



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA APLICADA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM E MÉTODOS
QUANTITATIVOS

PEDRO FÉLIX LOPES GOMES

**UM ESTUDO SOBRE O ESCOAMENTO DE UM FLUIDO NEWTONIANO E NÃO
NEWTONIANO ATRAVÉS DE ESTRUTURAS DESORDENADAS**

FORTALEZA

2021

PEDRO FÉLIX LOPES GOMES

UM ESTUDO SOBRE O ESCOAMENTO DE UM FLUIDO NEWTONIANO E NÃO
NEWTONIANO ATRAVÉS DE ESTRUTURAS DESORDENADAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Métodos Quantitativos, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Modelagem e Métodos Quantitativos. Área de Concentração: Modelagem e Métodos Quantitativos

Orientador: Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo

Coorientador: Prof. Dr. Michael Ferreira de Souza

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G616e Gomes, Pedro Félix Lopes.

Um estudo sobre o escoamento de um fluido newtoniano e não newtoniano através de estruturas desordenadas / Pedro Félix Lopes Gomes. – 2021.
67 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Bioquímica, Fortaleza, 2021.

Orientação: Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo.

Coorientação: Prof. Dr. Michael Ferreira de Souza.

1. Dinâmica dos fluidos. 2. Materiais porosos. 3. Número de Reynolds. 4. Fluido newtoniano. 5. Fluido não-newtoniano. I. Título.

CDD 572

PEDRO FÉLIX LOPES GOMES

UM ESTUDO SOBRE O ESCOAMENTO DE UM FLUIDO NEWTONIANO E NÃO
NEWTONIANO ATRAVÉS DE ESTRUTURAS DESORDENADAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Métodos Quantitativos, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Modelagem e Métodos Quantitativos. Área de Concentração: Modelagem e Métodos Quantitativos

Aprovada em: 29/03/2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Michael Ferreira de Souza (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Albert Einstein Fernandes Muritiba
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Izael Araújo Lima
Universidade Estadual do Piauí (UESPI)

À minha família, por sua capacidade de acreditar em mim e investir em mim. Pai, Mãe, o apoio de vocês foi o que me deu a força para prosseguir. Paloma, sua presença significou segurança e certeza de que não estou sozinho nessa caminhada.

AGRADECIMENTOS

A Deus, primeiro lugar, por manter minha sanidade mental durante esses três intensos anos.

À minha esposa, Paloma, por ter me apoiado emocionalmente e ter sido minha âncora nesse período tão difícil (além de ter revisado e corrigido meus textos).

À minha família, principalmente aos meus pais, pois, sem eles, nada disso teria sido possível, e à família da minha esposa, por todo o suporte durante toda essa jornada.

Ao meu orientador, Ascânio, pela incomensurável ajuda, por acreditar em mim, por puxar minha orelha nos momentos necessários e não me deixar desistir.

Ao meu coorientador, Michel, pelo comprometimento, por ser um amigo nos momentos difíceis e por ser uma referência em todos os âmbitos da minha vida.

Aos meus professores do curso, por serem solícitos e partilharem seu conhecimento comigo e serem pacientes e atenciosos.

Aos meus companheiros de universidade pelos conhecimentos compartilhados e por terem paciência com a minha inexperiência.

A todos os que fazem parte do Mestrado em Modelagem e Métodos Quantitativos, que sempre estiveram disponíveis para me auxiliar em tudo o que precisei.

Aos meus amigos, por me proporcionarem momentos agradáveis.

À Igreja Batista da Graça, por ter sido meu local de refúgio e consolo quando mais precisei.

RESUMO

O escoamento de fluidos em meios porosos é um tema de intensa pesquisa devido à sua importante aplicação tecnológica em diversos processos, tais como; filtração, dispersão de poluentes, extração de óleo/gás e catálises. Entender como o espaço de poros no interior do meio poroso define a forma como os fluxos se distribuem durante o escoamento é fundamental para um entendimento dos processos ocorrendo no interior dessas estruturas. Estudos experimentais atestam que, dependendo da escala dos poros e da complexidade das redes de poros, padrões bastante heterogêneos podem emergir. A complexidade das redes de poro que compõem a matriz porosa, sejam elas ordenadas ou desordenadas, influenciam sobremaneira na forma como os fluxos se estabelecem no interior do meio poroso. Neste trabalho, propomos um estudo acerca da distribuição de fluxos no interior do meio poroso desordenado considerando dois regimes para o escoamento: baixo e alto número de Reynolds. O meio poroso desordenado é construído por meio da alocação aleatória de obstáculos circulares em uma caixa retangular até atingir uma porosidade (espaços vazios) desejada. Considerando esse meio poroso desordenado bidimensional, realizamos uma série de experimentos computacionais sobre o escoamento de um fluido Newtoniano assumindo diferentes números de Reynolds para o regime de escoamento. Analisamos como a distribuição de fluxos no interior do meio se altera em função do Reynolds para diferentes porosidades. Além disso, investigamos qual o efeito quando o fluido considerado é do tipo Não Newtoniano.

Palavras-chave: escoamento de fluido; meio poroso; número de Reynolds; newtoniano; não newtoniano;

ABSTRACT

Fluid flow in porous media is a subject of intense research due to its important technological application in several processes, such as; filtration, pollutant dispersion, oil / gas extraction and catalysis. Understanding how the pore space inside the porous medium defines the way the flows are distributed during the flow is fundamental for an understanding of the processes occurring inside these structures. Experimental studies attest that, depending on the scale of the pores and the complexity of the pore networks, very heterogeneous patterns can emerge. The complexity of the pore networks that make up the porous matrix, whether ordered or disordered, greatly influences the way the flows are established within the porous environment. In this work, we propose a study on the distribution of flows within the disordered porous medium considering two flow regimes: low and high Reynolds number. The disordered porous medium is constructed by randomly allocating circular obstacles in a rectangular box until the desired porosity (empty spaces) is reached. Considering this disordered two-dimensional porous medium, we performed a series of computational experiments on the flow of a Newtonian fluid assuming different Reynolds numbers for the flow regime. We analyzed how the distribution of flows within the medium changes as a function of Reynolds for different porosities. In addition, we investigate what the effect is when the fluid considered is of the Non-Newtonian type.

Keywords: fluid flow; porous media; Reynolds number; newtonian; non-newtonian;

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Meio Poroso	15
Figura 2 – Diferença entre o caminho geométrico (esquerda) e o caminho do fluido (direita)	17
Figura 3 – Gráfico - Fluido de Bingham	20
Figura 4 – Gráfico - Fluido de Herschel-Bulkley	20
Figura 5 – escoamento Laminar (a) e escoamento Turbulento (b)	21
Figura 6 – Área plana ΔS . O ângulo entre \vec{F} e \hat{n} é α	23
Figura 7 – Superfície S . O ângulo entre \vec{F} e \vec{n} é α	24
Figura 8 – Volume fixo de massa	25
Figura 9 – Elemento de fluido infinitesimal.	27
Figura 10 – Desenvolvimento do perfil de velocidade	32
Figura 11 – Perfil de velocidades encontrado por meio da solução da equação de Navier-Stokes considerando o escoamento em um canal bidimensional.	33
Figura 12 – Perfil de velocidade	35
Figura 13 – Simulação no <i>Fluent</i>	35
Figura 14 – Esquema do fluxo em um tubo	36
Figura 15 – Cisalhamento	37
Figura 16 – Fluxograma da metodologia	40
Figura 17 – Célula em três dimensões e seus respectivos nós vizinhos	41
Figura 18 – Tipos de malha segundo Espinha (2005): (a) grade cartesiana ou uniforme, (b) grade regular, (c) grade retilínea, (d) malha estruturada, (e) malha não-estruturada de tetraedros.	42
Figura 19 – Malha e regiões.	43
Figura 20 – Gráfico de convergência das equações no <i>Fluent</i> . Fluido HB e porosidade $\varepsilon = 0.6$	47
Figura 21 – Residuals Monitors.	48

Figura 22 – Os meios porosos obtidos pela alocação de obstáculos circulares de diâmetro D . Cada meio poroso corresponde a um valor de porosidade. De cima para baixo, temos $\varepsilon = 0.6, 0.7, 0.8$ e 0.9 . Devido ao aumento da porosidade, a região porosa (parte central da caixa de simulação) vai ficando cada vez mais diluída com as aberturas dos canais maiores. Esta diluição gera um efeito sobre a distribuição de largura dos canais e também sobre o escoamento. As linhas laterais, que definem a área da região porosa, são utilizadas para o cálculo da diferença de pressão entre as extremidades do meio poroso.	50
Figura 23 – Distribuição de larguras de canais normalizados $l^* = l/D$ para diferentes valores da porosidade dos meios porosos gerados. A linha pontilhada corresponde ao tamanho $l^* = 1$	52
Figura 24 – Campo de velocidade obtido para um meio poroso com porosidade $\varepsilon = 0.6$. Em (a), a velocidade na entrada do canal é $V = 0.001$ e, em (b), temos $V = 1000$, os quais correspondem aos números de Reynolds $Re = 0.001$ e $Re = 1000$, respectivamente. As cores em ambas as figuras representam a magnitude da velocidade em (m/s) e seguem os valores mostrados em suas respectivas barras de cores. Claramente, o aumento no número de Reynolds acentua os efeitos inerciais, como vistos na figura (b).	55
Figura 25 – Campo de pressão obtido para um meio poroso com porosidade $\varepsilon = 0.6$. Em (a), a velocidade na entrada do canal é $V = 0.001$ e, em (b), temos $V = 1000$, os quais correspondem aos números de Reynolds $Re = 0.001$ e $Re = 1000$, respectivamente. As cores em ambas as figuras representam a magnitude da pressão.	56
Figura 26 – Cálculo do Fluxo.	57
Figura 27 – Gráfico em escala logarítmica da distribuição de fluxos normalizada $P(\Phi)$, onde $\Phi = \phi/\phi_0$ é fluxo normalizado pelo fluxo total na entrada do canal $\phi_0 = L_y V$. Com esse escalonamento, as curvas colapsam em uma única curva. A linha verde-sólida é o ajuste não-linear feito sobre as curvas, utilizando a função expressa pela equação 78 com os parâmetros em (a) $A_0 = 60$, $\alpha = 0.06$ e $A_1 = 48$ para $\varepsilon = 0.6$, e em (b) $A_0 = 14$, $\alpha = -0.16$ e $A_1 = 23$ para $\varepsilon = 0.9$	58

Figura 28 – Gráfico em escala logarítmica da distribuição de fluxos normalizada $P(\Phi)$ para um fluido Não Newtoniano do tipo Herschel-Bulkley. Os símbolos correspondem aos diferentes valores do índice de comportamento do fluido n . A porosidade do meio, nesse caso, é $\varepsilon = 0.6$ e $Re = 0.001$ 62

Figura 29 – Gráfico em escala logarítmica da distribuição de fluxos normalizada $P(\Phi)$ para um fluido Não Newtoniano do tipo Herschel-Bulkley. Os símbolos correspondem aos diferentes valores do índice de comportamento do fluido n . A porosidade do meio é $\varepsilon = 0.6$ e $Re = 1000$ 62

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Configuração do Solver na Simulação de Fluido Newtoniano.	46
Tabela 2 – Configuração de Models na Simulação de Fluido Newtoniano.	46
Tabela 3 – Configuração do Solution Methods (Pressure-Velocity Coupling e Spatial Discretization) na Simulação de Fluido Newtoniano.	46
Tabela 4 – Configuração do Solution Controls (Under-Relaxation Factors) na Simulação de Fluido Newtoniano.	47

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	CONCEITOS BÁSICOS INTRODUTÓRIOS	15
2.1	Definição de meio poroso	15
2.1.1	<i>Porosidade</i>	16
2.1.2	<i>Tortuosidade</i>	17
2.2	Definição de fluido	17
2.3	Tensão de cisalhamento e viscosidade de um fluido	18
2.3.1	<i>Fluidos não newtonianos</i>	19
2.4	Tipos de escoamento	20
2.5	Números adimensionais	21
2.5.1	<i>Número de Reynolds</i>	22
2.6	Fluxo em um campo vetorial	22
2.7	Equação de conservação de massa	24
2.8	Equação de Navier-Stokes	27
2.9	Condição de contorno	32
2.10	Escoamento laminar em um canal bidimensional	33
2.11	Escoamento laminar em um tubo	36
3	DESCRIÇÃO DO PROBLEMA E METODOLOGIA UTILIZADA	39
3.1	Descrição do problema	39
3.2	Metodologia	40
3.3	Método de volumes finitos FVM	40
3.3.1	<i>1º passo: geração da malha</i>	41
3.3.1.1	<i>Malha</i>	42
3.3.2	<i>2º passo: discretização</i>	43
3.3.3	<i>3º passo: solução das equações</i>	46
3.4	Configuração do <i>Fluent</i>	46
4	ANÁLISE E RESULTADOS	49
4.1	Modelo	49
4.2	Cálculo do escoamento	53

4.3	Fluido não newtoniano	59
5	CONCLUSÃO	63
	REFERÊNCIAS	65

1 INTRODUÇÃO

O estudo do escoamento de fluidos por meios porosos é um tema de grande importância e têm uma vasta aplicabilidade em vários ramos da ciência, tais como na engenharia, na geologia e na química (SAHIMI, 1995; BEAR, 1988). Podemos observar várias aplicações desses estudos no mundo moderno e, como exemplo, podemos citar extração de petróleo, dispersão de poluentes no solo e processos que envolvem filtração e catálise na indústria (SAHIMI; IMDAKM, 1991; WONG, 1988).

A característica desordenada de meios porosos naturais ou artificiais representa um desafio importante para pesquisadores que buscam uma descrição realística, por meio de técnicas de modelagem e simulação, de fenômenos de transporte ocorrendo nos espaços vazios dessas estruturas (UNGER *et al.*, 1988). A presença de uma morfologia complexa na grande maioria das estruturas porosas de interesse científico e tecnológico pode representar um papel determinante sobre a fenomenologia e sobre as propriedades de transporte, quando se investiga o escoamento de fluidos em tais materiais. Uma questão essencial que surge quando tratamos com esse tipo de sistema é: o que acontece com o escoamento de um fluido quando o meio através do qual ele se desloca é desordenado e/ou heterogêneo? De um ponto de vista mais fundamental, vale ressaltar que as leis associadas ao escoamento de um fluido através de um meio poroso desordenado ainda necessitam de uma investigação mais minuciosa na tentativa de seu completo entendimento.

A característica desordenada do meio impõe ao escoamento alguns aspectos que só podem ser observados quando investigamos propriedades locais relacionados ao escoamento. Quando analisamos uma amostra do ponto de vista macroscópico, o parâmetro que define o espaço de poros da amostra denomina-se porosidade. Essa propriedade define a fração de espaços vazios no interior da amostra que está disponível ao fluido durante o escoamento. A forma como os poros estão conectados, ou seja, a estrutura dos espaços vazios, define a forma como o fluido se distribui no interior do meio poroso. Entender como a estrutura de poros interfere na distribuição de fluxos no interior da amostra parece ser uma tarefa natural na busca por um melhor entendimento sobre os processos físico-químicos que ocorrem no interior do meio.

Como primeiro ponto abordado nesse trabalho, investigamos como a distribuição de fluxos no interior de um meio desordenado se comporta quando são considerados diferentes regimes para o escoamento, baixo ou elevado número de Reynolds. Além do regime de escoamento

mento, analisaremos sob o ponto de vista da porosidade e como a porosidade do meio afeta essa distribuição de fluxos. Devido ao aspecto aleatório do meio poroso, uma análise estatística se faz necessária, nesse caso, considerando diferentes amostras do meio poroso para diferentes valores da porosidade.

Os fluidos podem ser classificados quanto ao conceito mais básico: comportamento de sua viscosidade. Dentro desse conceito, eles recebem as seguintes denominações: Newtonianos e Não Newtonianos. Os Newtonianos apresentam uma relação linear entre a tensão de cisalhamento aplicada e a sua deformação, sendo o parâmetro de proporcionalidade definido como a viscosidade do fluido. Já os Não Newtonianos apresentam uma relação bem mais complexa entre a tensão de cisalhamento e a deformação, em geral, uma relação não linear. Nesse caso, a viscosidade do fluido depende da tensão de cisalhamento.

Como outro tópico a ser abordado neste trabalho, propomos uma investigação sobre as distribuições de fluxo, considerando fluidos Não Newtonianos. Como a estrutura do escoamento é desordenada, a forma como a tensão de cisalhamento atua no interior do meio deve influenciar a distribuição do fluxo no seu interior. Entender como essa modificação altera a forma como o escoamento se distribui no interior da amostra desordenada parece ser um aspecto relevante a ser estudado.

Este trabalho de dissertação apresenta a seguinte estrutura na sua organização: no primeiro capítulo, abordaremos aspectos gerais da dinâmica de fluidos. Conceitos básicos sobre fluidos e definições sobre os regimes de escoamento são apresentados. A equação que governa o escoamento de um fluido é introduzida, e exemplos de soluções analíticas são discutidos.

Devido ao aspecto não linear da equação que governa o escoamento, no segundo capítulo, introduzimos um modelo numérico para a solução dessa equação em uma situação para a qual uma solução analítica não é possível de ser obtida. Os pacotes computacionais e as ferramentas numéricas utilizadas são, também, apresentadas nesse capítulo. No terceiro capítulo, apresentamos os resultados obtidos e uma análise sobre esses resultados, considerando os diferentes aspectos aqui investigados. Por fim, apresentamos as conclusões, limitações do estudo realizado e possibilidade de investigações futuras.

