



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**RAIMUNDO IVAN DE OLIVEIRA JÚNIOR**

**LOCALIZAÇÃO DA AÇÃO DE MILICARGAS E ESCALA UNIVERSAL DE MASSA  
PARA CAMPOS BOSÔNICOS ATRAVÉS DO ACOPLAMENTO GEOMÉTRICO**

**FORTALEZA**

**2021**

RAIMUNDO IVAN DE OLIVEIRA JÚNIOR

LOCALIZAÇÃO DA AÇÃO DE MILICARGAS E ESCALA UNIVERSAL DE MASSA  
PARA CAMPOS BOSÔNICOS ATRAVÉS DO ACOPLAMENTO GEOMÉTRICO

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

FORTALEZA  
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- O511 Oliveira Junior, Raimundo Ivan de.  
Localização da ação de milicargas e escala universal de massa para campos bosônicos através do acoplamento geométrico / Raimundo Ivan de Oliveira Junior. – 2021.  
122 f. : il. color.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2021.  
Orientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.  
Coorientação: Prof. Dr. Makarius Oliveira Tahim.
1. Acoplamento Geométrico. 2. Milicargas. 3. Multi-Localização. 4. Multi-Branas. 5. Massa Universal.  
I. Título.

CDD 530

---

RAIMUNDO IVAN DE OLIVEIRA JÚNIOR

LOCALIZAÇÃO DA AÇÃO DE MILICARGAS E ESCALA UNIVERSAL DE MASSA  
PARA CAMPOS BOSÔNICOS ATRAVÉS DO ACOPLAMENTO GEOMÉTRICO

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 21/07/2021.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Makarius Oliveira Tahim  
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

---

Prof. Dr. Ivan Carneiro Jardim  
Universidade Regional do Cariri (URCA)

---

Prof. Dr. Raimundo Nogueira Costa Filho  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Wendel Macedo Mendes  
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

Dedico esse trabalho a minha querida mãe:  
Luzia Oliveira Lima (Ciene)

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por me dar forças para continuar enfrentando os obstáculos.

A toda minha família, em especial minha querida mãe e meu irmão Stênio, pelo apoio incondicional.

Ao professor Dr. Makarius Oliveira Tahim, por sempre ter me incentivado a prosseguir na carreira acadêmica.

Ao professor Dr. Geová Maciel de Alencar Filho, pela paciência e disponibilidade em me ajudar.

Ao professor Dr. Carlos William de Araújo Paschoal, por me ajudar em um dos momentos mais difíceis durante essa jornada.

Ao meu grande amigo/irmão Francisco Gilvane Sampaio de Oliveira, por dividir comigo os momentos de alegria e também de tristeza.

A todos os integrantes do CREU/LARRICA: Raúl Crowley, Rodrigo Almeida, Francisco Emmanuel, Wendel Macedo, Emanuel Wendel, Luiz Felipe, Jason, Stanley Frota, Ancelmo Pinheiro, Márcio, Otávio, Augusto, Leonardo, Pedro Henrique, Ícaro e Fernando, pelas várias discussões que ajudaram fortemente na minha formação.

Aos meus amigos Raúl Crowley, Luiz Felipe e Rodrigo Almeida, por serem verdadeiros mentores durante essa caminhada.

A coordenação do programa de Pós-graduação em Física, por fornecer todo o material e apoio necessário sempre que os solicitei.

A todos os professores e funcionários do departamento que participaram, direta ou indiretamente, na minha formação.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ) e a Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP), pelo apoio financeiro.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## RESUMO

Nesta tese estudamos como o acoplamento geométrico pode ser usado para localizar um modelo com mistura de termos cinéticos, e também gerar uma escala universal de massa para campos bosônicos. A mistura de termos cinéticos é uma teoria para partículas com milicargas, proposta por Holdom em 1985, e que tem sido objeto de estudo no LHC. Propomos o acoplamento geométrico entre os campos de gauge, o escalar de Ricci e o tensor de Ricci. Mostramos que é possível localizar tal modelo se considerarmos valores específicos para as constantes de acoplamento. Encontramos as soluções para os dois campos, e discutimos a localização das componentes escalares que aparecem naturalmente no processo. Mostramos que não necessariamente os campos de gauge e escalar são localizados simultaneamente. Também, encontramos uma escala universal de massa para toda  $q$ -forma no modelo de multi-branas. Isto é um fato conhecido que esse modelo gera um modo ultraleve para os campos. No entanto, para obter isso, as Lagrangianas consideradas na literatura não são covariantes. Para resolver isso, propomos uma versão covariante, com o acoplamento geométrico, para multi-localizar a  $q$ -forma. Como consequência da covariância, mostramos que todas as  $q$ -formas têm um modo ultraleve com a mesma massa que o campo gravitacional. Dessa forma mostramos que existe uma escala universal de massa para os modos ultraleves dos campos bosônicos. Isso sugere que uma nova Física deve surgir, para todos esses campos, na mesma escala. Depois disso, revisitamos os resultados que consideram o cristal manifold background no cenário Randall-Sundrum (RS), e adicionamos a discussão do acoplamento geométrico em tal configuração. A função de onda dos campos presos no cristal são do tipo ondas de Bloch, e seu comportamento é bem semelhante ao de elétrons em uma rede cristalina, como no modelo Kronig-Penney (KP). Calculamos a relação de dispersão de massa para esses campos, com e sem o acoplamento com o dÍlaton. Isso leva a novos resultados para a estrutura de bandas dos campos. No caso do campo de Kalb-Ramond, e com a relação de dispersão correta, não existe gap entre as bandas. Também, sempre que os campos estão acoplados com o dÍlaton, seus primeiros modos de massa decrescem. Quando a generalização para a  $q$ -forma é feita, mostramos que não é possível gerar ou suprimir massa para os campos controlando o acoplamento com o dÍlaton, diferentemente do que é mostrado na literatura.

**Palavras-chave:** Acoplamento Geométrico; Milicargas; Multi-Localização; Multi-Branas; Massa Universal.

## ABSTRACT

In this thesis we study how geometrical coupling can be used to localize a model with kinetic gauge mixing, and also generate an universal mass scale for bosonic fields. The kinetic mixing is a theory for millicharged particles, proposed by Holdom in 1985, and that has been object of study in the LHC. We propose a geometrical coupling between the gauge fields, the Ricci scalar and the Ricci tensor. We show that it is possible to localize such a model by regarding specific values for the coupling constants. We find the solutions for the two gauge fields, and discuss the localization for scalar components that appears naturally in the process. We show that not necessarily the gauge and scalar fields are localized simultaneously. Also, we find an universal mass scale for all  $p$ - forms in multi-brane worlds models. It is a known fact that this model provides an ultralight mode for the fields. However, to get this, the Lagrangians considered in the literature are not covariant. In order to solve this, we propose a covariant version, with the geometrical coupling, to multi-localize  $q$ -form fields. As a consequence of the covariance, we show that all the  $q$ -form fields have an ultralight mode with the same mass that the gravitational one. That way we show that there is an universal mass scale for the ultralight modes of the bosonic fields. This suggests that a new physics must emerge, for all theses fields, at the same scale. After that, we revisit the results that consider a crystal manifold background in the Randall-Sundrum scenary (RS), and add the discussion related to geometrical couplings in such a configuration. The wave functions of fields trapped in the crystal are Bloch-like waves, and their behavior is very similar to electrons inside a lattice, just like in the Kronig-Penney model (KP). We compute the mass dispersion relations for those fields with and without a dilaton coupling. It leads to new results for the band gap structure of these fields. In the case of the Kalb-Ramond field, and with the correct dispersion relation, there is no gap between the mass bands. Also, always that the field is coupled with the dilaton, its first mass mode decreases. When the generalization to the  $q$ -form is done, we show that it is not possible to suppress or generate mass for the fields by controlling the dilaton coupling, differently of what is showed in the literature.

**Keywords:** Geometrical Coupling; Millicharge; Multi-Localization; Multi-Branes; Universal Mass.

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros para os casos sem o dÍlaton . . . . .	107
Tabela 2 – Parâmetros para os casos com o dÍlaton . . . . .	107
Tabela 3 – Valores de massa . . . . .	110

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – O cenário Randall Sundrum . . . . .	28
Figura 2 – Orbifold . . . . .	29
Figura 3 – Hierarquia entre as escalas . . . . .	34
Figura 4 – Potencial Gravitacional $V(z)$ . . . . .	37
Figura 5 – Localização do gráviton em torno da brana de Planck . . . . .	39
Figura 6 – Fator de dobra Modelo Randall Sundrum . . . . .	48
Figura 7 – Fator de dobra modelo suavizado . . . . .	48
Figura 8 – Escalar de Ricci no modelo suavizado . . . . .	49
Figura 9 – (Adaptado de [44].) . . . . .	71
Figura 10 – Adaptado de [46]. Comparação entre os espectros gravitacionais . . . . .	73
Figura 11 – Um trecho do cristal 1-D (Duas células adjacentes) . . . . .	92
Figura 12 – Os modos de massa mais baixos para o campo gravitacional com ambas as relações de dispersão. . . . .	98
Figura 13 – Comparação para os modos de massa para as duas relações de dispersão. A curva sólida é a nossa relação, enquanto que a tracejada é a dispersão calculada por [47]. . . . .	99
Figura 14 – Os modos de massa mais baixos para o campo gravitacional com o dÍlton são apresentados em (a). A curva tracejada é o plote com a relação de dispersão errada, e a curva sólida com a correta. Em (b), temos o valor para o primeiro modo de massa usando nossa relação. Em c), mostramos o primeiro modo de massa para a relação de dispersão (6.35). . . . .	100
Figura 15 – Os menores valores de massa para o campo escalar com o dÍlton são representados em (a). A curva tracejada é o plote com a relação de dispersão incorreta, e a curva sólida o plote com a correta. Em (b), temos o primeiro modo de massa para nossa relação. Em c), o primeiro modo para a relação antiga. . . . .	102
Figura 16 – Os menores valores de massa para o campo de gauge livre são apresentados em (a). A curva tracejada é o plote com a relação de dispersão errada, e a sólida o plote com a relação correta. c) O primeiro modo para a relação incorreta. . . . .	103
Figura 17 – Os menores valores de massa para o campo de gauge com o dÍlton são apresentados em (a). A curva tracejada é o plote com a relação de dispersão incorreta, e a sólida o plote para a correta. Em (b), temos nosso primeiro modo. Em c) o modo encontrado com a relação de dispersão (6.35). . . . .	104

Figura 18 – Os menores valores de massa para o campo de Kalb-Ramond com o dÍlaton são mostrados em (a). A curva tracejada é o plote com a relação de dispersão incorreta, e a sÓlida o plote com a correta. Em (b), O primeiro modo no nosso caso. Em c), o primeiro modo para a dispersão encontrada em [47]. . . . .	105
Figura 19 – A dispersão de massa pela ordem da função de Bessel( Aqui $q$ representa o vetor de onda.) . . . . .	106
Figura 20 – Os menores valores de massa pela distância entre as branas. . . . .	106
Figura 21 – Os menores modos de massa com o acoplamento geométrico (campo de gauge), e os primeiros modos de massa. Em b), o primeiro modo de massa para o acoplamento apenas com o escalar de Ricci. Em c), o primeiro modo de massa para o acoplamento apenas com o tensor de Ricci. . . . .	108
Figura 22 – Os valores de massa permitidos com o acoplamento geométrico(campo de Kalb-Ramond). Em b), o primeiro modo quando o campo é acoplado apenas com o tensor de Ricci. . . . .	109

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\eta_{\mu\nu}$	Métrica do espaço de Minkowsky
$g_{\mu\nu}$	Métrica do espaço curvo
$\Phi$	Campo Escalar
$g_{MN}$	Métrica do espaço curvo $D$ dimensional
$\mu, \nu, \dots$	Índices de Lorentz
$g$	Determinante da métrica
$\sqrt{-g}d^Dx$	Elemento de volume, invariante por transformações gerais de coordenadas
$\mathcal{L}^m$	Lagrangiana de matéria
$T_{MN}$	Tensor de energia momento
$\Gamma_{BC}^A$	Símbolo de Cristoffel em $D$ dimensões
$R_{MN}$	Tensor de Ricci
$R$	Escalar de Ricci
$G_{MN}$	Tensor de Einstein
$\pi(y)$	Dílaton
$W(\phi)$	Função superpotencial
$I$	Integral de Localização
$A_M$	Campo de gauge em $D$ dimensões
$A_{MN}$	Campo de Kalb Ramond em $D$ dimensões
$A_{M_1, \dots, M_q}$	$q$ -forma em $D$ dimensões
$F_{MN}$	Field Strength do campo de gauge
$F_{MNP}$	Field Strength do campo de Kalb Ramond
$F_{M_1, \dots, M_{q+1}}$	Field Strength da $q$ -forma
$V(\phi, \pi)$	Potencial com dois campos escalares
$r_c$	Raio de compactificação
$Z_2$	Grupo discreto $\{-1, 1\}$
$U(z), V(z)$	Potencial da equação tipo Schrodinger
$\tilde{\gamma}_{MN}$	Métrica de KK em 5 dimensões
$x^\mu$	Conjunto de coordenadas em 4 dimensões
$g_{\mu\nu}^{vis/ocu}$	Métrica induzida na brana
$\Lambda$	Constante cosmológica
$M_{PL}$	Massa de Planck
$M_{EW}$	Massa eletrofraca

$h_{\mu\nu}$	Flutuações tensoriais no espaço de Minkowski
$\psi(z)$	Função de onda da dimensão extra
$\zeta$	Função dente de serra
$m_{gap}$	Massa de gap
$\Gamma$	Largura das bandas
$\Delta\Gamma$	Distância entre as bandas
$\mathcal{L}^b$	Lagrangeana que forma a brana

## LISTA DE SIGLAS

FUNCAP	Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico
CNPQ	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
KK	Kaluza-Klein
TGU	Teorias de Grande Unificação
ADD	Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali
RS	Randall-Sundrum
KP	Kroning-Penney
MP	Modelo Padrão
RG	Relatividade Geral
EE	Equações de Einstein

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	17
<b>2</b>	<b>A IDEIA DE DIMENSÕES EXTRAS</b>	23
<b>2.1</b>	<b>Kaluza-Klein</b>	23
<b>2.2</b>	<b>Arkani-Hammed, Dimopoulos e Dvali (ADD)</b>	27
<b>2.3</b>	<b>Modelos Randall Sundrum</b>	28
<b>2.3.1</b>	<b><i>O modelo Randall Sundrum Tipo I</i></b>	28
2.3.1.1	A Configuração do Modelo	28
2.3.1.2	A métrica	29
2.3.1.3	Dinâmica	30
2.3.1.4	Implicações Físicas	32
<b>2.3.2</b>	<b><i>O modelo Randall Sundrum Tipo II</i></b>	34
2.3.2.1	Modos Gravitacionais	34
2.3.2.2	Equações de Einstein Linearizadas	35
2.3.2.3	Equação Tipo Schrodinger	36
2.3.2.4	Modo-Zero	37
2.3.2.5	Modos Massivos	38
2.3.2.6	Espectro Gravitacional	40
2.3.2.7	Limite Newtoniano	41
<b>3</b>	<b>REVISÃO DE LOCALIZAÇÃO DE CAMPOS BOSÔNICOS E CONDIÇÕES DE CONSISTÊNCIA</b>	43
<b>3.1</b>	<b>Campo Escalar</b>	43
<b>3.2</b>	<b>Campo de Gauge</b>	44
<b>3.3</b>	<b>Modelos para a Localização do campo de gauge</b>	45
<b>3.3.1</b>	<b><i>Gerando a P-brana</i></b>	47
<b>3.3.2</b>	<b><i>Aoplamento com o Dilaton</i></b>	50
<b>3.3.3</b>	<b><i>Localização do campo de gauge usando o dilaton</i></b>	51
<b>3.3.4</b>	<b><i>Aoplamento Geométrico</i></b>	52
<b>3.4</b>	<b>Encontrando as relações de Consistência</b>	53
<b>3.5</b>	<b>Testando os modelos de Multi-branas</b>	55
<b>3.5.1</b>	<b><i>Campo Escalar</i></b>	55
<b>3.5.2</b>	<b><i>Campo de Gauge</i></b>	56
<b>3.5.3</b>	<b><i>Campo de Kalb Ramond</i></b>	57

3.5.4	<i>q</i> -forma . . . . .	58
3.6	<b>Modelos Com Dois Acoplamentos</b> . . . . .	59
3.6.1	<i>Campo de gauge</i> . . . . .	59
3.6.2	<i>Campo de Kalb-Ramond</i> . . . . .	59
3.6.3	<i>q</i> -forma . . . . .	60
4	<b>LOCALIZAÇÃO DE UM MODELO COM DOIS CAMPOS DE GAUGE</b>	61
4.1	<b>Dois Campos de Gauge em 5 Dimensões com Acoplamento Mínimo</b> . . . . .	61
4.2	<b>Os Campos de gauge com Acoplamento Não-Mínimo</b> . . . . .	63
4.3	<b>Acoplamento com o Tensor de Ricci</b> . . . . .	66
4.4	<b>A Componente Escalar</b> . . . . .	67
5	<b>MULTI-LOCALIZAÇÃO DE CAMPOS BOSÔNICOS</b> . . . . .	70
5.1	<b>Revisão do Modelo (+ - +)</b> . . . . .	70
5.1.1	<i>O Campo Gravitacional</i> . . . . .	70
5.1.2	<i>O Campo Escalar</i> . . . . .	73
5.1.3	<i>O Campo de Gauge</i> . . . . .	75
5.2	<b>Multi-Localização Covariante de Campos Bosônicos no Modelo (+ - +)</b> .	76
5.2.1	<i>Multi-Localização com Quantidades Geométricas</i> . . . . .	76
5.2.1.1	O campo Escalar . . . . .	76
5.2.1.2	O Campo de Gauge . . . . .	78
5.2.1.3	O Campo de Kalb-Ramond . . . . .	81
5.2.1.4	Generalização para o campo de <i>q</i> -forma . . . . .	84
5.2.2	<i>Multi-Localização com o DÍLATON</i> . . . . .	86
5.2.2.1	O Campo Escalar . . . . .	87
5.2.2.2	O Campo de Gauge . . . . .	87
5.2.2.3	O Campo de Kalb Ramond . . . . .	88
5.2.2.4	<i>q</i> -forma . . . . .	89
6	<b>REVISITANDO CAMPOS BOSÔNICOS NO CRISTAL MANIFOLD</b> . .	90
6.1	<b>O Campo Gravitacional Livre</b> . . . . .	90
6.2	<b>O Campo Gravitacional com o DÍLATON</b> . . . . .	99
6.3	<b>O Campo Escalar, de Gauge, Kalb-Ramond e <i>q</i>-forma.</b> . . . . .	101
6.3.1	<i>O Campo Escalar</i> . . . . .	101
6.3.2	<i>O Campo de Gauge</i> . . . . .	102
6.3.3	<i>O Campo de Kalb Ramond</i> . . . . .	104
6.3.4	<i>A q-Forma</i> . . . . .	105
6.4	<b>Campos Bosônicos no Cristal Manyfold (Com acoplamento não-mínimo)</b> .	107
6.4.1	<i>O campo de gauge</i> . . . . .	107

6.4.2	<i>O Campo de Kalb-Ramond</i> . . . . .	109
7	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	111
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	114
	<b>APÊNDICE A – ESPECTRO DE MASSA</b> . . . . .	121

## 1 INTRODUÇÃO

A ideia de unificação sempre esteve presente na Física. Já no início do século XVII Isaac Newton propôs que as leis que governam o céu e a terra eram as mesmas [1]. Ele afirmava que a força que atuava sobre os planetas, era a mesma que agia sobre uma maçã caindo de uma macieira. Dessa forma Newton estava estabelecendo a primeira lei de unificação, chamada de gravitação universal. Outra importante unificação foi feita por Maxwell no início do século XIX [2]. Ele conseguiu juntar a teoria eletromagnética com a óptica. Maxwell manipulou matematicamente suas equações, e mostrou que elas se resumiam a uma equação de onda que se propaga com a velocidade da luz. Mais tarde, Hertz produziu um experimento que confirmava o modelo teórico de Maxwell.

A próxima unificação importante foi entre a interação fraca (responsável pelo decaimento das partículas) e a interação eletromagnética. Em 1979, já com as quatro interações fundamentais estabelecidas, os físicos Sheldo Glashow, Abdus Salam e Stevem Weinberg ganharam o prêmio nobel por conseguir unificar as interações eletromagnética e fraca [3]. Essa interação ficou conhecida como eletrofraca. Na escala de energia do nosso cotidiano elas parecem duas interações distintas. No entanto, para uma escala de energia da ordem de  $10^2 GeV$  elas são englobadas em uma única. Matematicamente, a unificação é feita com os grupos de gauge  $SU(2) \times U(1)$ , sendo o primeiro grupo pertencendo a interação fraca e o segundo a interação eletromagnética. Visto que é possível unificar a teoria eletromagnética com a fraca, os físicos propuseram que seria possível unificar a interação eletrofraca com a forte (presente no núcleo dos átomos). Essa seria uma teoria de grande unificação (TGU). Essa nova interação é caracterizada por um grupo de gauge ainda maior, possuindo várias partículas transportadoras de informação. Apesar do grande número de partículas mediadoras, existe apenas uma constante de acoplamento.

O próximo passo seria juntar a gravidade com essas outras três interações. No entanto, essa tarefa não é fácil. Uma vez que as outras três interações discutidas anteriormente são uma teoria de campos onde a gravidade é o background, enquanto que a gravidade é a geometria do espaço tempo. Na tentativa de unificar gravidade com eletromagnetismo, Theodor kaluza e Oscar Klein (KK) propuseram um modelo com uma dimensão espacial extra compacta [4]. Nesse modelo o espaço com cinco dimensões teria apenas gravidade, que em quatro dimensões se tornaria a gravidade usual e o eletromagnetismo. A teoria de KK apresentava alguns problemas, como por exemplo a estabilização do raio da dimensão extra e a presença de um campo escalar na teoria efetiva, que entra em contradição com as equações de Maxwell. Embora apresentasse problemas, a teoria de KK serviu como base para outras teorias de unificação;

supercordas, super-gravidade e teoria M.

Como vimos, as interações fraca, eletromagnética e forte podem ser unificadas. A unificação dessas teorias da origem a um famoso modelo na Física teórica chamado de modelo padrão das partículas elementares. De acordo com ele existem quatro interações fundamentais na natureza, a saber: Forte, fraca, eletromagnética e gravitacional. Nele existem basicamente dois tipos de partículas: Os férmions e os bósons. Os primeiros são partículas com spin semi-inteiro enquanto que os bósons tem spin inteiro. De maneira simples, os férmions são as partículas que constituem a matéria e os bósons são as partículas que transmitem as forças. Este modelo é uma teoria de campos consistente com a mecânica quântica e a relatividade especial [5]. Ele consegue descrever muito bem as interações forte, fraca e eletromagnética, mas falha ao tentar descrever a gravidade. Esse é apenas um de seus problemas, ele possui muitos outros, de caráter experimental e teórico.

Um dos problemas do modelo padrão é o problema da hierarquia de gauge. Basicamente esse problema está relacionado com a diferença de escalas de energia entre as interações do modelo padrão e a gravidade. A escala de energia do modelo padrão é a escala  $TeV$  ( $10^3$ ) $GeV$ , enquanto que a escala de energia na qual a interação gravitacional se torna tão forte quanto as demais é a escala de Planck ( $10^{19}$ ) $GeV$ . As duas propostas de solução mais famosas para esse problema foram dadas por Arkani Hamed, Dimopoulos e Dvali (ADD) [6] em 1998 e Lisa Randall e Raman Sundrum (RS) [7, 8] em 1999. No primeiro trabalho a solução encontrada foi supor que a escala fundamental da teoria seria  $M_* = 1TeV$ , com isso não existiria hierarquia entre a escala da gravidade e do modelo padrão, que também é de  $1TeV$ . Porém, com essa proposta surgiu uma nova hierarquia entre o tamanho da dimensão extra e a escala natural. No segundo trabalho, os autores propuseram um modelo onde eles supunham a existência de uma dimensão extra tipo espaço. Eles propunham uma configuração com duas hiper-superfícies denominadas branas e a dimensão extra sendo perpendicular a essas branas. Uma das branas está na escala de Planck (brana positiva) e outra na escala  $TeV$  (brana negativa). A métrica considerada por eles possui um fator exponencial que faz com que uma hierarquia de energia surja naturalmente. Embora esse modelo consiga resolver o problema da hierarquia, em seu desenvolvimento ele cria outros problemas. Ao longo dos trabalhos os autores propõem que o único campo que está livre para mover-se ao longo da dimensão extra é a gravidade, todos os outros ficariam confinados nas membranas. Porém, eles não sugerem nenhum mecanismo de localização para esses campos. Em especial, o confinamento do campo de gauge é uma dos mais complicados.

A partir de então, muitos trabalhos propondo mecanismos de localização para o campo vetorial apareceram [9–19, 21, 22]. A essência de todos esses mecanismos é modificar a ação do campo eletromagnético. Em um deles, alguns autores introduziram o acoplamento

com o dÍlaton [10]. A maioria desses modelos introduzem outros campos ou não-linearidades para o campo de gauge [14]. Alguns anos atrás, Ghoruku et al propuseram um mecanismo que não inclui novos graus de liberdade e localiza o campo de gauge na membrana [12]. Isso é baseado na adição de dois termos de massa, um no bulk e outro na brana  $(M^2 + c\delta(z))A_M A^M$ . Apesar de funcionar, o mecanismo não é covariante sob uma transformação geral de coordenadas. Além disso, ele tem a característica indesejável de possuir dois parâmetros livres. No intuito de resolver os problemas acima, os autores dos trabalhos [16, 18] criaram o acoplamento geométrico. Eles perceberam que o termo acima pode ser obtido de uma ação no bulk  $\lambda_1 R(x) A_M A^M$ , onde  $R$  é o escalar de Ricci. Além de resolver o problema de covariância, isso também elimina de início um dos parâmetros livres. O último é fixado pelas condições de contorno, deixando o modelo sem parâmetros livres. O mecanismo também tem a vantagem de não adicionar novos graus de liberdade no modelo. Pouco tempo depois muitos desenvolvimentos da ideia foram apresentados [23–29]. Em um desses, o acoplamento foi generalizado por [22]

$$\lambda_1 R(x) A_M A^M + \lambda_2 R(x)_{MN} A^M A^N,$$

e ganhamos um novo parâmetro indeterminado. No entanto, recentemente, Freitas *et al* mostrou que o novo parâmetro pode ser fixado através de condições de consistência com as equações de Einstein [30]. De fato, os autores encontraram que todos os parâmetros são fixados para qualquer  $q$ -forma com o acoplamento acima.

Quando falamos de localização do campo, estamos nos referindo ao modo zero do mesmo. No entanto, além desse modo, quando se faz a redução dimensional temos vários modos massivos. E o estudo desses modos pode ser feito sempre buscando analogias com a Física da matéria condensada. As equações que estaremos lidando são do tipo Schrödinger, que para cada situação vai possuir um potencial diferente. A primeira situação que podemos descrever é a de elétrons movendo-se no interior de sólidos. Quando tais partículas se movem dentro de sólidos, eles experimentam um potencial devido aos íons da rede cristalina. Então, os elétrons são submetidos a um potencial periódico dentro dessa rede. A forma mais simples de descrever esse sistema é o modelo de Kronig-Penney [31], que é baseado na ideia de Bloch [32]: a interação dos elétrons com as partículas em um cristal unidimensional pode ser aproximada por um potencial periódico. Resolvendo a equação tipo Schrödinger com esse potencial, pode-se encontrar as energias permitidas do sistema e expressões analíticas para a relação de dispersão. Com isso em mãos, é possível encontrar que alguns valores de energia não são permitidos, chamado de estrutura de bandas. Esse tipo de comportamento tem consequências importantes em matéria condensada, no cálculo da condutividade, por exemplo. Os modos massivos podem ter picos de probabilidade sob a brana e aparecerem como ressonância, que nos informa sobre modos instáveis que em princípio poderiam ser medidos na membrana [13, 15, 33–40]. Com a

analogia da matéria condensada em mente, Geová *et al* aplicaram o método da matriz de transferência para calcular ressonâncias [41–43]. Isso foi possível porque partículas se movendo ao longo da dimensão extra se assemelham com os pacotes de ondas de elétrons que colidem com as barreiras de potencial dentro dos semicondutores.

Outra interessante construção são os modelos com multi-gravidade [44–46]. Em [44], os autores estenderam o modelo RS-I adicionando uma terceira brana com tensão positiva; o modelo  $(+ - +)$ . A adição dessa brana resolve problemas relacionados com a constante cosmológica, e implementa uma nova fenomenologia. Devido a presença dessa terceira brana, o espectro gravitacional muda drasticamente. Enquanto que no modelo RS-I o único modo que contribui com a gravidade é o modo zero, nesse modelo a gravidade fraca é a combinação do modo zero e do primeiro modo massivo. Em [45], é discutido como a gravidade pode ser modificada para diferentes limites; tendo um comportamento  $5 - D$  para grandes escalas e  $4 - D$  para escalas maiores ainda. Eles também discutiram outros modelos com multi-gravidade: o modelo  $(+ - - +)$ , e mostraram que o modelo  $(+ - +)$  é um caso particular do anterior. Nesses trabalhos diz-se que o campo gravitacional é multi-localizado, porque as funções de onda para o modo zero possuem máximos nas branas. Isso induz a ideia de multi-localização para outros campos, que é feita no artigo [46]. Nesse último trabalho os autores mostram que a multi-localização de campos livres de spin  $1/2$ ,  $1$  e  $3/2$  não é possível. Como citado acima, o mesmo problema ocorre no modelo RS-I. A forma que eles usam para localizar esses campos é com a introdução de termos de massa da forma  $m^2 = \alpha \sigma'(y)^2 + \beta \sigma''(y)$ , onde  $\sigma(y)$  é o fator de dobra e  $\alpha, \beta$  parâmetros livres. Tal construção é bem similar a solução apresentada por Ghoroku e compartilha os mesmos problemas de não-covariância e parâmetros livres. Com o objetivo de localizar o modo zero dos campos, os autores propõem relações entre os parâmetros livres. Depois disso, eles calculam o espectro massivo, e mostram que o primeiro modo se comporta como o primeiro modo gravitacional, como descrito acima.

Além de semicondutores e os modelos de multi-gravidade, a próxima analogia é a de um cristal periódico. Essa construção, no cenário de dimensões extras com muitas branas, foi apresentado em Ref. [47] e foi chamado de cristal manifold. O autor encontrou soluções considerando interseções de famílias de  $(n + 3)$ -branas paralelas em um espaço AdS  $(4 + n)$ -dimensional. Pouco tempo depois outras generalizações foram consideradas [48–53]. Nesses modelos, existe branas em todas as direções do bulk, e elas podem ter interseção. Esses trabalhos levantam discussões relacionadas, por exemplo, com modelos de mundo-brana cosmológicos [54, 55] e matéria escura [56, 57]. Ainda na Ref. [47], o autor aplica sua construção geral para o campo gravitacional em tal background. A principal diferença entre esse modelo e o RS-II é que agora os modos massivos podem ser estáveis sobre a brana. Para ser mais preciso, como no modelo de Kronig-Penney, eles encontram uma relação de dispersão que dá os

valores de massa permitidos, gerando uma estrutura de bandas. Com isso, foi proposto o cálculo da correção na lei de Newton. Com isso em mente os autores na Ref. [53] usaram a relação de dispersão da Ref. [47] para estender os resultados acima. Eles consideraram outros campos no cristal manifold, campo escalar, campo de gauge, Kalb-Ramond e  $q$ -forma, com e sem o acoplamento com o dÍlaton. Numericamente eles encontraram a estrutura de banda de massa para todos os campos. Finalmente, os autores em [45] corrigiram erros na relação de dispersão da Ref. [47] e com isso calcularam a correta estrutura de banda de massa para o campo gravitacional.

O primeiro objetivo desse trabalho é usar o acoplamento geométrico para localizar um modelo com mistura de termos cinéticos do campo de gauge. Para fazer isso, acoplamos os campos de gauge com o escalar de Ricci [18] de uma forma que adicionamos um termo de potencial da forma  $\lambda A_N^2$  para cada termo cinético da ação. O acoplamento geométrico é uma poderosa ferramenta para a localização da  $q$ -forma [26, 28] porque ele não deixa parâmetros livre no modelo. O termo  $\lambda A_N^2$  modifica o potencial da equação tipo Schrödinger da seguinte forma;  $U = qA'' + q^2 A'^2$ , onde  $q$  é a ordem da forma considerada. Com esse potencial, a equação tipo Schrödinger tem como solução  $\psi = e^{qA}$ , que é de quadrado integrável para qualquer fator de dobra que seja assintoticamente (RS). Dessa forma a solução é independente do fator de dobra. No processo de localização do modo zero, a ação 5-dimensional é reduzida para uma ação efetiva em 4-dimensões da forma  $S = I \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ , onde  $I = \int \psi^2 dy$  necessita ser finita. O acoplamento geométrico também é útil na localização de campos de gauge não-abelianos [26], mas nesse caso é necessário dois acoplamentos geométricos; um com os campos e outro com o termo cinético. O acoplamento com o termo cinético é dado em termos da  $\Delta_{CD}^{AB}$ , que a forma explícita pode ser encontrada em [26]. Em [29], os autores estenderam o método do acoplamento geométrico, usando os tensores de Ricci e de Einstein. Aqui nós também mostramos que o acoplamento com o tensor de Ricci é um método eficiente para localizar nosso modelo.

Do ponto de vista da fenomenologia, modelos/teorias com mistura de termos cinéticos são além do modelo padrão (MP), e eles têm sido estudados nos últimos anos. Da perspectiva de quatro dimensões isso pode ser justificado pela presença do setor escondido [58]. Um setor de partículas que seria um espelho do modelo padrão. Também é importante para modelos de matéria escura [59], quantização de carga [60, 61] e a existência de milicargas [58, 62–66]. Da perspectiva de dimensões extras existem vários estudos também. Por exemplo, nos modelos de brana-antibrana mistura de termos cinético de campos de gauge é bem natural em configurações não-supersimétricas de cordas [67]. Mistura de termos cinéticos tem sido calculada em vários modelos [68–78].

Também existe trabalhos que sugerem que o fóton escondido pode viver no bulk.

[79–84], e a interação desse fóton com o usual do modelo padrão, ocorre através da mistura de termos cinéticos localizado na brana. Em [79–81], os autores argumentam que no cenário de dimensões extras compactadas, a massa para o fóton escondido pode surgir naturalmente. Dessa forma, se faz necessário tratar da localização desses modelos com dois campos de gauge em membranas no contexto de dimensões extras. Como sabemos, no cenário (RS), os campos 4–dimensional têm que ser localizados, e nenhum desses modelos apresentados acima explicam como isso pode ser feito, mesmo os que propõem que o termo de mistura cinética é localizado na brana [79–84]. Portanto, vamos entender como o acoplamento geométrico pode ser aplicado nesse problema.

O segundo objetivo desse trabalho é fazermos um estudo completo de campos bosônicos nos modelo de multi-branas. Primeiro, consideramos os campos escalar e de gauge no modelo  $(+ - +)$ . Resolvemos o problema da covariância da Ref. [46] considerando o acoplamento geométrico. Com isso também obtemos que, para localizar os campos, nenhum parâmetro livre é deixado no modelo. Ainda para o cenário  $(+ - +)$ , generalizamos o mecanismo para obter multi-localização da  $q$ –forma. Também propomos a localização usando o acoplamento com o dÍlaton. Em ambos os métodos, calculamos o espectro de massa para a  $q$ –forma e comparamos nossos resultados, para os campos escalar e de gauge, com os encontrados em [46]. Em seguida consideramos o cristal manifold. Para o campo gravitacional, completamos o cálculo analítico para apenas um ponto, discutido em [45], e numericamente encontramos a estrutura completa das bandas de massa. Ainda, como a mesma relação de dispersão encontrada em [47] foi usada para outros campos em Ref. [53], também revisitamos a estrutura de bandas para a  $q$ –forma livre, e encontramos as expressões corretas. Além disso, também estudamos a influência do acoplamento geométrico e do dÍlaton nas bandas de massa dos campos.

O trabalho está dividido da seguinte forma: No segundo capítulo, fazemos uma revisão da ideia de dimensões extras. Os mecanismos de localização do campo vetorial são apresentados no capítulo três. Os capítulos seguintes tratam de discussões novas. No capítulo quatro, apresentamos um modelo para a localização da ação para milicargas. No quinto capítulo, mostramos como obter uma escala universal de massa para campos bosônicos no contexto dos modelos de multi-branas. No sexto capítulo, revisitamos os resultados para campos bosônicos no cenário do cristal manifold. No sétimo e último capítulo apresentamos nossas conclusões.

## 2 A IDEIA DE DIMENSÕES EXTRAS

A ideia de se incluir dimensões extras na Física não é nova. Já em 1914 o Físico finlandês Gunnar Nordstrom propôs uma gravidade em cinco dimensões onde acoplava-se o traço do tensor energia momento com um campo escalar, vale ressaltar que Nordstrom não usava as ferramentas da Relatividade Geral(RG), uma vez que a mesma ainda não tinha sido totalmente desenvolvida [85].

Ele considerava que o espaço quadridimensional era uma superfície de um espaço com cinco dimensões. Nordstrom também já tinha a idéia de unificação dos campos eletromagnético e gravitacional através da inclusão de uma dimensão extra tipo espaço [86]. As ideias de Nordstrom foram ficando de lado, uma vez que os resultados oriundos de sua teoria não estavam de acordo com os experimentos.

Em 1921, já usando a RG, o Físico e Matemático alemão Theodor Kaluza pública um artigo bastante famoso intitulado: "Zum Unitatsproblem der Physik"[4]. A pretensão de Kaluza era, assim como Nordstrom, unificar a gravidade com o eletromagnetismo. Para ele, os campos eletromagnético e gravitacional em 4-D, eram apenas diferentes manifestações de um campo gravitacional em um espaço com cinco dimensões. A proposta inicial de Kaluza tinha algumas falhas, como por exemplo sua métrica não era invariante por transformações gerais de coordenadas. Esse fato foi corrigido posteriormente, em 1926, pelo Físico Escocês Oscar Klein [87], daí o motivo do modelo ser chamado de modelo de Kaluza-Klein(KK). Descreveremos agora os aspectos básicos do modelo de KK.

### 2.1 Kaluza-Klein

A ideia de unificar os campos surgiu a mente de Kaluza após ele perceber a semelhança que havia entre o simbolo de Christoffel de primeira espécie e o tensor do eletromagnetismo (Field Strenght)[88]. Com isso ele apenas introduziu mais uma linha e uma coluna no tensor métrico que descreve a Relatividade Geral e fez as seguintes identificações:  $g_{\mu 5} = g_{5\mu} = A_{\mu}$  e  $g_{55} = \phi$ . Onde  $A_{\mu}$  é o quadrivetor potencial do eletromagnetismo e  $\phi$  um campo escalar.

Ele também considerou a dimensão extra como sendo compacta, e o espaço total seria o produto do espaço tempo de Minkowski e o círculo,  $M^4 \times S^1$ , sendo que o espaço resultante é uma espécie de cilindro 5-dimensional de raio  $R$ . Das definições do simbolo de Christoffell e do Field Strenght, e considerando que a métrica  $g_{\mu\nu}$  não depende da dimensão

extra, podemos perceber a semelhança entre os tensores acima citados

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2}(\partial_{\mu}g_{\nu\lambda} + \partial_{\lambda}g_{\mu\nu} - \partial_{\nu}g_{\mu\lambda}) \quad (2.1)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}. \quad (2.2)$$

Com as suposições de Kaluza o simbolo de Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu 5}$  seria proporcional ao Field Strength  $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ . Dessa forma a métrica idealizada por Kaluza tinha a forma

$$ds^2 = \tilde{\gamma}_{MN}dx^M dx^N, \quad (2.3)$$

com  $\tilde{\gamma}_{MN}$  dado por:

$$\tilde{\gamma}_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & g_{\mu 5} \\ g_{5\nu} & g_{55} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

onde o tilde especifica que a grandeza está em 5-D.

