UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

RODRIGO FIDÉLIS MAIA

OPERADORES MAXIMAIS FRACIONÁRIOS

FORTALEZA

2020

RODRIGO FIDÉLIS MAIA

OPERADORES MAXIMAIS FRACIONÁRIOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Análise

Orientador: Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira

Coorientador: Prof. Dr. José Ederson Melo Braga

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M188o Maia, Rodrigo Fidélis.
Operadores Maximais Fracionários / Rodrigo Fidélis Maia. – 2020.
76 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2020.
Orientação: Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira.
Coorientação: Prof. Dr. José Ederson Melo Braga.

1. Operador Maximal Fracionário. 2. Potencial de Riesz. 3. Teorema de B. Muckenhoupe-R.L.Wheeden. 4. Espaço de Sobolev. 5. Espaço de Campanato. I. Título.

CDD 510

RODRIGO FIDÉLIS MAIA

OPERADORES MAXIMAIS FRACIONÁRIOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Análise

Aprovada em: 24/01/2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Ederson Melo Braga (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte
Universidade Federal do Ceará(UFC)

À minha família, por sua capacidade de acreditar em mim e investir em mim. Mãe, seu cuidado e dedicação foi que deram, em alguns momentos, a esperança para seguir. Pai, sua presença significou segurança e certeza de que não estou sozinho nessa caminhada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me capacitado nessa grande caminhada. Aos meus pais e familiares Lucicleide, Ruy, Francisco e Andrezza me proporcionarem apoio e sustento.

A minha namorada Cristina e aos companheiros de curso Junior, Erivamberto e Elisafã que me apoiaram neste trabalho diretamente ou indiretamente.

Ao Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira, pela excelente orientação. Agradeço ao professor Darlan pelo apoio e amizade. A todos os professores do departamento de Matemática da UFC que colaboraram com minha formação intelectual.

A Andrea e Jessyca pela paciência e agilidade nas soluções da burocracia.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Os padrões criados pelo matemático, como os do pintor ou do poeta, devem ser belos; as ideias, como as cores ou as palavras, devem se encaixar de modo harmonioso. A beleza é o primeiro desafio: não existe lugar permanente no mundo para a matemática feia.”

(G. H. HARDY)

RESUMO

A presente dissertação de mestrado tem como objetivo estudar a versão centrada do Operador Maximal Fracionário, primeiramente sua regularidade nos espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$ junto com o Potencial de Riesz. Na sequência, definiremos ambos os operadores em medidas do $\mathbb{R}^n$ com o intuito de provar o Teorema de B.Muckenhoupt-R.L.Wheeden. Depois, estudaremos dois teoremas de Juha Kinnunen sobre o comportamento do operador nos Espaços de Sobolev. Apresentaremos também estimativas pontuais para o gradiente fraco do operador, onde uma delas fornece um controle da oscilação de funções. Analisaremos a regularidade em espaços de Sobolev da versão local do operador $\mathscr{M}_{\alpha,\Omega}$ em abertos com medida finita. Além disso, daremos uma estimativa pontual do gradiente fraco do operador, que diferentemente do caso não local, teremos o acréscimo de um termo extra contendo o Maximal Local Fracionário, em seguida mencionaremos alguns exemplos que evidenciarão a otimização dos resultados apresentados. Ao final, estudaremos a ação do Operador Maximal Fracionário em espaços de Campanato $\mathscr{L}^{p,\beta}(X)$, onde X é espaço métrico mensurável munido com uma medida positiva regular de Borel satisfazendo a propriedade "Doubling Property Means Condition".

Palavras-chave: operador maximal facionário; potencial de Riesz; teorema de B.Muckenhoupt-R.L.Wheeden; espaço de Sobolev; espaço de Campanato.

ABSTRACT

This master dissertation aims to study the centered version of the Maximal Fractional Operator its regularity in the $L^p(\mathbb{R}^n)$ spaces along with the Riesz Potential. Then we define both operators in measures of $\mathbb{R}^n$ in order to prove the Theorem of B. Muckenhoupt and R. Wheeden. After studying two theorems of Juha Kinnunen about operator behavior in Sobolev Spaces. It has also been shown to use point points for the operator's weak gradient, where one of them has lost control of function swing. Analyze the regularity in Sobolev spaces of the local version of the $\mathscr{M}_{\alpha,\Omega}$ operator in open with finite measure. Also, give a pointwise estimate of the weak gradient, which unlike the non-local case, terms or addition of an extra term showing the local fractional maximum, then mention some examples that demonstrate the optimization of current results. At finally we studying the Fractional Maximal Operator action on Campanato space $\mathscr{L}^{p,\beta}(X)$, where X is a measurable metric space provided with a regular positive Borel measurement satisfying a property "Double property means condition".

Keywords: fractional maximal operator; Riesz potential; Sobolev space; Campanato's space; continuous Holder.

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	10
2	**PRELIMINARES**	11
2.1	**Teoria da Medida e Integração**	11
2.2	**Espaços L^P**	16
2.3	**Espaços de Sobolev**	18
2.4	**Lema de Recobrimento de Whitney**	22
3	**OPERADOR MAXIMAL FRACIONÁRIO DE HARDY-LITTLEWOOD**	24
4	**OPERADORES EM MEDIDAS**	37
5	**CONTROLE DA OSCILAÇÃO DE UMA FUNÇÃO PELO MAXIMAL DO GRADIENTE**	52
6	**OPERADOR LOCAL FRACIONÁRIO MAXIMAL DE HARDY-LITTLEWOOD**	56
7	**REGULARIDADE DO OPERADOR MAXIMAL FRACIONÁRIO EM ESPAÇOS MÉTRICOS MENSURÁVEIS**	66
8	**CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS**	75
	REFERÊNCIAS	76

1 INTRODUÇÃO

No primeiro momento estudaremos a regularidade do Operador Maximal Fracionário nos espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$ com o auxílio do Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev sobre o Potencial de Riesz. Na sequência definiremos ambos os operadores em medidas do $\mathbb{R}^n$ com o intuito de provar o Teorema de B.Muckenhoupt-R.L.Wheeden que diz que a razão entre a norma p do potencial e a norma p do maximal de uma medida é limitada superiormente e inferiormente. O lema de Recobrimento de Whitney tem papel importante na prova deste resultado. Posteriormente concluiremos as mesma estimativas de Hardy-Littlewood-Wiener para o Operador Maximal, frequentemente usada nos resultados. De posse dos resultados anteriores, estudaremos o operador nos Espaços de Sobolev, para concluírmos que dada uma função $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, sob certas condições, $\mathcal{M}_\alpha f \in W^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ onde $q > p$ no qual depende de α. Apresentaremos também estimativas pontuais para o gradiente fraco do operador, onde uma delas fornece um controle da oscilação de funções. Na segunda parte do texto, estudaremos a regularidade em Sobolev da versão local do operador $\mathcal{M}_{\alpha,\Omega}$ em abertos com medida finita. Além disso, daremos uma estimativa pontual do gradiente fraco do operador, que diferentemente do caso não local, teremos o acréscimo de um termo extra contendo o Maximal Local Fracionário, em seguida mencionaremos alguns exemplos que evidenciarão a otimização dos resultados apresentados. Ao final do trabalho estudaremos a ação do Operador Maximal Fracionário em espaços de Campanato $\mathcal{L}^{p,\beta}(X)$, onde X é espaço métrico mensurável munido com uma medida positiva regular de Borel satisfazendo a propriedade "Doubling Property Means Condition". Nesta seção o resultado principal diz que se o espaço satisfaz a condição "$\delta-$annular decay property", desde que α e β cumpram certas condições, o operador $\mathcal{M}_\alpha : \mathcal{L}^{p,\beta}(X) \longrightarrow C^{0,\alpha+\beta}(X)$ é limitado quando restrito as funções em que $\mathcal{M}_\alpha$ é finito em quase todos os pontos de X. Alguns corolários desta proposição são demonstrados bem como suas versões euclidianas.

2 PRELIMINARES

Começamos este trabalho recordando definições e teoremas básicos de Análise Real necessários ao estudo do Operador Maximal Fracionário. A notação doravante utilizados é padrão e, em sua maioria, está em consonância com a Teoria clássica da Análise Harmônica.

Definição 2.0.1. *Um espaço métrico (M, d) é dito ser um espaço métrico completo se toda sequência de Cauchy em M convergir para um elemento do conjunto. Em outras palavras dada $(x_n)_{n\geq 1} \subset M$ tal que,*

$$\lim_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$$

então $x_n \to x$, onde $x \in M$.

Definição 2.0.2. *Um espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|)$ é chamado espaço de Banach quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.*

Definição 2.0.3. *Seja $(x_n)_{n\geq 1}$ uma sequência em $(X, \|\cdot\|)$. Dizemos que x_n converge fracamente para x e denotamos por $x_n \rightharpoonup x$ se, e somente se, $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ para todo funcional linear contínuo $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Lema 2.0.1. *(Mazur) Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e uma sequência $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ tal que $x_n \rightharpoonup x$ então existe uma sequência de combinações convexas de seus termos que converge fortemente ao mesmo limite, ou seja, para cada $n \geq 1$ existe $N(n) \in \mathbb{N}$ tal que $(t_{nk})_{k=n}^{k=N(n)} \in (0,1)$ de modo que,*

$$\sum_{k=n}^{N(n)} t_{nk} = 1, \quad \forall n \geq 1$$

e temos

$$w_n = \sum_{k=n}^{N(n)} t_{nk} x_k \to x.$$

Demonstração. (BREZIS, 2010)

□

2.1 Teoria da Medida e Integração

Seja X um conjunto. A coleção $\mathscr{A}$ de subconjuntos de X é uma álgebra se contém X e é fechado com respeito a uniões finitas e complementos. Obviamente $\varnothing \in \mathscr{A}$. A coleção

$\mathscr{A}$ é uma $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X se for fechada com respeito a união enumerável. Sejam X um conjunto e $\mathscr{A}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de X. Uma medida é uma função $\mu : \mathscr{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ satisfazendo as três condições a seguir:

I) Existe $E \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(E) < \infty$;

II) μ é não negativa;

III) Para qualquer coleção disjunta $\{E\}_{j\geq 1} \subset \mathscr{A}$ temos:

$$\mu\left(\bigcup_{k\geq 1} E_n\right) = \sum_{k\geq 1} \mu(E_n).$$

A tripla $(X, \mathscr{A}, \mu)$ denota um espaço de medida.

Definição 2.1.1. *Uma $\sigma-$álgebra de Borel do $\mathbb{R}^n$ é a menor $\sigma-$álgebra que contém todos os abertos de $\mathbb{R}^n$, seus elementos são chamados de borelianos .*

Definição 2.1.2. *Diremos que uma medida μ em $\mathscr{A}$ é regular se para cada $A \in \mathscr{A}$ existe $B \in \mathscr{A}$ mensurável tal que $A \subset B$ e $\mu(A) = \mu(B)$.*

Definição 2.1.3. *Uma medida μ em $\mathbb{R}^n$ é de Borel se todo boreliano é $\mu-$mensurável.*

Definição 2.1.4. *Diremos que uma medida μ em $\mathbb{R}^n$ é Borel regular for uma medida de Borel e regular.*

Definição 2.1.5. *Uma medida de μ em $\mathbb{R}^n$ é dita ser de Radom se for uma medida de Borel e satisfaz $\mu(A) < \infty$ para qualquer conjunto limitado $A \subset \mathbb{R}^n$.*

Definição 2.1.6. *Seja μ uma medida de Borel em um espaço metrico X, definimos o suporte de μ, como o menor fechado F tal que $\mu(X \setminus F) = 0$*

$$supp(\mu) = X \setminus \bigcup \{V; V \, \textit{é aberto satisfazendo} \quad \mu(V) = 0\}$$

$$= X \setminus \bigcup \{x; \exists r > 0 \, \textit{tal que} \quad \mu(B(x,r)) = 0\}.$$

Definição 2.1.7. *A restrição de uma medida μ ao conjunto $A \in \mathscr{A}$, é denotada por $\mu|_A$ e definida por:*

$$\mu|_A = \mu(A \cap B), \quad \forall B \in \mathscr{A}.$$

Por conveniência de notação denotaremos a medida de Lebesgue por m e $|A|$ denota a medida de Lebesgue do conjunto A.

Definição 2.1.8. *Seja E um conjunto mensurável. A função $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável se o conjunto $\{x \in E : f(x) > c\}$ for mensurável para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Sejam $E \in \mathscr{A}$, $c \in \mathbb{R}$ e um conjunto mensurável A definimos,

$$\int_E c\lambda_A d\mu = \begin{cases} c\mu(E \cap A), & \text{se} \quad c = 0 \\ 0, & \text{se} \quad c = 0. \end{cases}$$

Seja $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ não-negativa, f é uma função simples se for uma combinação linear finita de funções características de conjuntos mensuráveis, em particular f admite representação canônica se,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \lambda_{E_i}(x),$$

onde $\{E_i\}_1^n$ é uma coleção de conjuntos mensuráveis mutualmente disjuntos e neste caso definimos sua integral por:

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^{n} C_i \mu(E_i).$$

Seja $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função mesurável e não-negativa definimos a integral de Lebesgue de f por:

$$\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E s d\mu : s \leq f \quad \text{s é função simples} \quad \right\}.$$

Uma função mensurável $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é dita ser integrável se $|f|$ for integrável. Neste caso definimos,

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu,$$

onde $f^+ = \max\{0, f\}$ e $f^- = \min\{0, -f\}$ denotam respectivamente a parte positiva e negativa da função f, valem as sequintes relações $|f| = f^+ + f^-$ e $f = f^+ - f^-$.

Seja $(f_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis não-negativas denotamos $f_n \nearrow f$ se $f_n \to f$ pontualmente e satisfaz,

$$0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \quad q.t.p. \quad x \in E \quad e \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 2.1.1. *Seja $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável não-negativa. Então existe uma sequência de funções simples $(f_n)_{n\geq 1}$ tais que $f_n \nearrow f$.*

Demonstração. (DIBENEDETTO, 2016). □

Teorema 2.1.2. *(Convergência Monótona) Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções não-negativas tais que $f_n \nearrow f$ então,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Demonstração. (DIBENEDETTO, 2016). □

Teorema 2.1.3. *(Lema de Fatou) Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis não negativas então*

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Demonstração. (DIBENEDETTO, 2016). □

Teorema 2.1.4. *(Continuidade Absoluta da Integral) Sejam E um conjunto mensurável e $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrável. Então para cada $\epsilon > 0$ arbitrário, pode-se obter $\delta > 0$ tal que,*

$$A \subset E, \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A f d\mu < \epsilon.$$

Demonstração. (DIBENEDETTO, 2016). □

Teorema 2.1.5. *Dizemos que uma sequência de medidas $\mu_{k\geq 1}$ converge fraco para a medida μ, e denotamos por $\mu_k \rightharpoonup \mu$, se para toda $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$,*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_k = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu.$$

Demonstração. (DIBENEDETTO, 2016). □

Lema 2.1.1. *Sejam μ_k e μ medidas de Radon em $\mathbb{R}^n$. Então $\mu_k \rightharpoonup \mu$ se, e somente se,*

$$\limsup \mu_n(K), \leq \mu(K), \qquad \forall K \subset \mathbb{R}^n compacto \quad e$$

$$\liminf \mu_n(K) \leq \mu(O), \qquad \forall O \subset \mathbb{R}^n aberto.$$

Demonstração. (DIBENEDETTO, 2016). □

Lema 2.1.2. *Sejam* $(X,\mathscr{A},\mu)$, $(X,\mathscr{A},\eta)$ *e uma função* f $\mu-$*mensurável e* $\eta-$*mensurável então,*

$$\int_X f\,d[\mu+\eta] = \int_X f\,d\mu + \int_X f\,d\eta.$$

Demonstração. (ROYDEN H. L.; FITZPATRICK, 2010). □

Lema 2.1.3. *Seja* f *uma função não-negativa e* $\mu-$*integrável em* X*. Então a função* $\nu : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *definida por:*

$$\nu(E) = \int_E f\,d\mu, \quad \forall E \in M.$$

é uma medida, além do que $supp(\mu) = supp(f)$ *.*

Demonstração. (DIBENEDETTO, 2016). □

Lema 2.1.4. *Sejam* $(X,\mathscr{A},\nu)$, $(X,\mathscr{A},\mu)$, *espaços de medidas e* f,g *funções em* X*. Então* f *é* $\nu-$*integrável se, e somente se, a função* fg *for* $\mu-$*integrável, nesse caso vale a igualdade,*

$$\int_X f\,d\nu = \int_X fg\,d\mu.$$

Demonstração. (DIBENEDETTO, 2016). □

Teorema 2.1.6. *(Tonelli) Sejam* $(X,\mathscr{A},\mu)$, $(Y,\mathscr{B},\nu)$ *espaços de medida* $\sigma-$*finitos e completos e* $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *mensurável e não-negativa. Então,*

$$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\times\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\mu\right) d\nu = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,d\nu\right) d\mu.$$

Demonstração. (DIBENEDETTO, 2016). □

Teorema 2.1.7. *(Coordenadas Polares) Seja* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$*, então para cada* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *temos*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(x,r)} f\,dS\right) dr.$$

Em particular,

$$\frac{d}{dr}\left(\int_{B(x,r)} f\right) = \int_{\partial B(x,r)} f \quad \forall r > 0.$$

Demonstração. (STEIN E. M.; SHAKARCHI, 2005). □

2.2 Espaços L^P

Definição 2.2.1. *Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $p \in [1,\infty]$, definimos o espaço $\mathscr{L}^p(\Omega)$ como o conjunto das funções mensuráveis em Ω tais que,*

$$\|f\|_P = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, & p \in [1,\infty), \\ ess\ sup_\Omega(|f|), p = \infty. \end{cases} .$$

Definição 2.2.2. *O espaço vetorial $L^P(\Omega)$ é o quociente de $\mathscr{L}^p(\Omega)$ pela sequinte relação de equivalência,*

$$f \sim g \iff f = g, \quad q.t.p. \quad \Omega.$$

Isso significa que,

$$L^P(\Omega) = \left\{[f]; f \in \mathscr{L}^p(\Omega)\right\} \quad onde \quad [f] = \{g; g \sim f\}$$

munido com as seguintes operações:

$$[f+g] = [f]+[g], \quad \lambda[f] = [\lambda f],$$

Além disso, definimos

$$\|[f]\|_{L^P(\Omega)} = \|f\|_p, \quad se \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \inf\{r \ge 0; \quad |f| \le r \quad q.t.p. \quad \Omega\}.$$

Lema 2.2.1. *O espaço $(L^P(\Omega), \|\cdot\|_{L^P(\Omega)})$ é um espaço vetorial normado de Banach.*

Demonstração. (DIBENEDETTO, 2016). □

Teorema 2.2.1. *Seja $f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$ então,*

$$\lim_{x\in B;|B|\to 0} \fint_B f(y)dy = f(x), \quad q.t.p. x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. (STEIN E. M.; SHAKARCHI, 2005).

□

Definição 2.2.3. *Dada $f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$, denotamos por $\mathscr{L}_f$ o conjunto dos pontos de Lebesgue de f definido por*

$$\mathscr{L}_f = \left\{x \in \mathbb{R}^n; \lim_{x\in B;|B|\to 0} \fint_B |f(y) - f(x)|dy = 0\right\}.$$

Teorema 2.2.2. *Se $f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$, então $\left|\mathbb{R}^n \setminus \mathscr{L}_f\right| = 0$.*

Demonstração. (STEIN E. M.; SHAKARCHI, 2005). □

Lema 2.2.2. *Seja $(f_n)_{n\geq 1} \subset L^p(\Omega)$, então $f_n \rightharpoonup f$ se, e somente se,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n h = \int_\Omega f h \quad \forall h \in L^q(\Omega).$$

Demonstração. (DIBENEDETTO, 2016). □

Lema 2.2.3. *Sejam $(f_n)_{n\geq 1}, (g_n)_{n\geq 1} \subset L^p(\Omega)$ satisfazendo $f_n \leq g_n$ em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com a exceção de um conjunto de medida nula. Se $f_n \rightharpoonup f$ e $g_n \rightharpoonup g$ ambas convergem fracamente em $L^p(\Omega)$ então, $f \leq g$ q.t.p. Ω.*

Demonstração. Como $f_n \rightharpoonup f$ e $g_n \rightharpoonup g$ consequentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n h = \int_\Omega f h \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n h = \int_\Omega g h, \quad \forall h \in L^q(\Omega).$$

onde q é o expoente conjugado de p. Seja $A = \mathscr{L}_f \cap \mathscr{L}_g$, consequentemente $A \neq \emptyset$ pois $|\mathbb{R}^n \setminus A| = 0$ portanto o conjunto A é denso em $\mathbb{R}^n$, e portanto será denso no aberto Ω, pela hipótese escolhendo $h = \frac{\chi_{B(x,r)}}{|B(x,r)|}$ teremos,

$$\int_\Omega f_n h = \fint_{B(x,r)} f_n dz \leq \fint_{B(x,r)} g_n = \int_\Omega g_n h dz.$$

Façamos $n \to \infty$,

$$\fint_{B(x,r)} f dz \leq \fint_{B(x,r)} g dz.$$

Fazendo $r \to 0$, pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue temos:

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} f dz \leq \lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} g dz = g(x), \quad q.t.p. \quad x \in \Omega.$$

□

Teorema 2.2.3. *(Representação Layer Cake) Sejam $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ mensurável e $p \geq 1$ então,*

$$\int_E |f|^p dz = p \int_0^\infty t^{p-1} \left|\{x \in E; |f| > t\}\right| dt.$$

Demonstração. (DIBENEDETTO, 2016). □

2.3 Espaços de Sobolev

Definição 2.3.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$ e $i \in \{1,..,n\}$. Se existir $g_i \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo,*

$$\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega g_i \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

então dizemos que g_i é a i-ésima derivada parcial fraca de f em Ω e será denotada por $D_i f$.

Lema 2.3.1. *A derivada parcial fraca está bem definida.*

Demonstração. (DIBENEDETTO, 2016). □

Definição 2.3.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$. Se f possui derivada parcial fraca de todas as ordens então definimos o gradiente fraco da função por,*

$$Df(x) = \big(D_1 f(x), ..., D_n f(x)\big).$$

.

Lema 2.3.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $1 \leq p \leq \infty$ definimos o espaço de Sobolev por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega); D_i \in L^p(\Omega) \quad \forall i \in \{1,..,n\} \right\}.$$

Lema 2.3.3. *O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ munido com a norma*

$$\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_\omega (|f|^p + |Df|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty, \\ ess\ sup_\Omega (|f| + |Df|), p = \infty \end{cases}$$

é um espaço vetorial normado.

Demonstração. (BREZIS, 2010). □

Denotaremos por conveniência $\|Df\|_p = \||Df|\|_p$.