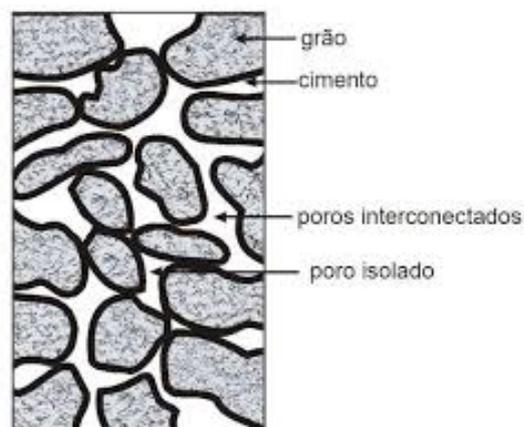
2 CONCEITOS BÁSICOS INTRODUTÓRIOS

2.1 Definição de meio poroso

Podemos definir meios porosos como corpos sólidos que contêm poros. Entretanto, o conceito de poro é difícil de determinar, visto que sua forma geométrica não é bem definida. Apesar disso, podemos, intuitivamente, definir poros como sendo espaços vazios que estão distribuídos através de um material (chamado de material poroso). Para termos uma melhor visão do conceito de poros, devemos levar em consideração que existem materiais com vários "tamanhos" de espaços vazios. Quando os espaços vazios são extremamente pequenos em um sólido, chamamos de interstícios moleculares, e quando os espaços vazios são muito grandes, chamamos de cavernas. Os poros são vazios que têm tamanhos intermediários entre interstícios moleculares e cavernas.

Os poros de um meio poroso podem ser interconectados ou não interconectados. O escoamento de um fluido por um meio poroso ocorre quando o espaço poroso for interconectado. A parte interconectada do meio poroso é chamada de porosidade efetiva ou espaço poroso. Como exemplos de meios porosos, podemos citar: rochas porosas (calcário), torres cheias de seixos, pedra-pome, papel de filtro, grânulos, entre outros.

Figura 1 – Meio Poroso



Fonte: Faria (2020).

2.1.1 Porosidade

Um meio poroso pode ser classificado e caracterizado por uma série de propriedades geométricas. Quanto a sua organização o meio poroso pode ser ordenado ou desordenado. Os ordenados exibem um padrão de organização que se repete por toda a matriz porosa. Neste caso, a posição dos poros ou intertícios no meio poroso fica bem determinada sobre toda extensão do meio. Já para o desordenado este padrão não existe e a estrutura apresenta um desorganização quanto a posição dos poros. Em ambos os casos podemos classificar o meio poroso quanto a uma propriedade macroscópica como a porosidade do meio. A porosidade do meio ε , que é dada pela proporção entre o volume da parte vazia e o volume total, e é indicada por uma fração de 1 ou em porcentagem. Quando calculamos essa porcentagem baseada no espaço poroso interconectado em vez de usar o espaço total do poro, a quantidade encontrada será chamada de porosidade efetiva.

$$\varepsilon = \frac{\text{volume de vazios}}{\text{volume total}} \quad (1)$$

Podemos medir a porosidade através de uma variedade de métodos distintos. Alguns deles que podemos citar são (SCHEIDEGGER, 1974):

- Método Direto: Esse método consiste em medir o volume global de um pedaço de material poroso, e depois compactar esse material para extinguir todos os seus vazios e, então, medir a diferença de volumes.
- Métodos Ópticos: Nesse método, medimos a porosidade de uma seção aleatória do meio poroso, em que o valor encontrado deve ser semelhante ao da porosidade do meio poroso completo.
- Método de Expansão de Gás: Para medir a porosidade usando esse método, colocamos uma amostra do meio poroso com o volume conhecido dentro de um recipiente, também de volume conhecido, e, então, preenchemos com um gás. Sabendo da pressão do gás, conectamos o recipiente da amostra com outro totalmente evacuado e de volume conhecido, e calculamos a porosidade efetiva usando a seguinte relação: $p_1V_a = p_2V_b$ onde V_a é o volume do recipiente onde se encontra a amostra, V_b o recipiente inicialmente evacuado, p_1 a pressão inicial do gás e p_2 a pressão final do gás.

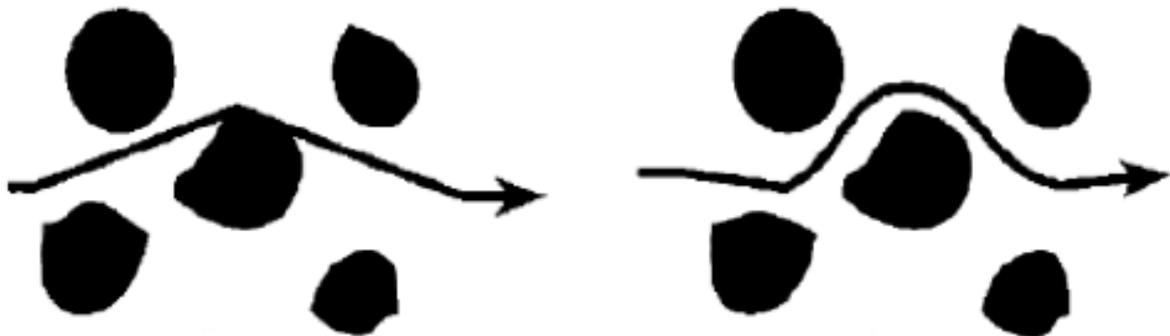
O método de expansão de gás é um dos mais usados, pois é rápido, preciso e deixa a amostra sem alterações para ser usada em outros testes.

2.1.2 Tortuosidade

É uma grandeza que nos permite analisar detalhadamente o comportamento de um escoamento através da observação de como o fluido passa pelos poros de um meio poroso. Podemos definir Tortuosidade como sendo a razão entre o comprimento de um caminho por onde passa um fluido, e a distância em linha reta entre a entrada e a saída desse fluido. A tortuosidade pode ser classificada como:

- a) Tortuosidade Geométrica: É medida usando o caminho que de fato é mais curto geometricamente.
- b) Tortuosidade Hidráulica: Leva em consideração o caminho efetivo do fluido.

Figura 2 – Diferença entre o caminho geométrico (esquerda) e o caminho do fluido (direita)



Fonte: MINGIREANOV FILHO (2017).

Como caminho efetivo do fluido fica entendido o percurso de partes do fluido que pode ser visualizado por meio do conceito de linhas de corrente. Trata-se de um conceito bastante utilizado para definir o caminho seguido pelo fluido, onde o vetor velocidade do escoamento local é tangente a uma linha de corrente, e sua magnitude é representada pelo adensamento das linhas de corrente em um determinado local. Quanto mais linhas por unidade de área maior a magnitude da velocidade local.

2.2 Definição de fluido

Um fluido pode ser definido como um tipo de substância que é deformada quando é submetida a uma tensão de cisalhamento e é capaz de escoar tomando a forma de seu recipiente. Os fluidos podem ser encontrados nos estados líquido e gasoso, mas também podendo ser encontrados na forma de plasmas ou algum tipo de sólido plástico.

Características básicas dos fluidos:

- **Compressibilidade:** Um fluido pode ser compressível (quando sua densidade muda de acordo com a pressão) ou incompressível (quando sua densidade não muda com a pressão). Normalmente, os líquidos, em boa aproximação, podem ser considerados incompressíveis, haja vista que seu volume muda muito pouco com a pressão aplicada;
- **Pressão:** A pressão em um ponto do fluido é a mesma em todas as direções e a pressão exercida por um fluido em uma superfície sólida é sempre normal a esta superfície;
- **Tipo:** Pode ser ideal, ou seja, não ter viscosidade, ser incompressível, ter distribuição de velocidade uniforme quando flui. Pode ser real, ou seja, ter uma viscosidade finita, possuir uma distribuição de velocidade não uniforme e podem ser divididos em duas categorias: newtonianos e não newtonianos.

2.3 Tensão de cisalhamento e viscosidade de um fluido

Se tivermos uma força \vec{F} aplicada a uma superfície de área A que possui uma componente normal e uma tangencial, então, podemos definir Tensão de Cisalhamento como sendo a divisão do módulo da componente tangencial da força pela área sobre a qual ela está sendo aplicada.

$$\tau = \frac{F_t}{A}. \quad (2)$$

A viscosidade de um fluido é a capacidade dele de resistir à força de escoamento, ou seja, é a resistência de um fluido à deformação por cisalhamento. Podemos defini-la, considerando um fluido Newtoniano, com base na lei de Newton para a viscosidade do fluido que:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (3)$$

onde:

- τ é a tensão de cisalhamento;
- u é a velocidade;
- μ é o coeficiente de viscosidade (absoluta ou dinâmica);
- y é a direção ortogonal ao escoamento.

Quando o fluido possui um comportamento onde a tensão de cisalhamento τ é proporcional ao gradiente da velocidade na direção ortogonal, e a constante de proporcionalidade é a viscosidade, este fluido é definido como sendo do tipo Newtoniano. Este é o comportamento mais comum encontrado para os fluidos em geral.

2.3.1 Fluidos não newtonianos

Há, também, o caso em que os fluidos não obedecem esta equação, ou seja, tem um comportamento mais complexo e não linear. Isso faz com que a viscosidade dependa da tensão de cisalhamento local. São fluidos em que a relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação não é constante. Esse tipo de fluido é classificado como um fluido não newtoniano. Como exemplo, podemos citar o ketchup, o petróleo e o sangue. Um exemplo de relação entre a tensão de cisalhamento e a deformação experimentada pelo fluido que caracteriza um fluido Não Newtoniano pode ser expressa por:

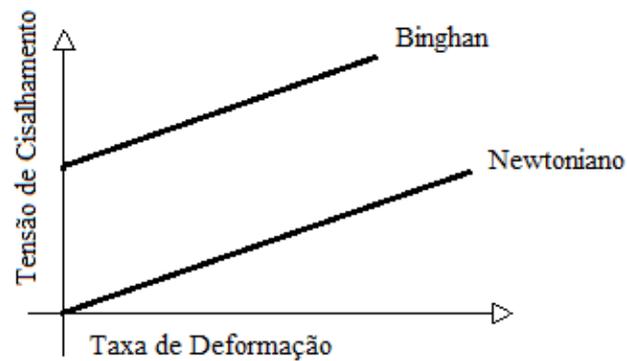
$$\tau = \tau_0 + k\dot{\gamma}^n. \quad (4)$$

onde τ é a tensão de cisalhamento, τ_0 é a tensão de cisalhamento limite que o fluido suporta até iniciar sua deformação, $\dot{\gamma}$ é taxa de deformação, k é o índice de consistência, e n é o índice de comportamento do fluido.

Podemos dividir esses fluidos em:

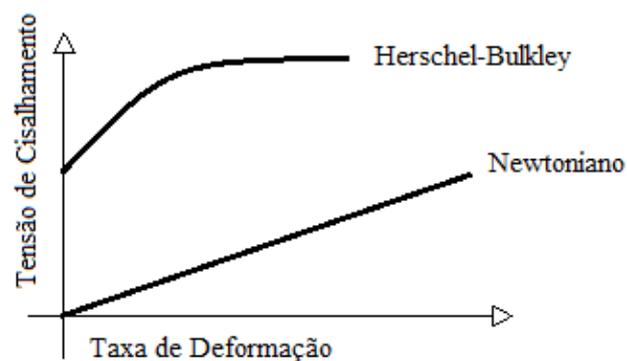
- a) Sem tensão inicial: Não precisam ultrapassar uma tensão de cisalhamento limite para começar a escoar. Exemplos disso são os pseudoplásticos (como polpa de fruta e caldo de fermentação.) e os dilatantes (como silicato de potássio).
- b) Com tensão inicial: necessitam ultrapassar um valor limite para a tensão de cisalhamento para que inicie o escoamento. Como exemplos de fluidos Não Newtonianos podemos citar:
 - Fluidos de Bingham: Esse fluido necessita de uma tensão de cisalhamento crítica inicial τ_0 para começar a escoar. Depois de atingida, temos uma relação linear entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação.
 - Herschel-Bulkley: Também necessita de uma tensão de cisalhamento limite inicial τ_0 . Contudo, após o início do escoamento, a relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação não é linear.

Figura 3 – Gráfico - Flúido de Bingham



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 4 – Gráfico - Flúido de Herschel-Bulkley



Fonte: elaborado pelo autor.

2.4 Tipos de escoamento

Pode-se definir o tipo de escoamento de um fluido quanto ao seu comportamento (partículas que compõem o fluido) com relação ao espaço e ao tempo. Com relação ao comportamento espacial temos dois tipos de escoamento: tipo laminar ou turbulento.

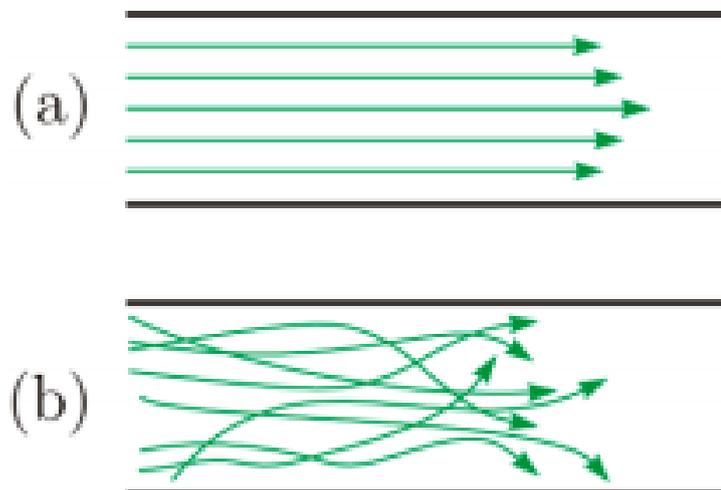
O escoamento laminar ocorre quando o fluido escoar em camadas sem que haja variação acentuada da velocidade dentro de uma mesma camada. Neste escoamento, as partículas do fluido trafegam de forma organizada sem que haja cruzamento entre as linhas de corrente do fluido. Esse tipo de escoamento só se dá em baixas velocidades. Como exemplo clássico, temos o de uma torneira ligada, de onde apenas um "fio" de água sai; nesse caso, temos um escoamento laminar.

O escoamento supracitado pode ser dividido em dois estados:

- Estacionário: Quando a velocidade e a pressão não variam com o tempo, isto é, a velocidade $\vec{u}(x, y, z)$ é dada apenas pelas coordenadas do escoamento;
- Transiente: Se dá quando a velocidade e a pressão em um ponto variam com o tempo, ou seja, a velocidade $\vec{u}(x, y, z, t)$ é dada pelas coordenadas do escoamento e pelo tempo.

O fluxo turbulento ocorre quando as partículas se misturam de forma caótica e formam redemoinhos ao longo do escoamento. Neste caso ocorre o cruzamento entre linhas de corrente do fluido. Este regime de escoamento ocorre para valores elevados da velocidade do fluido. Não só o parâmetro velocidade define o tipo de escoamento de um fluido, mas também as outras propriedades inerentes ao fluido. Este aspecto será discutido em detalhes adiante.

Figura 5 – Escoamento Laminar (a) e escoamento Turbulento (b)



Fonte: Adaptado de Lay-Ekuakille *et al.* (2018).

2.5 Números adimensionais

Dizemos que uma grandeza é adimensional quando podemos expressá-la apenas pelo seu valor numérico, pois quando relacionamos as unidades que formam essa grandeza, percebemos que o resultado dessa relação é igual a um. Como exemplos de grandezas adimensionais temos:

- Número de Arquimedes - Movimento de fluidos devido a diferenças de densidade;
- Número de Euler (Física) - Hidrodinâmica (forças de pressão vs. forças inerciais);
- Número de Froude - Forças inerciais vs. gravitacionais em fluidos;
- Número de Reynolds - Forças de inércia vs. viscosas em fluidos.

2.5.1 Número de Reynolds

Na seção anterior, classificamos o escoamento como laminar ou turbulento. Todavia, sabemos que nem sempre o escoamento se comporta da forma que esperamos ou desejamos. Por isso, é necessário encontrarmos uma grandeza que relacione os elementos que classificam o escoamento de um fluido ou as forças que agem durante o escoamento. No caso, relacionamos qualquer tamanho característico relacionado ao escoamento, a velocidade média do fluido, a viscosidade dinâmica e a massa específica. Com isso, geramos uma grandeza adimensional chamada número de Reynolds (popularizada por Osborne Reynolds), que é dada por:

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}, \quad (5)$$

onde:

- Re é o número de Reynolds;
- ρ é a densidade do fluido;
- V é a velocidade do fluxo na entrada do tubo/canal;
- D é um tamanho característico do sistema;
- μ é a viscosidade.

Através dessa grandeza, podemos definir como o escoamento se comporta, isto é, definir se este é laminar ou turbulento. Para um mesmo número de Reynolds um escoamento apresenta características similares que independem do tipo de fluido ou da geometria do escoamento. Com isso, se por acaso tivermos dois sistemas com o mesmo número de Reynolds, podemos dizer que eles são dinamicamente semelhantes.

2.6 Fluxo em um campo vetorial

Em Física, o fluxo é uma medida bastante comum em situações que envolvem campos vetoriais. O fluxo é normalmente uma grandeza escalar que define a quantidade de uma determinada grandeza (Matéria, Campo Elétrico, Campo Magnético) que passa por uma área definida. Em alguns casos relacionados com a Lei de Fick (Adoulf Eugen Fick, 1855) encontramos a definição de fluxo na forma de um vetor que estabelece a magnitude e direção de uma determinada substância ou matéria. Neste trabalho, usaremos o conceito de fluxo de massa (escalar) de uma determinada substância fluida que passa por uma área definida. Como exemplos

de fluxos nesse contexto, podemos citar:

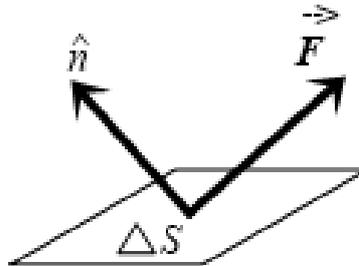
- Vazão volumétrica, que é o volume que atravessa a área unitária;
- Fluxo de massa, que é a massa que atravessa a área unitária;
- Fluxo de calor, que é a taxa de calor que atravessa a área unitária;
- Fluxo de energia, que é a taxa de energia que atravessa a unidade de área.

Nesse âmbito, temos que o fluxo é o quanto de uma determinada grandeza atravessa uma superfície (ou linha, no caso bidimensional) por unidade de tempo. Para uma definição de vetor, podemos dizer que o fluxo resultante é um vetor, do qual a norma é igual à taxa temporal da superfície que é transposta, e da qual a direção é normal à superfície estudada.

Para calcularmos o fluxo em um campo vetorial, primeiro, precisamos calcular o fluxo em uma pequena área plana ΔS , em que a normal a esta área está na direção do versor \hat{n} . Com isso, podemos definir o fluxo do vetor \vec{F} através de ΔS , como sendo:

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= F.\Delta S.\cos\alpha \\ \Delta\phi &= (\vec{F} \cdot \hat{n})\Delta S.\end{aligned}\quad (6)$$

Figura 6 – Área plana ΔS . O ângulo entre \vec{F} e \hat{n} é α .