Kaluza ainda fez uso de uma condição que ele chamou de cilindridade, que em outras palavras significava que a métrica como um todo não dependia da quinta dimensão  $\partial_5 \tilde{\gamma}_{MN} = 0$ . Essa condição foi melhor explicada por Klein em (1926). Ele argumentou que, como a dimensão extra era compactada em um círculo, poderia-se fazer o raio desse círculo tão pequeno quanto quiséssemos de forma que a quinta dimensão seria imperceptível. Klein também percebeu que a métrica (2.3) não era invariante por transformações gerais de coordenadas.

Klein preocupou-se com a covariância da teoria. Então ele partiu em busca de encontrar uma métrica que obedecesse tal quesito. Em um outro referencial as novas coordenadas teriam que depender das antigas  $x'^{\mu}(x^{\mu}, x^5)$  e  $x'^5(x^{\mu}, x^5)$ . Devido a covariância só ser provada em 4-D, ele impôs que  $x'^{\mu}(x^{\mu})$ , o que significa que  $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^5} = 0$ . No entanto, ele continuo com a condição de cilindridade  $\frac{\partial \tilde{\gamma}_{MN}}{\partial x^5} = 0$ .

Sabemos que uma transformação geral de coordenadas é dada por:

$$g'_{MN}(x'^{\mu}) = \frac{\partial x^R}{\partial x'^M} \frac{\partial x^Q}{\partial x'^N} g_{RQ}(x^{\mu}). \quad (2.5)$$

Se pegarmos por exemplo o elemento  $g'_{\nu 5}$ , veremos que ele se transforma da seguinte forma:

$$g'_{\nu 5} = \frac{\partial x^5}{\partial x'^{\nu}} g_{55} + \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} g_{\rho 5}. \quad (2.6)$$

As seguintes transformações foram impostas por Klein:

$$x'^5 = x^5 + \varepsilon(x^V) \quad x'^\mu = x^\mu. \quad (2.7)$$

Com as transformações acima, o termo  $g_{V5}$  transforma-se semelhante a uma transformação de gauge. E a métrica  $\tilde{\gamma}_{MN}$  não é covariante. Klein obteve sua métrica considerando uma partícula de massa  $m$  interagindo com um campo eletromagnético em 4-D. Ele comparou as Lagrangianas desse sistema, em 4-D e 5-D, e então obteve a métrica

$$\tilde{\gamma}_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + A_\mu A_\nu & A_\mu \\ A_\nu & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Onde fizemos  $g_{55} = \phi = 1$ .

A partir dessa métrica é possível calcular o escalar de Ricci, e construir a ação de Einstein-Hilbert em 5-D

$$\tilde{R} = \tilde{\gamma}^{AB} \tilde{R}_{AB} = R + \frac{1}{4} F_{\gamma\eta} F^{\gamma\eta} \quad (2.9)$$

$$S_{EH} = \int d^5x \sqrt{-\tilde{\gamma}} \tilde{R}. \quad (2.10)$$

De (2.8) temos que  $\det \tilde{\gamma}_{AB} = \det g_{\mu\nu}$ , logo  $\sqrt{-\tilde{\gamma}} = \sqrt{-g}$ , substituindo essa condição e (2.9) em (2.10), obtemos:

$$S_{5D} = \int d^5x \sqrt{-g} \left( R + \frac{1}{4} F_{\gamma\eta} F^{\gamma\eta} \right). \quad (2.11)$$

Podemos integrar a dimensão extra, obtendo uma ação puramente 4-dimensional

$$S_{4D} = V \int d^4x \sqrt{-g} \left( R + \frac{1}{4} F_{\gamma\eta} F^{\gamma\eta} \right). \quad (2.12)$$

Onde  $V$  é o volume de  $S^1$ . Ao variarmos a ação (2.12) com relação à métrica  $g_{\mu\nu}$  encontramos

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}^{EM}. \quad (2.13)$$

Onde  $T_{\mu\nu}^{EM} = g_{\mu\nu} \frac{F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}}{4} - F_\mu^\alpha F_{\nu\alpha}$  é o tensor energia-momento do eletromagnetismo e  $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ , corresponde ao tensor eletromagnético de Maxwell.

Reduzimos assim a ação de Einstein-Hilbert 5-dimensional a soma de uma ação gravitacional 4-dimensional e a ação de Maxwell. Dessa forma o eletromagnetismo e a gravidade em quatro dimensões são unificados, sendo diferentes aspectos da gravidade em um espaço-tempo com uma dimensão extra compacta.

A teoria de KK parece totalmente consistente, mas ela não é. Além de problemas de caráter teórico, ela também possui complicações experimentais. Do ponto de vista da teoria, ao

escolhermos  $\phi = 1$ , encontramos a equação (2.13), e tudo fica consistente. Mas, se deixarmos  $\phi$  "livre", podendo assumir qualquer valor, encontraríamos uma equação de movimento para esse campo [88]

$$\square\phi = \frac{\phi}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\nabla_\nu\phi\nabla^\nu\phi}{2\phi}. \quad (2.14)$$

Se por acaso escolhêssemos  $\phi = 1$ , essa equação só seria consistente em um referencial em que  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0$ . Esse fato foi percebido primeiramente por Jordan. Os principais problemas experimentais foram que a massa e carga do elétron calculados a partir do modelo KK, não estavam de acordo com os resultados experimentais. Além do mais o modelo não atentava para nenhuma força nuclear, que é compreensível, uma vez que as mesmas não tinham sido descobertas na época [89].

Um fato interessante do modelo de KK é que o campo não massivo, no espaço tempo de cinco dimensões, poderia ser reduzido a uma série de campos em 4-D. Sendo um modo não massivo e vários outros modos massivos. Como a quinta dimensão é periódica, os campos podem ser expandidos em série de Fourier. Vejamos o exemplo do campo escalar

$$\phi(x^\mu, x^5) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^n(x^\mu) e^{i\frac{n}{R}x^5}. \quad (2.15)$$

Dessa forma, usando a equação de movimento do campo em 5-D  $(\partial_5\partial^5 + \partial_\mu\partial^\mu)\phi = 0$ , temos em 4-D

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi^n(x^\mu) - \frac{n^2}{R^2}\phi^n(x^\mu) = 0. \quad (2.16)$$

Vemos assim que uma torre infinita de campos é gerada. Para baixas energias, comparadas com  $R^{-1}$ , somente o modo zero, independente da coordenada  $x^5$ , permanece. Dessa forma a Física é efetivamente 4-dimensional[90]. Para energias maiores que  $R^{-1}$  os modos massivos são ativados, e cada modo pode representar uma partícula diferente.

Como nenhuma evidência de dimensões extras foi encontrada ainda. Um limite no tamanho do raio de tais dimensões é imposto. Ele deve ser tal que  $\frac{n}{R} > TeV$ , uma vez que  $TeV$  é a escala de energia com que os aceleradores de partículas trabalham. Tal limite força um tamanho da dimensão extra da ordem de  $R \approx 10^{-21} cm$ . Isso torna complicado a detecção de dimensões extras. Uma alternativa para esses modelos de dimensões extras minúsculas é proposto por Arkani-Hammed, Dimopoulos e Dvali (ADD), e será assunto da nossa próxima subseção.

## 2.2 Arkani-Hammed, Dimopoulos e Dvali (ADD)

Como é sabido, existem basicamente duas escalas de energia na Física; a escala  $TeV$  e a escala de Planck. A primeira governa as interações do modelo padrão, enquanto que a segunda é a escala onde a interação gravitacional torna-se comparável com as demais interações.

Atualmente, experimentos comprovam a validade das interações eletrofracas para distâncias da ordem de  $TeV^{-1}$ . Por outro lado, a força gravitacional só é comprovada para distâncias da ordem de 0,2 milímetros [6,91]. Dessa forma, supor que a escala de Planck é uma escala fundamental, é acreditar que a gravidade não sofre alterações nesse range de 0,2mm até  $10^{-33}cm$  (comprimento de Planck).

Baseados nessa incerteza na validade da escala de Planck como sendo fundamental, Arkani-Hammed, Dimopoulos e Dvali propuseram que apenas a escala  $TeV$  é fundamental para pequenas distâncias, até mesmo para interações gravitacionais [6]. Com essa configuração é possível criar uma solução para o problema da hierarquia. No modelo eles consideram que pode existir várias dimensões extras, e que elas podem ser muito maiores do que o tamanho obtido no modelo de KK.

Como já explicado, nessa configuração multidimensional, a escala de Planck não é um parâmetro fundamental. A escala fundamental nesse universo é a escala  $TeV$ . Dessa forma a ação gravitacional multidimensional é

$$S = -\frac{1}{16\pi G_D} \int d^D x \sqrt{g^{(D)}} R^{(D)}. \quad (2.17)$$

Onde  $G_D = \frac{1}{M_{EW}^{D-2}} \equiv \frac{1}{M_{EW}^{d+2}}$  é a constante fundamental de Newton em  $D$  dimensões,  $d = D - 4$  é o número de dimensões extras.

No modelo ADD, a teoria para longas distâncias para a gravidade é dada pelo modo zero (gráviton), que tem função de onda homogênea ao longo da dimensão extra [91]. A teoria efetiva da gravidade é dada a partir de (2.17) integrando na dimensão extra

$$S_{eff} = \frac{V_d}{16\pi G_4} \int d^4 x \sqrt{g^4} R^4. \quad (2.18)$$

Onde  $V_d \sim R^d$  é o volume das dimensões extras.

Ao compararmos (2.17) e (2.18), vemos que a massa de Planck em  $4 - D$  é

$$M_{PL} = M_{EW} (M_{EW} R)^{\frac{d}{2}}. \quad (2.19)$$

Se  $R$  é grande comparado com  $M_{EW}^{-1}$ , a hierarquia é devido ao tamanho de  $R$ . Assim a hierarquia é transferida para a discrepância entre a escala de compactificação das dimensões extras  $\mu_c \propto \frac{1}{R}$  e a escala natural da teoria  $TeV^{-1}$ .

Com  $M_{EW} \sim 1\text{TeV}$ , temos

$$R \sim M_{EW}^{-1} \left( \frac{M_{PL}}{M_{EW}} \right)^{\frac{2}{d}} \sim 10^{\frac{32}{d}} \cdot 10^{-17} \text{cm}. \quad (2.20)$$

Para  $d = 1$ ,  $R$  assume um valor da ordem de  $10^{13}\text{cm}$ , implicando em desvios na gravidade Newtoniana para distâncias da ordem do sistema solar, por isso  $d = 1$  é desconsiderado [6]. Para  $d = 2$ ,  $R \sim 1 - 10\mu\text{m}$ , isso motiva pesquisas para desvios na lei de Newton no range do micrometro, que é difícil, mas não impossível.

## 2.3 Modelos Randall Sundrum

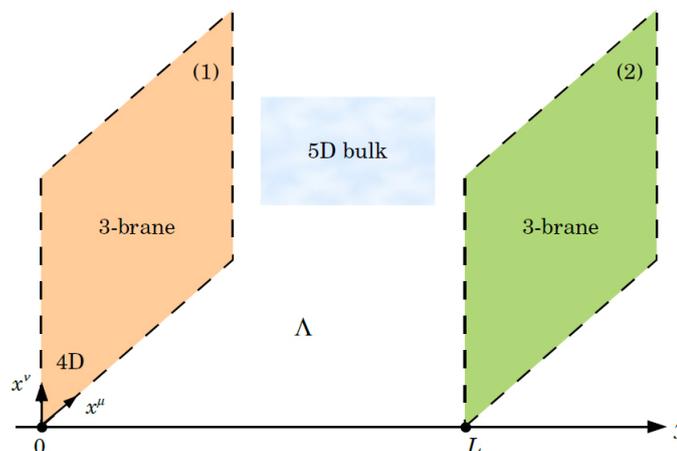
Nesta seção faremos uma breve revisão dos modelos Randall Sundrum (RS)[7, 8]. Esses foram criados em 1999 por Lisa Randall e Ramman Sundrum. O primeiro modelo, conhecido como RS-I, propõem uma solução para o problema da hierarquia, já discutido na introdução. O segundo, RS-II, mostra como é o comportamento da gravidade.

### 2.3.1 O modelo Randall Sundrum Tipo I

#### 2.3.1.1 A Configuração do Modelo

O modelo Randall Sundrum considera o espaço tempo com 5 dimensões. Sendo quatro do tipo espaço e uma do tipo tempo. Nesse modelo considera-se a existência de duas p-branas, onde  $p$  é o número de coordenadas espaciais da brana, neste caso  $p = 3$ , e uma dimensão temporal. Uma dessas branas é o nosso universo, enquanto que a outra é um mundo paralelo ao nosso. Esses dois universos possuem escalas de energia diferentes. O primeiro estando na escala  $\text{TeV}$  e o segundo na escala  $10^{19}\text{GeV}$ . A dimensão extra é transversa as branas. Vejamos uma simples ilustração dessa configuração

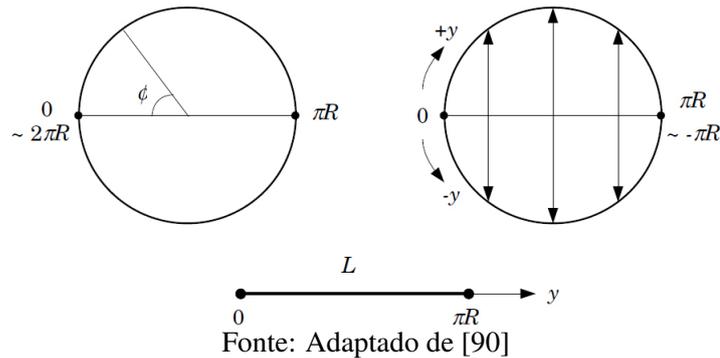
Figura 1 – O cenário Randall Sundrum



Fonte: Adaptado de [90]

A dimensão extra é compactada em um círculo [90] ver figura 2 , parametrizada por um ângulo  $\phi$  e com simetria  $(x, \phi) \rightarrow (x, -\phi)$ . Formalmente o modelo é construído no  $S^1/Z_2$  orbifold [7]. Onde  $S^1$  é a esfera unidimensional e  $Z_2$  é o grupo multiplicativo  $\{1, -1\}$  [90]. Tomamos o domínio de  $\phi$  como sendo de  $-\pi$  a  $\pi$ , mas a métrica fica completamente definida se pegarmos apenas valores no intervalo  $0 \leq \phi \leq \pi$ .

Figura 2 – Orbifold



Os pontos fixos do orbifold  $\phi = 0$  e  $\phi = \pi$  são os locais onde estão localizadas as duas branas. De forma simples podemos pensar essas branas como sendo as fronteiras do espaço tempo 5-dimensional chamado de Bulk ver figura 1. Com o nosso universo situado em  $\phi = \pi$  e a outra brana em  $\phi = 0$ . Essas branas, caracterizadas por coordenadas  $x^\mu$ , suportam teorias de campos  $(3 + 1)$  -dimensional. Dessa forma consideramos que os campos do modelo padrão estão presos na brana localizada em  $\phi = \pi$  e o único campo que consegue se propagar na dimensão extra é o campo gravitacional.

### 2.3.1.2 A métrica

O modelo é construído usando-se as ferramentas da teoria da Relatividade Geral de Einstein. Dessa forma o primeiro passo que devemos considerar é a métrica que descreve a geometria do mesmo. A distância entre dois pontos no espaço tempo 5-dimensional, chamado de Bulk, é

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{MN} dx^M dx^N \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + 2g_{\mu\phi} dx^\mu d\phi + g_{\phi\phi} d\phi^2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Onde os índices Romanos maiúsculos  $(M, N, \dots, p, p + 1)$  são os índices do Bulk  $(D = p + 2)$ , os índices gregos  $(\mu, \nu, \dots = 0, 1, \dots, p)$  são os índices do espaço tempo da brana e os índices relacionados somente as coordenadas da membrana são os índices Romanos minúsculos  $(a, b, \dots, i, j, k, \dots, p)$ .

Devido a simetria orbifold ,  $\phi \rightarrow -\phi$  , o termo  $2g_{\mu\phi}dx^\mu d\phi$  é eliminado da métrica, e ficamos com o seguinte elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + g_{\phi\phi}d\phi^2. \quad (2.22)$$

Uma exigência do modelo é que a métrica sobre a brana possua invariância de Poincaré. Isso é possível se  $g_{\mu\nu}$  for da forma  $g_{\mu\nu} \equiv e^{-2\sigma(\phi)}\eta_{\mu\nu}$ . Isso significa que o universo 4-dimensional derivado desse modelo deve ser plano e estático. O termo  $g_{\phi\phi}$  é interpretado como o raio da dimensão extra. Assim a métrica mais geral para o modelo de branas que respeita a simetria orbifold e a invariância de Poincaré é

$$ds^2 = e^{-2\sigma(\phi)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2. \quad (2.23)$$

Onde  $\eta_{\mu\nu} = \text{dia}(-1, 1, 1, 1)$  é a métrica de Minkowski. O fator exponencial é colocado nessa métrica propositalmente. Veremos que ele é quem vai fazer com que surja a hierarquia entre as escala  $TeV$  e  $10^{19}GeV$ . Devido o fator exponencial depender da dimensão extra, essa métrica é não fatorável. Ou seja, não podemos escrevê-la como um produto da métrica de Minkowski com um manifold da dimensão extra. As condições de contorno impostas sobre a métrica do background são

$$g_{\mu\nu}^{vis} \equiv G_{\mu\nu}(x^\mu, \phi = \pi) , \quad g_{\mu\nu}^{ocu} \equiv G_{\mu\nu}(x^\mu, \phi = 0). \quad (2.24)$$

Veremos agora como é a dinâmica do modelo.

### 2.3.1.3 Dinâmica

A ação que descreve esse modelo é composta por três partes: Uma relativa a gravidade e outras duas referente as duas branas. Usamos os termos  $S_{vis}$  e  $S_{ocu}$  para representar as ações nas branas visível e oculta, respectivamente

$$\begin{aligned} S &= S_{gravidade} + S_{vis} + S_{ocu} \\ S_{gravidade} &= \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{-G} \{-\Lambda + 2M^3 R\} \\ S_{vis} &= \int d^4x \sqrt{-g_{vis}} \{\mathcal{L}_{vis} - V_{vis}\} \\ S_{ocu} &= \int d^4x \sqrt{-g_{ocu}} \{\mathcal{L}_{ocu} - V_{ocu}\}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Para cada Lagrangeana na 3-brana temos um potencial de vácuo que funciona como uma fonte de gravidade. O modelo foi inicialmente construído para a gravidade pura, dessa

forma não vamos considerar que as branas possuam matéria, logo  $\mathcal{L}_{vis} = \mathcal{L}_{ocu} = 0$ . Fazendo a variação das ações acima com relação a métrica do Bulk, obtemos a seguinte equação de movimento

$$\sqrt{-g} \left( R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R \right) = -\frac{1}{4M^3} [\Lambda \sqrt{-g} g_{MN} + V_{vis} \sqrt{-g_{vis}} g_{\mu\nu}^{vis} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(\phi - \pi) + V_{ocu} \sqrt{-g_{ocu}} g_{\mu\nu}^{ocu} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(\phi)]. \quad (2.26)$$

Essa é a equação de Einstein 5-dimensional. O nosso objetivo agora é resolver essa equação usando o Ansatz para a métrica. A resolução dessa equação vai nos fornecer a função  $\sigma(\phi)$  que foi proposta na métrica. Esse fator de deformação é o que vai ser responsável por gerar a hierarquia entre as duas escalas. O coeficiente  $r_c$  presente na métrica é independente de  $\phi$ , ele é o raio de compactificação da dimensão extra. Usando o nosso Ansatz para a métrica (2.23), obtemos duas equações de movimento, uma referente a dimensão extra e outra relacionada ao espaço 4-dimensional

$$\frac{6\sigma'^2}{r_c^2} = \frac{-\Lambda}{4M^3}, \quad (2.27)$$

$$\frac{3\sigma''}{r_c^2} = \frac{V_{ocu}}{4M^3 r_c} \delta(\phi) + \frac{V_{vis}}{4M^3 r_c} \delta(\phi - \pi). \quad (2.28)$$

A solução para a equação (2.27) consistente com a simetria orbifold  $\phi \rightarrow -\phi$  é:

$$\sigma = r_c |\phi| \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}} \quad (2.29)$$

. Omitimos a constante aditiva que aparece por que ela pode ser englobada em um reescalamento de  $x^\mu$ . Claramente vemos que a solução só faz sentido se  $\Lambda < 0$ , o modelo não leva em consideração soluções oscilatórias. Basicamente esse é um espaço com constante cosmológica negativa.

Calculando a primeira e a segunda derivada dessa função, e substituindo em (2.28) obtemos:

$$V_{ocu} = -V_{vis} = 24M^3 k, \Lambda = -24M^3 k^2, \quad (2.30)$$

Onde  $M$  é um parâmetro de massa natural da quinta dimensão,  $\Lambda$  é a constante cosmológica em 5-D e  $k$  é uma escala de energia da ordem da escala de Planck, com valor  $k = \sqrt{-\frac{\Lambda}{24M^3}}$ . Essas relações entre os potenciais nas branas e o termo cosmológico do Bulk são necessários para obter-se uma solução que respeite a invariância de Poincaré em 4-D. Isso é tido na teoria como um "fine-tuning". Ou seja, são termos colocados a mão no intuito de obter um universo em

4-D estático. Poderíamos escolher outros valores para  $V_{vis}$  e  $V_{ocu}$ , sendo perfeitamente possível obtermos um universo em 4-D não plano. Após substituirmos (2.29) em (2.23), obtemos nossa solução final para a métrica do Bulk:

$$ds^2 = e^{-2kr_c|\phi|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2. \quad (2.31)$$

O raio de compactificação  $r_c$  é efetivamente uma constante de integração nessa métrica.

#### 2.3.1.4 Implicações Físicas

Embora o modelo considere uma dimensão extra, evidências de dimensões, além das quatro que estamos adaptados, ainda não foram encontradas [7]. Portanto, precisamos ver quais as implicações Físicas desse modelo. Em outras palavras, quais os resultados que obtemos na teoria efetiva ao fazer a redução dimensional? Precisamos saber a relação entre os parâmetros da teoria Física efetiva, de baixas energias ( $TeV$ ), com os parâmetros associados com a quinta dimensão;  $M, k$  e  $r_c$ .

O primeiro passo é encontrar flutuações sem massa em torno da solução (2.31). Isso vai nos dar o campo gravitacional da teoria efetiva[7]. Eles são os modos-zero dessa solução e têm a forma:

$$ds^2 = e^{-2kT(x)|\phi|} [\eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu}(x)] dx^\mu dx^\nu + T^2(x) d\phi^2. \quad (2.32)$$

Aqui,  $\bar{h}_{\mu\nu}$  representa flutuações tensoriais em torno do espaço de Minkowski e é chamado de gráviton na teoria efetiva em 4-D. O raio de compactificação  $r_c$ , é o valor esperado de vácuo do campo modular  $T(x)$ . Como em muitas teorias de dimensões extras, é importante que o campo modular  $T(x)$  seja estabilizado para um valor esperado de vácuo  $r_c$ , com uma massa de pelo menos  $10^{-4}eV$ . Isso é um problema essencial da teoria; estabilização das distâncias entre as duas branas [92, 93].

Para entendermos se a supressão exponencial realmente é útil para resolver o Problema da Hierarquia, precisamos saber como a escala efetiva da gravidade se comporta com relação a dimensão extra. Obtemos essa informação ao analisarmos como a ação gravitacional em 5-D contém a ação gravitacional em 4-D. Focamos no termo de curvatura, pois com ele podemos obter a escala da interação gravitacional. Substituindo (2.32) na ação da gravidade e fazendo as mudanças necessárias na métrica, no seu determinante e no tensor de Ricci: ( $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu}$ ,  $G = \det G_{MN}$ ,  $\sqrt{-G} = r_c e^{-4kr_c|\phi|} \sqrt{-\bar{g}}$  e  $R \supset e^{2kr_c|\phi|} \bar{R}$ ) obtemos:

$$S_{efe} \supset \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi 2M^3 r_c e^{-2kr_c|\phi|} \sqrt{-\bar{g}} \bar{R} \quad (2.33)$$

onde  $\bar{R}$  é o tensor de Ricci 4-dimensional obtido a partir de  $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ , em contraste com o tensor

de Ricci  $R$  5-dimensional, obtido de  $G_{MN}(x, \phi)$ . Devido as flutuações em 4-D não dependerem de  $\phi$  (os campos na teoria efetiva dependem apenas de  $x$ ), podemos fazer a integração explícita em  $\phi$  e obtemos uma ação puramente 4-dimensional. Após a integração em  $\phi$  obtemos:

$$M_{pl}^2 = \frac{M^3}{k} [1 - e^{-2kr_c\pi}], \quad (2.34)$$

este é um resultado importante.

Ele nos revela que a massa de Planck efetiva  $M_{pl}^2$ , depende fracamente de  $r_c$  no limite de grande  $kr_c$ . Embora a exponencial tenha um papel pouco importante na determinação da escala de Planck 4-dimensional, ela tem um papel muito importante na determinação do setor visível da massa.

Para determinar a lagrangiana dos campos de matéria, precisamos saber o acoplamento dos campos nas 3-branas com os campos gravitacionais de baixa energia [7], particularmente precisamos saber quem é  $\bar{g}_{\mu\nu}$ . Fazendo uma transformação conforme na métrica, temos:

$$g_{\mu\nu} = e^{-2kr_c\phi} \bar{g}_{\mu\nu}. \quad (2.35)$$

E usando (2.24), obtemos:

$$\sqrt{-g^{vis}} = \sqrt{-e^{-8kr_c\pi} \bar{g}} = \sqrt{-\bar{g}} e^{-4kr_c\pi}.$$

Vamos considerar um campo de Higgs fundamental, possuindo a seguinte ação:

$$S_{vis} \supset \int d^4x \sqrt{-g^{vis}} \{g^{vis\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda (|H| - v_0^2)^2\}, \quad (2.36)$$

onde o parâmetro  $v_0$  é um parâmetro de massa. Fazendo uma renormalização na função de onda  $H \rightarrow e^{kr_c\pi} H$  e  $H^\dagger \rightarrow e^{kr_c\pi} H^\dagger$  e utilizando as relações entre as métricas acima, obtemos:

$$S_{efe} \supset \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \{\bar{g}^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda (|H| - e^{-2kr_c\pi} v_0^2)^2\}. \quad (2.37)$$

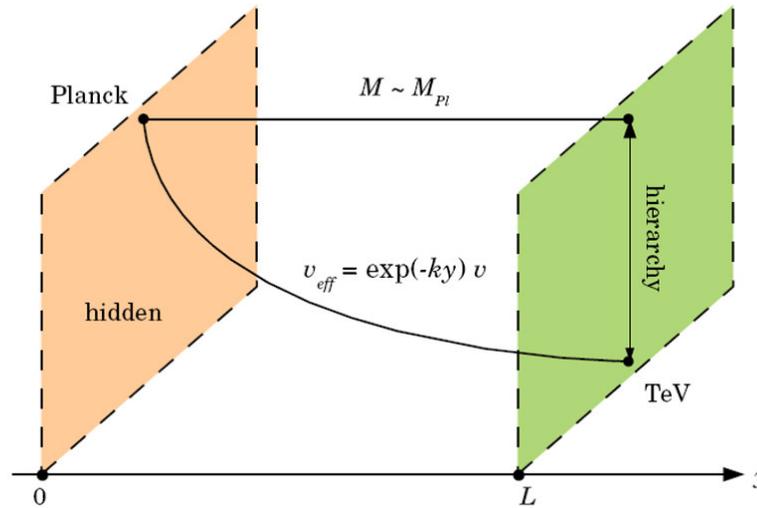
Essa é a ação de um Higgs escalar normal, exceto pelo valor esperado de vácuo (TeV)  $v^2 = v_0^2 e^{-2kr_c\pi}$  que é exponencialmente suprimido. Como o (TeV) nos informa todos os parâmetros de massa no modelo padrão, isto significa que todos os parâmetros de massa são submetidos a uma supressão exponencial na segunda brana. Se o valor da massa do Bóson de Higgs é da ordem da escala de Planck, o bóson de Higgs físico pode ser suprimido na escala

TeV. Obtendo a seguinte massa Física:

$$m = m_0 e^{-kr_c \pi}. \quad (2.38)$$

A supressão exponencial pode ser melhor entendida fazendo-se à análise da figura:

Figura 3 – Hierarquia entre as escalas



Fonte: Adaptado de [90]

Em conclusão, podemos ver que em uma teoria onde todos os parâmetros da dimensão extra ( $M, \Lambda, V_{ocu}, v$ ) são determinados pela escala de Planck, uma hierarquia exponencial é gerada naturalmente entre a escala fraca e da gravidade. Dessa forma o modelo Randall Sundrum fornece uma solução original para o Problema da Hierarquia.

É importante notarmos que se tomarmos a segunda brana infinitamente distante da primeira, a massa de Planck efetiva continua finita, veja (2.34). Isso nos revela que podemos ter uma dimensão extra infinita e ainda continuamos a sentir a gravidade da maneira normal. Dessa forma podemos dizer que a gravidade está localizada em torno da brana em  $\phi = 0$ . Esse caso onde podemos considerar apenas uma brana, inicialmente, é conhecido como modelo Randall Sundrum tipo II. A partir de agora voltaremos nossa atenção para esse modelo.

### 2.3.2 O modelo Randall Sundrum Tipo II

#### 2.3.2.1 Modos Gravitacionais

Para entendermos como a gravidade funciona no modelo Randall Sundrum temos que encontrar expressões para os grávitons, que são pequenas flutuações em torno da métrica

de fundo dada por:

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (2.39)$$

Observe que fizemos a seguinte mudança na métrica:  $dy = r_c d\phi$  e  $r_c |\phi| = |y|$ . As expressões explícitas para o gráviton serão encontradas através da solução das equações de Einstein linearizadas.

Por conveniência, trabalharemos com uma métrica conformalmente plana (proporcional ao espaço plano). Para fazermos isso definimos uma nova variável para a dimensão extra,  $z$ , relacionada com  $y$  da seguinte forma:

$$dy^2 \equiv e^{-2k|y|} dz^2. \quad (2.40)$$

### 2.3.2.2 Equações de Einstein Linearizadas

Para tornar nossos cálculos mais fáceis, iremos trabalhar com perturbações em torno da métrica de Minkowski, o que nos dá as equações de Einstein linearizadas. Ainda, como estamos trabalhando com uma métrica conformalmente plana  $g_{MN} = e^{2A} \tilde{g}_{MN}$ . Iremos utilizar a forma do tensor de Einstein calculado a partir de uma métrica como essa [94, 95]

$$G_{MN}(g_{MN}) = \tilde{G}(\tilde{g}_{MN}) + (n-2)[\tilde{\nabla}_M A \tilde{\nabla}_N A + \tilde{\nabla}_M \tilde{\nabla}_N A - \tilde{g}_{MN}(\tilde{\nabla}_R \tilde{\nabla}^R A - \frac{n-3}{2} \tilde{\nabla}_R A \tilde{\nabla}^R A)]. \quad (2.41)$$

Onde  $n$  é o número de dimensões espaciais. Nesse caso a métrica perturbada tem a seguinte forma

$$g_{MN} = e^{2A} (\eta_{MN} + h_{MN}) \quad (2.42)$$

e  $n = 5$ , dessa forma o tensor de Einstein tem como resultado

$$G_{MN} = \tilde{G}_{MN} + 3[\partial_M A \partial_N A + \partial_M \partial_N A - \tilde{\Gamma}_{MN}^R \partial_R A - \tilde{g}_{MN}(\partial_R \partial^R A - \tilde{\Gamma}_{RS}^R \partial^S A - \partial_{RA} \partial^R A)]. \quad (2.43)$$

O símbolo de Christoffel de ordem linear é facilmente encontrado, basta aplicarmos  $\tilde{g}_{NM} = \eta_{MN} + h_{MN}$  na sua forma tradicional, e encontramos:

$$\tilde{\Gamma}_{MN}^R = \frac{1}{2} (\partial_M h_N^R + \partial_N h_M^R - \partial^R h_{MN}). \quad (2.44)$$

Aqui usamos  $\eta^{MN}$  para levantar índices. Para simplificar os cálculos vamos trabalhar com o "transverse traceless gauge". Com esse gauge temos que: as flutuações não têm componentes

na dimensão extra  $h_{M5} = 0$ ; as flutuações que geram o gráviton são perpendiculares ao mesmo  $\partial_\mu h_{\mu\nu} = 0$  e o traço dessas flutuações é nulo  $\eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = h^\mu_\mu = 0$ .

As flutuações em torno da métrica de Minkowski representam um tensor simétrico  $5 \times 5$ ,  $h_{MN}$ . O mesmo possui 15 graus de liberdade. No entanto, levando em consideração o gauge acima relatado, o número de graus de liberdade das flutuações tensoriais se reduz de 15 para 5. Ainda levando em consideração esse gauge, o segundo símbolo de Christoffel em (2.43) anula-se. Enquanto que o primeiro se reduz a  $\frac{1}{2}\partial^5 h_{MN}$ . Além do mais, o tensor de Einstein para flutuações em torno da métrica plana veja [94], é dado por :

$$\tilde{G}_{MN} = -\frac{1}{2}\partial_R\partial^R h_{MN}. \quad (2.45)$$

Nosso próximo passo é calcular a componente  $\mu\nu$  do tensor de Einstein linearizado. Substituindo  $MN$  por  $\mu\nu$ , os símbolos de Christoffel e calculando as derivadas em (2.43)

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial_R\partial^R h_{\mu\nu} + \frac{3}{2}h'_{\mu\nu}A' - 3(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(A'' - A'^2). \quad (2.46)$$

Em seguida, temos que calcular o outro lado da equação de Einstein  $G_{MN} = k^2 T_{MN}$ . Ou seja, temos que calcular o tensor de energia momento. Após fazermos isso usando a definição do tensor energia momento :

$$T_{MN} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{MN}}, \quad (2.47)$$

obtemos

$$-\frac{1}{2}\partial_R\partial^R h_{\mu\nu} + \frac{3}{2}h'_{\mu\nu}A'(z) = 0. \quad (2.48)$$

### 2.3.2.3 Equação Tipo Schrodinger

Uma forma de resolver 2.48 é transformando-a numa equação tipo Schrödinger. Para fazermos isso temos que nos livrar da derivada primeira  $h'_{\mu\nu}$ , através do seguinte reescalonamento:

$$h_{\mu\nu} \rightarrow e^{\alpha A} h_{\mu\nu}, \quad (2.49)$$

onde  $\alpha$  é uma constante. Fazendo as devidas manipulações chegamos em

$$-\frac{1}{2}\partial_R\partial^R h_{\mu\nu} + \left[ \frac{9}{8}(A')^2 - \frac{3}{4}A'' \right] h_{\mu\nu} = 0. \quad (2.50)$$

Fazendo uma decomposição de Kaluza-Klein

$$h_{\mu\nu}(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_{\mu\nu}^n \psi_n(z). \quad (2.51)$$

chegamos nas equações

$$\square h_{\mu\nu}^n = m_n^2 h_{\mu\nu}^n \quad (2.52)$$

e

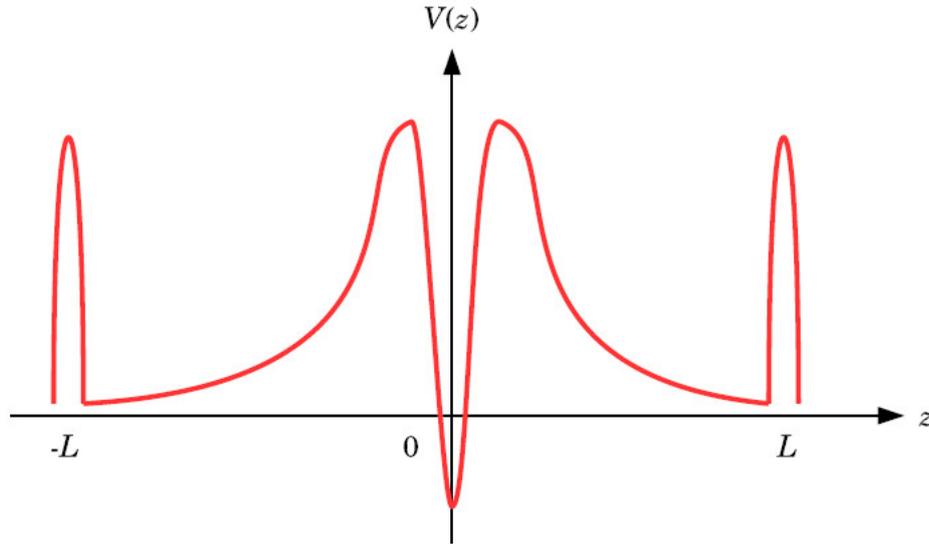
$$-\psi_n''(z) + \left[ \frac{9}{4} A'^2(z) - \frac{3}{2} A''(z) \right] \psi_n(z) = m_n^2 \psi_n(z). \quad (2.53)$$

A equação 2.53 é uma equação do tipo Schrödinger com potencial dado por:

$$V(z) = \frac{15}{4} \frac{k^2}{(k|z|+1)^2} - \frac{3k(\delta(z) - \delta(z-Lz))}{k|z|+1}. \quad (2.54)$$

O gráfico do potencial em (2.54) tem a forma dada pela figura 4.

Figura 4 – Potencial Gravitacional  $V(z)$



Fonte: Adaptado de [90]

As condições de contorno que as soluções da equação (2.53) vão obedecer, são obtidas integrando-se a mesma para pequenos domínios em torno das branas. Elas são

$$\begin{aligned} \psi_n'(0) &= -\frac{3k}{2} \psi_n(0) \\ \psi_n'(Lz) &= -\frac{3k}{2(kLz+1)} \psi_n(Lz). \end{aligned} \quad (2.55)$$

#### 2.3.2.4 Modo-Zero

O modo-zero é a solução de uma equação tipo Schrödinger com  $m_n = 0$

$$-\psi_0'' + \left[ \frac{9}{4} A'^2 - \frac{3}{2} A'' \right] \psi_0 = 0. \quad (2.56)$$

Fazendo  $\psi_0 = e^{\lambda A}$  e substituindo em 2.56, obtemos :

$$\left(\lambda + \frac{3}{2}\right)A'' + A'^2 \left(\lambda^2 - \frac{9}{4}\right) = 0.$$

Isso nos mostra que  $\lambda = -\frac{3}{2}$ . Ou seja,  $\psi_0(z) = e^{-\frac{3}{2}A(z)}$ , ou ainda:

$$\psi_0(z) = (k|z| + 1)^{-\frac{3}{2}}. \quad (2.57)$$

Vemos que o modo zero tem uma função de onda cujo pico ocorre em  $z = 0$  [90]. Como iremos ver, as interações gravitacionais são mediadas predominantemente pelo modo-zero. A gravidade é então localizada na brana de Planck, enquanto que na brana TeV sentimos apenas a "calda" dessa função de onda. Dessa forma, no modelo Randall-Sundrum, a explicação para a fraqueza da gravidade está relacionada ao fato dela estar localizada longe de onde vivemos. Isso contrasta com o modelo ADD, que explica a fraqueza da gravidade devido ela se diluir no grande volume da dimensão extra.

