barras de Napier” (BOYER, 1996).

Para Berlinghoff e Gouvêa (2010), esses bastões, em geral, eram feitos de marfim e, não surpreendentemente, vieram a ser conhecidos, também, como “Ossos de Napier”. O pároco inglês William Oughtred aperfeiçoou o esquema de Napier inventando uma régua deslizante, um artefato para calcular com base em logaritmos, que se tornou o companheiro constante de todo engenheiro (e muitos outros) até meados do século XX.

> Napier conta que trabalhou em sua invenção dos logaritmos durante vinte anos antes de publicar seus resultados, o que colocaria a origem de suas ideias em 1594 aproximadamente. Ele pensara nas sequências, publicadas vez por outra, de potências sucessivas de um dado número como na *Arithmetica integra* de Stifel e nas obras de Arquimedes. Em tais sequências era evidente que as somas e diferenças dos índices das potências correspondiam a produtos e quocientes das próprias potências; mas uma sequencia de potências inteiras de uma base, tal como dois, não podia ser usada para computações porque as grandes lacunas entre termos sucessivos tornavam a interpolação demasiado imprecisa. Enquanto Napier refletia no assunto, o Dr. John Craig, médico de James VI da Escócia, falou-lhe no uso da prostaférese na Dinamarca. Essa informação encorajou Napier a redobrar seus esforços e finalmente a publicar em 1614 o *Mirifici logarithmorum canonis*

> *descriptio* (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos) (BOYER, 1996, p.213).

A principal ideia de Napier, para os logaritmos, pode ser explicada de forma simples. Para manter os termos de uma progressão geométrica de potências inteiras próximos de um número dado, é necessário tomar o número muito próximo de um. Napier por isso escolheu como seu número dado $1 - 10^{-7}$ (ou 0,9999999). Para chegar a um equilíbrio e evitar decimais, Napier multiplicou cada potência por 10^{7}. Isto é, se $N = 10^{7}(1 - 10^{-7})^{L}$, então L é o "logaritmo" de Napier do número N. Assim seu logaritmo de 10^{7} é 0. Ao dividirmos seus números e logaritmos por 10^{7} teríamos virtualmente um sistema de logaritmos de base $1/e$, pois $(1 - {}^{1}\!/_{10^7})^{10^7}$ fica próximo de $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = {}^{1}\!/_{e}$. Devemos lembrar, é claro, que Napier não tinha o conceito de base de um sistema de logaritmos, pois a sua definição era diferente da nossa (BOYER, 1996).

> A publicação em 1614 do sistema de logaritmos, por Napier, teve sucesso imediato, e entre seus admiradores mais entusiásticos estava Henry Briggs. Em 1615 Briggs visitou Napier em sua casa na Escócia, e lá eles discutiram possíveis modificações no método dos logaritmos. Briggs propôs o uso de potências de dez, e Napier disse que tinha pensado nisso e concordava. Os dois homens concordaram em que o logaritmo de um deveria ser zero e que o logaritmo de dez deveria ser um. Mas Napier já não tinha a energia suficiente para pôr em prática essas ideias. Morreu em 1617, o ano em que sua *Rhabdologia*, com a descrição de suas barras, apareceu. O segundo de seus clássicos tratados sobre logaritmos, o *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, em que dava uma exposição completa dos métodos que usava para construir suas tabelas, apareceu postumamente em 1619. Por isso recaiu sobre Briggs a tarefa de construir a primeira tabela de logaritmos comuns, ou briggsianos. No ano da morte de Napier, 1617, Briggs publicou seu *Logarithmorum chilias prima* – isto é, os logaritmos dos números de 1 a 1.000, cada um calculado com quatorze casas decimais. Em 1624, em *Arithmetica logarithmica*, Briggs ampliou a tabela incluindo logaritmos comuns dos números de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000, novamente com quatorze casas decimais. Incidentalmente, é do livro de Briggs de 1624 que provêm nossas palavras "mantissa" e "característica". Poucas vezes uma descoberta nova "pegou" tão depressa quanto a invenção dos logaritmos, e o resultado foi o aparecimento imediato de tabelas de logaritmos que eram mais que suficientes para a época (BOYER, 1996, p. 215).

Temos a ideia, até agora, que a criação dos logaritmos foi feita por um só homem. Napier realmente foi o primeiro a publicar uma obra sobre logaritmos, mas ideias semelhantes foram trabalhadas, independentemente, na Suíça por Jobst Bürgi mais ou menos ao mesmo tempo. Porém Bürgi só publicou seus estudos em 1620, seis anos após Napier publicar sua *Descriptio*. Os dois partiram das propriedades das sequências aritméticas e geométricas, estimulados, provavelmente, pelo método da prostaférese. As diferenças entre as obras estão na terminologia e nos valores numéricos utilizados (BOYER, 1996).

Atualmente a importância maior dos logaritmos recai sobre certas propriedades da função logarítmica e da sua função inversa, a função exponencial, pois a função logarítmica é ligada a muitos fenômenos e situações naturais, como cálculo de capital a juros fixos, concentração de uma solução e desintegração radioativa, deve-se, por isso, destacar a base $e = 2{,}7182\ldots$

3.2 Definição, Propriedades e Demonstrações

Trataremos inicialmente da definição e das propriedades como encontramos na maioria dos livros didáticos do ensino médio, da maneira como são apresentadas e repassadas para os alunos.

Definição: Sendo a e b números reais e positivos, com $b \neq 1$, chama-se logaritmo de a na base b o expoente ao qual se deve elevar a base b de modo que a potência calculada seja igual a a.

Simbolicamente: se $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$, então:

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Dizemos que a é o logaritmando ou antilogaritmo, b é a base do logaritmo e x é o logaritmo de a na base b.

Observamos que a definição dada apresenta a função $\log_a x$: $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ como a inversa da função $x \rightarrow a^x$. Com isso, precisamos entender o que significa a^x, onde x é um número real qualquer. A nível de ensino médio, muitas vezes esse fato não é observado. No próximo tópico estabeleceremos o significado e propriedades da função a^x, onde x é um número real qualquer, e mostraremos uma caracterização da função logarítmica. Para um estudo sobre exponenciais e logaritmos de números complexos indicamos o livro **Introdução às Funções de uma Variável Complexa**, de Cecília S. Fernandez e Nilson C. Bernardes Jr., da SBM.

Propriedade 1: Logaritmo do produto. O logaritmo do produto de dois fatores positivos, cuja base seja positiva e diferente de 1, é igual à soma dos logaritmos dos fatores, tomados na mesma base.

$\log_b (a.c) = \log_b a + \log_b c$, com $a > 0$, $b > 0$ e $1 \neq b > 0$.

Demonstração:

$\log_b a = x \Rightarrow a = b^x$

$\log_b c = y \Rightarrow c = b^y$

$\log_b (a.c) = z \Rightarrow a.c = b^z$

Vamos mostrar que $z = x + y$, ou seja, $\log_b (a.c) = \log_b a + \log_b c$.

De fato:

$b^z = a.c = b^x.b^y = b^{x+y} \Rightarrow z = x + y$. (c.q.d.).

Esta propriedade pode ser estendida para o caso de n ($n \geq 2$) fatores reais e positivos. ■

Propriedade 2: Logaritmo do quociente. O logaritmo do quociente de dois números reais positivos, cuja base seja positiva e diferente de 1, é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor, tomados na mesma base.

$\log_b (a:c) = \log_b a - \log_b c$, com $a > 0$, $b > 0$ e $1 \neq b > 0$.

Demonstração:

$\log_b a = x \Rightarrow a = b^x$

$\log_b c = y \Rightarrow c = b^y$

$\log_b (a:c) = z \Rightarrow a:c = b^z$

Vamos mostrar que $z = x - y$, ou seja, $\log_b (a:c) = \log_b a - \log_b c$.

De fato:

$b^z = a:c = b^x:b^y = b^{x-y} \Rightarrow z = x - y$. (c.q.d.). ■

Propriedade 3: Logaritmo da potência. O logaritmo de uma potência de base real positiva e expoente real, cuja base seja positiva e diferente de 1, é igual ao produto do expoente pelo logaritmo, tomado na mesma base do logaritmo inicial, da base da potência, tomado na mesma base.

$\log_b a^c = c.\log_b a$, com $a > 0$ e $1 \neq b > 0$ e $c \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

$\log_b a = x \Rightarrow a = b^x$

$\log_b a^c = y \Rightarrow a^c = b^y$

Vamos mostrar que $y = c.x$, ou seja, $\log_b a^c = c.\log_b a$.

De fato:

$b^y = (b^x)^c = b^{x.c} \Rightarrow y = c.x$. (c.q.d.). ■

Mudança de base: Existem situações em que logaritmos de bases diferentes precisam ser convertidos para uma mesma base, mais conveniente. O processo que permite converter a base de um logaritmo é chamado de mudança de base, que demonstraremos a seguir.

Sejam a, b e c números reais positivos e diferentes de 1, temos:

$$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$$

Demonstração:

$\log_b a = x \Rightarrow a = b^x$

$\log_b c = y \Rightarrow c = b^y$

$\log_c a = z \Rightarrow a = c^z$

Vamos mostrar que z = x : y, ou seja, $\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$.

De fato:

$(b^y)^z = c^z = a = b^x \Rightarrow y.z = x \Rightarrow z = x : y$. (c.q.d.). ■

É comum, nos livros didáticos do ensino médio, encontrarmos a tentativa de explicar ou esclarecer o que são logaritmos a partir de exemplos de exponenciação, o que normalmente não é tão eficaz. Notamos que este artifício seria para explicar a ideia de logaritmos e suas propriedades operatórias.

Em geral os livros mostram uma demonstração algébrica de cada propriedade, lembrando que o produto transforma em soma e a divisão em subtração e a potência multiplica o respectivo logaritmo.

O aspecto conceitual dos logaritmos nos livros didáticos do ensino médio normalmente é feito de forma sucinta, como se o aluno já tivesse conhecimento sobre esse instrumento de cálculo. Ainda lembrando que as funções exponenciais e logarítmicas são trabalhadas em separado e pouco se discute que uma é a inversa da outra. Constata-se, ainda, que sua fundamentação conceitual possui um teor algébrico e funcional complexo para o leitor, mesmo aquele com alguma formação acadêmica.

3.3 Caracterização da função logarítmica:

A caracterização da função logarítmica, apresentada a seguir, encontra-se no livro **A Matemática do Ensino Médio**, volume 1, de Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado.

Trataremos inicialmente da definição da função exponencial de base a, f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ que será indicada pela notação $f(x) = a^x$.

Seja a um número real positivo, que suporemos sempre diferente de 1. A função exponencial de base a, f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer x, y $\in \mathbb{R}$:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

2) $a^1 = a$;

3) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$.

É interessante observar que se uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade 1) acima, isto é, $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, então f não pode assumir o valor 0, a menos que seja identicamente nula. Com efeito, se existir algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$ então, para todo $x \in \mathbb{R}$ teremos:

$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0$, logo f será identicamente nula.

Mais ainda: se f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade 1) e não é identicamente nula então $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pois:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) . f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

Assim, diante da propriedade 1), tanto faz dizer que o contradomínio de f é $\mathbb{R}$ como dizer que é $\mathbb{R}_+$. A vantagem de tomar $\mathbb{R}_+$ como contradomínio é que se terá f sobrejetiva, como veremos.

Se uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem as propriedades 1) e 2) então, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$f(n) = f(1 + 1 + . . . + 1) = f(l) . f(1) . . . f(1) = a . a . . . a = a^n.$$

Usando a propriedade 1), resulta que, para todo número racional r = m/n, com $n \in \mathbb{N}^*$, deve-se ter $f(r) = a^r = \sqrt[n]{a^m}$.

Portanto $f(r) = a^r$ é a única função f: $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ tal que $f(r + s) = f(r) \cdot f(s)$ para quaisquer r, s $\in \mathbb{Q}$ e $f(1) = a$.