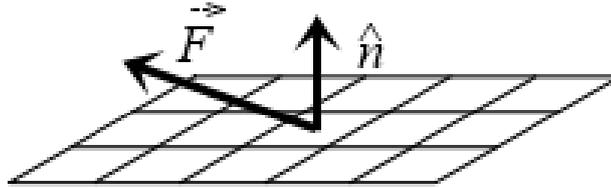


Fonte: elaborado pelo autor.

Quando \vec{F} for um campo vetorial, e S uma superfície, dividiremos S em pequenos elementos infinitesimais que chamaremos de ΔS e, então, calcularemos o fluxo através de \vec{F} em cada ΔS . Como a normal \hat{n} e \vec{F} mudam em cada ponto, teremos que o valor do fluxo de \vec{F} através da superfície S será o limite da soma dos fluxos ΔS , quando $\Delta S \rightarrow 0$ (FABBRI, 2011. Série de exercícios). Logo, o fluxo será:

$$\Phi = \sum \Delta\phi \cong \sum (\vec{F} \cdot \hat{n})\Delta S = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum (\vec{F} \cdot \hat{n})\Delta S = \iint_S (\vec{F} \cdot \hat{n})dS.\quad (7)$$

Figura 7 – Superfície S . O ângulo entre \vec{F} e \vec{n} é α .



Fonte: elaborado pelo autor.

Essa equação nos dá o fluxo passando por uma superfície, ou seja, podemos dizer que se trata do caso tridimensional. Quando temos \vec{F} um vetor bidimensional, seguimos o mesmo raciocínio. Entretanto, chegaremos à seguinte integral de linha:

$$\int_c (\vec{F} \cdot \vec{n}) dl. \quad (8)$$

Para esta pesquisa, o campo vetorial \vec{F} é a velocidade (campo de velocidade) do fluido. Com o campo de velocidade, podemos determinar o fluxo volumétrico e o fluxo de massa. O fluxo volumétrico e o fluxo de massa são dados, respectivamente, por :

$$Q = \int_S (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS \quad (9)$$

$$Q_m = \int_S \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS, \quad (10)$$

onde:

- Q é o fluxo volumétrico e Q_m é o fluxo de massa;
- \vec{u} é o vetor velocidade;
- \vec{n} o vetor unitário, normal à superfície S ;
- ρ é a densidade do fluido.

Quando a densidade do fluido é igual a 1, podemos escrever a equação do fluxo de massa como :

$$Q_m = \int_S (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS \quad (11)$$

2.7 Equação de conservação de massa

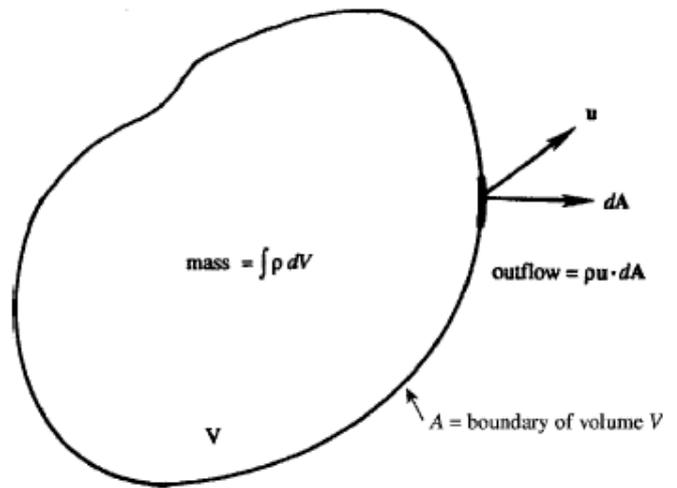
Para entendermos o princípio dessa equação, devemos imaginar um fluido e uma porção infinitesimal de massa no interior desse fluido. Nós chamamos essa porção de volume de

controle. A massa M de um volume de controle não varia com o tempo, mesmo com o volume infinitesimal se deslocando pelo espaço. Podemos escrever esse princípio da seguinte maneira:

$$\frac{dM}{dt} = 0. \quad (12)$$

Sabendo que a massa é a integral da densidade ρ no volume V , teremos:

Figura 8 – Volume fixo de massa



Fonte: Kundu e Cohen (2002)

$$M = \int_V \rho dV, \quad (13)$$

logo, derivando essa integral, obtemos:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0. \quad (14)$$

Considerando que a densidade pode ser uma função do tipo $\rho(x, y, z, t)$, podemos escrever a equação (14) como sendo:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \quad (15)$$

quando consideramos um volume de massa fixo V , como visto em Kundu e Cohen (2002, pag.: 83), teremos:

$$\frac{D}{dt} \int_V \rho dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_A \rho \vec{u} \cdot d\vec{A}, \quad (16)$$

(Teorema dos Transportes de Reynolds)

$$\int_A \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA = \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{u}) dV, \quad (17)$$

(Teorema de Gauss)

Usamos D/Dt (derivada substantiva: $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$) no Teorema dos Transportes de Reynolds, pois nos referimos a uma porção fixa de massa que trafega na velocidade \vec{v} do fluido, disso, temos que:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_A \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA, \text{ então} \quad (18)$$

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right] dV = 0. \quad (19)$$

Como o volume de controle é um volume qualquer, é possível escrever essa equação na forma diferencial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (20)$$

que pode ser chamada de equação da conservação da massa, ou equação da continuidade na forma diferencial. Outra forma de escrevê-la :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}, \text{ então}, \quad (21)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (22)$$

Quando o fluido é incompressível e está escoando em estado estacionário, teremos:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (23)$$

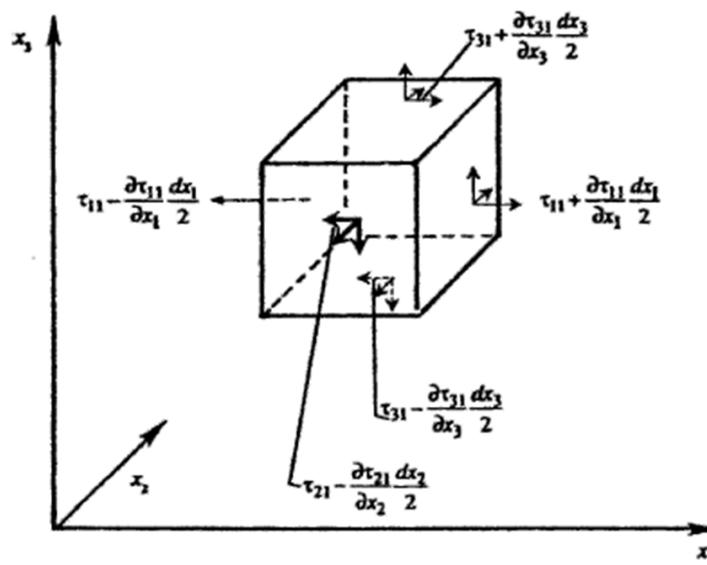
2.8 Equação de Navier-Stokes

Essa equação nos permite determinar o campo de velocidade e pressão para um escoamento de um fluido. Devido ao seu caráter não linear, a sua solução é muito complexa, sendo obtida analiticamente apenas para casos onde o escoamento é bastante simplificado e em regime de escoamento com baixo número de Reynolds.

Na maioria dos problemas práticos, a solução só é possível por meio de técnicas numéricas, as quais também podem ser obtidas para o caso de regimes de alto Reynolds.

Para obter a equação de Navier-Stokes, é preciso, primeiramente, entendermos a equação de conservação de quantidade de movimento estabelecida por Newton. Essa lei pode ser expressa na forma diferencial aplicando a lei de movimento de Newton para elemento de fluido infinitesimal, como podemos ver na figura abaixo.

Figura 9 – Elemento de fluido infinitesimal.



Fonte: Kundu e Cohen (2002).

Conforme pode ser visto na figura 9, a soma das forças da superfície na direção x_1 é igual a

$$\begin{aligned}
& \left(\tau_{11} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2} - \tau_{11} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2} \right) dx_2 dx_3 \\
& + \left(\tau_{21} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2} - \tau_{21} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2} \right) dx_1 dx_3 \\
& + \left(\tau_{31} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2} - \tau_{31} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2} \right) dx_1 dx_2
\end{aligned}$$

com isso, temos

$$\left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial \tau_{j1}}{\partial x_j} dV$$

onde dV é o elemento de volume e $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$ é a componente i da força superficial por elemento de volume (usando o fato de que $\tau_{ij} = \tau_{ji}$). Seja g a força por unidade de massa, então ρg é a força por unidade de volume. Logo, usando a lei de Newton temos:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (24)$$

A segunda parte para se construir a equação de Navier-Stokes é a equação constitutiva para fluidos newtonianos que relaciona linearmente a tensão e taxa de deformação, para isso, seguimos e adaptamos como visto em Kundu e Cohen (2002).

Em um fluido em repouso, começamos definindo um tensor isotrópico (ou seja, não existe uma direção preferencial de atuação das tensões). No nosso caso, o único tensor isotrópico de segunda ordem é o delta de Kronecker:

$$\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Como esse tensor é proporcional a delta, e a tensão em um fluido estático é isotrópica, teremos:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad (26)$$

onde p é a pressão termodinâmica relacionada a ρ . O sinal negativo dessa equação deve-se às componentes normais de τ , pois indicam tensão em vez de contenção.

Após o início do escoamento, o fluido desenvolve componentes adicionais de stress devido à viscosidade, e a tensão começa a agir e, com isso, podemos dividir a equação de tensão em duas partes: a primeira, para o fluido em repouso, é $-p\delta_{ij}$, e a segunda, que se dá por causa do movimento do fluido, é σ_{ij} . Então,

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}. \quad (27)$$

O σ está relacionado ao gradiente de velocidade $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Esse gradiente de velocidade pode ser decomposto assim:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (28)$$

O termo antissimétrico não pode gerar tensão, pois apenas representa a rotação do fluido sem deformação. As tensões são geradas somente pelo tensor da taxa de deformação, que é dado por:

$$e_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (29)$$

Vamos assumir uma relação linear de σ , tal que $\sigma_{ij} = K_{ijmn}e_{mn}$, onde K_{ijmn} é um tensor de quarta ordem, tendo 81 componentes. A relação linear de σ significa que cada componente de tensão está linearmente relacionado a todos os nove componentes de e_{ij} . Logo, são necessários 81 constantes para descrever essa relação. K_{ijmn} é um tensor isotrópico de quarta ordem que é produto de δ_{ij} e tem a seguinte forma:

$$K_{ijmn} = \lambda \delta_{ij}\delta_{mn} + \mu \delta_{im}\delta_{jn} + \gamma \delta_{in}\delta_{jm}, \quad (30)$$

onde γ , μ e λ são escalares que dependem do estado termodinâmico do local. Como σ_{ij} é simétrico, a relação linear requer que K_{ijmn} seja simétrico em i e j . Isso só vale para a equação 30 somente se $\gamma = \mu$.

Com isso, devido às restrições de isotropia e à simetria da tensão, vemos que, das 81 constantes, apenas duas sobram (μ e λ), o que resulta em:

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda e_{mm} \delta_{ij}, \text{ onde } e_{mm} = \nabla \cdot \vec{u} \quad (31)$$

Dessa forma, o tensor τ será:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda e_{mm} \delta_{ij}. \quad (32)$$

Definindo $i = j$, somando os índices repetidos e sabendo que $\delta_{ij} = 3$, obtemos

$$\tau_{ij} = -3p + (2\mu + 3\lambda)e_{mm}, \quad (33)$$

e, com essa equação, podemos encontrar o valor da pressão:

$$p = -\frac{1}{3}\tau_{ii} + \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right) \nabla \cdot \vec{u}. \quad (34)$$

Então, e_{ij} pode ter termos diagonais diferentes. Logo, τ também tem termos diagonais desiguais, pois há um termo proporcional a μ na equação 32. Com isso, podemos tomar uma média dos termos diagonais de τ e, assim, obter uma pressão média

$$\bar{p} \equiv -\frac{1}{3}\tau_{ii}. \quad (35)$$

substituindo em 34:

$$p - \bar{p} = \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right) \nabla \cdot \vec{u}. \quad (36)$$

Para um fluido incompressível, temos que $e_{mm} = \nabla \cdot \vec{u} = 0$. Por isso, a equação constitutiva pode ser expressa assim:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (37)$$

onde p é a pressão. Se supormos que $\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$ em 36, obteremos

$$\tau_{ij} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{u}\right) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (38)$$

Agora, podemos substituir a equação 38 na equação 24 e, assim, obtermos a forma geral da equação de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[2\mu e_{ij} - \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \vec{u}) \delta_{ij} \right], \quad (39)$$

Se a diferença de temperatura do fluido for pequena, podemos reduzir a equação para

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du_i}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + 2\mu \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} - \frac{2\mu e_{ij}}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \vec{u}) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \mu \left[\nabla^2 u_i + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \vec{u}) \right], \end{aligned}$$

onde

$$\nabla^2 u_i \equiv \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} \quad (40)$$

é o Laplaciano de u_i . Para um fluido incompressível $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, podemos reduzir a equação de Navier-Stokes para:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{u}. \quad (41)$$

onde:

- ρ é a densidade do fluido;
- \vec{u} é o campo de velocidade;
- p é o campo de pressão;
- μ é a viscosidade do fluido.

Quando desprezamos os efeitos viscosos, obtemos a equação de Euler:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g}. \quad (42)$$

2.9 Condição de contorno

Para a solução numérica do escoamento, temos que especificar as condições de contorno para o problema. Em nosso estudo, a condição de contorno utilizada será a condição de não deslizamento (no-slip), isto é, a velocidade das partículas em contato com os obstáculos (paredes e outros sólidos) terá a velocidade do obstáculo. Como eles não se movem, a velocidade das partículas tendem a zero ao se aproximarem do obstáculo. Formalmente, descrevemos assim:

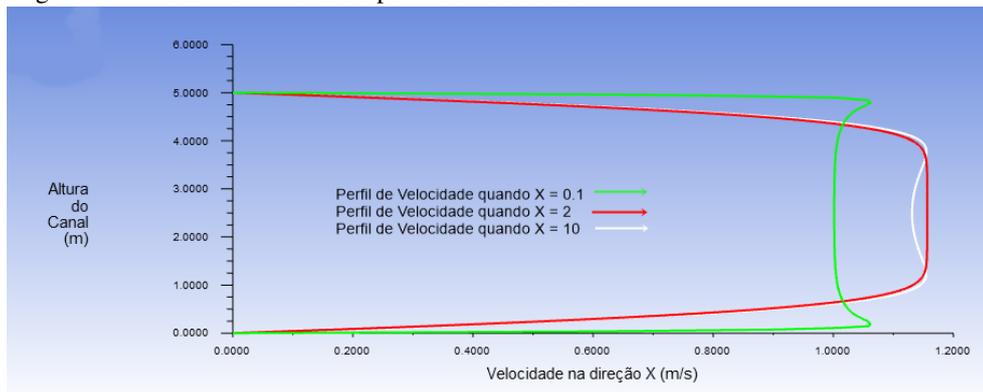
$$\vec{u} \times \hat{n} = \vec{U} \times \hat{n}, \quad (43)$$

onde \vec{u} é a velocidade de uma partícula próxima a um obstáculo, \vec{U} é a velocidade do obstáculo e \hat{n} é o vetor normal à superfície. Se $\vec{U} = 0$, teremos:

$$\vec{u} \times \hat{n} = 0. \quad (44)$$

Na figura 10, temos um perfil de velocidade de um escoamento em um canal Bi-dimensional onde foi aplicado a condição de contorno de não-deslizamento nas paredes do canal.

Figura 10 – Desenvolvimento do perfil de velocidade



Fonte: elaborado pelo autor.

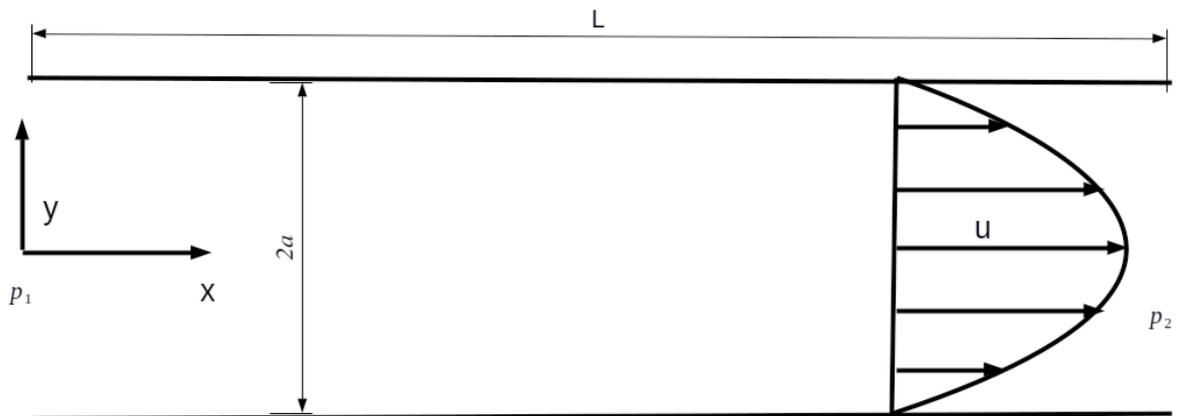
Colocamos, também, uma condição de contorno periódica nas bordas inferior e superior, na qual a partícula de fluido que passa pela extremidade inferior continua na extremidade superior, e vice-versa.

2.10 Escoamento laminar em um canal bidimensional

Agora, veremos algumas características do escoamento em um canal bidimensional de fluido incompressível e newtoniano como um exemplo de aplicação da Equação de Navier-Stokes com uma solução analítica, comuns na literatura, como em Tritton (2007) e White (2001). Dado um canal de largura $2a$ e comprimento L , onde L é muito maior se comparado com a , definimos uma pressão p_1 e uma pressão p_2 (com $p_1 > p_2$), que são mantidas entre as extremidades do canal. Nesse exemplo, temos condições de não deslizamento, em que as partículas do fluido que se encontram bem próximas as paredes do canal (imediatamente) não tem movimento. Dessa forma, há velocidade u apenas na direção x .