Podemos mostrar que o modo zero gravitacional é realmente localizado. Pegando a ação gravitacional efetiva

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int d^4x R \sqrt{-g}. \quad (2.58)$$

Considerando o determinante da métrica e que o escalar de Ricci pode ser escrito como  $R \propto \square h \propto \eta^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu}$ , podemos ainda escrever a ação (2.58) como

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{5A}{2}} \int d^4x \sqrt{-g_i} \eta_{\mu\nu} \square h_{\mu\nu}. \quad (2.59)$$

Ao fazermos a integral na dimensão extra, obtemos  $\frac{4}{3k}$ . Como o resultado é finito, podemos dizer que o modo zero gravitacional é localizado. Vejamos a representação gráfica

### 2.3.2.5 Modos Massivos

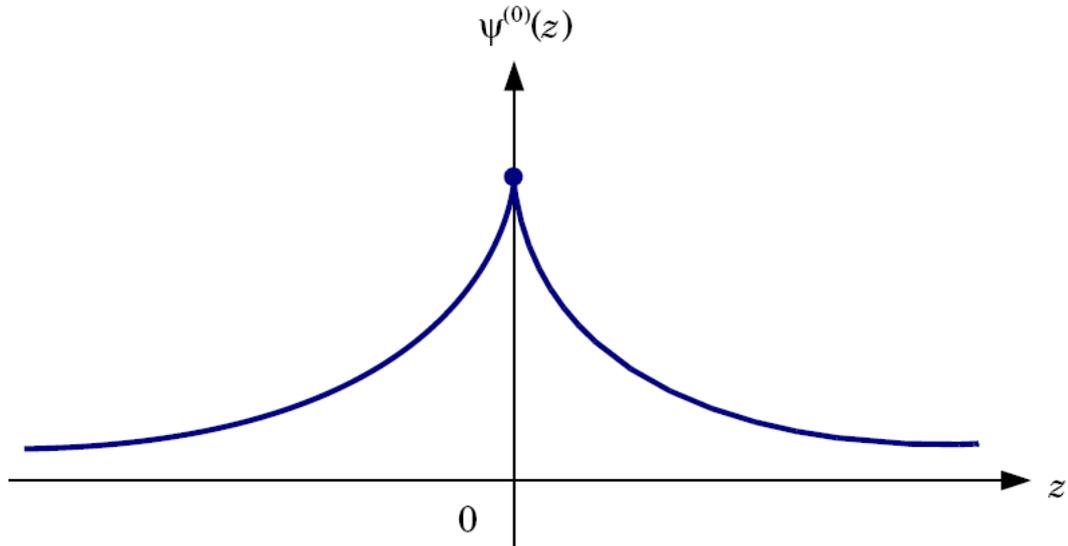
A função de onda para os modos massivos de KK é:

$$-\psi''_n(z) + \left[ \frac{15}{4} \frac{k^2}{(k|z| + 1)^2} - \frac{3k(\delta(z) - \delta(z - Lz))}{k|z| + 1} \right] \psi_n(z) = m_n^2 \psi_n(z). \quad (2.60)$$

Com exceção do modo zero, que é um estado ligado, os outros modos de KK não estão necessariamente localizados nas branas, dessa forma eles podem estar ao longo da dimensão extra. Resolveremos agora a equação (2.60) na região entre as branas. Dessa forma à equação (2.60), fica:

$$\psi''_n(z) + \left( m_n^2 - \frac{15k^2}{4(k|z| + 1)^2} \right) \psi_n(z) = 0. \quad (2.61)$$

Figura 5 – Localização do gráviton em torno da brana de Planck



Fonte: Adaptado de [90]

Essa é uma equação de Bessel de segunda ordem, cuja solução geral é dada por [96]:

$$\psi_n(z) = \left( |z| + \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \zeta_2 \left[ m_n \left( |z| + \frac{1}{k} \right) \right]. \quad (2.62)$$

Onde  $\zeta_2$  é a combinação linear das funções de Bessel de primeiro e segundo tipo. Logo a solução geral é dada por:

$$\psi_n(z) = \left( |z| + \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ a_n J_2 \left[ m_n \left( |z| + \frac{1}{k} \right) \right] + b_n Y_2 \left[ m_n \left( |z| + \frac{1}{k} \right) \right] \right\}. \quad (2.63)$$

Aqui  $a_n$  e  $b_n$  são coeficientes a serem determinados.

Para determinar esses coeficientes usamos os limites assintóticos de  $J_2$  e  $Y_2$  para pequenos valores de  $m_n |z|$ , e as condições de contorno (2.55) e uma mudança de variável  $U = |z| + \frac{1}{k}$ , dessa forma encontramos

$$a_n = \frac{4k^2 b_n}{m_n^2 \pi}. \quad (2.64)$$

Assim, ficamos com a função de onda dada por:

$$\psi_n(z) = N_n \left( |z| + \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ Y_2 \left( m_n |z| + \frac{1}{k} \right) + \frac{4k^2}{m_n^2 \pi} J_2 \left[ m_n \left( |z| + \frac{1}{k} \right) \right] \right\}. \quad (2.65)$$

Onde  $N_n$  é uma constante de normalização. Como  $\frac{k}{m_n} > 1$  o termo com  $J_2$  domina a expressão

da função de onda. Usando a condição de normalização  $\int_{-L}^L |\psi|^2 dz = 1$ , encontramos:

$$N_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi m_n^{\frac{5}{2}}}{4k^2 \sqrt{L}}. \quad (2.66)$$

Dessa forma à aproximação para a função de onda dos estados de KK no limite de grande  $m_n |z|$  é:

$$\psi_n(z) = \frac{\cos\left(m_n |z| - \frac{5\pi}{4}\right)}{\sqrt{L}}. \quad (2.67)$$

### 2.3.2.6 Espectro Gravitacional

Se considerarmos as duas branas, teremos duas condições de contorno. Dessa forma, podemos quantizar as massas dos modos de KK. A derivada da função de onda (2.62), sem considerar as aproximações feitas nos limites de grande e pequeno  $m_n |z|$  é, de acordo com [96], dada por:

$$\begin{aligned} \psi'_n(z) = m_n \left(|z| + \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}} & \left\{ a_n J_1 \left[ m_n \left(|z| + \frac{1}{k}\right) \right] + b_n Y_1 \left[ m_n \left(|z| + \frac{1}{k}\right) \right] \right\} + \\ & - \frac{3}{2} \left(|z| + \frac{1}{k}\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{ a_n J_2 \left[ m_n \left(|z| + \frac{1}{k}\right) \right] + b_n Y_2 \left[ m_n \left(|z| + \frac{1}{k}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Utilizando as condições de contorno (2.55), juntamente com a equação acima, obtemos a seguinte equação:

$$J_1\left(\frac{m_n}{k}\right) Y_1 \left[ m_n \left(|z| + \frac{1}{k}\right) \right] - Y_1\left(\frac{m_n}{k}\right) J_1 \left[ m_n \left(|z| + \frac{1}{k}\right) \right] = 0. \quad (2.69)$$

Voltando para a coordenada  $y$ , que efetivamente representa a distância ao longo da dimensão extra, lembrando a equação (2.40), temos:

$$z + \frac{1}{k} \approx \frac{e^{kz}}{k}. \quad (2.70)$$

Podemos escrever então:

$$\begin{aligned} J_1 \left[ m_n \left(|z| + \frac{1}{k}\right) \right] & \approx J_1 \left( m_n \frac{e^{kz}}{k} \right) \\ Y_1 \left[ m_n \left(|z| + \frac{1}{k}\right) \right] & \approx Y_1 \left( m_n \frac{e^{kz}}{k} \right). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Na aproximação para massas pequenas  $\frac{m_n}{k} \ll 1$ , as funções de Bessel do primeiro tipo comportam-

se, como:

$$\begin{aligned} J_1\left(\frac{m_n}{k}\right) &\approx \frac{m_n}{k} \\ Y_1\left(\frac{m_n}{k}\right) &\approx \ln\left(\frac{m_n}{2k}\right) \frac{m_n}{k}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Numericamente  $-Y_1(x) \gg J_1(x)$ . Como  $\frac{m_n}{k} \ll 1$  o primeiro termo em 2.69 é nulo, e no segundo, devido  $-Y_1(x) \gg J_1(x)$ , temos que:

$$\begin{aligned} J_1\left[m_n\left(|z| + \frac{1}{k}\right)\right] &= 0 \\ J_1\left[m_n \frac{e^{kL}}{k}\right] &= 0 \\ J_n &= \frac{m_n e^{kL}}{k} \\ m_n &= e^{-kL} J_n k \end{aligned} \quad (2.73)$$

Onde  $J_n$  são os zeros da função de Bessel  $J_1(J_n) = 0$ .

Como  $k$  é um valor da ordem da escala de Plack, e o fator  $exp(-kL)$  na brana TeV foi fixado para resolver o problema da hierarquia, as massas dos estados de KK são da ordem de TeV. Isso implica na possibilidade da observação de ressonâncias individuais dos primeiros estados de KK em colisores de partículas, em um futuro próximo.

### 2.3.2.7 Limite Newtoniano

Vamos agora ver se esse modelo reproduz as leis de Newton. Iremos ver como fica o potencial Newtoniano devido a interação de duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente. Esse potencial vai ter uma contribuição tanto do modo zero quanto dos modos massivos. Da equação (2.52), se fizermos  $h_{\mu\nu}(x) = \phi(x)$ ,  $m = 0$  e considerarmos um potencial estático, a equação (2.52) se reduz a

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right] = 0. \quad (2.74)$$

Isso nada mais é do que a equação de Laplace, que admite uma solução do tipo

$$\phi(r) = -\frac{A}{r}. \quad (2.75)$$

Onde  $A$  pode ser escolhido como  $A = G_N m_1 m_2$ , com o intuito de reproduzir a gravidade Newtoniana entre duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$  na brana em  $z = 0$ . Vejamos agora a contribuição devido aos modos massivos.

Como o potencial (2.54) vai a zero quando  $|z| \rightarrow \infty$ , os modos massivos de KK representam um contínuo para os valores de massa  $m^2 > 0$ . Dessa forma uma medida própria

deles é dada por  $dm$  [97]. A contribuição devido ao espectro dos modos massivos é então

$$\frac{G_N}{k} m_1 m_2 \int_0^\infty dm \frac{m e^{-mr}}{k r}. \quad (2.76)$$

Considera-se o potencial Yukawa nesse termo devido a massa dos modos ser diferente de zero. O fator de correção  $\frac{m}{k}$  vem da função de onda contínua  $\psi(z)$  para  $m^2 \neq 0$  (2.62) em  $z = 0$ . A constante  $\frac{G_N}{k}$  é o acoplamento fundamental da gravidade  $\frac{1}{M}$ . O potencial completo fica

$$\phi(r) \approx \frac{G_N m_1 m_2}{r} + \frac{G_N}{k} m_1 m_2 \int_0^\infty dm \frac{m e^{-mr}}{k r}. \quad (2.77)$$

Fazendo a integração obtemos

$$\phi(r) \approx \frac{G_N m_1 m_2}{r} \left( 1 + \frac{1}{k^2 r^2} \right). \quad (2.78)$$

Assim, o modelo RS(II) reproduz a gravidade convencional de Newton mais um termo de correção proporcional a  $\frac{1}{r^3}$  proveniente dos modos massivos de KK.

### 3 REVISÃO DE LOCALIZAÇÃO DE CAMPOS BOSÔNICOS E CONDIÇÕES DE CONSISTÊNCIA

Apesar do grande sucesso alcançado pelos modelos RS, o mesmo deixou alguns problemas em aberto. Como por exemplo, o confinamento de campos vetoriais nas membranas. Neste capítulo discutiremos a localização de campos bosônicos. Veremos que a localização do campo de spin zero, assim como a da gravidade, não é problemática[8, 9]. Até mesmo a localização de férmions é possível no cenário de mundo branas[9, 98]. Mas quando passamos para a localização do campo com spin um, a situação é um pouco mais complicada. Mostraremos alguns mecanismos propostos para solucionar o problema da localização de campos vetoriais. E ao final, mostraremos as relações de consistência construídas em [30], e aplicamos tais consistências ao modelo de multi-branas.

#### 3.1 Campo Escalar

Consideramos aqui o caso bem simples de um campo escalar real não massivo em um espaço  $D$  dimensional. Vamos considerar uma generalização do RS-II, no sentido de que agora estamos em um espaço  $D$ -dimensional, e teremos uma  $p$ -brana. Onde  $p$  é o número de dimensões espaciais da brana. A métrica que utilizamos é a usual do modelo RS

$$ds^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (3.1)$$

Onde  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica de Minkowski.

A ação para este campo é da forma

$$S = -\frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{-g} g^{AB} \partial_A \Phi \partial_B \Phi. \quad (3.2)$$

E a equação de movimento é dada por

$$\partial_A [\sqrt{-g} g^{AB} \partial_B \Phi] = 0. \quad (3.3)$$

$$\partial_5^2 \Phi + (p+1)A'(y) \partial_5 \Phi + e^{-2A} \square \Phi = 0, \quad (3.4)$$

Usando uma separação de variáveis  $\Phi(x, y) = \phi(x)f(y)$ , encontra-se as equações

$$f''(y) + (p+1)A' f'(y) + m^2 e^{-2A} f(y) = 0 \quad (3.5)$$

e

$$\square \phi(x) = m^2 \phi(x). \quad (3.6)$$

No caso em que  $m = 0$  a equação (3.5) admite as seguintes soluções

$$f_{01} = C \quad e \quad f_{02} = \int dy e^{-(p+1)A(y)}. \quad (3.7)$$

O sobrescrito é apenas para indicar que são soluções referentes ao modo zero. A condição de contorno que se assume é  $f_0(y \rightarrow \infty) < \infty$ . Desta forma, apenas a primeira solução acima satisfaz essa condição. O próximo passo é ver como fica a ação efetiva. Abrindo 3.2 em componentes temos

$$S = -\frac{1}{2} \int d^{D-1}x \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{(P-1)A} dy C^2 \right]. \quad (3.8)$$

Onde usamos o fato de que a solução para  $\Phi$  é da forma  $\Phi(x) = C\phi(x)$ .

A condição para que a ação efetiva 3.8 seja localizada é que a integral entre colchetes, que chamamos de  $I$  seja finita. Para isso, temos que ter  $P > 1$  e  $A(y) < 0$ . Assim vemos que para o caso do campo escalar não existe problema com relação ao confinamento no que diz respeito a dimensionalidade. Para o caso  $D = 5$  avaliado em [9], temos que

$$I = \frac{2C^2}{k^2}. \quad (3.9)$$

### 3.2 Campo de Gauge

Vamos agora trabalhar com o campo de gauge nesse mesmo cenário. Diferentemente do campo escalar, a localização do campo de gauge não é tão simples. Isso devido o mesmo possuir simetria conforme, o que faz com que toda informação advinda do fator de dobra seja eliminada. Consideramos aqui a ação de um campo de gauge não massivo. Dessa forma a ação no Bulk é dada por

$$S = -\frac{1}{4} \int d^Dx \sqrt{-g} F^{MN} F_{MN}. \quad (3.10)$$

Onde  $F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M$ . Variando essa ação com relação ao campo  $A_M$ , obtemos a seguinte equação de movimento

$$\partial_N (\sqrt{-g} g^{MP} g^{NQ} F_{PQ}) = 0. \quad (3.11)$$

E o gauge utilizado é  $\partial_\mu A^\mu = A_y = 0$ .

A partir de (3.11), obtemos

$$\square A^\nu(x, y) + e^{-A(y)(p-3)} \partial_5 [e^{(p-1)A(y)} \partial_5 A^\nu(x, y)] = 0. \quad (3.12)$$

Fazendo uso de uma separação de variáveis na forma  $A_\mu(x, y) = A_\mu(x) f(y)$ , obtemos as seguintes equações

$$\begin{aligned}\square A^\mu(x) &= m^2 A^\mu(x) \\ f''(y) + A'(y)(p-1)f'(y) &= -m^2 e^{-2A(y)} f(y).\end{aligned}\tag{3.13}$$

Onde  $f'(y) = \frac{df}{dy}$  e  $A_\mu(x)$  é o campo de gauge sobre a p-brana.

As soluções para o modo zero na segunda equação em (3.13), são

$$f_{01}(y) = C \quad e \quad f_{02}(y) = \int dy e^{-(p-1)A(y)}.\tag{3.14}$$

Como  $A(y) < 0$ , a segunda solução em (3.14) não é normalizável. Dessa forma ficaremos apenas com a solução constante, e a solução completa é  $A_\mu(x) = CA_\mu(x)$ . Usando essa solução, à ação efetiva fica

$$S = -\frac{1}{4} \int d^{D-1}x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \left[ C^2 \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{A(D-5)} \right].\tag{3.15}$$

Dessa forma a integral de localização fica dada por

$$I = C^2 \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{A(D-5)}.\tag{3.16}$$

Perceba que para  $D > 5$  não existe nenhum problema na localização do campo de gauge. No entanto, o caso com  $D = 5$  é problemático, pois ele não localiza à ação efetiva para o campo de gauge. Dessa forma, se faz necessário buscar alternativas para solucionar o problema da localização do campo de gauge em  $D = 5$ . Veremos algumas propostas nas seções seguintes.

### 3.3 Modelos para à Localização do campo de gauge

Nesta seção descreveremos alguns dos modelos que foram criados no intuito de solucionar o problema da localização do campo de gauge  $U(1)$  em  $5 - D$ . Em essência, o que deve ser feito é acrescentar algum potencial na ação do campo livre ou colocar uma interação com algum outro campo. Começaremos descrevendo um modelo criado por Zhen-Hua Zhao, Qun-Ying Xie e Yuan Zhong [16].

A proposta feita por eles é acrescentar um termo de massa dinâmico, na ação em 5-D, proporcional ao escalar de Ricci. Esse mecanismo pode ser usado em branas finas e espessas com dimensão finita ou infinita. Eles impõem uma condição de que o espaço  $5 - D$  seja assintoticamente  $AdS_5$ . Com essa imposição eles provam que não existem modos taquiônicos no espectro de KK.

A métrica usada é a mesma que (3.1), e à ação dada Por

$$S = - \int d^4x dy \sqrt{-g} \left( \frac{1}{4} g^{MN} g^{RS} F_{MR} F_{NS} + \frac{1}{2} M^2 g^{MN} A_M A_N \right), \quad (3.17)$$

onde  $M^2 = -\frac{1}{16}R$ . A parametrização do campo de gauge é dada por  $A_M = (\bar{A}_\mu + \partial_\mu \phi, A_5)$ . Onde  $\bar{A}_\mu$  é a componente transversa que satisfaz a relação  $\partial_\mu \bar{A}^\mu = 0$  e  $\phi$  é a componente longitudinal. Substituindo essa decomposição na ação e usando a condição da componente transversa, podemos separar à ação na parte vetorial e na parte escalar. A parte vetorial da ação é dada Por

$$S_V = - \int d^4x dy \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{4} g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}_{\lambda\rho} + \frac{1}{2} g^{55} g^{\mu\nu} \partial_5 \bar{A}_\mu \partial_5 \bar{A}_\nu + \frac{M^2}{2} g^{\mu\nu} \bar{A}_\mu \bar{A}_\nu \right]. \quad (3.18)$$

Fazendo-se a variação dessa ação com relação ao campo  $A_\mu$  obtêm-se

$$\partial_\nu \bar{F}^{\mu\nu} - \partial_5 (e^{2A} \partial_5 \bar{A}^\mu) + M^2 e^{2A} \bar{A}^\mu = 0. \quad (3.19)$$

Supondo uma solução da forma  $\bar{A}_\mu(x, y) = \sum_n A_\mu^n(x) \chi(y)$ , obtêm-se as equações

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{\mu\nu} &= -m^2 A_\mu \\ -\partial_5 (e^{2A} \partial_5 \chi_n) + M^2 e^{2A} \chi_n &= m^2 \chi_n. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Usando o segundo termo de (3.18), a solução para  $\bar{A}_\mu$  e a equação (3.20), temos

$$S_V = -\frac{1}{4} \sum_n \int dy \chi_n^2 \int d^4x \left( \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\rho} F_{\mu\nu}^{(n)} F_{\lambda\rho}^{(n)} + 2m_n^2 \eta^{\mu\nu} A_\mu^{(n)} A_\nu^{(n)} \right). \quad (3.21)$$

Como já sabemos, para que a teoria acima seja localizada na brana, é preciso que a integral  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_n^2(y) dy < \infty$ .

Usando a seguinte transformação para o campo  $\chi$

$$\chi_n = e^{-A} \tilde{\chi}_n. \quad (3.22)$$

A equação (3.20) pode ser reescrita como

$$-\tilde{\chi}_n'' + (A'' + (A')^2 + M^2 - m_n^2 e^{-2A}) \tilde{\chi}_n = 0. \quad (3.23)$$

E para o modo zero temos

$$-\tilde{\chi}_0'' + \left( \frac{3}{2} A'' + \frac{9}{4} (A')^2 \right) \tilde{\chi}_0 = 0. \quad (3.24)$$

Onde utilizamos  $M^2 = -\frac{1}{16}R$ , sendo  $R$  o escalar de Ricci.

A solução para à equação acima é  $\tilde{\chi}_0 = c_0 e^{\frac{3A}{2}}$ , que substituída em (3.22) nos leva a

$$\chi_0 = c_0 e^{\frac{A}{2}}. \quad (3.25)$$

Com essa solução a integral de localização torna-se

$$I = c_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^A dy. \quad (3.26)$$

Devido o integrando em (3.26) ser contínuo de  $-\infty$  a  $\infty$ , a convergência da integral é determinada pelo comportamento assintótico do integrando no infinito. Ao considerar que o espaço  $5D$  é assintoticamente  $AdS_5$  quando  $y \rightarrow \pm\infty$ , temos que o fator de dobra tem o seguinte comportamento assintótico

$$A(y)|_{y \rightarrow \pm\infty} \rightarrow -k|y|. \quad (3.27)$$

Com essa condição o comportamento assintótico do integrando em (3.26) é

$$e^A|_{y \rightarrow \pm\infty} \rightarrow e^{-k|y|}. \quad (3.28)$$

Dessa forma a integral em (3.26) é convergente.

### 3.3.1 Gerando a P-brana

Até agora discutimos a localização em branas finas. Nessa subseção apresentaremos um modelo bem famoso para a localização do campo de gauge em uma membrana espessa; localização através do campo escalar denominado dÍlaton [10]. Inicialmente, discutimos como é gerada a membrana espessa. Em seguida, discutimos como a introdução do dÍlaton possibilita a localização do campo de gauge.

A brana, nesse caso, é gerada por um campo escalar. E a ação para o modelo de gravidade acoplada com esse campo escalar é dada por [10]

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} \left( 2M^3 R - \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - V(\phi) \right). \quad (3.29)$$

A métrica é dada por (3.1), onde  $A(y)$  é uma função suave da dimensão extra. Fazendo-se a variação dessa ação com relação à métrica e o campo, encontramos, respectivamente, as seguintes equações de movimento

$$R_{MN} - \frac{1}{2} R g_{MN} = \frac{1}{4M^3} \left[ \partial_M \phi \partial_N \phi - g_{MN} \left( \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + V(\phi) \right) \right] \quad (3.30)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_M [\sqrt{-g} g^{MN} \partial_N \phi] = \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}. \quad (3.31)$$

As componentes não nulas do tensor de Ricci e o seu respectivo escalar são:

$$R_{\mu\nu} = -(A'' + 4(A')^2)g_{\mu\nu} \quad (3.32)$$

$$R_{55} = -4(A'' + (A')^2) \quad (3.33)$$

$$R = -(20(A')^2 + 8A''). \quad (3.34)$$

As componentes 55 e  $\mu\nu$  de (3.30), levá-nos as seguintes equações

$$\begin{aligned} 24M^3(A')^2 &= \frac{(\phi')^2}{2} - V(\phi) \\ \frac{(\phi')^2}{2} + V(\phi) &= -12M^3A'' - 24M^3(A')^2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Subtraindo as duas equações acima, obtemos

$$A'' = -\frac{1}{12M^3}(\phi')^2. \quad (3.36)$$

Integrando duas vezes a equação (3.36), e usando o valor de  $\phi$  como  $\phi = v \tanh(ay)$ , encontramos a expressão para o fator de dobra

$$A(y) = -\beta \ln[\cosh^2(ay)] - \frac{\beta}{2} \tanh^2(ay), \quad (3.37)$$

onde  $\beta = \frac{v^2}{36M^3}$ .

Esse fator de dobra também é localizado e no limite  $y \rightarrow \infty$  ele torna-se o fator de dobra do modelo RS normal

$$e^{2A(y)} = \frac{e^{-\beta \tanh^2(ay)}}{[\cosh^2(ay)]^{2\beta}} \propto e^{-4a\beta|y|} \quad y \rightarrow \infty. \quad (3.38)$$

A diferença desse fator de dobra para o caso usual, é que esse é suavizado devido o campo escalar que gera a p-brana, vejamos os fatores de dobra nos dois casos

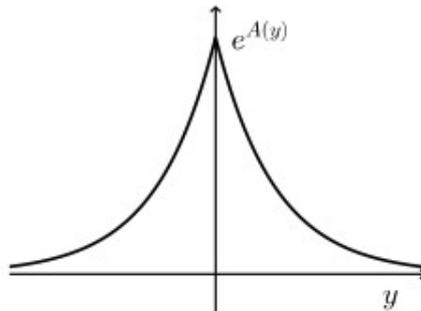


Figura 6: Fator de dobra Modelo Randall Sundrum

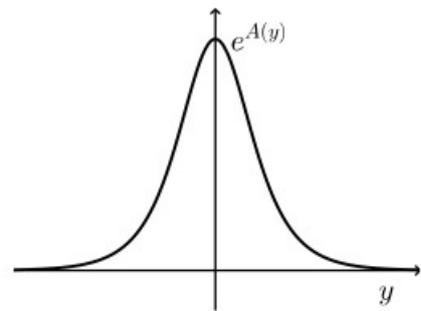
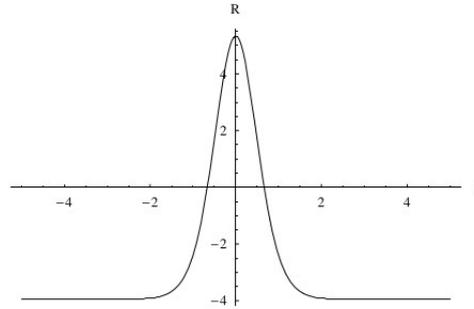


Figura 7: Fator de dobra modelo suavizado

Ao plotarmos o escalar de Ricci usando (3.37), encontramos

Figura 8 – Escalar de Ricci no modelo suavizado



Fonte: Adaptado de [100]

Podemos ver que nas regiões próximas a origem (local onde se encontra a brana espessa) a curvatura varia com  $y$  e tende a um valor constante e negativo quando  $y \rightarrow \pm\infty$ . Vemos assim, que longe da brana, a geometria do espaço tempo se torna  $AdS_5$ , como no modelo RS original.

Uma forma de encontrar uma solução para as equações de movimento, consiste na utilização de um superpotencial (uma técnica em que equações diferenciais de segunda ordem são transformadas em equações de primeira ordem) [10,99,100]. Esse superpotencial é definido como  $\phi' = \frac{\partial W}{\partial \phi}$ . Primeiramente, podemos encontrar o potencial para o campo escalar em termos do fator de dobra

$$V(\phi) = -6M^3(A'' + 4(A')^2). \quad (3.39)$$

Substituindo o valor de  $A(y)$  encontrado em (3.37), temos

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2 - \frac{\lambda}{108M^3}\phi^2(\phi^2 - 3v^2)^2. \quad (3.40)$$

Perceba que, no limite flat  $M \rightarrow \infty$ , o potencial acima reduz-se ao conhecido potencial de dupla parede [101]. Olhando para a equação (3.36), podemos dizer que o superpotencial é dado por  $W = -12M^3A'$ . E assim podemos escrever o potencial  $V(\phi)$  em termos do superpotencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{1}{6M^3} W^2. \quad (3.41)$$

Usando a derivada do fator de dobra  $A(y)' = -a\beta \tanh(ay)(2 + \text{sech}^2(ay))$  e o valor do campo escalar, encontra-se o superpotencial em termos do campo escalar

$$W(\phi) = av\phi \left( 1 - \frac{\phi^2}{3v^2} \right). \quad (3.42)$$

Embora o método do superpotencial seja inspirado em supersimetria, a configuração usada aqui

não é supersimétrica.

### 3.3.2 Acoplamento com o Dilaton

Vimos que podemos modelar nosso universo por uma parede de domínio formada por um campo escalar. Esses modelos são inspirados em D-branas, que são soluções da teoria de corda. A diferença entre uma parede de domínio e uma D-brana, é que a última possui campos de gauge no Bulk oriundos de cordas abertas [10]. Enquanto que paredes de domínio não possuem campos de gauge no bulk. Dessa forma se faz necessário a introdução de outros campos no Bulk no intuito de localizar os campos de gauge em paredes de domínio. O campo que é introduzido aqui é um campo escalar denominado dÍlaton ( $\pi$ ). Ao considerarmos o dÍlaton, a ação para o sistema gravidade-kink-dilaton é dada Por

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} \left[ 2M^3 R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial\pi)^2 - V(\phi, \pi) \right]. \quad (3.43)$$

Onde  $\phi$  é o campo escalar responsável por formar a brana, e  $\pi$  é o dÍlaton.

As equações de movimento que obtemos a partir de (3.43) são

$$R_{MN} - \frac{1}{2}R G_{MN} = \frac{1}{4M^3} \left[ \partial_M \phi \partial_N \phi + \partial_M \pi \partial_N \pi - G_{MN} \left( \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial\pi)^2 + V(\phi, \pi) \right) \right]. \quad (3.44)$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_M (\sqrt{-g} G^{MN} \partial_N \chi) = \frac{\partial V(\phi, \pi)}{\partial \chi}. \quad (3.45)$$

Onde  $\chi = \phi, \pi$ . A métrica agora é dada por

$$ds^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{2B(y)} dy^2 \quad (3.46)$$

Calculando-se as conexões, os tensores de Ricci e substituindo nas equações (3.44) e (3.45), obtemos

$$\begin{aligned} 24M^3 (A')^2 &= \frac{(\phi')^2}{2} + \frac{(\pi')^2}{2} - e^{2B} V \\ -24M^3 (A')^2 - 12M^3 A'' + 12M^3 A' B' &= \frac{(\phi')^2}{2} + \frac{(\pi')^2}{2} + e^{2B} V \\ \chi'' + \chi' (4A' - B') &= e^{2B} \frac{\partial V}{\partial \chi}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Das equações acima temos que

$$(A')^2 = \frac{1}{24M^3} \left( \frac{(\phi')^2}{2} + \frac{(\pi')^2}{2} - e^{2B} V(\phi, \pi) \right). \quad (3.48)$$

Como  $W(\phi, \pi) = -12M^3 A'(y)$ . Substituindo em (3.48) e isolando  $V(\phi, \pi)$ , temos

$$V(\phi, \pi) = e^{-2B} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{W^2}{6M^3} + \frac{(\pi')^2}{2} \right]. \quad (3.49)$$

Escolhendo a seguinte relação entre  $B(y)$  e  $A(y)$ ;  $B(y) = \frac{1}{4}A(y)$ , e substituindo em (3.39), obtemos

$$\pi = -\sqrt{3M^3}A. \quad (3.50)$$

E o potencial fica

$$V = e^{\frac{\pi}{\sqrt{12M^3}}} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{5}{32M^3} W^2 \right]. \quad (3.51)$$

### 3.3.3 Localização do campo de gauge usando o dÍlton

Quando se faz à introdução do campo de gauge na configuração com o dÍlton, à ação toma a seguinte forma

$$S = \int d^5x \sqrt{-G} \left[ 2M^3 R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial\pi)^2 - V(\phi, \pi) - \frac{1}{4g^2} e^{\frac{-\lambda\pi}{2\sqrt{3M^3}}} F_{MN} F^{MN} \right]. \quad (3.52)$$

Onde  $\lambda$  é um parâmetro de acoplamento adimensional. Fazendo-se a variação da ação acima com relação ao campo de gauge, temos

$$\partial_N \left[ \sqrt{-G} e^{\frac{-\lambda\pi}{2\sqrt{3M^3}}} G^{MP} G^{NQ} F_{PQ} \right] = 0. \quad (3.53)$$

Usando o gauge  $\partial_\mu A^\mu = A_5 = 0$ , e a métrica (3.46), a equação de movimento toma a seguinte forma

$$\square A^\nu + e^{\frac{\lambda\pi}{2\sqrt{3M^3}}} e^{-B} \partial_5 \left[ e^{2A-B} e^{\frac{-\lambda\pi}{2\sqrt{3M^3}}} \partial^5 A^\nu \right] = 0. \quad (3.54)$$

Usando-se um ansatz da forma  $A^\mu(x, y) = u^\mu(x)U(y) = u^\mu(0)e^{iPx}U(y)$ , com  $P^2 = -m^2$ , obtem-se

$$-U(y)'' - \left( 2A' - B' - \frac{\lambda\pi'}{2\sqrt{3M^3}} \right) U(y)' = m^2 e^{2(B-A)} U(y). \quad (3.55)$$

Para  $m^2 = 0$ , a equação acima tem como solução  $U_0 = cte$ . Usando o gauge citado acima, à ação efetiva pode ser escrita na forma

$$S = -\frac{1}{4g^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(1+2\lambda)}{4} \frac{\pi}{\sqrt{3M^3}}} dy \int d^4x f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}. \quad (3.56)$$

A primeira integral na ação acima é finita. Assim, graças a introdução do dÍlton, é possível localizar o campo de gauge em uma parede de domínio gerada por um campo escalar.

### 3.3.4 Acoplamento Geométrico

Uma outra forma de fazer a localização do campo de gauge, é através do acoplamento dos campos com o escalar de Ricci [16, 18]. Essa idéia surgiu a partir do trabalho de Ghoruku e Nakamura [12]. Nesse trabalho os autores propuseram uma ação da forma

$$S = - \int d^5x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{4} g^{MN} g^{PQ} F_{MP} F_{NQ} + \frac{1}{2} (M^2 + c\delta(z)) g^{MN} A_M A_N \right). \quad (3.57)$$

No entanto, os autores fazem a introdução de dois parametros ; a massa  $M$  e o acoplamento do campo com a brana  $c$ . Os mesmos não explicam de onde vem esse termo de massa e também não dão uma motivação para a introdução de um acoplamento dos campos com a membrana. A localização do modo zero transversal do campo de gauge é dada mediante as condições  $M > 0$  e  $c = -2k(\sqrt{1 + \frac{M^2}{k^2}} - 1)$ . Dessa forma fixa-se  $c$  em termos de  $M$ , mas  $M$  continua livre.

Ao analisar o termo de potencial na ação (3.57), e comparar com o escalar de Ricci calculado a partir da versão conforme da métrica (3.1)  $R = 16k\delta(z) - 20k^2$ . Obtêm-se que  $c = 16k\lambda$  e  $M^2 = -20k^2\lambda$ . Dessa forma, uma ação para a localização do campo de gauge usando o escalar de Ricci pode ser escrita como

$$S = - \int d^5x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} + \frac{\lambda}{2} R A_M A^M \right]. \quad (3.58)$$

A partir da ação acima, obtemos a seguinte equação de movimento

$$\partial_M (\sqrt{-g} g^{MS} g^{NP} F_{SP}) = -\lambda \sqrt{-g} R g^{NP} A_P. \quad (3.59)$$

Devido a anti-simetria de  $F_{MN}$ , temos que

$$\partial_N (\sqrt{-g} R g^{NP} A_P) = 0. \quad (3.60)$$

Da equação (3.60), e usando a métrica conforme do modelo RS, obtemos

$$e^{3A} R \partial_\mu A^\mu = -\partial_5 (e^{3A} R A_5). \quad (3.61)$$

A parte quadridimensional do campo é dividida da seguinte forma

$$A_T^\mu = \left( \delta_\nu^\mu - \frac{\partial^\mu \partial_\nu}{\square} \right) A^\nu \quad ; \quad A_L^\mu = \frac{\partial^\mu \partial_\nu}{\square} A^\nu. \quad (3.62)$$

Para continuarmos, temos que ver como ficam as equações efetivas para a parte transversal do campo de gauge massivo. Assim como o campo escalar massivo dado por  $A_5 = \phi$ . Diferentemente de alguns trabalhos de localização de campo de gauge [12, 20], onde se faz  $A_5 = 0$ , aqui  $A_5$  será diferente de zero e vai servir justamente para eliminar a parte longitudinal que aparece junto da parte transversal na equação de movimento do campo de gauge. Para

prossequir faremos uso das identidades calculadas em [18]

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu\nu} &= \square A_T^\nu; \\ F^{5\mu} &\equiv \partial_5 A_T^\mu + F_L^{5\mu}; \\ F_L^{\mu 5} &= \frac{\partial^\mu}{\square} \partial_\nu F^{\nu 5}.\end{aligned}\tag{3.63}$$

Abrindo a equação (3.59) para  $N = 5$  e  $N = \nu$  obtemos, respectivamente

$$\partial_\mu F^{\mu 5} + \lambda e^{2A} R A^5 = 0,\tag{3.64}$$

e

$$e^A \square A_T^\nu + \partial_5(e^A \partial_5 A_T^\nu) + \partial_5(e^A F_L^{5\nu}) + \lambda R e^{3A} A_T^\nu + \lambda R e^{3A} A_L^\nu = 0.\tag{3.65}$$

Usando (3.61),(3.63) e (3.64), obtemos

$$\partial_5(e^A F_L^{\mu 5}) = -\lambda e^{3A} R A_L^\nu.\tag{3.66}$$

Substituindo isso em (3.65), temos

$$e^A \square A_T^\nu + \partial_5(e^A \partial_5 A_T^\nu) + \lambda e^{3A} R A_T^\nu = 0.\tag{3.67}$$

Propondo uma decomposição de KK na forma  $A_T^\nu = e^{\frac{-A}{2}} \tilde{A}_T^\nu \psi$  e usando o escalar de Ricci calculado a partir da métrica conforme, obtemos

$$-\psi'' + \left[ (A')^2 \left( \frac{1}{4} - 12\lambda \right) + A'' \left( \frac{1}{2} - 8\lambda \right) \right] \psi = m^2 \psi.\tag{3.68}$$

Propondo uma solução para o modo zero da forma  $\psi = e^{cA}$ , obtemos  $\lambda = 0$  e  $\lambda = -\frac{1}{16}$ . Para  $\lambda = 0$  a solução obtida,  $\psi = e^{\frac{A}{2}}$ , não localiza o campo. Mas para  $\lambda = -\frac{1}{16}$  a solução é dada por  $\psi = e^A$ , e essa localiza o mesmo. A ação efetiva, nesse caso, será dada mais a frente, e veremos que de fato esse tipo de acoplamento é bem poderoso na localização do campo vetorial.

### 3.4 Encontrando as relações de Consistência

Aqui irei encontrar as relações de consistência usando de início uma métrica conforme em um espaço  $D$ -dimensional. Onde  $D = d + n$ , sendo  $d$  o número de dimensões da brana e  $n$  o número de dimensões extras. Tais relações foram construídas originalmente no trabalho [30]. Elas são uma forma de checar, através das equações de Einstein (EE), se os mecanismos de localização desenvolvidos são consistentes com tais equações. A métrica utilizada aqui é dada por

$$ds^2 = \tilde{g}_{MN} dx^M dx^N,\tag{3.69}$$

onde  $\tilde{g}_{MN} = e^{2b\bar{A}(z)} g_{MN}$ . A forma explícita de (3.69) é

$$ds^2 = e^{2b\bar{A}(z)} (g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu + g_{jk}(z) dx^j dx^k). \quad (3.70)$$

Sendo,  $\bar{A}(z) = A(y) = \frac{1}{b} \ln \Omega(z)$ . E  $b = 1$  ou  $b = \frac{3}{4}$ , representando os casos com e sem o dÍlaton, respectivamente.