A propriedade 3) diz que a função exponencial deve ser crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

Daí resultará que existe uma única maneira de definir o valor $f(x) = a^x$ quando x é irracional. Para fixar as ideias, suporemos $a > 1$. Então a^x tem a seguinte propriedade:

$$r < x < s, \text{ com } r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < a^x < a^s.$$

Ou seja, a^x é o número real cujas aproximações por falta são a^r, com $r < x$, $r \in \mathbb{Q}$, e cujas aproximações por excesso são a^s, com $x < s$, $s \in \mathbb{Q}$. Não podem existir dois números reais diferentes, digamos A < B, com a propriedade acima. Se existissem tais A e B teríamos:

$$r < x < s,\ r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < A < B < a^s$$

e então o intervalo [A, B] nao conteria nenhuma potência de a com expoente racional, contrariando o Lema: Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}_+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$ (Cuja prova pode ser encontrada no livro citado no início da caracterização, páginas 177 e 178).

Portanto, quando x é irracional, a^x é o (único) número real cujas aproximações por falta são as potências a^r, com r racional menor do que x e cujas aproximações por excesso são as potências a^s, com s racional maior do que x.

Definindo a^x para todo $x \in \mathbb{R}$, não há maiores dificuldades para verificar que, de fato, são válidas as propriedades 1), 2) e 3) acima enunciadas. Além disso, tem-se ainda:

4) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.

Com efeito, todo intervalo em $\mathbb{R}_+$ contém valores $f(r) = a^r$.

Mais precisamente: se $a > 1$ então a^x cresce sem limites quando $x > 0$ é muito grande. E se $0 < a < 1$ então a^x torna-se arbitrariamente grande quando $x < 0$ tem valor absoluto grande.

5) A função exponencial é contínua.

Isto significa que, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, é possível tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto se deseje, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0. Dito de outro modo: o limite de a^x quando x tende a x_0 é igual a a^{x_0}. Em símbolos:

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}.$$

Esta afirmação pode ser provada assim: escrevemos $x = x_0 + h$, logo $x - x_0 = h$ e então $|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0}.|a^h - 1|$. Ora, sabemos que a^h pode ser tornado tão próximo de 1 quanto desejemos, desde que tomemos h suficientemente pequeno. Como a^{x_0} é constante, podemos fazer o produto $a^{x_0}.|a^h - 1|$ tão pequeno quanto o queiramos, logo:

$$\lim_{x \to x_0} |a^x - a^{x_0}| = 0, \text{ ou seja: } \lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$$

6) A função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, é sobrejetiva.

Esta afirmação quer dizer que para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$. (Todo número real positivo é uma potência de a.) Para prová-la, usamos o Lema citado anteriormente e escolhemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma potência a^{r_n}, com $r_n \in \mathbb{Q}$, no intervalo $(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$, de modo que $|b - a^{r_n}| < 1/n$ portanto:

$$\lim_{x \to x_0} a^{r_n} = b.$$

Para fixar as ideias, supomos a > 1. Escolhemos as potências a^{r_n} sucessivamente, tais que:

$$a^{r_1} < a^{r_2} < \ldots < a^{r_n} < b$$

Certamente, podemos fixar $s \in \mathbb{Q}$ tal que $b < a^s$. Então a monotonicidade da função a^x nos assegura que $r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots < s$.

Assim, (r_n) é uma sequência monótona, limitada superiormente por s. A completeza de $\mathbb{R}$ garante então que os r_n são valores aproximados por falta de um número real x, ou seja:

$$\lim_{x \to x_0} r_n = x$$

A função exponencial sendo contínua, temos então:

$$a^x = \lim_{x \to x_0} a^{r_n} = b, \text{como queríamos demonstrar.}$$

Vemos, pois, que para todo número real positivo a, diferente de 1, a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, dada por $f(x) = a^x$, é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_+$, crescente se a > 1, decrescente se 0 < a < 1, com a propriedade adicional de transformar somas em produtos, isto é, f(x + y) = f(x) . f(y).

(A injetividade da função $x \to a^x$ decorre da sua monotonicidade. Se a > 1, por exemplo, então: $x > y \Rightarrow a^x > a^y$ e $x < y \Rightarrow a^x < a^y$, portanto $x \neq y \Rightarrow a^x \neq a^y$.)

Tem-se ainda:

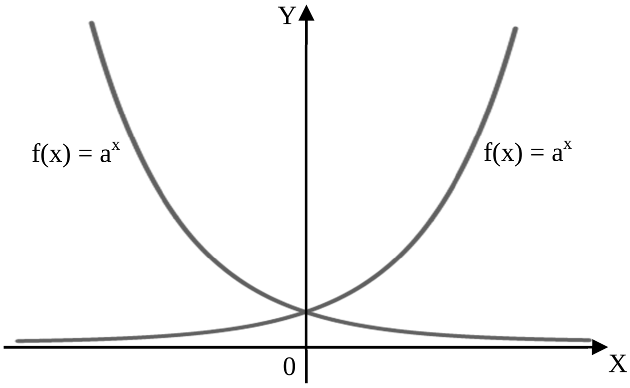
$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \text{ se } a > 1,$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \text{ se } a < 0 < 1,$$

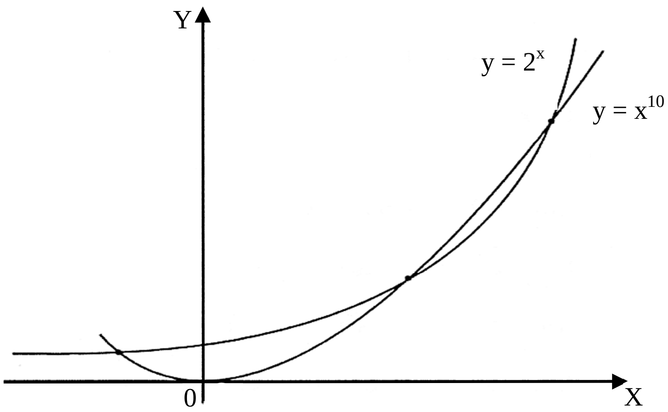
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \text{ se } a > 1,$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \text{ se } a < 0 < 1.$$

A figura exibe o gráfico de f (x) = a^x nos casos a > 1 e 0 < a < 1



Quando a > 1, nota-se que, quando x varia da esquerda para a direita, a curva exponencial $y = a^x$ apresenta um crescimento bastante lento enquando x é negativo. À medida que x cresce, o crescimento de y se torna cada vez mais acelerado. Isto se reflete na inclinação da tangente ao gráfico; para valores positivos muito grandes de x, a tangente é quase vertical. O crescimento exponencial supera o de qualquer polinómio. Se compararmos o gráfico de $y = 2^x$ (por exemplo) com o de $y = x^{10}$, veremos que, para $0 < x < 1{,}077$ temos $x^{10} < 2^x$. Para $1{,}077 < x < 58{,}77$ tem-se sempre $2^x > x^{10}$.



Mostraremos, agora, que entre as funções monótonas e injetivas, $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, apenas as funções logarítmicas possuem a propriedade de transformar produtos em somas.

Observação 1: Antes lembremos que se $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é tal que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $f(y) = \log_a y$ para todo $y \in \mathbb{R}_+$, pois $x \to a^x$ é uma função sobrejetiva de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+$, considerando $a > 0$ e $a \neq 1$.

Teorema 1: Seja $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que $f(x.y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+$ e suponha que exista um valor $a > 0$, tal que $f(a) = 1$. Então $f(x) = \log_a x$, para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Demonstração: Como f é crescente e $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, tem-se $a > 1$.

Vamos admitir o caso em que f é crescente (o outro caso é análogo).

Teremos $f(1) = f(1.1) = f(1) + f(1)$, então $f(1) = 0$.

I. Para todo $m \in \mathbb{N}$ vale:

$f(a^m) = f(a \,.\, a. \ldots a) = f(a) + f(a) + \ldots + f(a) = 1 + 1 + \ldots + 1 = m$, e

$0 = f(1) = f(a^m \,.\, a^{-m}) = f(a^m) + f(a^{-m}) = m + f(a^{-m})$, logo $f(a^{-m}) = -m$.

II. Se $r = \dfrac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$ então $r.n = m$, temos:

$m = f(a^m) = f(a^{rn}) = f((a^r)^n) = n.f(a^r)$ e daí $f(a^r) = \frac{m}{n} = r$.

III. Se $x \in \mathbb{R}$ é irracional então, para r, s racionais temos:

$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \Rightarrow r < f(a^x) < s$.

Assim todo número racional r, menor do que x é também menor do que $f(a^x)$ e todo número s maior do que x é também maior do que $f(a^x)$. Segue-se, pela Observação 1, que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $f(y) = \log_a y$ para todo $y > 0$. ■

Consideremos o caso geral, em que se tem uma função crescente $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, tal que: $g(x.y) = g(x) + g(y)$, sem mais nenhuma hipótese.

Teorema 2: Seja $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uma função crescente tal que $g(x.y) = g(x) + g(y)$. Então, existe $a > 0$ tal que $g(x) = \log_a x$, para todo x em $\mathbb{R}_+$.

Demonstração: Visto que $g(1) = 0$ e, como $1 < 2$, devemos ter $g(2) = b > 0$. A nova função $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{g(x)}{b}$, é crescente, transforma produtos em somas e cumpre $f(2) = 1$.

Pelo Teorema 1, tem-se $f(x) = \log_2 x$ para todo $x > 0$. Isto significa que, para todo $x > 0$, vale: $x = 2^{f(x)} = 2^{\frac{g(x)}{b}} = (2^{\frac{1}{b}})^{g(x)} = a^{g(x)}$, com $a = 2^{\frac{1}{b}}$. Tomando $\log_a$ de ambos os membros da igualdade $a^{g(x)} = x$ vem, finalmente:

$$g(x) = \log_a x. \qquad ■$$

Mostraremos, agora, como os logaritmos naturais podem ser apresentados de forma geométrica, usando para isso o teorema da caracterização apresentado.

Começamos pelo estudo de uma transformação geométrica bastante simples, que se revela útil para os nossos propósitos.

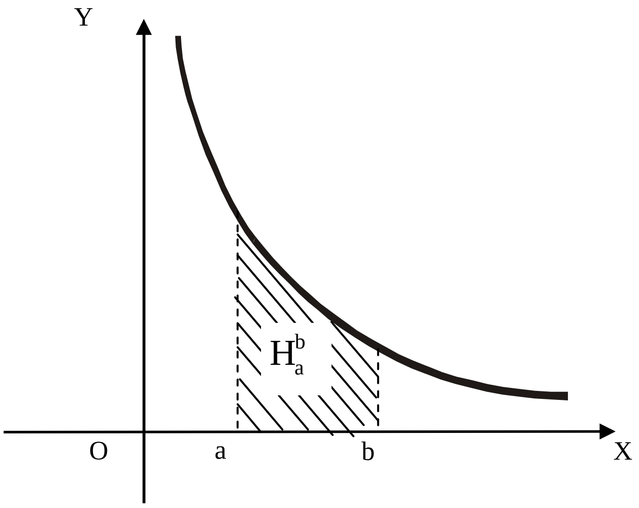
Para cada número real $k > 0$, definimos a transformação (= função) $T = T_k: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que associa a cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ o ponto $T(x, y) = (kx, y/k)$, obtido de (x, y) multiplicando a abscissa por k e dividindo a ordenada pelo mesmo k.

Um retângulo X de lados paralelos aos eixos, com base medindo b e altura medindo a, é transformado por T num retângulo X' = T(X), ainda com lados paralelos aos eixos, porém com base k.b e altura a/k. Portanto, X e seu transformado X' = T(X), têm áreas iguais. Mais geralmente, T transforma toda figura F do plano numa figura F' = T(F), cujas dimensões em relação a F são alteradas pelo fator k na horizontal e 1/k na vertical. Logo F e F’ têm a mesma área.

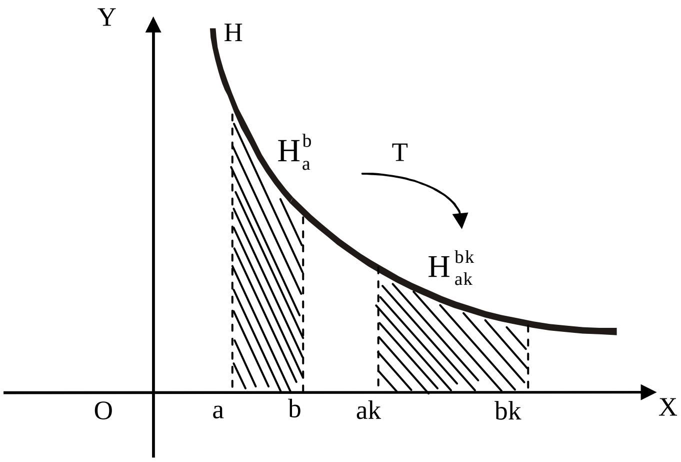
Interessa-nos em particular o efeito da transformação T nas faixas de hipérbole.