Uma observação importante é que o fluxo conserva a massa, ou seja, o mesmo perfil de velocidade carrega a mesma quantidade de massa.

Figura 11 – Perfil de velocidades encontrado por meio da solução da equação de Navier-Stokes considerando o escoamento em um canal bidimensional.



Fonte: elaborado pelo autor.

Dois elementos governam o movimento das partículas ao longo do canal, os quais são a viscosidade e a pressão. Utilizando a equação reduzida de Navier-Stokes, teremos o seguinte termo:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \delta y \delta x, \quad (45)$$

para δy , uma variação de y tão pequena quanto quisermos e μ (viscosidade) for constante.

A pressão diminui na direção do fluxo, ou seja, é maior na entrada do canal. Para o

termo do gradiente de pressão da equação reduzida de Navier-Stokes, teremos:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y, \quad (46)$$

sendo δx tão pequeno quanto necessário e, com isso, temos a força na direção do fluido. Como p varia apenas em x , é fácil ver que podemos substituir a equação anterior e adaptá-la para o nosso problema da seguinte forma:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{dp}{dx} = \frac{p_1 - p_2}{L} = G. \quad (47)$$

Cada partícula do fluido viaja com uma velocidade constante e com a mesma distância do centro ao longo de todo o canal. Dizemos que essa variação de pressão sobre o comprimento do canal é menor que zero (gradiente de pressão). Logo, a força total atuando é igual a zero e, por isso, teremos que:

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} + G = 0 \rightarrow \mu \frac{d^2 u}{dy^2} = -G, \quad (48)$$

como estamos usando $u = 0$ se $y = \pm a$ como condições de fronteira (no-slip) e integrando, vemos que:

$$u = \frac{G}{2\mu}(a^2 - y^2), \quad (49)$$

e notamos que o perfil de velocidade é uma parábola como visto na figura 11. Logo, a massa do fluido passando pelo canal é dada por:

$$\int_{-a}^a \rho u dy = \frac{2G\rho a^3}{3\mu}. \quad (50)$$

Dito isso, construiremos um exemplo de um escoamento laminar em um canal bidimensional e veremos que o perfil de velocidade é como mostrado na figura 11. Para isso, usaremos dois aplicativos: *Gmsh* e *Fluent*.

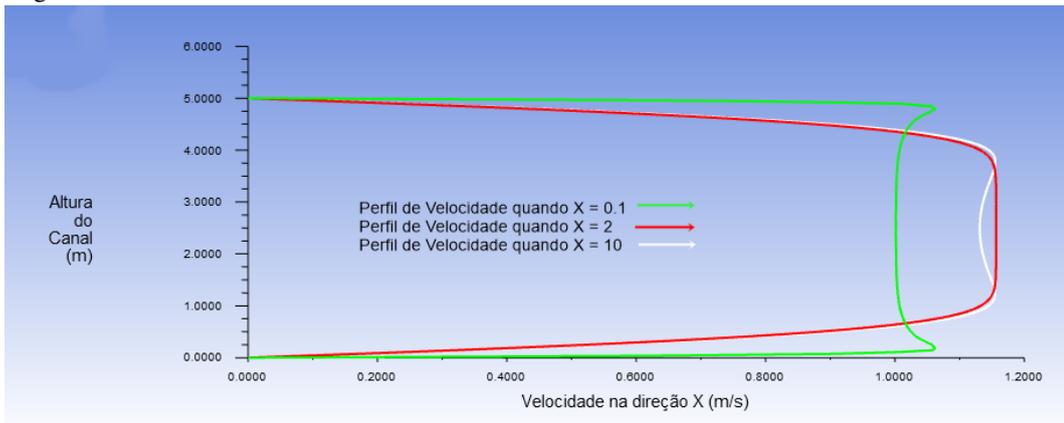
No *Gmsh*, criamos a geometria do canal e nomeamos as partes. A geometria será criada em duas dimensões. No *Fluent*, definimos as condições da simulação, como condições

de contorno, entrada e saída do fluido, tipo e velocidade do fluido, entre outros. As condições utilizadas foram:

- As medidas do canal são $20m$ de comprimento e $5m$ de altura;
- A velocidade de entrada do fluido é de $1m/s$;
- Condições de contorno de não-deslizamento (no-slip) nas bordas superior e inferior.

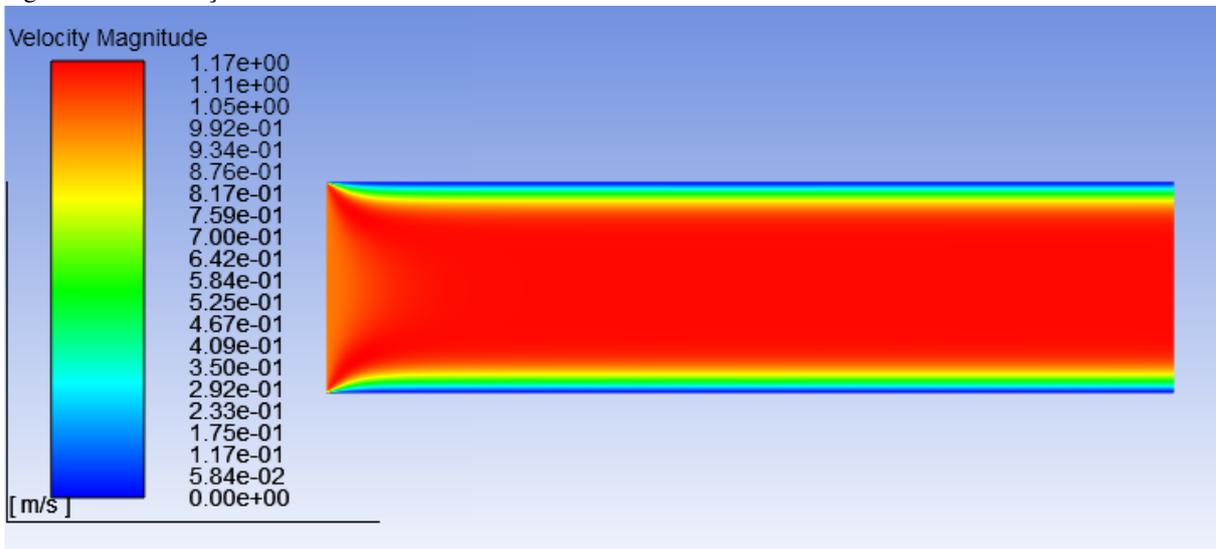
A partir disso, obtivemos o perfil de velocidade mostrado na figura 12:

Figura 12 – Perfil de velocidade



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 13 – Simulação no *Fluent*

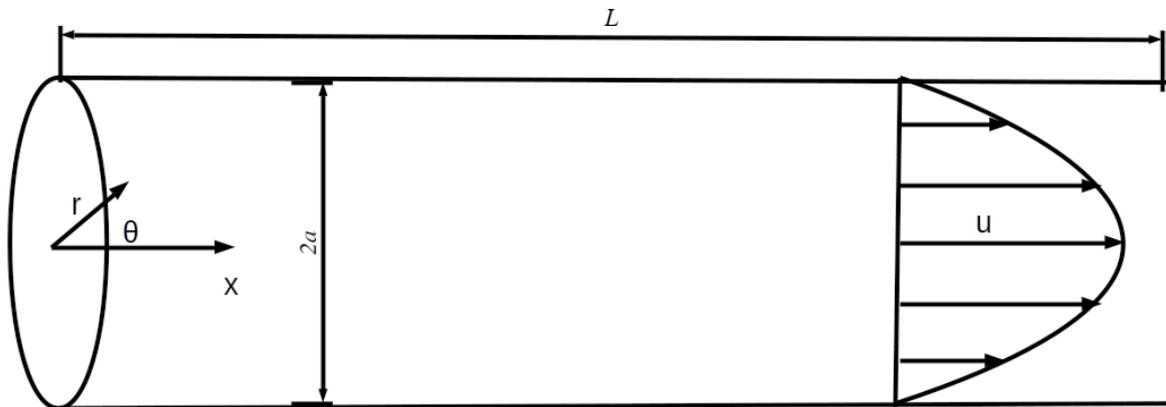


Fonte: elaborado pelo autor.

2.11 Escoamento laminar em um tubo

Agora, veremos algumas características do escoamento em um tubo de um fluido incompressível e newtoniano, baseadas em exemplos comuns na literatura como em Kundu e Cohen (2002) e Granger (1995). Dados um tubo de raio a e um escoamento laminar totalmente desenvolvido, usam-se coordenadas cilíndricas (r, θ, x) , sendo o eixo x a direção que se dá ao escoamento, tendo somente componente de velocidade u na direção de x diferente de zero, e nenhuma das variáveis do escoamento dependendo de θ . Usando coordenadas cilíndricas e a equação reduzida de Navier-Stokes, chegam-se em duas equações importantes:

Figura 14 – Esquema do fluxo em um tubo



Fonte: elaborado pelo autor.

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r}, \quad (51)$$

que é a equação radial de movimento, e também mostrando que p está somente em função de x .

Logo, a equação reduzida de Navier-Stokes é:

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right). \quad (52)$$

Da equação acima, vê-se que ela depende de x e r . Logo, os dois termos da equação são constantes e, com isso, vê-se que a pressão decresce de forma linear de acordo com o tamanho do tubo. Integrando a equação duas vezes, teremos:

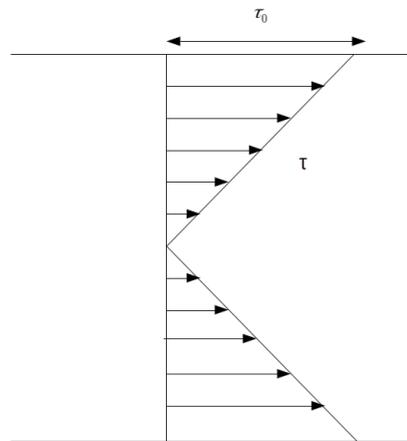
$$u = \frac{r^2}{4\mu} \frac{dp}{dx} + M \ln r + N, \quad (53)$$

assim, tem-se que $M = 0$, pois u é limitado em $r = 0$. Já nas paredes, teremos $r = a$ e $u = 0$, além de $N = -\frac{a^2}{4\mu} \frac{dp}{dx}$ e, com isso, nota-se que o perfil de velocidade tem a forma de parábola, como visto na figura 14. Então, u será:

$$u = \frac{r^2 - a^2}{4\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (54)$$

Para a tensão de cisalhamento, a equação é:

Figura 15 – Cisalhamento



Fonte: elaborado pelo autor.

$$\tau_{xr} = \mu \left[\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right]. \quad (55)$$

Como a velocidade radial é igual a zero, a equação anterior ficará da seguinte forma:

$$\tau = \mu \frac{du}{dr} = \frac{r}{2} \frac{dp}{dx}. \quad (56)$$

Dessa forma, vê-se que a distribuição da tensão é linear, onde o valor máximo da tensão é nas paredes:

$$\tau_0 = \frac{a}{2} \frac{dp}{dx}. \quad (57)$$

A taxa de volume do fluxo é dada pela Lei de Poiseuille, que é resultado da seguinte integral:

$$Q = \int_0^a u 2\pi r dr = - \frac{\pi a^4}{8\mu} \frac{dp}{dx}, \quad (58)$$

e a velocidade média da seção transversal é:

$$v \equiv \frac{Q}{\pi a^2} = - \frac{a^2}{8\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (59)$$

Aqui, encontra-se um resultado de grande importância para o escoamento de fluidos com aplicação em vários ramos da ciências. Trata-se da relação de Hagen-Poiseuille, que relaciona a diferença de pressão com o raio do tubo. Verifica-se que, com uma pequena variação no raio do tubo, é estabelecida uma grande variação na pressão, pois essa depende com a quarta potência sobre o raio. Esse resultado tem grande importância com relação à circulação sanguínea, pois possui uma relação direta com os vários acidentes vasculares que ocorrem nos seres vivos com circulação de sangue. Por conta da redução do raio das artérias e veias, que se estabelece por meio do acúmulo de gorduras, ocorre um acentuado aumento na pressão no interior dessas, fato que, corriqueiramente, acarreta no seu rompimento.

3 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA E METODOLOGIA UTILIZADA

Neste capítulo, descreveremos o problema analisado, e a motivação. Também descreveremos os passos seguidos durante o processo de modelagem, programas utilizados e algoritmos usados para obtenção dos dados.

3.1 Descrição do problema

Os estudos sobre como funciona o escoamento de um fluido em meios porosos têm muitas aplicações em várias áreas da tecnologia. Esses estudos têm como finalidade o entendimento do sistema analisado para obtenção de dados e resultados que melhorem o desenvolvimento de técnicas que visam o controle e a automação de vários processos nos campos de engenharias, química, geologia e outras áreas, como podemos ver em Vilanova (2011):

O desenvolvimento tecnológico só é possível pelo conhecimento das leis que governam os processos e pelo controle e supervisão dos mesmos. O domínio sobre esses conhecimentos possibilitou a automação de uma infinidade de processos industriais essenciais, como os utilizados na indústria petroquímica e de alimentos. Nesses processos, óleos, vapores, outros gases e líquidos fluindo ou em repouso, em sistemas ou subsistemas dessas indústrias, precisam ser monitorados, os dados verificados e interpretados, para que os controles automáticos façam as devidas correções e o produto final esteja sempre dentro das especificações de qualidade.

Existem várias formas de se analisar problemas de escoamento. Alguns estudos estão focados em apenas uma geometria específica e em como o escoamento se comporta nessa geometria. Neste caso, normalmente não existe um aspecto de aleatoriedade na geometria do meio que justifique a utilização de várias amostras para confirmar as propriedades relacionadas a essa geometria. Outros, tentam estudar de forma mais analítica e geral problemas envolvendo escoamento. Como exemplo de trabalhos, podemos citar Lofrano (2018). Também temos o trabalho de PeÇanha (2014).

Em contrapartida, neste trabalho, buscamos obter mecanismos para criar e analisar numericamente várias geometrias de meios porosos, a fim de adquirir dados e analisarmos a estatística deles. Devido ao aspecto aleatório do meio poroso estudado, utilizar várias amostras é imprescindível para se procurar estabelecer as propriedades que emergem por causa desta propriedade do meio.

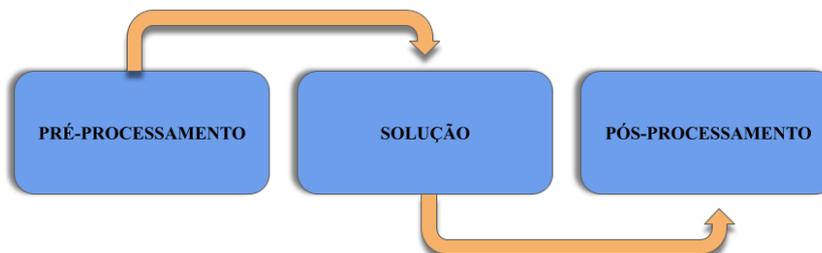
Logo, podemos descrever nosso problema como sendo um escoamento de um fluido incompressível, a temperatura constante e estacionário através de um meio poroso desordenado. Verificamos as seguintes situações distintas para este escoamento:

- Considerando o escoamento de um fluido Newtoniano através de um meio poroso desordenado, investigamos como se comporta a distribuição de fluxo no interior da estrutura porosa em função do número de Reynolds;
- Considerando o escoamento de um fluido Não Newtoniano através de um meio poroso desordenado, investigamos como a distribuição de fluxo no interior da estrutura porosa difere do caso Newtoniano.

3.2 Metodologia

Esta seção será dedicada a explicar como foram realizadas as etapas da simulação. Veremos os aplicativos e processos necessários para a obtenção dos resultados. Os passos básicos estão detalhados no fluxograma abaixo.

Figura 16 – Fluxograma da metodologia



Fonte: elaborado pelo autor.

- Pré-Processamento: Nessa fase, descrevemos o modelo matemático, a geometria e a malha do problema.
- Solução: Nessa fase, solucionamos as equações que governam o escoamento.
- Pós-Processamento: Nessa fase, é feita a análise dos resultados obtidos.

Foi gerado um total de 80 amostras de meios porosos, sendo 20 para cada tipo de porosidade ε (0.6; 0.7; 0.8; 0.9). Os Re testados foram $1e-3$, $1e-2$, $1e-1$, 1, $1e1$, $1e2$ e $1e3$.

3.3 Método de volumes finitos FVM

O Método de Volumes Finitos (sigla em inglês FVM) consiste na divisão do domínio de integração das equações em volumes de controle, que podemos chamar de células. Cada

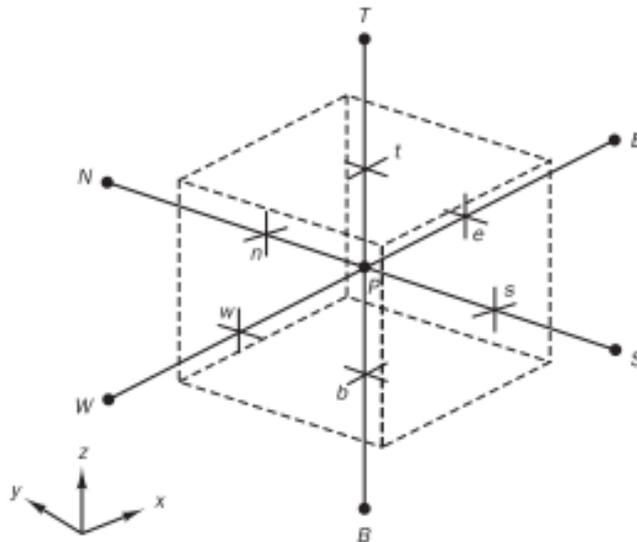
célula tem um ponto de controle, em seu centro, que é chamado de nó ou, também, ponto nodal. Esse método tem grande uso no que tange a solução de EDP (equações diferenciais parciais) em diversas áreas do conhecimento, que vão desde as engenharias até a área da saúde. Como principais obras que discorrem sobre o tema, podemos citar Patankar (1980) (uma das mais referenciadas no que diz respeito a FVM) e Versteeg e Malalasekera (1995). Esse é o método usado pelo pacote comercial *Fluent*.

