UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

DAVI RIBEIRO DOS SANTOS

TEOREMA FUNDAMENTAL DAS SUBVARIEDADES EM FORMALISMO DE CARTAN

FORTALEZA
2016

DAVI RIBEIRO DOS SANTOS

TEOREMA FUNDAMENTAL DAS SUBVARIEDADES EM FORMALISMO DE CARTAN

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Luciano Mari
Coorientador: Prof. Dr. Florentiu Daniel Cibotaru.

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R368t Ribeiro dos Santos, Davi.
Teorema fundamental das subvariedades em formalismo de Cartan / Davi Ribeiro dos Santos. – 2016.
48 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2016.
Orientação: Prof. Dr. Luciano Mari.
Coorientação: Prof. Dr. Florentiu Daniel Cibotaru.

1. Equações de estrutura. 2. Conexão de Cartan. . 3. Subvariedades.. 4. Grupos de Lie. I. Título.
CDD 510

DAVI RIBEIRO DOS SANTOS

TEOREMA FUNDAMENTAL DAS SUBVARIEDADES EM FORMALISMO DE CARTAN

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: 06/05/2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Luciano Mari (Orientador)
Scuola Normale Superiore di Pisa

Prof. Dr. Florentiu Daniel Cibotaru (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus por ter me dado sabedoria e paciência para cumprir mais uma etapa neste processo de minha formação.

À minha família por estar ao meu lado durante minha caminhada acadêmica. À minha mãe por me incentivar a seguir o caminho dos estudos e por comemorar minhas conquistas. Ao meu pai, que sempre se esforçou para não faltar nada em nosso lar e pelo incentivo de ingressar e permanecer na área a qual me encontro. Às minhas irmãs por apoiarem minhas idéias incondicionalmente.

Agradeço ao professor Luciano Mari, pela orientação, conselhos e paciência em solucionar minhas dúvidas. Aos meus amigos: Acácio B. Neves, Diego de S. Rodrigues, Eddygledson S. Gama, Edvalter da S. S. Filho, Wanderley de O. Pereira, com os quais compartilhei problemas e sorrisos durante a produção deste texto e, por fim, a todas as demais pessoas as quais sou eternamente grato.

Aos professores Abdênago Alves de Barros e Florentiu Daniel Cibotaru, por aceitarem compor a banca de defesa.

À Andrea e à Jessyca, pela competência e agilidade.

Ao CNPq e à FUNCAP, pelo apoio financeiro.

"Você deve ter lápis e papel na mão para reescrever, com suas próprias palavras cada teorema, verificando às vezes os detalhes omitidos nos exemplos e nas demonstrações."

(Elon Lages)

RESUMO

Neste trabalho, apresentaremos uma prova do teorema fundamental das subvariedades usando o formalismo de Cartan. Serão discutidas as versões local e global do resultado, enfatizando a simplicidade e abragência da abordagem.

Palavras-chave: equações de estrutura; conexão de Cartan; subvariedades; grupos de Lie.

ABSTRACT

In this work , we present a proof of the Fundamental Theorem of Submanifolds using the Cartan formalism. Local and global versions of the results will be discussed, emphasizing the simplicity and the generality of the method.

Keywords: structure equations; Cartan connection; submanifolds; Lie groups.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Uma das principais razões para a geometria das subvariedades de $\mathbb{R}^n$ ser particularmente rica e interessante é o fato de que o espaço euclidiano é homogêneo, isto é, ele é um espaço cuja ação do grupo das isometrias é transitiva. Além disso, o tensor de curvatura do espaço euclidiano se anula e, como consequência, temos que as equações de Gauss, de Codazzi-Mainardi e de Ricci, que podem ser formuladas para espaços ambientes mais gerais, são mais fáceis de usar e de manusear. Dada uma imersão isométrica, $\varphi : M^m \to N^n$, as equações de Gauss, Codazzi-Mainardi e Ricci relacionam as curvaturas de M^m e N^n com a segunda forma fundamental de φ, a sua derivada covariante e a conexão no fibrado normal. O teorema fundamental das subvariedades nos diz que, se N^n é uma forma espacial, estas condições são suficientes para a existência de $\varphi : M^m \to N^n$ em uma vizinhança U, simplesmente conexa, de um ponto fixado e que tal φ é única a menos de uma isometria do ambiente. No caso de hipersuperfícies, o resultado se simplifica na forma seguinte: Dadas uma métrica g em uma variedade M^m e uma forma bilinear B satisfazendo as equações de Gauss, Codazzi-Mainardi (para curvatura constante c), então para cada $p \in M^m$, existe uma vizinhança U de p e uma imersão isométrica $\varphi : (M^m, g) \to N_c^{m+1}$ em uma forma espacial, com curvatura c, única a menos de isometrias de N_c^{m+1}.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma prova completa para cada c, fazendo uso da teoria de Élie Cartan. Na Literatura, para superfícies $M^2 \to \mathbb{R}^3$, o teorema é atribuido ao matemático Frances Pierre Ossian Bonnet. Posteriormente, TENENBLAT (1971), deu uma prova completa para existêcia e unicidade de imersões isomètrica de uma variedade riemanniana de dimensão n no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+k}$, onde k é uma codimensão arbitraria. No ano de 2007, Daniel, em DANIEL (2007) dá uma condição necessária e suficiente, expressa em termos da métrica , a segunda forma fundamental, e os dados resultantes de um campo de Killing ambiente, para uma variedade riemanniana de dimensão dois ser isometricamente imersão local em uma variedade de riemanniana homogênea de dimensão três com um grupo de isometrias de dimensão quatro, em seguida, motivado pela construção de famílias de superfícies mínimas em espaços produtos $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, Daniel, no ano de 2009 provou em DANIEL (2009) um teorema de Bonnet para imersões isométricas de variedades riemannianas sobre $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ onde $\mathbb{S}^n$ é a esfera padrão e $\mathbb{H}^n$ é o espaço hiperbólico padrão de dimensão n. No primeiro trabalho, Daniel usa como uma de suas referências o trabalho da Tenenblat. Em seguida, Lira, Tojeiro e Vitório, em LIRA, TOJEIRO, e VITÓRIO (2010), deram condições necessárias e suficientes que garantem a existência e unicidade, a menos de isometrias do espaço ambiente, de uma imersão isométrica de uma variedade semi-riemanniana sobre um produto de formas espaciais semi-riemannianas onde a prova do teorema principal em LIRA, TOJEIRO, e VITÓRIO (2010) é no estilo da prova encontrada em DAJCZER (1990). Esta está explicita somente para o caso euclidiano e isso nos motivou a reescrever uma prova mais detalhada deste resultado.

A leitura deste trabalho pressupõe familiaridade com conceitos de variedades diferenciáveis e riemannianas além do conhecimento de resultados básicos de geometria riemanniana. Mesmo assim, indicamos como leitura complementar DO CARMO (1988) e LEE (2003). Dividimos o texto em 5 capítulos: No primeiro capítulo damos algumas definições e alguns resultados que serão úteis para o desenvolvimento deste trabalho de modo a proporcionar um acompanhamento aos leitores com menos preparação nesta área e introduzir as notações e convensões escolhidas. No segundo capítulo, damos a prova do teorema fundamental das subvariedades 3.1, apresentada em DAJCZER (1990) para o caso euclidiano. No terceiro capítulo, introduzimos o formalismo de Cartan para subvariedades. No quarto capítulo introduzimos as noções de forma de Maurer-Cartan e derivada de Darboux de uma aplicação e com elas provamos o teorema fundamental do cálculo para grupos de Lie. Prontamente usa-se esses dois conceitos a fim de provar o teorema das subvariedades usando formalismo de Cartan e os resultados supracitados.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados de geometria riemanniana que serão utilizados no decorrer do texto. Para uma leitura complementar indicamos DO CARMO (1988), LEE (2003) e PETERSEN (1998).

2.1 Imersões

Sejam M^m e $\tilde{M}^n$ variedades diferenciáveis de dimensões m e n respectivamente, com $m < n$.

Definição 2.1 *Uma aplicação $f : M^m \to \tilde{M}^n$ é uma imersão se a diferencial*

$$f_*(x) : T_x M^m \to T_{f(x)} \tilde{M}^n$$

é injetiva para todo $x \in M^m$.

Definição 2.2 *Seja $f : M^m \to \tilde{M}^n$ uma imersão. O número $p = n - m$ é chamado de codimensão de f.*

Definição 2.3 *Sejam M uma variedade e $\pi_1 : E_1 \to M$ e $\pi_2 : E_2 \to M$ fibrados vetoriais riemannianos de postos k_1 e k_2 respectivamente. Chamamos de soma de Whitney de E_1 e E_2 ao espaço topológico*

$$E_1 \oplus_W E_2 = \bigcup_{p \in M} \left((E_1)_p \oplus_W (E_2)_p \right)$$

cujas funções de transições

$$\varphi_{\alpha\beta ab} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times (V_a \cap V_b) \to E_1 \oplus_W E_2$$

são dadas por

$$\varphi_{\alpha\beta ab} = \begin{bmatrix} \varphi_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \varphi_{ab} \end{bmatrix}.$$

Uma seção de $E_1 \oplus_W E_2$ é da forma $\xi_1 \oplus \xi_2$, onde ξ_i é uma seção de E_i, para $i \in \{1, 2\}$.

2.2 Grupos de Lie e ações

Aqui trataremos de alguns conceitos importantes para o desenvolvimento das formas espaciais. daremos a noção de grupos de Lie e faremos alguns resultados importantes sobre esse tema.

Definição 2.4 *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão finita. Dizemos que M*

é um grupo de Lie se admite uma estrutura de grupo onde as operações multiplicação e inversão são suáves.

Exemplo 2.1 *O espaço euclidiano real $\mathbb{R}^n$, visto como um grupo aditivo, é um grupo de Lie.*

Exemplo 2.2 *Denotamos por $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ao conjunto das matrizes de ordem n com coeficientes reais. O conjunto*

$$\mathbb{E}(n+k)=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ x & A\end{bmatrix}; x\in\mathbb{R}^{n+k}, A\in SO(n+k)\right\}\subset\mathbb{M}_{(n+k+1)\times(n+k+1)}(\mathbb{R}),$$

com o produto e a inversão herdados de $\mathbb{M}_{(n+k+1)\times(n+k+1)}(\mathbb{R})$, é um grupo de Lie.

Definição 2.5 *O conjunto*

$$\mathbb{E}(n+k)=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ x & A\end{bmatrix}; x\in\mathbb{R}^{n+k}, A\in SO(n+k)\right\}$$

com o produto usual de matrizes é chamado de grupo de Lie dos movimentos euclidianos e o conjunto

$$SO\,(n+k+1)=\{A\in O\,(n+k+1)\,; det\,(A)=1\}$$

é chamado de grupo dos movimentos ortogonais que preservam orientação.

Definição 2.6 *Uma algebra de Lie é um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ com um operador bilinear dado por $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ que satisfaz*

$$[X,Y]=-[Y,X]$$

e

$$[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$$

para quaisquer que seja X, Y e Z em $\mathfrak{g}$.