Seja $H = \{(x, 1/x); x > 0\}$ o ramo positivo da hipérbole equilátera $x.y = 1$; H é o gráfico da função $h: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $h(x) = 1/x$.

Dados $a, b \in \mathbb{R}_+$, o conjunto H_a^b dos pontos (x, y) do plano, tais que x está entre a e b e $0 \leq y \leq \dfrac{1}{x}$ chama-se uma faixa de hipérbole. H_a^b é o conjunto do plano limitado lateralmente pelas verticais x = a, x = b, ao sul pelo eixo das abscissas e ao norte pela hipérbole H.



A transformação $T = T_k: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leva a faixa H_a^b na faixa H_{ak}^{bk}.



Como T preserva áreas, segue-se que, para todo $k > 0$, as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} têm a mesma área.

Normalmente, a área de uma figura não é um número negativo. Mas às vezes é conveniente usar "áreas orientadas", ou seja, providas de sinal + ou –. É o que faremos agora.

Convencionaremos que a área da faixa de hipérbole H_a^b será positiva quando $a < b$, negativa quando $b < a$ e zero quando $a = b$.

Para deixar mais clara esta convenção, escreveremos ÁREA H_a^b, com letras maiúsculas, para indicar a área orientada (provida de sinal). A área usual, com valores ≥ 0, será escrita como área H_a^b. Assim, temos:

ÁREA H_a^b = área $H_a^b > 0$ se $a < b$;

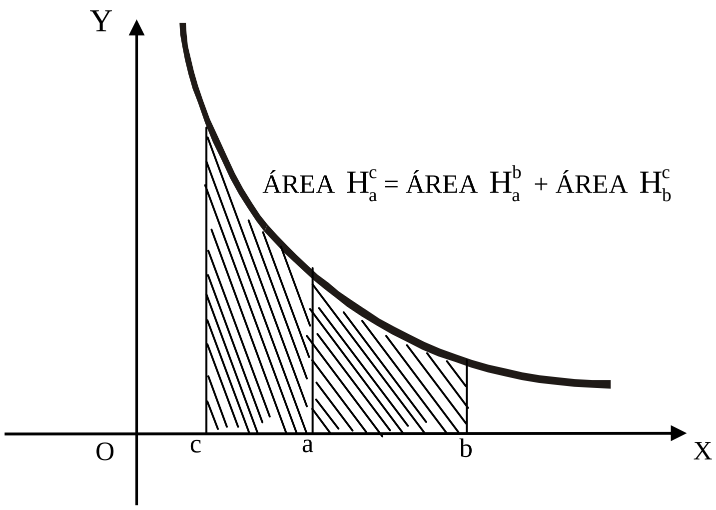
ÁREA H_a^b = – área $H_a^b < 0$ se $b < a$;

ÁREA $H_a^a = 0$.

É óbvio que, quando $a < b < c$, tem-se: área H_a^b + área H_b^c = área H_a^c. Uma consequência da adoção de áreas orientadas é que se tem ÁREA H_a^b = – ÁREA H_b^a.

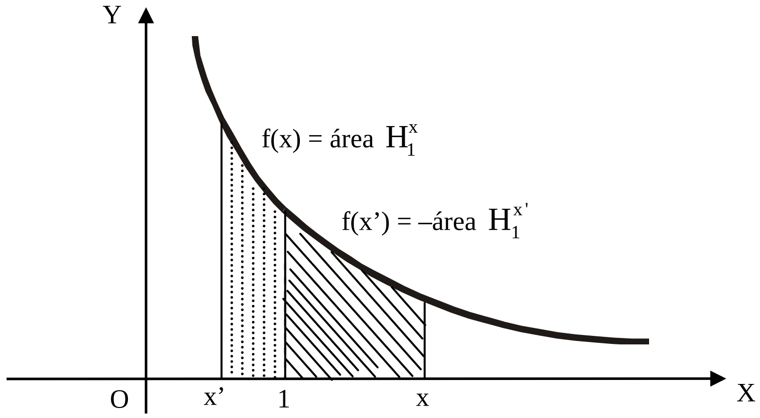
Daí segue que vale a igualdade: ÁREA H_a^b + ÁREA H_b^c = ÁREA H_a^c

Em quaisquer dos seis casos $a \leq b \leq c$, $a \leq c \leq b$, $b \leq a \leq c$, $b \leq c \leq a$, $c \leq a \leq b$ e $c \leq b \leq a$. A igualdade acima é fácil de provar. Basta ter a paciência de considerar separadamente cada uma destas seis possibilidades.



Definamos uma função f: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ pondo, para cada número real $x > 0$,

$f(x)$ = ÁREA H_1^x.



f(x) = área da região hachurada

f(x') = – área da região pontilhada

Resultam imediatamente da definição as seguintes propriedades:

f (x) > 0 $\Leftrightarrow$ x > 1;

f (x) < 0 $\Leftrightarrow$ 0 < x < 1;

f (1) = 0;

f é crescente.

Além disso, observamos que, para x, y $\in \mathbb{R}_+$ quaisquer:

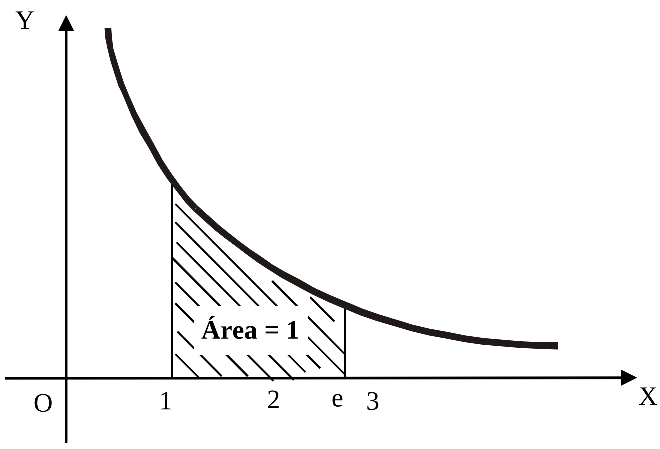
f(x.y) = ÁREA H_1^{xy} = ÁREA H_1^x + ÁREA H_x^{xy}.

Mas, como vimos pela transformação T = T_k: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que leva a faixa H_a^b na faixa H_{ak}^{bk}, temos ÁREA H_x^{xy} = ÁREA H_1^y.

Logo f(x.y) = ÁREA $H_1^x + H_1^y$, ou seja: f(x.y) = f(x) + f(y).

Pelo Teorema 2, existe um número real positivo, que chamaremos de *e*, tal que f(x) = $\log_e$ x para todo x $\in \mathbb{R}_+$.

Escrevemos ℓn x em vez de $\log_e$ x e chamaremos o número ℓn x de logaritmo natural de x.



O número *e*, base dos logaritmos naturais, é caracterizado pelo fato de que seu logaritmo natural é igual a 1, ou seja ÁREA H_1^e = 1.

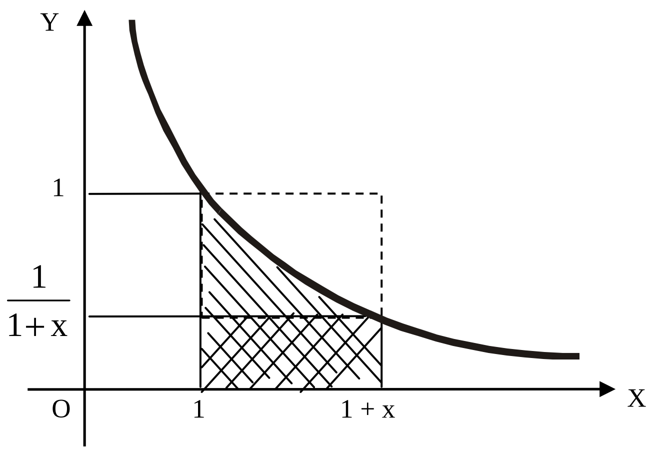
O número *e* é irracional. Um valor aproximado para essa importante constante é *e* = 2,718281828459.

Os logaritmos naturais, de base *e*, são os mais importantes nas aplicações, especialmente aquelas que envolvem o uso do cálculo infinitesimal.

Alguns autores chamam o logaritmo natural de "logaritmo neperiano", em homenagem a John Napier, autor da primeira tábua de logaritmos, em 1614. Entretanto, tal denominação não é inteiramente apropriada, pois o logaritmo originalmente definido por Napier não coincide com o logaritmo natural.

Usualmente, o número *e* é apresentado como o limite da expressão $(1+\frac{1}{n})^n$ quando n tende ao infinito. Noutras palavras, costuma-se introduzir *e* como o número real cujos valores aproximados por falta são os números racionais da forma $(1+\frac{1}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}$. Essas aproximações são tanto melhores quanto maior for o número n. Mostraremos agora que o número *e*, que acabamos de caracterizar pela propriedade ÁREA H_1^e =1, é mesmo o valor daquele limite.

O argumento que usaremos para dar essa prova se baseia na figura abaixo, copiada da capa do livro Logaritmos (LIMA, 1996).



Nela temos um retângulo menor, cuja base mede x e cuja altura mede $\frac{1}{1+x}$, contido na faixa H_1^{1+x} e esta faixa, por sua vez, contida no retângulo maior, com a mesma base de medida x e altura igual a 1. Comparando as áreas dessas três figuras, podemos escrever, para todo x > 0.

$$\frac{x}{1+x} < \ell n(1+x) < x.$$

Dividindo por x:

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ell n(1+x)}{x} < 1.$$

Tomando x = $\frac{1}{n}$:

$$\frac{n}{n+1} < \ell n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1,$$

Portanto:

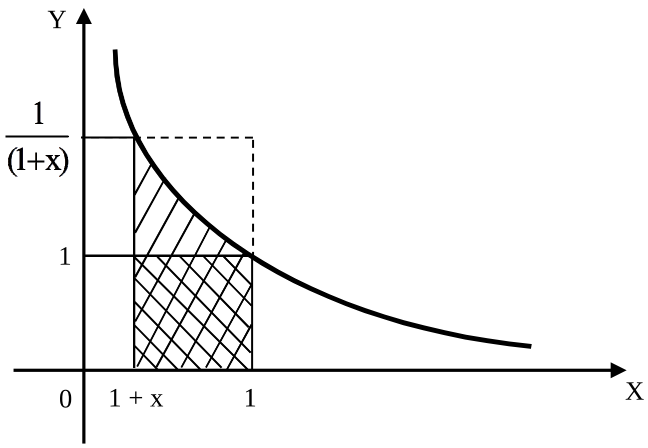
$e^{\frac{n}{n+1}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e,$ para todo n ∈ ℕ. Quando n cresce indefinidamente, $\frac{n}{n+1}$ se aproxima de 1, logo $e^{\frac{n}{n+1}}$ tende a *e*. Segue-se então destas últimas desigualdades que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Este argumento ilustra bem a vantagem que advém de se interpretar o logaritmo natural geometricamente: a noção de área é visualmente intuitiva, permitindo que se obtenham desigualdades como as que foram usadas aqui.

A igualdade $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ foi obtida a partir da desigualdade

(*) $\frac{1}{1+x} < \frac{\ell n(1+x)}{x} < 1,$ válida para todo x > 0. Se considerarmos –1 < x < 0, teremos – x > 0 e 1 + x > 0. Portanto é válido ainda falar de ln (1 + x). Observamos que o retângulo cuja base mede – x e cuja altura mede 1 está contido na faixa H^1_{1+x} e esta, por sua vez, está contida no retângulo de mesma base e altura $\frac{1}{(1+x)}$.