Segundo Versteeg e Malalasekera (1995), seguimos três passos para resolver as equações utilizando FVM:

3.3.1 1º passo: geração da malha

O primeiro passo consiste na divisão do domínio em volumes controles. Nesse caso, temos um domínio tridimensional. Entretanto, o processo é análogo para bidimensional e unidimensional.

Figura 17 – Célula em três dimensões e seus respectivos nós vizinhos



Fonte: Versteeg e Malalasekera (1995).

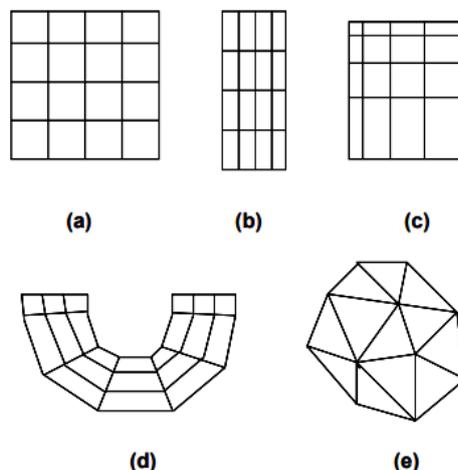
Como podemos observar na figura 17, geramos um volume de controle com um nó P em seu centro. Identificamos os nós a oeste W , a leste E , a norte N , a sul S , em cima T e embaixo B . Também, podemos ver as faces dos volumes vizinhos como w , e , n , s , t e b de acordo com o nomeado. As distâncias entre os nós são $\delta_{x_{WP}}$ (que é distância entre W e P), $\delta_{x_{PE}}$ (distância entre P e E), $\delta_{y_{SP}}$ (distância entre S e P), $\delta_{y_{PN}}$ (distância entre P e N), $\delta_{z_{BP}}$ (distância entre B e P) e $\delta_{x_{PT}}$ (distância entre P e T).

3.3.1.1 Malha

Inicialmente, foi escolhido o aplicativo *Gmsh* para criação da geometria e da malha. Essa escolha tem como base a praticidade e gratuidade do *Gmsh*. Utilizando o *Gmsh* junto com a linguagem *python*, criamos um algoritmo que gera a geometria do meio poroso aleatoriamente de acordo com condições pré-estabelecidas, como, por exemplo, porosidade, raio dos obstáculos, altura e largura da seção. Este algoritmo, define a sequência dos passos a serem seguidos quanto a criação e alocação dos obstáculos de forma aleatória no interior de uma caixa de simulação até o meio atingir a porosidade desejada. Este código também, define toda a geometria do meio poroso e cria um arquivo com os comandos a serem executados no programa *Gmsh*, que estabelece a criação da geometria de forma prática e a geração da malha computacional no interior da amostra.

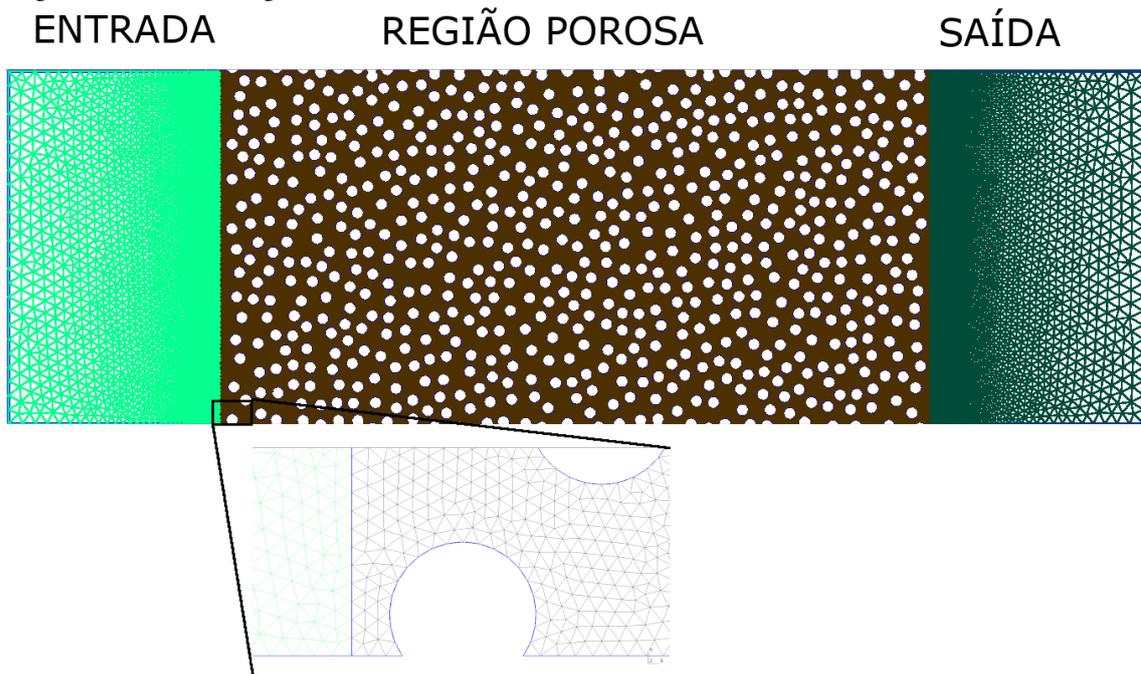
A malha é a divisão da geometria em vários volumes onde serão resolvidas as equações pelo solver. Quanto maior for a divisão, menor será o erro gerado pelo solver. Aumentar a resolução da malha implica em maior tempo computacional. Encontrar um meio termo entre uma solução adequada e um tempo computacional aceitável na busca por uma solução, é uma tarefa árdua que exige muita paciência e testes. Para obtermos melhores resultados no que diz respeito à convergência, é necessário um refinamento na malha nas regiões onde o gradiente da propriedade estudada é alto (no nosso caso, as regiões onde existe um aumento da velocidade). A malha pode ser do tipo estruturada ou não-estruturada, como mostra a figura 18.

Figura 18 – Tipos de malha segundo Espinha (2005): (a) grade cartesiana ou uniforme, (b) grade regular, (c) grade retilínea, (d) malha estruturada, (e) malha não-estruturada de tetraedros.



Fonte: Espinha (2005)

Figura 19 – Malha e regiões.



Fonte: elaborado pelo autor.

Nesse trabalho, o meio poroso estudado foi dividido em três regiões: entrada, região porosa e saída, conforme podemos observar na figura 19. As regiões de entrada e saída são utilizadas como regiões auxiliares para um melhor desempenho na busca da solução. Estas evitam efeitos de tamanhos finitos nas amostras. Na região porosa o refinamento da malha é bem mais intenso devido a presença de elevados valores nos gradientes da velocidade. Este aspecto dificulta atingir a acuracidade desejada na solução. Todas as regiões foram compostas por malha não-estruturada de triângulos, devido à facilidade em programar e ser padrão no *Gmsh*.

3.3.2 2º passo: discretização

Nesse estágio, integramos as equações que governam o volume de controle para, assim, obtermos uma forma discreta da equação no nó P . A equação que queremos discretizar pode ser obtida através da equação geral de transporte, que é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho\phi\vec{u}) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) + S_\phi, \quad (60)$$

onde:

- ϕ é a grandeza transportada (escalar ou vetorial);
- S_ϕ é a soma dos termos de geração com outros termos que constam na equação original;

- Γ é o termo de difusão;
- \vec{u} é a velocidade;
- ρ é a densidade.

Para exemplificar, discretizaremos uma equação de um problema difusivo em estado estacionário genérico em três dimensões. Nesse caso, a equação será:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) + S_\phi, \quad (61)$$

que pode ser vista como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S_\phi = 0, \quad (62)$$

integrando (62), teremos:

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy dz + \int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy dz + \int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dx dy dz + \int_{\Delta V} S_\phi dV = 0. \quad (63)$$

O resultado da integração é:

$$\left[\left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] + \left[\left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] + \left[\left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_t - \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_b \right] + \bar{S} \Delta V = 0, \quad (64)$$

onde A é a seção transversal da face do volume de controle, ΔV é o volume e \bar{S} é o valor médio de S sobre o volume de controle. Como visto em Versteeg e Malalasekera (1995), S pode ser função da variável dependente, então:

$$\bar{S} \Delta V = S_u + S_p \phi_P \quad (65)$$

Temos que ressaltar que precisamos das derivadas parciais de primeira ordem em relação a x , y e z e, nesse caso, aproximamos essas derivadas usando diferenciação central (VERSTEEG; MALALASEKERA, 1995)¹ nas faces e e w , n e s , t e b , respectivamente. Logo, podemos escrever que:

¹ Verificar pag. 117 e a partir da pag. 445

$$\begin{aligned} \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e &= \Gamma_e A_e \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\delta x_{PE}} \text{ e } \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w = \Gamma_w A_w \frac{(\phi_P - \phi_W)}{\delta x_{WP}} \\ \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n &= \Gamma_n A_n \frac{(\phi_N - \phi_P)}{\delta y_{PN}} \text{ e } \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s = \Gamma_s A_s \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\delta y_{SP}} \\ \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_t &= \Gamma_t A_t \frac{(\phi_T - \phi_P)}{\delta z_{PT}} \text{ e } \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_b = \Gamma_b A_b \frac{(\phi_P - \phi_B)}{\delta z_{BP}}. \end{aligned}$$

Então, teremos:

$$\begin{aligned} &\left[\Gamma_e A_e \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\delta x_{PE}} - \Gamma_w A_w \frac{(\phi_P - \phi_W)}{\delta x_{WP}} \right] + \left[\Gamma_n A_n \frac{(\phi_N - \phi_P)}{\delta y_{PN}} - \Gamma_s A_s \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\delta y_{SP}} \right] + \\ &\left[\Gamma_t A_t \frac{(\phi_T - \phi_P)}{\delta z_{PT}} - \Gamma_b A_b \frac{(\phi_P - \phi_B)}{\delta z_{BP}} \right] + S_u + S_p \phi_P. \end{aligned} \quad (66)$$

Reorganizando para melhorar a visualização, podemos ter a seguinte equação:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} + \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}} + \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}} + \frac{\Gamma_b A_b}{\delta z_{BP}} + \frac{\Gamma_t A_t}{\delta z_{PT}} - S_p \right) \phi_P = \\ &\left(\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} \right) \phi_W + \left(\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} \right) \phi_E + \left(\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}} \right) \phi_S + \left(\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}} \right) \phi_N + \left(\frac{\Gamma_b A_b}{\delta z_{BP}} \right) \phi_B + \left(\frac{\Gamma_t A_t}{\delta z_{PT}} \right) \phi_T + S_u. \end{aligned} \quad (67)$$

Mudando as variáveis, obteremos a equação discretizada:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + a_B \phi_B + a_T \phi_T + S_u, \quad (68)$$

onde:

$$\begin{aligned} a_W &= \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} \text{ e } a_E = \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} \\ a_S &= \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}} \text{ e } a_N = \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}} \\ a_B &= \frac{\Gamma_b A_b}{\delta z_{BP}} \text{ e } a_T = \frac{\Gamma_t A_t}{\delta z_{PT}} \end{aligned} \quad (69)$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T - S_P$$

3.3.3 3º passo: solução das equações

Nesse passo, resolvemos a equação (69) para cada um dos nossos nós. Existem diversas técnicas de resolução dessas equações, como podemos ver em Versteeg e Malalasekera (1995) e Patankar (1980).

3.4 Configuração do *Fluent*

Nessa fase, buscamos as soluções das equações que governam o escoamento. As configurações básicas no *Fluent* para um fluido Newtoniano estão dispostas nas tabelas abaixo. O método SIMPLE, descrito na tabela 3, pode ser visto em mais detalhes em Versteeg e Malalasekera (1995) e também em Patankar (1980). Para o fluido Não Newtoniano (Herschel–Bulkley) Reynolds, a configurações são as mesmas das tabelas abaixo.

Tabela 1 – Configuração do Solver na Simulação de Fluido Newtoniano.

Type	Density-based
Velocity Formulation	Absolute
Time	Stady
2D Space	Planar

Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela 2 – Configuração de Models na Simulação de Fluido Newtoniano.

Multiphase	off
Energy	off
Viscous	Laminar
Radiation	off
Heat Exchanger	off
Species	off
Discrete Phase	off
Solidification & Melting	off
Electric Potential	off

Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela 3 – Configuração do Solution Methods (Pressure-Velocity Coupling e Spatial Discretization) na Simulação de Fluido Newtoniano.

Scheme	SIMPLE
Gradient	Least Squares Cell Based
Pressure	Second Order
Momentum	Second Order Upwind

Fonte: elaborado pelo autor.

Podemos analisar a qualidade da solução encontrada através de alguns critérios, pois nem sempre

Tabela 4 – Configuração do Solution Controls (Under-Relaxation Factors) na Simulação de Fluido Newtoniano.

Pressure	0.3
Density	1
Body Forces	1
Momentum	0.7

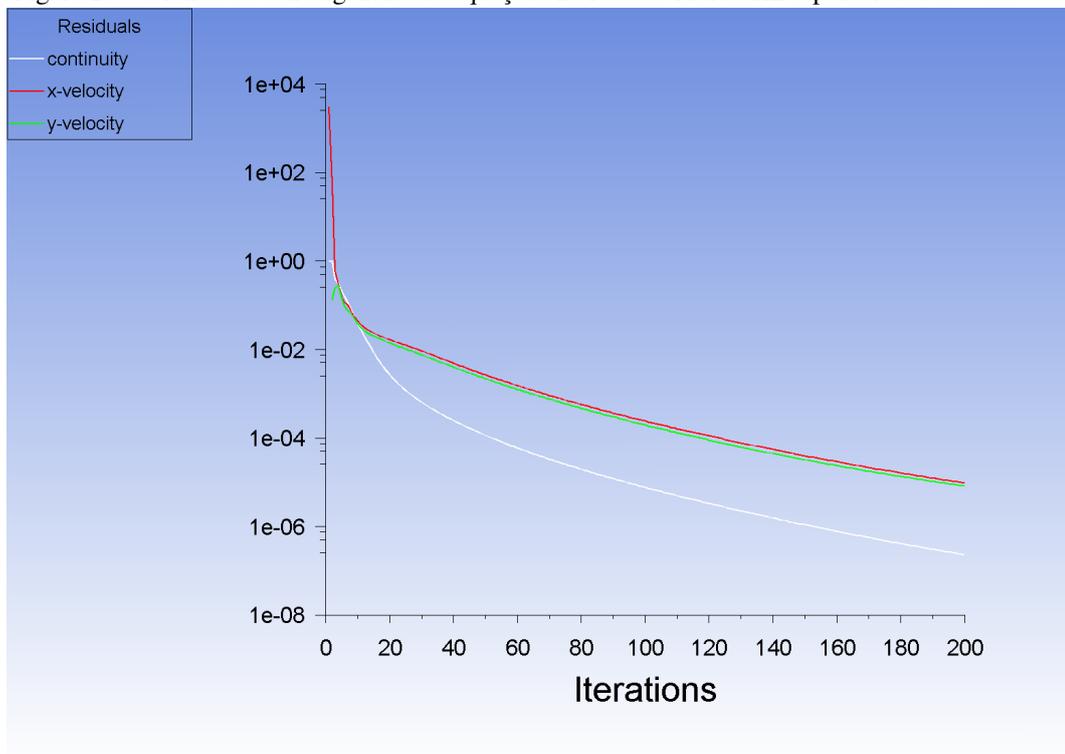
Fonte: elaborado pelo autor.

a resposta apresentada tem uma precisão satisfatória.

- Verificar se os modelos físicos estão adequados e precisos;
- Resolução de malha;
- Erros numéricos.

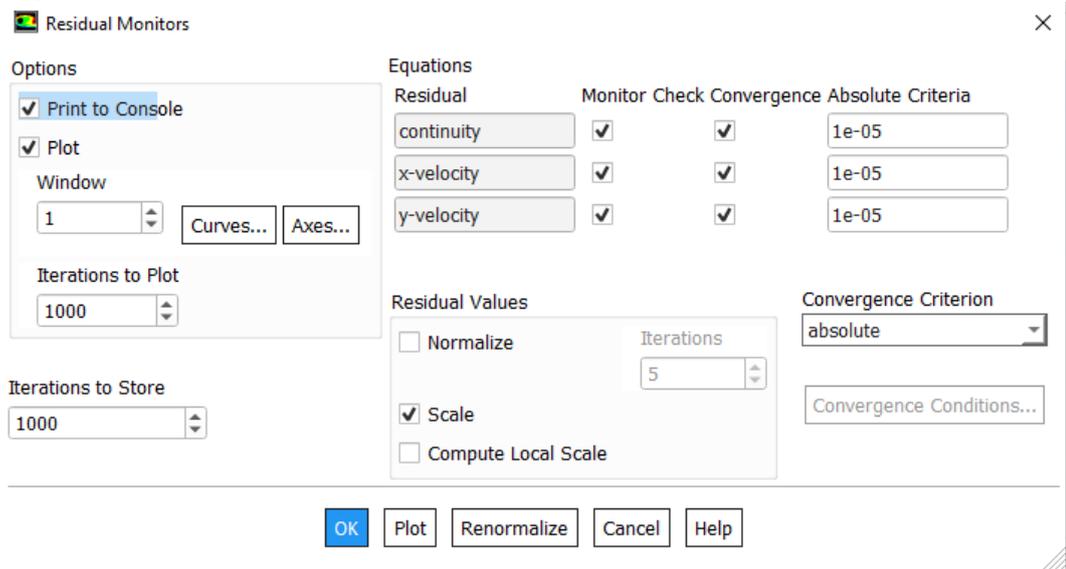
O *Fluent* dispõe de uma ferramenta para monitorarmos a convergência, chamada Residual Monitors. Com ela, podemos verificar o gráfico e verificar quando encontramos a solução para as equações de acordo com os critérios desejados, como podemos ver nas figuras 20 e 21. Estes critérios são de suma importância para que possamos atingir um nível de acuracidade em nossa solução. Normalmente uma boa solução não apresenta mudanças abruptas no valor da magnitude da velocidade. Estes critérios são normalmente almejados considerando uma convergência da ordem de 10^{-6} nas componentes das velocidades X e y e também na continuidade.

Figura 20 – Gráfico de convergência das equações no *Fluent*. Fluido HB e porosidade $\varepsilon = 0.6$



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 21 – Residuals Monitors.



Fonte: elaborado pelo autor.