Lema 2.3.4. *A norma em $W^{1,p}(\Omega)$ satisfaz as seguintes estimativas*

$$\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \|f\|_p + \|Df\|_p \leq 2^{\frac{p-1}{p}} \|f\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

em outras palavras a expressão $\|f\|_p + \|Df\|_p$ é uma norma neste espaço.

Demonstração. (BREZIS, 2010). □

Teorema 2.3.1. *Sejam* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$, *então a convolução* $f * g \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$D_i(f * g)(x) = (f * D_i g)(x), \qquad q.t.p. x \in \mathbb{R}^n \quad \forall i \in \{1,..,n\}.$$

Demonstração. (BREZIS, 2010). □

Teorema 2.3.2. *Sejam* $f, g \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ *então* $D_i|f|, D_i \max\{f,g\} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ *além do mais satisfazem*

$$D_i|f|(x) = \begin{cases} D_i f(x), & se \quad f(x) \geq 0 \\ 0, & se \quad f(x) = 0 \\ -D_i f(x), & se \quad f(x) \leq 0. \end{cases}$$

$$D_i \max\{f,g\}(x) = \begin{cases} D_i f(x), & se \quad f(x) \geq g(x) \\ D_i g(x), & se \quad g(x) \geq f(x). \end{cases}$$

Demonstração. (DIBENEDETTO, 2016). □

Teorema 2.3.3. *Sejam* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ *então existe* $(u_n)_{n\geq 1} \subset C_0^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$. *tal que,*

$$u \to u_n \qquad em \quad W^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. (BREZIS, 2010). □

Teorema 2.3.4. *(Compacidade Fraca) Sejam* $(u_n)_{n\geq 1} \subset W^{1,p}(\Omega)$ *limitada,* $1 < p < \infty$ *e* $u_n \to u$ *q.t.p em* $\blacksquare$. *Então* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *e existem uma subsequência* $(u_{n_k})_{k\geq 1} \subset W^{1,p}(\Omega)$ *satisfazendo,*

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad D_i u_{n_k} \rightharpoonup D_i u \qquad em \quad L^p(\Omega), \qquad \forall i \in \{1,..,n\}.$$

Demonstração. (BREZIS, 2010).

□

Teorema 2.3.5. *(Regra de Leibniz) Sejam* $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, *então* $uv \in W^{1,p}(\Omega)$ *e a identidade é satisfeita,*

$$D_i(uv)(x) = v(x) D_i u(x) + u(x) D_i v(x), \qquad q.t.p. \quad x \in \Omega.$$

Demonstração. (BREZIS, 2010).

□

Teorema 2.3.6. *(Regra da cadeia para funções de Sobolev) Sejam $u \in W^{1,p}(\Omega)$, onde $1 \leq p \leq \infty$, $O \subset \mathbb{R}^m$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abertos e $\Psi : O \longrightarrow \Omega$ função lipschitz com inversa lipschitz, então $u \circ \Psi \in W^{1,p}(\Omega)$ e para todo $j \in \{1, .., m\}$,*

$$D_j \left(f \circ \Psi \right)(y) = \sum_{i=1}^{n} D_i f \left(\Psi(y) \right) \frac{\partial \Psi_i}{\partial y_j} \left(y \right), \quad q.t.p. \quad y \in O.$$

Demonstração. (DIBENEDETTO, 2016).

□

Em equações diferenciais parciais, a diferenciabilidade de funções no sentido fraco ou clássico pode ser frequentemente reduzido ao estudo dos quocientes.

Lema 2.3.5. *Dada uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $V \subset\subset u$ definimos o "difference quotient"de u em x por,*

$$D_i^h u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}, \quad \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

para $x \in V$ e $|h| \in (0, Dist(V, \partial\Omega))$ onde e_i denota o vetor canônico do $\mathbb{R}^n$.
Denotamos $D^h u(x) = \left(D_1^h u(x), ..., D_n^h u(x) \right)$.

O seguinte teorema abaixo fornece um nova carecterização dos Espacos de Sobolev via "difference quotient".

Teorema 2.3.7. *I) Sejam $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $1 \leq p < \infty$, então existe uma contante C tal que para cada $V \subset\subset \Omega$,*

$$\|D^h u\|_{L^p(V)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}, \quad para\ todo \quad 0 < |h| < \frac{1}{2} Dist(V, \partial\Omega).$$

II) Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $1 < p < \infty$ se, e existe uma constante C tal que a sequinte condição for satisfeita:

$$\forall V \subset\subset \Omega \quad D_i^h u \in L^p(V) \quad e \quad \|D_i^h u\|_{L^p(V)} \leq C, \quad para\ todo \quad 0 < |h| < Dist(V, \partial\Omega).$$

Então $u \in W^{1,p}(V)$ e satisfaz $\|D_i u\|_{L^p(V)} \leq C$.

Demonstração. (EVANS, 2010). □

Teorema 2.3.8. *(Desigualdade de Poincaré) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto conexo limitado com $\partial\Omega$ do tipo C^1.Se $1 \leq p \leq \infty$, então existe uma constante positiva C dependendo somente de n, p, Ω, tal que,*

$$\|u - u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)}, \qquad u_\Omega = \fint_\Omega u$$

para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. (EVANS, 2010). □

Teorema 2.3.9. *(Desigualdade de Poincaré para bolas) Seja $1 \leq p \leq \infty$ então existe uma constante C dependende apenas de n e p tal que,*

$$\|u - u_{B(x,r)}\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)},$$

para qualquer $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ e qualquer $u \in W^{1,p}(B(x,r))$.

Demonstração. (EVANS, 2010). □

Teorema 2.3.10. *(Sobolev, Gagliardo, Nirenberg) Sejam $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < n$, $r = \frac{np}{n-p}$ então existe uma constante $C(n,p)$ tal que,*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq C(n,p)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Demonstração. (BREZIS, 2010).

□

Definição 2.3.3. *Uma função contínua $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $x \in \mathbb{R}^n$ se existe um vetor $Df(x) \in \mathbb{R}^n$ tal que,*

$$f(y) = f(x) + Df(x)\cdot(x-y) + o(|x-y|) \quad \textit{quando} \quad y \to x.$$

Se f é diferenciável em $x \in \mathbb{R}^n$ dado $v \in \mathbb{R}^n$, podemos definir a derivada direcional $D_v f(x)$ por

$$D_v f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{f(x+rv) - f(x)}{r}.$$

Teorema 2.3.11. *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente lipschitz. Então $D_v f$ existe q.t.p. $\mathbb{R}^n$. Em particular o gradiente Df existe q.t.p. $\mathbb{R}^n$ e $D_v f(x) = Df(x)\cdot v$ q.t.p. $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. (DIBENEDETTO, 2016).

□

Teorema 2.3.12. *(Rademacher) Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitz então f é diferenciável em $\mathbb{R}^n$ à menos de um conjunto de medida nula.*

Demonstração. (DIBENEDETTO, 2016). □

2.4 Lema de Recobrimento de Whitney

Lemas de recobrimento são muito comuns em Análise Harmônica. Neste capítulo apresentaremos a demonstração do Lema de Recobrimento de Whitney estremamente relevante na prova do teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev que versa na regularidade do Potencial de Riesz em L^p. (STEIN, 1970)

Teorema 2.4.1. *(Lema de Recobrimento de Whitney) Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado não vazio então, existe uma coleção de cubos diáticos $\{Q_k\}_1^\infty$ satisfazendo as três condições abaixo:*

(1) $\bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k = \mathbb{R}^n \setminus F,$

(2) $int(Q_j) \cap int(Q_i), \quad \forall j \neq i \in \mathbb{N},$

(3) $diam(Q_k) \leq Dist(Q_k, F) \leq 4diam(Q_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$

Demonstração. Para cada número inteiro k construímos uma coleção de cubos resultante da $k-$ésima subdivisão de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathscr{M}_k = \left\{ C_m; C_m = \prod_{i=1}^{n} \left[m_i 2^{-k}, (m_i + 1)2^{-k} \right] \quad m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{Z}^n \right\},$$

teremos $\mathbb{R}^n = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}^n}^{\infty} C_m$. Notemos cada cubo da divisão $\mathscr{M}_k$ contém 2^n cubos de $\mathscr{M}_{k+1}$. Os cubos de $\mathscr{M}_k$ possuem arestas de comprimento 2^{-k} e portanto diâmetro de $\sqrt{n}2^{-k}$. Adicionalmente definimos $\Omega_k = \left\{x; c2^{-k} \leq dist(x,F) \leq c2^{-k+1}\right\}$ em que c é uma constante momentaneamente fixada. Obviamente,

$$\mathbb{R}^n \setminus F = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_k.$$

Fazemos uma escolha inicial de cubos, e denotamos a coleção resultante por,

$$\mathscr{F}_0 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{Q \in \mathscr{M}_k; \quad Q \cap \Omega_k \neq \emptyset\}$$

$$\mathbb{R}^n \setminus F = \bigcup_{Q \in \mathscr{F}_0} Q.$$

Escolhemos apropriadamente c de forma que,

$$diam(Q_k) \leq \text{Dist}(Q_k, F) \leq 4diam(Q_k), \quad \forall Q \in \mathscr{F}_0.$$

Dado $Q \in \mathscr{F}_0$, existe um inteiro k' tal que $Q \in \mathscr{M}_{k'}$ então $diam(Q) = \sqrt{n}2^{-k}$, assim existe $x \in Q \cap \Omega_k$, portanto

$$c2^{-k+1} \geq \text{Dist}(x, F) \geq \text{Dist}(Q, F) \geq \text{Dist}(x, F) - diam(Q) > c2^{-k} - \sqrt{n}2^{-k}.$$

Se fizermos $c = 2\sqrt{n}$ a estima desejada é satisfeita. Daí a coleção $\mathscr{F}_0$ satisfaz todas as propriedades requeridas, exceto que os cubos são quase disjuntos. Para finalizar a demonstração precisamos refinar a escolha dos cubos desta coleção de forma a remover os elementos desnecessários. Suponhamos $Q_1 \in \mathscr{M}_{k_1}$ e $Q_2 \in \mathscr{M}_{k_2}$, não disjuntos, então se $k_1 \leq k_2$ teremos $Q_1 \subset Q_2$. Para cada cubo qualquer da coleção $\mathscr{F}_0$, iremos associar o cubo maximal da coleção que contém ele. Pela afirmação anterior, quaisquer dois cubos Q' e $Q"$ que contendo um cubo Q satisfazem $Q' \cup Q" \neq \varnothing$, portanto provamos que cada cubo de $\mathscr{F}_0$ possui um único cubo maximal. Definimos a coleção resultante da escolha dos cubos maximais por $\mathscr{F}$, naturalmente essa coleção é disjunta caso contrário, pela mesma observação teríamos um absurdo, consequentemente,

(1) $\bigcup_{Q \in \mathscr{F}} Q = \mathbb{R}^n \setminus F$,

(2) Os cubos de $\mathscr{F}$ são disjuntos,

(3) $\text{diam}(Q) \leq \text{Dist}(Q, F) \leq 4\text{diam}(Q), \quad \forall Q \in \mathscr{F}$.

$\square$

3 OPERADOR MAXIMAL FRACIONÁRIO DE HARDY-LITTLEWOOD

Definição 3.0.1. *Seja* $\alpha \in [0, n)$. *Definimos o Operador Maximal Fracionário de Hardy-Littlewood* $\mathcal{M}_\alpha : L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *por:*

$$\mathcal{M}_\alpha f(x) = \sup_{r>0} r^\alpha \fint_{B(x,r)} |f|.$$

Caso $\alpha = 0$ *obtemos o Operador Maximal de Hardy-Litllewood.*

A função $\mathcal{M}_\alpha f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é mensurável por ser semi-contínua inferiormente, ou seja, para todo $c > 0$ o conjunto $E_c = \{x \in \mathbb{R}^n ; \mathcal{M}_\alpha f(x) > c\}$ é aberto e portanto mensurável, ou de forma equivalente, $\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0) > c, \quad \forall x_0 \in E_c$ a condição acima decorre do lema de Fatou. Dada uma função mensurável f estão bem definidos os operadores translação e dilatação eles serão denotados respectivamente por $T_h f$ e $\delta_\lambda f$, as seguintes identidades são satisfeitas.

Teorema 3.0.1. *Sejam* $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, *então o operador satisfaz as seguintes propriedades:*
I) (Sublinearidade)

$$\mathcal{M}_\alpha(f+g)(x) \leq \mathcal{M}_\alpha f(x) + \mathcal{M}_\alpha g(x).$$

II) (Homogeneidade)

$$\mathcal{M}_\alpha(\lambda f)(x) = |\lambda| \mathcal{M}_\alpha f(x)$$

III) (Dilatação)

$$\delta_\lambda(\mathcal{M}_\alpha f)(x) = \lambda^{-\alpha} \mathcal{M}_\alpha f(x)$$

IV) (Translação)

$$\mathcal{M}_\alpha(T_h f)(x) = T_h(\mathcal{M}_\alpha f)(x).$$

Demonstração. I) Como $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ entao,$f + g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ portanto $\mathcal{M}_\alpha(f+g) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

esta bem definido, pela desigualdade triangular:

$$|f(y)+g(y)| \leq |f(y)|+|g(y)| \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} r^\alpha \fint_{B(x,r)} |(f+g)(y)|dy &\leq r^\alpha \fint_{B(x,r)} |f(y)|dy + r^\alpha \fint_{B(x,r)} |g(y)|dy \\ &\leq \mathcal{M}_\alpha f(x) + r^\alpha \fint_{B(x,r)} |g(y)|dy \\ &\leq \mathcal{M}_\alpha f(x) + \mathcal{M}_\alpha g(x), \quad \forall r>0. \end{aligned}$$

Tomando o supremo em r obtemos o desejado.

II) Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ então, $\lambda f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, portanto $\mathcal{M}_\alpha(\lambda f)(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ está bem definido, daí,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\alpha(\lambda f)(x) &= \sup_{r>0} r^\alpha \fint_{B(x,r)} |\lambda f(y)|dy \\ &= \sup_{r>0} |\lambda| r^\alpha \fint_{B(x,r)} |f(y)|dy \\ &= |\lambda| \sup_{r>0} r^\alpha \fint_{B(x,r)} |f(y)|dy \\ &= |\lambda| \mathcal{M}_\alpha(f)(x). \end{aligned}$$

III) Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ então, $\delta_\lambda f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ portanto $\delta_\lambda f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ está bem definido, daí,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\alpha(\delta_\lambda f)(x) &= \sup_{0<r} r^\alpha \fint_{B(x,r)} |\delta_\lambda f(y)|dy \\ &= \sup_{0<r} r^\alpha \fint_{B(x,r)} |f(\lambda y)|dy. \end{aligned}$$

Decorre da fórmula da mudança de variável para a dilatação, juntamente com a relação $|B(x,\lambda r)| = \lambda^n |B(x,r)|$, concluímos:

$$r^\alpha \fint_{B(x,r)} |f(\lambda y)|dy = r^\alpha \fint_{B(x,\lambda r)} |f(y)|dy$$

portanto,

$$\begin{aligned} \sup_{0<r} r^\alpha \fint_{B(x,r)} |\delta_\lambda f(y)|dy &= \sup_{0<r} r^\alpha \fint_{B(x,\lambda r)} |f(y)|dy \\ &= \frac{1}{\lambda^\alpha} \sup_{0<r} (\lambda r)^\alpha \fint_{B(x,\lambda r)} |f(y)|dy \\ &= \frac{1}{\lambda^\alpha} \mathcal{M}_\alpha(f)(x). \end{aligned}$$

IV) Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ então, $T_h f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ portanto $T_h f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ está bem definido, daí,

$$\mathcal{M}_\alpha(T_h f)(x) = \sup_{0<r} r^\alpha \fint_{B(x,r)} |T_h f(y)|.$$

Decorre da fórmula da mudança de variável juntamente com a invariância da medida de Lebesgue por translação,

$$r^\alpha \fint_{B(x,r)} |f(y+h)|dy = r^\alpha \fint_{B(x+h,r)} |f(y)|dy.$$

Portanto:

$$\sup_{0<r} r^\alpha \fint_{B(x,r)} |f(y+h)|dy = \sup_{0<r} r^\alpha \fint_{B(x+h,r)} |f(y)|dy.$$

$$= T_h(\mathcal{M}_\alpha)(x).$$

Lema 3.0.1. *Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ então para cada $R > 0$,*

$$\mathcal{M}_\alpha f(x) \geq \left(\frac{R}{R+|h|}\right)^{n-\alpha} R^\alpha \fint_{B(x+h,R)} |f|dy, \quad \forall x, h \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Da definição temos,

$$\mathcal{M}_\alpha f(x) \geq (R+|h|)^\alpha \fint_{B(x,R+|h|)} |f|dy.$$

Como $B(x+h,R) \subset B(x,R+|h|)$,

$$= \frac{(R+|h|)^{\alpha-n}}{|B_1|} \int_{B(x,R+|h|)} |f|dy \geq \frac{(R+|h|)^{\alpha-n}}{|B_1|} \int_{B(x+h,R)} |f|dy$$

$$= \left(\frac{R}{R+|h|}\right)^{n-\alpha} R^\alpha \fint_{B(x+h,R)} |f|dy.$$

□

Uma propriedade notável da função $\mathcal{M}_\alpha f$ é de que se existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{M}_\alpha f(x_0) = 0$ então f é nula em q.t.p. $\mathbb{R}^n$. Para vermos isso, tomamos $x = x_0$ e $h = 0$ na desigualdade anterior portanto,

$$r^\alpha \fint_{B(x_0,r)} |f(y)|dy = 0, \quad \forall r > 0.$$

logo se $r > 0$ temos $f|_{B(x_0,r)} = 0$ em quase todo ponto, consequentemente $f = 0, \quad q.t.p.\mathbb{R}^n$. Pelo o que foi exposto ateriormente podemos concluir que o suporte do Operador Maximal Fracionário de uma função não pode estar propriamente contido em $\mathbb{R}^n$, exceto se f for nula em quase todos os pontos. Com efeito, dado $x \in \mathbb{R}^n \setminus supp(\mathcal{M}_\alpha f)$, por definição existe um aberto U contendo x tal que $\mathcal{M}_\alpha f$ é nula em quase todos os pontos de U, portanto f é nula em quase todos os pontos do $\mathbb{R}^n$ consequentemente $supp(\mathcal{M}_\alpha f) = \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.0.2. *Seja $f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$ então $\mathcal{M}_\alpha f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $f(x) = 0$ em quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Suponha por contradição, que $f \neq 0$ .t.p em $\mathbb{R}^n$, pelo lema anterior:

$$\mathcal{M}_\alpha f(x)dx \geq R^\alpha \fint_{B(0,R)} |f|dy \left(\frac{R}{R+|x|}\right)^{n-\alpha}.$$

Por hipótese $f\lambda_{B(z,R)} \in f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, integrando termo a termo temos,

$$\int_{B(z,R)} \mathcal{M}_\alpha f(x)dx \geq R^\alpha \fint_{B(0,R)} |f|dy \int_{B(z,R)} \left(\frac{R}{R+|x|}\right)^{n-\alpha} dx$$

$$= R^\alpha \fint_{B(0,R)} |f|dy \int_{B(z,R)} \frac{1}{\left(1+\frac{|x|}{R}\right)^{n-\alpha}} dx.$$

Escolhemos R suficientemente grande tal que $|z| < R$,logo $|x| \leq |x-z| + |z| \leq R + R = 2R$, daí:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{|x|}{R}\right)^{n-\alpha}} \geq 3^{\alpha-n} \quad \forall R > 0$$

$$\geq R^\alpha \fint_{B(0,R)} |f|dy \int_{B(z,R)} 3^{\alpha-n}$$

$$= |B(z,R)|R^\alpha 3^{\alpha-n} \fint_{B(0,R)} |f|dy$$

$$\geq |B_1| 3^{\alpha-n} \lim_{R\to\infty} R^\alpha \int_{B(0,R)} |f|dy = \infty.$$

Portanto concluímos que f não é integrável em qualquer bola $B \subset \mathbb{R}^n$ uma contradição. Logo $f \neq 0 q.t.p$. Quanto a recíproca, se f é nula em q.t.p então,

$$r^\alpha \fint_{B(x,r)} |f|dy = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

logo,

$$\sup_{r>0} r^\alpha \fint_{B(x,r)} |f|dy = \mathcal{M}_\alpha f(x) = 0.$$

□

Lema 3.0.2. *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mensurável e limitada então,*

$$\lim_{r\to 0} r^\alpha \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \fint_{B(x,r)} |f|dy = 0.$$

Demonstração.

$$\lim_{r\to 0} r^{\alpha} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \fint_{B(x,r)} |f| dy \le \lim_{r\to 0} r^{\alpha} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \fint_{B(x,r)} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} dy = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \lim_{r\to 0} r^{\alpha} = 0.$$

□

Como consequência do resultado anterior, concluímos que para cada $\epsilon > 0$, existe $r_\epsilon > 0$ tal que,

$$0 < r < r_\epsilon \Rightarrow r^{\alpha} \fint_{B(x,r)} |f| dy < \epsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

O lema anterior frustra a expectativa de existir uma estimativa pontual do tipo:

$$\mathcal{M}_\alpha f(x) \ge C|f(x)| \qquad \text{q.t.p.} x \in \mathbb{R}^n$$

caso contário f seria identicamente nula q.t.p em $\mathbb{R}^n$.

Lema 3.0.3. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então a função $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por,*

$$g(x,y) = \int_{B(x,y)} |f|$$

é contínua.

Demonstração. Dadas $(x_k)_{k\ge 1} \subset \mathbb{R}^n$, $(r_k)_{k\ge 1} \subset \mathbb{R}$ que convergem respectivamente para x e r. Notemos que:

$$\begin{aligned} \left| \int_{B(x_k,r_k)} |f| - \int_{B(x,r)} |f| \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} |f| \big(\chi_{B(x_k,r_k)} - \chi_{B(x,r)} \big) \right| \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} |f| \left| \chi_{B(x_k,r_k)} - \chi_{B(x,r)} \right| \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f| \chi_{B(x_k,r_k) \triangle B(x,r)} \\ &= \int_{B(x_k,r_k)\triangle B(x,r)} |f|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |B(x_k,r_k) \triangle B(x,r)| &\le |B(x_k,r_k) \triangle B(x, r_k + |x-x_k|)| + |B(x, r_k + |x-x_k|) \triangle B(x,r)| \\ &= 2|B_1|[(r_k + |x-x_k|)^n - r^n]. \end{aligned}$$

Mostramos que $\lim\limits_{k\to\infty} |B(x_k,r_k) \triangle B(x,r)| = 0$ consequentemente decorre da continuidade absoluta da integral que,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{B(x_k,r_k)\triangle B(x,r)} |f| = 0.$$

□

Uma consequência imediata do Lema é que fixado $R > 0$ e um compacto K se f for não-identicamente nula, ou seja, a função é não nula em quase todos os pontos de $\mathbb{R}^n$ então $\inf_{x\in K} R^{\alpha} \fint_{B(x,R)} |f| > 0$. Suponhamos por contradição que o ínfimo seja nulo, pela continuidade da função média juntamente com o Teorema de Weierstrass existe $x_0 \in K$ de modo que,

$$R^{\alpha} \fint_{B(x_0,R)} |f| = \inf_{x\in K} R^{\alpha} \fint_{B(x,R)} |f| > 0,$$

consequentemente f se anula em $B(x_0, R)$ a menos de um conjunto de medida nula, uma contradição como o fato de que a função é não-identicamente nula.