A conexão encontrada a partir da métrica (3.69) é

$$\tilde{\Gamma}_{IJ}^K = \Gamma_{IJ}^K + b (\delta_I^K \partial_J \bar{A}(z) + \delta_J^K \partial_I \bar{A}(z) - g_{IJ} \partial^K \bar{A}(z)). \quad (3.71)$$

Com o uso dessa conexão, o tensor de Ricci é dado por

$$\tilde{R}_{IJ} = R_{IJ} - b(D-2) [\nabla_I \partial_J \bar{A}(z) - b \partial_I \bar{A}(z) \partial_J \bar{A}(z)] - g_{IJ} b [\square \bar{A}(z) + (bD-2) |\nabla \bar{A}(z)|^2]. \quad (3.72)$$

Em todos os modelos de branas, o acoplamento da ação de Einstein-Hilbert com as ações de matéria é dado por

$$S = \int d^d x d^n y \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2\kappa^2} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}^b(z) + \mathcal{L}^m(x, z) \right]. \quad (3.73)$$

Onde  $\mathcal{L}^b(z)$  é a lagrangiana que da origem a brana, e  $\mathcal{L}^m(x, z)$  é a lagrangiana dos campos de matéria. A partir da equação (3.73), obtêm-se a equação

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R + g_{MN} \Lambda = \kappa^2 (T_{MN}^b + T_{MN}^m). \quad (3.74)$$

Agora, utilizando (3.70), a equação (3.74), e as quantidades geométricas já definidas, calculamos as componentes  $\mu\nu$  e  $jk$  de (3.74). E a partir delas encontramos as relações de consistência. As componentes  $\mu\nu$  e  $jk$  do tensor de Ricci são

$$\tilde{R}_{\mu\nu}(x, z) = R_{\mu\nu}(x) - b g_{\mu\nu}(x) [\bar{A}''(z) + (bD-2) \bar{A}'(z)^2] \quad (3.75)$$

e

$$\tilde{R}_{jk}(x, z) = R_{jk}(z) - b(D-1) \partial_j \partial_k \bar{A}(z) - 2b(b-1) \partial_j \bar{A}(z) \partial_k \bar{A}(z). \quad (3.76)$$

O escalar de Ricci é dado por

$$\tilde{R}(x, z) = e^{-2b\bar{A}(z)} [R(x) + R(z) - \bar{A}''(z) b [d + (D-1)] - [d(bD-2) + 2(b-1)] \bar{A}'(z)^2] \quad (3.77)$$

Para a componente  $\mu\nu$  de (3.74), temos

$$\tilde{R}_{\mu\nu}(x, z) - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu}(x, z) \tilde{R}(x, z) + \tilde{g}_{\mu\nu}(x, z) \Lambda = \kappa^2 [\tilde{T}_{\mu\nu}^b(x, z) + \tilde{T}_{\mu\nu}^m(x, z)]. \quad (3.78)$$

Utilizando as equações (3.75) e (3.77), temos

$$G_{\mu\nu}(x) + g_{\mu\nu}(x)\lambda = \tilde{T}_{\mu\nu}^m(x, z). \quad (3.79)$$

Com  $\lambda = [f(z) - \frac{1}{2}R(z) + e^{2b\bar{A}(z)}\Lambda - \kappa^2 e^{2b\bar{A}(z)}\mathcal{L}^b(z)]$  e  $f(z)$  dado por

$$f(z) = -\bar{A}''b \left[ \frac{2 - (d + (D-1))}{2} \right] - \bar{A}'^2 b [(bD-2) - \frac{1}{2}(d(bD-2) + 2(b-1))]. \quad (3.80)$$

Aqui,  $\lambda$  é interpretado como sendo a constante cosmológica na brana.

Como o lado esquerdo de (3.79), só depende de  $x$ , por consistência, o lado direito também deve depender apenas de  $x$ . Assim,  $\tilde{T}_{\mu\nu}^m(x, z) = \tilde{T}_{\mu\nu}^m(x)$ . Ao procedemos de forma semelhante para as componentes  $j, k$ , encontramos

$$\tilde{T}_{jk}^m(x, z) = \begin{cases} 0 \\ g_{jk} e^{-2\bar{A}(z)} T(x) \end{cases}. \quad (3.81)$$

Aplicaremos agora esses testes no cenário dos modelos de multi-branas. Veremos se o mecanismo de localização utilizado é consistente.

### 3.5 Testando os modelos de Multi-branas

Começaremos com o campo escalar. E na discussão do mesmo comprovaremos que não é necessário a introdução de nenhum termo de acoplamento, seja no termo cinético ou no potencial, no intuito de localizar esse campo.

#### 3.5.1 Campo Escalar

A ação para o campo escalar livre é

$$S = -\frac{1}{2} \int d^5x \sqrt{-g} \partial_M \Phi(x, y) \partial^M \Phi(x, y) \quad (3.82)$$

Utilizamos a coordenada  $y$ , mas os resultados podem ser expressos em termos da coordenada  $z$ , através da transformação  $\frac{dy}{dz} = e^{bA(y)} = \Omega(z)$ .

A solução para o modo zero é dada por  $\Phi_0(x, y) = c\phi(x)$ . Onde  $c$  é uma constante. Agora, utilizando a definição do tensor energia momento:

$$T_{MN}^m(x, y) = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}^m)}{\delta g^{MN}}, \quad (3.83)$$

encontramos o seguinte tensor de energia momento para o campo escalar:

$$T_{MN}^m(x, y) = -\frac{1}{2} g_{MN} \partial_A \Phi \partial^A \Phi + \partial_M \Phi \partial_N \Phi. \quad (3.84)$$

Utilizando (3.84), encontramos as componente  $\mu\nu$  e 55 do tensor energia momento para o campo escalar. São elas:

$$T_{\mu\nu}^m(x, y) = c^2 [\partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \phi(x) + \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}_o(x)] \quad (3.85)$$

e

$$T_{55}^m(x, y) = c^2 \mathcal{L}_0(x). \quad (3.86)$$

Assim as relações (3.85) e (3.86) são consistentes com as relações encontradas, onde aqui  $g_{jk} = g_{55} = e^{2A}$ . Dessa forma, como era de se esperar, a localização do campo escalar é consistente. Vamos agora testar o acoplamento com o dÍlaton.

Na presença do dÍlaton a ação torna-se

$$S = -\frac{1}{2} \int d^5x \sqrt{-g} e^{-\lambda\pi} \partial_M \Phi(x, y) \partial^M \Phi(x, y). \quad (3.87)$$

Onde  $\lambda$  é o acoplamento do campo com o dÍlaton e  $\pi = -\sqrt{3M^3}A(y)$ . O tensor de energia momento nesse caso é dado por

$$T_{MN}^m(x, y) = e^{-\lambda\pi} \left[ -\frac{1}{2} g_{MN} \partial_A \Phi \partial^A \Phi + \partial_M \Phi \partial_N \Phi \right]. \quad (3.88)$$

A componente  $\mu\nu$  é

$$T_{\mu\nu}^m(x, y) = e^{-\lambda\pi} c^2 \left[ \partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \phi(x) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \phi(x) \partial^\alpha \phi(x) \right]. \quad (3.89)$$

Para obedecer a relação encontrada, temos que ter  $e^{-\lambda\pi} = cte$ , o que leva a  $\lambda = 0$ . Como  $\lambda = 0$ , a localização do campo escalar já ocorre de forma natural com ele livre.

### 3.5.2 Campo de Gauge

Vejamos primeiramente o caso livre, cuja à ação é

$$S = -\frac{1}{4} \int d^5x \sqrt{-g} F_{MN} F^{MN}. \quad (3.90)$$

Cuja a solução para o modo zero é  $A_\mu(x, y) = c\hat{A}_\mu(x)$ . O tensor de energia momento é dado por

$$T_{MN}^m(x, y) = g_{MN} \mathcal{L}^m + F_{MD} F_N^D. \quad (3.91)$$

Onde a componente  $\mu\nu$  é dada por

$$T_{\mu\nu}^m(x, y) = e^{-2A} c^2 [\mathcal{L}_0(x) + \hat{F}_{\mu\alpha}(x) \hat{F}_\nu^\alpha(x)]. \quad (3.92)$$

Assim a relação acima não obedece a condição encontrada para a componente  $\mu\nu$  do tensor de energia momento. Como era de se esperar, a localização do campo de gauge livre não é possível.

Com o dÍlaton à ação se torna

$$S = -\frac{1}{4} \int d^5x \sqrt{-g} e^{-\lambda\pi} F_{MN} F^{MN}. \quad (3.93)$$

E o tensor de energia momento é

$$T_{MN}^m(x, y) = e^{-\lambda\pi} \left[ F_{MD} F_N^D - \frac{1}{4} g_{MN} F_{AB} F^{AB} \right]. \quad (3.94)$$

E a componente  $\mu\nu$  é dada por

$$T_{\mu\nu}^m(x, y) = c^2 e^{-\lambda\pi} e^{-2A(y)} \left[ \hat{F}_{\mu\lambda}(x) \hat{F}_\nu^\lambda(x) - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \hat{F}_{\alpha\beta} \hat{F}^{\alpha\beta} \right]. \quad (3.95)$$

Para obedecer a relação encontrada temos que ter  $c^2 e^{-\lambda\pi} e^{-2A(y)} = cte$ , isso leva a  $\lambda = \frac{2}{\sqrt{3M^3}}$ . Usando a componente 55 encontramos a mesma relação para  $\lambda$ . Assim fixamos o valor da constante de acoplamento. Que antes, usando o método da finitude da integral, era  $\lambda > -\frac{1}{4\sqrt{3M^3}}$  calculada em [53].

### 3.5.3 Campo de Kalb Ramond

Vejamos agora o comportamento do campo de Kalb Ramond. A ação no caso livre é dada por

$$S = -\frac{1}{12} \int d^5x \sqrt{-g} F_{MNP} F^{MNP}. \quad (3.96)$$

A solução para o modo zero é dada por  $A_{\mu\nu}(x, y) = \hat{A}^{\mu\nu}(x)c$ . E o tensor de energia momento é da forma

$$T_{MN}^m(x, y) = g_{MN} \mathcal{L}^m + \frac{1}{2} F_{MDF} F_N^{DF}. \quad (3.97)$$

Cuja componente  $\mu\nu$  é dada por

$$T_{\mu\nu}^m(x, y) = e^{-4A(y)} c^2 \left[ \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}_0(x) + \frac{1}{2} \hat{F}_{\mu\rho\theta}(x) \hat{F}_\nu^{\rho\theta}(x) \right]. \quad (3.98)$$

Que pela relação encontrada, mostra que o campo de Kalb-Ramond também não é localizado livremente.

Com a introdução do dÍlaton, à ação torna-se

$$S = -\frac{1}{12} \int d^5x \sqrt{-g} e^{-\lambda\pi} F_{MNP} F^{MNP}. \quad (3.99)$$

E o tensor de energia momento é dado por

$$T_{MN}^m(x, y) = e^{-\lambda\pi} \left[ -\frac{1}{12} g_{MN} F_{ABC} F^{ABC} + \frac{1}{2} F_{MDF} F_N^{DF} \right]. \quad (3.100)$$

Sendo a componente  $\mu\nu$  dada por

$$T_{\mu\nu}^m(x, y) = e^{-\lambda\pi} e^{-4A(y)} c^2 \left[ -\frac{1}{12} \eta_{\mu\nu} \hat{F}_{\alpha\beta\theta}(x) \hat{F}^{\alpha\beta\theta}(x) + \frac{1}{2} \hat{F}_{\mu\rho\theta}(x) \hat{F}_\nu^{\rho\theta}(x) \right]. \quad (3.101)$$

Usando o raciocínio anterior, o valor encontrado para a constante de acoplamento é  $\lambda = \frac{4}{\sqrt{3M^3}}$ . E mais uma vez, conseguimos fixar a constante de acoplamento, que com o método tradicional da localização de campos é  $\lambda > \frac{7}{4\sqrt{3M^3}}$  [53].

### 3.5.4 *q-forma*

Vamos agora generalizar a discussão para o caso da  $q$ -forma, em um espaço  $D$ -dimensional, para uma  $p$ -brana com  $p = D - 2$ . A ação para a  $q$ -forma livre é

$$S = -\frac{1}{2(q+1)!} \int d^D x \sqrt{-g} F_{M_1 \dots M_{q+1}} F^{M_1 \dots M_{q+1}}, \quad (3.102)$$

e o tensor de energia momento é

$$T_{MN}^m(x, y) = g_{MN} \mathcal{L}^m + \frac{(q+1)}{(q+1)!} F_{M B_2 \dots B_{q+1}} F_N^{B_2 \dots B_{q+1}}. \quad (3.103)$$

Considerando  $A_{\mu_1 \dots \mu_{q-1} 5} = \partial^{\mu_1} A_{\mu_1 \dots \mu_q} = 0$  e a solução para o modo zero da forma  $A_{\mu_2 \dots \mu_q}(x, y) = \hat{A}_{\mu_2 \dots \mu_q}(x) c$ , sendo  $c$  uma constante. Então temos que a componente  $\mu\nu$  do tensor energia momento é dada por

$$T_{\mu\nu}^m(x, y) = e^{-2qA(y)} c^2 \left[ \eta_{\mu\nu} \hat{\mathcal{L}}_0(x) + \frac{(q+1)}{(q+1)!} \hat{F}_{\mu\mu_2 \dots \mu_{q+1}}(x) \hat{F}_\nu^{\mu_2 \dots \mu_{q+1}}(x) \right]. \quad (3.104)$$

O tensor acima nos mostra que apenas a localização da zero forma é consistente. Para o caso da  $q$ -forma com o dÍlton à ação torna-se

$$S = -\frac{1}{2(q+1)!} \int d^D x \sqrt{-g} e^{-\lambda\pi} F_{M_1 \dots M_{q+1}} F^{M_1 \dots M_{q+1}}. \quad (3.105)$$

Com a componente  $\mu\nu$  do tensor de energia momento dada por

$$T_{\mu\nu}^m(x, y) = e^{-\lambda\pi} e^{-2qA(y)} c^2 \left[ \eta_{\mu\nu} \hat{\mathcal{L}}_0(x) + \frac{(q+1)}{(q+1)!} \hat{F}_{\mu\mu_2 \dots \mu_{q+1}}(x) \hat{F}_\nu^{\mu_2 \dots \mu_{q+1}}(x) \right]. \quad (3.106)$$

A partir dessa relação, vemos que a localização da  $q$ -forma é consistente para  $\lambda = \frac{2q}{\sqrt{3M^3}}$ . Essa mesma relação é encontrada usando-se a componente 55.

### 3.6 Modelos Com Dois Acoplamentos

Agora aplicaremos as relações de consistência para os casos em que a localização é feita mediante o acoplamento com quantidades geométrica: escalar e tensor de Ricci. Começamos com o campo de gauge.

#### 3.6.1 Campo de gauge

A ação para o campo de gauge com os dois acoplamentos é

$$S = - \int d^5x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} + \frac{\lambda_1}{2} R A_M A^M + \frac{\lambda_2}{2} R_{MN} A^M A^N \right]. \quad (3.107)$$

A solução para o modo zero é dada por  $A_\mu^T(x, z) = \hat{A}_\mu^T e^{bA}$ . Sendo  $b = -(8\lambda_1 + \lambda_2)$ . A componente  $\mu\nu$  do tensor de energia momento é dado por

$$T_{\mu\nu}^m(x, z) = e^{2A(b-1)} \left[ -\frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu}^T(x) \hat{F}_T^{\mu\nu}(x) + \hat{F}_{\mu\lambda}^T(x) F_\nu^{\lambda T}(x) \right]. \quad (3.108)$$

Dessa forma, para que o processo de localização seja consistente, temos que fazer  $b = 1$ . No processo de separação das variáveis, aparece uma equação tipo Schrödinger, cujo o potencial depende de  $A'$  e  $A''$ . E os coeficientes que acompanham  $A'$  e  $A''$  são  $c_1 = \frac{1}{2} - 8\lambda_1 - \lambda_2$  e  $c_2 = \frac{1}{4} - 12\lambda_1 - 3\lambda_2$ . Sendo que esses coeficientes obedecem a relação  $c_1^2 = c_2$ . Usando essa última relação, e o fato de que  $1 = -(8\lambda_1 + \lambda_2)$ , conseguimos fixar os dois valores das constantes de acoplamento:  $\lambda_1 = -\frac{1}{12}$  e  $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$ . E a ação efetiva nesse caso fica

$$S_{efe} = - \int e^{3A} dz \int d^4x \frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu}^T(x) \hat{F}_T^{\mu\nu}(x). \quad (3.109)$$

Vejamos agora o comportamento do campo de Kalb Rammond.

#### 3.6.2 Campo de Kalb-Ramond

A ação para o campo de Kalb Ramond nesse cenário é

$$S = - \int d^5x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{12} F_{M_1 M_2 M_3} F^{M_1 M_2 M_3} + \frac{\lambda_1}{4} R A_{M_1 M_2} A^{M_1 M_2} + \frac{\lambda_2}{4} g^{N_1 N_2} R^{M_1 M_2} A_{M_1 N_1} A_{M_2 N_2} \right]. \quad (3.110)$$

A solução para o modo zero é dada por  $A_{\mu\nu}^T = e^{bA} \hat{A}_{\mu\nu}^T(x)$ , com  $b = -(8\lambda_1 + \lambda_2)$ . E as constantes  $c_1 = -(\frac{1}{2} + 8\lambda_1 + \lambda_2)$  e  $c_2 = \frac{1}{4} - 12\lambda_1 - 3\lambda_2$ . A componente  $\mu\nu$  do tensor de energia momento é dada por

$$T_{\mu\nu}^m(x, z) = e^{A(2b-4)} \left[ \frac{1}{12} \eta_{\mu\nu} \hat{F}_{\alpha\theta\beta}^T \hat{F}_T^{\alpha\theta\beta} + \frac{1}{2} \hat{F}_{\mu\lambda\rho}^T(x) \hat{F}_\nu^{\lambda\rho T}(x) \right]. \quad (3.111)$$

Assim a localização é consistente para  $b = 2$ . Usando novamente a relação  $c_1^2 = c_2$  e  $b = 2$ , fixamos as constantes de acoplamento em  $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$  e  $\lambda_2 = \frac{2}{3}$ . A ação efetiva é dada por

$$S = -\frac{1}{12} \int e^{3A} dz \int d^4x \hat{F}_{\mu\nu\rho}^T(x) \hat{F}_T^{\mu\nu\rho}(x). \quad (3.112)$$

Por fim, analisaremos o caso da  $q$ -forma em um espaço  $D$ -dimensional.

### 3.6.3 $q$ -forma

A ação para a  $q$ -forma nesse caso fica

$$S = - \int d^Dx \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2(q+1)!} F_{M_1 \dots M_{q+1}} F^{M_1 \dots M_{q+1}} + \frac{\lambda_1}{2q!} g^{M_2 N_2} \dots g^{M_{q+1} N_{q+1}} A_{M_2 \dots M_{q+1}} A_{N_2 \dots N_{q+1}} \right. \\ \left. + \frac{\lambda_2}{2q!} g_{M_1 N_1} R^{M_1 M_2} g^{N_1 N_2} g^{M_3 N_3} \dots g^{M_{q+1} N_{q+1}} A_{M_2 M_3 \dots M_{q+1}} A_{N_2 N_3 \dots N_{q+1}} \right] \quad (3.113)$$

Aqui a solução para o modo zero é dada por  $A_T^{\mu_1 \dots \mu_q}(x, z) = \hat{A}_T^{\mu_1 \dots \mu_q}(x) e^{-(2\lambda_1(D-1) + \lambda_2)A}$ . E as constantes  $c_1$  e  $c_2$  são  $c_1 = \frac{\alpha_q}{2} - 2\lambda_1(D-1) - \lambda_2$  e  $c_2 = \frac{\alpha^2}{4} - \lambda_1(D-1)(D-2) - \lambda_2(D-2)$ . Onde  $\alpha_q = D - 2(q+1)$ . O tensor de energia momento é

$$T_{\mu\nu}^m(x, z) = e^{(-2q - 4\lambda_1(D-1) - 2\lambda_2)A} \left[ -\frac{1}{2(q+1)!} \eta_{\mu\nu} \hat{F}_{\mu_1 \dots \mu_{q+1}}^T(x) \hat{F}_T^{\mu_1 \dots \mu_{q+1}}(x) \right. \\ \left. + \frac{(q+1)}{(q+1)!} \hat{F}_{\mu\beta_2 \dots \beta_q}^T(x) \hat{F}_{\nu T}^{\beta_2 \dots \beta_q}(x) \right]. \quad (3.114)$$

Para manter a consistência, temos que ter  $-2\lambda_1(D-1) - \lambda_2 = q$ . Usando as constantes  $c_1$  e  $c_2$  temos os valores fixados das constantes de acoplamento  $\lambda_1 = \frac{-q^2}{(D-1)(D-2)}$  e  $\lambda_2 = \frac{-q[(D-2) - 2p]}{(D-2)}$ . E a ação efetiva fica

$$S_{efe} = -\frac{1}{2(q+1)} \int dz e^{A(D-2)} \int d^{D-1}x \hat{F}_{\mu_1 \dots \mu_{q+1}}^T(x) \hat{F}_T^{\mu_1 \dots \mu_{q+1}}(x). \quad (3.115)$$

Vale ressaltar que para esses modelos com acoplamentos geométricos, e considerando as relações de consistência advindas das equações de Einstein, apenas os casos com os dois acoplamentos são consistentes.

## 4 LOCALIZAÇÃO DE UM MODELO COM DOIS CAMPOS DE GAUGE

Neste capítulo estudaremos a localização de um modelo com dois campos de gauge. Esse modelo foi proposto originalmente por Holdom em 1985. A fenomenologia do mesmo está relacionada com a existência de milicargas [58, 62–66] (partículas com cargas menores do que a do elétron). Essa construção também pode ser usada para explicar matéria escura [59].

### 4.1 Dois Campos de Gauge em 5 Dimensões com Acoplamento Mínimo

Nesta seção, generalizamos para 5 dimensões o modelo apresentado em [66], e tentamos localizá-lo em uma membrana tipo delta. Mesmo com os termos de mistura dos campos, as equações de movimento são obtidas facilmente, uma vez que não estamos considerando termos de massa. Veremos que essa simples generalização não vai ser suficiente para localizar os dois campos. A ação generalizada tem a forma:

$$S = - \int d^5x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{4} g^{MP} g^{NQ} F_{MN}^{(1)} F_{PQ}^{(1)} + \frac{1}{4} g^{MP} g^{NQ} F_{MN}^{(2)} F_{PQ}^{(2)} + \frac{\lambda}{2} g^{MP} g^{NQ} F_{MN}^{(1)} F_{PQ}^{(2)} \right]. \quad (4.1)$$

Consideramos uma métrica conforme dada por

$$ds^2 = e^{2A(z)} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2). \quad (4.2)$$

Aqui estamos trabalhando com dois campos de gauge, conseqüentemente, temos dois field strengths. Os índices Latinos maiúsculos referem-se ao espaço 5-dimensional. Variando à ação (4.1) em relação a  $A_M^{(1)}$  e  $A_M^{(2)}$ , obtemos as seguintes equações de movimento:

$$\partial_N \left( \sqrt{-g} g^{MP} g^{NQ} F_{PQ}^{(1)} \right) + \lambda \partial_N \left( \sqrt{-g} g^{MP} g^{NQ} F_{PQ}^{(2)} \right) = 0 \quad (4.3)$$

$$\partial_N \left( \sqrt{-g} g^{MP} g^{NQ} F_{PQ}^{(2)} \right) + \lambda \partial_N \left( \sqrt{-g} g^{MP} g^{NQ} F_{PQ}^{(1)} \right) = 0. \quad (4.4)$$

Então, vemos que existe uma simetria discreta nesse modelo que é dada pela troca dos dois campos de gauge  $A_M^{(1)} \rightleftharpoons A_M^{(2)}$ .

Usando as equações (4.3) e (4.4), obtemos

$$(1 - \lambda^2) \partial_N \left( \sqrt{-g} g^{MP} g^{NQ} F_{PQ}^{(i)} \right) = 0, \quad (4.5)$$

com  $i = 1, 2$ . Fixando  $M = 5$  na equação (4.5) chegamos em

$$\partial_\mu \left( e^A F_i^{5\mu} \right) = 0. \quad (4.6)$$

Agora fixando  $M = v$  encontramos

$$\partial_5 (e^A F_{(i)}^{v5}) + e^A \partial_\mu (F_{(i)}^{v\mu}) = 0. \quad (4.7)$$

Devido estarmos trabalhando no caso não massivo, podemos parametrizar o campo vetorial em  $5 - D$  na forma  $A^M = (A^\mu, A^5 = 0)$ , e usar o calibre de Lorentz  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . Usando esses fatos em (4.7) obtemos a equação:

$$\partial_5 (e^A \partial^5 A_{(i)}^v) + e^A \square A_{(i)}^v = 0. \quad (4.8)$$

Propomos uma solução para o campo vetorial na forma:

$$A_{(i)}^v(x, y) = \tilde{A}_{(i)}^v(x) e^{-\frac{A}{2}} \psi_i(y). \quad (4.9)$$

Substituindo (4.9) em (4.8), obtemos as seguintes equações:

$$\square \tilde{A}_{(i)}^v(x) = m^2 \tilde{A}_{(i)}^v(x) \quad (4.10)$$

$$-\psi_i'' + \left( \frac{A''}{2} + \frac{(A')^2}{4} \right) \psi_i = m^2 \psi_i. \quad (4.11)$$

Para o modo zero obtemos como solução

$$\psi_i = e^{\frac{A}{2}}. \quad (4.12)$$

Com essa solução o modo zero de  $A_{(i)}^v$  não é localizado, e isso é fácil de ser percebido. Colocando (4.12) em (4.9), temos

$$A_{(i)}^v = \tilde{A}_{(i)}^v. \quad (4.13)$$

Dessa forma, a teoria efetiva é

$$S = - \int_{-\infty}^{\infty} e^A dy \int d^4x \left[ \frac{1}{4} \tilde{F}_{\mu\nu}^{(1)} \tilde{F}^{\mu\nu}_{(1)} + \frac{1}{4} \tilde{F}_{\mu\nu}^{(2)} \tilde{F}^{\mu\nu}_{(2)} + \frac{\lambda}{2} \tilde{F}_{\mu\nu}^{(1)} \tilde{F}^{\mu\nu}_{(2)} \right]. \quad (4.14)$$

Uma vez que estamos trabalhando baseados no modelo Randall Sundrum, usamos o fator de dobra do mesmo  $A = -\ln(k|z| + 1)$ . Calculando a integral que aparece na frente da equação (4.14), obtemos um resultado não convergente. Em [62] os autores obtêm uma teoria

confinada sem adicionar nenhum termo de potencial (Isso porque eles trabalham no modelo RS-I, em que a dimensão extra é compacta). Como estamos trabalhando com o RS-II, precisamos adicionar termos de potencial na ação (4.1) com o intuito de localizar a teoria efetiva.

## 4.2 Os Campos de gauge com Acoplamento Não-Mínimo

Vimos que a ação proposta na última seção não é capaz de localizar o modelo com mistura de campos. De fato, ela não leva a uma teoria localizada na brana. Agora modificamos essa ação com a introdução do acoplamento não-mínimo:

$$\begin{aligned}
S = - \int d^5x \sqrt{-g} & \left[ \frac{1}{4} g^{MP} g^{NQ} F_{MN}^{(1)} F_{PQ}^{(1)} \right. \\
& + \frac{1}{4} g^{MP} g^{NQ} F_{MN}^{(2)} F_{PQ}^{(2)} + \frac{\alpha}{2} g^{MP} g^{NQ} F_{MN}^{(1)} F_{PQ}^{(2)} + \\
& \left. \frac{\lambda_1}{2} R g^{MN} A_M^{(1)} A_N^{(1)} + \frac{\lambda_2}{2} R g^{MN} A_M^{(2)} A_N^{(2)} + \lambda_3 R g^{MN} A_M^{(1)} A_N^{(2)} \right] .
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Os termos adicionados quebram a invariância de gauge. Isso parece ser um problema, mas na verdade não é. A invariância de gauge é bem estabelecida em 4 dimensões, e veremos que a teoria efetiva que vamos obter respeita tal simetria. A ação acima está em 5 dimensões, e não necessariamente essa simetria tem que ser obedecida em dimensões mais altas, como pode ser visto nos trabalhos [12, 16, 18, 28, 29]. Novamente, variamos a ação com relação a  $A_M^{(1)}$  e  $A_M^{(2)}$ , onde obtemos:

$$\begin{aligned}
\partial_M \left( \sqrt{-g} F_{(1)}^{MN} \right) + \alpha \partial_M \left( \sqrt{-g} F_{(2)}^{MN} \right) - \\
\lambda_1 R \sqrt{-g} A_{(1)}^N - \lambda_3 R \sqrt{-g} A_{(2)}^N = 0
\end{aligned} \tag{4.16}$$

e

$$\begin{aligned}
\partial_M \left( \sqrt{-g} F_{(2)}^{MN} \right) + \alpha \partial_M \left( \sqrt{-g} F_{(1)}^{MN} \right) - \\
\lambda_2 R \sqrt{-g} A_{(2)}^N - \lambda_3 R \sqrt{-g} A_{(1)}^N = 0.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Mais uma vez, existe uma simetria discreta no modelo quando trocamos  $\lambda_1$  por  $\lambda_2$  e  $A_M^{(1)}$  por  $A_M^{(2)}$ .

Precisamos fazer algumas manipulações nas equações (4.16) e (4.17) com o objetivo de colocá-las em forma de matriz. Para isso, usamos a anti-simetria de  $F_{MN}$ , e separamos a parte vetorial e escalar dos campos com a ajuda das identidades encontradas em [18]. Onde eles

consideram o campo de gauge como

$$A^M = (A^\mu, A^5), \quad (4.18)$$

com o campo em 4 dimensões dado por:

$$A^\mu = A_T^\mu + A_L^\mu, \quad (4.19)$$

com  $A_T^\mu$  e  $A_L^\mu$  sendo as partes transversal e longitudinal dos campos, cuja a forma explícita é

$$A_T^\mu = \left( \delta_\nu^\mu - \frac{\partial^\mu \partial_\nu}{\square} \right) A^\nu \quad A_L^\mu = \frac{\partial^\mu \partial_\nu}{\square} A^\nu. \quad (4.20)$$

Depois de todo esse trabalho, finalmente obtemos a forma matricial para as equações (4.16) e (4.17)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \square + e^{-A} \partial_5 (e^A \partial^5) & 0 \\ 0 & \square + e^{-A} \partial_5 (e^A \partial^5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{T,(1)}^v \\ A_{T,(2)}^v \end{pmatrix} \\ &= -\frac{R e^{2A}}{(1 - \alpha^2)} \begin{pmatrix} (\alpha \lambda_3 - \lambda_1) & (\alpha \lambda_2 - \lambda_3) \\ (\alpha \lambda_1 - \lambda_3) & (\alpha \lambda_3 - \lambda_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{T,(1)}^v \\ A_{T,(2)}^v \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Temos que diagonalizar a matriz dos parâmetros na equação acima com o intuito de obter equações separadas. Se quisermos ter a parte vetorial dos dois campos localizadas ao mesmo tempo, não podemos deixar a matriz dos parâmetros, na equação (4.21), com valores arbitrários. Isso porque não é qualquer conjunto de parâmetros que faz com que tal matriz fique diagonalizada e obedeça a condição de localização para os campos. Os valores que foram utilizados por nós foram:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  e  $\lambda_3 = \alpha \lambda$ . Com tais constantes, temos

$$\square A_{(i),T}^v + e^{-A} \partial_5 [e^A \partial^5 A_{(i),T}^v] = \lambda R e^{2A} A_{T,(i)}^v. \quad (4.22)$$

Usando o ansatz para a solução como antes,  $A_{(i),T}^v = e^{-\frac{A}{2}} \tilde{A}_{(i),T}^v \psi_i(y)$ , e o escalar de Ricci calculado a partir da métrica conforme de Randall-Sundrum  $R = -e^{-2A} (8A'' + 12A'^2)$  obtemos a partir de (4.22)

$$-\psi_i'' + \left[ A'^2 \left( \frac{1}{4} - 12\lambda \right) + A'' \left( \frac{1}{2} - 8\lambda \right) \right] \psi_i = m^2 \psi_i. \quad (4.23)$$

Para o modo zero, que significa  $m = 0$ , propomos uma solução da forma  $\psi_i = e^{cA}$ . Com isso

obtemos as relações:

$$\lambda = 0, \quad \lambda = -\frac{1}{16}. \quad (4.24)$$

Para a primeira obtemos a solução,  $\psi_i = e^{\frac{A}{2}}$ , que não localiza os campos, enquanto que para a segunda temos  $\psi_i = e^A$ , que cumpre esse papel. As condições de contorno (CC) para a equação (4.23), uma equação de Schrödinger cujo potencial tem uma função delta de Dirac, são obtidas integrando-se sobre pequenos domínios em torno da posição das branas. Por exemplo, de  $-\varepsilon$  até  $\varepsilon$ , e depois toma-se o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Como estamos considerando a brana em  $y = 0$ , obtemos como condição de contorno  $\psi_i(0)' = -k\psi_i(0)$ . Também podemos dar a outra (CC) relacionada com a brana em  $y = L$ . Isso é importante no cálculo dos modos massivo de Kaluza-Klein(KK), quando a brana no infinito é trazida de volta para uma posição finita  $L$ . Essa condição é  $\psi_i(L)' = -\frac{k\psi_i(L)}{(k|L|+1)}$ . Usando a solução que localiza os campos, obtemos a forma final para os dois campos de gauge

$$A_{(i),T}^V = e^{\frac{A}{2}} \tilde{A}_{T,i}^V. \quad (4.25)$$

Temos então os dois campos. Um pode ser interpretado como o campo usual de gauge e outro como o campo do setor escondido [58]. O que não podemos dizer ainda é qual deles pertence ao setor escondido. Se considerarmos os modelos em que o fóton escondido vem da dimensão extra, [79–84], um dos campos é, como consequência da redução de KK, naturalmente massivo. Isso é um fato interessante, os dois campos tem a mesma forma e o mesmo acoplamento com o escalar de Ricci. Se, por exemplo, dizemos que um dos campos em (4.25) é o usual  $U(1)$  campo de gauge, interação de partículas carregadas do setor escondido com esse campo podem gerar partículas com milicargas (partículas com fração da carga do elétron). Ainda, interação de férmions massivos com o outro campo de gauge em (4.25) podem criar matéria escura [59]. Vemos que com o acoplamento geométrico é possível localizar um modelo com dois campos de gauge. Veremos isso claramente quando apresentarmos a ação efetiva.

Agora mostramos como obter a ação efetiva em  $D = 4$ . Para mostrarmos isso temos que decompor todos os termos na ação inicial usando nossa separação para os campos de gauge  $A^\mu = A_T^\mu + A_L^\mu$ , a condição  $\partial_\mu A_T^\mu = 0$  e o fato de que parte da componente  $\frac{1}{2}g^{55}g^{\mu\nu}F_{\mu 5}F_{\nu 5}$  cancela as componentes que estão acopladas com o Escalar de Ricci. Depois de fazermos isso, vemos que podemos separar a ação em duas partes; uma vetorial e outra escalar:

$$S_V = - \int d^5x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{4} g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} F_{\mu\lambda}^{(1),T} F_{\nu\rho}^{(1),T} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} F_{\mu\lambda}^{(2),T} F_{\nu\rho}^{(2),T} + \frac{\alpha}{2} g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} F_{\mu\lambda}^{(1),T} F_{\nu\rho}^{(2),T} \right] \quad (4.26)$$

$$S_S = - \int d^5x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{55} g^{\mu\nu} \partial_\mu A_5^{(i)} \partial_\nu A_5^{(i)} + \frac{1}{2} g^{55} g^{\mu\nu} A_5^{(i)} \partial_5 \partial_\mu A_{\nu,L}^{(i)} + \frac{1}{2} g^{55} g^{\mu\nu} \partial_5 (\partial_\nu A_{\mu,L}^{(i)}) A_5^{(i)} + \frac{1}{2} g^{55} g^{\mu\nu} \partial_5 A_{\mu,L}^{(i)} \partial_5 A_{\nu,L}^{(i)} + \alpha g^{55} g^{\mu\nu} \partial_5 A_{\mu,L}^{(1)} \partial_5 A_{\nu,L}^{(2)} + \alpha g^{55} g^{\mu\nu} \partial_5 \partial_\nu A_{\mu,L}^{(1)} A_5^{(2)} + \alpha g^{55} g^{\mu\nu} A_5^{(1)} \partial_5 \partial_\mu A_{\nu,L}^{(2)} + \alpha g^{55} g^{\mu\nu} \partial_\mu A_5^{(1)} \partial_\nu A_5^{(2)} + \frac{\lambda_i R}{2} g^{55} A_5^{(i)} A_5^{(i)} + \lambda_3 R g^{55} A_5^{(1)} A_5^{(2)} \right]. \quad (4.27)$$

Agora substituindo os campos que encontramos em (4.25) na ação vetorial (4.26), obtemos:

$$S_V = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{2A} dy \int d^4x \left[ \frac{1}{4} \tilde{F}_{\mu\lambda}^{(1)} \tilde{F}^{\mu\lambda} + \frac{1}{4} \tilde{F}_{\mu\lambda}^{(2)} \tilde{F}^{\mu\lambda} + \frac{\alpha}{2} \tilde{F}_{\mu\lambda}^{(1)} \tilde{F}^{\mu\lambda} \right]. \quad (4.28)$$

Solucionando a integral  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{2A} dy$  com  $A(z) = -\ln(|z| + 1)$  obtemos como resultado  $\frac{2}{k}$ . Isso significa que a ação acima é localizada. Essa é a ação para milicargas proposta por Holdom em 1985.

### 4.3 Acoplamento com o Tensor de Ricci

Também construímos um modelo para localização dos campos de gauge usando o tensor de Ricci. Nessa construção usamos o tensor de Ricci calculado a partir da métrica conforme do RS, que pode ser encontrada em [28]. A ação proposta é bem similar a usada com o escalar de Ricci. Apenas substituímos o escalar pelo tensor de Ricci. A ação proposta é

$$S = - \int d^5x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{4} g^{MP} g^{NQ} F_{MN}^{(1)} F_{PQ}^{(1)} + \frac{1}{4} g^{MP} g^{NQ} F_{MN}^{(2)} F_{PQ}^{(2)} + \frac{\alpha}{2} g^{MP} g^{NQ} F_{MN}^{(1)} F_{PQ}^{(2)} + \frac{\lambda_1}{2} R_{MNS}{}^P g^{NQ} A_P^{(1)} A_Q^{(1)} + \frac{\lambda_2}{2} R_{MNS}{}^P g^{NQ} A_P^{(2)} A_Q^{(2)} + \lambda_3 R_{MNS}{}^P g^{NQ} A_P^{(1)} A_Q^{(2)} \right]. \quad (4.29)$$

Fazendo o mesmo procedimento anterior, onde variamos à ação com relação aos dois campos, combinamos as equações de movimento, separamos a parte vetorial da escalar, usamos as identidades introduzidas em [18] e colocamos as equações resultantes na forma matricial:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \square + e^{-A} \partial_5 (e^A \partial^5) & 0 \\ 0 & \square + e^{-A} \partial_5 (e^A \partial^5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{T,(1)}^V \\ A_{T,(2)}^V \end{pmatrix} \\ &= -\frac{R^{\nu\mu}}{(1-\alpha^2)} \begin{pmatrix} (\alpha\lambda_3 - \lambda_1) & (\alpha\lambda_2 - \lambda_3) \\ (\alpha\lambda_1 - \lambda_3) & (\alpha\lambda_3 - \lambda_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{\mu,T}^{(1)} \\ A_{\mu,T}^{(2)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Como podemos ver em (4.30), obtemos uma equação com estrutura similar a (4.21), o que já era esperado, uma vez que só substituímos o escalar de Ricci pelo tensor de Ricci. O acoplamento com esse tensor só é possível porque estamos trabalhando com uma métrica diagonal. Dessa forma, não temos termos do tipo  $R_{\mu 5}$ , e as equações podem ser separadas. Utilizando os mesmos valores específicos para os parâmetros, a exemplo da seção anterior, obtemos duas equações separadas

$$\square A_{T,(i)}^V + e^{-A} \partial_5 (e^A \partial^5 A_{T,(i)}^V) = \lambda R^{\mu\nu} A_{\mu,(i)}^T. \quad (4.31)$$

Depois de alguns passos matemáticos, obtemos as duas equações tipo Schrödinger, com  $m = 0$ . Dessa vez, quando impomos que os dois campos devem ser localizados, encontramos as seguintes relações para os parâmetros

$$\lambda = 0, \quad \lambda = -2. \quad (4.32)$$

Para  $\lambda = 0$  obtemos uma solução para a equação tipo Schrödinger que não localiza os campos. Enquanto que para  $\lambda = -2$  temos  $\psi_{(i)} = e^{\frac{5A}{2}}$ , que de fato localiza os campos. Para essa solução encontramos um resultado convergente para a integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_i^2 dz$ . As condições de contorno nesse caso são calculadas exatamente como antes, e o resultado é  $\psi_i(0)' = -\frac{5k}{2} \psi_i(0)$ . Vemos então que o acoplamento com o tensor de Ricci também é uma boa forma de localizar os campos de gauge.