Definição 2.7 *Dada M uma variedade diferenciável, existe uma construção que torna o espaço tangente à identidade de M uma álgebra, e esta é a chamada álgebra de Lie associada a M ou álgebra de Lie de M.*

Proposição 2.1 *A álgebra de Lie de $\mathbb{E}(n+k)$, denotada por $\mathfrak{e}(n+k)$, é da forma*

$$\mathfrak{e}(n+k)=\left\{\begin{bmatrix}0 & 0\\ y & B\end{bmatrix}; y\in\mathbb{R}^{n+k}, B^t+B=0\right\}.$$

Prova: Seja $\gamma:[0,1]\to\mathbb{E}(n+k)$ uma curva definida por:

$$\gamma\,(t)=\begin{bmatrix}1 & (0)\\ z\,(t) & B\,(t)\end{bmatrix},$$

onde $z : [0,1] \to \mathbb{R}^{n+k}$ e $B : [0,1] \to SO(n+k)$ são curvas diferenciáveis em $\mathbb{R}^{n+k}$ e $O(n+k)$ respectivamente. Daí, por definição, $Lie\,(\mathbb{E}\,(n)) = T_I\mathbb{E}\,(n)$ sendo $Id_{(n+k)}$ a matriz identidade de $SO\,(n+k)$. Daí segue

$$B\,(t) \cdot [B\,(t)]^T = Id_{(n+k)}.$$

Agora, diferenciando em relação a variável t

$$B'\,(t) \cdot [B\,(t)]^T + B\,(t) \cdot [B'\,(t)]^T = (0).$$

Como $B\,(0) = Id_{(n+k)}$ então, tem-se que $B'\,(0) = -\,[B'\,(0)]^T$. Daí, um elemento de $\mathfrak{e}\,(n)$ é uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ v & B \end{bmatrix},$$

onde $v \in \mathbb{R}^{n+k}$ e B é uma matriz anti-simétrica, isto é,

$$\mathfrak{e}(n) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y & B \end{bmatrix}; y \in \mathbb{R}^{n+k}, B^t + B = 0 \right\}.$$

De forma análoga, Também deduzimos que

$$\mathfrak{so}\,(n+k) = \left\{ A \in O\,(n+k)\,; A^t + A = 0 \right\}.$$

Proposição 2.2 *A aplicação* $\tau : \mathbb{E}(n+k) \times \mathbb{R}^{n+k} :\longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ *definida por:*

$$\tau\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & A \end{bmatrix}, v \right) = A \cdot v + x$$

é uma ação transitiva.

Prova: Um simples controle mostra que τ é ação. Sejam os pontos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{n+k}$. Basta tomar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_1 - x_1 & Id \end{bmatrix} \in E(n+k)$$

e dessa forma

$$\tau\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_1 - x_1 & Id \end{bmatrix}, x_1 \right) = Id \cdot x_1 + x_2 - x_1 = x_2.$$

Portanto τ é transitiva.

Definição 2.8 *Seja G um grupo agindo sobre uma variedade M. Chamamos de subgrupo* *de isotropia no ponto $x \in M$ e denotamos por $G_x = \{g \in G; g \cdot x = x\}$.*

Exemplo 2.3 *Seja o Grupo $\mathbb{E}(n+k)$. Seu subgrupo de isotropia na origem do $\mathbb{R}^{n+k}$ são todos os $g \in \mathbb{E}(n+k)$ tais que $g \cdot 0 = 0$. Assim,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & A \end{bmatrix} \cdot 0 = 0 \iff A \cdot 0 + x = 0 \iff x = 0.$$

Dessa forma,

$$\mathbb{E}(n+k)_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}; A \in O(n+k) \right\}$$

é o subgrupo de isotropia de $y = 0$.

Exemplo 2.4 *Seja o Grupo $SO\,(r+1)$ e considere o polo norte $N = (1, 0, \ldots, 0) \in S^r$. Dessa forma, seu subgrupo de isotropia em N são todos os $g \in SO\,(r+1)$ tal que $g \cdot N = N$*

$$\lambda\,(B, N) = N \iff B \cdot N = N \iff \left\{ \begin{array}{c} b_1^1 = 1 \\ e \\ b_1^j = 0, \forall j > 1 \end{array} \right\}.$$

Como $B \in SO\,(r+1)$ tem-se que $B \cdot B^T = Id$. Se escrevemos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & y^T \\ 0 & A \end{bmatrix}, y \in \mathbb{R}^r$$

e $A \in M_{r \times r}\,(\mathbb{R})$, então

$$Id_{r+1} = B \cdot B^t = \begin{bmatrix} 1 & y^t \\ 0 & A^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0^t \\ y & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \langle y, y \rangle & y^t A \\ A^t y & A^t A \end{bmatrix}.$$

Com isso, tem-se que $y = 0$ e $A \in O\,(r)$. Além disso,

$$1 = det(B) = det(A).$$

e, consequentemente $A \in SO(r)$. Sendo assim,

$$SO(r+1)_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}; A \in SO(r) \right\}$$

é o subgrupo de isotropia em $y = 0$.

2.3 Imersões isométricas

Definição 2.9 *Sejam* (M^m, g) *e* $\left(\tilde{M}^n, \tilde{g}\right)$ *variedades riemannianas de dimensões* m *e* n *respectivamente. Uma imersão* $f : M^m \to \tilde{M}^n$*, com* $n > m$*, é chamada de imersão isométrica se*

$$g(X, Y) = \tilde{g}(f_* X, f_* Y)$$

para todo $x \in M^m$ *e para todos* $X, Y \in T_x M^m$*.*

Seja $f : M^m \to \tilde{M}^n$ uma imersão isométrica entre as variedades riemannianas M^m e $\tilde{M}^n$. Podemos identificar M^m com sua imagem pela imersão $f(M^m) \subset \tilde{M}^n$ e descrever o espaço tangente de $\tilde{M}^n$ no ponto $x \in M^m$ como

$$T_x \tilde{M}^n = T_x M^m \oplus T_x M^{\perp}.$$

onde $T_x M^{\perp}$ é o complemento ortogonal de $T_x M^m$ em $T_x \tilde{M}^n$. Desta decomposição se obtem um fibrado vetorial

$$T\tilde{M}^n|_{f(M^m)} = \left\{ X \in T\tilde{M}^n : \pi(X) \in f(M^m) \right\},$$

onde $\pi : T\tilde{M}^n \to \tilde{M}^n$ é a projeção. Este fibrado é a soma de Whitney do fibrado tangente TM^m com o $TM^{\perp}$, isto é,

$$T\tilde{M}^n|_{f(M^m)} = T_x M^m \oplus_{\mathbb{W}} T_x M^{\perp}.$$

Com respeito a essa decomposição, se define as projeções

$$\begin{aligned} (\ )^T &: T\tilde{M}|_{f(M^m)} \to TM \\ (\ )^{\perp} &: T\tilde{M}|_{f(M^m)} \to TM, \end{aligned}$$

as quais chamamos de projeção tangencial e projeção normal respectivamente.

Definição 2.10 *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* M^m *é uma aplicaçao*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M^m) \times \mathfrak{X}(M^m) \to \mathfrak{X}(M^m)$$

definida por

$$\nabla(X, Y) = \nabla_X Y,$$

satisfazendo para cada $f, g \in C^{\infty}(M^m)$ *e* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^m)$ *as seguintes condições:*

(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

(ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(ii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f) Y$.

Definição 2.11 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade riemanniana M^m é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M^m)$.

Definição 2.12 *Uma conexão ∇ em uma variedade riemanniana M^m é dita compatível com a métrica quando*

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^m)$.

Teorema 2.1 *Dada uma variedade riemanniana M^m, existe uma única conexão afim ∇, em M^m, satisfazendo as seguintes condições:*

(a) ∇ é simétrica.

(b) ∇ é compatível com a métrica riemanniana.

Tal conexão é chamada de conexão Levi-Civita.

Prova: Ver DO CARMO (1988), na página 61.

Dados $X \in T_x M$ e $\eta \in T_x M^{\perp}$, se ∇ e $\overline{\nabla}$ representam respectivamente as conexões de M^m e N^n respectivamente para as quais existem uma imersão isométrica $f : M^m \to N^n$ então a curvatura de M^m é dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z.$$

A segunda forma fundamental de uma imersão pode ser considerada como um tensor

$$\overline{B} : \mathfrak{X}(M^m) \times \mathfrak{X}(M^m) \times \mathfrak{X}(M^m)^{\perp} \to D(M^m)$$

definido por

$$\overline{B}(X, Y, \eta) = \langle B(X, Y), \eta \rangle,$$

onde $B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$, além disso, $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são estensões de X e Y respectivamente.

Define-se a conexão normal da imersão $\nabla^{\perp}$ como

$$\nabla^{\perp}_X \eta = \left(\overline{\nabla}_X \eta\right) - \left(\overline{\nabla}_X \eta\right)^T = \left(\overline{\nabla}_X \eta\right) + A_\eta X.$$

onde $A_\eta : T_p M^m \to T_p M^m$ é dado por $\langle A_\eta X, Y \rangle = \langle B(X, Y), \eta \rangle$.

A partir do anterior se deduz as equações de Gauss, Codazzi-Mainardi e Ricci.

Proposição 2.3 *As seguintes equaçõesse verificam:*

(a) Equação de Gauss

$$\left\langle \overline{R}(X, Y) Z, T \right\rangle = \langle R(X, Y) Z, T \rangle - \langle B(Y, T), B(X, Z) \rangle + \langle B(X, T), B(Y, Z) \rangle \tag{1}$$

(b) Equação de Codazzi-Mainardi

$$\left\langle \overline{R}\,(X,Y)\,Z,\eta\right\rangle = \left(\overline{\nabla}_Y B\right)(X,Z,\eta) - \left(\overline{\nabla}_X B\right)(Y,Z,\eta) \tag{2}$$

(c) Equação de Ricci

$$\left\langle \overline{R}\,(X,Y)\,\eta,\xi\right\rangle - \left\langle R^{\perp}\,(X,Y)\,\eta,\xi\right\rangle = \left\langle [A_\eta, A_\xi]\,X, Y\right\rangle \tag{3}$$

Prova: veja, por exemplo, DO CARMO (1988).

O fato da curvatura seccional de M^n ser constante, nos proporciona outra versão das equações de Ricci e de Codazzi, as quais são dadas, respectivamente, por

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \alpha(X, A_\xi Y) - \alpha(A_\xi X, Y)$$

e

$$(\nabla_X A)(Y,\xi) = (\nabla_Y A)(X,\xi).$$

3 TEOREMA FUNDAMENTAL DAS SUBVARIEDADES

Esta seção tem por objetivo detalhar a prova do Teorema Fundamental das Subvariedades apresentada em DAJCZER (1990).