Comparando as áreas destas figuras, vem:

$$-x < -\ell n(1+x) < -\frac{x}{1+x}.$$

Dividindo os 3 membros pelo número positivo – x obtemos

$$(**) \qquad 1 < \frac{\ell n(1+x)}{x} < \frac{1}{1+x}.$$

As desigualdades (*) e (**) nos dão

$$\frac{1}{1+x} < \ell n(1+x)^{\frac{1}{x}} < 1 \quad \text{ou} \quad 1 < \ell n(1+x)^{\frac{1}{x}} < \frac{1}{1+x}, \text{ Ou seja,}$$

$e^{\frac{1}{1+x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e$ ou $e < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e^{\frac{1}{1+x}}$, conforme seja x > 0 ou –1 < x < 0. Em qualquer hipótese, daí se segue que (***) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Isto significa que é possível tornar o valor da expressão $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ tão próximo de e quanto se deseje, desde que se torne o número não-nulo x suficientemente pequeno em valor absoluto.

A igualdade (***) se exprime dizendo que $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ tende a *e* quando x tende a zero.

Tomando, por exemplo, x = $\frac{\alpha}{n}$, vemos que $\frac{1}{x} = \frac{n}{\alpha}$ e que $x \to 0$ se, e somente se $n \to \infty$. Logo (***) nos dá

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}}\right]^{\alpha} = \lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\alpha} = e^{\alpha}.$$

$n\to\infty$

Como caso particular da igualdade $e^{\alpha} = \lim \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$, válida para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, obtemos:

$$\frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

4 MATERIAL E MÉTODOS

4.1 Metodologia de aplicação

4.1.1 Contexto

O estudo foi aplicado em uma instituição estadual de ensino de nível médio, chamada Escola Estadual de Ensino Médio Liceu de Messejana[4] cuja sede é na Av. Washington Soares, Nº 7702, em Messejana, no município de Fortaleza, estado do Ceará.
A escola foi criada pelo Decreto Nº 25.639, de 01/10/1999, do Governo do Estado, que a mantém. Está ligada administrativa e tecnicamente à Secretaria de Educação do Estado do Ceará – SEDUC. Funciona em regime de externato, em três turnos: manhã, tarde e noite; ministra o ensino médio em regime anual e de forma presencial.

Essa escola tem aproximadamente 1300 alunos. Possui 12 turmas por turno, totalizando 36 turmas, de 1ª, 2ª e 3ª séries do ensino médio.

A escola conta ainda com uma sala de multimeios climatizada, com tv de alta definição, projetor multimídia, aparelho de home theater, lousa branca e computador. Conta ainda com três laboratórios de informática, auditório refrigerado com capacidade para aproximadamente 100 pessoas, laboratórios de Química, Física e Biologia e uma biblioteca, também climatizada.

4.1.2 Participantes

Participaram da atividade 36 alunos com idades entre 15 e 18 anos, cursando a 1ª série do ensino médio. Para os alunos menores de 18 anos foi enviado um termo de consentimento solicitando a permissão dos pais ou responsáveis.

As tabelas a seguir foram elaboradas a partir dos dados coletados no questionário socioeconômico.

A tabela 1 revela o grupo que os participantes fazem parte e a idade dos mesmos. É possível perceber que o maior número de alunos (N = 24) têm 16 anos, dos quais 16,7% (N = 4) fazem parte do grupo experimental e 83,3% (N = 20) são do grupo de controle. Apenas 1 (um) aluno tem 18 anos e pertence ao grupo de controle.

[4] Dados disponíveis em: http://www.portalmessejana.com.br/liceu/ Acesso em: 27/06/2013 às 09h00min.

Tabela 1 - Cruzamento das variáveis Tipo de grupo x Idade

Tipo de grupo	Idade (anos completos)				Total	%
	15	16	17	18		
Experimental	3	4	3	0	10	27,8
Controle	4	20	1	1	26	72,2
Total	7	24	4	1	36	100,0

Fonte: Elaborada pelo autor

Quanto à região onde moram, 34 (94,4%) se concentram na zona urbana e 2 (5,6%) na zona rural.

A tabela 2 revela com quem os participantes moram. É possível perceber que a maioria dos alunos, 29 (80,6%) mora com os pais.

Tabela 2 – Com quem moram os participantes

Com quem mora	Frequência	%
Pais	29	80,6
Parentes	7	19,4
Total	26	100,0

Fonte: Elaborada pelo autor

A tabela 3 revela o número de irmãos dos participantes. Observa-se que o maior número de alunos, 13 (36,1%) têm apenas 1 irmão e que 5 (13,9%) são filhos únicos.

Tabela 3 – Quantos irmãos têm os participantes

Quantos irmãos	Frequência	%
Nenhum	5	13,9
Um	13	36,1
Dois	6	16,7
Três	7	19,4
Cinco	1	2,8
Seis ou mais	4	11,1
Total	36	100,0

Fonte: Elaborada pelo autor

A tabela 4 ilustra o nível de escolaridade dos pais dos participantes. Os dados mostram que: 8 (22,2%) cursaram apenas o fundamental da 1ª à 5ª série, 6 (16,7%) cursaram apenas o fundamental da 6ª à 9ª, 12 (33,3%) possuem ensino médio completo ou incompleto e apenas 3 (8,4%) têm curso superior completo ou incompleto. Observa-se, ainda, que 5 alunos (13,9%) declararam não saber.

Tabela 4 – Escolaridade do pai

Nível de escolaridade	**Frequência**	**%**
Não estudou	2	5,6
Da 1ª à 5ª série EF	8	22,2
Da 6ª à 9ª série EF	6	16,7
Ensino Médio incompleto	5	13,9
Ensino Médio completo	7	19,4
Ensino Superior incompleto	1	2,8
Ensino Superior completo	2	5,6
Não sei	5	13,9
Total	36	100,0

Fonte: Elaborada pelo autor

A tabela 5 revela o nível de escolaridade da mãe de cada participante. Observa-se que 12 (33,3%) cursaram apenas o fundamental (1ª à 9ª série), 12 (33,3%) cursaram o ensino médio completo ou incompleto e que apenas 1 (2,8%) tem curso de pós-graduação.

Tabela 5 – Escolaridade da mãe

Nível de escolaridade	**Frequência**	**%**
Não estudou	2	5,6
Da 1ª à 5ª série EF	6	16,7
Da 6ª à 9ª série EF	6	16,7
Ensino Médio incompleto	4	11,1
Ensino Médio completo	8	22,2
Ensino Superior incompleto	5	13,9
Ensino Superior completo	1	2,8
Pós-graduação	1	2,8
Não sei	3	8,3
Total	36	100,0

Fonte: Elaborada pelo autor

No que diz respeito ao que fazem atualmente os participantes, 31(86,1%) apenas estudam; os que trabalham (4) representam 11,1%; 1 (2,8%) optou por não responder.

A tabela 6 revela o valor da renda familiar mensal média. Percebe-se que 12 (33,3%) recebem de 1 até 2 salários mínimos (de RS 678,00 até RS 1.356,00) e que 13 participantes (36,1%) não souberam informar. 22,2% informaram renda de menos de 1 salário e acima de dois salários até cinco salários mínimos.

Tabela 6 – Renda familiar mensal

Renda familiar	Frequência	%
Menos de 1 salário mínimo	4	11,1
Acima de um até dois salários	12	33,3
Acima de dois até cinco salários	4	11,1
Acima de cinco até dez salários	3	8,3
Não sei informar	13	36,1
Total	36	100,0

Fonte: Elaborada pelo autor

A tabela 7 revela o nível de colaboração de cada participante na renda familiar. Nota-se que a maioria (80,6%) apenas estuda e não contribui com a renda familiar. Apenas 11,1% declaram trabalhar e ser sustentado parcialmente pela família. 8,3% dos respondentes informaram outra situação.

Tabela 7 – Participação na vida econômica do grupo familiar

Participação na economia	Frequência	%
Não trabalho e sou sustentado	29	80,6
Trabalho e sou sustentado parcialmente	4	11,1
Outra situação	3	8,3
Total	36	100,0

Fonte: Elaborada pelo autor

A tabela 8 informa quantas pessoas, incluindo o participante, colaboram com a renda da família. Pela análise dessa tabela percebe-se que: para 18 participantes (50,0%) apenas duas pessoas contribuem para a renda familiar; 25,0% (9 participantes) declararam que apenas uma pessoa mantém a família financeiramente; os demais, representando 25,0% dos respondentes, informaram que três (6 participantes) e quatro (3 participantes) contribuem para manter a família financeiramente.

Tabela 8 – Quantos (incluindo o participante) contribuem para a renda da família

Quantidade	Frequência	%
Uma	9	25,0
Duas	18	50,0
Três	6	16,7
Quatro	3	8,3
Total	36	100,0

Fonte: Elaborada pelo autor

A tabela 9 revela o tipo de escola que os participantes estudaram. Nota-se que 14 alunos estudaram somente em escola pública, dos quais 3 (21,4%) fazem parte do grupo experimental e 11 (78,6%) do grupo de controle. 13 alunos estudaram a maior parte do tempo em escola particular dos quais 4 (30,8%) fazem parte do grupo experimental e 9 (69,2%) do grupo de controle.

Tabela 9 – Cruzamento das variáveis: Tipo de grupo x Em que tipo de escola estudou o participante

Tipo de grupo	**Em que tipo de escola estudou**			**Total**	**%**
	Somente em escola pública	**Maior parte em escola pública**	**Maior parte em escola particular**		
Experimental	3	3	4	10	27,8
Controle	11	6	9	26	72,2
Total	14	9	13	36	100,0

Fonte: Elaborada pelo autor

A tabela 10 revela o número de vezes que cada participante já repetiu alguma série. Observa-se que o maior número de alunos (N = 31) não repetiu. Destes, 8 (25,8%) fazem parte do grupo experimental e 23 (74,2%) do grupo de controle.

Tabela 10 – Cruzamento das variáveis: Tipo de grupo x Já repetiu alguma série

Tipo de grupo	**Já repetiu alguma série**		**Total**	**%**
	Não	**Sim**		
Experimental	8	2	10	27,8
Controle	23	3	26	72,2
Total	31	5	36	100,0

Fonte: Elaborada pelo autor

A tabela 11 revela como cada participante considera o acesso a computadores e outros recursos de informática na escola. Os dados mostram que a maioria, 21 alunos (58,3%), considera de regular a bom o acesso a computadores e outros recursos de informática. Os demais declararam achar de insuficiente a regular (27,8%) e de bom a excelente (13,9%).

Tabela 11 – Acesso a computadores e outros recursos de informática na escola

Nota	Frequência	%
Insuficiente a regular	10	27,8
Regular a bom	21	58,3
Bom a excelente	5	13,9
Total	36	100,0

Fonte: Elaborada pelo autor

A tabela 12 revela o número de livros que cada participante costuma ler por ano. 9 alunos do grupo controle disseram não ler livro algum durante o ano, enquanto que 13 alunos, 5 do grupo experimental e 8 do grupo de controle disseram ler de 2 a 5 livros por ano. Apenas um aluno pertencente ao grupo de controle declarou ler + de 30 livros anualmente.

Tabela 12 – Cruzamento das variáveis: Tipo de grupo x Quantos livros costuma ler por ano

Tipo de grupo	**Quantos livros em média costuma ler por ano**							**Total**	**%**
	Nenhum	**Um**	**2 a 5**	**6 a 10**	**11 a 15**	**16 a 20**	**+ de 30**		
Experimental	0	2	5	1	1	1	0	10	27,6
Controle	9	5	8	2	0	1	1	26	72,2
Total	9	7	13	3	1	2	1	36	100,0

Fonte: Elaborada pelo autor

A tabela 13 revela o número de computadores que cada participante tem em casa. Pela análise dessa tabela nota-se que: 16 alunos disseram ter 1 computador, dos quais 4 (25,0%) são do grupo experimental e 12 (75,0%) são do grupo de controle; 13 alunos informaram não ter computador, dos quais 3 (23,1%) são do grupo experimental e 10 (76,9%) são do grupo de controle; O restante dos respondentes declararam ter dois ou mais computadores. Destes, 3 (42,9%) pertencem ao grupo experimental e 4 (57,1%) ao grupo de controle.

Tabela 13 – Cruzamento das variáveis: Tipo de grupo x Quantos computadores tem em casa

Tipo de grupo	Quantos computadores o participante tem em casa			Total	%
	Nenhum	**Um**	**Dois ou mais**		
Experimental	3	4	3	10	27,8
Controle	10	12	4	26	72,2
Total	13	16	7	36	100,0

Fonte: Elaborada pelo autor

Quanto ao quesito “você possui internet em casa” 14 (38,9%) responderam não e 22 (61,1%) sim.