#### 4.4 A Componente Escalar

Agora voltamos nossa atenção para as componentes escalares para o acoplamento dos campos com o escalar de Ricci. Poderíamos ter feito essa análise a partir da ação (4.27). No entanto, por simplicidade, vamos usar as componentes  $A_5$  das equações (4.16) e (4.17):

$$\partial_\mu F_{(1)}^{5\mu} + \frac{Re^{2A}}{(1-\alpha^2)}(\alpha\lambda_2\Phi_2 + \alpha\lambda_3\Phi_1 - \lambda_1\Phi_1 - \lambda_3\Phi_2) = 0 \quad (4.33)$$

e

$$\partial_\mu F_{(2)}^{5\mu} + \frac{Re^{2A}}{(1-\alpha^2)}(\alpha\lambda_1\Phi_1 + \alpha\lambda_3\Phi_2 - \lambda_2\Phi_2 - \lambda_3\Phi_1) = 0. \quad (4.34)$$

Nas equações acima temos que  $A_i^5 = \Phi_i$ . Considerando as relações entre os parâmetros, podemos simplificar esse par de equações da seguinte forma:

$$\square\Phi_i + \partial^5[R^{-1}e^{-3A}\partial_5(Re^{3A}\Phi_i)] - \lambda Re^{2A}\Phi_i = 0. \quad (4.35)$$

Aqui usamos a definição do field strength, com  $i = 1, 2$  e a relação

$$\partial_\mu A_i^\mu = R^{-1}e^{-3A}\partial_5(Re^{3A}\Phi_i), \quad (4.36)$$

Que é obtida a partir das equações (4.16) e (4.17), e da anti-simetria do field strength. Usando o método de separação de variáveis, com  $\Phi_i(x, z) = \psi_i(z)\phi_i(x)$ , obtemos:

$$\partial^5[R^{-1}e^{-3A}\partial_5(Re^{3A}\psi_i(z))] - \lambda Re^{2A}\psi_i(z) = -m^2\psi_i(z). \quad (4.37)$$

Essa equação é similar a encontrada em [18]. Nossa intenção é colocá-la na forma de uma equação tipo Schrödinger. Primeiro, se fizermos a transformação  $g = e^{3A}R$  e  $h = -\lambda e^{-A}g$ , podemos escrever a equação acima como segue:

$$-\psi_i'' - (\ln fg^2)'\psi_i' - [(fg)'+h]\psi = m^2(fg)^{-1}\psi_i, \quad (4.38)$$

onde  $f = g^{-1}$ . Comparando essa equação com uma identidade encontrada em [43], temos,  $P = \ln(fg^2)$ ,  $V = -[(fg)'+h]$  e  $Q = (fg)^{-1}$ . O potencial para a equação tipo Schrödinger, na forma geral, é dado por:

$$U(z) = \frac{V(y)}{\Theta(y)^2} + \frac{(P'(y)\Omega'(y) - \Omega''(y))}{\Omega y \Theta(y)^2}.$$

A primeira e a segunda derivadas de  $\Omega$  são:

$$\Omega' = [\ln(f^{-\frac{1}{4}}g^{-\frac{3}{4}})]'\Omega \quad , \quad \Omega'' = f^{\frac{1}{4}}g^{\frac{3}{4}}(f^{-\frac{1}{4}}g^{-\frac{3}{4}})''\Omega.$$

Com essas derivadas obtemos a seguinte forma para o potencial:

$$U(z) = -[(fg')' + h]fg + \left[ (\ln f^{-1}g^{-2})'(\ln f^{-\frac{1}{4}}g^{-\frac{3}{4}})' - f^{\frac{1}{4}}g^{\frac{3}{4}}(f^{-\frac{1}{4}}g^{-\frac{3}{4}}) \right] fg. \quad (4.39)$$

No nosso caso, fizemos  $f = g^{-1}$  então obtemos o potencial:

$$U(z) = \frac{3g'^2}{4g^2} - \frac{1g''}{2g} - \lambda e^{-A}g \quad (4.40)$$

ou

$$U(z) = \frac{1}{4}(3A' + (\ln R)')^2 - \frac{1}{2}(3A'' + (\ln R)'') - \lambda R e^{2A}. \quad (4.41)$$

Aqui as (CC) são dadas por  $\psi_i(0)' = -3k\psi_i(0)$ .

Se considerarmos uma métrica assintoticamente RS, onde  $\lim_{z \rightarrow \infty} R = -20\kappa^2$ , obtemos um potencial assintótico

$$U = A'^2 \left( \frac{9}{4} + 12\lambda \right) - A'' \left( \frac{3}{2} - 8\lambda \right). \quad (4.42)$$

A solução que localiza o modo zero do campo escalar é  $\psi_i = e^{3A}$ , e o valor do parâmetro é  $\lambda = \frac{9}{16}$ . Podemos facilmente ver que assim como em [18], os valores para os parâmetros que localizam os setores vetorial e escalar, são diferentes. Isso nos permite dizer que não podemos localizar os dois setores ao mesmo tempo.

## 5 MULTI-LOCALIZAÇÃO DE CAMPOS BOSÔNICOS

Neste capítulo veremos a multi-localização de campos bosônicos no cenário de multi-branas. Aqui, é bom que se frise, que a localização é no sentido de que as funções de onda dos campos devem ter máximo nas branas, em contraste com o argumento de integral finita apresentado anteriormente. Isso se deve ao fato de estarmos trabalhando em uma extensão do RS-I, que possui a simetria do orbifold. Nos modelos discutidos anteriormente, estávamos trabalhando com o RS-II. Iremos apresentar dois métodos de multi-localização; um com o acoplamento geométrico e outro com o dÍlaton. A multi-localização foi introduzida por [46]. No entanto, eles usaram um modelo que não era covariante. Em contraste, nossos dois métodos de localização, além de ser covariante, fixa todos os parâmetros livres do modelo. Além do mais, como principal consequência, ao usar um modelo covariante, fixamos a massa do modo ultraleve de todos os campos bosônicos.

### 5.1 Revisão do Modelo (+ - +)

Nessa seção fazemos uma breve revisão do modelo (+ - +). Esse modelo é apresentado no trabalho [44]. Começamos discutindo o modelo original desenvolvido para a gravidade, então apresentamos a extensão para os campos escalar e de gauge que foram construídos em [46]. Ao revisar o último modelo, percebemos um problema no termo de massa usado para localizar o campo de gauge; o potencial usado por eles não é covariante. Nessa seção, comentamos esse problema, e na próxima apresentamos uma solução para o problema.

#### 5.1.1 O Campo Gravitacional

O modelo (+ - +) é uma generalização do RS-I onde se faz a introdução de uma nova brana com tensão positiva. A configuração do modelo é dada por

### Modelo com três branas

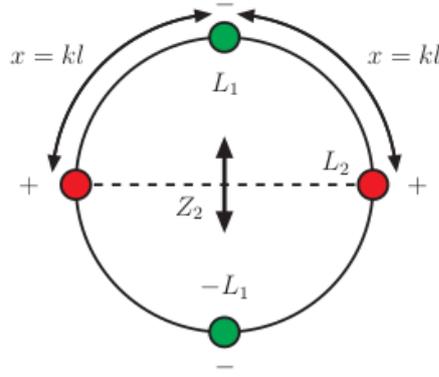


Figura 9: (Adaptado de [44]. )

Onde  $x$  é a distância entre as branas positivas e negativas. Quando  $x$  tende a zero, o modelo tende para o RS-I. Aqui vamos considerar o caso simétrico, onde a brana de tensão negativa é posicionada exatamente no meio das duas branas de tensão positiva. As branas de tensão positiva são posicionadas nos pontos fixos do orbifold  $L_0 = 0$  e  $L_2$ .

A ação que descreve esse modelo, bem como as equações de movimento são similares ao modelo com apenas duas branas, a diferença é a inclusão de uma brana em todos os cálculos. A métrica tem a forma usual dada por (3.1), onde a solução para a mesma é

$$A(y) = k(l - ||y| - l|). \quad (5.1)$$

Para determinar o espectro de Kaluza-Klein (KK), eles usam flutuações da métrica na forma

$$ds^2 = [e^{-2A(y)} \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x, y)] dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (5.2)$$

Onde essas flutuações são dadas por

$$h_{\mu\nu}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} h_{\mu\nu}^n(x) \psi^n(y). \quad (5.3)$$

A função  $\psi^n(y)$  obedece a seguinte equação diferencial

$$\left( -\frac{1}{2} \partial_y^2 + 2k^2 - 2k[\delta(y) + \delta(y-2l) - \delta(y-l) - \delta(y+l)] \right) \psi^n(y) = \frac{m_n^2}{2} e^{2A(y)} \psi^n(y). \quad (5.4)$$

Depois de uma mudança de variáveis, a equação acima é colocada na forma de uma equação tipo Schrödinger

$$\left( -\frac{1}{2} \partial_z^2 + V(z) \right) \hat{\psi}^n(z) = \frac{m_n^2}{2} e^{2A(y)} \hat{\psi}^n(z). \quad (5.5)$$

Com  $V(z)$  sendo

$$V(z) = \frac{15k^2}{8[g(z)]^2} - \frac{3k}{2g(z)} [\delta(z) + \delta(z-2z_l) - \delta(z-z_l) - \delta(z+z_l)]. \quad (5.6)$$

Onde  $g(z) = k(z_l - ||z| - z_l|) + 1$ , e os  $z_i$  determinam as posições das branas. Dessa forma, temos um problema de mecânica Quântica com funções delta.

A solução para o modo zero de (5.5) é encontrada fazendo  $m_n = 0$ . Para o restante dos modos a solução é dada pelas funções de Bessel. Considerando a região entre  $[0, 2z_l]$ , a solução é

$$\hat{\psi}^n(z) \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{g(z)}{k}} \left[ \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix} J_2\left(\frac{m_n}{k}g(z)\right) + \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} Y_2\left(\frac{m_n}{k}g(z)\right) \right] \quad (5.7)$$

. Onde  $A = [0, z_l]$  e  $B = [z_l, 2z_l]$ . As condições de contorno para a função de onda em  $(z_l)$  e para a primeira derivada em  $(0, z_l, 2z_l)$  nos leva a

$$\begin{vmatrix} J_1\left(\frac{m_n}{k}\right) & Y_1\left(\frac{m_n}{k}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1\left(\frac{m_n}{k}\right) & Y_1\left(\frac{m_n}{k}\right) \\ J_1\left(\frac{m_n}{k}g(z)\right) & Y_1\left(\frac{m_n}{k}g(z)\right) & J_1\left(\frac{m_n}{k}g(z)\right) & Y_1\left(\frac{m_n}{k}g(z)\right) \\ J_2\left(\frac{m_n}{k}g(z)\right) & Y_2\left(\frac{m_n}{k}g(z)\right) & -J_2\left(\frac{m_n}{k}g(z)\right) & -Y_2\left(\frac{m_n}{k}g(z)\right) \end{vmatrix} = 0. \quad (5.8)$$

A partir desse determinante calculamos o espectro de massa. A principal característica é que o primeiro modo tem um comportamento anômalo quando comparado com o restante dos modos. O primeiro modo é dado por

$$m_1 = 2\sqrt{2}ke^{-2kl}. \quad (5.9)$$

A maneira de calcular esse primeiro modo é dada no apêndice A. O espectro de massa para o restante dos modos é

$$m_{n+1} = \xi_n ke^{-kl}. \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.10)$$

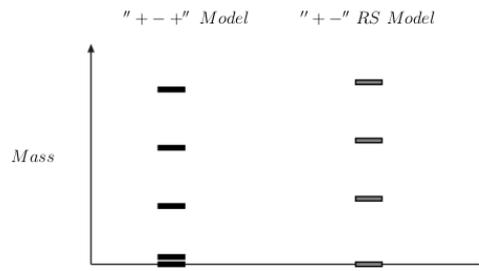
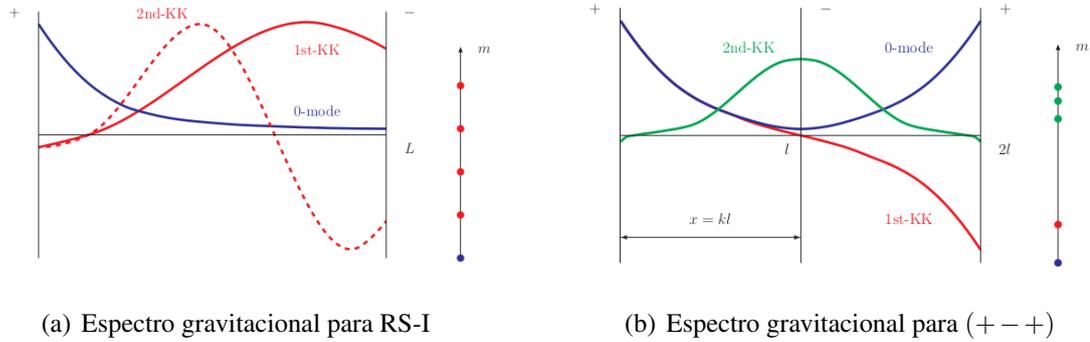
Onde  $\xi_n$  são os zeros da função  $J_2\left(\frac{m_n}{k}e^{kl}\right)$ . A separação entre dois modos consecutivos é

$$\Delta m = m_{n+1} - m_n = (\xi_{n+1} - \xi_n)ke^{-kl} = \frac{\pi}{2}ke^{-kl}. \quad (5.11)$$

Devido ao fator exponencial, vemos que a massa do primeiro modo é muito menor que a massa do restante dos modos.

Podemos entender esse comportamento atípico para o primeiro modo devido a presença da segunda brana de tensão positiva [46]. Devido essa brana, o primeiro modo tem uma função de onda que se assemelha a função de onda do modo zero. O primeiro modo, assim como o modo zero, tem uma função de onda com pico nas branas positiva, enquanto que os outros modos são espalhados na dimensão extra. Vejamos a comparação para as funções de

onda e para o espectro de massa, entre o modelo RS-I e o modelo  $(+ - +)$ . A função de onda para o modo zero é a combinação linear dos dois modos zeros (Um para cada brana positiva)  $\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_0^1 + f_0^2)$  (simétrico com relação a brana  $(-)$ ). Enquanto que a função de onda para o primeiro modo é  $\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_0^1 - f_0^2)$  (anti-simétrico com relação a brana  $(-)$ ).



(c) Espectros

Figura 10: Adaptado de [46]. Comparação entre os espectros gravitacionais

Como o primeiro modo tem uma massa muito pequena, ele pode contribuir para à gravidade. Isso configura os modelos de Bi-gravidade, onde a mesma seria uma combinação do modo zero com o primeiro. O comportamento para os outros campos assemelha-se a gravidade. A partir de agora revisamos o campo escalar e de gauge estudados em [46].

### 5.1.2 O Campo Escalar

Nessa subseção revisamos o espectro do campo escalar no modelo  $(+ - +)$ . Seguimos o processo como feito em [46]. A ação para um campo escalar real massivo em cinco dimensões é dada por

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \int dy \sqrt{G} (G^{AB} \partial_A \Phi \partial_B \Phi + m_\Phi^2 \Phi^2). \quad (5.12)$$

A massa é par sob a simetria  $Z_2$ , e os autores escolheram um termo de massa da forma

$$m_\Phi^2 = \alpha(A'(y)^2) + \beta A''(y), \quad (5.13)$$

onde  $\alpha, \beta$  são parâmetros livres. Como discutimos antes, essa forma para o termo de massa não é covariante. Seguindo, usando a decomposição padrão para os modos de (KK)

$$\Phi(x, y) = \sum_n \phi_n(x) f_n(y), \quad (5.14)$$

eles obtêm a função de onda obedecida pelos modos de (KK)

$$-\frac{d}{dy} \left( e^{-4A(y)} \frac{d}{dy} f_n(y) \right) + m_\Phi^2 e^{-4A(y)} f_n(y) = m_n^2 e^{-2A(y)} f_n(y). \quad (5.15)$$

Usando a transformação de variáveis usual da coordenada  $y$  para  $z$  eles colocam a equação acima na forma

$$\left[ -\frac{1}{2} \partial_z^2 + V(z) \right] \hat{f}_n(z) = \frac{m_n^2}{2} \hat{f}_n(z). \quad (5.16)$$

Com potencial dado por

$$V(z) = \frac{\left(\frac{15}{4} + \alpha\right) (A'(y))^2}{2[g(z)^2]} - \frac{\left(\frac{3}{2} - \beta\right) A''(y)}{2[g(z)^2]}. \quad (5.17)$$

A transformação de variáveis usada por eles é  $\frac{dz}{dy} = e^{A(y)} = g(z)$ . Com essa transformação o potencial acima pode ser escrito como

$$V(z) = \left(\frac{9}{4} + \alpha + \beta\right) (A'(z))^2 + \left(\frac{3}{2} - \beta\right) A''(z), \quad (5.18)$$

isso vai ser útil para comparações futuras. É importante mencionar que levamos em consideração um fator de dois no potencial. Isso facilita as comparações que vão ser feitas mais a frente. Para se ter um modo zero localizado eles encontraram a relação

$$\alpha = \beta^2 - 4\beta. \quad (5.19)$$

Para  $\beta > 1$  o campo é localizado na brana de tensão positiva e para  $\beta < 1$  na de tensão negativa.

Resolvendo a equação (5.16) para os modos massivos eles encontraram, para o primeiro modo

$$m_1 \approx \sqrt{4\nu^2 - 1} k e^{-(\nu+1/2)kl}, \quad (5.20)$$

e para o restante dos modos

$$m_{n+1} \approx \xi_n k e^{-kl} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.21)$$

onde  $\xi_n$  são as raízes de  $J_{\nu+1/2}(x)$ , e  $\nu = \frac{3}{2} - \beta$ . Devemos enfatizar que os modos ultraleves não existem quando

$$-\frac{1}{2} \leq \nu \leq \frac{1}{2} \rightarrow 1 \leq \beta \leq 2, \quad (5.22)$$

uma vez que a massa seria nula ou complexa. Nós fizemos um cálculo geral para essas expressões para os modos massivos. Essas expressões são similares a (5.20) e (5.21), mas em nossos cálculos usamos  $c_1$  em vez de  $v$ .

### 5.1.3 O Campo de Gauge

Vamos agora revisar o campo de gauge. O processo para esse campo é um pouco mais complicado porque, de fato, a localização dele é um problema. No intuito de obter um campo localizado no cenário  $(+ - +)$ , os autores em [46] usam a seguinte ação

$$S = - \int d^4x \int dy \left[ \frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} + \frac{1}{2} M A_\mu A^\mu \right]. \quad (5.23)$$

Explicitamente, encontramos que o termo de massa é dado por

$$M = (\beta A''(y) + \alpha (A'(y))^2). \quad (5.24)$$

No entanto, essa ação não é invariante sob uma transformação geral de coordenadas. De fato, ela é bem similar a ação proposta por Ghoruku e Nakamura no trabalho [12], no contexto de apenas uma brana. Esse problema foi resolvido em [18], onde os autores propuseram um acoplamento com o escalar de Ricci. Aqui usaremos uma estratégia similar para o caso de multi-localização. Mas antes, vejamos os resultados encontrados usando a ação acima. Mais uma vez, com a decomposição de KK  $A^\mu(x, y) = A^\mu(x) f_n(y)$  eles obtêm a equação diferencial para os modos de KK

$$-\frac{d}{dy} \left( e^{-2A(y)} \frac{d}{dy} f_n(y) \right) + m_\Phi^2 e^{-2A(y)} f_n(y) = m_n^2 f_n(y). \quad (5.25)$$

A última equação é transformada em uma equação tipo Schrödinger com potencial dado por

$$V(z) = \frac{(\frac{3}{4} + \alpha) (A'(y))^2}{2[g(z)^2]} - \frac{(\frac{1}{2} - \beta) A''(y)}{2[g(z)^2]}. \quad (5.26)$$

Novamente, esse potencial pode ser reescrito com uma dependência na coordenada  $z$

$$V(z) = \left( \frac{1}{4} + \alpha + \beta \right) (A'(z))^2 + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) A''(z). \quad (5.27)$$

Para obter um modo zero localizado, o parâmetro  $\beta$  obedece a relação

$$\alpha = \beta^2 - 2\beta. \quad (5.28)$$

Para  $\beta > 0$  o campo é localizado na brana de tensão positiva e para  $\beta < 0$  na brana de tensão negativa. As expressões para o primeiro modo de KK e para o restante dos modos são idênticas

as expressões (5.20) e (5.21),mas agora com

$$v = \frac{1}{2} - \beta. \quad (5.29)$$

Então, como no caso do campo escalar, obtemos os valores permitidos para  $\beta$

$$0 \leq \beta \leq 1. \quad (5.30)$$

Como podemos ver; para a gravidade, escalar e gauge, podemos obter o modo ultraleve apenas mudando  $v$  na expressão (5.20). Dessa forma, no apêndice A ,consideramos um potencial geral e encontramos, na equação (A.7),uma expressão geral para o primeiro modo. Essa expressão é válida para os dois processos de multi-localização que vão ser considerados por nós na próxima seção.

## 5.2 Multi-Localização Covariante de Campos Bosônicos no Modelo (+ - +)

Nessa seção nós apresentamos duas formas alternativas para multi-localizar a  $q$ -forma:

a) o acoplamento geométrico e b) o acoplamento com o dÍlaton. Para os dois métodos calculamos o espectro de massa dos campos. Primeiro, apresentamos o acoplamento geométrico, e suas consequências. Depois disso, desenvolvemos a localização usando o dÍlaton (campo escalar introduzido em [10] com o objetivo de localizar o campo de gauge no cenário de branas espessas). A localização com o dÍlaton não tem problemas relacionados com a quebra da simetria de gauge ou a covariância do sistema, uma vez que o acoplamento é feito no termo cinético da ação através de uma exponencial. Em ambos os métodos, vamos usar uma métrica da forma

$$ds^2 = e^{2A(z)}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dz^2) \quad (5.31)$$

### 5.2.1 Multi-Localização com Quantidades Geométricas

O método de localização com quantidades geométricas foi primeiro mostrado em [16, 18] no contexto do RS-II. Mas nós vamos usar um procedimento mais geral, porque construímos a ação com o escalar e o tensor de Ricci. Como mostrado abaixo, nesse método, os termos de massa introduzidos são covariantes, diferentemente de [46]. É importante mencionar que em todos os nossos cálculos usamos  $c_1$ , enquanto que em [46] eles usam  $v$ .

#### 5.2.1.1 O campo Escalar

Agora discutimos o caso particular do campo escalar. A única ação covariante possível é

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \int dy \sqrt{G}(G^{AB} \partial_A \Phi \partial_B \Phi + \lambda R(x) \Phi^2), \quad (5.32)$$

onde  $\lambda$  é o único parâmetro livre, e  $R$  é o escalar de Ricci. Com isso vemos que temos que reduzir o número de parâmetros livres, se quisermos manter a covariância geral. Da equação (5.32) obtemos a seguinte equação de movimento

$$\partial_M[\sqrt{-g}g^{MN}\partial_N\Phi] - \lambda R\sqrt{-g}\Phi = 0. \quad (5.33)$$

Abrindo a soma nos índices, e considerando que a métrica é diagonal,obtemos

$$e^{-3A}\partial_5[e^{3A}\partial^5\Phi] + \square\Phi - \lambda R e^{2A}\Phi = 0. \quad (5.34)$$

Escolhendo uma decomposição de (KK) na forma  $\Phi(x, z) = e^{-\frac{3}{2}A}\phi(x)\psi(z)$ , e substituindo o escalar de Ricci na coordenada  $z$ :  $R = -e^{-2A}(8A'' + 12(A')^2)$ , finalmente chegamos na equação tipo Schrödinger

$$-\psi'' + [c_1A'' + c_2A'^2]\psi = m^2\psi, \quad (5.35)$$

com

$$c_1 = \left(\frac{3}{2} - 8\lambda\right), c_2 = \left(\frac{9}{4} - 12\lambda\right). \quad (5.36)$$

Para o caso não massivo é fácil ver que a solução tem que ser dada por  $e^{c_1A}$ , com  $c_1^2 = c_2$ . Com isso encontramos duas soluções

$$\lambda = \frac{3}{16}, \lambda = 0.$$

Vamos comparar isso com a solução encontrada em Ref [46]. Comparando o termo de massa em (5.35) com (5.18), obtemos

$$c_1 = \frac{3}{2} - \beta \quad c_2 = \frac{9}{4} + \alpha + \beta \quad (5.37)$$

ou

$$\alpha = -20\lambda, \beta = 8\lambda.$$

Se  $\lambda = \frac{3}{16}$ , temos  $\beta = \frac{3}{2}$ . Se  $\lambda = 0$ , temos  $\beta = 0$ . Como veremos abaixo, a única escolha aceitável para  $\lambda$  é  $\lambda = 0$ , isso leva à uma ação efetiva para o modo zero

$$S_{effe} = -\frac{1}{2} \int e^{2c_1A} dz \int d^4x \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x). \quad (5.38)$$

Para termos o campo localizado nas branas positiva, precisamos  $2c_1 > 1$ . Como  $c_1$  não é um parâmetro livre, ele é  $c_1 = \frac{3}{2}$ , o modo zero é localizado apenas nessas branas. Veremos mais tarde que esse padrão é compartilhado por todas as  $q$ -formas.

Considerando os resultados acima, com  $\lambda = \frac{3}{16}$ , reobtemos a relação (5.19), usada pelos autores da Ref. [46] para garantir a localização. Também, na Ref. [46] os autores encon-

traram que para  $\beta < 1$  o campo escalar é localizado na brana de tensão positiva e para  $\beta > 1$  na brana de tensão negativa<sup>1</sup>. No entanto, agora  $\beta$  não é um parâmetro livre, e o único valor possível é  $\beta = 3/2$ . Então, ao impormos covariância geral ganhamos um comportamento radicalmente diferente para o modelo. Primeiro, o campo escalar tem que ser localizado apenas na brana de tensão negativa. Segundo, e mais importante,  $\beta = 3/2$  implica que isto está na zona proibida Eq. (5.22). Dessa forma o modo ultraleve não existe, e isso leva a consequências fenomenológicas bem diferentes no modelo. Se o modo ultraleve não existe, não podemos garantir a localização do modo zero. Esse fato nos força a escolher o valor  $\lambda = 0$ . Essa escolha leva a  $\beta = 0$ , e agora o modo ultraleve existe, e também o modo zero é localizado na brana de tensão positiva, não na brana negativa como seria se escolhêssemos  $\lambda = \frac{3}{16}$ . Então, vemos que o campo escalar não necessita um termo de massa para ser localizado. A massa (5.24) é completamente desnecessária. Também, o modo ultraleve tem uma massa idêntica ao modo ultraleve do campo gravitacional. Nós veremos que todas as  $q$ -formas compartilham esse comportamento, independentemente do tipo de acoplamento. Na próxima seção analisamos esses problemas para o campo de gauge. O restante do espectro é dado em (5.21), com  $\nu = \frac{3}{2}$ .

### 5.2.1.2 O Campo de Gauge

Agora focamos no campo de gauge. A ação proposta por [46], equação 5.23) não é invariante sob uma transformação geral de coordenadas. Para resolvermos esse problema, propomos um caminho semelhante ao usado no caso do campo escalar. A ação é dada por

$$S = - \int d^5x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} + \frac{\lambda}{2} R A_M A^M \right], \quad (5.39)$$

onde  $F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M$ . Essa ação foi considerada em Ref. [18] no contexto do modelo RS-II. Por questão de completeza vamos mostrar alguns detalhes do processo que leva até a equação tipo Schrödinger. A equação de movimento obtida de (5.39) é

$$\partial_N [\sqrt{-g} F^{MN}] + \sqrt{-g} \lambda R A^M = 0. \quad (5.40)$$

Ela pode ser dividida em duas equações; uma escalar e outra vetorial. A última é

$$\partial_5 [e^A F^{5\mu}] + \partial_\mu [e^A F^{\nu\mu}] + \lambda \sqrt{-g} R e^{-2A} A^\nu = 0. \quad (5.41)$$

Dividiremos o vetor como  $A^\mu = A_T^\mu + A_L^\mu$ , com o intuito de desacoplar a parte longitudinal da transversal do campo. Também usamos o gauge  $\partial_\mu A_T^\mu = 0$ . Ao usarmos essa divisão e as

<sup>1</sup>Na verdade os autores cometeram um pequeno erro, e inverteram os valores.

seguintes identidades encontradas em [18]

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = -\square A_T^{\nu} \quad (5.42)$$

$$F^{5\mu} \equiv \partial^5 A_T^{\mu} + F_L^{5\mu} \quad (5.43)$$

$$F_L^{\mu 5} = \frac{\partial^\mu}{\square} \partial_\nu F^{\nu 5}, \quad (5.44)$$

podemos escrever (5.41) como

$$-e^{-A} \partial_5 [e^A \partial^5 A_T^{\nu}] - e^{-A} \partial_5 [e^A F_L^{5\nu}] - \square A_T^{\nu} + \lambda e^{2A} R A_T^{\nu} + \lambda e^{2A} R A_L^{\nu} = 0. \quad (5.45)$$

Ainda com à ajuda dessas identidades, podemos mostrar que  $-e^{-A} \partial_5 [e^A F_L^{5\nu}] = -\lambda e^{2A} R A_L^{\nu}$ . Então o segundo termo cancela o quinto em (5.45), e acabamos com

$$\square A_T^{\nu} + e^{-A} \partial_5 [e^A \partial^5 A_T^{\nu}] - \lambda e^{2A} R A_T^{\nu} = 0. \quad (5.46)$$

Agora, com o intuito de obter uma equação tipo Schrödinger, propomos o seguinte ansatz para a solução:  $A^{\nu}(x, z) = e^{-\frac{A}{2}} A^{\nu}(x) \psi(z)$ , juntamente com o escalar de Ricci na coordenada  $z$

$$R = -e^{-2A} (8A'' + 12A'^2), \quad (5.47)$$

finalmente obtemos a equação tipo Schrödinger idêntica a Eq. (5.35) mas com

$$c_1 = \left( \frac{1}{2} - 8\lambda \right), c_2 = \left( \frac{1}{4} - 12\lambda \right). \quad (5.48)$$

A solução para o caso não massivo é novamente  $\psi = \infty e^{c_1 A}$ , com  $c_1^2 = c_2$ . Com isso obtemos

$$\lambda = -\frac{1}{16}; c_1 = 1. \quad (5.49)$$

Substituindo essa solução na ação efetiva para o modo zero, obtemos

$$S_{eff} = - \int e^{2A(z)} dz \left[ \int d^4 x \frac{1}{4} \tilde{F}_T^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}^T \right], \quad (5.50)$$

e o campo é localizado nas branas de tensão positiva. Agora comparamos nosso potencial com (5.27), fazendo isso encontramos

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2} - 8\lambda = \frac{1}{2} - \beta \rightarrow \beta = 8\lambda \rightarrow \beta = -\frac{1}{2} \\ c_2 &= \frac{1}{4} + \alpha + \beta = \frac{1}{4} - 12\lambda \rightarrow \alpha = -20\lambda \rightarrow \alpha = \frac{5}{4}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Vamos agora comparar nossos resultados com os obtidos em Ref.[46]. Com as expressões acima e a nossa condição de localização (5.49) vemos que (5.28) é automaticamente satisfeita. Essa condição foi usada pelos autores da Ref. [46] para garantir a localização.

Também, na Ref. [46] os autores encontraram que o campo de gauge é localizado na brana de tensão positiva para  $\beta < 0$  e na de tensão negativa para  $\beta > 0^2$ . No entanto, agora  $\beta$  não é um parâmetro livre e o único valor permitido é  $\beta = -1/2$ . Então, impondo covariância geral implica em um comportamento específico para o modelo. Primeiro de tudo, o campo de gauge tem que ser localizado apenas nas branas de tensão positiva. Segundo, e mais importante,  $\beta = -1/2$  está fora dos valores não permitidos (5.30). Dessa forma o modo ultraleve existe e é fixado. O restante dos modos, mais uma vez, é dado por (5.21) com  $\nu = 1$ .

Podemos agora generalizar o modelo acima considerando um acoplamento mais geral dado por

$$S = - \int d^5x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} + \frac{\lambda_1}{2} R A_M A^M + \frac{\lambda_2}{2} R_{MN} A^M A^N \right]. \quad (5.52)$$

Essa ação foi usada no contexto do RS-II na Ref. [22]. Agora também precisamos do tensor de Ricci, dado por

$$R_{\mu\nu}(z) = -\eta_{\mu\nu} (A'' + 3A'^2). \quad (5.53)$$

O processo para obter a equação tipo Schrödinger é semelhante ao usado anteriormente, e novamente é dada por (5.35), mas com

$$c_1 = \left( \frac{1}{2} - 8\lambda_1 - \lambda_2 \right), c_2 = \left( \frac{1}{4} - 12\lambda_1 - 3\lambda_2 \right). \quad (5.54)$$

A solução para o modo zero é obtida com  $c_1^2 = c_2$ , e agora obtemos

$$\lambda_2^\pm = -(1 + 8\lambda_1) \pm \sqrt{12\lambda_1 + 1}; c_1^\pm = \frac{3}{2} \mp \sqrt{12\lambda_1 + 1} \quad (5.55)$$

É claro que, precisamos ter  $\lambda_1 \geq -1/12$  para que tenhamos uma raiz real. Isso leva à uma ação efetiva dada por

$$S_{eff} = - \int e^{2c_1 A(z)} dz \left[ \int d^4x \frac{1}{4} \tilde{F}_T^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}^T \right]. \quad (5.56)$$

O campo é localizado nas branas de tensão positiva se  $2c_1 > 1$  e na de tensão negativa se  $2c_1 < 0$ . Com isso obtemos os valores permitidos

$$-\frac{1}{12} \leq \lambda_1 < 0, -2 < \lambda_2 \leq -\frac{1}{3}. \quad (5.57)$$

Mais uma vez comparamos nosso potencial com(5.27). A comparação leva a

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2} - 8\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{1}{2} - \beta \rightarrow \beta = (8\lambda_1 + \lambda_2) \\ c_2 &= \frac{1}{4} - 12\lambda_1 - 3\lambda_2 = \frac{1}{4} + \alpha + \beta \rightarrow \alpha = -(20\lambda_1 + 4\lambda_2). \end{aligned} \quad (5.58)$$

---

<sup>2</sup>Novamente corrigimos os valores.

Como esperado, as expressões acima implicam que a relação (5.28) é automaticamente satisfeita. Também obtemos, da Eq. (5.57), os valores

$$-\frac{8}{3} \leq \beta < 0. \quad (5.59)$$

Os valores acima estão fora dos valores não permitidos (5.30), e assim o modo ultraleve existe.

Um caso particular que merece ser mencionado é  $\lambda_1 = 0$ . Com isso obtemos um acoplamento apenas com o tensor de Ricci. Usando (5.58) obtemos  $\beta = \lambda_2$ , e  $\alpha = -4\lambda_2$ . Com a condição  $c_1^2 = c_2$ , encontramos  $\lambda_2 = -2$ , então  $\beta = -2$  e  $\alpha = 8$ . Dessa forma fixamos o modo ultraleve. No entanto, para o caso geral, não podemos fixar completamente os parâmetros  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . É necessário algo mais. Como dito na introdução, podemos impor a condição de que a localização tem que ser consistente com as equações de Einstein (EE) no limite de grande raio, Freitas *et al* encontrou, e mostramos no capítulo 3, que devemos fixar [30]

$$\lambda_1 = -\frac{1}{12}, \lambda_2 = -\frac{1}{3}. \quad (5.60)$$

Com esses valores temos  $\beta = -1$  e obtemos um modo ultraleve fixado, que é idêntico ao do campo gravitacional. O resto dos modos de (KK) são calculados com (5.21), com  $\nu = \frac{3}{2}$ . Assim, para um modelo completamente covariante e consistente, fixamos completamente os parâmetros. Como consequência obtemos um modo ultraleve fixado. Na próxima seção, aplicamos o procedimento acima descrito para o campo de Kalb-Ramond.

### 5.2.1.3 O Campo de Kalb-Ramond

A partir de agora vamos analisar a multi-localização do campo de Kalb-Ramond. Aqui, desde o começo usamos os dois acoplamentos. Os casos com apenas o tensor de Ricci ou escalar de Ricci, no contexto de apenas uma brana, são discutidos, respectivamente em [28] e [23]. A ação é dada por

$$S = - \int d^5x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{12} F_{M_1 M_2 M_3} F^{M_1 M_2 M_3} + \frac{\lambda_1}{4} R A^{M_2 N_2} A_{M_2 N_2} + \frac{\lambda_2}{4} g^{N_1 N_2} R^{M_1 M_2} A_{M_1 N_1} A_{M_2 N_2} \right]. \quad (5.61)$$

Onde  $F_{M_1 M_2 M_3} = 3\partial_{[M_1} A_{M_2 M_3]}$ . Essa ação leva a seguinte equação de movimento

$$\begin{aligned} \partial_{M_1} [\sqrt{-g} F^{M_1 M_2 M_3}] - \lambda_1 \sqrt{-g} R A^{M_2 M_3} - \\ \lambda_2 \sqrt{-g} g^{N_1 [M_3} R^{M_2] M_1} A_{M_1 N_1} = 0. \end{aligned} \quad (5.62)$$

O último termo aparece anti-simetrizado devido  $A_{M_1 M_2}$  ser anti-simétrico. Podemos separar a equação (5.62) em duas partes, uma tensorial e outra vetorial. Fixando  $M_2 = \nu$  e  $M_3 =$

5,obtemos a parte vetorial como sendo

$$\partial_\mu F^{\mu\nu 5} - \lambda_1 e^{2A} R A^{\nu 5} - \frac{\lambda_2}{2} R_5^5 A^{\nu 5} - \frac{\lambda_2}{2} \frac{R_\beta^\beta}{4} A^{\nu 5} = 0. \quad (5.63)$$

Quando fixamos  $M_2 = \mu$  e  $M_3 = \nu$  em (5.62), temos a parte tensorial dada por

$$\partial_\rho F^{\rho\mu\nu} + e^A \partial_5 [e^{-A} F^{5\mu\nu}] - \lambda_1 e^{2A} R A^{\mu\nu} - \lambda_2 \frac{R_\beta^\beta}{4} A^{\mu\nu} = 0. \quad (5.64)$$

Devido à anti-simetria do field strength, obtemos de (5.62) ;

$$\partial_\mu (\lambda_1 e^A R A^{\mu 5}) + (\lambda_2 e^{-A} \frac{R_\beta^\beta}{8} + \frac{\lambda_2}{2} e^{-A} R_5^5) \partial_\mu A^{\mu 5} = 0. \quad (5.65)$$

e

$$\partial_5 \left[ \lambda_1 R e^A + \frac{\lambda_2}{2} e^{-A} \left( R_5^5 + \frac{R_\beta^\beta}{4} \right) \right] A^{5\nu} + \partial_\mu \left[ \lambda_1 e^A R + \lambda_2 e^{-A} \frac{R_\beta^\beta}{4} \right] A^{\mu\nu} = 0. \quad (5.66)$$

Da equação (5.65), vemos que o campo vetorial  $A^{\mu 5}$ , uma vez que  $R$ ,  $R_\beta^\beta$  e  $R_5^5$  dependem apenas de  $A(z)$  e de suas derivadas, obedece a condição de transversalidade  $\partial_\mu A^{\mu 5} = 0$ . No entanto, de (5.66), vemos que o campo de Kalb-Ramond não tem divergência nula. Devido isso, separamos o mesmo como feito em [23]

$$A_T^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} + \frac{1}{\square} \partial^{[\mu} \partial_\rho A^{\nu]\rho} \quad ; \quad A_L^{\mu\nu} = -\frac{1}{\square} \partial^{[\mu} \partial_\rho A^{\nu]\rho}. \quad (5.67)$$

Temos que mostrar que a parte longitudinal e transversal do campo podem ser desacopladas. Para isso usamos as identidades

$$\partial_\mu F^{\mu\nu\rho} = \square A_T^{\nu\rho} \quad ; \quad F_L^{5\mu\nu} = -\frac{1}{\square} \partial^{[\mu} \partial_\rho F^{\nu]\rho 5} \quad ; \quad F^{\mu\nu 5} = \partial^5 A_T^{\mu\nu} + F_L^{\mu\nu 5}. \quad (5.68)$$

Agora usamos (5.68) em (5.64), o resultado é

$$\begin{aligned} & \square A_T^{\mu\nu} + e^A \partial_5 [e^{-A} \partial^5 A_T^{\mu\nu}] + e^A \partial_5 [e^{-A} F_L^{5\mu\nu}] \\ & - \lambda_1 e^{2A} R A_T^{\mu\nu} - \lambda_1 e^{2A} R A_L^{\mu\nu} - \lambda_2 \frac{R_\beta^\beta}{4} A_T^{\mu\nu} - \lambda_2 \frac{R_\beta^\beta}{4} A_L^{\mu\nu} = 0 \end{aligned} \quad (5.69)$$

Com à ajuda da segunda identidade em (5.68), e com as equações (5.63) e (5.66), mostramos que

$$e^A \partial_5 [e^{-A} F_L^{5\mu\nu}] = \left( \lambda_1 e^{2A} R + \lambda_2 \frac{R_\beta^\beta}{4} \right) A_L^{\mu\nu}. \quad (5.70)$$

Substituindo (5.70) em (5.69) chegamos em

$$\square A_T^{\mu\nu} + e^A \partial_5 (e^{-A} \partial^5 A_T^{\mu\nu}) - \lambda_1 e^{2A} R A_T^{\mu\nu} - \lambda_2 \frac{R^\beta}{4} A_T^{\mu\nu} = 0. \quad (5.71)$$

A solução padrão que é proposta para resolver à equação acima é

$$A_T^{\mu\nu} = e^{\frac{A}{2}} \tilde{A}_T^{\mu\nu}(x) \Psi(z). \quad (5.72)$$

Substituindo essa solução em (5.71), obtemos uma equação idêntica a (5.35), mas com  $c_1$  e  $c_2$  dados por

$$c_1 = -\frac{1}{2} - 8\lambda_1 - \lambda_2, c_2 = \frac{1}{4} - 12\lambda_1 - 3\lambda_2. \quad (5.73)$$

Novamente, a solução para o modo zero é obtida se  $c_1^2 = c_2$  e encontramos

$$\lambda_2^\pm = -(8\lambda_1 + 2) \pm \sqrt{(12\lambda_1 + 4)}. \quad (5.74)$$

Para termos um acoplamento real temos que ter  $\lambda_1 \geq -1/3$ . A ação efetiva é similar ao caso do campo de gauge

$$S_{eff} = - \int e^{2c_1 A(z)} dz \left[ \int d^4 x \frac{1}{4} \tilde{F}_T^{\mu\nu\rho} \tilde{F}_{\mu\nu\rho}^T \right]. \quad (5.75)$$

Mais uma vez, temos um modo zero localizado na brana de tensão positiva para  $2c_1 > 1$  e para  $2c_1 < 0$  na brana de tensão negativa. Assim usando  $2c_1 > 1, \lambda_1 \geq -1/3$  e Eq. (5.75) chegamos em

$$-\frac{1}{3} \leq \lambda_1 < -\frac{1}{4}, -1 < \lambda_2 \leq \frac{2}{3}. \quad (5.76)$$

Para o modo ultraleve usamos Eq. (A.7) do apêndice para chegarmos em

$$m_1 = \sqrt{4c_1^2 - 1} k e^{-(c_1 + 1/2)x}. \quad (5.77)$$

Dessa forma, vemos que a condição de localização é exatamente a mesma que precisamos para a existência de um modo ultraleve. Novamente, não sabemos os valores exatos dos parâmetros. No entanto, podemos usar as condições de consistência desenvolvidas em [30], e calculadas no capítulo 3. Para o campo de KR os valores dos parâmetros são fixados em

$$\lambda_1 = -\frac{1}{3}, \lambda_2 = \frac{2}{3}.$$

Com isso obtemos um modo zero localizado e o modo ultraleve dados por  $c_1 = 3/2$ . Novamente, obtemos que o único modo ultraleve consistente tem a mesma massa que o modo ultraleve da gravidade.