Teorema 3.1 *Sejam M^n uma variedade Riemanniana simplesmente conexa, $\pi : E \longrightarrow M^n$ um fibrado vetorial Riemanniano de posto k com uma conexão ∇' compatível com a métrica de E e α uma seção simétrica dos homomorfismos de fibrados $Hom(TM \times TM, E)$. Defina, para cada seção local ξ de E, uma aplicação $A_\xi : TM \longrightarrow TM$ por:*

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle, \qquad X, Y \in TM.$$

Se α e ∇' satisfazem as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para o caso de curvatura seccional constante c então existem uma imersão isométrica $f : M^n \longrightarrow N_c^{n+p}$, e um isomorfismo de fibrado $\tilde{f} : E \longrightarrow TM^\perp$ ao longo de f tal que para todo $X, Y \in TM$ e todas seções locais $\xi, \eta \in E$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}(\xi), \tilde{f}(\eta)\rangle &= \langle \xi, \eta\rangle \\ \tilde{f}(\alpha(X,Y)) &= \tilde{\alpha}(X,Y) \\ \tilde{f}(\nabla'_X \xi) &= \nabla^\perp_N \tilde{f}(\xi). \end{aligned}$$

Onde $\tilde{\alpha}$ e $\nabla^\perp$ são a segunda forma fundamental e a conexão normal de f respectivamente.

Prova: Daremos aqui a prova para o caso $c = 0$. Seja ∇ a conexão de Levi-Civita em TM. Considere a soma de Whitney $\tilde{E} = TM \oplus_w E$.

Para cada $Y \in \tilde{E}$, seja $Y = Y_{TM} + Y_E$ a única decomposição de Y com $Y_{TM} \in TM$ e $Y_E \in E$. Defina ∇'' por:

$$\begin{cases} \nabla''_X Y &= \nabla_X Y + \alpha(X,Y), \text{ se } X, Y \in TM \\ \nabla''_X \xi &= -A_\xi X + \nabla'_X \xi, \text{ se } X \in TM \text{ e } \xi \in E \end{cases}.$$

Como $\tilde{E}$ é descrita pela soma de Whitney então definimos a métrica de $\tilde{E}$ como sendo $\langle,\rangle_{\tilde{E}} = \langle,\rangle_{TM} + \langle,\rangle_E$, onde $\langle,\rangle_{TM}$ representa a métrica tangente e $\langle,\rangle_E$ representa a métrica no normal. Vejamos que a conexão ∇'' é compatível com a métrica $\langle,\rangle_{\tilde{E}}$. Se tomamos X um campo do fibrado tangente e $Y, Z \in \tilde{E}$, então $Y = Y_{TM} \oplus Y_E$, e $Z = Z_{TM} \oplus Z_E$. Daí,

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle_{\tilde{E}} &= X\langle Y_{TM} \oplus Y_E, Z_{TM} \oplus Z_E\rangle_{\tilde{E}} \\ &= X\left(\langle X_{TM}, Z_{TM}\rangle_{TM} + \langle X_E, Z_E\rangle_E\right) \\ &= X\langle X_{TM}, Z_{TM}\rangle_{TM} + X\langle X_E, Z_E\rangle_E. \end{aligned}$$

Por um lado,

$$\begin{aligned}\langle \nabla''_X Y, Z\rangle_{\tilde{E}} &= \langle \nabla''_X \left(Y_{TM} \oplus Y_E\right), \left(Z_{TM} \oplus Z_E\right)\rangle_{\tilde{E}} \\ &= \langle \nabla''_X Y_{TM} + \nabla''_X Y_E, Z_{TM} + Z_E\rangle_{\tilde{E}} \\ &= \langle \nabla''_X Y_{TM} + \alpha\left(X, Y_{TM}\right) + A_{Y_E} X + \nabla'_X Y_E, Z_{TM} + Z_E\rangle_{\tilde{E}} \\ &= \langle \nabla_X Y_{TM}, Z_{TM}\rangle_{TM} - \langle A_{Y_E} X, Z_{TM}\rangle_{TM} + \langle \alpha\left(X, Y_{TM}\right), Z_E\rangle_E \\ &\quad + \langle \nabla'_X Y_E, Z_E\rangle_E .\end{aligned}$$

De forma análoga

$$\begin{aligned}\langle Y, \nabla''_X Z\rangle_{\tilde{E}} &= \langle \nabla''_X Z, Y\rangle_{\tilde{E}} \\ &= \langle \nabla_X Z_{TM}, Y_{TM}\rangle_{TM} + \langle \alpha\left(X, Z_{TM}\right), Y_E\rangle_E \\ &\quad - \langle A_{Z_E}\left(X\right), Y_{TM}\rangle_{TM} + \langle \nabla'_X Z_E, Y_E\rangle_E .\end{aligned}$$

Assim tem-se

$$\begin{aligned}\langle \nabla''_X Y, Z\rangle_{\tilde{E}} + \langle Y, \nabla''_X Z\rangle_{\tilde{E}} &= \langle \nabla_X Y_{TM}, Z_{TM}\rangle_{TM} + \langle \nabla'_X Y_E, Z_E\rangle_E \\ &\quad + \langle \nabla_X Z_{TM}, Y_{TM}\rangle_{TM} + \langle \nabla'_X Z_E, Y_E\rangle_E \\ &= X\langle Y_E, Z_E\rangle_E + X\langle Y_{TM}, Z_{TM}\rangle_{TM} .\end{aligned}$$

Portanto,

$$X\langle Y, Z\rangle_{\tilde{E}} = \langle \nabla''_X Y, Z\rangle_{\tilde{E}} + \langle Y, \nabla''_X Z\rangle_{\tilde{E}},$$

e com isso tem-se que a conexão ∇'' é compatível com a métrica $\langle , \rangle_{\tilde{E}}$. Vamos examinar o caso de curvatura seccional constante igual a zero. Usando o fato de que α e ∇' satisfazem as equações de Gauss, Codazzi-Mainardi e Ricci, temos que

$$\begin{aligned}R(X,Y)\xi &= \nabla''_X \nabla''_Y \xi - \nabla''_Y \nabla''_X \xi - \nabla''_{[X,Y]}\xi \\ &= \nabla''_X(-A_\xi Y + \nabla'_X \xi) - \nabla''_Y(-A_\xi X + \nabla'_X \xi) - (-A_\xi[X,Y] + \nabla'_{[X,Y]}\xi) \\ &= -\nabla''_X(A_\xi Y) + \nabla''_X(\nabla'_Y \xi) + \nabla''_Y(A_\xi X) - \nabla''_Y(\nabla'_X \xi) + A_\xi[X,Y] - \nabla'_{[X,Y]}\xi \\ &= -\nabla_X(A_\xi Y) - \alpha(X, A_\xi Y) - A_{(\nabla'_Y \xi)}X + \nabla'_X \nabla'_Y \xi + \nabla_Y(A_\xi X) \\ &\quad + \alpha(Y, A_\xi X) + A_{(\nabla'_X \xi)}Y - \nabla'_Y \nabla'_X \xi + A_\xi[X,Y] - \nabla'_{[X,Y]}\xi \\ &= -\nabla_X(A_\xi Y) - A_{(\nabla'_Y \xi)}X + \nabla_Y(A_\xi X) + A_{(\nabla'_X \xi)}Y + A_\xi[X,Y] + \nabla'_X \nabla'_Y \xi \\ &\quad - \nabla'_Y \nabla'_X \xi - \nabla'_{[X,Y]}\xi + \alpha(Y, A_\xi X) - \alpha(X, A_\xi Y) \\ &= -\nabla_X(A_\xi Y) + \nabla_Y(A_\xi X) - A_{(\nabla'_Y \xi)}X + A_{(\nabla'_X \xi)}Y + A_\xi[X,Y] \\ &\quad + R^\perp(X,Y)\xi + \alpha(Y, A_\xi X) - \alpha(X, A_\xi Y).\end{aligned}$$

Por definição,

$$(\nabla_Y A)(X,\xi) := \nabla_Y(A_\xi X) - A_\xi(\nabla_Y X) - A_{(\nabla'_Y \xi)}X$$

relembrando que

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

sendo ∇ simétrica, temos

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= (\nabla_Y A)(X,\xi) - (\nabla_X A)(Y,\xi) \\ &\quad + R^{\perp}(X,Y)\xi + \alpha(Y, A_\xi X) - \alpha(X, A_\xi Y). \end{aligned}$$

Como a curvatura é constante então,

$$R(X,Y)\xi = 0.$$

Com isso, garantimos que o tensor de curvatura de $\tilde{E}$ é Nulo.

Escolha um ponto $x \in M$ e vetores ortonormais $\xi_1, ..., \xi_{n+p} \in \pi^{-1}(x)$. Como ∇''_X tem curvatura zero,$\{\xi_v\}$ pode ser estendido a um referencial paralelo, chamado ainda de $\{\xi_v\}$ ao redor de x. O fato de ∇'' ser compatível com a métrica nos garante que as seções são dois a dois ortonormais a ∇''. Tomando coordenadas locais $(x_1, ..., x_n)$ em uma vizinhança U de x, existem funções a_{iv} definidas nessa vizinhança, tais que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{v=1}^{n+p} a_{iv}\xi_v \qquad 1 \le i \le n.$$

Os coeficientes da métrica em M são dados por:

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle \sum_{v=1}^{n+p} a_{iv}\xi_v, \sum_{u=1}^{n+p} a_{ju}\xi_u \right\rangle = a_{iv}a_{jv}.$$

Como as seções ξ_v são paralelas (i.e.), para todo $v \in \{1, ..., n+p\}$, tem-se $\nabla''_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\xi_v = 0$. Disso, decorre que

$$\begin{aligned} \nabla''_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} &= \sum_{v=1}^{n+p} \nabla''_{\frac{\partial}{\partial x_i}} a_{jv}\xi_v \\ &= \sum_{v=1}^{n+p} a_{jv}\nabla''_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\xi_v + \frac{\partial a_{jv}}{\partial x_i}\xi_v \\ &= \sum_{v=1}^{n+p} \frac{\partial a_{jv}}{\partial x_i}\xi_v. \end{aligned}$$

Usando a simetria de α, o fato da conexão ∇ ser Levi-Civita em TM,tem-se que:

$$\begin{aligned}
0 &= \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]_{TM} \\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) - \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} - \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\
&= \nabla''_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla''_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= \sum_{v=1}^{n+p} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{jv}\xi_v - \sum_{v=1}^{n+p} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{iv}\xi_v \\
&= \sum_{v=1}^{n+p} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} a_{jv}\xi_v - \frac{\partial}{\partial x_j} a_{iv}\xi_v\right) \\
&= \sum_{v=1}^{n+p} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} a_{jv} - \frac{\partial}{\partial x_j} a_{iv}\right)\xi_v.
\end{aligned}$$

Do anterior, deduzimos que

$$\sum_{v=1}^{n+p} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} a_{jv} - \frac{\partial}{\partial x_j} a_{iv}\right)\xi_v = 0.$$

Para cada $p \in M$, (ξ_v) é uma base de $\pi^{-1}(p)$ em uma vizinhança de p. Assim, para cada $v \in \{1, ..., n+p\}$. Disso decorre que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} a_{jv} = \frac{\partial}{\partial x_j} a_{iv}.$$

Como as 1-formas fechadas são exatas em U, existem funções f_v satisfazendo

$$\frac{\partial f_v}{\partial x_i} = a_{iv}.$$

Defina $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ em uma vizinhança U de x denotada por:

$$f = (f_1, ..., f_{n+p}).$$

Com isso, teremos que:

$$f_*(\frac{\partial}{\partial x_i}) = (\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, ..., \frac{\partial f_{n+p}}{\partial x_i}) = (a_{i1}, ..., a_{i(n+p)}), \qquad i = 1, ..., n.$$

Consequentemente teremos que:

$$\begin{aligned}\langle f_*(\frac{\partial}{\partial x_i}), f_*(\frac{\partial}{\partial x_j})\rangle &= \sum_{v=1}^{n+p} a_{iv}a_{jv}\\ &= g_{ij}\\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle.\end{aligned}$$

Em outras palavras, f é uma imersão isométrica. Agora defina $\tilde{\Phi} : TU \oplus E \longleftarrow T\mathbb{R}^{n+p}|_{f(U)}$ por:

$$\tilde{\Phi}(\xi_v) = e_v,$$

onde $e_v, \quad v = 1, ..., (n+p)$, é a restrição do referencial canônico de $T\mathbb{R}^{n+p}$ a $f(U)$.