4 ANÁLISE E RESULTADOS

Nesse capítulo, abordaremos os diferentes aspectos desse problema. Analisaremos escoamentos de fluidos em estruturas desordenadas considerando diferentes regimes de escoamento, baixo e alto Reynolds. Também trataremos, aqui, o escoamento de fluidos com reologias distintas das que normalmente encontramos nos fluidos caracterizados como Newtonianos.

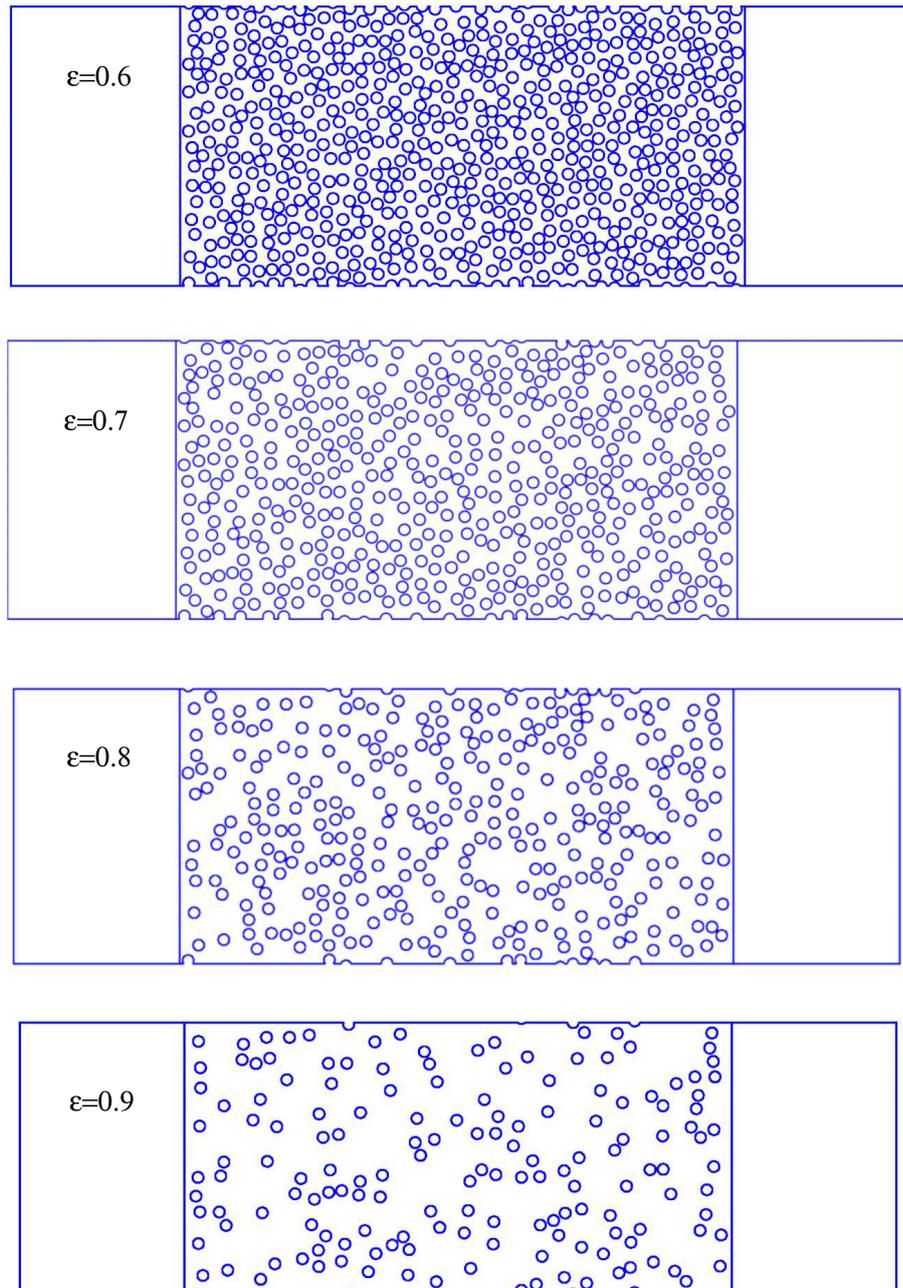
4.1 Modelo

Iniciamos a apresentação do modelo pela caracterização da geometria do meio poroso. Para construção do meio poroso, nós consideramos um caso particular do modelo de (RSA) *random sequential adsorption* (TORQUATO, 2002) em duas dimensões. Neste modelo, o meio poroso é construído a partir da alocação aleatória de obstáculos circulares em uma caixa retangular de dimensões $L_x = 100$ e $L_y = 50$ e D é o diâmetro dos discos. Existem, também, áreas auxiliares de entrada e saída, como pode ser visto na figura 19. As posições para os centros dos discos são obtidas a partir de uma distribuição homogênea entre $D/2$ e $L_x - D/2$ para coordenada x , e $D/2$ e $L_y - D/2$ para coordenada y . Se o disco alocado em uma determinada posição é separado por uma distância menor do que $D/10$ ou coincida com algum outro disco já alocado, a alocação desse disco é rejeitada, e uma outra tentativa é feita. Esse processo de alocação dos discos persiste até que a região porosa atinja uma porosidade ε (fração de espaços vazios por onde o fluido pode penetrar) de interesse. Procedendo desta forma, podemos construir meios porosos com uma controlada porosidade, dentro de um erro bem pequeno. A garantia de uma menor distância entre dois discos se faz necessária para que possamos permitir o escoamento do fluido através da estrutura porosa, evitando, neste caso, o bloqueio do escoamento, uma vez que estamos interessados em estudar como o escoamento ocorre no interior da estrutura de poros.

Para efeito de simulações numéricas, a parte do meio poroso é complementada por duas outras regiões extras na entrada e na saída, estabelecendo, assim, a caixa de simulação. Ambas as regiões auxiliares têm como efeito prático evitar os efeitos de bordas que são indesejáveis por conta do tamanho finito da amostra e auxiliar na obtenção da solução numérica para o escoamento. Na figura 22, mostramos as diferentes amostras dos meios porosos obtidos considerando as diferentes porosidades ε investigadas.

A porosidade do meio é definida por meio da fração de espaços vazios da região

Figura 22 – Os meios porosos obtidos pela alocação de obstáculos circulares de diâmetro D . Cada meio poroso corresponde a um valor de porosidade. De cima para baixo, temos $\varepsilon = 0.6, 0.7, 0.8$ e 0.9 . Devido ao aumento da porosidade, a região porosa (parte central da caixa de simulação) vai ficando cada vez mais diluída com as aberturas dos canais maiores. Esta diluição gera um efeito sobre a distribuição de largura dos canais e também sobre o escoamento. As linhas laterais, que definem a área da região porosa, são utilizadas para o cálculo da diferença de pressão entre as extremidades do meio poroso.



Fonte: elaborado pelo autor.

porosa na seguinte forma:

$$\varepsilon = \frac{V_v}{V_t} \quad (70)$$

onde V_v é o volume dos espaços vazios, e V_t é o volume total da região definida como sendo a região porosa. Como estamos tratando com um meio poroso bidimensional, entende-se por volumes (3d) como sendo áreas em (2d). Nesse caso, $V_t = L_x L_y$, e o volume vazio é determinado como

$$V_v = V_t - V_o \quad (71)$$

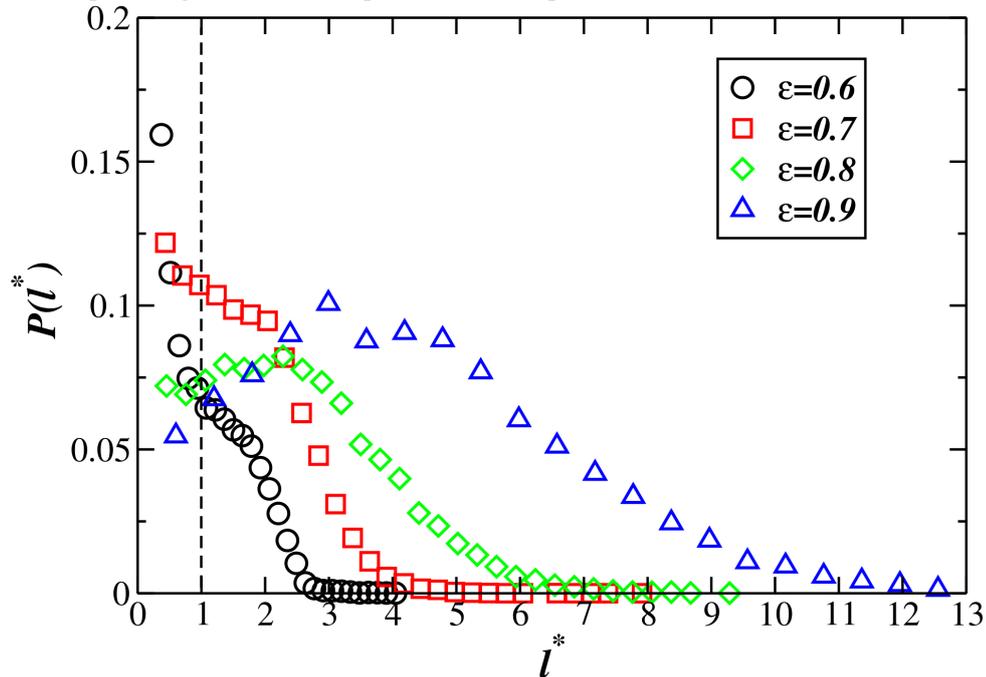
onde V_o é volume ocupado pelos obstáculos circulares ou volume da matriz sólida. Para o caso de obstáculos circulares, temos que $V_o = N\pi(D/2)^2$, sendo $\pi(D/2)^2$ a área correspondente a um disco de diâmetro D . Nesse caso, a porosidade do meio é definida por meio da seguinte expressão:

$$\varepsilon = \frac{V_v}{V_t} \Rightarrow \varepsilon = \frac{V_t - V_o}{V_t} \Rightarrow \varepsilon = 1 - \left[\frac{N\pi(D/2)^2}{V_t} \right]. \quad (72)$$

Vale salientar que, durante o processo de alocação dos discos, para evitar a formação de canais nas extremidades superiores e inferiores da caixa de simulação, foi permitida a alocação de apenas parte do disco, quando a posição para o centro do disco é escolhida em uma região próxima da borda do meio poroso, conforme podemos observar na figura 22. Quando isso ocorre, a parte do disco que fica no interior da região do meio poroso é preservada, e a parte da área complementar do disco que fica fora da região delimitada pelo meio poroso é deslocada e alocada em uma posição L_y para cima ou para baixo. O deslocamento de parte da área, para cima ou para baixo, depende de se esse disco está sendo alocado próximo ao limite inferior ou superior da caixa, respectivamente. Esse procedimento foi adotado para evitar a formação de canais preferenciais nas bordas do meio poroso, típico de meios porosos regulares, e tornar o cálculo da porosidade mais prático e preciso.

Inicialmente, analisamos a geometria de nossa amostra porosa. Para tal, foi realizada uma construção de Voronoi sobre a rede formada pelos centros dos obstáculos circulares (AURENHAMMER *et al.*, 2013). Com base nessa rede de ligações entre os centros dos discos, foi possível definir a vizinhança de cada disco. Se dois discos estão conectados por meio de ligações que compõem a rede de Voronoi formada, esses dois discos são vizinhos. Essa rede de conexões entre os discos estabelece os canais dentro do meio poroso por onde o fluido pode escoar, à medida que um fluido é forçado a passar através desse meio poroso como um todo.

Figura 23 – Distribuição de larguras de canais normalizados $l^* = l/D$ para diferentes valores da porosidade dos meios porosos gerados. A linha pontilhada corresponde ao tamanho $l^* = 1$.



Fonte: elaborado pelo autor.

A medida da largura dos canais l é definida como sendo a distância entre os centros dos discos, subtraindo o valor do diâmetro D do disco. Com base nessa definição, calculamos todas as larguras de canais para os meios porosos estudados e determinamos a distribuição $P(l^*)$ dessas larguras, onde $l^* = l/D$. O resultado é mostrado na figura 23 e está em concordância com resultados reportados na literatura (ARAÚJO *et al.*, 2006). Para o cálculo dessas distribuições, foram utilizadas 20 amostras correspondendo aos diferentes meios porosos, geradas de forma aleatória, para cada valor de porosidade $\varepsilon = 0.6, 0.7, 0.8$ e 0.9 . Claramente, as distribuições apresentam dois regimes. O primeiro regime se estabelece para valores grandes da distância l^* , onde a distribuição apresenta um decaimento aproximadamente exponencial com l^* . À medida em que a porosidade cresce, esse decaimento fica mais suave. Isso ocorre devido ao aumento do espaçamento entre os discos que se caracterizam com valores mais elevados da porosidade. Nesse caso, a presença de canais mais largos fica mais evidente, e a curva decai de forma mais lenta, tipo Gaussiana, estendendo a distribuição na direção de valores elevados de l^* . Para valores baixos da porosidade $\varepsilon = 0.6$ e 0.7 , a existência de canais mais estreitos é uma realidade, o que fica evidente no decaimento mais acentuado tipo exponencial da distribuição $P(l^*)$, para valores elevados de l^* . Olhando agora as distribuições $P(l^*)$ na direção de pequenos valores de l^* , podemos constatar a presença de um comportamento que depende fortemente do valor da

porosidade. A distribuição $P(l^*)$ apresenta um crescimento bem acentuado para valores baixo da porosidade, casos 0.6 e 0.7.

A forma dessas distribuições pode ser facilmente entendida com base no argumento a seguir. Para valores elevados da porosidade, o sistema é bem diluído, e as distâncias entre os obstáculos é não correlacionada, processo completamente aleatório. Nesse caso particular, a distribuição apresenta um comportamento Gaussiano com um pico entorno do valor médio das distâncias entre os obstáculos. Já para o caso de baixas porosidades, existe uma correlação nos valores das distâncias, pois o processo de alocação dos obstáculos é extremamente afetado pelo fator ocupação (volume excluído). Existe uma procura por espaços vazios para alocar um novo obstáculo, e o processo perde o seu aspecto puramente aleatório. Isso justifica o surgimento de uma distribuição com uma calda exponencial na direção de valores elevados das distâncias entre os obstáculos.

4.2 Cálculo do escoamento

Uma vez definida a estrutura geométrica para o meio poroso, passamos para a fase da análise do escoamento. Nessa etapa, é necessário estabelecer as equações que governam o escoamento, além de definir em que regime esse escoamento ocorre. Inicialmente, assumimos um escoamento com um fluido Newtoniano, incompressível e de estado estacionário, ou seja, não há variações do escoamento em relação ao tempo. Nessas condições, as equações que governam o escoamento são: equação de Navier-Stokes e equação da continuidade, que podem ser expressas na seguinte forma,

$$\rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (73)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (74)$$

onde \vec{u} e p são os campos de velocidade e pressão, respectivamente. O parâmetro ρ é a densidade do fluido, e μ , a sua viscosidade. O aspecto não-linear dessa equação, devido à presença do termo $(\rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u})$, introduz uma grande dificuldade na busca por uma solução analítica. Adicionado a essa característica, o aspecto aleatório da geometria aumenta ainda mais o grau de complexidade da solução a ser obtida para os campos de velocidade e pressão. Para contornar essa dificuldade,

é necessário utilizar métodos numéricos para resolver as equações para o escoamento e obter os campos de velocidade e pressão. Isso é possível por meio da utilização de softwares dedicados a problemas CFD (dinâmica de fluidos computacionais), tais como, o *Fluent* e *OpenFoam* (ANSYS INC, 2020). Por meio desses pacotes computacionais, amplamente difundidos em CFD, conseguimos obter a solução para o escoamento em geometrias e condições de contorno diversas.

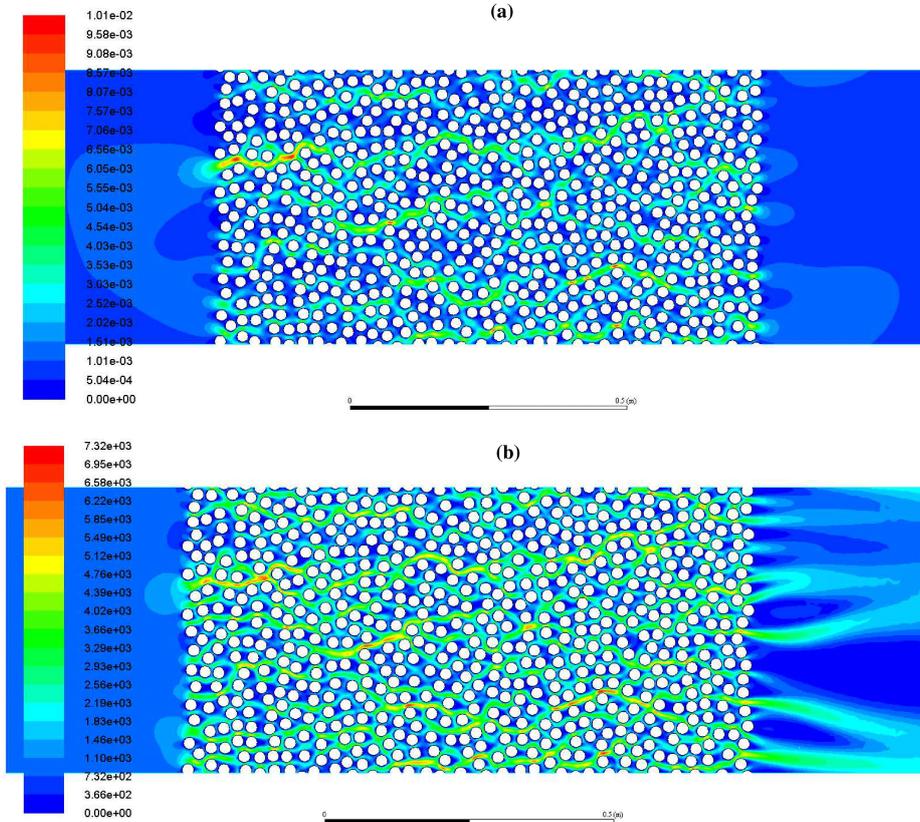
No presente estudo, utilizamos o *Fluent* como ferramenta computacional. Trata-se de um pacote comercial com várias bibliotecas computacionais disponíveis que permitem, com base em uma geometria e condições de contornos bem definidas, a obtenção dos campos de velocidade e pressão no interior do meio poroso.