### 5.2.1.4 Generalização para o campo de $q$ -forma

A ação para a  $q$ -forma acoplada com as quantidades geométricas (escalar de Ricci e tensor de Ricci) é

$$S = - \int d^D x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2(q+1)!} F_{M_1 M_2 \dots M_{q+1}} F^{M_1 M_2 \dots M_{q+1}} + \frac{\lambda_1}{2q!} R A_{M_2 \dots M_{q+1}} A^{M_2 \dots M_{q+1}} \right. \\ \left. + \frac{\lambda_2}{2q!} g_{M_1 N_1} R^{M_1 M_2} g^{N_1 N_2} g^{M_3 N_3} \dots g^{M_{q+1} N_{q+1}} A_{M_2 M_3 \dots M_{q+1}} A_{N_2 N_3 \dots N_{q+1}} \right]. \quad (5.78)$$

Veremos se é possível localizá-la, e avaliar o valor de  $c_1$ . O field strength é dado por  $F_{M_1 M_2 \dots M_{q+1}} = (q+1) \partial_{[M_1} A_{M_2 M_3 \dots M_{q+1}]}$ . A equação de movimento que obtemos de (5.78) é

$$\partial_{M_1} [\sqrt{-g} F^{M_1 M_2 \dots M_{q+1}}] - \lambda_1 R \sqrt{-g} A^{M_2 M_3 \dots M_{q+1}} \\ - \frac{\lambda_2}{2} \sqrt{-g} g_{M_1 N_1} R^{M_1 [M_2} A^{N_1 M_3] \dots M_{q+1}}. \quad (5.79)$$

Temos que decompor a  $q$ -forma em  $D$ -dimensões em uma  $q$ -forma e uma  $(q-1)$ -forma em  $(D-1)$ -dimensões. Para fazer-mos isso temos que expandir a equação (5.79). Com essa expansão, vamos obter duas equações diferentes, uma com um dos índices livres igual a 5 ( $q-1$ -forma) e outra com nenhum dos índices livres igual a 5 ( $q$ -forma). Nessa separação, usamos as seguintes identidades

$$F^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q 5} = F_L^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q 5} + \partial^5 A_T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q} \quad (5.80) \\ F_L^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q 5} = \frac{(-1)^{q-1}}{\square} \partial^{[\mu_1} \partial_{\nu} F^{\mu_2 \dots \mu_q] \nu 5} \\ \partial_{\nu} F^{\nu \mu_1 \dots \mu_q} = \square A_T^{\mu_1 \dots \mu_q}.$$

Assim com a separação para o campo

$$A_T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q} = A^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q} + \frac{(-1)^q}{\square} \partial^{[\mu_1} \partial_{\nu_1} A^{\mu_2 \dots \mu_q] \nu_1} \quad (5.81) \\ A_L^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q} = \frac{(-1)^{q-1}}{\square} \partial^{[\mu_1} \partial_{\nu_1} A^{\mu_2 \dots \mu_q] \nu_1} \\ A^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q} = A_T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q} + A_L^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q}.$$

Usando os dois últimos conjuntos de equações, obtemos a equação para a  $q$ -forma

$$e^{\alpha_q A} \square A_T^{\mu_1 \dots \mu_q} + \partial_5 [e^{\alpha_q A} (\partial^5 A_T^{\mu_1 \dots \mu_q})] \quad (5.82) \\ - e^{\beta_q A} \lambda_1 R A_T^{\mu_1 \dots \mu_q} - \lambda_2 e^{\alpha_q A} \frac{R^{\beta}}{4} A_T^{\mu_1 \dots \mu_q} = 0.$$

Onde  $\alpha_q = [D - 2(q+1)]$  e  $\beta_q = (D - 2q)$ .

Como solução para à equação acima, propomos

$$A_T^{\mu_1 \dots \mu_q} = \hat{A}_T^{\mu_1 \dots \mu_q}(x) e^{-\frac{\alpha_q A}{2}} \psi(z). \quad (5.83)$$

Com essa solução em (5.82) separamos as variáveis, obtendo uma equação que depende da dimensão extra e outra com uma dependência em  $x^\mu$ . A equação que depende da dimensão extra é novamente (5.35), e dessa vez os coeficientes  $c_1$  e  $c_2$  são

$$c_1 = \frac{\alpha_q}{2} - 2\lambda_1(D-1) - \lambda_2 \quad (5.84)$$

$$c_2 = \frac{\alpha_q^2}{4} - \lambda_1(D-1)(D-2) - \lambda_2(D-2)$$

onde usamos o escalar de Ricci e o tensor de Ricci em  $D$ - dimensões calculado em [22, 28]. A solução para o modo zero é  $\psi = e^{c_1 A}$ . Com isso temos  $c_1^2 = c_2$ , e substituindo os valores de  $c_1$  e  $c_2$  temos

$$\lambda_2^\pm = -\frac{[-\alpha_q + 4\lambda_1(D-1) + (D-2)]}{2} \quad (5.85)$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_q^2 + 4\lambda_1(D-1)(D-2) - 2\alpha_q(D-2) + (D-2)^2}. \quad (5.86)$$

Considerando a medida, nossa solução (5.83) e os  $(q+1)$  fatores da métrica, obtemos à ação efetiva para a  $q$ - forma

$$S_{eff} = -\frac{1}{2(q+1)!} \int e^{2c_1 A} dz \int d^4 x \hat{F}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{q+1}}^T \hat{F}_T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{q+1}}. \quad (5.87)$$

Para termos uma  $q$ -forma localizada nas branas de tensão positiva precisamos que  $2c_1 > 1$ , e para a de tensão negativa  $2c_1 < 0$ . Com isso obtemos os valores permitidos para  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$

$$\frac{2\alpha_q(D-2) - (D-2)^2 - \alpha_q^2}{4(D-1)(D-2)} \leq \lambda_1 < \frac{(D-3)^2 + 2\alpha_q(D-2) - (D-2)^2 - \alpha_q^2}{4(D-1)(D-2)}. \quad (5.88)$$

e

$$-\frac{[\alpha_q(D-2) - \alpha_q^2 + (D-3)^2]}{2(D-2)} - \frac{1}{2}(D-3) < \lambda_2 \leq -\frac{[\alpha_q(D-2) - \alpha_q^2]}{2(D-2)}. \quad (5.89)$$

Novamente perceba que temos um intervalo de valores para  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Para fixarmos, precisamos usar as condições de consistência encontradas em [30]. Depois de aplicar essas condições, encontramos

$$\lambda_1 = \frac{2\alpha_q(D-2) - (D-2)^2 - \alpha_q^2}{4(D-1)(D-2)} \quad \lambda_2 = -\frac{[\alpha_q(D-2) - \alpha_q^2]}{2(D-2)}. \quad (5.90)$$

Com esses valores para  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  temos  $c_1 = \frac{(D-2)}{2}$  e  $c_2 = \frac{(D-2)^2}{4}$ . Isso leva a solução  $\psi = e^{\frac{(D-2)A}{2}}$ .

E a ação efetiva para a  $q$ -forma, depois de impor condições de consistência, é

$$S_{eff} = -\frac{1}{2(q+1)!} \int e^{(D-2)A} dz \int d^4x \hat{F}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{q+1}}^T \hat{F}_T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_{q+1}}. \quad (5.91)$$

Um fato interessante que merece ser mencionado é a analogia entre a  $q$ -forma como descrita aqui, e o campo gravitacional em  $D$ -dimensões. Para mostrar isso temos que lembrar que o campo gravitacional é muito similar ao campo escalar livre, em outras palavras, a  $q = 0$  forma. Com isso em mente, temos  $\alpha_q = D - 2$ . Substituindo isso no valor de  $c_1$  encontrado em (5.84), e fazendo  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , temos  $c_1 = \frac{D-2}{2}$ . Como a solução é da forma  $\psi = e^{2c_1A}$ , temos  $\psi = e^{(D-2)A}$ , e isso leva a uma ação efetiva idêntica a (5.91). Isso é um resultado muito importante porque nos informa que o modo ultraleve de todas as  $q$ -forma é idêntico ao do campo gravitacional, com massa dada por (5.77). Se considerarmos  $D = 5$ , vamos sempre obter  $c_1 = \frac{3}{2}$  para os campos bosônicos. Substituindo esse valor para  $c_1$  em (5.77), obtemos a massa para o modo ultraleve para o campo gravitacional (5.9). Na próxima seção vamos discutir a multi-localização com o dÍlaton, e vamos mostrar que obtemos os mesmos resultados obtidos aqui.

### 5.2.2 Multi-Localização com o DÍlaton

Agora apresentamos outra forma para multi-localizar os campos nesse cenário de três branas; o acoplamento com o dÍlaton. Esse método é similar ao apresentado em [46], no sentido de que deixa um parâmetro livre no modelo. Contudo, se considerarmos as condições de consistência encontradas em [30], o parâmetro pode ser fixado. Apesar do modelo agora ser bem diferente, fazemos algumas comparações dos potenciais encontrados aqui com os calculados em [46]. A métrica nessa configuração assume a forma

$$ds^2 = e^{2A(z)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{2B(z)} dy^2, \quad (5.92)$$

ou

$$ds^2 = e^{2A(z)} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2). \quad (5.93)$$

Onde usamos a transformação  $dy = e^{A-B} dz$ , com

$$B(z) = \frac{A(z)}{4}, \quad \pi = -\sqrt{3M^3} A(z). \quad (5.94)$$

Vamos começar discutindo o campo escalar.

### 5.2.2.1 O Campo Escalar

A ação para o campo escalar com o dÍlaton é dada por

$$S = -\frac{1}{2} \int d^5x \sqrt{-g} e^{-\lambda\pi} g^{MN} \partial_M \Phi \partial_N \Phi. \quad (5.95)$$

O procedimento até chegar na equação tipo Schrödinger é bem semelhante ao apresentado na subseção anterior. Tal procedimento aqui é ainda mais fácil, porque não temos termos de massa. O que é diferente é a presença do fator  $\lambda\pi$  devido ao dÍlaton. Mais uma vez temos uma equação do tipo (5.35), mas dessa vez o potencial é dado por

$$U(z) = \frac{(3 + \lambda\sqrt{3M^3})}{2} A''(z) + \frac{(3 + \lambda\sqrt{3M^3})^2}{4} (A'(z))^2, \quad (5.96)$$

isso significa que  $c_1 = \frac{3 + \lambda\sqrt{3M^3}}{2}$  e  $c_2 = \frac{(3 + \lambda\sqrt{3M^3})^2}{4}$ . Onde usamos o seguinte ansatz para a solução  $\Phi(x, z) = e^{-\frac{\rho A}{2}} \phi(x) \psi(z)$ , com  $\rho = (3 + \lambda\sqrt{3M^3})$ . A ação efetiva que obtemos é

$$S_{eff} = - \int e^{2c_1 A} dz \int d^4x \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x). \quad (5.97)$$

A partir dessa ação obtemos novamente as mesmas condições de multi-localização:  $2c_1 > 1$  para branas positivas, e  $2c_1 < 0$  para branas negativas. Em termos de  $\lambda$ ;  $\lambda > -\frac{2}{\sqrt{3M^3}}$ , e  $\lambda < -\frac{3}{\sqrt{3M^3}}$ .

Com o intuito de compararmos esse modelo com [46], precisamos comparar o potencial (5.96) com (5.18). Fazendo isso, obtemos

$$\beta = -\frac{\lambda\sqrt{3M^3}}{2} \quad \alpha = \frac{8\lambda\sqrt{3M^3} + \lambda^2(3M^3)}{4}. \quad (5.98)$$

Como comentamos no começo, se não considerarmos condições de consistência,  $\lambda$  é um parâmetro livre. Depois de usarmos isso, fixamos  $\lambda = 0$ . Então,  $\alpha = \beta = 0$ , e  $c_1 = \frac{3}{2}$ . E mais uma vez teremos um modo ultraleve com massa dada por (5.9).

### 5.2.2.2 O Campo de Gauge

Vejamos agora o campo de gauge acoplado com o dÍlaton. Esse acoplamento foi primeiramente proposto em [10], onde eles propuseram a seguinte ação

$$S = -\frac{1}{4} \int d^5x \sqrt{-g} e^{-\lambda\pi} F_{MN} F^{MN}. \quad (5.99)$$

Usando o gauge  $\partial_\mu A^\mu = A^5 = 0$ , e o já conhecido processo, chegamos no potencial

$$U(z) = \frac{(1 + \lambda\sqrt{3M^3})}{2} A''(z) + \frac{(1 + \lambda\sqrt{3M^3})^2}{4} (A'(z))^2, \quad (5.100)$$

com  $c_1 = \frac{(1+\lambda\sqrt{3M^3})}{2}$  e  $c_2 = \frac{(1+\lambda\sqrt{3M^3})^2}{4}$ . Aqui usamos  $A^V(x,z) = e^{-\frac{\rho A}{2}} \tilde{A}(x) \psi(z)$  como nossa solução, com  $\rho = (1 + \lambda\sqrt{3M^3})$ . Com isso obtemos a ação efetiva

$$S_{eff} = -\frac{1}{4} \int e^{2c_1 A} dz \int d^4 x \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (5.101)$$

Mais uma vez a localização na brana de tensão positiva ocorre para  $2c_1 > 1$ , ou  $\lambda > 0$ . Para a brana negativa;  $2c_1 < 0$ , ou  $\lambda < -\frac{1}{\sqrt{3M^3}}$ .

Como de costume, comparamos nosso potencial (5.100) com (5.27), obtendo

$$\beta = -\frac{\lambda\sqrt{3M^3}}{2} \quad \alpha = \lambda\sqrt{3M^3} + \frac{\lambda^2(3M^3)}{4}. \quad (5.102)$$

Como esperado,  $\lambda$  é um parâmetro livre. Apenas após o uso das EE é que o seu valor é fixado em  $\lambda = \frac{2}{\sqrt{3M^3}}$ . Com  $\lambda$  fixado temos  $\beta = -1$  e  $\alpha = 3$ . Isso obedece a condição  $\alpha = \beta^2 - 2\beta$  encontrada em [46]. Também, com  $\lambda = \frac{2}{\sqrt{3M^3}}$  temos  $c_1 = \frac{3}{2}$ , e mais uma vez o modo ultraleve desse campo é igual ao da gravidade. Com massa dada por (5.9).

### 5.2.2.3 O Campo de Kalb Ramond

Agora descrevemos o campo de Kalb-Ramond (KB). A ação para esse campo com o dÍlaton é

$$S = -\frac{1}{12} \int d^5 x \sqrt{-g} e^{-\lambda\pi} F_{MNR} F^{MNR}. \quad (5.103)$$

Para chegar no potencial desejado usamos  $\partial_\mu A^{\mu\nu} = A^{V5} = 0$ . O potencial é

$$U(z) = \frac{(-1 + \lambda\sqrt{3M^3})}{2} A''(z) + \frac{(-1 + \lambda\sqrt{3M^3})^2}{4} (A'(z))^2. \quad (5.104)$$

Dessa vez temos  $c_1 = \frac{(-1+\lambda\sqrt{3M^3})}{2}$  e  $c_2 = \frac{(-1+\lambda\sqrt{3M^3})^2}{4}$ . A solução para o campo é  $A^{\mu\nu}(x,z) = e^{-\frac{\rho A}{2}} \tilde{A}^{\mu\nu}(x) \psi(z)$ , com  $\rho = (-1 + \lambda\sqrt{3M^3})$ . A ação efetiva é

$$S_{eff} = -\frac{1}{12} \int dz e^{2c_1 A} \int d^4 x \tilde{F}_{\mu\nu\rho} \tilde{F}^{\mu\nu\rho}. \quad (5.105)$$

Como sempre, a localização nas branas de tensão positiva ocorre para  $2c_1 > 1$ , levando a  $\lambda > \frac{2}{\sqrt{3M^3}}$ . Para a negativa é;  $2c_1 < 0$  que nos leva a  $\lambda < \frac{1}{\sqrt{3M^3}}$ . Dessa vez não tem comparação a ser feita; o trabalho [46] não discute o campo de Kalb Ramond. No entanto, aqui também podemos aplicar as EE para fixar o parâmetro  $\lambda$ . O exato valor para tal é  $\lambda = \frac{4}{\sqrt{3M^3}}$ . Esse valor conduz a  $c_1 = \frac{3}{2}$ , e a massa para o modo ultraleve do campo de Kalb Ramond também é dada por (5.9).

#### 5.2.2.4 $q$ -forma

A ação para a  $q$ -forma em uma  $p$ -brana em  $D$ -dimensões é

$$S = -\frac{1}{2(q+1)!} \int d^D x \sqrt{-g} e^{-\lambda\pi} F_{M_1 \dots M_{q+1}} F^{M_1 \dots M_{q+1}}. \quad (5.106)$$

Onde o field strength geral associado a  $q$ -forma é  $F_{M_1 \dots M_{q+1}} = (q+1) \partial_{[M_1} A_{M_2 \dots M_q]}$ . Também usamos o gauge  $A_{\mu_1 \dots \mu_{q-1} 5} = \partial^{\mu_1} A_{\mu_1 \dots \mu_q} = 0$ .

O potencial geral obtido é

$$U(z) = \frac{\rho_q}{2} A''(z) + \frac{\rho_q^2}{4} (A'(z))^2. \quad (5.107)$$

Onde  $c_1 = \frac{\rho_q}{2}$  e  $c_2 = \frac{\rho_q^2}{4}$ , com  $\rho_q = D - 2(q+1) + \lambda \sqrt{3M^3}$ . A solução geral que usamos é  $A^{\mu_1 \dots \mu_q}(x, z) = e^{-\frac{\rho_q A}{2}} A^{\mu_1 \dots \mu_q}(x) \psi(z)$ . A partir disso obtemos a ação efetiva

$$S_{eff} = -\frac{1}{12} \int dz e^{2c_1 A} \int d^4 x \tilde{F}_{\mu_1 \dots \mu_{q+1}} \tilde{F}^{\mu_1 \dots \mu_{q+1}}. \quad (5.108)$$

Com uma simples inspeção nessa ação, vemos que a condição para termos uma  $q$ -forma localizada nas branas positivas é  $2c_1 > 1$ , e na brana negativa  $2c_1 < 0$ . Isso nos leva, respectivamente, a  $\lambda > \frac{2q+3-D}{\sqrt{3M^3}}$  e  $\lambda < \frac{2(q+1)-D}{\sqrt{3M^3}}$ . Como nós já sabemos, a forma de fixar os parâmetros livres é através de EE. Depois de usarmos isso temos  $\lambda = \frac{2q}{\sqrt{3M^3}}$ .

Mais uma vez podemos comparar a  $q$ -forma com o campo gravitacional livre em  $D$ -dimensões. Depois de fixarmos  $\lambda = \frac{2q}{\sqrt{3M^3}}$ , temos  $\rho_q = (D-2)$ , então  $2c_1 = (D-2)$ . Assim, a ação efetiva (5.108) se torna idêntica a (5.91). Isso significa que a massa do modo ultraleve da  $q$ -forma acoplada com o dÍlaton, também é dada por (5.77).

## 6 REVISITANDO CAMPOS BOSÔNICOS NO CRISTAL MANIFOLD

Aqui vamos revisitar os campos bosônicos no cristal manifold. Primeiro, vamos estudar o campo gravitacional nesse background. Depois disso, vamos lidar com os campos escalar, de gauge, Kalb Ramond e  $q$ -forma. Uma vez que os comentários sobre localização foram feitos no capítulo anterior, vamos focar na estrutura de bandas. O cristal é uma generalização do modelo  $(+ - +)$ , onde o conjunto  $(+ - +)$  é interpretado como uma célula do mesmo. A construção original foi proposta em [47]. No entanto, foi encontrado por [45] que a relação de dispersão calculada em [47] não estava correta. Aqui vamos revisar os cálculos analíticos feitos em [45], e em adição mostrar interpretações numéricas, bem como os plotes da estrutura de bandas com e sem o dÍlaton. O estudo dos campos escalar, de gauge, Kalb-Ramond e  $q$ -forma foi feito em [53]. Uma vez que eles usaram a mesma relação de dispersão que [47], seus resultados também estão incorretos. Nós calculamos a relação de dispersão correta e comparamos nossos resultados com os encontrados por eles.

### 6.1 O Campo Gravitacional Livre

O cristal manifold é descrito por um conjunto de  $3 + n$ - branas em um espaço  $AdS$   $4 + n$ -dimensional, igualmente distantes e com tensões alternadas. A ação descrevendo tal configuração é

$$S = \int_M d^{4+n}x \sqrt{g_{4+n}} \left( \frac{R}{2\kappa_{4+n}^2} + \Lambda \right) - \sum_{k=1}^n \sum_{j_k} \int_{j_k l_k} d^{3+n}x \sqrt{g_{3+n}} \sigma_k. \quad (6.1)$$

Onde  $\kappa_{4+n}^2 = \frac{8\pi}{M_*^{n+2}}$ , e  $M_*$  é a escala fundamental da teoria. A equação de movimento de (6.1) é

$$G_N^M = \kappa_{4+n}^2 \Lambda \delta_N^M - \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{g_{3+n}}}{\sqrt{g_{4+n}}} |_k \kappa_{4+n}^2 \sigma_k \sum_j (-1)^j \delta(z^k - j l_k). \quad (6.2)$$

Onde  $z^k$  parametriza as dimensões extras.

A solução geral que é válida em todo o manifold (bulk e branas) é escrita na forma

$$ds_{n+4}^2 = e^{2bA} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \sum_{k=1}^n (dz^k)^2), \quad (6.3)$$

onde  $n$  é o número de dimensões espaciais extras. O parâmetro  $b$  é o que controla a presença ou não do dÍlaton. Para  $b = 1$  isso não existe, e para  $b = \frac{3}{4}$  sim. A solução para o fator conforme é

$$e^{-bA} = K \sum_{k=1}^n S(k^k) + 1, \quad (6.4)$$

com  $K = (\sqrt{n}L)^{-1}$  e as funções  $S$  satisfazendo

$$\begin{aligned} \frac{d^2 S(z^k)}{d(z^k)^2} &= 2 \sum_j (-1)^j \delta(z^k - jl_k), \\ \left| \frac{dS(z^k)}{dz^k} \right| &= 1. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Aqui  $L$  é o raio de  $AdS$ , e  $l_k$  a separação entre as branas. A função  $S$  que resolve (6.5) é a função dente de serra, que pode ser escrita como segue

$$S(z^k) = \begin{cases} \dots \\ 2pl_k - z^k, & \text{para } (2p-1)l_k < z^k < 2pl_k; \\ z^k - 2pl_k, & \text{para } 2pl_k < z^k < (2p+1)l_k; \\ \dots \end{cases}, \quad (6.6)$$

onde  $p \in \mathbb{Z}$ .

A equação tipo Schrödinger que tem que ser resolvida nesse caso é bem semelhante a que aparece no modelo Kroning Penney [31]

$$\Psi'' + \left( m^2 - \frac{15}{4(S(z) + L)^2} \right) \Psi + \frac{3}{S(z) + L} \sum_j (-1)^j \delta(z - jl) \Psi = 0. \quad (6.7)$$

Agora apresentamos como calcular a relação de dispersão para o caso gravitacional, isso significa que vamos começar da equação (6.7). Assim como em [47], usamos a analogia de elétrons dentro de um cristal, dessa forma precisamos resolver (6.7) para duas células elementares adjacentes. Resolvendo para essas duas células é possível relacionar as constantes nas funções de onda com o objetivo de obter a relação de dispersão. O procedimento que vamos usar é baseado no método da matriz de transferência, também usado em [53]. A configuração para duas células elementares pode ser vista na figura abaixo

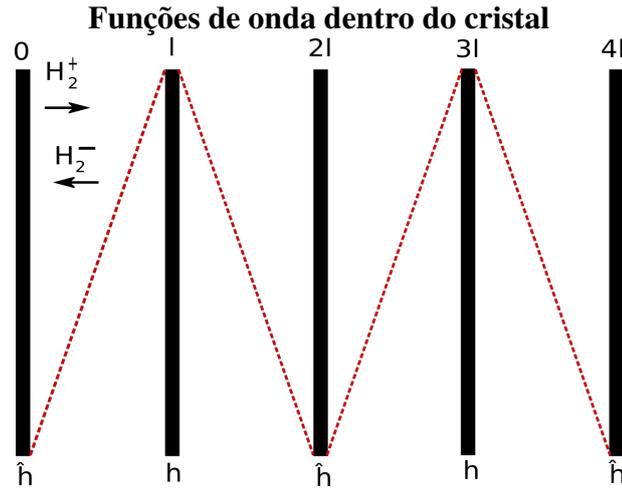


Figura 11: Um trecho do cristal 1-D (Duas células adjacentes)

Para calcular as condições de contorno para (6.7) temos que perceber que  $S(z) = l$  para  $z = l, 3l, 5l, \dots$  e  $S(z) = 0$  para  $z = 0, 2l, 4l, \dots$ . Calculando em  $z = l$  e  $j = 1$ , temos

$$\Psi'(l^+) - \Psi'(l^-) = \frac{3\Psi(l)}{(l+L)}. \quad (6.8)$$

E para  $z = 2l$  e  $j = 2$ , encontramos

$$\Psi'(2l^+) - \Psi'(2l^-) = -\frac{3}{L}\Psi(2l). \quad (6.9)$$

Uma vez que a função de onda não tem descontinuidade, suas condições de contorno são

$$\Psi(l^+) = \Psi(l^-) \quad e \quad \Psi(2l^+) = \Psi(2l^-). \quad (6.10)$$

A equação diferencial para a primeira célula pode ser escrita como

$$\Psi'' + m^2\Psi = \begin{cases} \frac{15}{4(z+L)^2}\Psi & p/ \quad 0 < z < l \\ \frac{15}{4(2l-z+L)^2}\Psi & p/ \quad l < z < 2l \end{cases}. \quad (6.11)$$

As equações acima podem ser transformadas em uma equação de Bessel padrão através da transformação

$$\Psi = \begin{cases} \sqrt{u}\Psi(u) & u = m(z+L) \quad p/ \quad 0 < z < l \\ \sqrt{v}\Psi(v) & v = m(2l-z+L) \quad p/ \quad l < z < 2l \end{cases}. \quad (6.12)$$

Depois de efetuar as derivadas em (6.12), e substituir em (6.11), encontramos

$$\begin{cases} u^2\Psi''(u) + u\Psi'(u) + [u^2 - 4]\Psi(u) = 0 & u = m(z+L) & \text{para } 0 < z < l \\ v^2\Psi''(v) + v\Psi'(v) + [v^2 - 4]\Psi(v) = 0 & v = m(2l - z + L) & \text{para } l < z < 2l \end{cases} \quad (6.13)$$

Então vemos que as funções de Bessel consideradas são de segunda ordem. Esta é a ordem que vamos considerar a partir de agora.

A solução para a primeira célula é dada por

$$\Psi = \begin{cases} \sqrt{u}(AH_2^+(u) + BH_2^-(u)) & 0 < z < l & u = m(z+L) \\ \sqrt{v}(CH_2^+(v) + DH_2^-(v)) & l < z < 2l & v = m(2l - z + L). \end{cases} \quad (6.14)$$

Onde  $H_2^\pm$  são as funções de Hankel de primeiro e segundo tipo de ordem dois. Elas são definidas como

$$H_2^+ = J_2 + iN_2 \quad e \quad H_2^- = J_2 - iN_2. \quad (6.15)$$

com  $J_2$  e  $N_2$  sendo as funções de Bessel de primeiro e segundo tipo de ordem dois. Para simplificar a solução (6.14), definimos as quantidades

$$\begin{cases} E(u) = \sqrt{u}H_2^+(u) \\ F(u) = \sqrt{u}H_2^-(u) \\ G(v) = \sqrt{v}H_2^+(v) \\ I(v) = \sqrt{v}H_2^-(v) \end{cases}, \quad (6.16)$$

então a equação(6.14) torna-se

$$\Psi = \begin{cases} AE(u) + BF(u) & 0 < z < l & u = m(z+L) \\ CG(v) + DI(v) & l < z < 2l & v = m(2l - z + L) \end{cases}. \quad (6.17)$$

É importante notarmos que no vértice  $z = l$ , temos

$$\begin{cases} E(l) = G(l) \\ F(l) = I(l) \\ E'(l) = G'(l) \\ F'(l) = I'(l). \end{cases} \quad (6.18)$$

Usando (6.18) e as condições de contorno para a função e suas derivadas em  $z = l$ , obtemos

$$\begin{pmatrix} E(l) & F(l) \\ -mE'(l) & -mF'(l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(l) & F(l) \\ mE'(l) + \frac{2cE(l)}{(l+L)} & mF'(l) + \frac{2cF(l)}{(l+L)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \quad (6.19)$$

Onde  $E'(l) = \frac{dE(u)}{du}|_{z=l}$  e  $F'(l) = \frac{dF(u)}{du}|_{z=l}$ . Com essa matriz podemos relacionar as constantes  $C$  e  $D$  com  $A$  e  $B$ . É válido mencionar que quando derivamos as funções de Hankel usamos a relação  $\frac{dH^\pm}{du} = H_1^\pm - \frac{2}{u}H_2^\pm$ . Também, usamos as seguintes definições nos vértices  $H_{1,2}^\pm(0) = H_{1,2}^\pm(2l) = H_{1,2}^\pm(4l) = \hat{h}_{1,2}^\pm$  (para todo  $l$  par) e  $H_{1,2}^\pm(l) = H_{1,2}^\pm(3l) = h_{1,2}^\pm$  (para  $l$  ímpar), onde  $h_1^\pm = j_1 \pm in_1$  e  $h_2^\pm = j_2 \pm in_2$ . A mesma definição se aplica para  $\hat{h}_{1,2}^\pm$ , mas com  $\hat{j}_{1,2}$  e  $\hat{n}_{1,2}$ . Quando explicitamos as constantes  $C, D$ , temos

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{(h_2^- h_1^+ + h_2^+ h_1^-)}{h_2^- h_1^+ - h_2^+ h_1^-} & -\frac{2h_2^- h_1^-}{h_2^- h_1^+ - h_2^+ h_1^-} \\ \frac{2h_2^+ h_1^+}{h_2^- h_1^+ - h_2^+ h_1^-} & \frac{(h_2^- h_1^+ + h_2^+ h_1^-)}{h_2^- h_1^+ - h_2^+ h_1^-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \quad (6.20)$$

A função de onda para a primeira célula é

$$\Psi = \begin{cases} \sqrt{m(z+L)} [AH_2^+(m(z+L)) + BH_2^-(m(z+L))] & 0 < z < l \\ \sqrt{m(2l-z+L)} \left[ \left( -\frac{(h_2^- h_1^+ + h_2^+ h_1^-)}{h_2^- h_1^+ - h_2^+ h_1^-} A - \frac{2h_2^- h_1^-}{h_2^- h_1^+ - h_2^+ h_1^-} B \right) H_2^+(m(2l-z+L)) \right. \\ \left. + \left( \frac{2h_2^+ h_1^+}{h_2^- h_1^+ - h_2^+ h_1^-} A + \frac{(h_2^- h_1^+ + h_2^+ h_1^-)}{h_2^- h_1^+ - h_2^+ h_1^-} B \right) H_2^-(m(2l-z+L)) \right] & l < z < 2l. \end{cases} \quad (6.21)$$

Para a outra célula o processo é similar, e obtemos

$$\Psi = \begin{cases} \sqrt{m(z-2l+L)} [\hat{A}H_2^+(m(z-2l+L)) + \hat{B}H_2^-(m(z-2l+L))] & 2l < z < 3l \\ \sqrt{m(4l-z+L)} \left[ \left( -\frac{(h_2^- h_1^+ + h_2^+ h_1^-)}{h_2^- h_1^+ - h_2^+ h_1^-} \hat{A} - \frac{2h_2^- h_1^-}{h_2^- h_1^+ - h_2^+ h_1^-} \hat{B} \right) H_2^+(m(4l-z+L)) \right. \\ \left. + \left( \frac{2h_2^+ h_1^+}{h_2^- h_1^+ - h_2^+ h_1^-} \hat{A} + \frac{(h_2^- h_1^+ + h_2^+ h_1^-)}{h_2^- h_1^+ - h_2^+ h_1^-} \hat{B} \right) H_2^-(m(4l-z+L)) \right] & 3l < z < 4l. \end{cases} \quad (6.22)$$

Para cada célula temos a função de onda com duas constantes, temos que relacioná-las. Para fazer isso, usamos as condições de contorno para a onda de Bloch <sup>1</sup> juntamente com as condições de contorno usuais

$$\begin{cases} \Psi(2l) = e^{2iqL}\Psi(0) \\ \Psi(4l) = e^{2iqL}\Psi(2l) \\ \Psi(2l^+) = \Psi(2l^-) \\ \Psi'(2l^+) - \Psi'(2l^-) = -\frac{3}{L}\Psi(2l). \end{cases} \quad (6.23)$$

<sup>1</sup>  $\psi(z_i + 2l) = e^{2iqL}\psi(z_i)$ , onde  $q$  é o vetor de onda.