A tabela 14 revela como cada participante considera o seu conhecimento de informática. Nota-se que a maioria, 27 alunos (75,0%), considera ter um bom conhecimento de informática.

Tabela 14 – Como classifica o conhecimento em Informática

Nota	Frequência	%
Muito bom	7	19,4
Bom	27	75,0
Ruim	1	2,8
Muito ruim	1	2,8
Total	36	100,0

Fonte: Elaborada pelo autor

A tabela 15 revela como cada participante considera o seu conhecimento de Matemática. Os dados mostram que 20 alunos consideram ter um bom conhecimento de matemática, dos quais 5 (25,0%) são do grupo experimental e 15 (75,0%) são do grupo de controle.

Tabela 15 - Cruzamento das variáveis Tipo de grupo x Conhecimento em Matemática

Tipo de grupo	Como classifica seu conhecimento em Matemática				Total	%
	Muito bom	**Bom**	**Ruim**	**Muito ruim**		
Experimental	4	5	1	0	10	27,8
Controle	1	15	7	3	26	72,2
Total	5	20	8	3	36	100,0

Fonte: Elaborada pelo autor

A maioria dos participantes tem entre 15 e 16 anos e apenas 1, do grupo de controle, tem 18 anos. Ainda vimos que 29 moram com os pais e 4 afirmaram ter 6 ou mais irmãos. Vimos também que 29 são sustentados e apenas estudam. Observamos que 10 pais e 14 mães têm nível médio completo ou nível superior (completo ou incompleto).

Com relação aos estudos, 5 (2 do grupo experimental) já repetiram de ano, 34 afirmam ter bom ou muito bom conhecimento de informática. Quanto ao conhecimento em matemática 5 afirmam ter muito bom conhecimento. Destes, 3 (1 do grupo de controle) acertaram todas as questões do pré-teste e 4 ou 6 questões da avaliação, 1 acertou 3 questões do pré-teste e 6 da avaliação e 1 (do grupo experimental) acertou apenas 1 questão do pré-teste e 3 da avaliação.

4.1.3 Condução

A aplicação do estudo foi realizada em uma turma da qual o autor era o professor do assunto em questão.

O estudo foi feito em cinco etapas: aplicação do questionário socioeconômico, aplicação do pré-teste, correção do pré-teste, desenvolvimento dos conteúdos (definição e propriedades, exercícios e correções) e aplicação da avaliação.

Na primeira etapa, aplicamos um questionário socioeconômico com os 36 alunos, os quais tiveram 50 minutos (1 hora-aula) para responder as questões.

Na segunda etapa, aplicamos um teste com quatro questões objetivas (pré-teste) com todos os alunos da turma, os quais tiveram 50 minutos (1 hora-aula) para resolver as questões.

Para não interferir no desenvolvimento do trabalho não foi permitido o uso de calculadoras, consultar apontamentos ou livro didático, nem consultar colegas ou professor, tornando o teste individual e não pesquisado, nos moldes tradicionais.

Os alunos mostraram-se receptivos, em sua maior parte, desenvolvendo o trabalho proposto sem maiores complicações.

As folhas com as questões foram recolhidas dentro do prazo estipulado, não ultrapassando o limite estabelecido.

Na terceira etapa, as questões foram corrigidas e comentadas, com espaço para esclarecer possíveis dúvidas, na lousa, no horário de uma aula da grade escolar, ou seja, 1 hora-aula de 50 minutos.

Na quarta etapa, os alunos foram divididos em dois grupos: experimental e controle. A composição dos grupos foi feita de forma aleatória, por sorteio. Essa composição é mais aconselhável, pois de acordo com Triviños (2008, p.114), “A escolha aleatória dos grupos experimental e de controle permite aceitar a igualdade dos grupos em todas as suas características, fazendo-se desnecessário o pré-teste”. Em seguida os grupos foram trabalhados separadamente, para desenvolvermos o conteúdo proposto no estudo.

No grupo de controle os conteúdos dos logaritmos, definição e propriedades, exemplos e atividades com correções, foram trabalhados do modo tradicional, utilizando primordialmente lousa e pincel. Foram realizados dois encontros em dias distintos, dentro do horário normal da escola e na grade de horários, que duraram, cada um, 2 aulas de 50 minutos, totalizando 4 horas-aula.

A condução das aulas no grupo de controle foi baseada nos conteúdos do objeto de aprendizagem, bem como os exemplos e exercícios propostos, na tentativa de equiparar os dois grupos no conteúdo exposto.

As aulas com o grupo de controle ocorreram dentro da normalidade, com algumas interrupções para tirar dúvidas e outros comentários, inclusive de pontos mais difíceis de compreensão, dos quais o entendimento das demonstrações das propriedades foram as que mais chamaram a atenção do autor.

A participação de parte dos alunos do grupo de controle nos exercícios propostos não foi muito boa, como infelizmente tem acontecido nas demais disciplinas, fato que pude confirmar com os demais colegas professores, ainda assim os exercícios foram feitos e corrigidos em sala.

No grupo experimental os conteúdos dos logaritmos, definição e propriedades, exemplos e atividades com correções, foram trabalhados em um dos laboratórios de informática da escola, no qual os alunos puderam ficar em computadores individualmente ou em dupla, conforme escolha própria. Além do conteúdo digital em alguns momentos fiz uso da lousa e pincel para explicar mais detalhadamente algumas demonstrações ou correções, aplicando o modo tradicional.

O estudo foi realizado em dois encontros em dias distintos, em dois sábados, ou seja, fora do horário normal da grade da escola, que duraram, cada um, 2 aulas de 50 minutos, totalizando 4 horas-aula. Um desses encontros foi gravado parcialmente em vídeo, pelo autor do estudo, durante momentos das explicações e utilizações do objeto de aprendizagem. Todo o conteúdo foi trabalhado a partir do objeto de aprendizagem, com o mínimo de interferência do autor, esclarecendo as dúvidas, sempre que solicitado.

Todos os encontros ocorreram de forma normal. Os alunos demonstraram habilidade e facilidade em lidar com o computador, utilizando o objeto de aprendizagem sem dificuldades. Aos alunos foi permitido o uso de papel e lápis ou caneta para anotações e resoluções dos exercícios.

Na quinta etapa, realizamos uma avaliação (pós-teste) com oito questões com toda a turma na própria sala de aula. Os alunos tiveram 2 aulas de 50 minutos para realização do mesmo.

Novamente para não interferir no desenvolvimento do trabalho não foi permitido o uso de calculadoras, consultar apontamentos ou livro didático, nem consultar colegas ou professor, tornando o teste individual e não pesquisado, nos moldes tradicionais.

4.1.4 Instrumentos de coleta de dados

Enquanto técnicas de coleta de dados, podemos destacar em pré-teste e pós-teste, questionários socioeconômicos.

Para Fiorentini e Lorenzato (2009, p.225), “Pré-teste: medida realizada antes do início do tratamento e Pós-teste: medida realizada após o término do tratamento”.

Aplicamos, além das atividades em si, um questionário socioeconômico para tentarmos obter características importantes dos alunos, que de alguma forma pudessem interferir nos resultados da avaliação.

Realização de um pré-teste para avaliação dos conteúdos já adquiridos e que os alunos também já devem ter trabalhado no ensino fundamental.

Outro instrumento utilizado foi uma avaliação (pós-teste) com oito questões, sobre os conteúdos ministrados.

4.1.5 Métodos de coleta de dados

A coleta de dados foi realizada por meio de questionários fechados.

Tanto o pré-teste quanto o questionário socioeconômico e a avaliação foram aplicados aos alunos na própria sala de aula, com todos os alunos reunidos.

Os dados foram anotados manualmente, embora em um dos encontros dos sábados, com o grupo experimental, o autor tenha feito algumas gravações em vídeo.

4.1.6 Tipo de pesquisa

Em relação à coleta de dados a pesquisa caracteriza-se como:

Pesquisa bibliográfica: se concebe assim pela necessidade, em fazer uma revisão em torno da bibliografia acerca dos teóricos que falam do assunto aqui tratado.

Pesquisa de campo: por necessitar de uma coleta de dados, acerca do conhecimento de Logaritmos, colhidos através de aplicação de testes e de questionários socioeconômicos distribuídos aos alunos, a fim de traçar um perfil da turma investigada.

Pesquisa experimental: descrita por Fiorentini e Lorenzato (2009, p.71), como “aquela parte da investigação na qual se manipulam certas variáveis e se observam seus efeitos sobre os outros”.

Enquanto abordagem metodológica o estudo se caracteriza como quantitativo, pois trabalhamos com dados que na opinião de Cás (2008, p. 35), podem ser “medidos, quantificados, mensurados ou dimensionados”.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

5.1 Método de análise

Para organizar os instrumentos, os métodos de coleta de dados e considerá-los para a análise dos resultados, utilizamos um software estatístico, SPSS (*Statistical Package for the Social Sciences*), considerado um instrumento importante devido a sua capacidade de "realizar cálculos estatísticos complexos" (PEREIRA, 2006, p.15) e, ainda, o programa Microsoft Office Excel 2010. Estes programas permitiram a construção de tabelas e gráficos sobre as informações coletadas.

5.2 Resultados

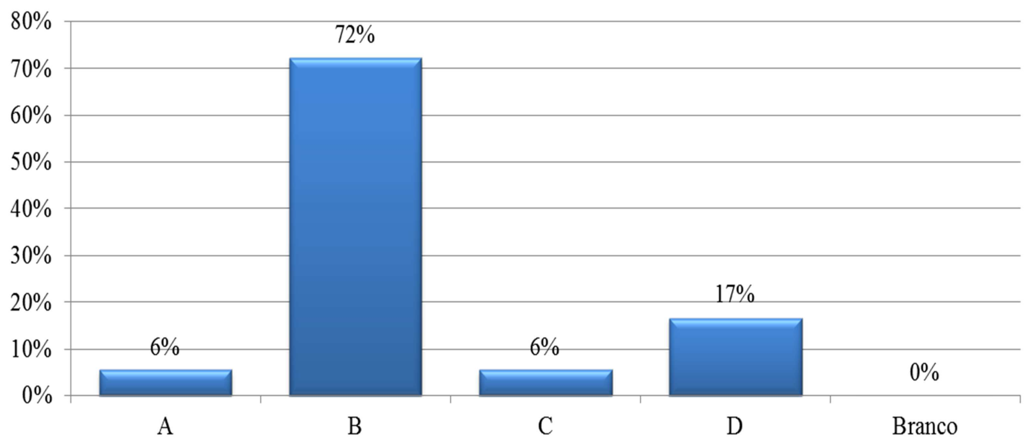
5.2.1 Pré-teste

Esperávamos com o pré-teste obter informações acerca dos conceitos e das propriedades básicas das potências, que são de suma importância para os participantes trabalharem as exponenciais e, consequentemente, os logaritmos.

Os gráficos seguintes demonstram os dados colhidos nessa etapa.

A primeira questão do pré-teste era: Aplicando as propriedades das potências, simplifique a expressão $(5^4.5^8):5^{10}$, com as opções a) 5, b) 5^2, c) 5^3 e d) 5^4. A opção correta é a de letra b.

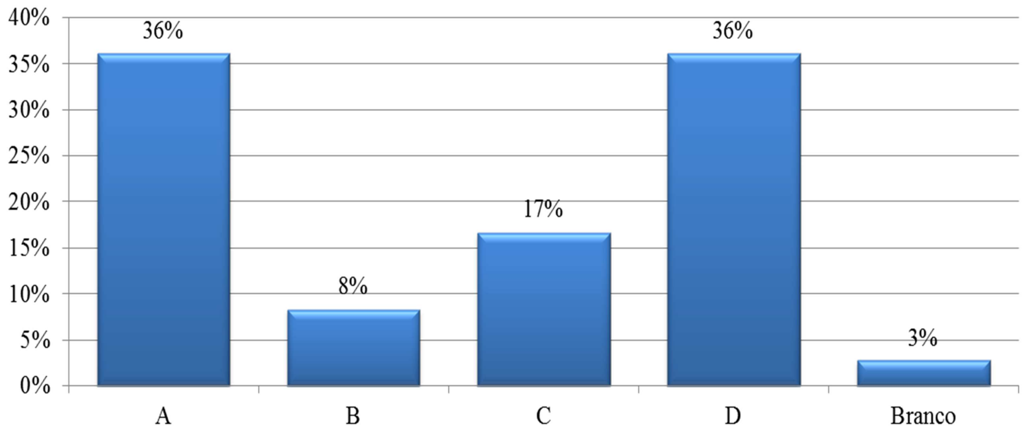
Gráfico 1: Questão 1 (Pré-teste)



Esperávamos que os participantes aplicam-se as propriedades produto e quociente de potências de mesma base, chegando ao valor 5^2. Observamos que 72% dos alunos marcaram o item correto.