Lema 3.0.4. *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mensurável, limitada, não identicamente nula com suporte compacto, então dado $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto existem constantes $r_0 = r_0(f,K)$ e $R_0 = R_0(f,K)$ tais que,* $0 < r_0 < R_0$ *e vale a identidade,*

$$\mathcal{M}_{\alpha} f(x) = \sup_{r\in[r_0,R_0]} r^{\alpha} \fint_{B(x,r)} |f| dy \quad , \quad \forall x \in K.$$

Demonstração. Iniciamos a prova definindo as contantes $R_0 = \mathrm{Diam}\big(supp(f) \cup K\big)$ e $\epsilon = \inf_{x\in K} R_0^{\alpha} \fint_{B(x,R_0)} |f| dy$, sabemos que $\epsilon > 0$, pelo Lema 3.0.3 concluímos a existência de $r_\epsilon < R_0$ tal que,

$$\forall r \in (0, r_\epsilon]; \quad \forall x \in K \quad \Rightarrow \qquad r^{\alpha} \fint_{B(x,r)} |f| dy < \epsilon \le R_0^{\alpha} \fint_{B(x,R_0)} |f| dy.$$

Escolhemos $r_0 = r_\epsilon$. Dividimos a demonstração em casos, fixamos $x \in K$.

Caso $r_0 \le r \le R_0$ é trivial pois,

$$\sup_{r\in[r_0,R_0]} r^{\alpha} \fint_{B(x,r)} |f| dy \le \sup_{0<r} r^{\alpha} \fint_{B(x,r)} |f| dy.$$

Caso $r < r_0$. Segue da definição de r_0,

$$\forall r \in (0, r_\epsilon] \quad e \quad \forall x \in K \quad \Rightarrow r^{\alpha} \fint_{B(x,r)} |f| dy < \sup_{r\in[r_0,R_0]} r^{\alpha} \fint_{B(x,r)} |f| dy.$$

Caso $r > R_0$.

$$\begin{aligned}
\frac{r^{\alpha-n}}{|B_1|}\int_{B(x,r)}|f|dy &< \frac{R_0^{\alpha-n}}{|B_1|}\int_{B(x,r)}|f|dy\\
&= \frac{R_0^{\alpha-n}}{|B_1|}\int_{B(x,r)\setminus B(x,R_0)}|f|dy + \frac{R_0^{\alpha-n}}{|B_1|}\int_{B(x,R_0)}|f|dy\\
&= R_0^{\alpha}\fint_{B(x,R_0)}|f|dy\\
&\leq \sup_{r\in[r_0,R_0]} r^{\alpha}\fint_{B(x,r)}|f(y)|dy.
\end{aligned}$$

A última igualdade decorre do fato de que para cada $x \in K$ temos $B(x,R_0) \supset K \cup supp(f)$ e consequentemente temos $\big(B(x,r)\setminus B(x,R_0)\big) \cap supp(f) = \emptyset$ para todo $x \in K$.

Concluímos da análise de casos que,

$$\mathcal{M}_\alpha f(x) \leq \sup_{r\in[r_0,R_0]} r^{\alpha}\fint_{B(x,r)}|f|dy.$$

Combinamos com o fato de que em cada $x \in K$,

$$\sup_{r\in[r_0,R_0]} r^{\alpha}\fint_{B(x,r)}|f|dy \leq \mathcal{M}_\alpha f(x).$$

Assim concluímos a igualdade desejada. $\square$

O próximo teorema é o primeiro exemplo de o quão boa é a regularidade de $\mathcal{M}_\alpha f$ em relação a de $\mathcal{M}f$. Sabemos que dada $f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$, o Teorema da diferenciação de Lebesque implica em:

$$|f(x)| \leq \mathcal{M}f(x), \qquad \forall x \in \mathcal{L}_f$$

e portanto como consequência temos,

$$\|\mathcal{M}f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Não existe resultado análogo para o caso $\alpha > 0$ pois se $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ for constante vale $\mathcal{M}_\alpha f(x) = \infty$ em todos os pontos do domínio, desde que f tenha suporte compacto, vale um resultado surpreendentemente melhor . O teorema adiante, afirma que dada uma $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ com suporte compacto $\mathcal{M}_\alpha f$ é localmente Lipschitz. Pelo Teorema de Hadamart $\mathcal{M}_\alpha f$ possui derivada no sentido clássico em quase todos os pontos de $\mathbb{R}^n$. Este fato será demonstrado com o auxílio do lema anterior.

Teorema 3.0.3. *Seja $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, com suporte compacto e não identicamente nula em $\mathbb{R}^n$ então $\mathcal{M}_\alpha f$ é lipschitz em qualquer compacto $K \subset \mathbb{R}^n$. Além do mais, possui derivada em quase todos os pontos do seu domínio.*

Demonstração. Provaremos que para cada $r > 0$ a convolução $\lambda_r * |f| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é lipschitz em K com constante $C = C(K, r_0, R_0)$. Pela proposição anterior,

$$\mathcal{M}_\alpha f(x) = \sup_{r\in[r_0,R_0]} \lambda_r * |f|(x), \quad \forall x \in K.$$

Dados $x, y \in K$ e $r \in [r_0, R_0]$,

$$\begin{aligned}
\left|\lambda_r * |f|(x) - \lambda_r * |f|(y)\right| &= \frac{r^{\alpha-n}}{|B_1|}\left|\lambda_{B(0,r)} * |f|(x) - \lambda_{B(0,r)} * |f|(y)\right| \\
&\le \frac{r_0^{\alpha-n}}{|B_1|}\left|\lambda_{B(0,r)} * |f|(x) - \lambda_{B(0,r)} * |f|(y)\right| \\
&\le \frac{r_0^{\alpha-n}}{|B_1|}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\left(\lambda_{B(0,r)}(x-z) - \lambda_{B(0,r)}(y-z)\right) f(z)dz\right| \\
&= \frac{r_0^{\alpha-n}}{|B_1|}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\left(\lambda_{B(x,r)}(z) - \lambda_{B(y,r)}(z)\right) f(z)dz\right| \\
&\le \frac{r_0^{\alpha-n}}{|B_1|}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\left(\lambda_{B(x,r)}(z) - \lambda_{B(y,r)}(z)\right)\right|\left|f(z)\right| dz \\
&= \frac{r_0^{\alpha-n}}{|B_1|}\int_{\mathbb{R}^n}\lambda_{B(x,r)\triangle B(y,r)}(z)\left|f(z)\right| dz \\
&\le \frac{r_0^{\alpha-n}}{|B_1|}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\left|B(x,r)\triangle B(y,r)\right|.
\end{aligned}$$

Para o que falta iremos estimar a medida do conjunto acima, por meio da seguinte identidade oriunda da Teoria dos Conjuntos: $A \triangle C \subset A \triangle B \cup B \triangle C \quad \forall A, B, C$. Usamos as inclusões abaixo,

$$B(x, r + |x-y|) \supset B(x,r) \quad B(x, r+|x-y|) \supset B(y,r).$$

Concluímos que,

$$B(x,r) \triangle B(x, r+|x-y|) = B(x, r+|x-y|) \setminus B(x,r)$$

$$B(x, r+|x-y|) \triangle B(y,r) = B(x, r+|x-y|) \setminus B(y,r).$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\left|B(x,r) \triangle B(y,r)\right| &\leq \left|B(x,r) \triangle B(x,r+|x-y|)\right| + \left|B(x,r+|x-y|) \triangle B(y,r)\right| \\
&= \left|B(x,r+|x-y|) \setminus B(x,r)\right| + \left|B(x,r+|x-y|) \setminus B(y,r)\right| \\
&= 2|B_1|n[(r+|x-y|)^n - r^n].
\end{aligned}
$$

O Teorema do Valor Médio afirma a existência de $\xi \in (r, r+|x-y|)$ tal que,

$$(r+|x-y|)^n - r^n = 2|B_1|n\xi^{n-1}|x-y|,$$

daí,

$$\left|B(x,r) \triangle B(y,r)\right| \leq 2n|B_1|(R_0 + diamK)^{n-1}|x-y|.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\left|\lambda_r * |f|(x) - \lambda_r * |f|(y)\right| &\leq \frac{r_0^{\alpha-n}}{|B_1|}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} 2n|B_1|(R_0 + diamK)^{n-1}|x-y| \\
&\leq 2nr_0^{\alpha-n}(R_0 + diamK)^{n-1}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|x-y| \\
&= C(K, r_0, R_0, n)|x-y|.
\end{aligned}
$$

Sabemos que $\quad \forall x, y \in K \quad$ e $\quad \forall r \in [r_0, R_0]$,

$$
\begin{aligned}
\lambda_r * |f|(x) &\leq \lambda_r * |f|(y) + C(K, r_0, R_0, n)|x-y| \\
&\leq \mathcal{M}_\alpha f(y) + C(K, r_0, R_0, n)|x-y|.
\end{aligned}
$$

Tomando o supremo, obtemos:

$$\mathcal{M}_\alpha f(x) = \sup_{r \in [r_0, R_0]} \lambda_r * |f|(x) \leq \mathcal{M}_\alpha f(y) + C(K, r_0, R_0, n)|x-y|.$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_\alpha f(x) - \mathcal{M}_\alpha f(y) \leq C(K, r_0, R_0, n)|x-y|.$$

Trocando x por y, obtemos:

$$\mathcal{M}_\alpha f(x) - \mathcal{M}_\alpha f(y) \leq C(K, r_0, R_0, n)|x-y|,$$

daí

$$\left|\mathcal{M}_\alpha f(x) - \mathcal{M}_\alpha f(y)\right| \leq C(K, r_0, R_0, n)|x-y| \quad \forall x, y \in K.$$

Portanto $\mathcal{M}_\alpha f$ é contínua em $\mathbb{R}^n$. Como a função é localmente lipschitz aplicando o teorema de Hadamart, $\mathcal{M}_\alpha f$ é diferenciável em q.t.p. $\mathbb{R}^n$. $\square$

Os próximos resultados visam estudar o operador em espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$, o caso $\alpha = 0$ é bem conhencido na literatura da Análise Harmônica como Teorema de Hardy-Littlewood-Wiener.

Teorema 3.0.4. *(Hardy-Littlewood-Wiener) Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,com $1 \leq p \leq \infty$. Então existe uma constante $A = A(n,p)$, tal que ,*

(a) Se p=1 temos:

$$\left|\left\{x : \mathscr{M} f(x) > \lambda\right\}\right| \leq \frac{A}{\lambda}\|f\|_1, \quad \forall \lambda > 0.$$

(b) Caso contrário,

$$\|\mathscr{M} f\|_p \leq A\|f\|_p.$$

Como veremos no decorrer do trabalho o Operador Maximal Fracionário de Hardy consegue melhorar este resultado no sentido de que dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ então $\mathscr{M}_\alpha f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ para algum $q > p$ dependendo de α, este fato sera demonstrado com o auxílio de certas propriedades do Operador de Riesz, mais especificamente o Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev . Seja $f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$ e $x \in \mathbb{R}^n$ definimos o Potencial de Riesz da função f como,

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

Teorema 3.0.5. *Sejam $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < \infty$, $0 < \theta < 1$ existem constantes C_1, C_2, C_3 tais que para qualquer função mensurável f e $x \in \mathbb{R}^n$,*

(1) $I_\alpha f(x) \leq C_1(n,\alpha,p)\|f\|_p^{\frac{\alpha p}{n}} \mathscr{M} f(x)^{1-\frac{\alpha p}{n}}, \quad 1 \leq p < \dfrac{n}{\alpha},$

(2) $I_{\alpha\theta} f(x) \leq C_2(n,\alpha,p) I_\alpha f(x)^\theta \mathscr{M} f(x)^{1-\theta},$

(3) $I_{\alpha\theta} f(x) \leq C_3(n,\alpha,p) \mathscr{M}_\alpha f(x)^\theta \mathscr{M} f(x)^{1-\theta}.$

Demonstração. (1)

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,\delta)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B(x,\delta 2^{-k}) \setminus B(x,\delta 2^{-k+1})} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\delta 2^{-k})^{n-\alpha}} \int_{B(x,\delta 2^{-k+1})} |f|(y) dy \\
&\leq |B_1| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\delta 2^{-k+1})^n}{(\delta 2^{-k})^{n-\alpha}} \mathscr{M} f(x) \\
&= \frac{|B_1| 2^{n-\alpha}}{1-2^{-\alpha}} \delta^\alpha \mathscr{M} f(x).
\end{aligned}$$

$$\int_{B(x,\delta)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \leq A\delta^{\alpha} \mathcal{M} f(x)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\delta)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \leq \|f\|_p \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\delta)} \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)q}} dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\delta)} \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)q}} dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\delta)}(y)}{|x-y|^{(n-\alpha)q}} dy \\
&= \int_0^{\infty} \int_{\partial B(x,s)} \frac{\lambda_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\delta)}(y)}{|x-y|^{(n-\alpha)q}} dz ds \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{s^{(n-\alpha)q}} \int_{\partial B(x,s)} \lambda_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\delta)}(y) dz ds \\
&= \int_{\delta}^{\infty} \frac{|\partial B(x,s)|}{s^{(n-\alpha)q}} ds \\
&= n|B_1| \int_{\delta}^{\infty} s^{n-(n-\alpha)q-1} ds \\
&= |B_1| \frac{n\delta^{\left(\alpha-\frac{n}{p}\right)q}}{(n-\alpha)q-n}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\delta)} \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)q}} dy \leq A\delta^{\left(\alpha-\frac{n}{p}\right)} \|f\|_p.$$

Somando as estimativas obtidas,

$$\int_{B(x,\delta)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\delta)} \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)q}} dy \leq A\delta^{\alpha} \mathcal{M} f(x) + A\delta^{\left(\alpha-\frac{n}{p}\right)} \|f\|_p$$

Fazemos $\delta = \left(\frac{\|f\|_p}{\mathcal{M} f(x)}\right)^{\frac{p}{n}}$ obtemos o resultado almejado.

(2) Fazemos a substituição $\alpha \mapsto \alpha\theta$ na desigualdade anterior,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\delta)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha\theta}} dy \leq A\delta^{\alpha\theta-\alpha} I_{\alpha} f(x).$$

Para finalizarmos fazemos $\delta = \left(\frac{I_{\alpha} f(x)}{\mathcal{M} f(x)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

(c)

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\delta)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha\theta}} dy \leq A\delta^{\alpha\theta-\alpha} \mathcal{M}_{\alpha} f(x).$$

Escolhemos $\delta = \left(\frac{\mathcal{M}_{\alpha} f(x)}{\mathcal{M} f(x)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

$\square$

Teorema 3.0.6. *(Hardy-Littlewood-Sobolev) Sejam* $0 < \alpha < n$,$1 \leq p < q < \infty$*, satisfazendo* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ *então:*

(a) Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *então o Potencial de Riesz* $I_\alpha f(x)$ *está bem definido em* $L^p(\mathbb{R}^n)$*;*

(b) $\big((p,q) - Forte\big)$*Se* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *então existe uma constante C, independente de* f *satisfazendo,*

$$\|I_\alpha f\|_q \leq C\|f\|_p.$$

(c) $\big((1,q) - Fraco\big)$ *Se* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *então para cada* $\lambda > 0$*, existe uma constante* C *independende de* f *de modo que:*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n ; |I_\alpha f(x)| > \lambda\right\}\right| \leq \left(\frac{C\|f\|_1}{\lambda}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}.$$

Demonstração. (b) Usando a estimativa,

$$I_\alpha f(x) \leq C_1 \|f\|_p^{\frac{\alpha p}{n}} \mathcal{M} f(x)^{1-\frac{\alpha p}{n}}, \quad 1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$$

$$\|I_\alpha f\|_q \leq C_1 \|f\|_p^{\frac{\alpha p}{n}} \|(\mathcal{M} f)^{1-\frac{\alpha p}{n}}\|_q = C_1 \|f\|_p^{\frac{\alpha p}{n}} \|\mathcal{M} f\|_p^{\frac{p}{q}}.$$

Em sequida usamos o Teorema de Wiener,

$$C_1 \|f\|_p^{\frac{\alpha p}{n}} \|\mathcal{M} f\|_p^{\frac{p}{q}} \leq C_1 A^{\frac{p}{q}} \|f\|_p^{\frac{\alpha p}{n}} \|f\|_p^{\frac{p}{q}} = C_1 A^{\frac{p}{q}} \|f\|_p.$$

(c) Fazemos uso da estimativa anterior,

$$I_\alpha f(x) \leq C_1 \|f\|_p^{\frac{\alpha p}{n}} \mathcal{M} f(x)^{1-\frac{\alpha p}{n}} \quad 1 \leq p < \frac{n}{\alpha}.$$

Portanto,

$$\left|\left\{x : I_\alpha f(x) > \lambda\right\}\right| \leq \left|\left\{x : \mathcal{M}_\alpha f(x) > K\right\}\right| \quad , k = \left(\frac{\lambda}{C_1 \|f\|_1^{\frac{\alpha}{n}}}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}.$$

Usamos novamente o Teorema de Wiener,

$$\left|\left\{x : \mathcal{M}_\alpha f(x) > K\right\}\right| \leq \frac{A}{k}\|f\|_1 = \left(\frac{A^{\frac{n-\alpha}{n}} C_1 \|f\|_1}{\lambda}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}.$$

□

Teorema 3.0.7. *Sejam* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *e* $0 < \alpha < n$ *com* $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $0 < q \leq \infty$, $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{p}$*. Então existem constantes* $C_1(\alpha, p, n)$ *e* $C_2(\alpha, p, n)$ *tais que para* $0 < \theta < 1$*,*

$$\|I_{\alpha\theta} f\|_r \leq C_1 \|I_\alpha f\|_q^\theta \|f\|_p^{1-\theta}$$

$$\|I_{\alpha\theta} f\|_r \leq C_2 \|\mathcal{M}_\alpha f\|_q^\theta \|f\|_p^{1-\theta}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.0.7.

$$\begin{aligned}\|I_{\alpha\theta} f\|_r &\leq C_1 \left\| (I_\alpha f)^\theta (\mathcal{M} f)^{1-\theta} \right\|_r \\ &= C_1 \left\| (I_\alpha f)^{r\theta} (\mathcal{M} f)^{r(1-\theta)} \right\|_1^{\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder e o Teorema de Hardy-Littlewood-Wiener,

$$\begin{aligned}&\leq C_1 \left\| (I_\alpha f)^{r\theta} \right\|_{\frac{q}{r\theta}}^{\frac{1}{r}} \left\| (\mathcal{M} f)^{r(1-\theta)} \right\|_{\frac{p}{r(1-\theta)}}^{\frac{1}{r}} \\ &= C_1 \|I_\alpha f\|_q^\theta \|\mathcal{M} f\|_p^{1-\theta} \\ &\leq C_1 \|I_\alpha f\|_q^\theta \|f\|_p^{1-\theta}.\end{aligned}$$

Quanto a segunda desigualdade, usamos a terceira afirmação do teorema anterior temos,

$$\|I_{\alpha\theta} f\|_r \leq C_3 \left\| (\mathcal{M}_\alpha f)^\theta (\mathcal{M} f)^{1-\theta} \right\|_r = C_3 \left\| (\mathcal{M}_\alpha f)^\theta (\mathcal{M} f)^{1-\theta} \right\|_1^{\frac{1}{r}}$$

Aplicando novamente Hölder,

$$\begin{aligned}&\leq C_3 \left\| (\mathcal{M}_\alpha f)^{r\theta} \right\|_{\frac{q}{r\theta}}^{\frac{1}{r}} \\ &= \left\| (\mathcal{M}_\alpha f)^{r(1-\theta)} \right\|_{\frac{p}{r(1-\theta)}}^{\frac{1}{r}} \\ &= C_3 \|\mathcal{M}_\alpha f\|_q^\theta \|\mathcal{M}_\alpha f\|_p^{1-\theta} \\ &\leq C_1 \|\mathcal{M}_\alpha f\|_q^\theta \|f\|_p^{1-\theta}.\end{aligned}$$

□

Ressaltemos que a segunda desigualdade do Teorema 3.0.7. anterior também é válida caso $\theta = 1$, ou seja, dado $0 < q < \infty$ e $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ verifica se $\|I_\alpha * f\|_q \leq c\|\mathcal{M}_\alpha f\|_q$. Esta proposição é uma versão fraca de um teorema bastante surpreendente e mais geral em (ADAMS D. R.; HEDBERG, 1999), devido a B.Muckenhoupt e R.L.Wheeden, que afirma a estimativa acima para as versões estendidas em medidas de $\mathbb{R}^n$. Os próximos resultados terão a finalidade de demonstrá-lo, o lema da próxima seção será importante na prova.