Nesse trabalho, condições de contorno de não deslizamento são aplicadas ao longo de todas as interfaces sólido-fluido, e um perfil de velocidade do tipo $u_x(0, y) = V$ e $u_y(0, y) = 0$ é estabelecido na entrada do canal, assumindo, nesse caso, uma condição de fluxo constante para todas as simulações realizadas. Na saída do canal, estabelecemos pressão igual a zero. Para essa condição de contorno, o escoamento ocorre da esquerda para direita. Para efeito de simplicidade, assumimos, inicialmente, um fluido Newtoniano com densidade $\rho = 1$ e viscosidade $\mu = 1$. Para definir o regime de escoamento, laminar ou turbulento, existe um parâmetro adimensional denominado de número de Reynolds, definido na forma

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} \quad (75)$$

onde ρ é a densidade do fluido, e V a velocidade na entrada do canal. D é o diâmetro dos obstáculos (um tamanho característico do sistema), e μ é a viscosidade do fluido. O número de Reynolds estabelece uma razão entre as forças convectivas (numerador) e viscosas (denominador) presentes durante o processo de escoamento. Para baixo número de Reynolds $Re \sim 1$, quando as forças viscosas predominam, temos um escoamento laminar. Enquanto que, para altos número de Reynolds $Re \gg 1$, onde os efeitos convectivos são preponderantes, verificamos um regime de escoamento turbulento. Nesse trabalho, analisaremos o escoamento considerando vários números de Reynolds. Tendo em vista os parâmetros escolhidos para a densidade e viscosidade do fluido, o número de Reynolds é determinado a partir do valor da velocidade do escoamento V na entrada do canal. Nas figuras 24 e 25, mostramos os campos de velocidade e pressão, respectivamente, obtidos por meio da solução numérica das equações que determinam o escoamento considerando $V = 0.001$ (a) e $V = 1000$ (b).

Figura 24 – Campo de velocidade obtido para um meio poroso com porosidade $\varepsilon = 0.6$. Em (a), a velocidade na entrada do canal é $V = 0.001$ e, em (b), temos $V = 1000$, os quais correspondem aos números de Reynolds $Re = 0.001$ e $Re = 1000$, respectivamente. As cores em ambas as figuras representam a magnitude da velocidade em (m/s) e seguem os valores mostrados em suas respectivas barras de cores. Claramente, o aumento no número de Reynolds acentua os efeitos inerciais, como vistos na figura (b).

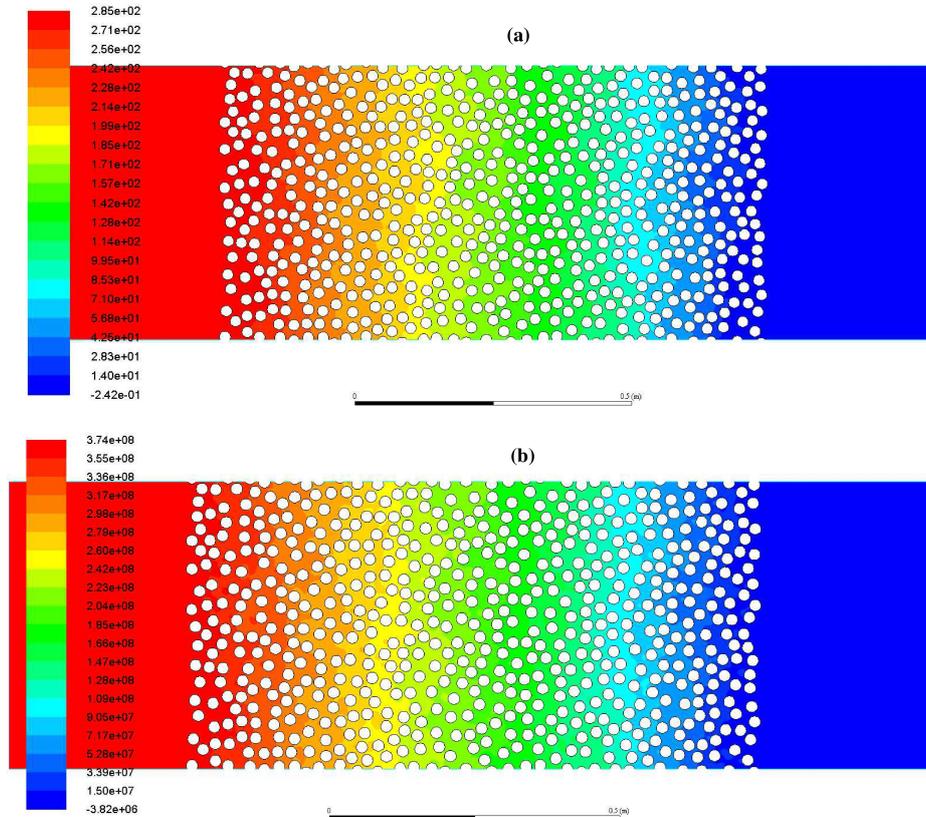


Fonte: elaborado pelo autor.

Podemos observar que os campos de velocidade apresentam um padrão bastante heterogêneo quanto à utilização dos canais no interior do meio. As magnitudes da velocidade são representadas em cores, indo de valores mais baixos (azul) até valores mais elevados (vermelho), conforme a tabela de cores. Com o aumento do Re , figura 24(b), ocorre um aumento nas regiões do meio que apresentam elevados valores para magnitude da velocidade. Os efeitos inerciais são mais relevantes, e regiões que apresentavam zonas estagnadas (baixíssimas velocidades) na figura 24(a) passam a contribuir mais com o escoamento. No caso das pressões, figura 25(a) e (b), a mudança se apresenta de forma mais sutil, embora, olhando os detalhes, possamos perceber pequenas modificações qualitativas. O mais marcante são as mudanças na escala de valores para a pressão.

Normalmente, a investigação do escoamento de um fluido através de um meio poroso, no regime de baixo Re , ocorre com base na lei de Darcy. A lei de Darcy (ADLER, 1992; DULLIEN, 1979) estabelece que o parâmetro macroscópico conhecido como permeabilidade

Figura 25 – Campo de pressão obtido para um meio poroso com porosidade $\varepsilon = 0.6$. Em (a), a velocidade na entrada do canal é $V = 0.001$ e, em (b), temos $V = 1000$, os quais correspondem aos números de Reynolds $Re = 0.001$ e $Re = 1000$, respectivamente. As cores em ambas as figuras representam a magnitude da pressão.



Fonte: elaborado pelo autor.

K está relacionado com a velocidade do fluido V através do meio poroso e com a diferença de pressão ΔP , medida entre as extremidades do meio poroso, conforme a relação

$$V = -\frac{K \Delta P}{\mu L}. \quad (76)$$

L é o comprimento da amostra porosa na direção do escoamento (direção Ox), e μ é a viscosidade do fluido. Existe um consenso de que a permeabilidade do meio reflete uma conexão entre a estrutura do meio poroso e o escoamento do fluido. Mais precisamente, relaciona-se na forma como as rede de canais se estabelecem no interior da amostra, e como os mecanismos de transferência de momento são considerados. Alguns trabalhos presentes na literatura (KOSTEK *et al.*, 1992; MARTYS *et al.*, 1994; ANDRADE *et al.*, 1995; KOPONEN *et al.*, 1997), baseados em simulações computacionais, utilizaram a estrutura de poros e o escoamento do fluido para predizerem valores para a permeabilidade do meio, com o objetivo de estabelecer correlações entre resultados obtidos por modelos e meios porosos reais.

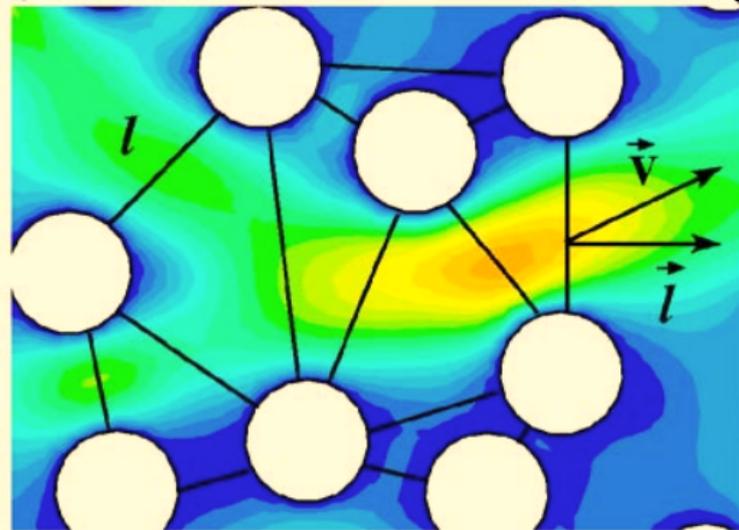
Quando o interesse reside na forma como o escoamento se estabelece no interior

da amostra, devemos procurar, em vez de grandezas macroscópicas, parâmetros locais para caracterizar o sistema. Nesse sentido, fixamos nossa análise na forma da distribuição de fluxos através dos canais do meio poroso.

Tendo determinado as condições de contorno do problema e os valores de velocidade na entrada e pressão na saída do meio poroso, utilizamos o resultado da solução numérica das equações 73 e 74 para o cálculo dos fluxos no interior do meio. O fluxo é obtido por meio dos valores da velocidade local no interior do canal e da largura dos canais utilizando a equação

$$\phi = \int \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (77)$$

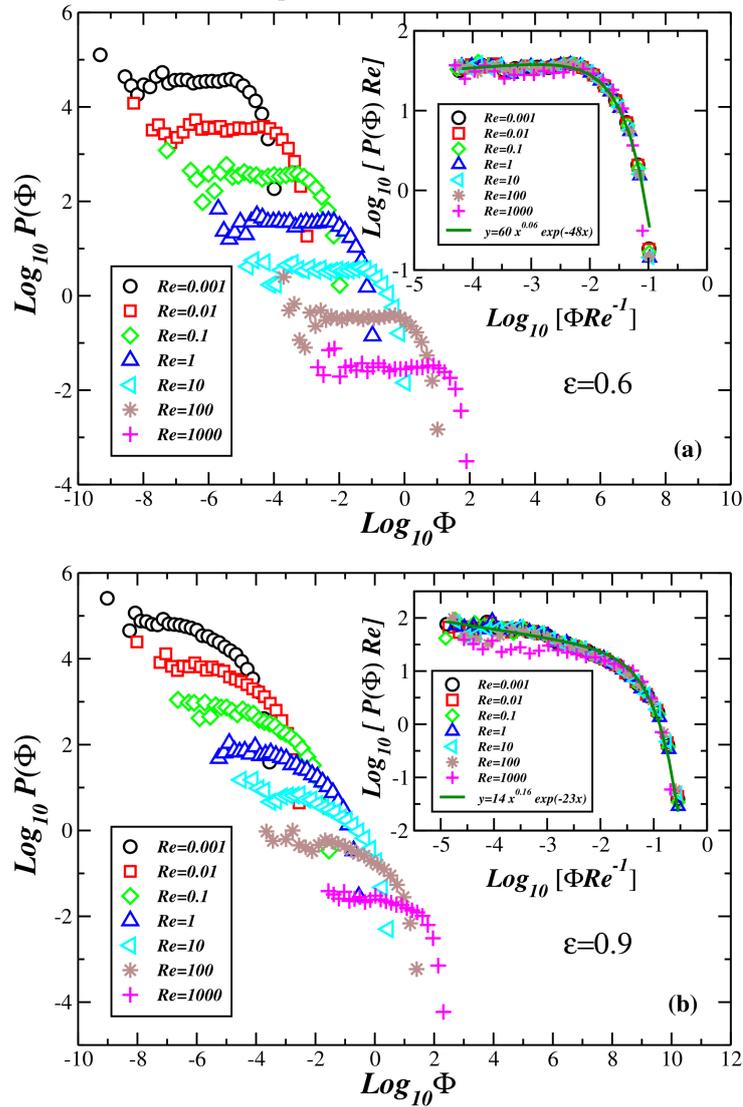
Figura 26 – Cálculo do Fluxo.



sendo \vec{v} o vetor velocidade cuja magnitude é calculada para cada canal, a partir de uma média sobre os valores do campo de velocidade \vec{u} ao longo da linha l que define a largura do canal. A direção do vetor $d\vec{l}$ é ortogonal à conexão entre os discos, definida com base na triangulação de Delaunay, e sua magnitude é igual à largura do canal l .

Na figura 27, mostramos a distribuição de fluxo normalizado $P(\Phi)$, onde $\Phi = \phi/\phi_0$ é o fluxo normalizado pelo fluxo total na entrada do canal $\phi_0 = L_y V$. No gráfico principal, temos as distribuições $P(\Phi)$ para diferentes números de Reynolds. No detalhe, mostramos as distribuições escalonadas pelo fator Re . Quando escalonadas pelo fator característico Re , essas curvas colapsam em uma curva única. Fica claro, a partir dessa figura, que $P(\Phi)$ apresenta um comportamento em lei de potência para valores intermediários de fluxo Φ para todos os valores de Re . Podemos observar, também, que essa região de escala (lei de potência) é seguida de um

Figura 27 – Gráfico em escala logarítmica da distribuição de fluxos normalizada $P(\Phi)$, onde $\Phi = \phi/\phi_0$ é fluxo normalizado pelo fluxo total na entrada do canal $\phi_0 = L_y V$. Com esse escalonamento, as curvas colapsam em uma única curva. A linha verde-sólida é o ajuste não-linear feito sobre as curvas, utilizando a função expressa pela equação 78 com os parâmetros em (a) $A_0 = 60$, $\alpha = 0.06$ e $A_1 = 48$ para $\varepsilon = 0.6$, e em (b) $A_0 = 14$, $\alpha = -0.16$ e $A_1 = 23$ para $\varepsilon = 0.9$.



Fonte: elaborado pelo autor.

cutoff súbito com decaimento na forma de uma função exponencial. Um comportamento similar foi observado por AraÚjo *et al.* (2006) para distribuição de fluxos em regime de baixo número de Reynolds. Como ajuste não linear para essas curvas, propomos a seguinte relação

$$P(\Phi) \sim A_0 \Phi^\alpha \exp(-A_1 \Phi) \quad (78)$$

onde A_0 é uma constante que determina a região de saturação para baixos fluxos, α é o expoente que controla a região de escala com comportamento em lei de potência, e A_1 , o comprimento característico da exponencial. A linha sólida em verde representa o ajuste com base na função proposta com os respectivos valores para os coeficientes. Comportamentos semelhantes, embora não mostrados, são observados para as demais porosidades estudadas $\varepsilon = 0.7$ e $\varepsilon = 0.8$. Pequenas modificações nos parâmetros do ajuste são esperados, mas sem perda da generalidade proposta pela curva de ajuste. O efeito da porosidade se estabelece apenas na região do comportamento em lei de potência com um aumento da inclinação.

4.3 Fluido não newtoniano

Os fluidos Não Newtonianos apresentam um comportamento bastante peculiar quando submetidos ao escoamento em um meio poroso. Diferente do caso Newtoniano, fluidos do tipo não newtoniano apresentam uma reologia com uma curva não linear, isto é, a viscosidade não é constante para uma dada pressão e temperatura. A equação constitutiva, ou seja, a relação entre a tensão de cisalhamento aplicada e a deformação do fluido, pode ser representada matematicamente na forma

$$\tau = \tau_0 + k\dot{\gamma}^n \quad (79)$$

onde τ é a tensão de cisalhamento, τ_0 é a tensão de cisalhamento limite que o fluido suporta até iniciar sua deformação, $\dot{\gamma}$ é taxa de deformação, k é o índice de consistência, e n é o índice de comportamento do fluido.

Caso a tensão de cisalhamento ($\tau < \tau_0$), o fluido do tipo Herschel-Bulkley (HB) se comporta como um sólido (fluido não deformável); caso contrário, ele se comporta como um fluido normal. Agora, se o parâmetro ($n < 1$), o fluido é (*shear thinning*) pseudoplástico, ou seja, sua viscosidade aparente decresce quando submetido a uma tensão de cisalhamento. Como exemplo de fluidos com essa característica, podemos citar o ketchup e o sangue (TAZRAEI *et al.*, 2015). No caso do parâmetro ($n > 1$), o fluido é (*shear thickening*) dilatante. Nesse caso, a

viscosidade aparente do fluido cresce com aplicação de tensão de cisalhamento. Nesse estudo, trataremos a condição onde o parâmetro n pode assumir os valores $n = 1, 0.8$ e 0.5 , ou seja, um fluido pseudoplástico. Não teremos exemplo de fluido dilatante ($n > 1$).

Exemplos desse fluido não ocorrem, normalmente, em materiais puros. O fluido com comportamento dilatante é mais comum em suspensões, como é o caso observado na areia da praia encharcada com água. Quando caminhamos na beira do mar, podemos observar que a areia seca aparece ao longo do contorno de nossas pegadas, enquanto que a parte molhada fica embaixo do nosso pé. Comportamento contrário, normalmente observado em outros materiais, tais como uma esponja encharcada com água. Quando pressionamos a esponja, ou qualquer outro material esponjoso, a água fica no contorno da região pressionada e a região que encontra-se sob pressão fica seca.

Para o caso do fluido do tipo Herschel-Bulkley, a viscosidade aparente μ_{eff} , no limite onde ($\dot{\gamma} \geq \dot{\gamma}_0$), pode ser expressa pela seguinte equação

$$\mu_{eff} = \tau_0 |\dot{\gamma}|^{-1} + k |\dot{\gamma}|^{n-1} \quad (80)$$

sendo $\dot{\gamma}$ e $\dot{\gamma}_0$, a taxa de deformação e o valor limite para a deformação, respectivamente. Esse tipo de comportamento observado para a viscosidade aparente contempla comportamentos observados em dois tipos distintos de fluidos: fluido de Bingham e fluido em lei de potência. Para baixa taxa de deformação, o fluido se comporta como se fosse um fluido muito viscoso (Bingham). Com o aumento da taxa de deformação e ultrapassado o limite para tensão de cisalhamento τ_0 , o fluido passa a ser descrito pela lei de potência.