Na segunda questão pedimos para que calculassem a potência $(3/4)^{-2}$. As opções eram: a) 3/4, b) 4/3, c) 9/16 e d) 16/9, com a opção correta na letra d.

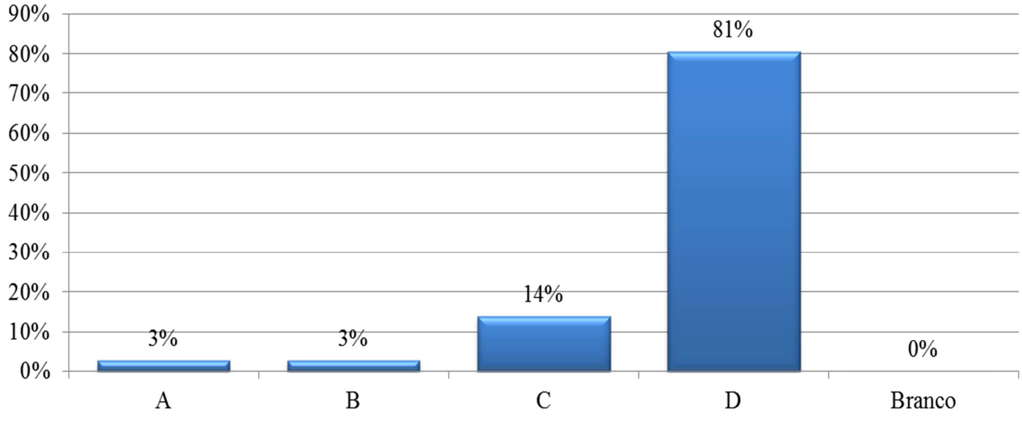
Gráfico 2: Questão 2 (Pré-teste)



Queríamos que os participantes mostrassem conhecer as potências de expoentes inteiros negativos. Observamos no gráfico anterior que apenas um terço, aproximadamente, dos alunos marcou o item correto. Chama-nos a atenção para outro terço, aproximadamente, ter marcado o item a.

Na terceira questão pedimos para os alunos resolverem a equação $2^x = 32$. As opções eram: a) 2, b) 3, c) 4 e d) 5. A opção correta encontra-se na letra d.

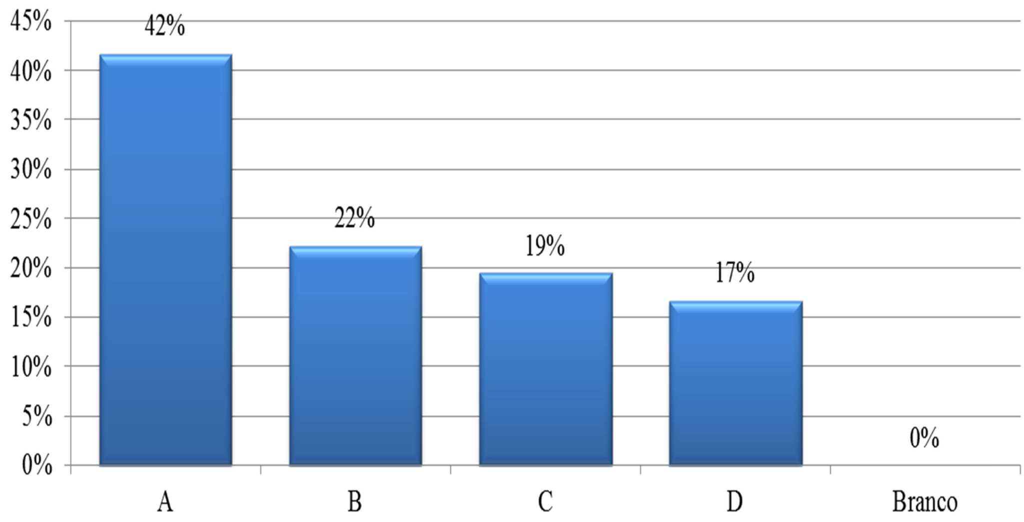
Gráfico 3 – Questão 3 (Pré-teste)



Esperávamos que houvesse a aplicação do conhecimento de potenciação para que o participante resolvesse uma equação com solução imediata. Nesta questão tivemos quase a totalidade de acertos.

Na quarta questão pedimos novamente para os alunos resolverem uma equação, que foi: Determine o valor de x na equação $3^x = 1/81$. As opções eram: a) – 4, b) – 2, c) 2 e d) 4. A opção correta é a de letra a.

Gráfico 4 – Questão 4 (Pré-teste)



Temos outra equação, agora exigindo que os participantes, mais uma vez, mostrassem conhecer as potências de expoentes inteiros negativos. Notamos uma maior dispersão de respostas, prevalecendo o acerto da resposta com 42% dos alunos.

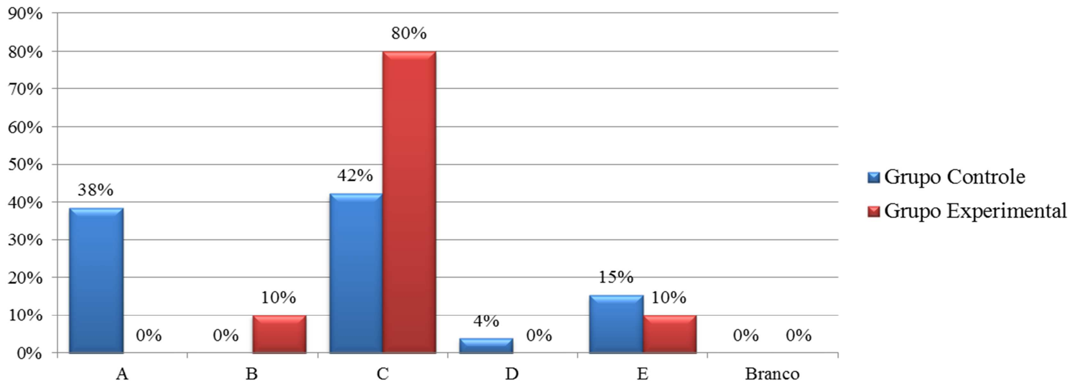
Os resultados levam a pensar que a definição de potências para expoentes naturais tem fácil compreensão, porém para o caso das potências com expoentes inteiros negativos tivemos um resultado abaixo das expectativas.

5.2.2 Avaliação (pós-teste)

Na primeira questão o participante deveria optar, analisando os itens, qual a igualdade seria a correta. Os itens eram: a) $3^2.3^5 = 3^{10}$, b) $3^2:3^5 = 3^{10}$, c) $(3^2)^5 = 3^{10}$, d) $3^2.3^5 = 3^{-3}$ e e) $3^2:3^5 = 3^7$. O item correto era a letra c.

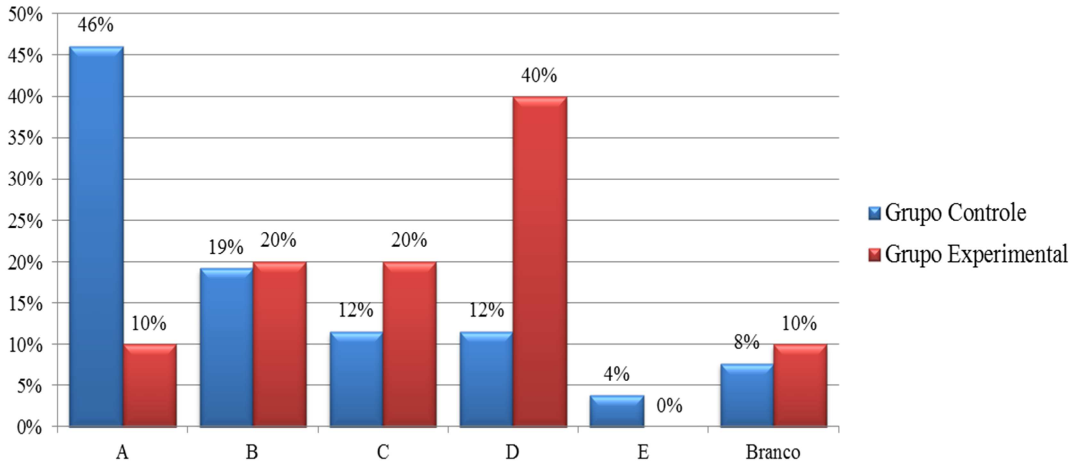
Os participantes deveriam mostrar conhecer as propriedades das potências. Observamos uma grande vantagem do grupo experimental com 80% de acertos contra 42% do grupo de controle. Ainda notamos que as respostas do grupo de controle foram muito distintas, com a maioria dos erros, 38%, optando pelo item a.

Gráfico 5 – Questão 1 (Avaliação)



Na questão 2, sendo x > 0 e $\log_3 x = 4$, x é igual a: As opções: a) 1, b) 9, c) 27, d) 81 e e) 243 o participante deveria aplicar corretamente a definição de logaritmo. O item correto era o da letra d.

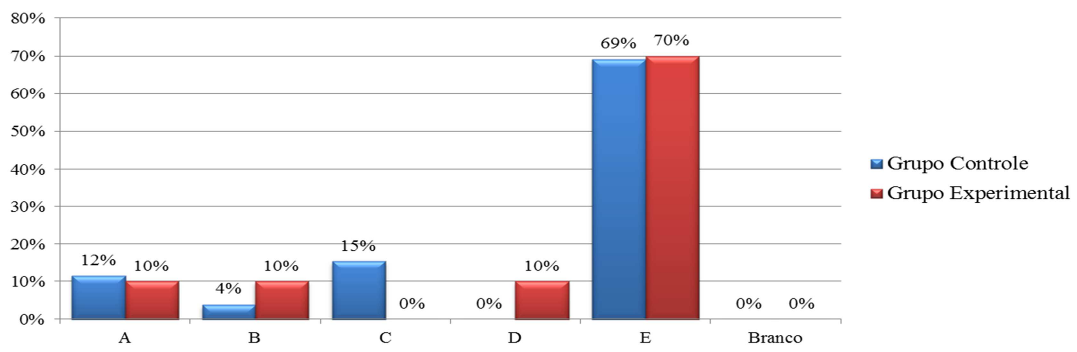
Gráfico 6 – Questão 2 (Avaliação)



Notamos que 40% do grupo experimental acertaram a questão, contra apenas 12% do grupo de controle. O grupo de controle optou, em sua maioria, 46%, pelo item a. Tivemos um participante do grupo experimental e dois do grupo de controle optando por não marcar opção alguma.

Na questão 3, o participante deveria reconhecer a propriedade dos logaritmos aplicada corretamente. A questão era: Qual a opção correta? Os itens: a) log(3.8) = log3 . log8, b) log(3:8) = log3 : log8, c) log(3.8) = log3 – log8, d) log(3:8) = log3 + log8 e e) log(3.8) = log3 + log8. A opção correta estava na letra e.

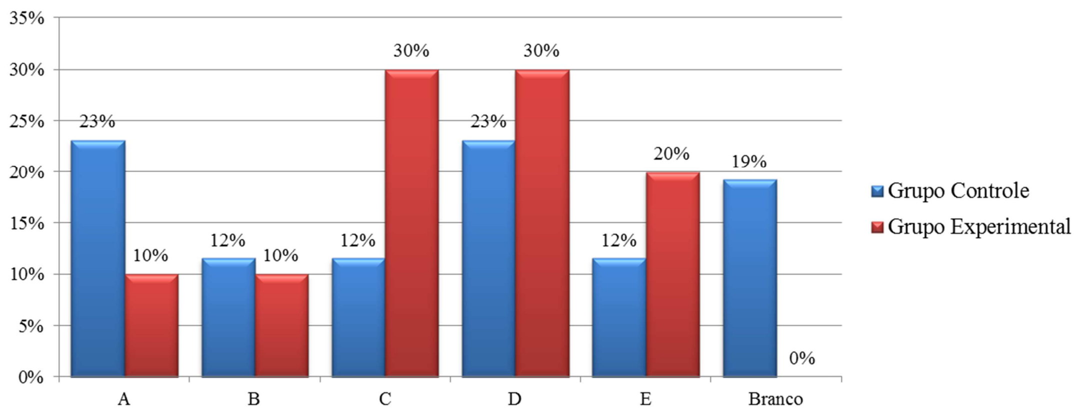
Gráfico 7 – Questão 3 (Avaliação)



Observamos que a questão teve grande acerto pelos dois grupos e que nenhum participante deixou a mesma em branco.