4 OPERADORES EM MEDIDAS

Ainda com a finalidade de estudar o operador maximal em $L^P(\mathbb{R}^n)$, iremos definir extenções dos operadores mencionados em medidas. Dada uma medida μ,em $\mathbb{R}^n$, definimos o Operador Maximal Fracionário $\mathcal{M}_\alpha\mu : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e o Potencial de Riesz de uma medida $I_\alpha\mu : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{M}_\alpha\mu(x) = \sup_{r>0} \frac{r^\alpha}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} d\mu$$

$$I_\alpha\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Convém notar que como para cada $f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$ podemos definir uma medida tal que $d\mu = |f|dm$, portanto pelo lema Mudança de Medida na integral temos,

$$I_\alpha\mu(x) = I_\alpha f(x) \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_\alpha\mu(x) = \mathcal{M}_\alpha f(x).$$

Lema 4.0.1. *Seja μ uma medida em $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $\quad 0 < \alpha < n$. Então para todo $\delta > 0$ temos:*

(1) $$\int_{B(x,\delta)} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} = (n-\alpha)\int_0^\delta \frac{\mu(B(x,r))}{r^{n-\alpha}}\frac{dr}{r} + \frac{\mu(B(x,\delta))}{\delta^{n-\alpha}},$$

(2) $$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x,\delta)} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} = (n-\alpha)\int_\delta^\infty \frac{\mu(B(x,r))}{r^{n-\alpha}}\frac{dr}{r} - \frac{\mu(B(x,\delta))}{\delta^{n-\alpha}}.$$

Demonstração. (1) Aplicando o Teorema de Fubini-Tonelli. Notemos que $\lambda_{B(x,r)}(y) = \lambda_{[|x-y|,\infty)}(r)$, portanto,

$$\begin{aligned}
(n-\alpha)\int_0^\delta \frac{\mu(B(x,r))}{r^{n-\alpha}}\frac{dr}{r} &= \int_0^\delta \int_{B(x,r)} \frac{(n-\alpha)}{r^{n-\alpha+1}} d\mu(y)dr \\
&= \int_0^\delta \int_{B(x,\delta)} \lambda_{B(x,r)}(y)\frac{(n-\alpha)}{r^{n-\alpha+1}} d\mu(y)dr \\
&= \int_{B(x,\delta)} \int_0^\delta \lambda_{B(x,r)}(y)\frac{(n-\alpha)}{r^{n-\alpha+1}} drd\mu(y) \\
&= \int_{B(x,\delta)} \int_0^\delta \lambda_{[|x-y|,\infty)}(x)\frac{(n-\alpha)}{r^{n-\alpha+1}} drd\mu(y) \\
&= \int_{B(x,\delta)} \int_{|x-y|}^\delta \frac{(n-\alpha)}{r^{n-\alpha+1}} drd\mu(y) \\
&= \int_{B(x,\delta)} \frac{1}{|x-y|^{n-\delta}} - \frac{1}{\delta^{n-\delta}} d\mu(y) \\
&= \int_{B(x,\delta)} \frac{1}{|x-y|^{n-\delta}} d\mu(y) - \frac{\mu(B(x,\delta))}{\delta^{n-\alpha}}.
\end{aligned}$$

(2)

$$(n-\alpha)\int_\delta^\infty \frac{\mu(B(x,r))}{r^{n-\alpha}}\frac{dr}{r}-\frac{\mu(B(x,\delta))}{\delta^{n-\alpha}}=\int_\delta^\infty \frac{(n-\alpha)\mu(B(x,r))}{r^{n-\alpha+1}}dr-\int_\delta^\infty \frac{(n-\alpha)\mu(B(x,\delta))}{r^{n-\alpha+1}}dr$$

$$=\int_\delta^\infty \left(\int_{B(x,r)} d\mu(y)dr-\int_{B(x,\delta)} d\mu(y)\right)\frac{(n-\alpha)}{r^{n-\alpha+1}}dr$$

$$=\int_\delta^\infty \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x,\delta)} \lambda_{B(x,r)}(y)\frac{(n-\alpha)}{r^{n-\alpha+1}}d\mu(y)dr.$$

Novamente Fubini,

$$=\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x,\delta)}\int_\delta^\infty \lambda_{B(x,r)}(y)\frac{(n-\alpha)}{r^{n-\alpha+1}}drd\mu(y)$$

de $(*)$

$$=\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x,\delta)}\int_\delta^\infty \lambda_{[|x-y|,\infty)}(r)\frac{(n-\alpha)}{r^{n-\alpha+1}}drd\mu(y)$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x,\delta)}\int_{|x-y|}^\infty \frac{(n-\alpha)}{r^{n-\alpha+1}}drd\mu(y)$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x,\delta)} \frac{1}{|x-y|^{n-\delta}}d\mu(y).$$

□

Como consequência do lema anterior obtemos a seguinte identidade,

$$I_\alpha*\mu(x)=(n-\alpha)\int_0^\infty \frac{\mu(B(x,r))}{r^{n-\alpha}}\frac{dr}{r},\quad \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

O próximo resultado é muito importante, por ser capaz de estimar a função distribuição na representação Layer Cake da norma L^q, afim de obter o resultado de regularidade para o Operador de Riesz.

Teorema 4.0.1. *(Good λ Inequality) Existem $a>1$ e $b>0$ tais que para todo $\lambda>0$ e qualquer $\epsilon\in(0,1]$ então,*

$$\left|\{x;I_\alpha*\mu(x)>a\lambda\}\right|\le b\epsilon^{\frac{n}{n-\alpha}}\left|\{x;I_\alpha*\mu(x)>\lambda\}\right|+\left|\{x;\mathcal{M}_\alpha\mu(x)>\epsilon\lambda\}\right|.$$

Demonstração. Sabemos que para todo λ positivo o conjunto $F=\{x:I_\alpha*\mu(x)>a\lambda\}$ é aberto pois decorre do Lema de Fatou que o Potencial de Riesz é semi-contínuo inferiormente, fixamos λ e em seguida fazemos uso da Decomposição de Whitney. Portanto existe uma família enumerável de cubos diáticos $\{Q_i\}_{i\ge1}$ tais que,

$$\bigcup_{i=1}^\infty Q_i=\{x:I_\alpha*\mu(x)>a\lambda\}.$$

Afirmamos que cada cubo da coleção satisfaz unicamente uma das afirmações:

(1) $Q \subset \left\{x; \mathscr{M}_\alpha \mu(x) > \epsilon\lambda\right\}$,

(2) $\left\{x \in Q; I_\alpha * \mu(x) > a\lambda\right\} \subset \left\{x; I_\alpha * \mu(x) > a\frac{\lambda}{2}\right\}$.

Fixado $Q \in \{Q_i\}_{i\geq 1}$. Suponhamos que o cubo não satisfaça a condição imposta em (1). Portanto, existe $x_0 \in Q$ tal que $\mathscr{M}_\alpha \mu(x_0) \leq \epsilon\lambda$. Agora considere P a bola centrada em Q de raio $6\mathrm{diam}(Q)$. Denotaremos a restrição de μ a P por μ_1, e $\mu_2 = \mu - \mu_1$. Então , por (STEIN, 1970) temos :

$$\left|\left\{x; I_\alpha * \mu_1(x) > a\frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq A\left(\frac{1}{a\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} d\mu_1\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}.$$

Agora vamos estimar a integral da desigualdade acima. Seja $B(x_0, 8\mathrm{diam}(Q))$ então temos que $P \subset B(x_0, 8\mathrm{diam}(Q))$ logo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} d\mu_1 = \int_P d\mu_1 &\leq \int_{B(x_0,8\mathrm{diam}(Q))} d\mu \\ &\leq A\mathscr{M}_\alpha\mu(x_0)\Big(|B(x_0, 8\mathrm{diam}(Q))|\Big)^{\frac{n-\alpha}{n}} \\ &\leq A\epsilon\lambda\Big(|B(x_0, 8\mathrm{diam}(Q))|\Big)^{\frac{n-\alpha}{n}}.\end{aligned}$$

Escolhendo $\epsilon = A\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}$,

$$\left|\left\{x; I_\alpha * \mu_1(x) > a\frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq b\epsilon^{\frac{n}{n-\alpha}}|Q|.$$

Ainda decorre da decomposição,que todos os cubos satisfazem,

$$\mathrm{diam}(Q) \leq \mathrm{dist}(Q, F) \leq 4 \cdot \mathrm{diam}(Q).$$

Consequentemente existe $x_1 \in F$, ou seja, $I_\alpha * \mu(x_1) < \lambda$ no qual $\mathrm{dist}(x_1, Q) \leq 4\mathrm{diam}(Q)$, como consequência $x_1 \in P$ pois sendo c' o centro de Q pela desigualdade triangular teremos:

$$\begin{aligned}|x_1 - q| &\geq |x_1 - c'| - |q - c'|, \quad \forall q \in Q \\ |x_1 - q| &\geq |x_1 - c'| - \frac{Diam(Q)}{2}.\end{aligned}$$

Tomando o ínfimo em $q \in Q$ obtemos,

$$\begin{aligned}|x_1 - c'| &\leq \mathrm{Dist}(x_1, Q) + \frac{\mathrm{Diam}(Q)}{2} \\ &\leq 4 \cdot \mathrm{Diam}(Q) + \frac{\mathrm{Diam}(Q)}{2} = \frac{9}{2}\mathrm{Diam}(Q).\end{aligned}$$

Vale ressaltar que por construção $P = \left\{z \in \mathbb{R}^n; \mathrm{Dist}(c', z) < \frac{13}{2}\mathrm{Diam}(Q)\right\}$, portanto $x_1 \in P$. Agora provaremos a seguinte relação:

$$|x-y| \geq \frac{6}{11}|x_1 - y|, \quad \forall x \in Q, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus P.$$

Com efeito, dados $x \in Q$ e $y \in \mathbb{R}^n \setminus P$ imediatamente,

$$|x-y| \geq \mathrm{Dist}(Q, \mathbb{R}^n \setminus P) = 6 \cdot \mathrm{Diam}(Q).$$

Da desigualdade triangular ocorre,

$$\begin{aligned}
|x_1 - y| &\leq |x_1 - x| + |x - y| \\
&\leq |x_1 - c'| + |c' - x| + |x - y| \\
&\leq \frac{9}{2}\mathrm{Diam}(Q) + \frac{1}{2}\mathrm{Diam}(Q) + |x-y| \\
&= \frac{5}{6}6\mathrm{Diam}(Q) + |x-y| \leq \frac{11}{6}|x-y|.
\end{aligned}$$

Adiante denotaremos $L = \frac{6}{11}$. Desde que, $I_\alpha * \mu_2(x_1) \leq \lambda$ fazemos uso da estimativa anterior para concluírmos que para cada $x \in Q$:

$$I_\alpha * \mu_2(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu_2(y).$$

Por construção, $supp(\mu_2) = \mathbb{R}^n \setminus P$ tem que verificar isso:

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{L^{n-\alpha}}{|x_1 - y|^{n-\alpha}} d\mu_2(y) = L^{n-\alpha} I_\alpha * \mu_2(x_1) \leq L^{n-\alpha}\lambda.$$

Escolhendo $a > max\{1, 2L^{n-\alpha}\}$ então,

$$I_\alpha * \mu_2(x) \leq a\frac{\lambda}{2}, \quad \forall x \in Q.$$

Fazendo uso do Lema (2.1.2),

$$I_\alpha * \mu(x) = I_\alpha * \mu_1(x) + I_\alpha * \mu_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

assim concluímos

$$\left\{x \in Q; I_\alpha * \mu(x) > a\lambda\right\} \subset \left\{x; I_\alpha * \mu_1(x) > a\frac{\lambda}{2}\right\}.$$

Concluímos que ambas as afirmações são mutualmente excludentes. Para finalizarmos a demonstração definimos os conjuntos de índices:

$$I = \left\{i \in \mathbb{N}; Q_i \quad \text{satisfaz a afirmação I,}\right\} \qquad I' = \left\{i \in \mathbb{N}; Q_i \quad \text{satisfaz a afirmação II}\right\}.$$

Fazemos uso da afirmação provada e reescrevemos a união dos cubos da decomposição da forma abaixo:

$$\{x; I_\alpha * \mu(x) > a\lambda\} = \bigcup_{i\in I}\{x \in Q_i; I_\alpha * \mu(x) > a\lambda\} \cup \bigcup_{i\in I'}\{x \in Q_i; I_\alpha * \mu(x) > a\lambda\}$$

$$\subset \{x; \mathscr{M}_\alpha\mu(x) > \epsilon\lambda\} \cup \bigcup_{i\in I'}\{x \in Q_i; I_\alpha * \mu(x) > a\lambda\}.$$

Em seguida usamos a propriedade da sub-aditividade da medida e o fato da coleção de cubos ser quase-disjunta:

$$\left|\{x; I_\alpha * \mu(x) > a\lambda\}\right| \leq \left|\{x; \mathscr{M}_\alpha\mu(x) > \epsilon\lambda\}\right| + \sum_{i\in I'}\left|\{x \in Q_i; I_\alpha * \mu(x) > a\lambda\}\right|$$

$$\leq \left|\{x; \mathscr{M}_\alpha\mu(x) > \epsilon\lambda\}\right| + b\epsilon^{\frac{n}{n-\alpha}}\sum_{i\in I'}|Q_i|$$

$$\leq \left|\{x; \mathscr{M}_\alpha\mu(x) > \epsilon\lambda\}\right| + b\epsilon^{\frac{n}{n-\alpha}}\sum_{i\geq 1}|Q_i|$$

$$= \left|\{x; \mathscr{M}_\alpha\mu(x) > \epsilon\lambda\}\right| + b\epsilon^{\frac{n}{n-\alpha}}\left|\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i\right|$$

$$= \left|\{x; \mathscr{M}_\alpha\mu(x) > \epsilon\lambda\}\right| + b\epsilon^{\frac{n}{n-\alpha}}\left|\{x; I_\alpha * \mu(x) > a\lambda\}\right|$$

$$\leq \left|\{x; \mathscr{M}_\alpha\mu(x) > \epsilon\lambda\}\right| + b\epsilon^{\frac{n}{n-\alpha}}\left|\{x; I_\alpha * \mu(x) > \lambda\}\right|.$$

□

Teorema 4.0.2. *(B.Muckenhoupt-R.L.Wheeden) Sejam* $1 < p < n$*,* $1 < \alpha < n$ *e uma medida* μ *então, existe uma constante* $C = C(n,p)$ *tal que :*

$$c^{-1}\|\mathscr{M}_\alpha\mu\|_p \leq \|I_\alpha * \mu\|_p \leq c\|\mathscr{M}_\alpha\mu\|_p.$$

Caso $p \leq \frac{n}{n-\alpha}$ *ambas as normas são infinitas.*

Demonstração. Começaremos a demonstrar a primeira desigualdade. Dado $x \in \mathbb{R}^n$,

$$I_\alpha * \mu(x) \geq \int_{B(x,r)} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) \geq \frac{1}{r^{n-\alpha}}\int_{B(x,r)} d\mu(y) = |B_1| r^\alpha \fint_{B(x,r)} d\mu(y) \quad \forall r > 0.$$

Logo, $I_\alpha * \mu(x) \geq |B_1|\mathscr{M}_\alpha\mu(x)$, desde que $C^{-1}(n,\alpha) \leq |B_1|$, obtemos:

$$\|I_\alpha * \mu\|_p \geq |B_1|\|\mathscr{M}_\alpha\mu\|_p \geq C^{-1}\|\mathscr{M}_\alpha\mu\|_p.$$

Primeiramente trataremos o caso em que $supp(\mu)$ é compacto, o caso geral será tratado somente ao final da prova. Fazemos uso da estimativa "good $\lambda-$ inequality ", consequentemente existem $a>1$ e $b>0$ tais que:

$$\left|\{x; I_\alpha*\mu(x)>a\lambda\}\right| \leq b\epsilon^{\frac{n}{n-\alpha}}\left|\{x; I_\alpha*\mu(x)>\lambda\}\right| + \left|\{x; \mathcal{M}_\alpha\mu(x)>\epsilon\lambda\}\right|, \quad \forall\lambda>0 \quad e \quad \forall\epsilon\in(0,1].$$

De fato, multiplicando ambos os membros da desigualdade por λ^{p-1} e integrando com respeito a λ, obtemos :

$$\int_0^R \left|\{x; I_\alpha*\mu(x)>a\lambda\}\lambda^{p-1}d\lambda\right.$$

$$\leq b\epsilon^{\frac{n}{n-\alpha}}\int_0^R\left|\{x; I_\alpha*\mu(x)>a\lambda\}\right|\lambda^{p-1}d\lambda + \int_0^R\left|\{x; \mathcal{M}_\alpha\mu(x)>\epsilon\lambda\}\right|\lambda^{p-1}d\lambda.$$

Efetuando as mudança de variável $\lambda\longmapsto a\lambda$ e $\lambda\longmapsto\epsilon\lambda$ teremos:

$$a^{-p}\int_0^{aR}\left|\{x; I_\alpha*\mu(x)>a\lambda\}\lambda^{p-1}d\lambda\right.$$

$$\leq b\epsilon^{\frac{n}{n-\alpha}}\int_0^R\left|\{x; I_\alpha*\mu(x)>a\lambda\}\right|\lambda^{p-1}d\lambda + \epsilon^{-p}\int_0^R\left|\{x; \mathcal{M}_\alpha\mu(x)>\epsilon\lambda\}\right|\lambda^{p-1}d\lambda.$$

Cada uma das integrais acima são finitas como consequência do fato de que μ tem suporte compacto. Em seguida, desde que $\epsilon\leq(2ba^p)^{\frac{\alpha}{n}-1}$ teremos $b\epsilon^{\frac{n}{n-\alpha}}\leq\frac{a^{-p}}{2}$. Portanto,

$$a^{-p}\int_0^{aR}\left|\{x; I_\alpha*\mu(x)>a\lambda\}\lambda^{p-1}d\lambda\right.$$

$$\leq \frac{a^{-p}}{2}\int_0^R\left|\{x; I_\alpha*\mu(x)>a\lambda\}\right|\lambda^{p-1}d\lambda + 2\epsilon^{-p}\int_0^R\left|\{x; \mathcal{M}_\alpha\mu(x)>\epsilon\lambda\}\right|\lambda^{p-1}d\lambda.$$

Fazendo $R\to\infty$, concluímos:

$$a^{-p}\int_0^\infty\left|\{x; I_\alpha*\mu(x)>a\lambda\}\right|\lambda^{p-1}d\lambda \leq 2\epsilon^{-p}\int_0^\infty\left|\{x; I_\alpha*\mu(x)>a\lambda\}\right|\lambda^{p-1}d\lambda.$$

Ultilizando a representação "layer cake":

$$\frac{a^{-p}}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\left|I_\alpha*\mu\right|^P dx \leq 2\frac{\epsilon^{-p}}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\mathcal{M}_\alpha\mu\right|^p dx$$

$$\|I_\alpha*\mu\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}}\frac{a}{\epsilon}\|\mathcal{M}_\alpha\mu\|_p \quad \forall\epsilon\in\left(0,(2ba^p)^{\frac{\alpha}{n}-1}\right)$$

$$\leq 2^{\frac{1}{p}}\frac{a}{\epsilon_0}\|\mathcal{M}_\alpha\mu\|_p \quad ;\epsilon_0 = min\left\{(2ba^p)^{\frac{\alpha}{n}-1}, a|B_1|2^{\frac{1}{p}}\right\}.$$

Definimos $C(n,p) = 2^{\frac{1}{p}}\frac{a}{\epsilon_0}$ e consequentemente $C^{-1} \geq |B_1|$, este último fato conclui o cálculo da primeira estimativa. Resta provarmos o caso em que μ não possui suporte compacto, para tanto definimos uma sequência de medidas $(\mu_n)_{n\geq 1}$ tais que $\mu_n = \mu|_{B(0,n)}$ como,

$$\limsup \mu_n(K) \leq \mu(K), \quad \forall K \in \mathbb{R}^n \qquad \liminf \mu_n(K) \leq \mu(O), \quad \forall O \in \mathbb{R}^n.$$

Então pelo Lema 2.1.1.$\mu_n \rightharpoonup \mu$, consequentemente:

$$I_\alpha * \mu_n \nearrow I_\alpha * \mu, \quad q.t.p. \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Como

$$\|I_\alpha * \mu_n\|_p \leq \|I_\alpha * \mu\|_p \leq C\|\mathcal{M}_\alpha \mu\|_p, \quad \forall n \geq 1.$$

Decorre do Teorema da Convergência Monótona:

$$\lim_{n\to\infty} \|I_\alpha * \mu_n\|_p = \|I_\alpha * \mu\|_p \leq C\|\mathcal{M}_\alpha \mu\|_p.$$

□

Teorema 4.0.3. *Sejam* $1 < p < n$ *e* $1 < \alpha < n$ *então, existe uma constante* $C = C(n,p)$ *tal que :*

$$C^{-1}\|\mathcal{M}_\alpha f\|_p \leq \|I_\alpha f\|_p \leq C\|\mathcal{M}_\alpha f\|_p, \quad \forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Caso $p \leq \frac{n}{n-\alpha}$ *ambas as normas são infinitas.*

Demonstração. Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ então $|f| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, fazemos a mudança de variável na medida, aplicamos o teorema anterior para a medida $\mu(E) = \int_E |f|$, consequentemente pelo lema da mudança de medida na integral temos:

$$I_\alpha * \mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy = I_\alpha f(x),$$

da mesma forma

$$\frac{r^\alpha}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} d\mu(y) = \frac{r^\alpha}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)| dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

daí

$$\mathcal{M}_\alpha f(x) = \mathcal{M}_\alpha \mu(x).$$

□

O teorema anterior acarreta em uma outra versão do Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev para o operador $\mathscr{M}_\alpha$, enunciado abaixo.

Teorema 4.0.4. *(B.Muckenhoupt-R.L.Wheeden) Sejam* $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < q < \infty$*, satisfazendo* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ *então:*

(a) $\big((p,q) - Forte\big)$ *Se* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *então existe uma constante C, independente de* f *satisfazendo*

$$\|\mathscr{M}_\alpha f\|_q \leq C\|f\|_p.$$

(b) $\big((1,q) - Fraco\big)$ *Se* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *então para cada* $\lambda > 0$*, existe uma constante* C *independende de* f *de modo que,*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n; \mathscr{M}_\alpha(x) > \lambda\right\}\right| \leq \left(\frac{C\|f\|_1}{\lambda}\right)^q.$$

Demonstração. Quando ao primeiro item, basta fazermos uso do Teorema de B.Muckenhoupt-R.L.Wheeden para funções, já o segundo item decorre do fato $\mathscr{M}_\alpha(x) \leq I_\alpha(x)$ juntamente com a estimativa (1,q)-fraco do Potencial de Riesz do Teorema de Hardy. □

O próximo Teorema devido a Juha Kinnunen trata-se de uma extensão do seguinte resultado. Sejam $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n), n > 1$, $1 < p \leq \infty$ então o operador maximal é limitado no espaço de Sobolev e satisfaz:

$$\|\mathscr{M}f\|_{1,p} \leq C(n,p)\|f\|_{1,p}; \left|D\mathscr{M}f(x)\right| \leq C'(n,p)\mathscr{M}Df(x), \quad q.t.p. x \in \mathbb{R}^n.$$

Este resultado não será demonstrado, pois corresponde ao caso $\alpha = 0$ do Teorema de Kinnunen em (KINNUNEN J.; SAKSMAN, 2003), que será demonstrado a seguir.

Vale ressaltar algumas questões que permanecem em aberto com relação a $\mathscr{M}f$. Como consequência da estimativa pontual:

$$\|D\mathscr{M}f\|_p \leq C\|Df\|_p, \qquad \forall p > 1.$$

O caso $p = 1$ permanece insolúvel há bastante tempo, em parte isso se da pelo fato de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ser reflexivo apenas se $p > 1$ como será vista na prova da sua versão mais geral. Argumentos de análise funcional são muito ultilizados especificamente em convergência fraca. Não se sabe se existe uma contante $C > 0$ tal que,

$$\|D\mathscr{M}f\|_1 \leq C\|Df\|_1.$$

Existe um resultado devido a H. Tanaka, em (TANAKA, 2002), afirmando que se $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$ então o Operador Maximal não centrado é diferenciável q.t.p. e vale a desigualdade:

$$\|D\mathcal{M}f\|_1 \leq 2\|Df\|_1.$$

Um teorema de Luiro em (LUIRO, 2007), diz que o operador

$$\mathcal{M} : W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n),$$

é contínuo para todo $1 < p < \infty$.