Usando a primeira condição em (6.23), e a equação (6.20), temos

$$B = \frac{(e^{2iq_l} \hat{h}_2^+ - \hat{h}_2^+ K_{11} - \hat{h}_2^- K_{21})A}{\hat{h}_2^+ K_{12} + \hat{h}_2^- K_{22} - e^{2iq_l} \hat{h}_2^-}. \quad (6.24)$$

Para a segunda célula, e usando a segunda condição em (6.23)

$$\hat{B} = \frac{(e^{2iq_l} \hat{h}_2^+ - \hat{h}_2^+ K_{11} - \hat{h}_2^- K_{21})\hat{A}}{\hat{h}_2^+ K_{12} + \hat{h}_2^- K_{22} - e^{2iq_l} \hat{h}_2^-}. \quad (6.25)$$

Ainda definimos

$$f = \frac{(e^{2iq_l} \hat{h}_2^+ - \hat{h}_2^+ K_{11} - \hat{h}_2^- K_{21})}{\hat{h}_2^+ K_{12} + \hat{h}_2^- K_{22} - e^{2iq_l} \hat{h}_2^-}, \quad (6.26)$$

que nos permite escrever (6.24) e (6.25) como  $B = fA$  e  $\hat{B} = f\hat{A}$ . A terceira condição em (6.23) leva a

$$\hat{A} = e^{2iq_l} A. \quad (6.27)$$

Então temos quatro constantes e três equações ; (6.24), (6.25) e (6.27). A outra equação que precisamos é encontrada usando a última condição em (6.23), e através de um processo similar ao que fizemos para encontrar a matriz de transferência no vértice  $l$ , o resultado é

$$\begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{(\hat{h}_2^- \hat{h}_1^+ + \hat{h}_2^+ \hat{h}_1^-)}{\hat{h}_2^- \hat{h}_1^+ - \hat{h}_2^+ \hat{h}_1^-} & -\frac{2\hat{h}_2^- \hat{h}_1^-}{\hat{h}_2^- \hat{h}_1^+ - \hat{h}_2^+ \hat{h}_1^-} \\ \frac{2\hat{h}_2^+ \hat{h}_1^+}{\hat{h}_2^- \hat{h}_1^+ - \hat{h}_2^+ \hat{h}_1^-} & \frac{(\hat{h}_2^- \hat{h}_1^+ + \hat{h}_2^+ \hat{h}_1^-)}{\hat{h}_2^- \hat{h}_1^+ - \hat{h}_2^+ \hat{h}_1^-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \hat{K} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}. \quad (6.28)$$

Aqui  $\hat{K}$  é a mesma matriz que  $K$ , mas com  $h \rightarrow \hat{h}$ . Substituindo (6.24), (6.25), (6.27) e (6.20) em (6.28), temos

$$\begin{pmatrix} e^{2iq_l} \\ f e^{2iq_l} \end{pmatrix} = \hat{K} K \begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix}. \quad (6.29)$$

A equação acima ainda pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} e^{2iq_l} - (\hat{K}_{11} K_{11} + \hat{K}_{12} K_{21}) & -(\hat{K}_{11} K_{12} + \hat{K}_{12} K_{22}) \\ -(\hat{K}_{11} K_{12} + \hat{K}_{12} K_{22}) & e^{2iq_l} - (\hat{K}_{21} K_{12} + \hat{K}_{22} K_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix} = 0 \quad (6.30)$$

A equação acima tem solução se o determinante da matriz que multiplica  $\begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix}$  for igual a zero, i.e,

$$e^{4iq_l} - e^{2iq_l} [(\hat{K}_{21} K_{12} + \hat{K}_{22} K_{22}) + (\hat{K}_{11} K_{11} + \hat{K}_{12} K_{21})] + (\hat{K}_{11} K_{11} + \hat{K}_{12} K_{21}) \cdot (\hat{K}_{21} K_{12} + \hat{K}_{22} K_{22}) - (\hat{K}_{11} K_{12} + \hat{K}_{12} K_{22}) \cdot (\hat{K}_{21} K_{11} + \hat{K}_{22} K_{21}) = 0. \quad (6.31)$$

Ainda podemos escrever da seguinte forma

$$e^{4iqL} - e^{2iqL} \text{Tr}(\hat{K}K) + \det(\hat{K}K) = 0. \quad (6.32)$$

Usando (6.20) e (6.28), é fácil mostrar que  $\det(\hat{K}K) = 1$ . Então, de (6.32) obtemos

$$\cos(2ql) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\hat{K}K). \quad (6.33)$$

Voltando com as definições de  $h_1^\pm$  e  $h_2^\pm$ , e colocando em termos de  $\cos(ql)$ , temos

$$\cos(ql) = \sqrt{\frac{-\hat{j}_1 \hat{j}_2 n_1 n_2 - \hat{n}_1 \hat{n}_2 j_1 j_2 + \hat{j}_2 \hat{n}_1 j_2 n_1 + \hat{j}_1 \hat{n}_2 j_1 n_2}{(\hat{j}_2 \hat{n}_1 - \hat{j}_1 \hat{n}_2)(j_2 n_1 - j_1 n_2)}}. \quad (6.34)$$

Claramente essa relação é bem diferente da encontrada em [47], que é

$$\begin{aligned} \cos(lq) = & \frac{(j_2 n_1 + j_1 n_2)(\hat{j}_2 \hat{n}_1 + \hat{j}_1 \hat{n}_2) - \hat{j}_1 \hat{j}_2 (j_1 j_2 + 3n_1 n_2)}{2(j_2 n_1 - j_1 n_2)(\hat{j}_2 \hat{n}_1 - \hat{j}_1 \hat{n}_2)} \\ & - \frac{\hat{n}_1 \hat{n}_2 (3j_1 j_2 + n_1 n_2)}{2(j_2 n_1 - j_1 n_2)(\hat{j}_2 \hat{n}_1 - \hat{j}_1 \hat{n}_2)}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Essa equação leva a um vínculo em  $m$ . Resolvendo para  $q = 0$ , nos dá o menor valor de massa, e conseqüentemente a magnitude do gap. Os autores em [47], não resolvem essa equação explicitamente. O que eles fazem é apenas analisar os argumentos das funções de Bessel que são  $mL$  e  $m(l+L)$ . Então, eles argumentam que os dois únicos candidatos para o gap de massa ( $m_{gap}$ ) são  $L^{-1}$  e  $(l+L)^{-1}$ . A primeira opção é excluída, porque no limite de  $l \rightarrow \infty$  o caso da brana simples [8] tem que ser satisfeito. Então o gap de massa tem que ser

$$m_{gap} = \frac{\mathcal{O}(1)}{l+L}. \quad (6.36)$$

Os autores em [45] calcularam analiticamente a largura da primeira banda de massa, bem como a distância entre o modo zero e a primeira banda de massa. A forma de encontrar esses resultados é idêntica ao processo descrito no apêndice A, onde mostramos como encontrar a estrutura do espectro de massa para os campos bosônicos. A largura da primeira banda é dada por

$$\Gamma_0 = 2\sqrt{2}ke^{-2x}, \quad (6.37)$$

onde  $x = kl$ . E a distância do modo zero até a primeira banda é

$$\Delta\Gamma_1 = \xi_1 ke^{-x}. \quad (6.38)$$

com  $\xi_1$  sendo a primeira raiz de  $J_1(x)$ .

O restante da estrutura de bandas tem a seguinte forma. A largura do restante das

bandas é

$$\Gamma_i \approx \xi_i e^{-3x}. \quad (6.39)$$

Enquanto que a distância entre elas é

$$\Delta\gamma_i \approx (\xi_i - \xi_{i-1})ke^{-x}. \quad (6.40)$$

Onde  $\xi_i$  são as raízes da função de Bessel  $J_2(x)$ . No limite  $m \rightarrow \infty$  os gap desaparecem, e não existe mais zonas proibidas. Essa descrição é válida para apenas um ponto ( $q = 0$ ). Para encontrar a forma completa das bandas de massa necessitamos cálculos numéricos, e isto é o que fazemos no que se segue.

Para fazermos os cálculos numéricos, precisamos dar a magnitude de alguns parâmetros. Se queremos ter a gravidade no limite observacional, a relação entre  $l$  e  $L$  é  $\frac{l^3}{L^2} \leq 1mm$  [47], e  $M_{PL}^2 \approx M_*^3 LN$ . Onde  $N$  é o número de branas no cristal. A escala fundamental satisfaz  $M_* \approx \frac{1}{L} * TeV$  e, se tomamos  $l \approx eV^{-1} \ll 1mm$ , encontramos  $N \approx 10^{16}$ ,  $M_* \approx 100TeV$  ( $\frac{1}{L} \approx 100$ ). Em (6.34), usamos como argumento das funções de Bessel

$$\begin{aligned} \hat{n}_2 &= N_2(mL) \\ \hat{n}_1 &= N_1(mL) \\ n_2 &= N_2(m(l+L)) \\ n_1 &= N_1(m(l+L)) \end{aligned} \quad (6.41)$$

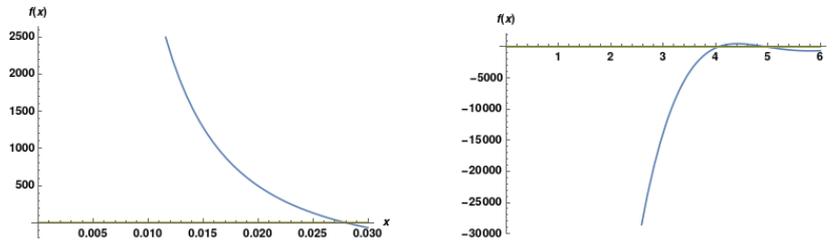
e

$$\begin{aligned} \hat{j}_2 &= J_2(mL) \\ \hat{j}_1 &= J_1(mL) \\ j_2 &= J_2(m(l+L)) \\ j_1 &= J_1(m(l+L)). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Com  $l$  sendo a distância entre as branas, e  $L$  o raio de  $AdS$ .

Quando calculamos o limite de (6.34) com  $m \rightarrow 0$ , encontramos que a relação de dispersão tende suavemente para um. Isso significa que a primeira banda de massa começa no zero em ( $ql \approx 0$ ) e vai até um valor máximo em  $ql = 0.5\pi$ , como pode ser visto na Figura13. Para encontrar esse máximo plotamos (6.34) para  $ql = 0.5\pi$ . Aqui, ao contrário de [47], encontramos o valor exato desse primeiro modo. Em [47], o autor apenas deu uma estimativa eurística dessa massa, sugerida como  $m_{gap} = \mathcal{O}(1)/(l+L)$ . Com nossos cálculos numéricos, para a dis-

persão errada, encontramos o valor exato desse numerador; 4. Vejamos o plote para o primeiro modo para ambas as relações de dispersão.

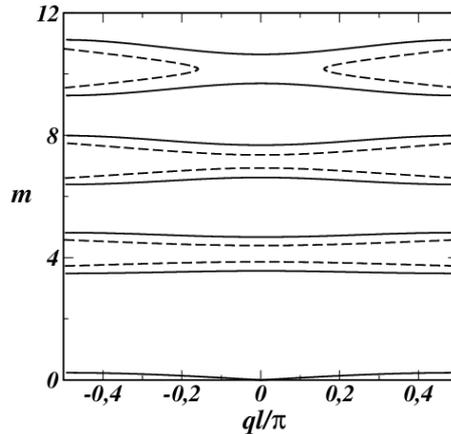


(a) Os modos de massa mais baixos para o campo gravitacional com a relação de dispersão (6.34).

(b) Os modos de massa mais baixos usando (6.35).

Figura 12: Os modos de massa mais baixos para o campo gravitacional com ambas as relações de dispersão.

Para plotar os gráficos acima usamos as definições (6.41) e (6.42). Também fizemos  $x = m(l + L)$ , e com a relação  $l/L = 100$  obtemos  $\frac{x}{101} = mL$ . Então fazemos  $f(x) = (6.34)^2$ , e plotamos  $ql = 0.5\pi$  entre os limites inferiores e superiores do cosseno. O ponto onde o gráfico intercepta o eixo  $x$  pela primeira vez, representa o valor do primeiro modo de massa. De acordo com a Figura 12a), o primeiro modo está em  $x = 0.028$  i.e  $m = 0.028/(l + L)$ , enquanto que Figura 12b) mostra que o primeiro modo de massa para (6.35) é  $x = 4$ , ou  $m = 4/(l + L)$ . Dessa forma nosso primeiro modo é duas ordem de grandeza menor do que o primeiro modo calculado em [47]. Isso leva a uma maior correção na lei de Newton como pode ser visto em [46]. A comparação entre as duas relações de dispersão, para os primeiros modos de massa, é mostrada na figura abaixo. Nessa figura, assim como em todas as outras desse tipo, o eixo  $y$  representa a massa em unidades de inverso de comprimento, precisamente;  $m = x/(l + L)$  ou  $m = x \cdot (10^{10} mm^{-1})$  uma vez que  $l = 10^{-4} mm$  e  $L = 10^{-6} mm$ .



(a) Os modos de massa mais baixos para o campo gravitacional.

Figura 13: Comparação para os modos de massa para as duas relações de dispersão. A curva sólida é a nossa relação, enquanto que a tracejada é a dispersão calculada por [47].

Como pode ser visto na Figura 13, a relação de dispersão obtida na literatura (curva tracejada) diz que o modo de massa mais baixo tem um máximo em  $q \approx 0$ . No entanto, com nossos resultados, o modo de massa mais baixo tem um mínimo em  $q \approx 0$ . Também fica claro a grande diferença nos valores dos primeiros modos de massa. Em adição, com a relação antiga, não existe massa em torno de  $q = 0$  para  $m$  maior que  $m \approx 9.5$ . Isso não é verdade de acordo com nossa relação. Uma vez encontrado o valor para o primeiro modo de massa, é possível estimar a correção na lei de Newton devido aos grávitons no Bulk [45]. Vamos agora estudar um resultado novo para o campo gravitacional; seu acoplamento com o dÍlaton.

## 6.2 O Campo Gravitacional com o DÍlaton

Agora apresentamos uma nova discussão para o campo gravitacional; analisamos seu comportamento na presença do dÍlaton no background do cristal. O acoplamento do campo gravitacional com o dÍlaton também é discutido em [10,41]. A multi-localização segue o mesmo padrão que o apresentado em [10], a diferença é apenas o fator de dobra. Novamente consideramos as equações de Einstein no gauge axial, e a equação que depende da dimensão extra é

$$\left[ -e^{2(A-B)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + e^{2(A-B)} B' \frac{d}{dy} + 2e^{2(A-B)} (A'' - A'B' + 2(A')^2) - \partial^2 \right] h_{\mu\nu} = 0, \quad (6.43)$$

com  $\partial^2 \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ . Depois da separação de variáveis  $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} \psi(y)$  temos o seguinte potencial

$$\bar{U} = \frac{3}{2} \bar{A}'' + \frac{9}{4} \bar{A}'^2. \quad (6.44)$$

Os resultados para o campo gravitacional acoplado com o dÍlaton são mostrados na figura abaixo. Aqui consideramos o acoplamento do dÍlaton como  $\lambda = 1/\sqrt{(3M^3)}$ . Vemos que existe

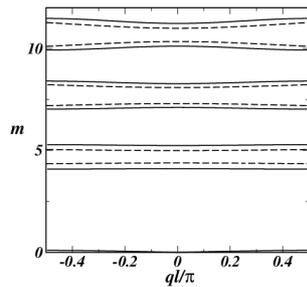
um desvio nos valores de massa, quando comparados com os resultados encontrados com a relação de dispersão calculada em [47]. Também, devido a presença do dÍlaton, o primeiro modo de massa decresce de  $m = 0.028/(l + L)$  para  $m = 0.004/(l + L)$ , no nosso caso. Enquanto que para a outra dispersão, o primeiro modo de massa aumenta de  $m_{gap} = 4/(l + L)$  para  $m_{gap} = 4.4/(l + L)$ . Como o primeiro modo é menor do que no caso livre, a correção no potencial de Newton vai ser maior

$$V \approx -G \frac{m_1 m_2}{r} + \left( \int_0^{\frac{0.004}{(l+L)}} \frac{dm}{K} \frac{G m_1 m_2}{r} \frac{m}{K} e^{-mr} \right). \quad (6.45)$$

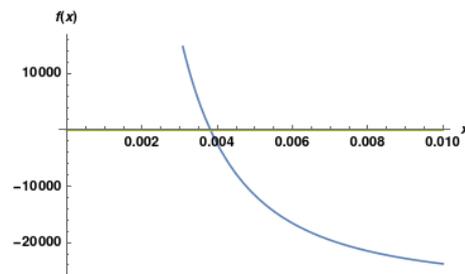
Depois da integração, obtemos

$$V \approx -G \frac{m_1 m_2}{r} \left( 1 + \frac{0.004 L^2}{(l+L) r^2} e^{-\frac{0.004 r}{(l+L)}} \right). \quad (6.46)$$

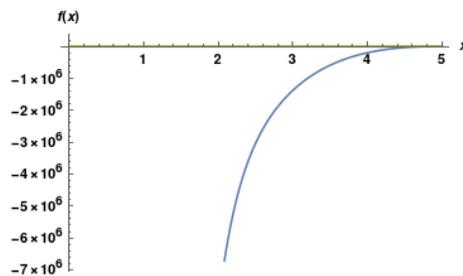
Essa correção é sete vezes maior do que no caso livre, onde a exponencial acima é  $e^{-\frac{0.028 r}{(l+L)}}$ .



(a) Os modos de massa mais baixos para o campo gravitacional com o dÍlaton.



(b) O primeiro modo de massa usando (6.34).



(c) O primeiro modo de massa usando (6.35).

Figura 14: Os modos de massa mais baixos para o campo gravitacional com o dÍlaton são apresentados em (a). A curva tracejada é o plote com a relação de dispersão errada, e a curva sólida com a correta. Em (b), temos o valor para o primeiro modo de massa usando nossa relação. Em c), mostramos o primeiro modo de massa para a relação de dispersão (6.35).

### 6.3 O Campo Escalar, de Gauge, Kalb-Ramond e $q$ -forma.

Na subseção anterior desenvolvemos o caso específico do campo gravitacional. Agora mostramos a equação tipo Schrödinger geral e a relação de dispersão que é válida para a  $q$ -forma. Dessa maneira corrigimos os resultados errados apresentados em [53]. Na seção três, vimos o valor exato para o primeiro modo de massa no caso do modelo  $(+ - +)$ . Isso foi possível devido a fixação de parâmetros usando condições de consistência. Aqui vamos mostrar a estrutura de bandas de forma geral, sem fixar os parâmetros.

A equação de tipo Schrödinger válida para a  $q$ -forma é

$$\Psi'' + \left[ m^2 - (c_1 + c_1^2) \frac{1}{(S(z) + L)^2} + c_1 \frac{\sum_j (-1)^j \delta(z - jl)}{(S(z) + L)} \right] \Psi = 0. \quad (6.47)$$

Perceba que essa equação é bem semelhante a (6.7), a diferença é apenas alguns parâmetros. Como esses parâmetros são constantes, o procedimento para resolver essa equação para duas células adjacentes é idêntico ao do caso gravitacional. Seguindo os mesmos passos, chegamos na dispersão geral

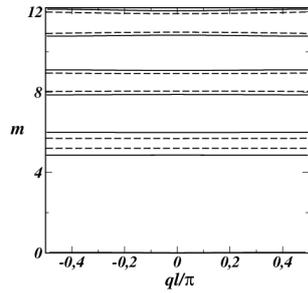
$$\cos(ql) = \sqrt{\frac{-\hat{n}_v \hat{n}_{v-1} j_v j_{v-1} - \hat{j}_v \hat{j}_{v-1} n_v n_{v-1} + \hat{n}_v \hat{j}_{v-1} n_v j_{v-1} + \hat{j}_v \hat{n}_{v-1} j_v n_{v-1}}{(\hat{n}_v \hat{j}_{v-1} - \hat{j}_v \hat{n}_{v-1})(n_v j_{v-1} - j_v n_{v-1})}}. \quad (6.48)$$

Onde  $\nu = (\frac{1}{2} + c_1)$ . No intuito de evitar confusão, é importante mencionar que  $\nu$  é a ordem da função de Bessel, e  $c_1$  o coeficiente que aparece próximo a  $A''$  no potencial. No trabalho [46], os autores usaram  $\nu$  para o termo que aparece junto a  $A''$ . Então, para cada campo, com ou sem o dÍlaton, precisamos encontrar  $c_1$ . Também nesse sentido, para evitar complicações, aqui iremos tratar da  $q$ -forma, mas perceba que também chamamos o vetor de onda de  $q$ , como pode ser visto na equação (6.48). Apesar disso, nas discussões você será capaz de distinguir o que será o  $q$  em cada situação.

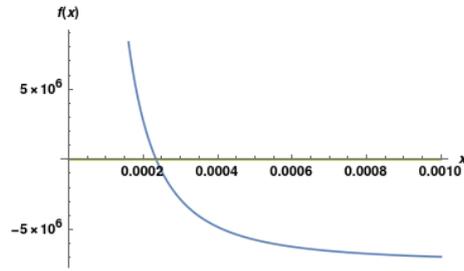
#### 6.3.1 O Campo Escalar

Agora estudamos o campo escalar no background do cristal. A ação, com o dÍlaton, é idêntica a usada no capítulo anterior i.e, equação (5.95) bem como os parâmetros. A multi-localização é alcançada com o mesmo valor para o parâmetro  $\lambda$  como vimos na seção anterior. Novamente, o campo de dÍlaton diminui a massa do primeiro modo, agora o primeiro modo de massa é  $m = 0.00025/(l + L)$  como pode ser visto na Figura 15(b). Vamos ver a estrutura de bandas nesse caso. Mais uma vez a comparação entre as duas relações de dispersões pode ser vista na Figura 15(a). Na Figura 15(b), temos o primeiro modo de massa para (3.114). Na Figura

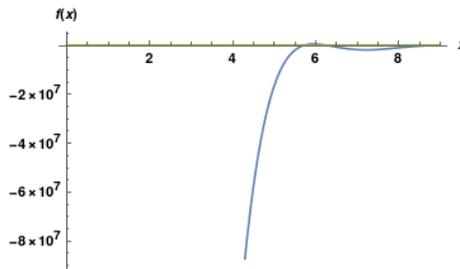
15c), o primeiro modo de massa para (3.112).



(a) Os modos de massa mais baixos para o campo escalar com o dÍlaton.



(b) O primeiro modo de massa com a nossa relaçaõ.



(c) O primeiro modo de massa para (6.35)

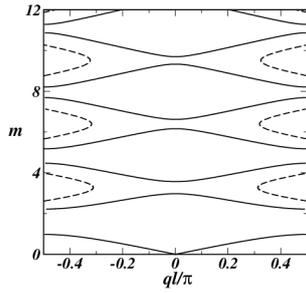
Figura 15: Os menores valores de massa para o campo escalar com o dÍlaton são representados em (a).A curva tracejada é o plote com a relaçaõ de dispersãõ incorreta,e a curva sólida o plote com a correta. Em (b),temos o primeiro modo de massa para nossa relaçaõ. Em c),o primeiro modo para a relaçaõ antiga.

### 6.3.2 O Campo de Gauge

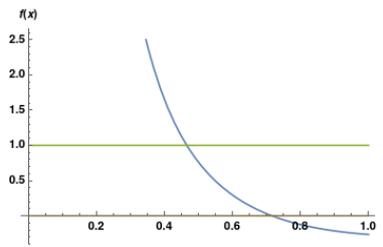
Vejamos agora como é o comportamento do campo de gauge dentro do cristal. Consideramos inicialmente o caso livre, e depois disso, o caso com acoplamento do dÍlaton. O potencial no caso livre é

$$U(z) = \left[ \frac{1}{4}A'(z)^2 + \frac{A''(z)}{2} \right]. \tag{6.49}$$

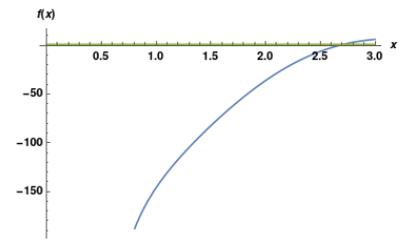
Entãõ vemos que nesse caso  $c_1 = \frac{1}{2}$  e  $\nu = 1$ . Colocando esses valores na relaçaõ de dispersãõ,obtemos os resultados mostrados na figura abaixo. Como pode ser visto, diferentemente do que ocorre em [53], existe massa em torno de  $q = 0$ . Em [53], os modos de massa eram restritos a  $q \approx 0.5\pi/l$ , e isso nãõ é verdade. Também da figura16(b),vemos que o primeiro modo de massa é  $m = 0.7/(l+L)$ . Na figura16(c), plotamos o primeiro modo para o resultado antigo,em que o primeiro modo é  $m = 2.7/(l+L)$ . Podemos ver que nosso primeiro modo, novamente, é menor, levando a uma maior correçaõ na lei de Coulomb.



(a) Os menores valores de massa para o campo de gauge livre.



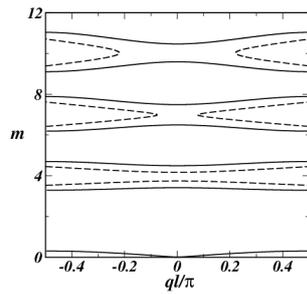
(b) O primeiro modo para o nosso caso.



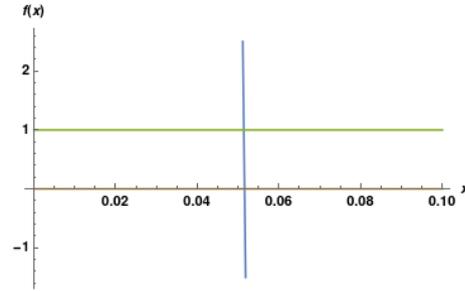
(c) O primeiro modo para [47].

Figura 16: Os menores valores de massa para o campo de gauge livre são apresentados em (a). A curva tracejada é o plote com a relação de dispersão errada, e a sólida o plote com a relação correta. c) O primeiro modo para a relação incorreta.

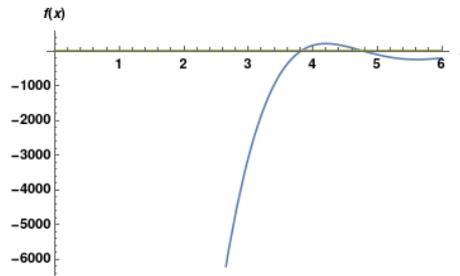
Quando adicionamos o acoplamento com o dÍlaton, a ação é igual a(5.99), e os parâmetros são os mesmos encontrados la. Essas são as mesmas condições obtidas no modelo (+ - +). Usando o mesmo valor para o acoplamento como antes, temos  $v = 1.84$ . A estrutura de bandas é mostrada na figura abaixo. A diferença é clara entre as curvas sólidas e tracejadas. Por exemplo, a tracejada nos diz que o menor valor de massa tem um máximo em  $q = 0$ , enquanto que a sólida nos informa que o menor valor de massa tem um mínimo para esse valor de  $q$ . Por um lado, para a curva tracejada, não existe modo de massa permitido em torno de  $q = 0$  para  $M > 6$ . Do outro, para a relação correta, existe modo de massa em torno de  $q = 0$  para  $M > 6$ . A figura 17(b), diz o valor do primeiro modo de massa:  $m = 0.05/(l + L)$ . Em c),temos o valor para o primeiro modo com a relação incorreta ;  $m = 3.8/(l + L)$ .



(a) Os menores valores de massa para o campo de gauge com o dÍlaton.



(b) O primeiro modo de massa com nossa relação.



(c) O primeiro modo de massa com a relação (6.35).

Figura 17: Os menores valores de massa para o campo de gauge com o dÍlaton são apresentados em (a). A curva tracejada é o plote com a relação de dispersão incorreta, e a sÓlida o plote para a correta. Em (b), temos nosso primeiro modo. Em c) o modo encontrado com a relação de dispersão (6.35).

### 6.3.3 O Campo de Kalb Ramond

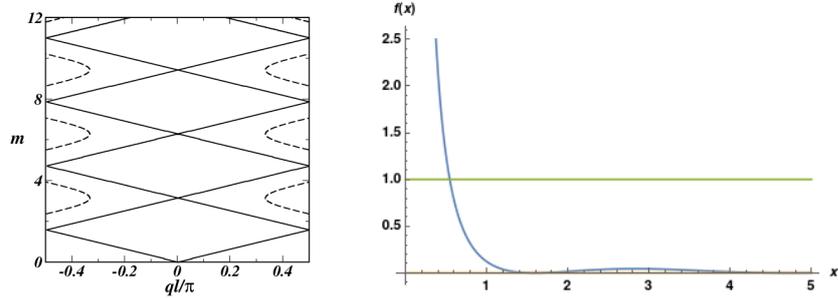
Nessa subseção vamos verificar as características do Campo de Kalb-Ramond no cristal manifold. Os modos massivos, para o caso livre, são estudados através do potencial

$$U = \left( \frac{A'^2}{4} - \frac{A''}{2} \right). \quad (6.50)$$

A a partir disso vemos que  $c_1 = -\frac{1}{2}$ , e conseqüentemente  $v = 0$ . Como  $v = 0$ , e lembrando as propriedades das funções de Bessel  $j_{-1} = -j_1$  e  $n_{-1} = -n_1$ , a relação de dispersão vai ser a mesma que no caso do campo de gauge livre. Esses resultados são mostrados na Figura 16.

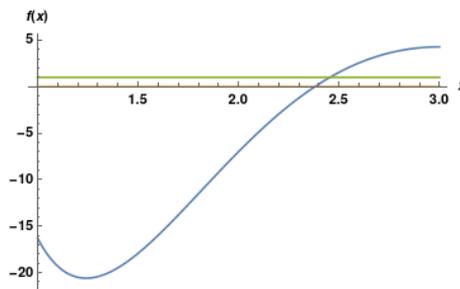
Se considerarmos o acoplamento com o dÍlaton, a ação é dada por (5.103). Esse caso apresenta um resultado interessante como podemos ver na Figura 18(a). De acordo com a nova relação de dispersão, a dispersão para esse campo (com o dÍlaton) é linear, pelo menos para os valores de  $q$  mostrados na Figura 18(a), i.e., não existe gap entre as bandas de massa. Essa característica não aparece com a relação incorreta usada em [53]. Em b), vemos que o valor para o primeiro modo de massa no nosso caso é  $m = 1.4/(l + L)$ . Em c), temos o primeiro modo para

a dispersão incorreta ; $m = 2.4/(l + L)$ .



(a) Os menores valores de massa para o campo de Kalb-Ramond com o dÍlaton.

(b) O primeiro modo de massa no nosso caso.



(c) O primeiro modo de massa com a relação incorreta .

Figura 18: Os menores valores de massa para o campo de Kalb-Ramond com o dÍlaton são mostrados em (a). A curva tracejada é o plote com a relação de dispersão incorreta, e a sólida o plote com a correta. Em (b), O primeiro modo no nosso caso. Em c), o primeiro modo para a dispersão encontrada em [47].

### 6.3.4 A q-Forma

Agora estamos prontos para generalizar os casos discutidos antes, através do estudo da q-forma em uma p-brana em um espaço D-dimensional, com  $p = D - 2$ . Começamos com a q-forma livre. O potencial nesse caso é

$$U(z) = \left[ A'^2 \left( \frac{p}{2} - q \right)^2 + A'' \left( \frac{p}{2} - q \right) \right]. \tag{6.51}$$

Então, podemos facilmente ver que  $c_1 = \frac{p}{2} - q$ , e  $v = \left( \frac{p+1}{2} - q \right)$ . O estudo da q-forma com o dÍlaton é idêntico ao apresentado no capítulo anterior, a diferença aqui é o fator de dobra. Na verdade, todos os resultados desse capítulo têm essa característica. Aqui a grande mudança é que calculamos estruturas de bandas de massas, ao invés do espectro para três branas.

Também podemos discutir outros resultados para a q-forma. Na Figura19(a), de acordo com a curva tracejada existem dois regimes , um para  $v > 1$ , e outro para  $v < 1$ . Para

$\nu > 1$  os valores de massa aumentam, enquanto que para  $\nu < 1$  as massas apresentam um comportamento parabólico. Isso é quase o que ocorre com a curva sólida, exceto pelos dois primeiros valores de massa. A parte 2) da figura19(a) mostra que o segundo modo de massa tende a zero. As coisas são completamente diferentes na figure19(b). De acordo com a curva tracejada, não existe massa abaixo de  $\nu \approx 1.6$ . E como podemos ver, isso não ocorre para a curva sólida. Dessa forma, a análise feita em[53] para a  $q$ -forma não pode ser feita. Nesse trabalho, eles dizem que controlando o acoplamento com o dÍlaton é possível gerar ou suprimir modos de massa, e isso não é verdade, uma vez que existe massa para todos os valores de  $\nu$ .

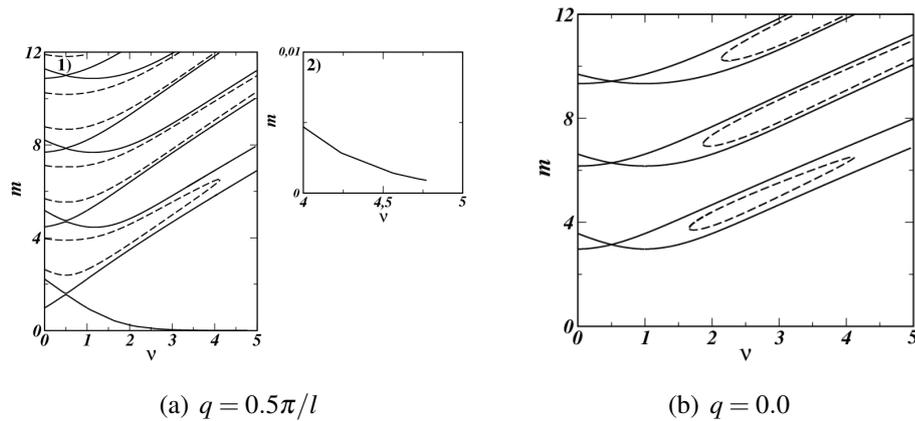


Figura 19: A dispersão de massa pela ordem da função de Bessel( Aqui  $q$  representa o vetor de onda.)

O que continua válido para ambas as dispersões é o plote da massa contra a separação entre as branas  $l$ , como pode ser visto na figura20. O plote foi feito para diferentes valores de  $\nu$ . No limite  $l \rightarrow \infty$  não vai mais existir gap, e o comportamento do sistema é igual ao do caso com apenas uma brana [8].

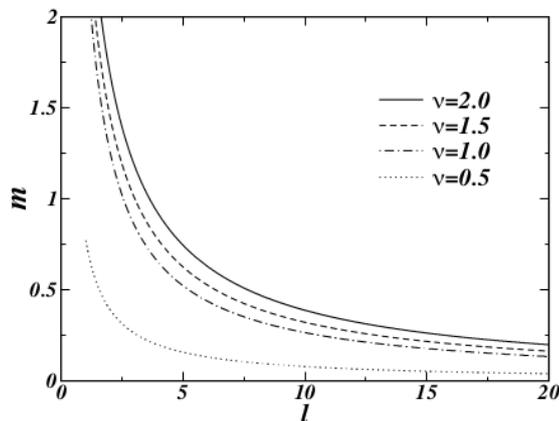


Figura 20: Os menores valores de massa pela distância entre as branas.

Podemos resumir os resultados dessa seção em duas tabelas, uma para o caso livre

e outra para o acoplamento com o dÍlaton.

Tabela 1: Parâmetros para os casos sem o dÍlaton

Campo	valor de $\nu$	Parâmetro $b$	Parâmetro $c$
Gravitacional	2	1	3/2
Escalar	2	1	3/2
Gauge	1	1	1/2
Kalb-Ramond	0	1	-1/2
q-forma	$\frac{1+p}{2} - q$	1	$\frac{p}{2} - q$

Tabela 2: Parâmetros para os casos com o dÍlaton

Campo	valor de $\nu$	Parâmetro $b$	Parâmetro $c$
Gravitacional	5/2	3/4	3/2
Escalar	$\frac{5}{2} + \frac{2\lambda\sqrt{3M^3}}{3}$	3/4	$3/2 + \frac{\lambda\sqrt{3M^3}}{2}$
Gauge	$\frac{7}{6} + \frac{2\lambda\sqrt{3M^3}}{3}$	3/4	$1/2 + \frac{\lambda\sqrt{3M^3}}{2}$
Kalb-Ramond	$-\frac{1}{6} + \frac{2\lambda\sqrt{3M^3}}{3}$	3/4	$-1/2 + \frac{\lambda\sqrt{3M^3}}{2}$
q-forma	$\frac{2\alpha}{3}$	3/4	$-\left(\frac{\alpha}{2} + 3/8\right)$

## 6.4 Campos Bosônicos no Cristal Manyfold (Com acoplamento não-mínimo)

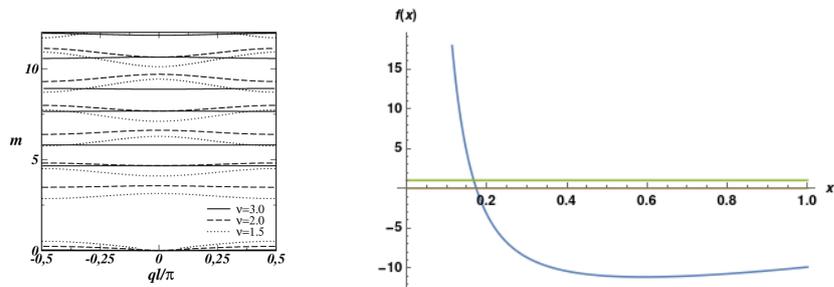
Nessa seção vamos estudar o campo de gauge e Kalb-Ramond com acoplamento não-mínimo no background do cristal manifold. Os resultados, para problemas de localização, são similares aos apresentados no capítulo anterior, então não vamos discutir isso. No entanto, o espectro de massa é mais rico, porque agora estamos lidando com um caso mais geral do que o modelo (+ - +). A equação tipo Schrödinger é bem semelhante a (6.47), mas com a diferença de que  $b = 1$ , uma vez que agora não temos acoplamento com o dÍlaton. Como a equação tipo Schrödinger muda apenas por constantes, a relação de dispersão continua sendo dada por (6.48). Começamos com o estudo do campo de gauge.

### 6.4.1 O campo de gauge

Começamos a discussão com ambos os acoplamentos: o escalar de Ricci e o tensor de Ricci. A ação é a mesma que (5.52). Agora estamos interessados no valor de  $\nu$  que vai ser usado na relação de dispersão (6.48). O valor de  $\nu$  é  $\nu = \left(\frac{1}{2} + c_1\right)$ . Substituindo o valor de  $c_1$  encontramos que  $\nu = 2$ . Perceba que esses valores são os mesmos dos casos dos campos escalar e gravitacional livres. No entanto, podemos fazer algumas mudanças. Por exemplo, podemos fazer  $\lambda_1 = 0$  que significa que retiramos o escalar de Ricci, então estamos em um modelo

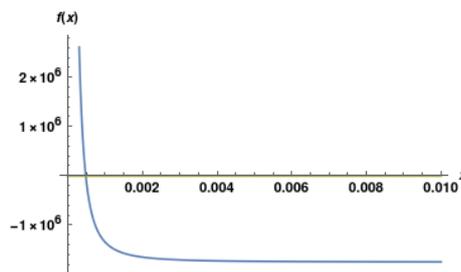
parecido com o encontrado em [28]. Com isso, temos  $\nu = 3$ . Também podemos "desligar" o parâmetro  $\lambda_2$ , colocando o tensor de Ricci fora do jogo, esse modelo é mostrado em [18]. Fazendo isso, chegamos em  $\nu = \frac{3}{2}$ .

Os resultados para os modos de massa que encontramos nesse caso são mostrados na Figura 21. Os resultados para  $\nu = 2$  já foram mostrados na Figura 12. Na figura 21, quando  $\lambda_1$  é desligado temos  $\nu = 3$ . Para  $\lambda_2 = 0$ , temos  $\nu = \frac{3}{2}$ . Também pode ser percebido um grande gap entre o primeiro modo e o restante. Isso nos diz que apenas o primeiro modo tem uma chance de ser encontrado, em um futuro próximo. O valor para o primeiro modo de massa para  $\nu = 1.5$  e  $\nu = 3$  são, respectivamente,  $m = 0.16/(l + L)$  e  $m = 3.4/(l + L)$ . Para  $\nu = 2$ , o primeiro modo de massa, como vimos antes, é  $m = 0.028/(l + L)$ . Depois da conversão obtemos uma massa da ordem  $6.2 \times 10^{-31} \text{ kg}$ . Isso está acima do limite inferior imposto experimentalmente nos testes dos fótons massivos [102].



(a) O campo de gauge com ambos os acoplamentos  $\nu = 2$ , apenas com o escalar de Ricci  $\nu = 1.5$  e apenas com o tensor de Ricci  $\nu = 3$

(b) O primeiro modo de massa para  $\nu = 1.5$ .



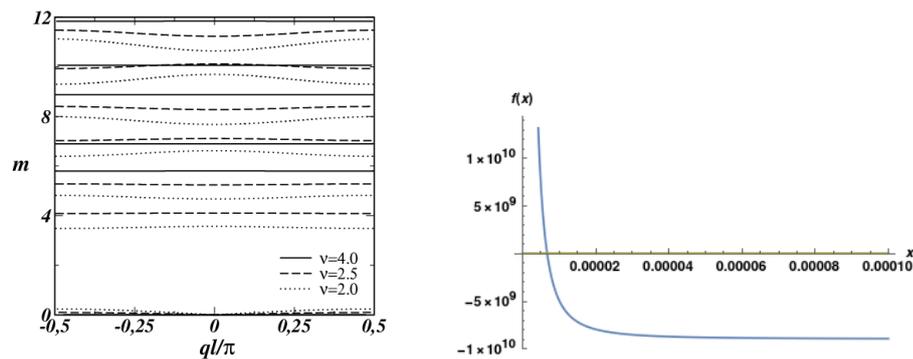
(c) O primeiro modo de massa para  $\nu = 3$

Figura 21: Os menores modos de massa com o acoplamento geométrico (campo de gauge), e os primeiros modos de massa. Em b), o primeiro modo de massa para o acoplamento apenas com o escalar de Ricci. Em c), o primeiro modo de massa para o acoplamento apenas com o tensor de Ricci.

### 6.4.2 O Campo de Kalb-Ramond

Vamos agora voltar nossas atenções para o campo de Kalb-Ramond. Enquanto que no processo de localização da 1-forma obtemos um campo escalar pelo caminho, na redução dimensional do campo de Kalb-Ramond temos uma 2-forma localizada e também uma 1-forma. Assim, a localização do campo de Kalb-Ramond induz a localização de uma 1-forma como discutido em [23]. A ação para o campo de Kalb-Ramond em cinco dimensões com as quantidades geométricas é dada por (5.61).

Os plots para o campo de Kalb-Ramond são mostrados na figura 22. Quando consideramos ambos os acoplamentos, temos  $\nu = 2$ . Como no caso do campo de gauge. Se retiramos o tensor de Ricci, temos  $\nu = 2.5$ . Fazendo  $\lambda_1 = 0$  (apenas o tensor de Ricci), temos  $\nu = 4$ . O primeiro modo de massa para  $\nu = 2.5$  e  $\nu = 4$  são, respectivamente,  $m = 0.004/(l + L)$  e  $m = 0.000006/(l + L)$ . Na figura abaixo, plotamos apenas o primeiro modo para  $\nu = 4$ , uma vez que para  $\nu = 2$  e  $\nu = 2,5$  já foram plotados nas figuras 13 e 14.