A questão seguinte (4), exigia que o participante soubesse aplicar as propriedades dos logaritmos em uma expressão numérica. A questão trazia: Calcule o valor de log30 + log70 – log21. As opções eram: a) – 1, b) 0, c) 1, d) 2 e e) 3. A resposta encontrava-se no item d.

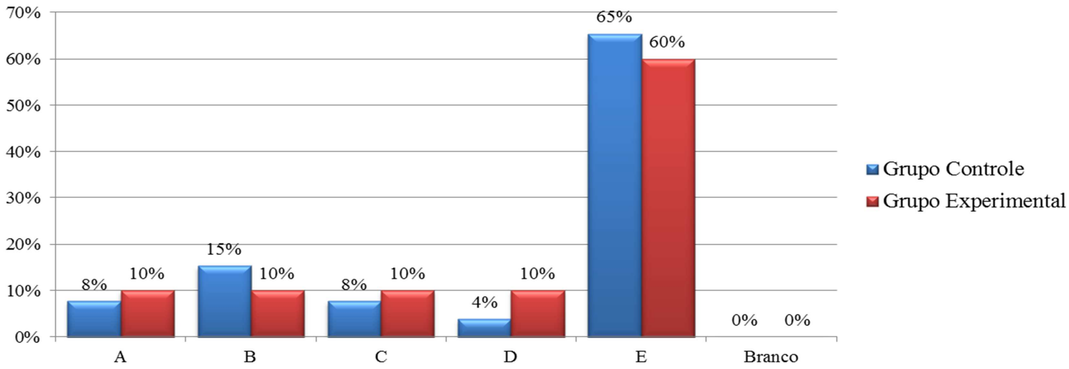
Gráfico 8 – Questão 4 (Avaliação)



Notamos uma dispersão nas respostas, com uma pequena vantagem para o grupo experimental (30% a 23%). Porém, o mesmo número de participantes do grupo experimental optou pelo item c e no grupo de controle, 23% dos participantes também optou pelo item a. Nenhum participante do grupo experimental deixou a questão em branco, mas 19% do grupo de controle optaram por não marcar item algum.

A questão 5 trazia algumas das consequências imediatas da definição de logaritmos. O participante deveria apenas reconhecer qual item trazia a igualdade correta. A questão era: Qual a opção correta? Os itens foram: a) $\log_5 1 = 5$, b) $\log_5 5 = 0$, c) $\log_5 5^7 = 5$, d) $5^{\log_5 8} = 5$ e e) $\log_5 x = \log_5 7 \Rightarrow x = 7$. O item correto era o item e.

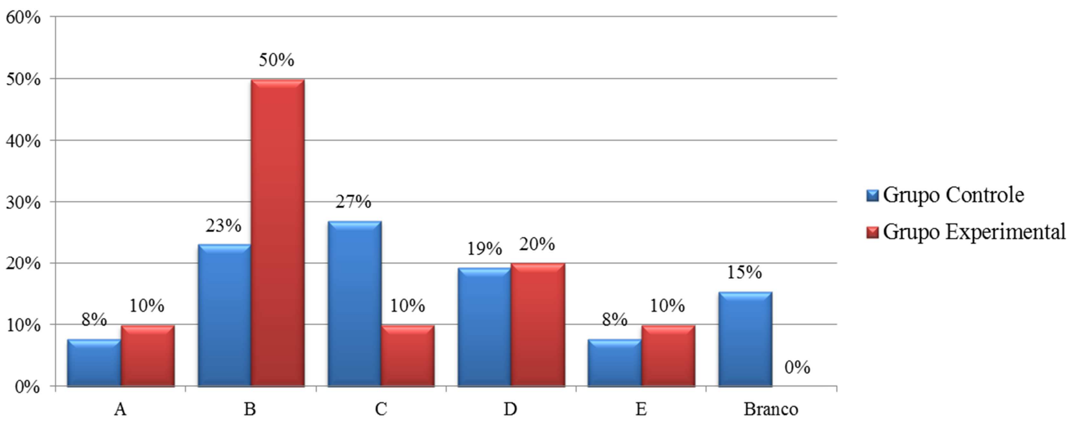
Gráfico 9 – Questão 5 (Avaliação)



Observamos que a questão teve grande acerto pelos dois grupos e que nenhum participante deixou a mesma em branco. O grupo de controle se sobressaiu com 65% de acertos contra 60% do grupo experimental.

Na questão 6, o participante deveria aplicar a definição dos logaritmos ou fazer uso das propriedades para resolver a questão. A questão trazia: Calcule $\log 2^{(\log_3 81)}$. Os itens eram: a) 1, b) 2, c) 3, d) 4 e e) 5. A resposta correta encontrava-se no item b.

Gráfico 10 – Questão 6 (Avaliação)

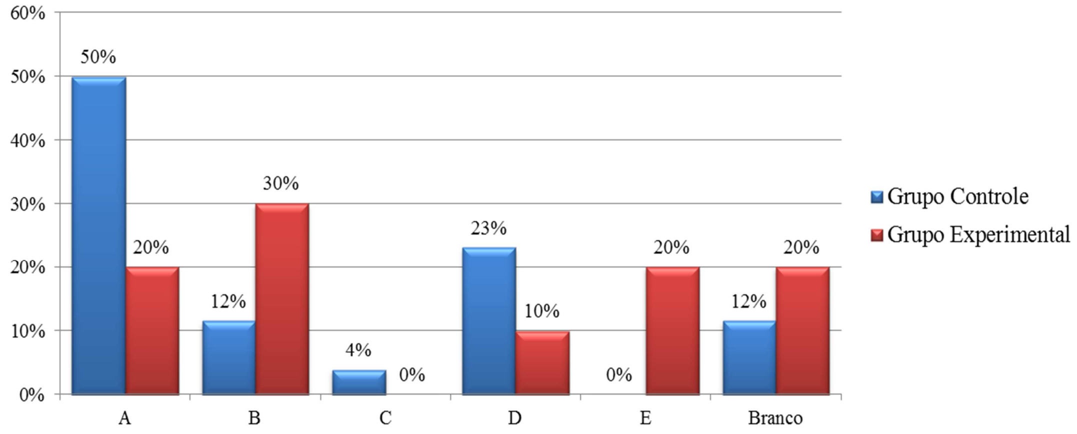


Observamos que poucos participantes do grupo experimental (23%) acertaram a questão, sendo que 27% do mesmo grupo optou pelo item c. Do grupo de controle 50% acertou e nenhum participante deixou a questão sem marcar algum item, 15% optaram por não marcar qualquer das opções. Notamos ainda uma dispersão nas respostas.

Na questão 7, o participante deveria aplicar as propriedades dos logaritmos para calcular um logaritmo dado. A questão era: Dados log2 = 0,3 e log3 = 0,4, calcule log6. Os itens eram: a) 0,7; b) 0,6; c) 0,4; d) 0,3 e e) 0,2. A opção com o valor correto era a do item a.

O participante deveria notar que log6 = log(2.3) = log2 + log3 = 0,3 + 0,4 = 0,7, marcando, então o item a.

Gráfico 11 – Questão 7 (Avaliação)

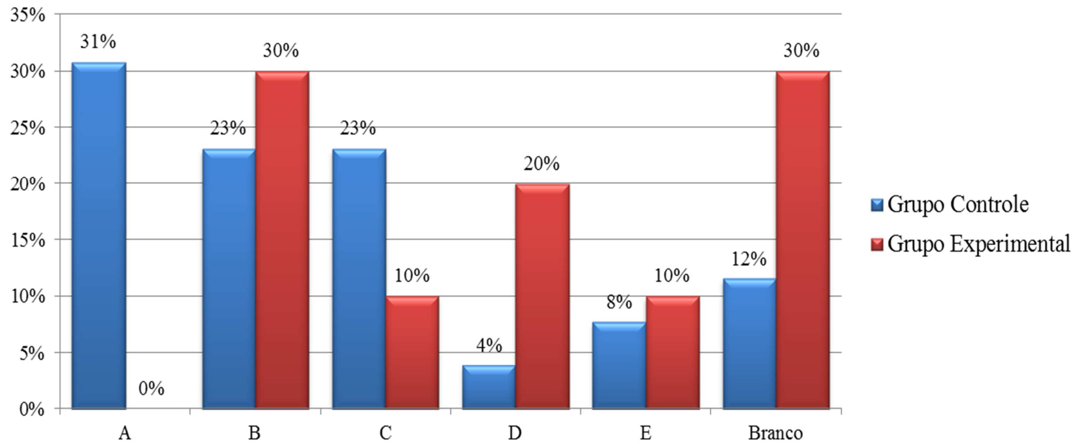


Observamos que poucos participantes do grupo experimental acertaram a questão (20%), enquanto que 50% do grupo de controle marcou a opção correta desta questão. Notamos ainda que 30% do grupo experimental optaram pelo item b e que 12% do grupo de controle e 20% do grupo experimental não escolheu qualquer item.

Assim como na questão 7, a questão 8 exigia que os participantes tivessem conhecimento das propriedades dos logaritmos para calcular o valor de um logaritmo dado. A questão era: Dados log2 = 0,3 e log3 = 0,4, calcule log72. Os itens eram: a) 2,1; b) 1,8, c) 1,7, d) 1,3 e e) 1,0. A opção com o valor correto era a de item c.

O participante deveria notar que $\log 72 = \log(2^3.3^2) = \log 2^3 + \log 3^2 = 3.\log 2 + 2.\log 3 = 3.(0,3) + 2.(0,4) = 1,7$, marcando, então o item c

Gráfico 12 – Questão 8 (Avaliação)

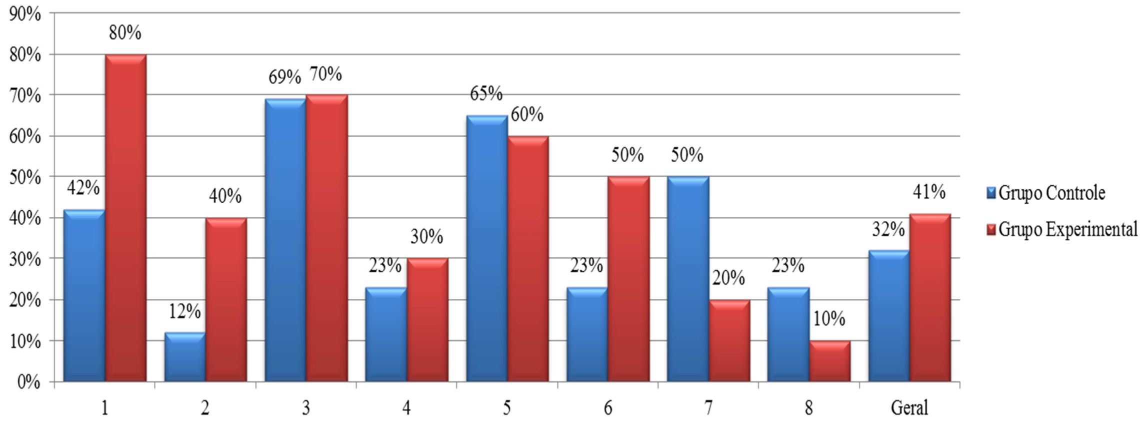


Novamente temos um maior índice de acertos do grupo de controle (23% contra 10%) com relação ao grupo experimental. 31% do grupo de controle optaram pelo item a e 30% do grupo experimental optaram pelo item b ou deixou em branco a questão.

5.2.3 Análise comparativa

Para saber qual grupo teve melhor desempenho fizemos uma comparação entre os resultados que serão demonstrados no gráfico abaixo.