Para os vetores tangentes $\dfrac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{v=1}^{n+p} a_{iv}\xi_v$, temos que:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(\frac{\partial}{\partial x_i}) &= \sum_{v=1}^{n+p} a_{iv}\tilde{\Phi}(\xi_v)\\ &= \sum_{v=1}^{n+p} a_{iv}e_v\\ &= f_*(\frac{\partial}{\partial x_i}).\end{aligned}$$

Com isso , temos que $\tilde{\Phi} : TM|_U \longleftarrow Tf(U)$ é isometria entre fibras e, além disso, $\tilde{\Phi}$ manda referencial paralelo $\xi_1, ..., \xi_{(n+p)}$ sobre referencial canônico $e_1, ..., e_{(n+p)}$. Portanto, satisfaz

$$\tilde{\Phi}(\nabla''_X Y) \quad = \tilde{\nabla} f_{*X} \tilde{\Phi}(Y)$$

e

$$\tilde{\Phi}(\nabla''_X \xi) \quad = \tilde{\nabla} f_{*X} \Phi(\xi),$$

para todo $X, Y \in TM$ e $\xi \in E$, onde $\tilde{\nabla}$ é a Conexão Levi-Civita em $\mathbb{R}^{n+p}$.

Tomando componentes normais e definindo $\tilde{f} \;=\; \Phi|_E$, temos que

$$\tilde{f}\alpha(X, Y) \;=\; \tilde{\alpha}(X, Y)$$

e, além disso,

$$\tilde{f}\nabla'_X Y \;=\; \nabla^{\perp} f_{*X} \tilde{f}(\xi)$$

e isto conclue a prova.

4 FORMALISMO DE CARTAN PARA SUBVARIEDADES.

A idéia deste capítulo é fixar a notação e apresentar alguns resultados essenciais da geometria das subvariedades usando o formalismo de Élie Cartan.

Definição 4.1 *Seja M^n uma variedade suave, com uma conexão ∇ e seja $\{e_i\}$ um referencial local, em um aberto U, com um correferencial dual $\{\theta^j\}$. Define-se as formas de de conexão ω_i^j em U de acordo com a seguinte identidade*

$$\nabla e_i = \omega_i^j \otimes e_j.$$

As formas ω_i^j são chamadas formas de conexão (em U). Observe que a conexão dual ∇ em TM^* é dada por

$$\nabla \theta^i = -\omega_j^i \otimes \theta^j.$$

Proposição 4.1 *Sejam $\{e_i\}$ um referencial e $\{\overline{e}_i\}$ outro referencial tal que $\overline{e}_i = A_i^j e_j$ em um aberto $U \subseteq M^m$, onde $A : U \to Gl(m)$, e sejam $\left\{\omega_j^i\right\}$ e $\left\{\overline{\omega}_j^i\right\}$, respectivamente, as formas de conexão de ∇ em U com respeito a e_i e $\overline{e}_i$, dado pela identidade $\nabla \overline{e}_i = \overline{\omega}_i^j \otimes \overline{e}_j$, se consideramos as matrizes cujos valores são as 1-formas $\omega = (\omega_i^j)$ e $\overline{\omega} = (\overline{\omega}_i^j)$. Então se verifica a seguinte igualdade*

$$\overline{\omega} = A^{-1}\omega A + A^{-1}dA. \tag{4}$$

Prova: Fixada uma componente da matriz ω tem-se

$$\begin{aligned}
A_k^s \overline{\omega}_j^i (e_s) &= \overline{\omega_j^i} (A_k^s e_s) \\
&= \overline{\omega_j^i} (\overline{e}_k) \\
&= \overline{\theta}^i (\nabla_{\overline{e}_k} \overline{e}_j) \\
&= \left(A^{-1}\right)_r^i \theta^r \left[\nabla_{A_k^s e_s} A_j^t e_t\right] \\
&= \left(A^{-1}\right)_r^i A_k^s \theta^r \left[\nabla_{e_s} A_j^t e_t\right] \\
&= \left(A^{-1}\right)_r^i A_k^s \theta^r \left[A_j^t \nabla_{e_s} e_t + e_s \left(A_j^t\right) e_t\right] \\
&= \left(A^{-1}\right)_r^i A_k^s \left[A_j^t \theta^r \left(\nabla_{e_s} e_t\right) + e_s \left(A_j^r\right)\right] \\
&= \left(A^{-1}\right)_r^i A_k^s \left[A_j^t \omega_t^r (e_s) + dA_j^r (e_s)\right].
\end{aligned}$$

Assim,

$$A_k^s \overline{\omega}_j^i = \left(A^{-1}\right)_r^i A_k^s \left[A_j^t \omega_t^r + dA_j^r\right].$$

Multiplicando por $(A^{-1})^k_s$ temos

$$\begin{aligned} \overline{\omega}^i_j &= \left(A^{-1}\right)^k_s \left(A^{-1}\right)^i_r A^s_k \left[A^t_j \omega^r_t + dA^r_j\right] \\ &= \left(A^{-1}\right)^i_r \omega^r_t A^t_j + \left(A^{-1}\right)^i_r dA^r_j. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\overline{\omega} = A^{-1}\omega A + A^{-1}dA.$$

Para introduzir a próxima proposição, relembramos que uma conexão é simétrica se, e somente se, o tensor de torsão

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

é identicamente nulo.

Proposição 4.2 *Seja M^n uma variedade Riemanniana com uma conexão afim ∇. Então ∇ é simétrica se, e somente se, vale a seguinte igualdade*

$$d\theta^j = -\omega^i_j \wedge \theta^j.$$

Prova: Para todo $X, Y \in X(M)$, temos

$$\begin{aligned} d\theta^j + \omega^j_i \wedge \theta^i (X,Y) &= X\left(\theta^j (Y)\right) - Y\left(\theta^j (X)\right) - \theta^j ([X,Y]) \\ &\quad + \omega^j_i (X)\, \theta^i (Y) - \omega^j_i (Y)\, \theta^i (X). \end{aligned}$$

Como $\nabla_X e_i = \omega^j_i (X)\, e_j$, teremos que

$$\omega^j_i (X) = \theta^j \left(\nabla_X e_i\right).$$

De forma análoga, teremos que

$$\omega^j_i (Y) = \theta^j \left(\nabla_Y e_i\right).$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned} d\theta^j + \omega^j_i \wedge \theta^i (X,Y) &= X\left(\theta^j (Y)\right) - Y\left(\theta^j (X)\right) - \theta^j ([X,Y]) \\ &\quad + \theta^j \left(\nabla_X e_i\right) \theta^i (Y) - \theta^j \left(\nabla_Y e_i\right) \theta^i (X). \end{aligned}$$

Agora, como

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_X \left(\theta^i (Y) e_i\right) \\ &= \theta^i (Y) \nabla_X e_i + X\theta^i (Y) e_i.\end{aligned}$$

Agora, aplicando θ^j na Equação anterior temos

$$\theta^j (\nabla_X Y) = \theta^j \left(\theta^i (Y) \nabla_X e_i\right) + X\theta^j (Y).$$

Dessa maneira

$$\begin{aligned}\left(d\theta^j + \omega_i^j \wedge \theta^i\right)(X,Y) &= \theta^j (\nabla_X Y) - \theta^j (\nabla_Y X) - \theta^j ([X,Y]) \\ &= \theta^j (T(X,Y)).\end{aligned}$$

Portanto, sendo $\{\theta^j\}$ uma base, $d\theta^j + \omega_i^j \wedge \theta^i = 0$ se, e somente se, $T \equiv 0$.

Um outro fato importante é que a compatibilidade com a métrica pode ser descrita em função das formas de conexão.

Proposição 4.3 *Seja M^m uma variedade riemanniana e ∇ uma conexão afim, com formas de conexão $\left\{\omega_j^i\right\}$ numa vizinhança U com respeito a um referencial ortonormal $\{e_i\}$. Então, a conexão ∇ é compatível com a métrica se, e somente se, $\omega_j^i = -\omega_i^j$, isto é, $\left(\omega_j^i\right) \in \mathfrak{so}(m)$.*

Prova: É suficiente provar em um referencial $\{e_i\}$ ortonormal. Usando o fato de que $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_j^i$ e a compatibilidade da conexão ∇ com a métrica temos que

$$\begin{aligned}0 &= e_k(\delta_j^i) \\ &= e_k \langle e_i, e_j\rangle \\ &= \langle \nabla_{e_k} e_i, e_j\rangle + \langle e_i, \nabla_{e_k} e_j\rangle \\ &= \langle \omega_i^s(e_k) e_s, e_j\rangle + \left\langle e_i, \omega_j^s(e_k) e_s\right\rangle \\ &= \omega_i^s(e_k)\delta_j^s + \omega_j^s(e_k)\delta_i^s \\ &= \omega_i^j(e_k) + \omega_j^i(e_k).\end{aligned}$$

Portanto, $\omega_i^j(e_k) = -\omega_j^i(e_k)$.

Reciprocamente, suponha que $\omega_i^j(e_k) = -\omega_j^i(e_k)$, então

$$\begin{aligned}0 &= \omega_i^j(e_k) + \omega_j^i(e_k) \\ &= \omega_i^s(e_k)\delta_j^s + \omega_j^s(e_k)\delta_i^s \\ &= \langle \omega_i^s(e_k) e_s, e_j\rangle + \left\langle e_i, \omega_j^s(e_k) e_s\right\rangle \\ &= \langle \nabla_{e_k} e_i, e_j\rangle + \langle e_i, \nabla_{e_k} e_j\rangle.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} e_k \langle e_i, e_j \rangle &= e_k(\delta^i_j) \\ &= 0 \\ &= \langle \nabla_{e_k} e_i, e_j \rangle + \langle e_i, \nabla_{e_k} e_j \rangle . \end{aligned}$$

E com isso encerramos a prova.

Proposição 4.4 *(Cartan) Seja M uma variedade riemaniana, $p \in M$, e $U \subset M$ uma vizinhança de p. Sejam $\{e_i\}$ um referencial ortonormal com $\{\theta^i\}$ seu correferencial dual. Então, existem um único conjunto $\{\omega^i_j\}$ de 1- formas suaves satisfazendo*

$$\omega^i_j = -\omega^j_i \tag{5}$$

e

$$d\theta^j = -\omega^j_i \wedge \theta^i. \tag{6}$$

Prova: veja, por exemplo, Sharpe (2000).