(a) Campo de Kalb-Ramond com ambos os acoplamentos  $\nu = 2$ , apenas com escalar de Ricci  $\nu = 2.5$  e apenas com o tensor de Ricci  $\nu = 4$

(b) O primeiro modo de massa para  $\nu = 4$

Figura 22: Os valores de massa permitidos com o acoplamento geométrico (campo de Kalb-Ramond). Em b), o primeiro modo quando o campo é acoplado apenas com o tensor de Ricci.

A generalização para esses resultados é dada pela  $q$ -forma. A ação é (5.78), e toda a discussão para o caso das três branas discutido no capítulo anterior também se aplica aqui, apenas temos que mudar o fator de dobra. Para ajudar o leitor seguir nosso trabalho, fizemos uma tabela que organiza todos os valores de primeiros modos para ambas as relações de dispersão.

Tabela 3: Valores de massa

$\nu$	Campo	Massa para $(6.48) 10^{10} mm^{-1}$	Massa para $(6.35) 10^{10} mm^{-1}$
0.5	Kalb Ramond(KB) com o dÍlaton	1.4	2.4
1	Gauge e KB livres	0.7	2.7
1.5	Gauge com o escalar de Ricci	0.16	3.4
1.84	Gauge com o dÍlaton	0.05	3.8
2	Gauge e KB com ambos acoplamentos , gravitacional e escalar livres	0.028	4
2.5	Gravitacional com dÍlaton e KB com escalar de Ricci	0.004	4.4
3	Gauge com tensor de Ricci	0.0005	5.5
3.17	Escalar com o dÍlaton	0.00025	5.75
4	KB acoplado com o tensor de Ricci	0.000006	7

## 7 CONCLUSÃO

Neste trabalho, propomos a localização para um modelo com dois campos de gauge. No começo, apenas tentamos generalizar para cinco dimensões a ação proposta em [66]. Nessa tentativa não tivemos sucesso, porque os campos não foram localizados. A forma que encontramos para nos livrar desse problema foi tentando o acoplamento dos campos de gauge  $U(1)$  com o escalar de Ricci. De fato, isso foi uma boa solução para o problema. Mostramos que apenas para a seguinte relação entre os parâmetros:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  e  $\lambda_3 = \lambda \alpha$ , é possível localizar os dois campos de gauge ao mesmo tempo. O parâmetro  $\alpha$  é livre, e é responsável por dar a intensidade da mistura dos termos cinéticos, e fazer aparecer uma partícula com carga menor que a carga do elétron. Também encontramos a solução explícita para ambos os campos de gauge, no mecanismo de localização.

Também tentamos o acoplamento com o tensor de Ricci. Isso também foi uma boa forma de localizar o modelo estudado. A solução e o parâmetro que localizam os campos nesse caso são, respectivamente  $\psi_i = e^A$  e  $\lambda = -\frac{1}{16}$ , enquanto que no modelo com o tensor de Ricci são  $\psi_i = e^{\frac{5A}{2}}$  e  $\lambda = -2$ .

A discussão sobre a localização das componentes escalares dos campos também foi feita. Para fazer isso consideramos o modelo com o escalar de Ricci. Novamente, encontramos valores diferentes para a solução e para o parâmetro que localiza essas componentes escalares, eles são  $\psi_i = e^{3A}$  e  $\lambda = \frac{9}{16}$ . Como os valores que localizam o vetor e o setor escalar são diferentes, eles não podem ser localizados ao mesmo tempo. A localização simultânea, dos dois setores, é discutida em [22]. Todos esses resultados só foram possíveis devido o poder do acoplamento geométrico.

Além disso, propomos dois métodos para localizar a  $q$ - forma no cenário de multi-branas: acoplamento geométrico e com o dÍlaton. Ambos os métodos obedecem as simetrias do sistema, e se condições de consistência forem consideradas, não existe parâmetro livre. Analisamos o espectro de massa de tais campos no modelo  $(+ - +)$ , onde encontramos uma escala de massa universal para todos os campos bosônicos. Também revisamos os trabalhos [47, 53]. Esses artigos tratam os campos mencionados na configuração do cristal manifold. Em [47], o autor lida especificamente com o campo gravitacional, e o trabalho [53] com a  $q$ -forma. O que acontece é que a relação de dispersão em ambos os trabalhos não estavam corretas. A correta dispersão para o campo gravitacional é calculada em [45]. Aqui incrementamos os cálculos analíticos feitos nesse último trabalho. Para o caso da  $q$ -forma mostramos como encontrar a correta relação de dispersão e comparamos nossos resultados com os encontrados anteriormente. O estudo é feito para os campos escalar, de gauge, Kalb-Ramond e  $q$ -forma.

Usamos nossos métodos de localização para estudar a  $q$ -forma no background do modelo  $(+ - +)$ . Mostramos que além de obedecer as simetrias do sistema, isso não tem parâmetros livres. Para o campo de gauge, encontramos  $\lambda_1 = -\frac{1}{12}$  e  $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$ , como os parâmetros de localização. Dessa forma, também encontramos os valores dos parâmetros do trabalho [46]. Fazemos tais coisas para todos os campos. Também calculamos o espectro de massa para todos os campos bosônicos. Ao fazermos isso, mostramos que todos os modos ultraleve de todas as  $q$ -forma são idênticos ao do campo gravitacional. Assim, estabelecemos uma escala de massa universal para os campos bosônicos. Temos a Física devido ao modo zero, e a próxima escala de energia é válida para todos os primeiros modos de todos os campos bosônicos.

Depois, revisitamos o caso do cristal manifold. A expressão para o gap de massa foi primeiramente encontrado em Ref. [47]. Usando razões eurísticas eles argumentam que o primeiro modo massivo permitido deve ser dado por  $m_{gap} = \mathcal{O}(1)/(l+L)$ . No entanto, isso foi encontrado em [45] que essa expressão não é correta. Nesse trabalho eles dão uma ideia de como obter a forma da estrutura de bandas, analisando analiticamente o ponto  $q = 0$ . Nós vamos além, e numericamente mostramos a forma completa para tal estrutura. Usando nossos cálculos numéricos com a expressão original da Ref. [47], Eq. (6.35), mostramos na Fig. 12 que esse numerador é ( $\approx 4$ ). Esse valor é cerca de 150 vezes maior que o primeiro modo de massa encontrado usando-se a relação de dispersão correta (6.48), isto é  $m = 0.028/(l+L)$ . Como nosso primeiro modo de massa é muito menor comparado com o encontrado usando (6.35), a correção na lei de Newton, no nosso caso, é maior do que a encontrada anteriormente. Uma vez que consideramos um potencial tipo Yukawa, a correção depende de uma exponencial. No nosso caso, essa exponencial é  $e^{-2.8 \times 10^8 r}$ , e o resultado prévio leva a  $e^{-4 \times 10^{10} r}$ . Em adição, a correção no nosso caso é devida apenas ao primeiro modo de massa, enquanto que o resultado encontrado em [47], considera-se todos os modos massivos do bulk. Eles performam a integral desde  $m_{gap}$  até o infinito, isso não é correto porque os modos de massa não são contínuos, existe um gap entre cada modo de massa permitido como podemos ver na Fig13.

Em seguida revisamos a  $q$ -forma no cristal manifold, primeiro estudada na Ref. [53]. Os autores basearam seus resultados na relação de dispersão incorreta encontrada por Kaloper et al[47]. Aqui encontramos a expressão correta e calculamos as novas bandas de massa para todos os casos considerados na Ref. [53]. Os campos escalar e gravitacional têm a mesma relação de dispersão devido ao fato de ambos terem  $\nu = 2$ , e dessa forma as conclusões são as mesmas. No entanto, para o campo de gauge livre encontramos uma banda de massa completamente diferente. A comparação é feita na Fig. 16. A relação de dispersão incorreta leva a um resultado numérico de que o primeiro modo de massa é  $m = 2.7/(l+L)$ , enquanto que nossa relação leva a  $m = 0.7/(l+L)$  i.e cerca de quatro vezes menor. Outro importante

aspecto é que a banda de massa anterior era bem incomum, e qualquer analogia ou comparação com a matéria condensada era impossível.

O resultado correto está totalmente de acordo e é bem semelhante aos resultados encontrados pelo modelo de Kronig-Penney. Essa similaridade nos permite buscar por outros aspectos semelhantes que podem ser encontrados no cristal manifold. Os campos de Kalb-Ramond e gauge têm a mesma relação de dispersão devido as propriedades das funções de Bessel. Em seguida, revisitamos a  $q$ - forma acoplada com o dÍlaton. Com a relação de dispersão correta nas mãos, mostramos que ela é diferente para todos os campos. Isso implica em uma estrutura de bandas diferente. A análise para a  $q$ -forma muda. No trabalho [53], eles dizem que é possível gerar ou suprimir modos de massa controlando o acoplamento com o dÍlaton. De acordo com nossos resultados isso não é verdade. De todos os casos estudados um é bem interessante e merece atenção especial: a estrutura de bandas para o campo de Kalb-Ramond acoplado com o dÍlaton. Ele é o único que tem dispersão linear para os valores de  $q$  considerados. Dessa forma, ele é o único que não apresenta um gap entre as bandas de massa. Outro fato interessante é que usando a relação correta, o primeiro modo de massa de todos os campos descrese devido a presença do dÍlaton, enquanto que com a relação antiga ocorre o contrário, como pode ser visto na tabela (3).

Para o caso do acoplamento geométrico, vemos que quando ambos os parâmetros são diferente de zero, obtemos os mesmos resultados que nos casos dos campos escalar e gravitacional livres. Quando um dos parâmetros é desligado, obtemos resultados diferentes. Para o acoplamento dos campos de KB e gauge com o escalar de Ricci o parâmetro  $\nu$  é respectivamente 2.5 e 1.5. Para o acoplamento desse dois campos como tensor de Ricci os valores de  $\nu$  são  $\nu = 3$  para o campo de gauge, e  $\nu = 4$  para KB. Todos os valores de massa nessa configuração também podem ser encontrados na tabela (3). Um resultado interessante é que encontramos um fóton massivo com massa dada por  $6.2 \times 10^{-31} \text{ kg}$  isso esta acima do limite inferior imposto experimentalmente em [102]. Quando generalizamos para o caso da  $q$ -forma, vemos que o parâmetro  $\nu$  é  $\nu^2 = (\frac{D-1}{2})^2$ . Então, se  $D = 5$  o resultado vai sempre ser  $\nu = 2$ . Essa é a razão pela qual  $\nu = 2$  para os campos escalar, de gauge e Kalb-Ramond.

## REFERÊNCIAS

- [1] I. Newton, <https://www.wdl.org/pt/item/17842/>
- [2] A. Belendez *The Unification of Light, Electricity and Magnetism: Maxwell's Electromagnetic Synthesis* <https://www.scielo.br/j/rbef/a/jfcMcZXBb3dvkCrNzyVmVgP/abstract/?lang=en> Revista Brasileira de Ensino de Física, 2008
- [3] A. Borrelli, *Annalen Phys.* 530, no. 2, 1700454 (2018).  
doi:10.1002/andp.201700454 <https://inspirehep.net/literature/1699308>
- [4] T. Kaluza, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys. )* 1921, 966 (1921)  
[arXiv:1803.08616 [physics.hist-ph]]. <https://arxiv.org/pdf/1803.08616.pdf>
- [5] M. Tahim, <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/12384> *Aspectos Clássicos de Gravitação Topológica e Dimensões Extras* Tese de Doutorado, Universidade Federal do Ceará, 2008
- [6] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, *Phys. Lett. B* 429, 263-272 (1998) doi:10.1016/S0370-2693(98)00466-3 [arXiv:hep-ph/9803315 [hep-ph]]. <https://arxiv.org/abs/hep-ph/9803315>
- [7] L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* 83, 3370 (1999)  
doi:10.1103/PhysRevLett.83.3370 [hep-ph/9905221]. <https://inspirehep.net/literature/499284>
- [8] L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* 83, 4690 (1999)  
doi:10.1103/PhysRevLett.83.4690 [hep-th/9906064]. <https://arxiv.org/abs/hep-th/9906064>
- [9] B. Bajc and G. Gabadadze, *Phys. Lett. B* 474, 282 (2000) doi:10.1016/S0370-2693(00)00055-1 [hep-th/9912232]. <https://arxiv.org/abs/hep-th/9912232>
- [10] A. Kehagias and K. Tamvakis, *Phys. Lett. B* 504, 38 (2001) doi:10.1016/S0370-2693(01)00274-X [hep-th/0010112]. <https://arxiv.org/abs/hep-th/0010112>
- [11] I. Oda, *Phys. Lett. B* 508, 96 (2001) doi:10.1016/S0370-2693(01)00376-8 [hep-th/0012013]. <https://arxiv.org/abs/hep-th/0012013>
- [12] K. Ghoroku and A. Nakamura, *Phys. Rev. D* 65, 084017 (2002)  
doi:10.1103/PhysRevD.65.084017 [hep-th/0106145]. <https://arxiv.org/abs/hep-th/0106145>
- [13] D. Bazeia, A. R. Gomes and L. Losano, *Int. J. Mod. Phys. A* 24, 1135 (2009)  
doi:10.1142/S0217751X09043067 [arXiv:0708.3530 [hep-th]]. <https://arxiv.org/abs/0708.3530>
- [14] A. E. R. Chumbes, J. M. Hoff da Silva and M. B. Hott, *Phys. Rev. D* 85, 085003 (2012) doi:10.1103/PhysRevD.85.085003 [arXiv:1108.3821 [hep-th]]. <https://arxiv.org/abs/1108.3821>
- [15] R. C. Fonseca, F. A. Brito and L. Losano, *Phys. Lett. B* 728, 443 (2014)  
doi:10.1016/j.physletb.2013.12.020 [arXiv:1211.0531 [hep-th]]. <https://arxiv.org/abs/1211.0531>

- [16] Z. H. Zhao, Q. Y. Xie and Y. Zhong, *Class. Quant. Grav.* 32, no. 3, 035020 (2015) doi:10.1088/0264-9381/32/3/035020 [arXiv:1406.3098 [hep-th]].[⟨https://arxiv.org/abs/1406.3098⟩](https://arxiv.org/abs/1406.3098)
- [17] Z. H. Zhao, Y. X. Liu and Y. Zhong, *Phys. Rev. D* 90, no. 4, 045031 (2014) doi:10.1103/PhysRevD.90.045031 [arXiv:1402.6480 [hep-th]].[⟨https://arxiv.org/abs/1402.6480⟩](https://arxiv.org/abs/1402.6480)
- [18] G. Alencar, R. R. Landim, M. O. Tahim and R. N. Costa Filho, *Phys. Lett. B* 739, 125 (2014) doi:10.1016/j.physletb.2014.10.040 [arXiv:1409.4396 [hep-th]].[⟨https://arxiv.org/abs/1409.4396⟩](https://arxiv.org/abs/1409.4396)
- [19] W. M. Mendes, G. Alencar and R. R. Landim, *JHEP* 1802, 018 (2018) doi:10.1007/JHEP02(2018)018 [arXiv:1712.02590 [hep-th]].[⟨https://arxiv.org/abs/1712.02590⟩](https://arxiv.org/abs/1712.02590)
- [20] A. Pomarol, *Phys. Lett. B* 486, 153 (2000) doi:10.1016/S0370-2693(00)00737-1 [hep-ph/9911294].[⟨https://arxiv.org/abs/hep-ph/9911294⟩](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9911294)
- [21] R. I. De Oliveira Junior, M. O. Tahim, G. Alencar and R. R. Landim, *Mod. Phys. Lett. A* 35, no. 08, 2050047 (2019) doi:10.1142/S0217732320500479 [arXiv:1902.10669 [hep-th]].[⟨https://arxiv.org/abs/1902.10669⟩](https://arxiv.org/abs/1902.10669)
- [22] L. F. Freitas, G. Alencar and R. R. Landim, doi:10.1007/JHEP02(2019)035 arXiv:1809.07197 [hep-th].[⟨https://arxiv.org/abs/1809.07197⟩](https://arxiv.org/abs/1809.07197)
- [23] G. Alencar, R. Landim, M. Tahim and R. Costa Filho, *Phys. Lett. B* 742, 256-260 (2015) doi:10.1016/j.physletb.2015.01.041 [arXiv:1409.5042 [hep-th]].[⟨https://arxiv.org/abs/1409.5042⟩](https://arxiv.org/abs/1409.5042)
- [24] I. C. Jardim, G. Alencar, R. R. Landim and R. N. Costa Filho, *Phys. Rev. D* 91, no. 4, 048501 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.91.048501 [arXiv:1411.5980 [hep-th]].[⟨https://arxiv.org/abs/1411.5980⟩](https://arxiv.org/abs/1411.5980)
- [25] I. C. Jardim, G. Alencar, R. R. Landim and R. N. Costa Filho, *Phys. Rev. D* 91, no. 8, 085008 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.91.085008 [arXiv:1411.6962 [hep-th]].[⟨https://arxiv.org/abs/1411.6962⟩](https://arxiv.org/abs/1411.6962)
- [26] G. Alencar, R. R. Landim, C. R. Muniz and R. N. Costa Filho, *Phys. Rev. D* 92, no. 6, 066006 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.92.066006 [arXiv:1502.02998 [hep-th]].[⟨https://arxiv.org/abs/1502.02998⟩](https://arxiv.org/abs/1502.02998)
- [27] G. Alencar, C. R. Muniz, R. R. Landim, I. C. Jardim and R. N. Costa Filho, *Phys. Lett. B* 759, 138 (2016) doi:10.1016/j.physletb.2016.05.062 [arXiv:1511.03608 [hep-th]].[⟨https://arxiv.org/abs/1511.03608⟩](https://arxiv.org/abs/1511.03608)
- [28] G. Alencar, I. C. Jardim and R. R. Landim, *Eur. Phys. J. C* 78, no. 5, 367 (2018) doi:10.1140/epjc/s10052-018-5829-6 [arXiv:1801.06098 [hep-th]].[⟨https://arxiv.org/abs/1801.06098⟩](https://arxiv.org/abs/1801.06098)
- [29] G. Alencar, I. C. Jardim, R. R. Landim, C. R. Muniz and R. N. Costa Filho, *Phys. Rev. D* 93, no. 12, 124064 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.93.124064 [arXiv:1506.00622 [hep-th]].[⟨https://arxiv.org/abs/1506.00622⟩](https://arxiv.org/abs/1506.00622)

- [30] L. F. F. Freitas, G. Alencar and R. R. Landim, Eur. Phys. J. C 80, no.5, 432 (2020) doi:10.1140/epjc/s10052-020-7975-x [arXiv:2001.01267 [hep-th]]. (<https://arxiv.org/abs/2001.01267>)
- [31] R. de L. Kronig and W.G.Penney "Quantum Mechanics of Electrons in Crystal Lattices" Royal Society. 130,814 pp.499-513,(1931) (<https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1931.0019>)
- [32] Bloch Z.Physik,vol.52,p.555(1928) (<http://www.pwein.at/physics/Lectures/Famous-Papers/Z-Physik-52-555-1928.pdf>)
- [33] M. S. Cunha and H. R. Christiansen, Phys. Rev. D 84, 085002 (2011) doi:10.1103/PhysRevD.84.085002 [arXiv:1109.3486 [hep-th]]. (<https://arxiv.org/abs/1109.3486>)
- [34] C. A. S. Almeida, M. M. Ferreira, Jr., A. R. Gomes and R. Casana, Phys. Rev. D 79, 125022 (2009) doi:10.1103/PhysRevD.79.125022 [arXiv:0901.3543 [hep-th]]. (<https://arxiv.org/abs/0901.3543>)
- [35] Y. X. Liu, J. Yang, Z. H. Zhao, C. E. Fu and Y. S. Duan, Phys. Rev. D 80, 065019 (2009) doi:10.1103/PhysRevD.80.065019 [arXiv:0904.1785 [hep-th]]. (<https://arxiv.org/abs/0904.1785>)
- [36] Y. X. Liu, H. T. Li, Z. H. Zhao, J. X. Li and J. R. Ren, JHEP 0910, 091 (2009) doi:10.1088/1126-6708/2009/10/091 [arXiv:0909.2312 [hep-th]]. (<https://arxiv.org/abs/0909.2312>)
- [37] W. T. Cruz, M. O. Tahim and C. A. S. Almeida, EPL 88, no. 4, 41001 (2009) doi:10.1209/0295-5075/88/41001 [arXiv:0912.1029 [hep-th]]. (<https://arxiv.org/abs/0912.1029>)
- [38] Z. H. Zhao, Y. X. Liu, H. T. Li and Y. Q. Wang, Phys. Rev. D 82, 084030 (2010) doi:10.1103/PhysRevD.82.084030 [arXiv:1004.2181 [hep-th]]. (<https://arxiv.org/abs/1004.2181>)
- [39] H. T. Li, Y. X. Liu, Z. H. Zhao and H. Guo, Phys. Rev. D 83, 045006 (2011) doi:10.1103/PhysRevD.83.045006 [arXiv:1006.4240 [hep-th]]. (<https://arxiv.org/abs/1006.4240>)
- [40] W. T. Cruz, A. R. Gomes and C. A. S. Almeida, EPL 96, no. 3, 31001 (2011) doi:10.1209/0295-5075/96/31001 [arXiv:1110.3104 [hep-th]]. (<https://arxiv.org/abs/1110.3104>)
- [41] R. Landim, G. Alencar, M. Tahim and R. Costa Filho, JHEP 08, 071 (2011) doi:10.1007/JHEP08(2011)071 [arXiv:1105.5573 [hep-th]]. (<https://arxiv.org/abs/1207.3054>)
- [42] R. R. Landim, G. Alencar, M. O. Tahim and R. N. Costa Filho, JHEP 1202, 073 (2012) doi:10.1007/JHEP02(2012)073 [arXiv:1110.5855 [hep-th]]. (<https://arxiv.org/abs/1110.5855>)
- [43] G. Alencar, R. R. Landim, M. O. Tahim and R. N. C. Filho, JHEP 1301, 050 (2013) doi:10.1007/JHEP01(2013)050 [arXiv:1207.3054 [hep-th]]. (<https://arxiv.org/abs/1207.3054>)

- [44] I. I. Kogan, S. Mouslopoulos, A. Papazoglou, G. G. Ross and J. Santiago, Nucl. Phys. B 584, 313-328 (2000) doi:10.1016/S0550-3213(00)00241-8 [arXiv:hep-ph/9912552 [hep-ph]].[⟨https://arxiv.org/abs/hep-ph/9912552⟩](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9912552)
- [45] I. I. Kogan, S. Mouslopoulos, A. Papazoglou and G. G. Ross, Nucl. Phys. B 595, 225-249 (2001) doi:10.1016/S0550-3213(00)00664-7 [arXiv:hep-th/0006030 [hep-th]].[⟨https://arxiv.org/abs/hep-th/0006030⟩](https://arxiv.org/abs/hep-th/0006030)
- [46] I. I. Kogan, S. Mouslopoulos, A. Papazoglou and G. G. Ross, Nucl. Phys. B 615, 191-218 (2001) doi:10.1016/S0550-3213(01)00424-2 [arXiv:hep-ph/0107307 [hep-ph]].[⟨https://arxiv.org/abs/hep-ph/0107307⟩](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0107307)
- [47] N. Kaloper, Phys. Lett. B 474, 269 (2000) doi:10.1016/S0370-2693(00)00028-9 [hep-th/9912125].[⟨https://arxiv.org/abs/hep-th/9912125⟩](https://arxiv.org/abs/hep-th/9912125)
- [48] N. Kaloper, JHEP 0405, 061 (2004) doi:10.1088/1126-6708/2004/05/061 [hep-th/0403208].[⟨https://arxiv.org/abs/hep-th/0403208⟩](https://arxiv.org/abs/hep-th/0403208)
- [49] I. Oda, Phys. Lett. B 480, 305 (2000) doi:10.1016/S0370-2693(00)00392-0 [hep-th/9908104].[⟨https://arxiv.org/abs/hep-th/9908104⟩](https://arxiv.org/abs/hep-th/9908104)
- [50] S. Nam, JHEP 0003, 005 (2000) doi:10.1088/1126-6708/2000/03/005 [hep-th/9911104].[⟨https://arxiv.org/abs/hep-th/9911104⟩](https://arxiv.org/abs/hep-th/9911104)
- [51] S. Nam, JHEP 0004, 002 (2000) doi:10.1088/1126-6708/2000/04/002 [hep-th/9911237].[⟨https://arxiv.org/abs/hep-th/9911237⟩](https://arxiv.org/abs/hep-th/9911237)
- [52] A. Papazoglou, hep-ph/0112159.[⟨https://arxiv.org/abs/hep-ph/0112159⟩](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0112159)
- [53] G. Alencar, R. R. Landim, M. O. Tahim and R. N. Costa Filho, Phys. Lett. B 726, 809 (2013) doi:10.1016/j.physletb.2013.09.006 [arXiv:1301.2562 [hep-th]].[⟨https://arxiv.org/abs/1301.2562⟩](https://arxiv.org/abs/1301.2562)
- [54] J. Khoury, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt and N. Turok, Phys. Rev. D 64, 123522 (2001) doi:10.1103/PhysRevD.64.123522 [hep-th/0103239].[⟨https://arxiv.org/abs/hep-th/0103239⟩](https://arxiv.org/abs/hep-th/0103239)
- [55] M. Majumdar and A. Christine-Davis, JHEP 0203, 056 (2002) doi:10.1088/1126-6708/2002/03/056 [hep-th/0202148].[⟨https://arxiv.org/abs/hep-th/0202148⟩](https://arxiv.org/abs/hep-th/0202148)
- [56] R. Foot, Int. J. Mod. Phys. A 29, 1430013 (2014) doi:10.1142/S0217751X14300130 [arXiv:1401.3965 [astro-ph.CO]].[⟨https://arxiv.org/abs/1401.3965⟩](https://arxiv.org/abs/1401.3965)
- [57] L. Bergström, Rept. Prog. Phys. 63, 793 (2000) doi:10.1088/0034-4885/63/5/2r3 [hep-ph/0002126].[⟨https://arxiv.org/abs/hep-ph/0002126⟩](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0002126)
- [58] Z. Berezhiani and A. Lepidi, Phys. Lett. B 681, 276 (2009) doi:10.1016/j.physletb.2009.10.023 [arXiv:0810.1317 [hep-ph]].[⟨https://arxiv.org/abs/0810.1317⟩](https://arxiv.org/abs/0810.1317)
- [59] E. J. Chun, J. C. Park and S. Scopel, JHEP 1102, 100 (2011) doi:10.1007/JHEP02(2011)100 [arXiv:1011.3300 [hep-ph]].[⟨https://arxiv.org/abs/1011.3300⟩](https://arxiv.org/abs/1011.3300)
- [60] P. Castelo Ferreira, hep-th/0510078.[⟨https://arxiv.org/pdf/hep-th/0510078.pdf⟩](https://arxiv.org/pdf/hep-th/0510078.pdf)

- [61] P. Castelo Ferreira, *J. Math. Phys.* 47, 072902 (2006) doi:10.1063/1.2219159 [hep-th/0510063].[⟨https://arxiv.org/abs/1511.03608⟩](https://arxiv.org/abs/1511.03608)
- [62] B. Batell and T. Gherghetta, *Phys. Rev. D* 73, 045016 (2006) doi:10.1103/PhysRevD.73.045016 [hep-ph/0512356].[⟨https://arxiv.org/abs/hep-ph/0512356⟩](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0512356)
- [63] E. Gabrielli, L. Marzola, M. Raidal and H. Veermäe, *JHEP* 1508, 150 (2015) doi:10.1007/JHEP08(2015)150 [arXiv:1507.00571 [hep-ph]].[⟨https://arxiv.org/abs/1507.00571⟩](https://arxiv.org/abs/1507.00571)
- [64] A. Ball *et al.*, arXiv:1607.04669 [physics.ins-det].[⟨https://arxiv.org/abs/1607.04669⟩](https://arxiv.org/abs/1607.04669)
- [65] S. Davidson, S. Hannestad and G. Raffelt, *JHEP* 0005, 003 (2000) doi:10.1088/1126-6708/2000/05/003 [hep-ph/0001179].[⟨https://arxiv.org/abs/hep-ph/0001179⟩](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0001179)
- [66] B. Holdom, *Phys. Lett.* 166B, 196 (1986). doi:10.1016/0370-2693(86)91377-8 [⟨https://inspirehep.net/literature/219689⟩](https://inspirehep.net/literature/219689)
- [67] S. A. Abel and B. W. Schofield, *Nucl. Phys. B* 685, 150 (2004) doi:10.1016/j.nuclphysb.2004.02.037 [hep-th/0311051].[⟨https://arxiv.org/abs/hep-th/0311051⟩](https://arxiv.org/abs/hep-th/0311051)
- [68] M. Goodsell, arXiv:0912.4206 [hep-th].[⟨https://arxiv.org/abs/0912.4206⟩](https://arxiv.org/abs/0912.4206)
- [69] T. G. Rizzo, *Phys. Rev. D* 59, 015020 (1998) doi:10.1103/PhysRevD.59.015020 [hep-ph/9806397].[⟨https://arxiv.org/abs/hep-ph/9806397⟩](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9806397)
- [70] M. Bullimore, J. P. Conlon and L. T. Witkowski, *JHEP* 1011, 142 (2010) doi:10.1007/JHEP11(2010)142 [arXiv:1009.2380 [hep-th]].[⟨https://arxiv.org/abs/1009.2380⟩](https://arxiv.org/abs/1009.2380)
- [71] K. R. Dienes, C. F. Kolda and J. March-Russell, *Nucl. Phys. B* 492, 104 (1997) doi:10.1016/S0550-3213(97)80028-4, 10.1016/S0550-3213(97)00173-9 [hep-ph/9610479].[⟨https://arxiv.org/abs/hep-ph/9610479⟩](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9610479)
- [72] K. S. Babu, C. F. Kolda and J. March-Russell, *Phys. Rev. D* 57, 6788 (1998) doi:10.1103/PhysRevD.57.6788 [hep-ph/9710441].[⟨https://inspirehep.net/literature/450102⟩](https://inspirehep.net/literature/450102)
- [73] S. A. Abel, M. D. Goodsell, J. Jaeckel, V. V. Khoze and A. Ringwald, *JHEP* 0807, 124 (2008) doi:10.1088/1126-6708/2008/07/124 [arXiv:0803.1449 [hep-ph]].[⟨https://arxiv.org/abs/0803.1449⟩](https://arxiv.org/abs/0803.1449)
- [74] R. Blumenhagen, G. Honecker and T. Weigand, *JHEP* 0506, 020 (2005) doi:10.1088/1126-6708/2005/06/020 [hep-th/0504232].[⟨https://arxiv.org/abs/hep-th/0504232⟩](https://arxiv.org/abs/hep-th/0504232)
- [75] K. Benakli and M. D. Goodsell, *Nucl. Phys. B* 830, 315 (2010) doi:10.1016/j.nuclphysb.2010.01.003 [arXiv:0909.0017 [hep-ph]].[⟨https://arxiv.org/abs/0909.0017⟩](https://arxiv.org/abs/0909.0017)
- [76] A. Arvanitaki, N. Craig, S. Dimopoulos, S. Dubovsky and J. March-Russell, *Phys. Rev. D* 81, 075018 (2010) doi:10.1103/PhysRevD.81.075018 [arXiv:0909.5440 [hep-ph]].[⟨https://arxiv.org/abs/0909.5440⟩](https://arxiv.org/abs/0909.5440)
- [77] M. Goodsell and A. Ringwald, *Fortsch. Phys.* 58, 716 (2010) doi:10.1002/prop.201000026 [arXiv:1002.1840 [hep-th]].[⟨https://arxiv.org/abs/1002.1840⟩](https://arxiv.org/abs/1002.1840)

- [78] M. Goodsell, J. Jaeckel, J. Redondo and A. Ringwald, JHEP 0911, 027 (2009) doi:10.1088/1126-6708/2009/11/027 [arXiv:0909.0515 [hep-ph]]. (<https://arxiv.org/abs/0909.0515>)
- [79] C. J. Wallace, J. Jaeckel and S. Roy, arXiv:1311.6415 [hep-ph]. (<https://arxiv.org/abs/1311.6415>)
- [80] T. G. Rizzo, arXiv:1804.03560 [hep-ph]. (<https://arxiv.org/abs/1804.03560>)
- [81] J. Jaeckel, S. Roy and C. J. Wallace, arXiv:1408.0019 [hep-ph]. (<https://arxiv.org/abs/1408.0019>)
- [82] R. Sabyasachi, ([http://etheses.dur.ac.uk/6386/1/Thesis\\_final.pdf?DDD25+](http://etheses.dur.ac.uk/6386/1/Thesis_final.pdf?DDD25+))
- [83] M. Cicoli, PoS EPS -HEP2011, 127 (2011) doi:10.22323/1.134.0127 [arXiv:1111.0790 [hep-th]]. (<https://arxiv.org/abs/1111.0790>)
- [84] K. L. McDonald and D. E. Morrissey, JHEP 1005, 056 (2010) doi:10.1007/JHEP05(2010)056 [arXiv:1002.3361 [hep-ph]]. (<https://arxiv.org/abs/1002.3361>)
- [85] F. Ravndal, Comment. Phys. Math. Soc. Sci. Fenn. 166, 151 (2004) [gr-qc/0405030]. (<https://arxiv.org/abs/gr-qc/0405030>)
- [86] G. Nordstrom, Phys. Z. 15, 504 (1914) [physics/0702221 [physics.gen-ph]]. (<https://arxiv.org/abs/physics/0702221>)
- [87] O. Klein, Z. Phys. 37, 895 (1926) [Surveys High Energ. Phys. 5, 241 (1986)]. doi:10.1007/BF01397481 (<https://inspirehep.net/literature/14622>)
- [88] R. Almeida, *Dissertação rodrigo* Dissertação de Mestrado, Programa de Pós graduação em Física UFC, 2016 (<http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/26865>)
- [89] A. Zalognick, *SEMINAR* (<https://conferences.iaea.org/event/214/contributions/17833/>) University of Ljubljana, 2012
- [90] M. Gabella, (<https://www.thphys.uni-heidelberg.de/~witkowski/curved/talk15.pdf>) *The Randall Sundrum Model* IPPC, EPFL, 2006
- [91] V.A. Rubakov, *Large and infinity extra dimensions* Academy of Sciences, Russian, 2001 (<https://arxiv.org/abs/hep-ph/0104152>)
- [92] W. D. Goldberger and M. B. Wise, Phys. Rev. Lett. 83, 4922 (1999) doi:10.1103/PhysRevLett.83.4922 [hep-ph/9907447]. (<https://arxiv.org/abs/hep-ph/9907447>)
- [93] C. Csaki, M. L. Graesser and G. D. Kribs, Phys. Rev. D 63, 065002 (2001) doi:10.1103/PhysRevD.63.065002 [hep-th/0008151]. (<https://arxiv.org/abs/hep-th/0008151>)
- [94] R. M. Wald, doi:10.7208/chicago/9780226870373.001.0001
- [95] S. M. Carroll, San Francisco, USA: Addison-Wesley (2004) 513 p
- [96] A. Stegun, "Handbook of Mathematical Function With Formulas, Graphs and Mathematical Tables," Dover Publication, 1972

- [97] Y. b. Kim, C. O. Lee, I. b. Lee and J. J. Lee, J. Korean Astron. Soc. 37, 1 (2004) doi:10.5303/JKAS.2004.37.1.001 [hep-th/0307023]. (<https://arxiv.org/abs/hep-th/0307023>)
- [98] N. Barbosa-Cendejas, D. Malagón-Morejón and R. R. Mora-Luna, Gen. Rel. Grav. 47, no. 7, 77 (2015) doi:10.1007/s10714-015-1920-6 [arXiv:1503.07900 [hep-th]]. (<https://arxiv.org/abs/1503.07900>)
- [99] W.Macedo, “Campos Espinoriais em Cenário de Mundo Brana com Co-Dimensão Um,” Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, 2018 (<http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/30936>)
- [100] W.Cruz, “Localização de Campos em membranas deformadas,” Biblioteca do curso de Física, Universidade Federal do ceará (UFC), 2009 (<http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/12927>)
- [101] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. 125B, 136 (1983). doi:10.1016/0370-2693(83)91253-4 (<https://inspirehep.net/literature/194936>)
- [102] C. Patrignani *et al.* [Particle Data Group], Chin. Phys. C 40, no.10, 100001 (2016) doi:10.1088/1674-1137/40/10/100001 (<https://inspirehep.net/files/a46bc344915850ae75930afef3e5b526>)

## APÊNDICE A – ESPECTRO DE MASSA

Nesse apêndice mostramos como obter o espectro de massa para os campos no modelo (+ - +) acoplados com o dÍlaton ou com as quantidades geométricas. Todos os campos seguem uma equação tipo Schrödinger com forma geral dada por

$$-\psi'' + [c_1 A'' + c_1^2 A'^2] \psi = m^2 \psi. \quad (\text{A.1})$$

Usando  $A(z)$  explicitamente, obtemos

$$-\psi''(z) + \left[ \frac{(c_1 + c_1^2)k^2}{g(z)^2} - \frac{2c_1 k(\delta(z) + \delta(z-2l) - \delta(z-l))}{g(z)} \right] \psi(z) = m_n^2 \psi(z). \quad (\text{A.2})$$

A solução para os modos massivos é da forma

$$\psi^n(z) \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{g(z)}{k}} \left[ \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix} J_{c_1 + \frac{1}{2}} \left( \frac{m_n}{k} g(z) \right) + \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} Y_{c_1 + \frac{1}{2}} \left( \frac{m_n}{k} g(z) \right) \right]. \quad (\text{A.3})$$

Usando as condições de contorno para a função de onda e sua primeira derivada na posição das branas  $(0, z_l, 2z_l)$ , que são

$$\begin{aligned} \psi_n'(0^+) &= -\frac{k}{g(0)} c_1 \psi_n(0) \\ \psi_n'(z_l^+) - \psi_n'(z_l^-) &= \frac{2kc_1}{g(z_l)} \psi_n(z_l) \\ \psi_n'(2z_l^-) &= \frac{k}{g(2z_l)} c_1 \psi_n(2z_l) \\ \psi_n(z_l^+) &= \psi_n(z_l^-) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

obtemos

$$\begin{vmatrix} J_{c_1-1/2}(\frac{m_n}{k}) & Y_{c_1-1/2}(\frac{m_n}{k}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{c_1-1/2}(\frac{m_n}{k}) & Y_{c_1-1/2}(\frac{m_n}{k}) \\ J_{c_1-1/2}(\frac{m_n}{k} g(z)) & Y_{c_1-1/2}(\frac{m_n}{k} g(z)) & J_{c_1-1/2}(\frac{m_n}{k} g(z)) & Y_{c_1-1/2}(\frac{m_n}{k} g(z)) \\ J_{c_1+1/2}(\frac{m_n}{k} g(z)) & Y_{c_1+1/2}(\frac{m_n}{k} g(z)) & -J_{c_1+1/2}(\frac{m_n}{k} g(z)) & -Y_{c_1+1/2}(\frac{m_n}{k} g(z)) \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Esse determinante nos leva a

$$\begin{aligned} & [J_{c_1-1/2}(a)Y_{c_1-1/2}(a*x) - Y_{c_1-1/2}(a)J_{c_1-1/2}(a*x)] * \\ & [Y_{c_1+1/2}(x*a)J_{c_1-1/2}(a) - J_{c_1+1/2}(a*x)Y_{c_1-1/2}(a)] = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Onde  $x = g(z)$  e  $a = \frac{m_n}{k}$ . Então usamos a primeira parte dessa equação, para encontrar a massa para o primeiro modo. Nós expandimos essa expressão para pequenas massas no Mathematica, para encontrar

$$m_1 = \sqrt{4c_1^2 - 1} k e^{-(c_1+1/2)x}. \quad (\text{A.7})$$

Com a segunda expressão, e considerando que  $J(x)$  é bem pequeno comparado com  $Y(x)$  para pequenos argumentos, temos

$$J_{c_1+1/2}(a * x) Y_{c_1-1/2}(a) = 0 \quad (\text{A.8})$$

Então o restante das massas é

$$m_n = \xi k e^{-kl}. \quad (\text{A.9})$$

Onde  $\xi$  são as raízes das funções de Bessel  $J_{c_1+1/2}(a * x)$ .