Teorema 4.0.5. *(Juha Kinnunen-Eero Saksman) Sejam $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n), 1 < p \leq q < \infty$ e $0 \leq \alpha < \frac{n}{p}$ satisfazendo $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$.*
Então $\mathcal{M}_\alpha u \in W^{1,q}(\mathbb{R}^n)$, além do que existe uma constante $C = C(n,p,\alpha)$ tal que,

$$\|\mathcal{M}_\alpha f\|_{1,q} \leq C\|f\|_{1,p} \qquad \left|D\mathcal{M}_\alpha f(x)\right| \leq C'\mathcal{M}_\alpha Df(x), q.t.p. x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Fazemos uso da caracterização dos espaços de Sobolev via "Difference quotients". Primeiramente estimamos o quociente do operador pelo quociente da função por meio das propriedades do operador tais como sublinearidade e comutatividade de translações

$$\begin{aligned}
\left|D_i^h \mathcal{M}_\alpha f(x)\right| &= \left|\frac{T_h(\mathcal{M}_\alpha f)(x) - \mathcal{M}_\alpha f(x)}{h}\right| \\
&= \left|\frac{\mathcal{M}_\alpha T_h f(x) - \mathcal{M}_\alpha f(x)}{h}\right| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\mathcal{M}_\alpha(T_h f - f)(x) \\
&= \mathcal{M}_\alpha\left(\frac{T_h f - f}{h}\right)(x) \\
&= \mathcal{M}_\alpha D_i^h f(x).
\end{aligned}$$

Portanto se combinarmos a estimativa pontual anterior com o Teorema de B.Muckenhoupt obtemos,

$$\|D_i^h \mathcal{M}_\alpha f\|_q \leq \|\mathcal{M}_\alpha D_i^h f\|_q \leq C\|D_i^h f\|_p.$$

Usando o fato de que $|D_i^h f| \leq |D^h f|$ juntamente com o item II) do Teorema (3.1.7) concluímos que,

$$\|D_i^h f\|_p \leq C\|D^h f\|_p \leq C\|Df\|_p.$$

Como $\mathscr{M}_\alpha f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ aplicamos o item II) do Teorema (3.1.7) combinado como fato,

$$\|D_i^h \mathscr{M}_\alpha f\|_q \leq C\|Df\|_p.$$

Então concluímos que $\mathscr{M}_\alpha f \in W^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo,

$$\|D_i \mathscr{M}_\alpha f\|_q \leq C\|Df\|_p \quad \forall i \in \{1,...,n\}.$$

Logo,

$$\|D\mathscr{M}_\alpha f\|_q \leq C\|Df\|_p.$$

pela desigualdade de Hölder temos:

$$\|\mathscr{M}_\alpha f\|_{1,q} \leq C\|\mathscr{M}_\alpha f\|_q + C\|D\mathscr{M}_\alpha f\|_q \leq C\|f\|_p + C\|Df\|_p.$$

Resta provarmos a estimativa pontual. Seja $|f| * \lambda_r : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\lambda_r = r^\alpha \frac{\chi_{B(0,r)}}{|B(0,r)|}$ em quase todos os pontos de $\mathbb{R}^n$.Seja $(r_j)_{j\geq 1}$ uma enumeração dos racionais positivos, desde que f seja localmente integrável, nos podemos remodelar a definição do operador maximal de formar a obtermos:

$$\mathscr{M}_\alpha f(x) = \sup_{1\leq j} |f| * \lambda_{r_j}(x)$$

$$|f| * \lambda_r(x) = r^\alpha \fint_{B(x,r)} |f(y)|dy.$$

Ora, como $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ então $|f| \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Consequentemente,

$$D_i(|f| * \lambda_r)(x) = \lambda_r * D_i|f|(x).$$

para todo $i \in \{1,...,n\}$ q.t.p $\mathbb{R}^n$. Pelas propriedades da convolução temos $|f| * \lambda_r \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ para cada r positivo. Agora definimos $(v_k)_{k\geq 1}$ uma sequência de funções $v_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$v_k(x) = \max_{1\leq j\leq k} |f| * \lambda_{r_j}(x).$$

O Teorema nos permite dizer que $(v_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Além do que é uma sequência monótona não decrescente. Logo ,$v_k \to \mathscr{M}_\alpha f$ pontualmente em $\mathbb{R}^n$,

$$|D_i v_k(x)| \leq \max_{1\leq j\leq k} \left|D_i(|f| * \lambda_r)(x)\right| = \max_{1\leq j\leq k} \left|\lambda_{r_j} * D_i|f|(x)\right| \leq \max_{1\leq j\leq k} \lambda_{r_j} * \left|D_i|f|\right|(x).$$

Sabemos que $|D_i|f|| = |D_i f| \quad \forall i \in \{1,..,n\}$ q.t.p. $\mathbb{R}^n$, substituindo

$$= \max_{1\leq j\leq k} \lambda_{r_j} * \left|D_i f\right|(x) = \max_{1\leq j\leq k} \left|D_i f\right| * \lambda_{r_j}(x). \leq \sup_{j\geq 1} \left|D_i|f|\right| * \lambda_{r_j}(x) = \mathscr{M}_\alpha D_i f(x).$$

Daí $|D_i v_k(x)| \le \mathcal{M}_\alpha D_i f(x)$. Provaremos que $(v_k)_{k\ge 1}$ é uniformemente limitada em $W^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ dado que,

$$\|v_k\|_q \le \left\|\mathcal{M}_\alpha f\right\|_q \le C\|f\|_p$$

$$\|D_i v_k\|_q \le \left|\|\mathcal{M}_\alpha D_i f\right\|_q \le C\left\|D_i f\right\|_p \le C\left\|Df\right\|_p.$$

Pela compacidade fraca $\mathcal{M}_\alpha f \in W^{1,q}(\mathbb{R}^n)$, $v_k \rightharpoonup \mathcal{M}_\alpha f$ e $D_i v_k \rightharpoonup D_i\mathcal{M}_\alpha f$ em $L^q(\mathbb{R}^n)$. Pelo Lema de Mazur existe uma sequência formada pela combinação linear convexa, que denotaremos por w_k tal que converge em $L^q(\mathbb{R}^n)$ para $D_i\mathcal{M}_\alpha f$, daí podemos extrair um subsequência que também denotaremos por w_k tal que $w_k \to D_i\mathcal{M}_\alpha f$ pontualmente q.t.p. em $\mathbb{R}^n$ então,

$$|w_k| = \left|\sum_{j=k}^{N(k)} t_{kj} D_i v_j\right| \le \sum_{j=k}^{N(k)} t_{kj}|D_i v_j| \le \sum_{j=k}^{N(k)} t_{kj}\mathcal{M}_\alpha D_i f = \mathcal{M}_\alpha D_i f.$$

Logo,

$$\lim_{k\to\infty}|w_k| = \left|D_i\mathcal{M}_\alpha f\right| \le \mathcal{M}_\alpha D_i f.$$

Continuando, resta provarmos que,

$$\left|D\mathcal{M}_\alpha f\right| \le \mathcal{M}_\alpha Df.$$

Fixamos $x \in \mathbb{R}^n$, sem perda de generalidade podemos supor que $|D\mathcal{M}_\alpha f(x)| \neq 0$, portanto está bem definido o vetor $h = \frac{D\mathcal{M}_\alpha f(x)}{|D\mathcal{M}_\alpha f(x)|}$ e tomemos a derivada direcional $D_h f$,

$$\left|D\mathcal{M}_\alpha f(x)\right| = \left|<D\mathcal{M}_\alpha f(x), h>\right| = \left|D_h\mathcal{M}_\alpha f(x)\right|.$$

Além disso, rotacionando os eixos coordenados de modo que h coincida com algum dos vetores unitários canônicos e_i, vamos obter,

$$\left|D_h\mathcal{M}_\alpha f(x)\right| = \left|D_i\mathcal{M}_\alpha f(x)\right| \le \mathcal{M}_\alpha|D_i f|(x) \le \mathcal{M}_\alpha|Df|(x).$$

Logo,

$$\left|D\mathcal{M}_\alpha f(x)\right| \le \mathcal{M}_\alpha|Df|(x), \quad q.t.p. \quad \mathbb{R}^n.$$

□

Teorema 4.0.6. *(Juha Kinnunen-Eero Saksman) Sejam $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ onde $p > 1$ e $1 \le \alpha < \frac{n}{p}$.*
I) As derivadas parciais fracas $D_i\mathcal{M}_\alpha f(x)$ existem em quase todo ponto e satisfazem:

$$\left|D_i\mathcal{M}_\alpha f(x)\right| \le C(n,\alpha)\mathcal{M}_{\alpha-1}f(x), \quad q.t.p \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

II) Sejam $1 < p < q < q^* < \infty$ *satisfazendo* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha-1}{n}$ *e* $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$*. Então* $\mathcal{M}_\alpha f \in L^{q^*}(\mathbb{R}^n)$ *e* $D_i\mathcal{M}_\alpha f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ $\forall i \in \{1,.,n\}$*. Além disso,*

$$\|\mathcal{M}_\alpha f\|_{q^*} \leq C(n,p,\alpha)\|f\|_p \quad \|D_i\mathcal{M}_\alpha f\|_q \leq C(n,p,\alpha)\|f\|_p.$$

Demonstração. I) Suponha $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ não nula em quase todo ponto de $\mathbb{R}^n$. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto , decorre da hipótese que $f \in C_0(K)$ então f é limitada em K com suporte compacto. Logo, pelo teorema anterior $\mathcal{M}_\alpha f$ é lipschitz em K, escolhendo $K = B(x,2)$, onde $x \in \mathbb{R}^n$ está fixado e $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $|h| < 1$. Como $\mathcal{M}_\alpha f$ é lipschitz, concluímos que :

$$D^+\mathcal{M}_\alpha f(x) = \limsup_{h\to 0} \frac{\mathcal{M}_\alpha f(x+h) - \mathcal{M}_\alpha f(x)}{|h|} \leq C(K,r_0,R_0,n).$$

Portanto existe uma sequência $(h_k)_{k>1} \subset (\mathbb{R}^n)$ de tal forma que $h_k \to 0$ e $|h_k| < 1$, satisfazendo

$$|h_k|D^+\mathcal{M}_\alpha f(x) \leq \mathcal{M}_\alpha f(x+h_k) - \mathcal{M}_\alpha f(x) + \frac{|h_k|}{k}. \qquad \blacklozenge$$

Fixado h_k, para cada j natural existe $r_j \in [r_0, R_0]$ tal que,

$$r_j^\alpha \fint_{B(x+h_k,r_j)} |f|dy > \mathcal{M}_\alpha f(x+h_k) - \frac{1}{j}. \quad \dagger$$

Desde que $B(x+h_k,r_j) \subset B(x, r_j + |h_k|)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_\alpha f(x) &\geq (r_j + |h_k|)^\alpha \fint_{B(x,r_j+|h_k|)} |f|dy \\ &\geq \frac{(r_j+|h_k|)^{\alpha-n}}{|B_1|}\int_{B(x+h_k,r_j)} |f|dy. \quad \ddagger\end{aligned}$$

Combinando as duas desigualdades † e ‡,

$$\mathcal{M}_\alpha f(x+h_k) - \mathcal{M}_\alpha f(x) \leq |B_1|^{-1}\left(r_j^{\alpha-n} - (r_j+|h_k|)^{\alpha-n}\right)\int_{B(x+h_k,r_j)} |f|dy.$$

Usamos a desigualdade acima juntamente com ♦,

$$|h_k|D^+\mathcal{M}_\alpha f(x) \leq |B_1|^{-1}\left(r_j^{\alpha-n} - (r_j+|h_k|)^{\alpha-n}\right)\int_{B(x+h_k,r_j)} |f|dy + \frac{|h_k|}{k}.$$

Para cada $j \geq 1$ aplicamos o Teorema do Valor Médio para garantir a existência de $\xi_{j,k} \in (r_j, r_j + |h_k|)$ tal que,

$$r_j^{\alpha-n} - (r_j+|h_k|)^{\alpha-n} = (n-\alpha)\xi_{j,k}^{\alpha-n-1}|h_k|, \quad k,j \geq 1.$$

Consequentemente,

$$|h_k|D^+\mathcal{M}_\alpha f(x) \leq (n-\alpha)|B_1|^{-1}\xi_{j,k}^{\alpha-n-1}|h_k|\int_{B(x+h_k,r_j)}|f|dy + \frac{1}{j} + \frac{|h_k|}{k}$$

$$\leq (n-\alpha)|B_1|^{-1}r_j^{\alpha-n-1}|h_k|\int_{B(x+h_k,r_j)}|f|dy + \frac{1}{j} + \frac{|h_k|}{k}.$$

Usamos novamente o fato de que $B(x+h_k,r_j) \subset B(x,r_j+|h_k|)$,

$$\leq (n-\alpha)|B_1|^{-1}r_j^{\alpha-n-1}|h_k|\int_{B(x,r_j+|h_k|)}|f|dy + \frac{1}{j} + \frac{|h_k|}{k}$$

$$= (n-\alpha)\left(\frac{r_j}{r_j+|h_k|}\right)^{\alpha-n-1}|h_k|(r_j+|h_k|)^{\alpha-1}\fint_{B(x,r_j+|h_k|)}|f|dy + \frac{1}{j} + \frac{|h_k|}{k}$$

$$\leq (n-\alpha)\left(\frac{r_j}{r_j+|h_k|}\right)^{\alpha-n-1}|h_k|\mathcal{M}_{\alpha-1}f(x) + \frac{1}{j} + \frac{|h_k|}{k}.$$

Escolhemos j suficientemente grande satisfazendo $\frac{1}{j} \leq \frac{|h_k|}{k}$

$$\leq C(n,\alpha)\left(\frac{r_j}{r_j+|h_k|}\right)^{\alpha-n-1}|h_k|\mathcal{M}_{\alpha-1}f(x) + \frac{2}{k}|h_k|.$$

Sabendo que a função $g(t) = \left(\frac{t}{t+|h_k|}\right)^{\alpha-n-1}$ é decrescente no intervalo $(0,\infty)$ implica em

$$D^+\mathcal{M}_\alpha f(x) \leq C(n,\alpha)\left(\frac{r_0}{r_0+|h_k|}\right)^{\alpha-n-1}\mathcal{M}_{\alpha-1}f(x) + \frac{2}{k}.$$

Fazendo $k \to \infty$, teremos $|h_k| \to 0$, portanto,

$$D^+\mathcal{M}_\alpha f(x) \leq C(n,\alpha)\mathcal{M}_{\alpha-1}f(x).$$

Como $x \in \mathbb{R}^n$ foi escolhido arbitrariamente a estimativa acima é válida em todos os pontos de $\mathbb{R}^n$ desde que $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Agora supomos $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, como $\overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} = L^p(\mathbb{R}^n)$, existe $(f_j)_{j\geq 1} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_j \to f$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Como $\mathcal{M}_\alpha f_j$ é localmente lipschitziana pelo Teorema de Hadamart $\mathcal{M}_\alpha f_j$ é diferenciável em quase todos os pontos de $\mathbb{R}^n$ em particular em cada ponto de diferenciabilidade temos a existência do limite abaixo,

$$D_i\mathcal{M}_\alpha f_j(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\mathcal{M}_\alpha f_j(x+h) - \mathcal{M}_\alpha f_j(x)}{|h|}.$$

Naturalmente,

$$D_i\mathcal{M}_\alpha f_j(x) \leq \limsup_{h\to 0}\frac{\mathcal{M}_\alpha f_j(x+h) - \mathcal{M}_\alpha f_j(x)}{|h|} = D^+\mathcal{M}_\alpha f_j(x).$$

A desigualdade anterior suscita,

$$D_i\mathcal{M}_\alpha f_j(x) \le D^+\mathcal{M}_\alpha f_j(x) \le C(n,\alpha)\mathcal{M}_{\alpha-1} f_j(x),$$

em cada ponto de diferenciabilidade da função f_j, e assim em q.t.p. de $\mathbb{R}^n$. Como é sabido que para todo ponto $D_i(-f)(x) = -D_i f(x)$ se aplicarmos o resultado anterior para a função $-f$ obtemos

$$-D_i\mathcal{M}_\alpha f_j(x) \le C(n,\alpha)\mathcal{M}_{\alpha-1} f_j(x).$$

Combinando com o resultado anterior teremos:

$$\left|D_i\mathcal{M}_\alpha f_j(x)\right| \le C(n,\alpha)\mathcal{M}_{\alpha-1} f_j(x).$$

II) Para cada $D_i\mathcal{M}_\alpha f_j$, pela estimativa anterior obtemos:

$$\|D_i\mathcal{M}_\alpha f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C(n,\alpha)\|\mathcal{M}_{\alpha-1} f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le \|f_j\|_p,$$

Considerando a sequência $(f_j - f)_{j\ge1}$, decorre da sublinearidade de $\mathcal{M}_\alpha$ e da estimativa (p,q^*)-forte do Operador Maximal Fracionário:

$$\|\mathcal{M}_\alpha f_j - \mathcal{M}_\alpha f_j\|_{q^*} \le \|\mathcal{M}_\alpha(f_j - f)\|_{q^*} \le \|f_j - f\|_p.$$

Decorre da hipótese que a sequência $(\|f_j\|)_{j\ge1}$ é limitada portanto as sequências $(D_i\mathcal{M}_\alpha f_j)_{j\ge1}$ e $\left(\mathcal{M}_\alpha f_j\right)_{j\ge1}$ são limitadas respectivamente nos espaços $L^q(\mathbb{R}^n)$ e $L^{q*}(\mathbb{R}^n)$ para todo $i \in \{1,..,n\}$. A estimativa (II) implica $\mathcal{M}_\alpha f_j \to \mathcal{M}_\alpha f$ em $L^{q^*}(\mathbb{R}^n)$, esta sequência possui uma subsequência que converge pontualmente em quase todos os pontos de $\mathbb{R}^n$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto com medida finita, a inclusão do espaços $L^{p'}s$ ocasiona o fato de $(\mathcal{M}_\alpha f_j)_{j\ge1} \subset W^{1,q}(\Omega)$ ser limitada neste espaço somando isso ao fato de que $\mathcal{M}_\alpha f_j \to \mathcal{M}_\alpha f$ em Ω. A propriedade da Compacidade Fraca dos espaços de Sobolev garante a existência de uma subsequência desta satisfazendo ambas as condições a seguir:

$$\mathcal{M}_\alpha f_{j_k} \rightharpoonup \mathcal{M}_\alpha f \quad D_i\mathcal{M}_\alpha f_{j_k} \rightharpoonup D_i\mathcal{M}_\alpha f, \quad \text{em } L^q(\Omega).$$

Sabemos que $\mathcal{M}_{\alpha-1} f_{j_k} \to \mathcal{M}_{\alpha-1} f$ em $L^q(\mathbb{R}^n)$, portanto $\mathcal{M}_{\alpha-1} f_{j_k} \rightharpoonup \mathcal{M}_{\alpha-1} f$ em $L^q(\Omega)$, pelo lema (3.0.3) a estimativa é preservada pela convergência fraca portanto,

$$|D_i\mathcal{M}_\alpha f(x)| \le C(n,\alpha)\mathcal{M}_{\alpha-1} f(x) \quad q.t.p.\, x \in \Omega.$$

onde Ω é um aberto limitado qualquer do $\mathbb{R}^n$. Para finalizarmos a prova resta estendermos a estimativa para $\mathbb{R}^n$ com a exceção de no máximo um conjunto de medida nula. Suponhamos por contradição, que o teorema não seja verdadeiro nesse caso existiria um conjunto E de medida positiva para o qual o teorema nao vale, ou seja,

$$\left|D_i \mathscr{M}_\alpha f(x)\right| > C(n,\alpha)\mathscr{M}_{\alpha-1} f(x) \quad \forall x \in \Omega E,$$

Sem perda de generalidade podemos supor $|E| < \infty$, caso contrário podemos tomar um subconjunto com medida finita e positiva que ainda satisfaça a condição acima. Escolhemos um aberto suficientemente grande, digamos $B(x,R) \supset E$, consequentemente

$$C(n,\alpha)\mathscr{M}_{\alpha-1} f(x) \geq \left|D_i \mathscr{M}_\alpha f(x)\right| > C(n,\alpha)\mathscr{M}_{\alpha-1} f(x), \quad q.t.p. x \in \Omega E \cap B(x,R).$$

Daí obtemos uma contradição. O teorema esta provado. $\square$

5 CONTROLE DA OSCILAÇÃO DE UMA FUNÇÃO PELO MAXIMAL DO GRADIENTE

Agora iremos estudar outras estimativas para a função maximal com a finalidade de estimar a oscilação de uma função como foi feito em (MAZ'YA, 2009). O resultado principal afirma que a função maximal do gradiente fraco limita a oscilação da função. Adiante definiremos ferramentas para a sua prova.

Definição 5.0.1. *Dada uma função $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $\beta \in (0,\infty)$ definimos o "fractional Sharp maximal function"por,*

$$f^{\#}_{\beta,R}(x) = \sup_{0<r<R} r^{-\beta} \fint_{B(x,r)} |f - f_{B(x,R)}| dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Caso $R = \infty$, escrevemos $f_\beta{}^{\#}(x)$ lembrando que $f_{B(x,R)} = \fint_{B(x,r)} f(z) dz$.

Definição 5.0.2. *Sejam $\alpha \in [0,1)$ e $R > 0$. Definimos $M_{\alpha,R} f$, uma variante da função maximal, como,*

$$M_{\alpha,R} f(x) = \sup_{0<r<R} r^{\alpha} \fint_{B(x,R)} |u|.$$

Para $R = \infty$, temos o operdor fracionário e escrevemos $M_{\alpha,\infty} f = \mathcal{M}_\alpha f$.