Definição 4.2 *Seja U um aberto de M, com correferencial ortonormal $\{\theta^j\}$ e formas de conexão Levi-Civita $\{\omega^i_j\}$. A forma de curvatura $\Theta \in \Lambda^2(U, So(m))$ está definida como segue*

$$\Theta = d\omega + \omega \wedge \omega$$

ou, em componentes.

$$\Theta^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j.$$

Proposição 4.5 *Seja U um aberto de M, com um correferencial ortonormal $\{\theta^j\}$, formas de conexão Levi-Civita $\{\omega^i_j\}$ e forma de curvatura $\Theta \in \Lambda^2(U, So(m))$. Então, variação da forma de curvatura é dada por*

$$\overline{\Theta} = A^{-1}\Theta A, \tag{7}$$

onde $\overline{e} = A \cdot e$.

Prova: Usando a Equação (4) em (7), temos

$$\begin{aligned} \overline{\Theta} &= d\overline{\omega} + \overline{\omega} \wedge \overline{\omega} \\ &= d\left(A^{-1}\omega A + A^{-1}dA\right) + \left(A^{-1}\omega A + A^{-1}dA\right) \wedge \left(A^{-1}\omega A + A^{-1}dA\right) \\ &= A^{-1}\Theta A - A^{-1}dAA^{-1} \wedge dA + A^{-1}dA \wedge A^{-1}dA \\ &= A^{-1}\Theta A. \end{aligned}$$

E isto prova a proposição.

Proposição 4.6 *Seja* $\left\{\theta^k \wedge \theta^t; k < t\right\}$ *uma base para as 2-formas. Se escrevemos* $\Theta^i_j = \frac{1}{2} R^i_{jkt}\theta^k \wedge \theta^t$*, então se verifica*

$$R^i_{jkt} = \langle R\left(e_k, e_t\right) e_j, e_i\rangle\,,$$

onde R *é o tensor curvatura.*
Prova: Usando a definição da forma de curvatura temos

$$\begin{aligned} R^i_{jkt} &= \Theta^i_j\left(e_k, e_t\right) \\ &= \left(d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j\right)\left(e_k, e_t\right) \\ &= \langle R\left(e_k, e_t\right) e_j, e_i\rangle\,, \end{aligned}$$

o que prova o resultado.

Seja $F : M^m \to N^n$ uma imersão isométrica, e fixe os índices $1 \leq a, b, c \leq n$, $1 \leq 1, j, k \leq m$, $m+1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq n$. Então para cada $p \in F(M^m)$, existe um referencial ortonormal $\{\overline{e}_a\}_a$ definido em uma vizinhança $U \subset N$ de p tal que, para cada $q \in U \cap F(M^m)$, $q = F(x)$, $\overline{e}_i(q) \subset F_{*,x}T_xM$. Denote por $\{\overline{\theta}^b\}_b$ o correferencial dual, e com $\{\overline{\omega}^a_b\}$ as formas de conexão Levi-Civita de N, Então pelas equações de estruturas,

$$\left\{\begin{aligned} d\overline{\theta}^a &= -\overline{\theta}^a_b \wedge \overline{\theta}^b \\ d\overline{\omega}^a_b &= -\overline{\omega}^a_c \wedge \overline{\omega}^c_b + \overline{\Theta}^a_b \end{aligned}\right.\,,$$

onde $\overline{\Theta}^a_b = \frac{1}{2}\overline{R}^a_{bcd}\theta^c \wedge \theta^d$ são as formas de curvatura de N. Defina $\theta^a := F^*\overline{\theta}^a$ e $\omega^a_b := F^*\overline{\omega}^a_b$. Então,

$$\theta^j(e_i) = F^*\overline{\theta}^j(e_i) = \overline{\theta}^j(F_*(e_i)) = \overline{\theta}^j(\overline{e}_i) = \delta^i_j.$$

Daí, conclue-se que $\{\theta^j\}$ é o correferencial ortonormal em M. Note que $\theta^\alpha = F^*\overline{\theta}^\alpha$. Tomando e_i o referencial ortonormal em M^m, tal que $F_*e_i = \overline{e}_i$, temos

$$\begin{aligned} \theta^\alpha(e_i) &= F^*\overline{\theta}^\alpha(e_i) \\ &= \overline{\theta}^\alpha(F_*(e_i)) \\ &= \overline{\theta}^\alpha(\overline{e}_i) \\ &= \delta^\alpha_j \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vamos provar que $\{\omega_j^i\}$ são as formas de conexão Levi-Civita de M^m. Temos

$$\begin{aligned}
\omega_j^i &= F^*\overline{\omega}_j^i \\
&= F^*(-\overline{\omega}_i^j) \\
&= -F^*(\overline{\omega}_i^j) \\
&= -\omega_i^j,
\end{aligned}$$

e, ainda

$$\begin{aligned}
d\theta^i &= dF^*\overline{\theta}^i = F^*d\overline{\theta}^i \\
&= -F^*(\overline{\omega}_a^i \wedge \overline{\theta}^a) \\
&= -F^*(\overline{\omega}_j^i \wedge \overline{\theta}^j + \overline{\omega}_\alpha^i \wedge \overline{\theta}^\alpha) \\
&= -F^*(\overline{\omega}_j^i \wedge \overline{\theta}^j) - F^*(\overline{\omega}_\alpha^i \wedge \overline{\theta}^\alpha) \\
&= -F^*\overline{\omega}_j^i \wedge F^*\overline{\theta}^j - F^*\overline{\omega}_\alpha^i \wedge F^*\overline{\theta}^\alpha \\
&= -F^*\overline{\omega}_j^i \wedge F^*\overline{\theta}^j \\
&= -\omega_j^i \wedge \theta^j.
\end{aligned}$$

Assim, tem-se que $\{\omega_j^i\}$ são as formas de conexão Levi-Civita de M^m.

Do anterior tem-se que $\theta^\alpha = 0$ e, desse fato, decorre

$$\begin{aligned}
0 &= d\theta^\alpha \\
&= d(F^*\overline{\theta}^\alpha) \\
&= F^*(d\overline{\theta}^\alpha) \\
&= F^*(-\overline{\omega}_b^\alpha \wedge \overline{\theta}^b) \\
&= -\omega_i^\alpha \wedge \theta^i.
\end{aligned}$$

Como ω_i^α são 1-formas, então existem $h_{ij}^\alpha \in C^\infty(M^m)$ tal que

$$\omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \theta^j.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
0 &= h_{ij}^\alpha \theta^j \wedge \theta^i \\
&= \sum_{i<j} \left(h_{ij}^\alpha - h_{ji}^\alpha\right) \theta^j \wedge \theta^i.
\end{aligned}$$

Como $\{\theta^j \wedge \theta^i\}$ é uma base para o conjunto das 2-formas, então $\theta^j \wedge \theta^i \neq 0$ e consequentemente, $h_{ij}^\alpha - h_{ji}^\alpha = 0$, ou seja, para todo $1 \leq i, j \leq m$ e $m+1 \leq \alpha \leq n$ tem-se que

$$h^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ji}.$$

O tensor $B = h^\alpha_{ij}\theta^i \otimes \theta^j \otimes e_\alpha$ é a segunda forma fundamental de F.

Aplicando o pull back na Equação de $d\overline{\omega}^i_j$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
F^*d\overline{\omega}^i_j &= -F^*\left(\overline{\omega}^i_a \wedge \overline{\omega}^a_j\right) + F^*\overline{\Theta}^i_j \iff \\
dF^*\overline{\omega}^i_j &= -F^*\overline{\omega}^i_a \wedge F^*\overline{\omega}^a_j + F^*\overline{\Theta}^i_j \iff \\
d\omega^i_j &= -\omega^i_a \wedge \omega^a_j + F^*\overline{\Theta}^i_j \iff \\
\omega^i_k \wedge \omega^k_j + \Theta^i_j &= -\omega^i_k \wedge \omega^k_j - \omega^i_\alpha \wedge \omega^\alpha_j + F^*\overline{\Theta}^i_j \iff \\
\Theta^i_j &= -\omega^i_\alpha \wedge \omega^\alpha_j + F^*\overline{\Theta}^i_j.
\end{aligned}$$

Agora, se escrevemos $\Theta^i_j = \frac{1}{2}R^i_{jkt}\theta^k \wedge \theta^t$ teremos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}R^i_{jkt}\theta^k \wedge \theta^t &= -\omega^i_\alpha \wedge \omega^\alpha_j + F^*\left(\frac{1}{2}\overline{R}^i_{jkt}\overline{\theta}^k \wedge \overline{\theta}^t\right) \\
&= h^\alpha_{ik}\theta^k \wedge h^\alpha_{jt}\theta^t + \frac{1}{2}\overline{R}^i_{jkt}F^*\overline{\theta}^k \wedge F^*\overline{\theta}^t \\
&= h^\alpha_{ik}\theta^k \wedge h^\alpha_{jt}\theta^t + \frac{1}{2}\overline{R}^i_{jkt}\theta^k \wedge \theta^t \\
&= h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jt}\theta^k \wedge \theta^t + \frac{1}{2}\overline{R}^i_{jkt}\theta^k \wedge \theta^t.
\end{aligned}$$

Usando a anti-simetria em k, t, obtemos a igualdade das componentes e com isso, temos a Equação de Gauss (1) em coordenadas

$$R^i_{jkt} = h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jt} - h^\alpha_{it}h^\alpha_{jk} + \overline{R}^i_{jkt}.$$

Assim como deduzimos a Equação de Gauss, é possivel deduzir a Equação de Codazzi.

$$\begin{aligned}
d\omega^\alpha_i &= -\omega^\alpha_a \wedge \omega^a_i + F^*\overline{\Theta}^\alpha_i \\
dh^\alpha_{ij} \wedge \theta^j + h^\alpha_{ij}d\theta^j &= -\omega^\alpha_a \wedge \omega^a_i + \overline{\Theta}^\alpha_i \\
dh^\alpha_{ij} \wedge \theta^j - h^\alpha_{ij}\omega^j_k \wedge \theta^k + \omega^\alpha_a \wedge \omega^a_i &= \overline{\Theta}^\alpha_i \\
dh^\alpha_{ij} \wedge \theta^j - h^\alpha_{ij}\omega^j_k \wedge \theta^k + \omega^\alpha_k \wedge \omega^k_i + \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta_i &= \overline{\Theta}^\alpha_i \\
dh^\alpha_{ij} \wedge \theta^j - h^\alpha_{ij}\omega^j_k \wedge \theta^k + h^\alpha_{kj}\theta^j \wedge \omega^k_i + \omega^\alpha_\beta \wedge h^\beta_{ij}\theta^j &= \overline{\Theta}^\alpha_i \\
dh^\alpha_{ij} \wedge \theta^j - h^\alpha_{ij}\omega^k_j \wedge \theta^k - h^\alpha_{kj}\omega^k_i \wedge \theta^j + h^\beta_{ij}\omega^\alpha_\beta \wedge \theta^j &= \overline{\Theta}^\alpha_i \\
h^\alpha_{ijk}\theta^k \wedge \theta^j &= \overline{\Theta}^\alpha_i.
\end{aligned}$$