Para esse cenário, a equação de Navie-Stokes passa a ser descrita na forma

$$\rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \nabla \cdot T \quad (81)$$

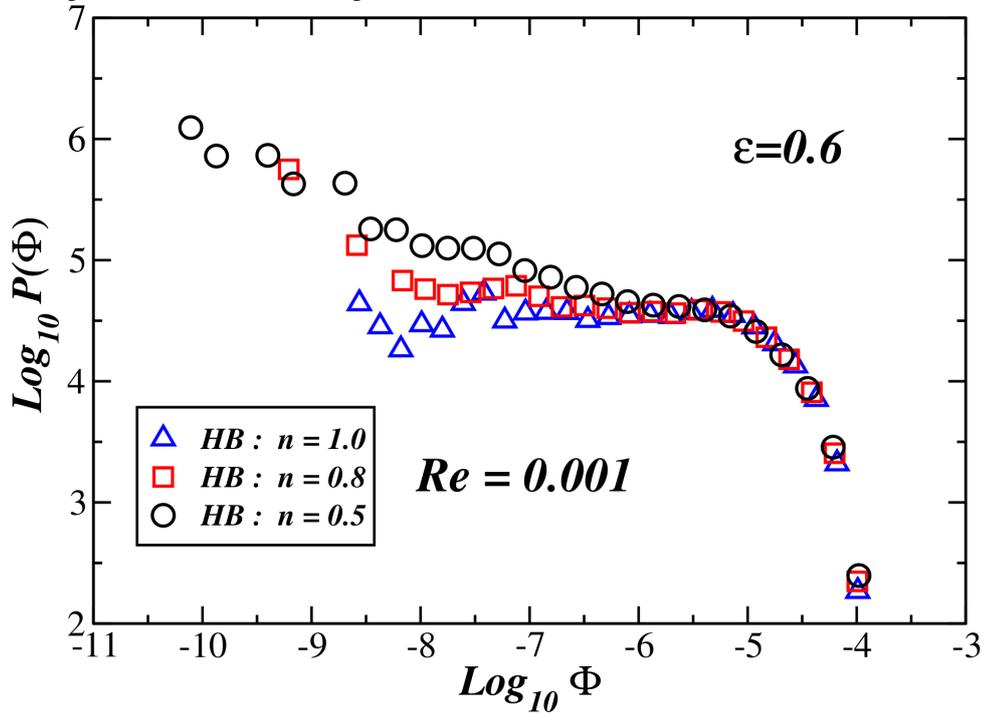
onde $T = 2\eta(\dot{\gamma})E$, $E_{ij} = 1/2(\partial_j u_i + \partial_i u_j)$ é o tensor da taxa de deformação, e a constante η é a viscosidade cinemática. A solução dessa equação e da continuidade, considerando as condições de contorno impostas inicialmente no problema, também são obtidas por meio de métodos numéricos através do pacote comercial *Fluent*.

Na figura 28, mostramos a típica distribuição de fluxos $P(\Phi)$ para o caso de um fluido HB com expoentes n diferentes. A distribuição apresenta uma mudança na região de baixos valores de fluxo. Esse comportamento pode ser explicado pela mudança do índice de comportamento do fluido n . Para um mesmo valor da tensão de cisalhamento, à medida que o parâmetro n decresce, o fluido fica menos viscoso, ou seja, mais fluido, e escoar com mais

facilidade. Na condição de baixo número de Reynolds, $Re = 0.001$, temos um escoamento que apresenta uma baixa tensão de cisalhamento em quase toda região de escoamento, com exceção de alguns canais preferenciais. Canais com velocidade de escoamento baixa também apresentam baixa tensão de cisalhamento. Conseqüentemente, a viscosidade aparente é mais alta nestas regiões, à medida em que o valor de n cresce. Quando $n = 0.5$, a viscosidade aparente torna-se menor, facilitando o escoamento em regiões estagnadas, comum em escoamentos para baixo Re . Essa contribuição eleva a presença de baixos fluxos na distribuição de $P(\Phi)$, conforme mostrado na curva correspondentes aos círculos pretos $n = 0.5$. Este efeito é, também, observado para o caso de outras porosidades, porém, com menos intensidade, à medida em que o valor da porosidade cresce. As regiões com escoamento estagnados são reduzidas com o aumento da porosidade.

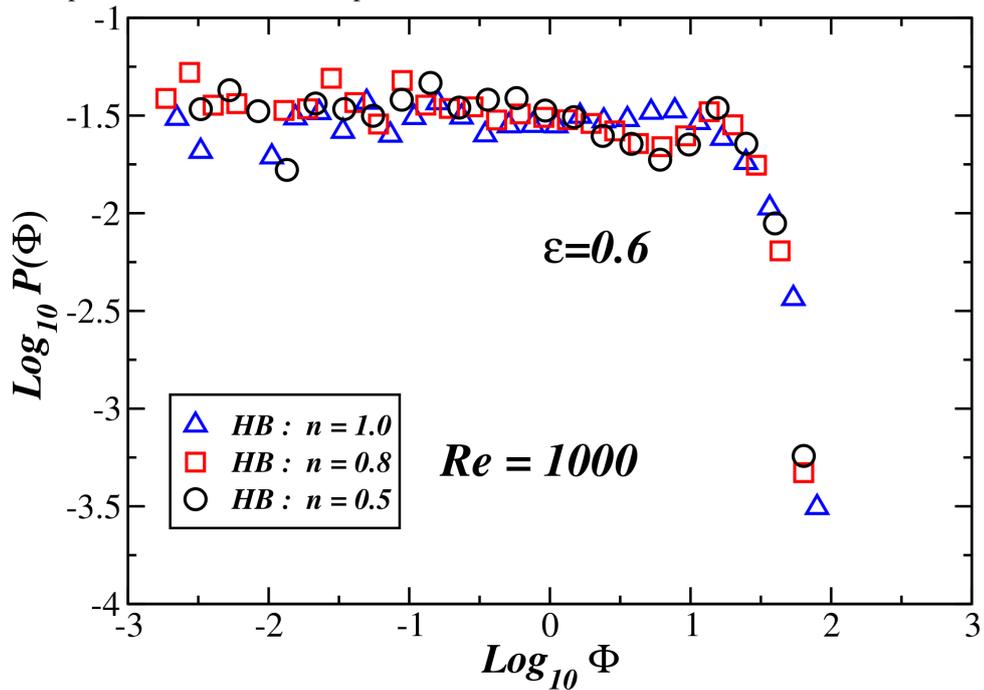
Quando aumentamos o Re , esse efeito passa a ser desprezível sobre a forma das distribuições de fluxo $P(\Phi)$, conforme mostrado na figura 29. Nesse caso, temos a predominância de tensão de cisalhamento elevada por quase todo o meio poroso onde ocorre o escoamento. As regiões consideradas estagnadas são bastante reduzidas na condição de elevados valores do número de Reynolds. Isso se deve ao aumento dos efeitos inercias para elevados Re , o que acaba por reduzir o efeito do índice de comportamento do fluido sobre a distribuição de fluxos.

Figura 28 – Gráfico em escala logarítmica da distribuição de fluxos normalizada $P(\Phi)$ para um fluido Não Newtoniano do tipo Herschel-Bulkley. Os símbolos correspondem aos diferentes valores do índice de comportamento do fluido n . A porosidade do meio, nesse caso, é $\varepsilon = 0.6$ e $Re = 0.001$.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 29 – Gráfico em escala logarítmica da distribuição de fluxos normalizada $P(\Phi)$ para um fluido Não Newtoniano do tipo Herschel-Bulkley. Os símbolos correspondem aos diferentes valores do índice de comportamento do fluido n . A porosidade do meio é $\varepsilon = 0.6$ e $Re = 1000$.



Fonte: elaborado pelo autor.

5 CONCLUSÃO

A presente pesquisa objetivou (1) verificar, no caso de um fluido Newtoniano, como se comportam as distribuições de fluxo no interior de uma estrutura porosa em função do número de Reynolds e (2) investigar, no caso de um fluido Não Newtoniano, como a distribuição de fluxo no interior da estrutura porosa difere do caso newtoniano.

Para isso, geramos vários meios porosos com quatro porosidades distintas (0,6; 0,7; 0,8; 0,9). Devido ao aspecto aleatório do meio poroso, uma análise acerca da distribuição de poros foi necessária. Neste contexto, realizamos uma análise estatística sobre as distribuições de larguras dos canais no interior do meio poroso como função da porosidade do meio. A partir dos resultados obtidos, ficou evidente que as distribuições de largura dos canais apresentou comportamento distinto que depende do valor da porosidade. Para valores da porosidade $\varepsilon = 0.8$ e 0.9 as distribuições seguem um padrão Gaussiano. Este comportamento estabelece a natureza aleatória do processo de criação da estrutura do meio. Já no caso, das porosidades $\varepsilon = 0.6$ e 0.7 a distribuição apresentou uma calda exponencial. Esta diferença no comportamento ocorre devido a presença de correlações durante a criação do meio poroso para estas duas porosidades. Estudos anteriores confirmam este comportamento.

Com base nos resultados obtidos, fica evidenciado que o aumento no número de Reynolds acarreta em uma mudança de escala na distribuição de fluxos. Essa mudança pode ser facilmente confirmada usando o valor do Re como um fator de escala. As curvas para a distribuições de fluxos, quando escalonadas pelo fator Re , acabam colapsando em uma única curva, mostrando que o número de Reynolds atua apenas como um fator de escala no comportamento das distribuições de fluxos no interior do meio poroso. A forma do comportamento das distribuições não apresentam mudanças consideráveis com relação ao parâmetro porosidade do meio. A função de ajuste para as curvas das distribuições de fluxos teve apenas alterações suaves nos parâmetros para diferentes valores de porosidade. A forma geral da curva de ajuste foi preservada, com pequenas mudanças nos expoentes que controlam o comportamento em lei de potência, quando o meio poroso possui porosidade diferente.

Na análise das distribuições com relação às características do fluido Não Newtoniano, houve modificações no comportamento das distribuições de fluxos apenas para o escoamento com baixo número de Reynolds. Nesse regime de escoamento, os efeitos viscosos são mais

evidentes. Esse comportamento sobre o escoamento gera uma maior variação nas tensões de cisalhamento no interior do meio, aspecto que afeta de forma consistente as distribuições de fluxos quando alteramos o parâmetro n , que controla o decaimento da curva para viscosidade do fluido. Com o aumento do número de Reynolds, as diferenças nas tensões de cisalhamento não parecem suficiente para afetar de forma significativa o comportamento da viscosidade do fluido ao ponto de influenciar nas distribuições dos fluxos no interior do meio.

Acreditamos que os resultados apresentados aqui devem contribuir para um melhor entendimento do escoamento de fluidos em meios porosos desordenados. A nossa expectativa é que esse estudo deva ajudar no aprimoramento da base conceitual dos fenômenos de transporte em estruturas desordenadas, e que essa melhora deva contribuir para o surgimento de processos mais eficientes quanto ao seu aspecto tecnológico.

Por fim, é importante salientar que, para uma melhor consolidação dos resultados, seria ideal um número maior de amostras de meios porosos. Além disso, sugere-se a possibilidade de verificar quais seriam os resultados caso o fluxo fosse turbulento. Nesta perspectiva, uma nova rodada de experimentos deve ser realizada considerando os escoamentos no regime de turbulência e utilizando um outro método de solução tal como o modelo $k - \varepsilon$.

REFERÊNCIAS

- ADLER, P. M. Book. **Porous media**: geometry and transports. Boston: Butterworth-Heinemann, 1992. xvi, 544 p. : p. ISBN 0750692367.
- ANDRADE, J.; STREET, D.; SHINOHARA, T.; SHIBUSA, Y.; ARAI, Y. Percolation disorder in viscous and nonviscous flow through porous media. **Physical Review E**, United States, v. 51, n. 6, p. 5725–5731, 07 1995.
- ANSYS INC. **Ansys Fluent (basic)**. Pennsylvania: Cononsburg, 2020.
- ARAÚJO, A. D.; BASTOS, W. B.; ANDRADE JÚNIOR, J. S.; HERRMANN, H. J. Distribution of local fluxes in diluted porous media. **Physical Review E**, United States, n. 74, n. 1, 2006.
- AURENHAMMER, F.; KLEIN, R.; LEE, D.-T. **Voronoi diagrams and delaunay triangulations**. 1st. ed. New Jersey: World Scientific, 2013. ISBN 9789814447638.
- BEAR, J. **Dynamics of fluids in porous media**. New York: Dover, 1988. ISBN 0-486-65675-6.
- DULLIEN, F. **Porus media**: fluid transport and pore structure. New York: Academic Press, 1979.
- ESPINHA, R. de S. L. **Visualização volumétrica interativa de malhas não-estruturadas utilizando placas gráficas programáveis**. 86 f. Dissertação (Mestrado em Informática) — Departamento de Informática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.
- FABBRI, M. **Cálculo aplicado à engenharia elétrica**. 2011. Série de exercícios. Disponível em: <http://www.mauriciofabbri.com.br/1sem2011/calculo%20aplicado%20engenharia%20eletrica/02_fluxo_divergente_teoGauss_CalcAplicEletr_1sem2011.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2021.
- FARIA, B. **Integração rocha-perfil para otimização de estimativas de permeabilidade em reservatórios carbonáticos da bacia de campos**. 113 f. Dissertação (Mestrado em Geociências) — Instituto de Geociências, Departamento de Geologia e Geofísica, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2020.
- FLÓREZ-ORREGO, D. A. **Equações de Navier-Stokes**: formas diferenciais em notação vetorial e indicial, e na notação integral. 2012. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/317014031_Navier-Stokes_Equations_Portuguese_Version>. Acesso em: 12 jun. 2020.
- GRANGER, R. A. **Fluid mechanics**. New York: Dover, 1995.
- KOPONEN, A.; KATAJA, M.; TIMONEN, J. Permeability and effective porosity of porous media. **Physical Review E**, United States, v. 56, n. 3, p. 3319–3325, Sept 1997.
- KOSTEK, S.; SCHWARTZ, L.; JOHNSON, D. Fluid permeability in porous media: comparison of electrical estimates with hydrodynamical calculations. **Physical Review. B**, United States, v. 45. v. 1, p. 186–195, Jan 1992.

- KUNDU, P. K.; COHEN, I. M. **Fluid mechanics**. 2nd. ed. San Diego, California: Academic Press, 2002.
- LAY-EKUAKILLE, A.; FABBIANO, L.; VACCA, G.; KITOKO, J. K.; KULAPA, P. B.; TELESKA, V. A comparison between the decimated padé approximant and decimated signal diagonalization methods for leak detection in pipelines equipped with pressure sensors. **Sensors**, Switzerland, v. 18, n. 6, p. 1–17, 2018. ISSN 1424-8220. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/1424-8220/18/6/1810>>. Acesso em: 28 Jan. 2021.
- LOFRANO, F. C. **Escoamento em meios porosos: um modelo analítico não darciano baseado no princípio da entropia máxima**. Tese (Doutorado em Ciências) — Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.
- MARTYS, N.; TORQUATO, S.; BENTZ, D. Universal scaling of fluid permeability for sphere packings. **Physical Review E**, United States, v. 50. n. 1, p. 403–408, July 1994.
- MINGIREANOV FILHO, I. **Determinação de Tortuosidade de Arenitos e Carbonatos utilizando Florestas de Caminhos-Ótimos**. 78 p. Tese (Doutorado em Ciências e Engenharia de Petróleo na área de Reservatórios e Gestão) — Faculdade De Engenharia Mecânica E Instituto de Geociências, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2017.
- PATANKAR, S. **Numerical heat transfer and fluid flow**. [S.l.]: Taylor and Francis, 1980.
- PEÇANHA, A. S. R. **Simulação de escoamento multifásico em meios porosos**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.
- SAHIMI, M. **Flow and transport in porous media and fractured rock**. Weinheim: VCH, Boston, Jan 1995.
- SAHIMI, M.; IMDAKM, A. O. Hydrodynamics of particulate motion in porous media. **Physical Review Letters**, United States, v. 66, n. 9, p. 1169–1172, Mar 1991. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.66.1169>>. Acesso em: 28 Jan. 2021.
- SCHEIDEGGER, A. E. **The physics of flow through porous media**. 3rd. ed. Toronto: University of Toronto Press, 1974.
- STUCKENBRUCK, S. **Escoamento de líquidos e gases em dutos**. Porto Alegre: [s.n.], 2012. Curso de extensão para a Companhia de Gás do Estado do Rio Grande do Sul. Disponível em: <<http://sulgas.usuarios.rdc.puc-rio.br/Esc-Dutos.pdf>>. Acesso em: 12 jan. 2021.
- TAZRAEI, P.; RIASI, A.; TAKABI, B. The influence of the non-newtonian properties of blood on blood-hammer through the posterior cerebral artery. **Mathematical biosciences**, United States, v. 264, p. 119–127, june 2015.
- TORQUATO, S. **Random heterogeneous materials: microstructure and macroscopic properties**. New York: Springer, 2002. (Interdisciplinary Applied Mathematics). ISBN 9780387951676.
- TRITTON, D. J. **Physical fluid dynamics**. 2nd. ed. New York: Oxford University Press Inc., 2007.

In: UNGER, K.; ROUQUEROL, J.; SING, K.; KRAL, H. (Ed.). **Characterization of porous solids**: proceedings of the iupac symposium (cops i), bad soden a.ts., f.r.g.f.r.g., april 26- 29, 1987. Amsterdam: Elsevier, 1988, (Studies in Surface Science and Catalysis, v. 39). p. iii. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167299109607230>>. Acesso em: 15 Nov. 2020.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An introduction to computational fluid dynamics**. Harlow: Pearson Prentice Hall, 1995. ISBN 0582218845.

VILANOVA, L. C. **Mecânica dos fluidos**. Santa Maria, RS: Colégio Técnico Industrial de Santa Maria, 2011. Disponível em: <https://www.ufsm.br/app/uploads/sites/413/2018/11/12_mecanica_fluidos.pdf>. Acesso em: 11 jan. 2021.

WHITE, F. M. **Fluid mechanics**. 4th. ed. New York: McGraw-Hill, 2001.

WONG, P. The statistical physics of sedimentary rock. **Physics Today**, United States, v. 41, n. 12, p. 24–32, 1988. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.881138>>. Acesso em: 15 Nov. 2020.