Gráfico 13 – Análise comparativa do desempenho dos grupos controle e experimental



Notamos que o grupo experimental teve um melhor desempenho, de modo geral, porém nas duas últimas questões o percentual de acertos foi bem maior no grupo de controle.

Observamos que, no geral, o grupo de controle teve 32% de acertos e o grupo experimental 41%, tendo, assim, uma pequena vantagem para o segundo grupo. Esperávamos um desempenho maior do grupo experimental, porém o mesmo teve desempenho bem superior em três das questões, contra apenas um caso para o grupo de controle.

6 AVALIAÇÃO GERAL E CONCLUSÕES

Uma vez que a ideia seria utilizar um OA para facilitar a construção dos conceitos e propriedades dos logaritmos, notamos que o objetivo foi alcançado, pois esperávamos que pelo menos metade dos alunos respondessem a quatro ou mais das oito questões, o que ocorreu com o grupo experimental, fato que não ocorreu com o grupo de controle, pois quinze dos vinte e seis alunos acertaram menos de quatro questões.

Tivemos, mesmo assim, o maior número de acertos por um participante do grupo de controle (7 questões), que afirma trabalhar e estudar, sempre ter estudado em escola pública, nunca ter repetido de série e que classifica como ruim o seu conhecimento em matemática.

Como esperávamos as questões com menos acertos foram as que necessitavam da compreensão e aplicação das propriedades dos logaritmos.

Podemos concluir que o objetivo, que era investigar se o uso de objetos de aprendizagem pode facilitar o desenvolvimento de conteúdos em sala de aula, favorecendo a aprendizagem, foi alcançado, pois percebemos um desempenho superior dos participantes do grupo experimental, com relação aos participantes do grupo de controle. Sendo assim os participantes que tiveram as aulas com o OA obtiveram um maior desempenho.

Embora o desempenho não tenha sido muito superior, nos leva a crer que a utilização de objetos de aprendizagem venha a contribuir significativamente no aprendizado dos alunos.

Destacamos que na aplicação dessas aulas devemos contar com laboratórios bem equipados e que recebam uma turma completa, o que nem sempre ocorre nas nossas escolas.

Este estudo realizou uma avaliação em uma amostra pequena, deixando margens para estudos mais completos, que possam vir a contribuir para um maior dinamismo e aprendizagem nas aulas de matemática.

REFERÊNCIAS

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática através dos tempos**: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. 2.ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BERNARDES Jr, Nilson C.; Fernandez, Cecília S. **Introdução às funções de uma variável complexa**. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 1996.

CÁS, Danilo da. **Manual teórico-prático para elaboração metodológica de trabalhos acadêmicos**. São Paulo: Jubela livros, 2008.

EEEM LICEU DE MESSEJANA. **Histórico do Liceu de Messejana**. Disponível em: http://www.portalmessejana.com.br/liceu/ Acesso em 27/06/2013, às 10h15min.

______. **Portal Educandus**. Disponível em: http://liceudemessejana.blogspot.com.br/ Acesso em: 30/05/2013 às 09h10min.

______. **Portal e-jovem**. Disponível em: http://www.ed.net.br/ejovemce/portal/relatorio/ Acesso em: 30/05/2013 às 09h05min.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas, São Paulo: Unicamp, 2004.

FIORENTINI, D; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodologias. (3ª ed.). Campinas, São Paulo: Autores Associados, 2009.

LIMA, Elon Lages. **Logaritmos**. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo e MORGADO, Augusto César. **A matemática do ensino médio**. v. 1. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

PEREIRA, Alexandre. **Guia prático de utilização do SPSS**: análise de dados para ciências sociais e psicologia. 6. ed. Lisboa: Edições Sílabo, 2006.

PORTAL EDUCANDUS. Disponível em: http://www.educandus.com.br Acesso em: 30/05/2013, às 10h:00min.

TRIVIÑOS, Augusto Nibaldo Silva. **Introdução à pesquisa em ciências sociais**: a pesquisa qualitativa em educação. 1. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

APÊNDICE A – PRÉ-TESTE APLICADO COM OS ALUNOS

1) Aplicando as propriedades das potências, simplifique a expressão $(5^4.5^8):5^{10}$.
   a) 5
   b) 5^2
   c) 5^3
   d) 5^4

2) Calcule a potência $(3/4)^{-2}$.
   a) 3/4
   b) 4/3
   c) 9/16
   d) 16/9

3) Determine o valor de x na equação $2^x = 32$.
   a) 2
   b) 3
   c) 4
   d) 5

4) Determine o valor de x na equação $3^x = \frac{1}{81}$.
   a) – 4
   b) – 2
   c) 2
   d) 4

APÊNDICE B – PÓS-TESTE APLICADO COM OS ALUNOS

1) Qual a opção correta?
   a) $3^2.3^5 = 3^{10}$
   b) $3^2:3^5 = 3^{10}$
   c) $(3^2)^5 = 3^{10}$
   d) $3^2.3^5 = 3^{-3}$
   e) $3^2:3^5 = 3^7$

2) Sendo x > 0 e $log_3^X = 4$, x é igual a:
   a) 1
   b) 9
   c) 27
   d) 81
   e) 243

3) Qual a opção correta?
   a) log(3.8) = log3 . log8
   b) log(3:8) = log3 : log8
   c) log(3.8) = log3 - log8
   d) log(3:8) = log3 + log8
   e) log(3.8) = log3 + log8

4) Calcule o valor de log30 + log70 – log21.
   a) - 1
   b) 0
   c) 1
   d) 2
   e) 3

5) Qual a opção correta?
   a) $log_5^1 = 5$
   b) $log_5^5 = 0$
   c) $log_5^{5^7} = 5$
   d) $5^{log_5^8} = 5$
   e) $log_5^x = log_5^7 \Rightarrow x = 7$

6) Calcule $log_2^{(log_3^{81})}$.
   a) 1
   b) 2
   c) 3
   d) 4
   e) 5

7) Dados log2 = 0,3 e log3 = 0,4, calcule log6.

a) 0,7
b) 0,6
c) 0,4
d) 0,3
e) 0,2

8) Dados log2 = 0,3 e log3 = 0,4, calcule log72.
a) 2,1
b) 1,8
c) 1,7
d) 1,3
e) 1,0

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO SOCIOECONÔMICO

A seguir você preencherá um formulário socioeconômico com o acréscimo de algumas perguntas sobre cultura e educação.

Caso sinta-se incomodado (a) em responder a alguma pergunta do questionário, marque as alternativas de não declaração, mas não deixe de responder;

Favor preencher o questionário com sinceridade.

1. Idade (Anos completos)
   (1) 14
   (2) 15
   (3) 16
   (4) 17
   (5) 18
   (6) mais de 18.

2. Você mora na região:
   (1) Urbana (cidade)
   (2) Rural (fazenda, sítio, chácara, aldeia, vila agrícola, etc.).

3. Com quem você mora?
   (1) Pais
   (2) Parentes
   (3) Amigos
   (4) Outros
   (5) Sozinho (a).

4. Quantos irmãos?
   (0) Nenhum
   (1) Um
   (2) Dois
   (3) Três
   (4) Quatro
   (5) Cinco
   (6) Seis ou mais.

5. Até quando seu pai estudou?
   (0) Não estudou
   (1) Da 1ª à 5ª série do ensino fundamental (antigo primário)
   (2) Da 6ª à 9ª série do ensino fundamental (antigo ginásio)
   (3) Ensino médio (antigo 2º grau) incompleto
   (4) Ensino médio completo
   (5) Ensino superior incompleto
   (6) Ensino superior completo
   (7) Pós-graduação
   (8) Não sei.

6. Até quando sua mãe estudou?
   (0) Não estudou
   (1) Da 1ª à 5ª série do ensino fundamental (antigo primário)
   (2) Da 6ª à 9ª série do ensino fundamental (antigo ginásio)
   (3) Ensino médio (antigo 2º grau) incompleto
   (4) Ensino médio completo
   (5) Ensino superior incompleto
   (6) Ensino superior completo
   (7) Pós-graduação
   (8) Não sei.

7. Atualmente você:
   (1) Apenas estuda
   (2) Trabalha e estuda

8. Qual é a renda familiar mensal?
   (1) Menos de 1 salário mínimo (até R$678)
   (2) Acima de um até dois salários mínimos (entre R$679 e R$1.356)
   (3) Acima de dois até cinco salários mínimos (entre R$1.357 e R$3.390)
   (4) Acima de cinco até dez salários mínimos (entre R$3.391 e R$6.780)
   (5) Acima de dez salários mínimos (acima de R$6.780)
   (6) Não sei informar.

9. Qual a sua participação na vida econômica do grupo familiar?
   (1) Não trabalho e sou sustentado por minha família ou outras pessoas
   (2) Trabalho e sou sustentado parcialmente por minha família ou outras pessoas
   (3) Trabalho e sou responsável apenas por meu próprio sustento
   (4) Trabalho, sou responsável por meu próprio sustento e ainda contribuo parcialmente para o sustento da família
   (5) Trabalho e sou o principal responsável pelo sustento da família
   (6) Outra situação.

10. Quantas pessoas (contando com você) contribuem para a renda da sua família?
    (1) Uma
    (2) Duas
    (3) Três
    (4) Quatro
    (5) Cinco
    (6) Seis
    (7) Mais de seis.

11. Em que tipo de escola você estudou?
    (1) Somente em escola pública
    (2) Maior parte em escola pública
    (3) Somente em escola particular
    (4) Maior parte em escola particular.

12. Você já repetiu alguma série?
    (0) Não
    (1) Sim.

13. O acesso a computadores e outros recursos de Informática na sua Escola é:
    (1) Insuficiente a Regular
    (2) Regular a Bom
    (3) Bom a excelente.

14. Quantos livros, em média, você costuma ler por ano?
    (0) Nenhum
    (1) Um livro
    (2) De 2 a 5 livros
    (3) De 6 a 10 livros
    (4) De 11 a 15 livros
    (5) De 16 a 20 livros
    (6) De 21 a 30 livros
    (7) Mais do que 30 livros

15. Quantos computadores têm na sua casa?
    (0) Nenhum
    (1) um
    (2) dois ou mais.

16. Você possui internet?
    (0) Não
    (1) Sim.

17. Como você classifica o seu conhecimento de Informática?
    (1) Muito bom
    (2) Bom
    (3) Ruim
    (4) Muito ruim.

18. Como você classifica o seu conhecimento de Matemática?
    (1) Muito bom
    (2) Bom
    (3) Ruim
    (4) Muito ruim.

Agradeço a sua colaboração!

APÊNDICE D – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

OBJETOS DE APRENDIZAGEM: UMA ESTRATÉGIA PARA FACILITAR A COMPREENSÃO DE LOGARITMOS

Eu, ____ abaixo assinado, concordo em participar da presente pesquisa.

O pesquisador manterá sigilo absoluto sobre as informações aqui prestadas, assegurará o meu anonimato quando da publicação dos resultados da pesquisa, além de me dar permissão de desistir, em qualquer momento, sem que isto me ocasione qualquer prejuízo para a qualidade do atendimento que me é prestado, caso sinta qualquer constrangimento por alguma pergunta ou simplesmente me queira retirar dela.

A pesquisa será realizada pelo mestrando **Ricardo de Carvalho Oliveira**, aluno do mestrado da Universidade Federal do Ceará e orientada pelo professor Doutor Jonatan Floriano da Silva.

Fui informado(a) que posso indagar o pesquisador se desejar fazer alguma pergunta sobre a pesquisa, pelo telefone: (858) 89197555, endereço: ***Rua Antônio Teixeira leite, 54 – Bairro Serrinha Fortaleza – Ceará*** e que, se por tal me interessar, posso receber os resultados da pesquisa quando esses forem publicados. O consentimento prévio dado pelo(a) colaborador(a) cujo nome e informações serão guardados pelo pesquisador e, em nenhuma circunstância, eles serão dados a conhecer a outras pessoas alheia ao estudo, a não ser que o(a) colaborador(a) o consinta, por escrito.

Assinatura do (a) participante: ____

Fortaleza/Ceará, 10 de Janeiro de 2013

Ricardo de Carvalho Oliveira
Pesquisador Mestrando

Professor Doutor Jonatan Floriano da Silva
Orientador Científico