Usando o fato de que $\Theta_i^\alpha = \frac{1}{2} R_{ikt}^\alpha \theta^k \wedge \theta^t$, temos

$$h_{ijk}^\alpha \theta^k \wedge \theta^j \;\; = \;\; \frac{1}{2} \overline{R}_{ijk}^\alpha \theta^j \wedge \theta^k$$

e aplicando a Equação anterior em (e_k, e_j) teremos

$$h_{ijk}^\alpha - h_{ikj}^\alpha = \overline{R}_{ikj}^\alpha.$$

Analogamente, o fibrado normal $\{e_\alpha\}$ tem uma conexão compatível $\nabla^\perp$ definida por

$$\nabla^\perp e_\alpha = \omega_\alpha^\beta \otimes e_\beta$$

e a forma de curvatura $\overline{\Theta}_\beta^\alpha = \frac{1}{2} \left(R^\perp \right)_{\beta jk}^\alpha \theta^j \wedge \theta^k$ está definida de acordo com a igualdade abaixo

$$\overline{\Theta}_\beta^\alpha = d\omega_\beta^\alpha + \omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma = F^* \Theta_\beta^\alpha - \omega_k^\alpha \wedge \omega_\beta^k.$$

Da identidade acima tem-se que

$$\frac{1}{2} (R^\perp)_{\beta jk}^\alpha \theta^j \wedge \theta^k \;\; = \;\; -\omega_i^\alpha \wedge \omega_\beta^i + \frac{1}{2} \overline{R}_{\beta jk}^\alpha \theta^j \wedge \theta^k \tag{8}$$

$$\frac{1}{2} (R^\perp)_{\beta jk}^\alpha \theta^j \wedge \theta^k \;\; = \;\; h_{ij}^\alpha h_{ik}^\beta \theta^j \wedge \theta^k + \frac{1}{2} \overline{R}_{\beta jk}^\alpha \theta^j \wedge \theta^k. \tag{9}$$

Consequentemente, aplicando a Equação anterior em (e_j, e_k), aparece a Equação de Ricci:

$$(R^\perp)_{\beta jk}^\alpha = h_{ij}^\alpha h_{ik}^\beta - h_{ik}^\alpha h_{ij}^\beta + \overline{R}_{\beta jk}^\alpha.$$

5 TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

O objetivo desta seção é provar um teorema fundamental do cálculo para grupos de Lie não abeliano usando a derivada de Darboux.

5.1 Forma de Maurer-Cartan

Definição 5.1 *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Definimos a forma de Maurer-Cartan invariante à esquerda como sendo $\omega_G(v) = L_{g^{-1}*}(v)$, $\forall v \in T_gG$.*

Se $v \in T_g(G)$, então $L_{h,*}(v) \in T_{hg}(G)$, Assim

$$\begin{aligned} (L_h^*\omega_G)(v) &= \omega_G(L_{h*}(v)) \\ &= L_{(hg)^{-1}*}(L_{h*}(v)) \\ &= L_{g^{-1}*}(v) \\ &= \omega_G(v). \end{aligned}$$

Consequentemente, ω_G é invariante sobre translação à esquerda, o que explica o uso do termo invariante à esquerda.

Proposição 5.1 *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e seja, para todo $g \in G$, a forma de Maurer-Cartan $\omega_G : T_gG \to \mathfrak{g}$ sobre G com valores em $\mathfrak{g}$. Então, para todo $g \in G$, $\omega_G : T_gG \to \mathfrak{g}$ é um isomorfismo.*

Prova: A prova é consequência da definição pois $\omega_G : T_gG \to \mathfrak{g}$ dado por $L_{g^{-1}*}$, que é isomorfismo.

Exemplo 5.1 *Seja $G = GL(n, \mathbb{R})$. A fórmula de Maurer-Cartan é dada por*

$$\omega_G = (x_{ij})^{-1}(dx_{ij}).$$

Exemplo 5.2 *Se $G = (\mathbb{R}^+, \cdot)$, o elemento neutro de G é $e = 1$ então a forma de Maurer-Cartan é dada por $\omega = \frac{1}{x}dx$.*

Exemplo 5.3 *Se ω_G é a forma de Maurer Cartan de G e H é um subgrupo de G com aplicação inclusão $i : H \to G$ então a forma de Maurer Cartan de H é dada por*

$$\omega_H = i^*\omega_G.$$

Calculemos a derivada da forma de *Maurer-Cartan* ω_G de um grupo de Lie G. Para isso considere X, Y dois campos invariantes à esquerda. Então:

$$d\omega_G(X, Y) = X(\omega_G(Y)) - Y(\omega_G(X)) - \omega_G([X, Y]).$$

O fato do campo X ser invariante à esquerda nos dá:

$$L_{g*}(X_a) = X_{ga} \quad \forall a, g \in G.$$

Agora, aplicando $L_{(ga)^{-1}*}$ em ambos os lados, temos

$$\begin{aligned} L_{(ga)^{-1}*}\left(L_{g*}\left(X_a\right)\right) &= L_{(ga)^{-1}*}(X_{(ga)}) \Leftrightarrow \\ L_{a^{-1}*}(X_a) &= L_{(ga)^{-1}*}(X_{(ga)}) \Leftrightarrow \\ \omega_G(X_a) &= \omega_G(X_{(ga)}). \end{aligned}$$

Concluimos que $\omega_G(X)$ é constante. Com isso, teremos que:

$$X(\omega_G(Y)) = Y(\omega_G(X)) = 0.$$

Consequentemente

$$d\omega_G(X, Y) = -\omega_G([X, Y]).$$

Como os campos X e Y são invariantes a esquerda então $[X, Y]$ também é, logo:

$$\begin{aligned} \omega_G\left([X, Y]_g\right) &= L_{g^{-1}}\left([X, Y]_g\right) \\ &= [X, Y]_e \\ &= [X_e, Y_e]. \end{aligned}$$

De onde procede

$$-\omega_G([X, Y]_g) = -[\omega_G(X), \omega_G(Y)].$$

Consequentemente

$$d\omega_G(X, Y) + [\omega_G(X), \omega_G(Y)] = 0.$$

A equação acima pode ser escrita da seguinte maneira:

$$d\omega_G + \frac{1}{2}[\omega_G, \omega_G] = 0. \tag{10}$$

Esta recebe o nome de *Equação de estrutura.*

Exemplo 5.4 *Seja $G = GL\left(n, \mathbb{R}\right)$. Considere a fórmula de Maurer-Cartan*

$$\omega_G = \left(x_{ij}\right)^{-1}\left(dx_{ij}\right).$$

Multiplicando a direita na equação anterior por (x_{ij}), tem-se

$$\begin{aligned} \left(x_{ij}\right) \cdot \omega_G &= \left(x_{ij}\right) \cdot \left(x_{ij}\right)^{-1}\left(dx_{ij}\right) \\ &= \left(dx_{ij}\right). \end{aligned}$$

Tomando a derivada exterior

$$d\left(x_{ij}\right)\wedge\omega_G+\left(x_{ij}\right)\wedge d\omega_G \;=\; d\left(d\left(x_{ij}\right)\right)=0.$$

Assim, substituindo $d\left(x_{ij}\right)$ na equação anterior

$$\left(x_{ij}\right)\cdot\omega_G\wedge\omega_G+\left(x_{ij}\right)\cdot d\omega_G \;=\; 0.$$

por fim, multiplicando a esquerda por $\left(x_{ij}\right)^{-1}$ segue-se

$$\begin{aligned} 0 &= \left(x_{ij}\right)^{-1}\cdot\left(x_{ij}\right)\cdot\omega_G\wedge\omega_G+\left(x_{ij}\right)^{-1}\cdot\left(x_{ij}\right)\cdot d\omega_G \\ &= \omega_G\wedge\omega_G+d\omega_G. \end{aligned}$$

5.2 Teorema Fundamental do Cálculo

Definição 5.2 *Sejam G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, ω_G a forma de Maurer-Cartan sobre G com valores em $\mathfrak{g}$, M uma variedade suave e $f: M\to G$ uma aplicação suave. A* ***Derivada de Darboux*** *(à esquerda) de f é a 1-forma denotada por ω_f definida por $\omega_f=f^*\omega_G$ sobre M com valores em $\mathfrak{g}$. A aplicação f é chamada de integral ou primitiva de ω.*

Exemplo 5.5 *Se $G=\mathbb{GL}\left(n,\mathbb{R}\right)$, então $f^*\omega_G=f^*\left(P^{-1}dP\right)=f^{-1}df$.*

Note que ω_f satisfaz a equação de estrutura pois:

$$\begin{aligned} d\omega_f+\frac{1}{2}[\omega_f,\omega_f] &= d\left(f^*\omega_G\right)+\frac{1}{2}[f^*\omega_G,f^*\omega_G] \\ &= f^*(d\omega_G+\frac{1}{2}[\omega_G,\omega_G]). \end{aligned}$$

Como se verifica (10) para ω_G então:

$$d\omega_f+\frac{1}{2}[\omega_f,\omega_f]=f^*(0)=0.$$

Proposição 5.2 *Sejam M uma variedade suave e G um grupo de Lie. Se as funções $f_1,f_2,h: M\longrightarrow G$ estão definidas de forma que $h=f_1f_2^{-1}$, então:*

$$h^*\omega_G=Ad(f_2)\left[f_2^*\omega_G-f_1^*\omega_G\right].$$

Prova: Se $G \subset \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$, então:

$$\begin{aligned} i^*\omega_G &= h^{-1}dh \\ &= (f_1f_2)^{-1}d(f_1f_2)^{-1} \\ &= f_2f_1^{-1}(df_1f_2^{-1} + f_1df_2^{-1}) \\ &= f_2(f_1^{-1}df_1) + (f_2f_1f_1^{-1}f_1df_2^{-1}). \end{aligned}$$

Como

$$f_2f_2^{-1} = \mathrm{Id} \Leftrightarrow f_2df_2^{-1} = df_2f_2^{-1},$$

temos

$$\begin{aligned} h^*\omega_G &= f_2(f_1^*\omega_G)f_2^{-1} \\ &= f_2(f_1^*\omega_G)f_2^{-1} - df_2f_2^{-1} \\ &= \mathrm{Ad}(f_2)(\omega_{f_1}) - f_2f_2^{-1}df_2f_2^{-1} \\ &= \mathrm{Ad}(f_2)(\omega_1) - \mathrm{Ad}(f_2)f_2^{-1} \\ &= \mathrm{Ad}(f_2)[\omega_{f_1} - f_2\omega] \\ &= \mathrm{Ad}(f_2)[\omega_{f_1} - \omega_{f_2}]. \end{aligned}$$

Proposição 5.3 *Seja M uma variedade conexa e $f_1, f_2 : M \to G$ uma aplicações suaves tais que $\omega_{f_1} = \omega_{f_2}$. Então, existe uma constante $C \in G$ tal que $f_2(x) = C \cdot f_1(x)$ para todo $x \in M$.*

Prova: *Suponha que existam $f_1, f_2 : M \longrightarrow G$ tal que $\omega_{f_1} = \omega_{f_2}$. Defina $h : M \longrightarrow G$ por $h(x) = f_2(x)f_1(x)^{-1}$. Daí, $h^*(\omega_G) = Ad(f_1)(f_2{}^*\omega_G - f_1{}^*\omega_G)$. Como a última expressão se anula, então: $0 = h^*(\omega_G) = \omega_G h_*$ temos que h_* é nula e portanto h é constante. Logo sendo $h(x) = c$ onde $c \in G$*

$$f_2(x) \cdot f_1(x)^{-1} = c \Leftrightarrow f_2(x) = c \cdot f_1(x).$$

Com isso, temos garantido que se a derivada de Darboux existe, então ela é a única a menos de translação à esquerda por um elemento do grupo de Lie.