Lema 5.0.1. *Sejam $u \in W^{1,P}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$ e $\alpha \in [0,1)$. Então existe uma constante $C(n,\alpha)$, tal que :*

$$u^{\#}_{1-\alpha,R}(x) \le C(n,\alpha) M_{\alpha,R}|Du|(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad e \quad \forall R > 0.$$

Demonstração. Fixamos $x \in \mathbb{R}^n$, pela desigualdade de Poincaré para bolas:

$$r^{\alpha-1} \fint_{B(x,R)} |f - f_{B(x,R)}| dy \le c r^{\alpha} \fint_{B(x,R)} |Du| \le c M_{\alpha,R}|Du|(x).$$

Logo,

$$u^{\#}_{1-\alpha,R}(x) \le c M_{\alpha,R}|Du|(x).$$

□

Lema 5.0.2. *Sejam $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $0 < \beta < \infty$. Então, existem uma constante $C(\beta, n)$ e um conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ com medida nula tal que,*

$$\left| f(x) - f(y) \right| \le C |x-y|^{\beta} \left(f^{\#}_{\beta,4|x-y|}(x) + f^{\#}_{\beta,4|x-y|}(y) \right) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \setminus E.$$

Demonstração. Seja E o complemento do conjunto de pontos de Lebesgue de f. Pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue, concluímos que $|E| = 0$. Fixados $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ e $r \in (0,\infty)$, denotamos $B_i = B\big(x, r2^{-i}\big) \quad \forall i \geq 0$, então,

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_{B(x,r)}| &= \left|\lim_{i\to\infty} f_{B_{i+1}} - f_{B(x,r)}\right| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{\infty} f_{B_{i+1}} - f_{B_i}\right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} |f_{B_{i+1}} - f_{B_i}| \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \fint_{B_{i+1}} |f - f_{B_i}| \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|B_i|}{|B_{i+1}|} \fint_{B_i} |f - f_{B_i}| \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} 2^n \fint_{B_i} |f - f_{B_i}| \\
&= 2^n \sum_{i=0}^{\infty} \big(r2^{-i}\big)^{\beta} \big(r2^{-i}\big)^{-\beta} \fint_{B_i} |f - f_{B_i}| \\
&\leq 2^n \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-\beta i} r^{\beta} f^{\#}_{\beta,r}(x) \\
&= \frac{2^n}{1-2^{-\beta}} r^{\beta} f^{\#}_{\beta,r}(x).
\end{aligned}$$

Seja $y \in B(x,r) \setminus E$, usando a desigualdade triangular e a estimativa anterior :

$$\begin{aligned}
\left|f(y) - f_{B(x,r)}\right| &\leq \left|f(y) - f_{B(y,2r)}\right| - \left|f_{B(y,2r)} - f_{B(x,r)}\right| \\
&\leq \frac{2^n}{1-2^{-\beta}} r^{\beta} f^{\#}_{\beta,2r}(y) + \left|f_{B(y,2r)} - f_{B(x,r)}\right| \\
&\leq \frac{2^n}{1-2^{-\beta}} r^{\beta} f^{\#}_{\beta,2r}(y) + r^{\beta} r^{-\beta} \fint_{B(x,r)} |f - f_{B(y,2r)}| dz.
\end{aligned}$$

Decorre do fato que $B(x,r) \subset B(y,2r)$,

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2^n}{1-2^{-\beta}} r^{\beta} f^{\#}_{\beta,2r}(y) + r^{\beta} \frac{|B(y,2r)|}{|B(x,r)|} r^{-\beta} \fint_{B(y,2r)} |f - f_{B(y,2r)}| dz \\
&\leq \frac{2^n}{1-2^{-\beta}} r^{\beta} f^{\#}_{\beta,2r}(y) + 2^n r^{\beta} f^{\#}_{\beta,2r}(y) \\
&= 2^n \left(\frac{2^{\beta+1} - 1}{2^{\beta} - 1}\right) r^{\beta} f^{\#}_{\beta,2r}(y).
\end{aligned}$$

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus E, x \neq y$ e $r = 2|x-y|$ então $x, y \in B(x,r)$ e assim :

$$\left|f(x) - f(y)\right| \leq \left|f(x) - f_{B(x,r)}\right| + \left|f(y) - f_{B(x,r)}\right|.$$

Combinado as desigualdades anteriores :

$$\leq 2^n \left(\frac{2^{\beta+1}-1}{2^\beta - 1}\right) r^\beta f^{\#}_{\beta,4|x-y|}(x) + 2^n \left(\frac{2^{\beta+1}-1}{2^\beta - 1}\right) r^\beta f^{\#}_{\beta,4|x-y|}(y)$$

$$= 2^{n+1} \left(\frac{2^{\beta+1}-1}{2^\beta - 1}\right) |x-y|^\beta \left(f^{\#}_{\beta,4|x-y|}(x) + f^{\#}_{\beta,4|x-y|}(y)\right)$$

$$= C(\beta, n)|x-y|^\beta \left(f^{\#}_{\beta,4|x-y|}(x) + f^{\#}_{\beta,4|x-y|}(y)\right).$$

□

Teorema 5.0.1. *Sejam $u \in W^{1,P}(\mathbb{R}^n)$,$1 \leq p \leq \infty$ e $\alpha \in [0,1)$ então, existe um subconjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ com medida nula tal que,*

$$|u(x) - u(y)| \leq c(n,\alpha)|x-y|^{1-\alpha} \left(\mathcal{M}_\alpha |Du|(x) + \mathcal{M}_\alpha |Du|(y)\right) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \setminus E$$

Demonstração. Seja $u \in W^{1,P}(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in (0,1)$. Fazendo uso do teoremas anteriores ,

$$|u(x) - u(y)| \leq c|x-y|^{1-\alpha} \left(f^{\#}_{1-\alpha,4|x-y|}(x) + f^{\#}_{1-\alpha,4|x-y|}(y)\right)$$

$$\leq c|x-y|^{1-\alpha} \left(M_{\alpha,4|x-y|}|Du|(x) + M_{\alpha,4|x-y|}|Du|(y)\right)$$

$$\leq c|x-y|^{1-\alpha} \left(M_{\alpha,\infty}|Du|(x) + M_{\alpha,\infty}|Du|(y)\right)$$

$$= c|x-y|^{1-\alpha} \left(\mathcal{M}_\alpha |Du|(x) + \mathcal{M}_\alpha |Du|(y)\right) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \setminus E.$$

□

Portanto se $\mathcal{M}_\alpha |Du|$ for limitado pela estimativa anterior concluímos que $u \in C^{0,1-\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Sejam $u \in W^{1,P}(\mathbb{R}^n)$ e $p > n$ então , pela desigualdade de Hölder:

$$\mathcal{M}_{\frac{n}{p}} |Du|(x) \leq c\left(\mathcal{M}_n |Du|^p(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leq c\|Du\|_p,$$

consequentemente u é $\left(1 - \frac{n}{p}\right)$ – Hölder contínua com a exceção de no máximo um conjunto de medida nula, esse conjunto coincide com o conjunto do lema anterior. O próximo teorema que será apenas enunciado irá tratar o caso em que $\mathcal{M}_\alpha |Du|$ é ilimitado.

Teorema 5.0.2. *Sejam* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ *e* $\alpha \in [0,1)$. *Se* $\mathcal{M}_\alpha|Du|$ *for ilimitado, então para cada* $\lambda > 0$ *temos:*

$$|u(x) - u(y)| \leq c\lambda|x-y|^{1-\lambda}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \setminus E_\lambda,$$

em que $E_\lambda = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_\alpha|Du|(x) > \alpha\right\}$, *além do que existe uma contante* $C(n,p,\alpha)$ *tal que,*

$$\mathcal{H}_\infty^{n-\alpha p}(E_\lambda) \leq c\lambda^{-p}\|Du\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \lambda > 0.$$

Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ *e* $s \in (0,\infty)$ *definimos o* $s-$*conteúdo de Hausdorff de* A *por:*

$$\mathcal{H}_\infty^s(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty r_i^s; \quad A \subset \bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, r_i)\right\}.$$

Demonstração. (MAZ'YA, 2009). □

6 OPERADOR LOCAL FRACIONÁRIO MAXIMAL DE HARDY-LITTLEWOOD

Agora estudaremos a regularidade do operador local em L^p e em Espaços de Sobolev, assim como em (HEIKKINEN T.; KINNUNEN, 2015). Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Para cada função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente integrável nós definimos a função maximal fracionária local de Hardy-Littlewood $\mathcal{M}_{\alpha,\Omega} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{M}_{\alpha,\Omega} u(x) = \sup_{0<r<\delta(x)} r^{\alpha} \fint_{B(x,r)} |f| dy \quad \text{onde} \quad \delta(x) = \mathrm{Dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega).$$

Quando $\Omega = \mathbb{R}^n$, o supremo é tomado sobre os $r > 0$ e obtemos a função $\mathcal{M}_{\alpha} u$.

Teorema 6.0.1. *Sejam $u \in L^p(\mathbb{R}^n), p > 1, 0 < \alpha < \frac{n}{p}$ satisfazendo $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Existe uma constante $C > 0$ independente de u, tal que:*

$$\|\mathcal{M}_{\alpha,\Omega} u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Se $p = 1$ e $0 < \alpha < n$ então,

$$\left|\left\{x \in \Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\Omega} u(x) > \lambda\right\}\right| \leq C \left(\frac{\|u\|_{L^1(\Omega)}}{\lambda}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}.$$

Demonstração. Suponhamos que $p > 1$, $u \in L^p(\Omega)$, usamos a estimativa pontual,

$$\mathcal{M}_{\alpha,\Omega} f(x) \leq \mathcal{M}_{\alpha} f(x), \quad \forall x \in \Omega \quad \forall f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n).$$

Em seguida usamos o resultado conhecido para o Operador Maximal,

$$\|\mathcal{M}_{\alpha,\Omega} f\|_{L^q(\Omega)} \leq \|\mathcal{M}_{\alpha} u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Decorre da estimativa pontual a inclusão,

$$\left\{x \in \Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\Omega} u(x) > \lambda\right\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n; \mathcal{M}_{\alpha} u(x) > \lambda\right\}.$$

Portanto temos:

$$\left|\left\{x \in \Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\Omega} u(x) > \lambda\right\}\right| \leq \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n; \mathcal{M}_{\alpha} u(x) > \lambda\right\}\right| \leq C \left(\frac{\|u\|_{L^1(\Omega)}}{\lambda}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}.$$

□

Teorema 6.0.2. *Sejam $u \in L^1(\Omega)$, $0 < \alpha < n$, e $|\Omega| < \infty$ então para todo $1 \leq s < \frac{n}{n-\alpha}$ temos $\mathcal{M}_{\alpha,\Omega} u \in L^s(\Omega)$ e*

$$\|\mathcal{M}_{\alpha,\Omega} u\|_{L^s(\Omega)} \leq C(n,\alpha) \|u\|_{L^1(\Omega)}.$$

Demonstração. Fixado $a > 0$. Decorre da representação "layer Cake",

$$\int_\Omega |\mathcal{M}_{\alpha,\Omega} u|^s = s\int_0^\infty t^{s-1}|\{x \in \Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\Omega} u > t\}|dt$$

$$= s\int_0^a t^{s-1}|\{x \in \Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\Omega} u > t\}dt + s\int_a^\infty t^{s-1}|\{x \in \Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\Omega} u > t\}|dt$$

$$\leq a^s|\Omega| + \int_a^\infty t^{s-1}|\{x \in \Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\Omega} u > t\}|dt.$$

Fazemos uso da estimativa teorema anteriror,

$$\leq a^s|\Omega| + C\|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{n}{n-\alpha}} \int_a^\infty t^{s-1-\frac{n}{n-\alpha}} dt = a^s|\Omega| + C\|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{n}{n-\alpha}} a^{s-1-\frac{n}{n-\alpha}}.$$

Daí para cada $a > 0$,

$$\|\mathcal{M}_{\alpha,\Omega} u\|_{L^s(\Omega)}^s \leq a^s|\Omega| + C\|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{n}{n-\alpha}} a^{s-\frac{n}{n-\alpha}}.$$

Se escolhermos $a = \|u\|_{L^1(\Omega)}$ obtemos:

$$\|\mathcal{M}_{\alpha,\Omega} u\|_{L^s(\Omega)} \leq (|\Omega| + C)^{\frac{1}{s}} \|u\|_{L^1(\Omega)}.$$

□

O próximo teorema trata de estimativas pontuais para o gradiente fraco do operador local, para tanto teremos que estimar a derivada das funções médias, portanto definimos para cada função localmente integrável u e $t \in (0,1)$ definimos a função média fracionária $u_t^\alpha : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ por:

$$u_t^\alpha(x) = (t\delta(x))^\alpha ⨍_{B(x,t\delta(x))} u(y)dy, \qquad \forall x \in \Omega.$$

Lema 6.0.1. *Sejam $u \in L^p(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado então,*

$$D_i\left(\int_{B(x,t\delta(x))} u(y)dy\right) = \int_{B(x,t\delta(x))} D_i u(y)dy + tD_i\delta(x)\int_{\partial B(x,t\delta(x))} u(y)dy.$$

Demonstração. Definimos as funções auxiliares $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(z) = (z, t\delta(z)) \quad g(x,y) = \int_{B(x,y)} u(w)dw.$$

Denotaremos as funções coordenadas de f por f_j, assim,

$$D_i f_j(z) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad j \neq i \\ 1, & \text{se} \quad j = i \\ tD_i\delta(z) & \text{se} \quad j = n+1. \end{cases}$$

Pela forma da co-área e a derivação sob o sinal da integral temos:

$$D_{n+1}g(f(z)) = \int_{\partial B(z,f(z))} u(w)dw \qquad \text{e} \qquad D_i g(f(z)) = \int_{B(z,\delta(z))} D_i u(w)dw \qquad \forall i \in \{1,..,n\}.$$

A função f é lipschitz com inversa lipschitz e $g \in W^{1,p}(\Omega)$, pela Regra da Cadeia temos:

$$\begin{aligned}
D_i\left(g \circ f\right)(z) &= \sum_{j=1}^{n+1} D_j g(f(z)) D_i f_j(z) \\
&= \sum_{j=1}^{n} D_j g(f(z)) D_i f_j(z) + D_{n+1} g(f(z)) D_i f_{n+1}(z) \\
&= \sum_{j=1}^{n} D_i f_j(z) \int_{B(z,f(z))} D_i u(w)dw + tD_j\delta(z) \int_{\partial B(x,\delta(z))} u(w)dw \\
&= \int_{B(z,f(z))} D_i u(w)dw + tD_j\delta(z) \int_{\partial B(x,\delta(z))} u(w)dw.
\end{aligned}$$

□

Lema 6.0.2. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $n > 1$, $p > 1$, $1 \leq \alpha < \frac{n}{p}$ *e* $t \in (0,1)$. *Se* $|\Omega| < \infty$, *então* $\left|Du_t^\alpha\right| \in L^q(\Omega)$ *com* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha-1}{n}$ *e vale a estimativa pontual:*

$$\left|Du_t^\alpha(x)\right| \leq 2\mathcal{M}_{\alpha,\Omega}|Du|(x) + \alpha\mathcal{M}_{\alpha-1,\Omega}u(x), \qquad q.t.p \quad x \in \Omega.$$

Demonstração. Suponhamos $u \in L^p(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$. De acordo com o teorema de Rademacher, a função distância δ é diferenciável em quase todos os pontos de Ω, por ser lipschitz no aberto Ω,denotamos $\omega_n = |B(0,1)|$ aplicando a regra de Leibniz,

$$D_i u_t^\alpha(x) = D_i\left(\omega^{-1}(t\delta(x))^{\alpha-n}\right)\int_{B(x,t\delta(x))} u(y)dy + \omega_n^{-1}(t\delta(x))^{\alpha-n} D_i\left(\int_{B(x,t\delta(x))} u(y)dy\right),$$

para todo $i \in \{1,..,n\}$. Aplicando o lema anterior, obtemos:

$$\begin{aligned}
D_i u_t^\alpha(x) &= \omega_n^{-1} t^{\alpha-n}(\alpha-n)\delta(x)^{\alpha-n-1} D_i\delta(x)\int_{B(x,t\delta(x))} u(y)dy \\
&\quad + \omega_n^{-1}(t\delta(x))^{\alpha-n}\int_{B(x,t\delta(x))} D_i u(y)dy + \omega_n^{-1}(t\delta(x))^{\alpha-n} tD_i\delta(x)\int_{\partial B(x,t\delta(x))} u(y)dy.
\end{aligned}$$

Rearranjando os termos na forma vetorial, nós obtemos:

$$\begin{aligned}
Du_t^\alpha(x) &= \omega_n^{-1} t^{\alpha-n}(\alpha-n)\delta(x)^{\alpha-n-1} D\delta(x)\int_{B(x,t\delta(x))} u(y)dy + \omega_n^{-1}(t\delta(x))^{\alpha-n}\int_{B(x,t\delta(x))} Du(y)dy \\
&\quad + \omega_n^{-1}(t\delta(x))^{\alpha-n} tD\delta(x)\int_{\partial B(x,t\delta(x))} u(y)d\mathcal{H}^{n-1}(y) \\
&= \alpha(t\delta(x))^{\alpha-1} tD\delta(x) ⨍_{B(x,t\delta(x))} u(y)dy + (t\delta(x))^{\alpha} ⨍_{B(x,t\delta(x))} Du(y)dy \\
&\quad + n(t\delta(x))^{\alpha-1} tD\delta(x)\left(⨍_{\partial B(x,t\delta(x))} u(y)d\mathcal{H}^{n-1}(y) - ⨍_{B(x,t\delta(x))} u(y)dy\right).
\end{aligned}$$

Em seguida, reformulamos a diferença das duas integrais em parênteses, aplicamos a primeira identidade de Green,

$$\int_{\partial B(x,t\delta(x))} u(y)\frac{\partial v}{\partial \nu}(y)\,d\mathscr{H}^{n-1}(y) = \int_{B(x,t\delta(x))} (u(y)\Delta v(y) + Du(y).Dv(y))\,dy.$$

Nós escolhemos $r = t\delta(x)$, $v(y) = \frac{|y-x|^2}{2}$ e façamos o vetor normal unitário a bola $\nu(y) = \frac{(y-x)}{r}$, consequentemente,

$$Dv(y) = y - x, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) = r \quad \Delta v(y) = n.$$

Daí,

$$⨍_{\partial B(x,t\delta(x))} u(y)\,d\mathscr{H}^{n-1}(y) - ⨍_{B(x,t\delta(x))} u(y)\,dy = \frac{1}{n}⨍_{B(x,t\delta(x))} Du(y)\cdot(y-x)\,d(y).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Du_t^\alpha(x) &= \alpha(t\delta(x))^{\alpha-1}tD\delta(x)⨍_{B(x,t\delta(x))} u(y)\,dy \\ &\quad + (t\delta(x))^{\alpha-1}tD\delta(x)⨍_{B(x,t\delta(x))} Du(y)\cdot(y-x)\,dy + (t\delta(x))^\alpha⨍_{B(x,t\delta(x))} Du(y)\,dy. \end{aligned}$$

Agora, aplicamos a norma vetorial aos membros da igualdade e em seguida aplicamos a desigualdade triangular da norma juntamente com sua versão para integrais,

$$\begin{aligned} |Du_t^\alpha(x)| &\leq \alpha(t\delta(x))^{\alpha-1}t|D\delta(x)|\left|⨍_{B(x,t\delta(x))} u(y)\,dy\right| \\ &\quad + (t\delta(x))^{\alpha-1}t|D\delta(x)|\left|⨍_{B(x,t\delta(x))} Du(y).(y-x)\,dy\right| + (t\delta(x))^\alpha\left|⨍_{B(x,t\delta(x))} Du(y)\,dy\right| \\ &\leq \alpha(t\delta(x))^{\alpha-1}t|D\delta(x)|⨍_{B(x,t\delta(x))} |u(y)|\,dy \\ &\quad + n(t\delta(x))^{\alpha-1}t\frac{1}{n}|D\delta(x)|⨍_{B(x,t\delta(x))} |Du(y)||y-x|\,dy + (t\delta(x))^\alpha⨍_{B(x,t\delta(x))} |Du(y)|\,dy. \end{aligned}$$

Usamos o fato de que $t \in (0,1), |x-y| \leq t\delta(x), \quad \forall x \in \Omega$ e $|D\delta(x)| \leq 1$ para q.t.p $x \in \Omega$.

$$\begin{aligned} &\leq \alpha(t\delta(x))^{\alpha-1}t|D\delta(x)|⨍_{B(x,t\delta(x))} |u(y)|\,dy \\ &\quad + (t\delta(x))^{\alpha-1}t⨍_{B(x,t\delta(x))} |Du(y)|t\delta(x)\,dy + (t\delta(x))^\alpha⨍_{B(x,t\delta(x))} |Du(y)|\,dy \\ &\leq 2\mathscr{M}_{\alpha,\Omega}|Du|(x) + \alpha\mathscr{M}_{\alpha-1,\Omega}u(x). \end{aligned}$$

Então a estimativa pretendida é satisfeita para funções de classe $C_0^\infty(\Omega)$ em quase todo de Ω . Dada uma $u \in W^{1,p}(\Omega)$, existe uma sequência de funções $(\varphi_j)_{j\geq 1} \subset W^{1,p}(\Omega) \cap C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_j \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Consequentemente, pela desigualdade de Hölder:

$$\left|u_t^\alpha(x) - (\varphi_j)_t^\alpha(x)\right| = (t\delta(x))^\delta \fint_{B(x,t\delta(x))} |u(y) - \varphi_j(y)|dy \leq \frac{(t\delta(x))^\delta}{|B(x,t\delta(x))|^{\frac{1}{p}}} \|u - \varphi_j\|_{L^p(\Omega)}.$$

Portanto,

$$u_t^\alpha(x) = \lim_{j\to\infty} (\varphi_j)_t^\alpha(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Pelo caso anterior temos:

$$|D(\varphi_j)_t^\alpha(x)| \leq 2\mathcal{M}_{\alpha,\Omega}|D\varphi_j|(x) + \alpha\mathcal{M}_{\alpha-1,\Omega}\varphi_j(x).$$

Seja $p^* = \frac{np}{n-\alpha p}$ e $q = \frac{np}{n-(\alpha-1)p}$. Então para qualquer f em $L^{p^*}(\Omega)$ desde que $q < p^*$ e $|\Omega| < \infty$ temos:

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p^*}} \|f\|_{L^{p^*}(\Omega)}.$$

Pela estimativa anterior,

$$\begin{aligned}
\|D(\varphi_j)_t^\alpha(x)\|_{L^q(\Omega)} &\leq 2\|\mathcal{M}_{\alpha,\Omega}|D\varphi_j|\|_{L^q(\Omega)} + \alpha\|\mathcal{M}_{\alpha-1,\Omega}\varphi_j\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq 2|\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p^*}} \|\mathcal{M}_{\alpha,\Omega}|D\varphi_j|\|_{L^{p^*}(\Omega)} + \alpha\|\mathcal{M}_{\alpha-1,\Omega}\varphi_j\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq C_1 2|\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p^*}} \|D\varphi_j\|_{L^p(\Omega)} + C_2\alpha\|\varphi_j\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq C\max\left\{2|\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p^*}}, \alpha\right\} \left(\|D\varphi_j\|_{L^p(\Omega)} + \alpha\|\varphi_j\|_{L^p(\Omega)}\right) \\
&= \max\left\{2C_1|\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p^*}}, \alpha C_2\right\} \|\varphi_j\|_{W^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Então $\left(D(\varphi_j)_t^\alpha\right)_{j\geq 1}$ é limitada em $L^q(\Omega)$ e portanto também será limitada em $W^{1,q}(\Omega)$, uma vez que cada φ_j tem suporte compacto, a sequência $\left((\varphi_j)_t^\alpha\right)_{j\geq 1}$ é limitada em $L^q(\Omega)$. Como $(\varphi_j)_t^\alpha$ converge pontualmente para u_t^α, pela compacidade fraca de $W^{1,q}(\Omega)$, existe uma subsequência satisfazendo $\varphi_{j_k} \rightharpoonup u_t$ e $D_i(\varphi_{j_k})_t^\alpha \rightharpoonup D_i u_t^\alpha$ em $L^q(\Omega)$. Notamos também que,