Teorema 5.1 ***(Versão Local)*** *Seja G um grupo de Lie com álgebra de lie $\mathfrak{g}$. Seja ω uma 1-forma com valores em $\mathfrak{g}$ sobre uma variedade suave M satisfazendo a equação de estrutura $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$. Então, para cada $p \in M$, existem uma vizinhança U de p e uma aplicação suave $f : U \longrightarrow G$ tal que $\omega|_U = \omega_f$.*

Prova: Sejam $\pi_G : G \times M \longrightarrow G$ e $\pi_M : G \times M \longrightarrow M$ as projeções canônicas. Seja $\Omega = \pi_M^*(\omega) - \pi_G^*(\omega_G)$ e seja $\mathfrak{D} = Ker(\Omega)$ a distribuição definida a partir do kernel de Ω. Vejamos que $\mathfrak{D}$ tem posto constante. Para isso, fixemos $(p, g) \in M \times G$. Considere a seguinte aplicação:

$$\pi_{M*(p,g)}|_{\mathfrak{D}(p,g)} : \mathfrak{D}_{(p,g)} \longrightarrow T_pM.$$

Vejamos que esta é um isomorfismo. Em particular, isto nos dará que $\ker(\Omega)$ tem o posto igual a dimensão de M.

Se $\pi_{M*}(u,v) = 0$ para algum $(u,v) \in \mathfrak{D}_{(p,g)} = \{(u,v) \in T_pM \times T_pG | \omega(u) = \omega_G(v)\}$, teremos que $u = 0$ mas, então teremos que $0 = \omega_G(v)$ e disto decorre que, $v = 0$ e com isso concluimos a injetividade de $\pi_{M*(p,g)}|_{\mathfrak{D}_{(p,g)}}$.

Agora, se $u \in T_pM$, então $(u, \omega_G^{-1}(\omega(u))) \in \mathfrak{D}_{(p,g)}$, e com isso ganhamos a sobrejetividade de $\pi_{M*(p,g)}|_{\mathfrak{D}(p,g)}$.

Para ver que $\mathfrak{D}$ é integrável basta calcular a derivada exterior de Ω.

$$\begin{aligned} d\Omega &= d\pi_M^*(\omega) - d\pi_G^*(\omega_G) \\ &= \pi_M^*(d\omega) - \pi_G^*(d\omega_G) \\ &= \pi_M^*(-\frac{1}{2}[\omega,\omega]) - \pi_G^*(-\frac{1}{2}[\omega_G,\omega_G]) \\ &= -\frac{1}{2}[\pi_M^*(\omega), \pi_M^*(\omega)] + \frac{1}{2}[\pi_G^*(\omega_G), \pi_G^*(\omega_G)]). \end{aligned}$$

Agora substituindo $\pi_M^*(\omega) = \pi_G^*(\omega_G) + \Omega$, segue:

$$d\Omega = -\frac{1}{2}[\pi_G^*(\omega_g), \Omega] - \frac{1}{2}[\Omega, \pi_G^*(\omega_g)] - \frac{1}{2}[\Omega, \Omega].$$

Daí, $d\Omega(X,Y) = 0$, onde $\Omega(X) = \Omega(Y) = 0$ consequentemente, $Ker(\Omega)$ é integrável.

Seja $\mathfrak{L}$ uma folha que contem o ponto $(p,g) \in M \times G$. A derivada da restrição de π_M a $\mathfrak{L}$, $\pi_{M*} : \mathfrak{D}|_{(p,g)} \longrightarrow T_pM$, é um isomorfismo. Assim, $\pi_M|_{\mathfrak{L}}$ é um difeomorfismo local de uma vizinhança U de $p \in M$.

Tome $F : U \longrightarrow \mathfrak{L}$ a aplicação inversa tal que $\pi_M F = Id_U$. Então, F tem que ser da forma $(p, f(p))$ onde $f : U \longrightarrow G$. Mas,

$$F^*(\Omega) = \Omega F_* = 0.$$

Desde que a imagem de F é tangente a distribuição a qual ω se anula, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= F^*(\Omega) \\ &= F^*(\pi_M^*(\omega)) - F^*(\pi_G^*(\omega_G)) \\ &= (\pi_M F)(\omega) - (\pi_G F)(\omega_G) \\ &= \omega - f^*(\omega_G). \end{aligned}$$

Consequentemente $\omega|_U = \omega_f$.

Para investigar sob quais condições podemos obter uma imersão de toda a variedade M, precisamos definir o conceito de monodromia.

Usaremos a notação $f : (I, a) \to (G, g)$ para denotar que f é uma função suave e, além disso, $f(a) = g$.

Teorema 5.2 *Seja ω uma 1-forma suave sobre $I = [a, b]$ com valores em $\mathfrak{g}$. Então existe uma única aplicação*

$$f : (I, a) \longrightarrow (G, g)$$

com derivada de Darboux ω.

Prova: A Proposição 5.3 garante que se f existe então é única. Sendo ω uma 1-forma em I então, por questões dimensionais, vale

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0.$$

O Teorema 5.1 garante que cada ponto $t \in I$ está contido em um intervalo aberto U_t, no qual ω é a derivada de Darboux de uma aplicação de M em G. A família $U_t, t \in I$ forma uma cobertura aberta de I que por ser compacto em $\mathbb{R}$ admite uma subcobertura finita. Seja $\{U_1, ..., U_n\}$ uma subcobertura finita escolhida a partir da cobertura dada. Para cada intervalo aberto U_i, $i = 1, .., n$, ω é a derivada de Darboux de alguma aplicação de M em G. Podemos assumir que $U_i \cap U_j = \emptyset$, se $|i - j| > 1$. Tome $t_0 = a \in U_1$ e $t_i \in U_i \cap U_{i+1}$, para $1 \leq i \leq n - 1$ e intuitivamente escolhemos as primitivas $f_i : U_i \to G$ tais que $f_1(a) = g$ e $f_{i+1}(t_i) = f_i(t_i)$, para $1 \leq i \leq n - 1$. Pela unicidade da primitiva temos que $f_{i+1} = f_i$ em $U_i \cap U_{i+1}$. Daí basta considerar $f(t) = f_i(t)$, para $t \in U_i$ e com isso obtemos uma $f : I \to G$ tal que $f(a) = g$ e $f^*(\omega_G) = \omega$.

Definição 5.3 *Sejam G um grupo de Lie com $g \in G$ e I um intervalo fechado de $\mathbb{R}$ com $a \in I$. Chamamos de primitiva de ω ao longo de I começando em g a única aplicação suave $f : I \to G$ tal que $f(a) = g$ e $f_*(\omega_G) = \omega$.*

Definição 5.4 *Seja um intervalo fechado $I \in \mathbb{R}$, M uma variedade de dimensão arbitrária, G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e ω uma 1-forma sobre M com valores em $\mathfrak{g}$. Dada uma curva suave por partes $\sigma : (I, a, b) \to (M, p, q)$, tome $\tilde{\sigma} : (I, a) \to (G, g)$ a primitiva da 1-forma $\sigma^*(\omega)$, isto é, satisfazendo*

$$\tilde{\sigma}^*(\omega_G) = \sigma^*(\omega).$$

Chama-se $\tilde{\sigma}$ o desenvolvimento de ω ao longo de σ começando em g.

Proposição 5.4 *Se $\sigma_0, \sigma_1 : (I, a, b) \to (M, p, q)$ são homotópicas, então $\tilde{\sigma}_0(b) = \tilde{\sigma}_1(b)$.*

Prova: Considere $\sigma_0, \sigma_1 : I \to (M, p, q)$, tome $h : (I \times I, a \times I, b \times I) \to (M, p, q)$ a homotopia ligando σ_0 a σ_1. $h^*\omega$ é uma 1-forma sobre $I \times I$ com valores em $\mathfrak{g}$. Além disso,

$$dh^*\omega + \frac{1}{2}[h^*\omega, h^*\omega] = h^*(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]) = 0.$$

A 1-forma $h^*\omega$ sobre $I \times I$ com valores em $\mathfrak{g}$ satisfaz a equação de estrutura, então, para cada ponto de $I \times I$ existe um vizinhança na qual $h^*\omega$ é a derivada de Darboux de uma aplicação de $H : I \times I \to G$ em G. Considerando $t \in I$, $t \times I$ é um conjunto compacto e sendo assim, existe $U \times I$, com U intervalo aberto de I contendo dito ponto tal que $h^*\omega$ é a derivada de Darboux de alguma aplicação sobre G. isto é, $H : I \times I \to G$ com $H(a,a) = e$ e $H^*\omega_G = h^*\omega$. Como $h(b,t) = q$ é constante $\forall t \in I$, então $H^*\omega_G = h^*\omega = 0$, logo $H(b,a) = H(b,b)$. Consequentemente o desenvolvimento de ω ao longo de σ_0 e σ_1 tem o mesmo ponto final em G. Daí,

$$\tilde{\sigma}_0\,(b) = \tilde{\sigma}_1(b),$$

e isto encerra a prova.

Corolário 5.1 *A aplicação* $\Phi : \pi_1\,(M,p) \to G$ *definida por* $\Phi\,([\lambda]) = \tilde{\lambda}\,(1)$ *está bem definida.*

Prova: A prova é imediata.

Seja M uma variedade suave e ω uma 1-forma sobre M com valores em $\mathfrak{g}$ satisfazendo a equação de estrutura. Tomando $I = [a,b]$, fixando um ponto base $p \in M$, e a curva suave fechada $\lambda : (I, \partial I) \to (M,p)$ podemos desenvolver ω ao longo de λ começando em e com ponto final $\Phi\,(\lambda) = \tilde{\lambda}\,(1)$ desse desenvolvimento será um ponto de G. Pode-se mostrar que, se λ_1 e λ_2 são homotópicas, então $\Phi\,(\lambda_1) = \Phi\,(\lambda_2)$, portanto dá-se origem a uma aplicação $\Phi : \pi_1\,(M,p) \to G$ e se mostra que Φ é um homomorfismo de grupos. Consequentemente, está bem definida a aplicação $\Phi_\omega : \pi_1\,(M,p) \to G$.

Definição 5.5 *A aplicação* $\Phi_\omega : \pi_1\,(M,p) \to G$ *descrita é chamada de representação de monodromia e sua imágem é chamada de grupo de monodromia.*

Teorema 5.3 ***(Versão Global)*** *Seja* G *um grupo de Lie com álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$. *Seja* M *uma variedade suave conexa e* ω *uma 1-forma sobre* M *com valores em* $\mathfrak{g}$. *Então são equivalentes:*

1. ω *é a derivada de Darboux de alguma aplicação* $M \to G$.
2. $d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega] = 0$ *e a aplicação* $\Phi_\omega : \pi_1(M,p)$ *é trivial.*

Além disso, se estas condições são satisfeitas, a integral de ω *é única a menos de translação a esquerda por um elemento constante de* G.