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{M}_{\alpha,\Omega}|D\varphi_{j_k}| - \mathcal{M}_{\alpha,\Omega}|Du|\|_{L^q(\Omega)} + \|\mathcal{M}_{\alpha-1,\Omega}\varphi_{j_k} - \mathcal{M}_{\alpha-1,\Omega}u\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq \|\mathcal{M}_{\alpha,\Omega}D(\varphi_{j_k} - u)\|_{L^q(\Omega)} + \|\mathcal{M}_{\alpha-1,\Omega}(\varphi_{j_k} - u)\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq \|\mathcal{M}_{\alpha,\Omega}D(\varphi_{j_k} - u)\|_{L^{p^*}(\Omega)} + \|\varphi_{j_k} - u\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \|D(\varphi_{j_k} - u)\|_{L^p(\Omega)} + \|\varphi_{j_k} - u\|_{L^p(\Omega)} \\
&= \|\varphi_{j_k} - u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Portanto, $2\mathcal{M}_{\alpha,\Omega}|D\varphi_j| + \alpha\mathcal{M}_{\alpha-1,\Omega}\varphi_j \rightharpoonup 2\mathcal{M}_{\alpha,\Omega}|Du| + \alpha\mathcal{M}_{\alpha-1,\Omega}u$ em $L^q(\Omega)$, pois convergência forte implica em convergência fraca. Pelos cálculos anteriores temos:

$$D_i(\varphi_{j_k})_t^\alpha(x) \leq \left|D(u_t)^\alpha(x)\right| \leq 2\mathcal{M}_{\alpha,\Omega}|D\varphi_j|(x) + \alpha\mathcal{M}_{\alpha-1,\Omega}\varphi_j(x).$$

Fazendo uso do lema da monotonicidade da convergência fraca , teremos para cada $i \in \{1,..,n\}$,

$$D_i u_t^\alpha(x) \leq 2\mathcal{M}_{\alpha,\Omega}|Du|(x) + \alpha\mathcal{M}_{\alpha-1,\Omega}u(x), \qquad q.t.p. \quad \Omega.$$

A função $(-u)_t^\alpha$ satisfaz as hipóteses do teorema e para todo ponto $D_i(-u)_t^\alpha(x) = -D_i u_t^\alpha(x)$ aplicarmos o resultado obtido anteriormente, teremos :

$$-D_i u_t^\alpha(x) \leq 2\mathcal{M}_{\alpha,\Omega}|Du|(x) + \alpha\mathcal{M}_{\alpha-1,\Omega}u(x).$$

Consequentemente,

$$\left|D_i u_t^\alpha(x)\right| \leq 2\mathcal{M}_{\alpha,\Omega}|Du|(x) + \alpha\mathcal{M}_{\alpha-1,\Omega}u(x).$$

Portanto,

$$\left|D u_t^\alpha(x)\right| \leq 2\mathcal{M}_{\alpha,\Omega}|Du|(x) + \alpha\mathcal{M}_{\alpha-1,\Omega}u(x).$$

□

Teorema 6.0.3. *Sejam $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $n > 1$, $p > 1$, $1 \leq \alpha < \frac{n}{p}$ satisfazendo $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha-1}{n}$. Se $|\Omega| < \infty$ então, $\mathcal{M}_{\alpha,\Omega}u \in W^{1,q}(\Omega)$ além de satisfazer:*

$$\left|D\mathcal{M}_{\alpha,\Omega}u(x)\right| \leq 2\mathcal{M}_{\alpha,\Omega}|Du|(x) + \alpha\mathcal{M}_{\alpha-1,\Omega}u(x), \quad q.t.p \quad x \in \Omega.$$

Demonstração. Seja $(t_j)_{j\geq 1}$ uma enumeração de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ e $u_j = (|u|)_{t_j}^\alpha$ com $j \geq 1$. Pela proposição anterior sabemos que $u_j \in W^{1,q}(\Omega)$ para todo j natural. Definimos $v_k : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ como,

$$v_k(x) = \max_{1\leq j\leq k} u_j(x).$$

A sequência $(v_k)_{k\geq 1}$ é monótona não-decrescente e converge pontualmente para $\mathcal{M}_\alpha u$. Naturalmente,

$$|D_i v_k(x)| = \left|D_i \max_{1\leq j\leq k} u_j(x)\right| \leq \max_{1\leq j\leq k} |D_i u_j(x)| \leq 2\mathcal{M}_{\alpha,\Omega}|Du|(x) + \alpha\mathcal{M}_{\alpha-1,\Omega}u(x).$$

Denotaremos $p^* = \frac{np}{n-\alpha p}$, como na demonstração do lema anterior. Afirmamos que a sequência é uniformemente limitada em $W^{1,q}(\Omega)$. Notamos que $v_k \leq \mathcal{M}_{\alpha,\Omega} u$ e consequentemente,

$$\|v_k\|_{L^q(\Omega)} \leq \|v_k\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|\mathcal{M}_{\alpha,\Omega} u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\begin{aligned}
\|Dv_k\|_{L^q(\Omega)} &\leq 2\|\mathcal{M}_{\alpha,\Omega}|Du|\|_{L^q(\Omega)} + \alpha\|\mathcal{M}_{\alpha-1,\Omega} u\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq 2|\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p^*}}\|\mathcal{M}_{\alpha,\Omega}|Du|\|_{L^{p^*}(\Omega)} + \alpha\|\mathcal{M}_{\alpha-1,\Omega} u\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq 2C|\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p^*}}\|Du\|_{L^p(\Omega)} + C\alpha\|u\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq C\left(\|Du\|_{L^p(\Omega)} + \alpha\|u\|_{L^p(\Omega)}\right) \\
&= C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Fazemos uso da compacidade fraca dos espaços de Sobolev para obter uma subsequência tal que $v_k \rightharpoonup \mathcal{M}_\alpha f$ e $D_i v_k \rightharpoonup D_i \mathcal{M}_\alpha f$ em $L^q(\mathbb{R}^n)$. Como na prova do Teorema 7.0.5 usamos o Lema de Mazur para concluir a existência de uma sequência formada pela combinação linear convexa de $(D_i v_k)_{k\geq 1}$ que converge pontualmente para $|D_i \mathcal{M}_\alpha f|$ e portanto,

$$|D_i \mathcal{M}_\alpha f| \leq 2\mathcal{M}_{\alpha,\Omega}|Du| + \alpha \mathcal{M}_{\alpha-1,\Omega} u.$$

Usando novamente outro argumento da prova do Teorema 7.0.5 podemos estender o resultado para o gradiente,

$$|D\mathcal{M}_\alpha u| \leq 2\mathcal{M}_{\alpha,\Omega}|Du| + \mathcal{M}_{\alpha-1,\Omega} u, \quad \text{em quase todo ponto do} \quad \mathbb{R}^n.$$

□

Teorema 6.0.4. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $n > 1$, $p > 1$, $1 \leq \alpha < \frac{n}{p}$ satisfazendo $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Se $|\Omega| < \infty$ e for limitado com fronteira C^1 então, $\mathcal{M}_{\alpha,\Omega} u \in L^{p^*}(\Omega)$ e satisfaz:*

$$\|D\mathcal{M}_\alpha u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Demonstração. Fazemos uso do teorema anterior para concluir:

$$\begin{aligned}
\|D\mathcal{M}_\alpha\|_{L^{p^*}(\Omega)} &\leq 2\|\mathcal{M}_{\alpha,\Omega} Du\|_{L^{p^*}(\Omega)} + \alpha\|\mathcal{M}_{\alpha-1,\Omega} u\|_{L^{p^*}(\Omega)}. \\
&\leq 2C\|Du\|_{L^p(\Omega)} + C\|u\|_{L^r(\Omega)} \\
&\leq 2C\|Du\|_{L^p(\Omega)} + C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\
&\leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

A terceira linha decorre do fato de que podemos escrever $p^* = \frac{np}{n-(\alpha-1)r}$ juntamente com a desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg. $\square$

Daqui em diante exibiremos uma série de exemplos, o primeiro garante que o Teorema 8.0.3 é o melhor possível no sentido de que existe um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$, tal que se $q' > q = \frac{np}{n-(\alpha-1)p}$ então $\mathcal{M}_\alpha\left(W^{1,p}(\Omega)\right) \nsubseteq W^{1,q'}(\Omega)$.

Exemplo 1. *Se escolhermos $\alpha > 1$ de modo que $(\alpha-1)p < n$ e definimos:*

$$\Omega = int\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(B_k \cup C_k)\right)$$

$$B_k = [k, k+2^{-k}] \times [0, 2^{-k}]^{n-1} \qquad C_k = [k+2^{-k}, k+1] \times [0, 2^{-3k}]^{n-1},$$

dado $q' > q = \frac{np}{n-(\alpha-1)p}$ iremos construir uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $|D\mathcal{M}_\alpha u| \notin L^{q'}(\Omega)$. Seja $p' = \frac{nq'}{n+(\alpha-1)q'} > p$ e definimos $u \equiv 2^{\frac{kn}{p'}}$ em B_k e u cresce linearmente de $2^{\frac{kn}{p'}}$ para $2^{\frac{(k+1)n}{p'}}$ em C_k consequentemente $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Dado $x \in \frac{1}{2}B_k$, assim,

$$\mathcal{M}_\alpha u(x) = 2^{\frac{kn}{p'}} Dist(x, \mathbb{R}^n \setminus B_k)^\alpha.$$

Assim para quase todo ponto $x \in \frac{1}{2}B_k$,

$$|D\mathcal{M}_\alpha u(x)| = \alpha Dist(x, \mathbb{R}^n \setminus B_k)^{\alpha-1} 2^{\frac{kn}{p'}} \geq C2^{k\left(\frac{n}{p'}-\alpha+1\right)} = C2^{\frac{kn}{q'}}.$$

Logo

$$\int_\Omega |D\mathcal{M}_\alpha u(x)|^{q'} dx \geq C\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{2}B_k} 2^{nk} dx = \infty.$$

A seguir mostraremos que não existe uma função $u \in L^p(\Omega)$ com $|\Omega| < \infty$ de modo que,

$$|D\mathcal{M}_{\alpha,\Omega} u(x)| \leq C\mathcal{M}_{\alpha-1,\Omega} u(x), \quad q.t.p. \quad x \in \Omega.$$

Exemplo 2. *Seja $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$. Se $p \in (1, \infty)$, $n > 1$, $\alpha > 1$ e $\beta \in (0,1)$. Então a função dada por,*

$$u(x) = (1-|x|)^{-\frac{\beta}{p}}, \quad \forall x \in \Omega,$$

pertence a $L^p(\Omega) \cup L^1(\Omega)$. Notamos que se ρ for suficientemente pequeno, então para $0 < |x| < \rho$ temos que $1-|x|$ é o raio maximizante para $\mathcal{M}_{\alpha,\Omega} u(x)$ e $\mathcal{M}_{\alpha-1,\Omega} u(x)$. Para vermos isso consideramos $\mathcal{M}_\Omega u(x)$, criamos $f : \{(x,r) : r \geq 0, |x| + r < 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,r) = \fint_{\partial B(x,r)} u\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) - \fint_{B(x,r)} u\, dy,$$

que é contínua por causa da continuidade de u. Sabendo que:

$$\lim_{(x,r)\to(0,1)} f(x,r) = +\infty,$$

portanto existe $\rho_1 > 0$ tal que se $|x| < \rho_1; 1-2\rho_1 < r < 1-|x|$ então $f(x,r) > 1$. Agora definimos uma outra função contínua $g : B(0,\rho_1) \longrightarrow \mathbb{R}$ por:

$$g(x) = \mathcal{M}_\Omega u(x) - \max_{0\geq 1-2\rho_1} \fint_{B(x,r)} u\,dy.$$

Como $g(0) > 0$, decorre da continuidade a existência de $\rho_2 > 0$ tal que se $|x| < \rho_2$ então $g(x) > 0$, consequentemente,

$$\mathcal{M}_\Omega u(x) > \fint_{B(x,r)} u\,dy,$$

para $0 \leq r < 1-|x|$ com $|x| < \rho = \min \rho_1, \rho_2$. Semelhante a prova do teorema anterior,

$$D\mathcal{M}_{\alpha,\Omega} u(x) = (n-\alpha)\frac{x}{|x|}, (1-|x|)^{\alpha-1} \fint_{B(x,1-|x|)} u(y)\,dy + n(1-|x|)^{\alpha-1} \fint_{\partial B(x,1-|x|)} u(y)\nu(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$

$$+ n\frac{x}{|x|}(1-|x|)^{\alpha-1} \fint_{\partial B(x,1-|x|)} u(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y), \quad \forall |x| < \rho.$$

Pela desigualdade triangular,

$$|D\mathcal{M}_{\alpha,\Omega} u(x)|.$$

$$= \left| n(1-|x|)^{\alpha-1} \fint_{\partial B(x,1-|x|)} u(y)\left(\nu(y) - \frac{x}{|x|}\right) d\mathcal{H}^{n-1}(y) - (n-\alpha)\frac{x}{|x|}, (1-|x|)^{\alpha-1} \fint_{B(x,1-|x|)} u(y)\,dy \right|$$

$$\geq \left| n(1-|x|)^{\alpha-1} \fint_{\partial B(x,1-|x|)} u(y)\left(\nu(y) - \frac{x}{|x|}\right) d\mathcal{H}^{n-1}(y) \right| - \left| (n-\alpha)\frac{x}{|x|}, (1-|x|)^{\alpha-1} \fint_{B(x,1-|x|)} u(y)\,dy \right|$$

$$= \left| n(1-|x|)^{\alpha-1} \fint_{\partial B(x,1-|x|)} u(y)\left(\nu(y) - \frac{x}{|x|}\right) d\mathcal{H}^{n-1}(y) \right| - |(n-\alpha)| \mathcal{M}_{\alpha-1,\Omega} u(x).$$

Definimos $S(x) = \left\{ y \in \partial B(x, 1-|x|); \quad (y-x)\cdot x < 0 \right\}$. Dado $\epsilon > 0$ se $|x| < \epsilon$ então:

$$\left| n(1-|x|)^{\alpha-1} \fint_{\partial B(x,1-|x|)} u(y)\left(\nu(y) - \frac{x}{|x|}\right) d\mathcal{H}^{n-1}(y) \right| \geq \frac{1}{2} \fint_{S(x)} u(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y) \geq \frac{n(1-\epsilon)^{\alpha-1}}{2(2\epsilon)^{\frac{\beta}{p}}}$$

Fazemos $\epsilon \to \infty$ e concluímos que para pequenos valores de $|x|$ a última expressão é ilimitada e consequentemente a estimativa não pode ocorrer.

O próximo exemplo revela o conturbado comportamento de $\mathcal{M}_{\alpha,\Omega} f$ no caso $\alpha > 1$. Vamos construir um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado com $n > 1$ tal que $f|_\Omega \equiv 1$ e $D\mathcal{M}_{\alpha,\Omega} f \not\in L^r(\Omega)$ para todo $r > 0$. Para cada natural k definimos o conjunto onde,

$$\Omega = B(0,2) \setminus \overline{\bigcup_{k\geq 1} S_k} \quad \text{onde} \quad S_k = \left\{ 2^{-k} + j2^{-(1+\beta)k} : j = 1,..,2^{\beta k} \right\}^n \quad \text{e} \quad \beta \geq \frac{n}{(n-\alpha)r}.$$

Dados $x \in S_k$ e $y \in S_l$ tais que $x \neq y$, então as bolas $B\left(x, 2^{-(1+\beta)k-1}\right)$ e $B\left(y, 2^{-(1+\beta)l-1}\right)$ são disjuntas. Dado $y \in B\left(x, 2^{(1+\beta)k-1}\right) \setminus \{x\}$, nós temos:

$$\mathcal{M}_{\alpha,\Omega} f(y) = \operatorname{Dist}\left(y, \mathbb{R}^n \setminus \Omega\right)^{\alpha} = |x-y|^{\alpha}.$$

Daí,

$$|D\mathcal{M}_{\alpha,\Omega} f(y)| = \alpha |x-y|^{\alpha-1} \geq C 2^{-(1+\beta)(\alpha-1)k}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |D\mathcal{M}_{\alpha,\Omega} f(y)|^r dy &\geq \sum_{k\geq 1} \sum_{x \in S_k} \int_{B\left(x, 2^{-(1+\beta)k-1}\right)} |D\mathcal{M}_{\alpha,\Omega} f(y)|^r dy \\ &\geq C \sum_{k \geq 1} 2^{((1+\beta)(1-\alpha)r-n)k} = \infty.\end{aligned}$$

Assim concluímos que $D\mathcal{M}_{\alpha,\Omega} f$ não pertence a $L^r(\Omega)$ para todo $r > 0$.

7 REGULARIDADE DO OPERADOR MAXIMAL FRACIONÁRIO EM ESPAÇOS MÉTRICOS MENSURÁVEIS

Nesta seção nosso intuito é estudar a regularidade do Operador Maximal Fracionário em Espaços de Campanato em um contexto de espaços métricos de medidas (X, d, μ), as proposições desta seção são baseadas no artigo de (HEIKKINEN T.; LEHRBACK, 2012). Dada uma função localmente integrável $f \in L^1_{Loc}(X)$ e $\alpha \geq 0$ definimos,

$$\mathcal{M}_\alpha f(x) = \sup_{r>0} r^\alpha \fint_{B(x,r)} |f| d\mu, \qquad \forall x \in X.$$

Denotaremos $X = (X, d, \mu)$, onde a tripla ordenada denota um espaço métrico (X, d) munido de uma medida regular de Borel μ, tal que a medida de aberto é sempre positiva e satisfaz "Doubling Property Means Condition". Dizemos que uma medida μ satisfaz a "Doubling Property Means Condition"se existir uma constante C_d, chamada "doubling constante", tal que,

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C_d \mu(B(x, r)), \qquad \forall B(x, r) \subset X.$$

Uma medida μ satisfaz a "Lower bound Condition"se existem constantes $Q \geq 1$ e $c_l > 0$ tais que,

$$\mu(B(x, r)) \geq c_l r^Q, \qquad \forall x \in X \quad e \quad \forall r > 0.$$

O espaço X satisfaz "$\delta-$Annular Decay Properties"se $0 < \delta \leq 1$ e existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $x \in X$ e $R > 0$ e $0 < h < R$ tivermos:

$$\mu\left(B(x, R) \setminus B(x, R-h)\right) \leq C \left(\frac{h}{R}\right)^\delta \mu\left(B(x, R)\right), \qquad \forall 0 < h < R.$$

O espaço das funções $\beta-$Hölder contínuas munido com a seminorma $\|\cdot\|_{C^{0,\beta}(X)}$ é definido de forma que,

$$C^{0,\beta}(X) = \left\{ u : X \longrightarrow \mathbb{R}; \quad \|u\|_{C^{0,\beta}(X)} = \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{d(x, y)^\beta} < \infty \right\}.$$

Seja um número real β e $p \geq 1$ definimos o espaço de Campanato $\mathcal{L}^{p,\beta}(X)$ munido com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^{p,\beta}(X)}$ por,

$$\mathcal{L}^{p,\beta}(X) = \left\{ u \in L^1_{Loc}(X); \quad \|u\|_{\mathcal{L}^{p,\beta}(X)} = \sup_{x \in X, r>0} r^{-\beta} \left(\fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Se $\beta < 0$, o espaço de Campanato coincide com o espaço de Morrey $L^{p,\beta}(X)$ munido com a norma $\|\cdot\|_{L^{p,\beta}(X)}$,

$$L^{p,\beta}(X) = \left\{ u \in L^1_{Loc}(X); \quad \|u\|_{L^{p,\beta}(X)} = \sup_{x\in X, r>0} r^{-\beta} \left(\fint_{B(x,r)} |u|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Se $\beta > 0$ existe uma constante $C(c_d, \beta)$ tal que,

$$C^{-1}\|u\|_{C^{0,\beta}(X)} \le \|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)} \le \|u\|_{C^{0,\beta}(X)}.$$

Se $\beta = 0$, então temos o espaço das funções de oscilação média limitada; denotado por $BMO(X) = \mathscr{L}^{p,0}(X) = \mathscr{L}^{p,\beta}(X)$, além do mais, existe uma constante c_p dependendo apenas de p e de C_d,

$$\|u\|_{BMO(X)} \le \|u\|_{\mathscr{L}^{p,0}(X)} \le C_p\|u\|_{BMO(X)}.$$

O lema a seguir será usado inúmeras vezes na demosntração do resultado principal, com ele podemos estimar a oscilação da média de u em função do menor raio das bolas envolvidas.

Lema 7.0.1. *(Lema Chave) Sejam $u \in \mathscr{L}^{p,\beta}(X)$,$x \in X$, $y \in B(x, C_0R)$ e $0 < r \le R$. Então existe uma constante $C(C_d, C_0, \beta)$ tal que:*
Se $\beta < 0$, então,

$$\left| u_{B(y,r)} - u_{B(x,R)} \right| \le Cr^{\beta}\|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)}.$$

Se $\beta = 0$, então:

$$\left| u_{B(y,r)} - u_{B(x,R)} \right| \le C \ln\frac{CR}{r}\|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)}.$$

Demonstração. Se $\beta < 0$, tomamos o menor natural $k > 1$ que satisfaça $2^{k-1}r \ge (C_0+1)R$.

Então valem as inclusões $B(x,C_0R)\subset B(y,2^kr)$ e $B(x,R)\subset B(y,2^kr)\subset B(x,2^{k+1}r)$,

$$\begin{aligned}
\left|u_{B(y,r)}-u_{B(x,R)}\right| &\leq \sum_{i=1}^{k}|u_{B(y,2^ir)}-u_{B(y,2^{i-1}R)}|+|u_{B(y,2^kr)}-u_{B(x,R)}|\\
&\leq \sum_{i=1}^{k}\fint_{B(y,2^{i-1}r)}|u-u_{B(y,2^{i-1}r)}|d\mu+\fint_{B(x,R)}|u-u_{B(y,2^kr)}|d\mu\\
&\leq \sum_{i=1}^{k}\frac{\mu(B(y,2^ir))}{\mu(B(y,2^{i-1}r))}\fint_{B(y,2^ir)}|u-u_{B(y,2^{i-1}r)}|d\mu+\frac{\mu(B(y,2^kr))}{\mu(B(x,R))}\fint_{B(y,,2^kr)}|u-u_{B(y,2^kr)}|d\mu\\
&\leq \sum_{i=1}^{k}C_d(2^ir)^{\beta}(2^ir)^{-\beta}\left(\fint_{B(y,2^ir)}|u-u_{B(y,2^{i-1}r)}|^pd\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\qquad +C_d^k(2^kr)^{\beta}(2^kr)^{-\beta}\left(\fint_{B(y,,2^kr)}|u-u_{B(y,2^kr)}|^pd\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{k}2^{i\beta}+C_d^{k-1}2^{k\beta}\right)C_dr^{\beta}\|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)}\\
&\leq \left(\frac{2^{\beta}}{1-2^{\beta}}+C_d^{k-1}2^{k\beta}\right)C_dr^{\beta}\|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)}.
\end{aligned}$$

Quanto ao caso $\beta=0$ escolhemos o maior inteiro k que satisfaça a condição $2^kr\leq 3(C_0+1)R$ e o menor inteiro j satisfazendo $2^kr+C_0R\leq 2^jR$, consequentemente obtemos a inclusão $B(y,2^kr))\subset B(x,2^kr+C_0R)\subset B(x,2^jR)$. Repetindo o argumento da prova do caso anterior teremos:

$$\begin{aligned}
\left|u_{B(y,r)}-u_{B(x,R)}\right| &\leq \sum_{i=1}^{k}\frac{\mu(B(y,2^ir))}{\mu(B(y,2^{i-1}r))}\fint_{B(y,2^ir)}|u-u_{B(y,2^{i-1}r)}|d\mu+\frac{\mu(B(y,2^kr))}{\mu(B(x,R))}\fint_{B(y,,2^kr)}|u-u_{B(y,2^kr)}|d\mu\\
&\leq \sum_{i=1}^{k}C_d\left(\fint_{B(y,2^ir)}|u-u_{B(y,2^{i-1}r)}|^pd\mu\right)^{\frac{1}{p}}+C_d^j\left(\fint_{B(y,,2^kr)}|u-u_{B(y,2^kr)}|^pd\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq C_d^j(k+1)\|u\|_{\mathscr{L}^{p,0}(X)}\\
&\leq \frac{C_d^j}{\ln 2}\ln\frac{6(C_0+1)R}{r}\|u\|_{\mathscr{L}^{p,0}(X)}\\
&\leq C\ln\frac{CR}{r}\|u\|_{\mathscr{L}^{p,0}(X)}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 7.0.1. *Sejam $u\in\mathscr{L}^{p,\beta}(X)$, $p\geq 1$, X satisfazendo "$\delta-$anular decay property", $0<\alpha\leq\delta$. Desde que $\beta\neq 0$ e $0\leq\alpha+\beta\leq$ ou $\beta=0$ e $0<\alpha<\delta$. Se $\mathscr{M}_\alpha u\not\equiv\infty$ então,*

$\mathcal{M}_\alpha u \in C^{0,\alpha+\beta}(X)$. *Mais geralmente, existe uma constante* C, *independente de* u *tal que:*

$$\|\mathcal{M}_\alpha u\|_{C^{0,\alpha+\beta}(X)} \leq C\|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)}.$$

Demonstração. Sabemos que $\||u|\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)} \leq \|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)}$ portanto $|u| \in \mathscr{L}^{p,\beta}(X)$, podemos assumir que $u \geq 0$. Dado $r > 0$, definimos $v : X \longrightarrow [0,\infty)$ como $v(x) = r^\alpha u_{B(x,r)}$. Iniciamos a demonstração provando a afirmação para a função v. Sejam $x, y \in X$ dividimos em dois casos:

Caso 1: Assumimos que $r \leq 2d(x,y)$. Na prova denotaremos $B = B(x, 2d(x,y))$, $B_x = B(x,r)$ e $B_y = B(y,r)$.

Se $\beta < 0$, pelo lema anterior :

$$\begin{aligned} |v(x) - v(y)| = \left|r^\alpha u_{B_x} - r^\alpha u_{B_y}\right| &\leq r^\alpha \left(|u_{B_x} - u_B| + |u_B - u_{B_y}|\right) \\ &\leq Cr^{\alpha+\beta}\|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)} \\ &\leq 2Cd(x,y)^{\alpha+\beta}\|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)}. \end{aligned}$$

Se $\beta = 0$, novamente pelo lema chave:

$$\begin{aligned} |v(x) - v(y)| = \left|r^\alpha u_{B_x} - r^\alpha u_{B_y}\right| &\leq Cr^\alpha \ln\frac{Cd(x,y)}{r}\|u\|_{\mathscr{L}^{p,0}(X)} \\ &= Cd(x,y)^\alpha \left(\frac{r}{Cd(x,y)}\right)^\alpha \ln\frac{Cd(x,y)}{r}\|u\|_{\mathscr{L}^{p,0}(X)} \\ &\leq \frac{C}{\alpha} d(x,y)^\alpha \|u\|_{\mathscr{L}^{p,0}(X)}. \end{aligned}$$

A última desigualdade decorre do fato de que a função $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t^{-\alpha}\ln t$ é limitada, pois:

$$f(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\alpha}\alpha \ln t = \frac{t^{-\alpha}}{\alpha}\ln t^\alpha \leq \frac{t^{-\alpha}}{\alpha} t^\alpha = \frac{1}{\alpha}, \quad \forall t > 0.$$

Se $\beta > 0$ então, u é β-Hölder contínua,

$$\begin{aligned}
|v(x) - v(y)| &= r^{\alpha} \left| \fint_{B_x} u(z)dz - \fint_{B_y} u(w)dw \right| \\
&= r^{\alpha} \left| \fint_{B_x} \fint_{B_y} u(z) - u(w) dz dw \right| \\
&\leq r^{\alpha} \fint_{B_x} \left| \fint_{B_y} u(z) - u(w) dz \right| dw \\
&\leq r^{\alpha} \fint_{B_x} \fint_{B_y} |u(z) - u(w)| dz dw \\
&\leq r^{\alpha} \fint_{B_x} \fint_{B_y} d(z,w)^{\beta} \|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)}.
\end{aligned}$$

Como $d(z,w) \leq d(z,y) + d(y,x) + d(x,w) \leq 2r + d(y,x) \leq 5d(y,x)$, substituindo,

$$\begin{aligned}
&\leq r^{\alpha} \fint_{B_x} \fint_{B_y} 5^{\beta} d(x,y)^{\beta} \|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)} \\
&= r^{\alpha} 5^{\beta} d(x,y)^{\beta} \|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)} \\
&\leq 2^{\alpha} 5^{\beta} C d(x,y)^{\alpha+\beta} \|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)}.
\end{aligned}$$

Caso 2: Assumimos que $r > 2d(x,y)$ então,

$$\begin{aligned}
\left| \fint_{B_x} u d\mu - \fint_{B_y} u d\mu \right| &= \frac{1}{\mu(B_x)} \left| \int_{B_x} u d\mu - \int_{B_y} u d\mu + \left(\mu(B_y) - \mu(B_x)\right) u_{B_y} \right| \\
&= \frac{1}{\mu(B_x)} \left| \int_{B_x \setminus B_y} u d\mu - \int_{B_y \setminus B_x} u d\mu + \left(\mu(B_y \setminus B_x) - \mu(B_x \setminus B_y)\right) u_{B_y} \right| \\
&= \frac{1}{\mu(B_x)} \left| \int_{B_x \setminus B_y} (u - u_{B_y}) d\mu - \int_{B_y \setminus B_x} (u - u_{B_y}) d\mu \right| \\
&\leq \frac{1}{\mu(B_x)} \left| \int_{B_x \setminus B_y} (u - u_{B_y}) d\mu \right| + \left| \int_{B_y \setminus B_x} (u - u_{B_y}) d\mu \right| \\
&\leq \frac{1}{\mu(B_x)} \int_{B_x \setminus B_y} |u - u_{B_y}| d\mu + \int_{B_y \setminus B_x} |u - u_{B_y}| d\mu \\
&= \frac{1}{\mu(B_x)} \int_{B_x \triangle B_y} |u - u_{B_y}| d\mu. \quad (*)
\end{aligned}$$

Se $\beta < 0$.

Seja $(B_i)_1^k$ uma coleção maximal finita de bolas disjuntas de raio $d(x,y)$ centradas em $B_x \triangle B_y$.

Então $B_x \triangle B_y \subset \bigcup_{i=1}^{k} 2B_i$, e $\bigcup_{i=1}^{k} B_i \subset \triangle'$ em que:

$$\triangle' = B(x, r + d(x,y)) \setminus B(x, r - 2d(x,y)) \cup B(y, r + d(x,y)) \setminus B(y, r - 2d(x,y)).$$

Para cada $1 < i < k$, usando o lema anterior juntamente com a desigualdade de Hölder:

$$\begin{aligned}
\fint_{2B_i} |u - u_{B_y}| &\leq |u_{2B_i} - u_{B_y}| + \fint_{2B_i} |u - u_{2B_I}| \\
&\leq C2^{\beta} d(x,y)^{\beta} \|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)} + C2^{\beta} d(x,y)^{\beta} (2d(x,y))^{-\beta} \left(\fint_{2B_i} |u - u_{2B_I}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C2^{\beta} d(x,y)^{\beta} \|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)} + C2^{\beta} d(x,y)^{\beta} \|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)} \\
&\leq C2^{\beta+1} d(x,y)^{\beta} \|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)}.
\end{aligned}$$

Para estimarmos a medida de $\triangle'$, primeiramente recorremos a propriedade do decaimento anular e a "doubling property"para obter:

$$\begin{aligned}
\mu\left(\triangle'\right) &\leq \mu\left(B(x, r + d(x,y)) \setminus B(x, r - 2d(x,y))\right) + \mu\left(B(y, r + d(x,y)) \setminus B(y, r - 2d(x,y))\right) \\
&\leq C \left(\frac{3d(x,y)}{r + d(x,y)} \right)^{\delta} \left(\mu\left(B(x, r + d(x,y))\right) + \mu\left(B(y, r + d(x,y))\right) \right) \\
&\leq C \left(\frac{3d(x,y)}{r} \right)^{\delta} \left(\mu\left(B(x, r + d(x,y))\right) + \mu\left(B(y, r + d(x,y))\right) \right).
\end{aligned}$$

Usamos que $B(x, r + d(x,y)) \subset B(x, 2r)$ e $B(y, r + d(x,y) \subset B(x, r + 2d(x,y))$

$$\begin{aligned}
&\leq C \left(\frac{3d(x,y)}{r} \right)^{\delta} \left(\mu(B(x,2r)) + \mu\left(B(x, r + 2d(x,y))\right) \right) \\
&\leq C \left(\frac{3d(x,y)}{r} \right)^{\delta} 2\mu\big(B(x,2r)\big) \\
&\leq C \left(\frac{3d(x,y)}{r} \right)^{\delta} 2C_d \mu(B_x).
\end{aligned}$$

Portanto obtemos:

$$\mu\left(\triangle'\right) \leq C\left(\frac{d(x,y)}{r}\right)^{\delta}\mu(B_x) \qquad (\dagger\dagger)$$

$$\begin{aligned}
|v(x)-v(y)| &= \left| r^{\alpha} \fint_{B_x} u\,d\mu - r^{\alpha}\fint_{B_y} u\,d\mu \right| \\
&\leq C\frac{r^{\alpha}}{\mu(B_x)}\int_{B_x \triangle B_y} |u-u_{B_y}| \\
&\leq C\frac{r^{\alpha}}{\mu(B_x)}\int_{\bigcup_{i=1}^{k} 2B_i} |u-u_{B_y}| \\
&\leq C\frac{r^{\alpha}}{\mu(B_x)}\sum_i \mu(2B_i)\fint_{2B_i} |u-u_{B_y}|\,d\mu \\
&\leq 2C\frac{r^{\alpha}d(x,y)^{\beta}}{\mu(B_x)}\|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)}\sum_i \mu(B_i) \\
&\leq C r^{\alpha}d(x,y)^{\beta}\frac{\mu(\triangle')}{\mu(B_x)}\|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)} \\
&\leq C r^{\alpha}d(x,y)^{\beta}\left(\frac{d(x,y)}{r}\right)^{\delta}\|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)}.
\end{aligned}$$

Como $r > d(x,y)$ e $0 < \alpha \leq \delta$, concluímos:

$$\leq C r^{\alpha} d(x,y)^{\alpha+\beta}\|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)}.$$

Se $\beta = 0$ e $0 < \alpha < \delta$ pela estimativa $(*)$

$$\left|\fint_{B_x} u\,d\mu - \fint_{B_y} u\,d\mu\right| \leq \frac{1}{\mu(B_x)}\int_{B_x\triangle B_y} |u-u_{B_y}|\,d\mu.$$

Fazendo uso da desigualdade de Hölder:

$$\leq C\frac{\mu\left(B_x \triangle B_y\right)^{\frac{\alpha}{\delta}}}{\mu(B_x)}\left(\int_{B_x\triangle B_y}|u-u_{B_Y}|^{\frac{\delta}{\delta-\alpha}}d\mu\right)^{1-\frac{\alpha}{\delta}}.$$

Usamos os fatos de que $B_x \triangle B_y \subset 2B_y$ e $\mu(B_x)$ é comparável com $\mu(B_y)$,

$$\begin{aligned}
&\leq C\left(\frac{\mu(B_x \triangle B_y)}{\mu(B_x)}\right)^{\frac{\alpha}{\delta}}\left(\fint_{2B_y}|u-u_{B_Y}|^{\frac{\delta}{\delta-\alpha}}d\mu\right)^{1-\frac{\alpha}{\delta}} \\
&\leq C\left(\frac{d(x,y)}{r}\right)^{\alpha}\|u\|_{\mathscr{L}^{\frac{\delta}{\delta-\alpha},0}(X)}.
\end{aligned}$$

Sabemos do teorema anterior que $\|u\|_{\mathscr{L}^{\frac{\delta}{\delta-\alpha},0}(X)} \leq C\|u\|_{BMO} \leq C\|u\|_{\mathscr{L}^{p,0}(X)}$. Segue que :

$$|v(x)-v(y)| = \left| r^{\alpha} \fint_{B_x} |u| d\mu - r^{\alpha} \fint_{B_y} |u| d\mu \right| \leq C d(x,y)^{\alpha} \|u\|_{\mathscr{L}^{p,0}(X)}.$$

Se $\beta > 0$ com $\alpha + \beta \leq \delta$.

Então u é Hölder contínua com expoente β, fazendo uso das estimativas das normas juntamente com o fato de que $r > d(x,y)$ então,

$$|u(x) - u_{B_y}| \leq \fint_{B_y} |u(z) - u(w)| d\mu(w) \leq C r^{\beta} \|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)},$$

para cada $z \in B_x \triangle B_y$.

Assim, usando as estimativas anterior, $(*)$ e depois $(\dagger\dagger)$ nós obtemos;

$$\begin{aligned} |v(x)-v(y)| &\leq \frac{r^{\alpha}}{\mu(B(x)} \fint_{B_x \triangle B_y} |u(z) - u_{B_y}| d\mu \\ &\leq C r^{\alpha+\beta} \frac{\mu(B_x \triangle B_y)}{\mu(B_x)} \|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)} \\ &\leq C r^{\alpha+\beta-\delta} d(x,y)^{\delta} \|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)} \\ &\leq C d(x,y)^{\alpha+\beta} \|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)}. \end{aligned}$$

Finalmente vamos estimar $|\mathscr{M}_{\alpha} u(x) - \mathscr{M}_{\alpha} u(y)|$, sem perda de generalidade, podemos supor $\mathscr{M}_{\alpha} u(x) \geq \mathscr{M}_{\alpha} u(y)$. Dado $\epsilon > 0$, exite $r_{\epsilon} > 0$ tal que $r_{\epsilon}^{\alpha} u_{B(x,r_{\epsilon})} > \mathscr{M}_{\alpha} u(x) - \epsilon$. Então, pela primeira parte da demonstração,

$$\begin{aligned} &|\mathscr{M}_{\alpha} u(x) - \mathscr{M}_{\alpha} u(y)| = \mathscr{M}_{\alpha} u(x) - \mathscr{M}_{\alpha} u(y) \\ &\qquad \leq r_{\epsilon}^{\alpha} u_{B(x,r_{\epsilon})} - r_{\epsilon}^{\alpha} u_{B(y,r_{\epsilon})} + \epsilon = v(x) - v(y) + \epsilon \leq C d(x,y)^{\alpha+\beta} \|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos:

$$\left| \mathscr{M}_{\alpha} u(x) - \mathscr{M}_{\alpha} u(y) \right| \leq C d(x,y)^{\alpha+\beta} \|u\|_{\mathscr{L}^{p,\beta}(X)}.$$

$\square$

Corolário 7.0.1. *Sejam $\beta > 0$ e $\alpha + \beta \leq \delta$ então o operador $\mathscr{M}_{\alpha} : C^{0,\beta}(X) \longrightarrow C^{0,\alpha+\beta}(X)$ é limitado quando restrito as funções tais que $\mathscr{M}_{\alpha} u \not\equiv \infty$.*

Demonstração. Usamos a estimativa,

$$\|u\|_{\mathscr{L}^{p,0}(X)} \leq \|u\|_{C^{0,\beta}(X)}$$

temos,

$$\|\mathscr{M}_\alpha u\|_{C^{0,\alpha+\beta}(X)} \leq C\|u\|_{C^{0,\beta}(X)}.$$

□

Corolário 7.0.2. *Sejam $\beta = 0$ e $0 < \alpha < \delta$ então o operador $\mathscr{M}_\alpha : BMO(X) \longrightarrow C^{0,\alpha}(X)$ é limitado quando restrito as funções tais que $\mathscr{M}_\alpha u \not\equiv \infty$.*

Demonstração. Aplicamos o teorema para $\beta = 0$ e usamos,

$$\|u\|_{BMO(X)} \leq \|u\|_{\mathscr{L}^{p,0}(X)} \leq C_p\|u\|_{BMO(X)}.$$

Consequentemente,

$$\|\mathscr{M}_\alpha u\|_{C^{0,\alpha}(X)} \leq C\|u\|_{BMO(X)}.$$

□

Corolário 7.0.3. *Sejam $0 < \alpha < \delta$ e μ satisfazendo a "Lower Bound Condition "então o operador $\mathscr{M}_\alpha : L^p(X) \longrightarrow C^{0,\alpha-\frac{Q}{p}}(X)$ é limitado quando restrito as funções u tais $\mathscr{M}_\alpha u$ seja finito em quase todos os pontos de X.*

Demonstração. Escolhemos $\beta = -\frac{Q}{p}$ e usamos o teorema anterior:

$$\|\mathscr{M}_\alpha u\|_{C^{0,\alpha-\frac{Q}{p}}(X)} \leq C\|u\|_{\mathscr{L}^{p,-\frac{Q}{p}}(X)} \leq C\left(1 + \frac{1}{C_l^{\frac{1}{p}} r^{\frac{Q}{p}}}\right)\|u\|_{L^p(X)}.$$

a última desigualdade decorre da hipótese sobre a medida. □

Note que dado $X \subset \mathbb{R}^n$ mensurável, a medida de Lebesgue satisfaz todas as hipóteses dos teoremas anteriores, portanto os resultados antecedentes são válidos para o espaço (X, d, m) onde d é a métrica induzida pela norma euclidiana, daí obtemos os mesmos resultados de regularidade para a versão convencional do operador.

8 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Nessa dissertação de mestrado foi estudado o operador maximal fracionário $\mathcal{M}_\alpha f$, uma extenção do operador maximal Hardy–Littlewood. Obtemos sua teoria regularidade em alguns espaços tais como L^P,$W^{1,p}$ e $B.M.O.$, recorrendo a Teoria do Potencial de Riesz. Provamos que o operador fracionário possui propriedades regularizantes superiores ao operador de Hardy–Littlewood, a saber o teorema de Juha Kinnunen-Eero Saksman que fornece uma estimativa pontual do tipo,

$$\left|D\mathcal{M}_\alpha f\right| \leq C' \mathcal{M}_{\alpha-1} Df$$

caso $\alpha \geq 1$ seja limitado . Disto decorre uma melhora substancial da regularidade nos espaços de Sobolev em comparação com o operador de Hardy. Definimos outras variações do operador em questão e estudamos sua regularidade em paralalelo com a do Operador Maximal Fracionário local. Apesar de termos adicionado muita complexidade ao estudo da regularidade do Operador Maximal Fracionário em espaços de funções B.M.O, pois estendemos o operador no contexto de espaços métricos mensuráveis (X, d, μ) e ganhamos resultados de reguralidade para o caso euclidiano como corolário, além de obtermos estimativas mais gerais.

REFERÊNCIAS

ADAMS D. R.; HEDBERG, L. I. **Function spaces and potential theory**. London: Springer, 1999. ISBN 3-540-57060-8.

BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. New York: Springer, 2010. ISBN 978-0-387-70913-0.

DIBENEDETTO, E. **Real analysis**. New York: Birkhäuser, 2016. ISBN 978-1-4939-4003-5.

EVANS, L. C. **Partial diferential equations**. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2010. ISBN 978-0-8218-4974-3.

HEIKKINEN T.; KINNUNEN, J. K. J. T. H. Regularity of the local fractional maximal function. **Arkiv för Matematik**, Sweden, v. 53, n. 1, p. 127–154, 2015. Disponível em: https://www.semanticscholar.org/paper/Regularity-of-the-local-fractional-maximal-function-Heikkinen-Kinnunen/ab8bd11c44cfec84c01f07e06d7a02b2436abb15. Acesso em: 20 Out. 2019.

HEIKKINEN T.; LEHRBACK, J. N. J. H. Fractional maximal functions in metric measure spaces. **Analysis and Geometry in Metric Spaces**, Poland, v. 1, p. 147–162, 2012. Disponível em: http://https://arxiv.org/abs/1301.7191. Acesso em: 20 Dez. 2019.

KINNUNEN J.; SAKSMAN, E. Regularity of the fractional maximal function. **Bulletin of the London Mathematical Society**, London, v. 35, n. 4, p. 529–535, 2003. Disponível em: https://www.semanticscholar.org/paper/Regularity-of-the-Fractional-Maximal-Function-Kinnunen-Saksman/79400460582a3d0fbb0535435b08ee870698f0e7. Acesso em: 20 Out.2019.

LUIRO, H. Continuity of the maximal operator in Sobolev spaces. **American Mathematical Society**, Providence, R.I., v. 135, n. 1, p. 243–251, 2007. Disponível em: https://www.semanticscholar.org/paper/Continuity-of-the-maximal-operator-in-sobolev-Luiro/001d3846b6fbee66ff46764df4ddb76f3329467c. Acesso em: 20 Out. 2019.

MAZ'YA, V. **Sobolev spaces in mathematics I**: Sobolev type inequalities. New York: Springer, 2009. ISBN 978-5-901873-24-3.

ROYDEN H. L.; FITZPATRICK, P. M. **Real analysis**. New York: Pearson Education, 2010. ISBN 978-0-13143747-0.

STEIN, E. M. **Singular integrals and differentiability properties of functions**. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1970. ISBN 978-0691080796.

STEIN E. M.; SHAKARCHI, R. **Real analysis**: measure theory, integration, and Hilbert spaces. [*S. l.*]: Princeton University Press, 2005. ISBN 978-0-691-11386-9.

TANAKA, H. A remark on the derivative of the one-dimensional hardy-littlewood maximal function. **Bulletin of the Australian Mathematical Society**, United Kingdon, v. 65, p. 253–258, 2002. Disponível em: https://www.semanticscholar.org/paper/A-remark-on-the-derivative-of-the-one-dimensional-Tanaka/c3ab3a6c8080c3638d884932804b2a351ba4cf5f. Acesso em: 20 Out. 2019.