Prova: Suponha que ω é a derivada de Darboux para uma aplicação $f : M \to G$, isto é, $\omega = f^*\omega_G$. Desse modo, tem-se

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega] \;=\; 0.$$

Pelo Teorema 5.2, A derivada de Darboux de uma aplicação $f : (M,p) \to (G,g)$ não se altera quando transladamos à esquerda por uma constante em G. Nesse caso considere

$L_{g^{-1}}f$ e com isso tem-se $f:(M,b)\to(G,e)$. Seja λ um laço em e. Como

$$\lambda^*\omega = \lambda^* f^* \omega_G$$

temos que

$$\tilde{\lambda} = f \circ \lambda.$$

isto é, o desenvolvimento de ω ao longo de λ é $f\circ\lambda$, e dessa forma $(f\circ\lambda)(1) = f(b) = e$ e portanto $\Phi_\omega([\lambda]) = e$.

Para provar a outra implicação, defina $f:(M,p)\to(G,e)$ pela seguinte declaração: $f(x)$ é o ponto final do desenvolvimento de ω iniciando em e ao longo de qualquer caminho de p a x.

Para ver que está bem definida, basta mostrar que f independe da escolha do caminho que liga o ponto p ao ponto x em M. Mas, isto é consequência da Proposição 5.4. Agora, Basta verificar que, $\omega = \omega_f$. Seja $x_0 \in M$, escolha um caminho de p a x_0 e $\sigma \subset U$um caminho de x_0 a x. Usando o Teorema 5.1, existem uma vizinhança aberta conexa de x_0 e uma aplicação suave $f:U\to G$ satisfazendo $f_U^*\omega_G = \omega$. A menos de translação à esquerda podemos assumir que $f_U(x_0) = f(x_0)$. Seja $x\in U$ um caminho de x_0 a x, agora, o desenvolvimento de ω começando em $f(x_0)$ ao longo de $\sigma:(I,0,1)\to(U,x_0,x)$ acaba em $f_U(x)$, mas também acaba em $f(x)$ por definição. Logo,

$$f_U(x) = f(x), \quad \forall x\in U$$

sendo assim, f é suave e

$$f^*\omega_G = {f_U}^*\omega_G = \omega,$$

para todo x em U.

6 TEOREMA FUNDAMENTAL DAS SUBVARIEDADES USANDO FORMALISMO DE CARTAN

Apresenta-se nesta seção o teorema fundamental das subvariedades. Faz-se, nesta apresentação, uso do formalismo de Cartan junto com o teorema fundamental do cálculo para grupos de Lie. Para isso, suponha que estamos nas hipoteses do teorema (3.1).

Descrevemos os espaços formas para os três casos de curvatura seccional constante.

No caso em que $c = 0$, o grupo $G^0 = \mathbb{E}(n)$ age transitivamente sobre o $\mathbb{R}^n$ com estabilizador de $y = 0$

$$G_0^0 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}, A \in SO(n) \right\}.$$

Note que as álgebras de Lie de G^0 e G_0^0 são respectivamente

$$\mathfrak{g}^0 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & B \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}^n, B \in \mathfrak{so}(n) \right\}$$

e

$$\mathfrak{g}_0^0 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, B \in \mathfrak{so}(n) \right\}.$$

No caso em que $c > 0$, o grupo ortogonal $G^1 = SO(n+1)$ age transitivamente sobre o $\mathbb{S}^n$ com estabilizador de $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$,

$$G_0^1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}, A \in SO(n) \right\}.$$

As álgebras de Lie de G^1 e G_0^1 são respectivamente

$$\mathfrak{g}^1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -x^T \\ x & B \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}^n, B \in \mathfrak{so}(n) \right\}$$

e

$$\mathfrak{g}_0^0 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, B \in \mathfrak{so}(n) \right\}.$$

No caso em que $c < 0$, a componente conexa G^{-1} com a identidade do grupo de isometrias do grupo de Lorentz,

$$\mathbb{L}^{n+1} \subset \left\{ B \in GL(n+1) ; B^T \cdot I_{1,n} \cdot B = I_{1,n} \right\}$$

age transitivamente aobre $\mathbb{H}^n = \left\{(x_0, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; -1 = -|x_0|^2 + |x|^2\right\}$, onde

$$I_{1,n} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

e I_n é a matriz identidade de ordem n. O estabilizador de $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^n \subseteq \mathbb{L}^{n+1}$ é dado por

$$G_0^{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}, A \in SO(n) \right\}$$

e as álgebras de Lie de G^{-1} e G_0^{-1} são respectivamente

$$\mathfrak{g}^{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x^T \\ x & B \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}^n, B \in \mathfrak{so}(n) \right\}$$

e

$$\mathfrak{g}_0^{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, B \in \mathfrak{so}(n) \right\}.$$

Para o que segue agora definimos

$$c = \left\{ \begin{array}{lll} -1, & \text{para} & \mathbb{H}^n \\ 0, & \text{para} & \mathbb{R}^n \\ 1, & \text{para} & \mathbb{S}^n \end{array} \right\},$$

e considere N_c^n como o espaço forma para curvatura seccional constante c, temos que:

$$N_c^n = \frac{G^c}{G_0^c},$$

além disso,

$$\mathfrak{g}^c = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -c \cdot x^T \\ x & B \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}^n, B \in \mathfrak{so}(n) \right\}$$

e sua álgebra de Lie

$$\mathfrak{g}_0^c = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}^n, B \in \mathfrak{so}(n) \right\}.$$

Também, podemos definir a forma de Maurer-Cartan para tratar os três casos

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & -c \cdot \Phi_b^0 \\ \Phi_0^a & \Phi_b^a \end{bmatrix}. \tag{11}$$

A partir desta convenção de notação podemos tratar os três casos de uma só vez.

Previamente, precisamos descrever a geometria de N_c^n, isto é, daremos métrica, conexão e curvatura de N_c^n em termos das componentes de Φ. De fato, o teorema funamental do cálculo não requer nada sobre a métrica mas requer informações sobre a forma de Maurer-Cartan. Por outro lado, o teorema fundamental das subvariedades usa informações da métrica no espaço ambiente. Como queremos aplicar o teorema fundamental do cálculo em G^c, precisamos relacionar a forma de Maurer-Cartan de G^c com a métrica de N_c^n.

A forma de Maurer-Cartan é invariante à esquerda, já a métrica do N_c^n é invariante à esquerda pela ação do grupo G^c. Portanto, é razoável buscar a métrica do $N_c^n = G^c/G_0^c$ usando as componentes da forma de Maurer-Cartan do G^c.

Proposição 6.1 *Considere, em G^c, a forma de Maurer-Cartan Φ como em* (11) *e seja $\sigma : U \subset N_c^n \to G^c$ é uma seção local. Defina $\Psi_0^a = \sigma^*\Phi_0^a$ e $\Psi_b^a = \sigma^*\Phi_b^a$ e $\Psi_b^0 = \sigma^*\Phi_b^0$. então, $\langle\ ,\ \rangle = \sum_{j=1}^n \Psi_0^a \otimes \Psi_0^a$ define uma métrica globalmente definida em N_c^n.*

Prova: É claro que definida dessa maneira $\langle\ ,\ \rangle$ verifica as propriedades de uma métrica em N_c^n. Se $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \subset N_c^n \to G^c$ é outra seção no ponto $\pi(p)$ e $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$. Então, existe $k : U \cap \tilde{U} \to G_0^c$ tal que $\tilde{\sigma} = \sigma k$. Defina $\tilde{\Psi} = \tilde{\sigma}^*\Phi$. Dessa forma

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi} &= \tilde{\sigma}^*\Phi \\
&= \tilde{\sigma}^{-1} d\tilde{\sigma} \\
&= (\sigma k)^{-1} d(\sigma k) \\
&= k^{-1}\sigma^{-1}(d\sigma k + \sigma dk) \\
&= k^{-1}\left(\sigma^{-1} d\sigma\right) k + k^{-1}dk \\
&= k^{-1}\Psi k + k^{-1}dk.
\end{aligned}$$

O conjunto imagem pela aplicação k é descrito por

$$Im(k) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} ; A : U \cap \tilde{U} \to SO(n) \right\}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (A^t)_c^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -c \cdot \Psi_d^0 \\ \Psi_0^c & \Psi_d^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_b^d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (A^t)_c^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & dA_b^c \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -c\Psi_d^0 A_b^d \\ (A^t)_c^a \Psi_0^c & (A^t)_c^a \Psi_d^c A_b^d + (A^t)_c^a dA_b^c \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_0^a \otimes \tilde{\Psi}_0^a &= \left(A^t\right)_b^a \Psi^b \otimes \left(A^t\right)_c^a \Psi^c \\
&= \left(A^t\right)_b^a \left(A^t\right)_c^a \Psi^b \otimes \Psi^c \\
&= (A)_a^b \left(A^t\right)_c^a \Psi^b \otimes \Psi^c \\
&= \delta_c^b \Psi^b \otimes \Psi^c \\
&= \Psi^b \otimes \Psi^b.
\end{aligned}$$

Portanto, $\langle\ ,\ \rangle_U = \langle\ ,\ \rangle_{\tilde{U}}$ em $U \cap \tilde{U}$. Consequentemente $\langle\ ,\ \rangle$ está globalmente definida.

Proposição 6.2 *As formas de Levi-Civita da métrica $\langle\ ,\ \rangle$ são dadas por $\{\Psi_b^a\}$.*

Prova: Para ver que $\{\Psi_b^a\}$ são as formas de Levi-Civita basta provar que elas definem uma conexão simétrica e compatível com a métrica. Por um lado, se consideramos $\{\Psi_0^a\}$ um correferencial, para um referencial dado, tem-se que

$$\begin{aligned}
d\Psi_0^a &= d\left(\sigma^* \Phi_0^a\right) \\
&= \sigma^* d\Phi_0^a \\
&= \sigma^* \left(-\Phi_b^a \wedge \Phi_0^b\right) \\
&= -\Psi_b^a \wedge \Psi_0^b.
\end{aligned}$$

Assim, pela Proposição 4.2, temos que Ψ_b^a é simétrica. Usando a Proposição 4.3 a compatibilidade com a métrica se expressa como $\Psi_b^a = -\Psi_a^b$, e isto segue do fato que as componentes Φ_b^a da forma de Maurer-Cartan tomam valores em $\mathfrak{so}(n)$ e sendo assim, vale que $\Phi_b^a = -\Phi_a^b$. Portanto

$$\begin{aligned}
\Psi_b^a &= \sigma^* \Phi_b^a \\
&= \sigma^* \left(-\Phi_a^b\right) \\
&= -\sigma^* \Phi_a^b \\
&= -\Psi_a^b.
\end{aligned}$$

Como $\{\Psi_b^a\}$ verificam compatibilidade e simetria então são as formas de Levi-Civita.

Proposição 6.3 *A variedade $(N_c^n, \langle\ ,\ \rangle)$ tem curvatura $2c$.*

Prova: As formas de curvatura Θ_b^a de N_C^n são definidas pela identidade

$$\Theta_b^a = d\Psi_b^a + \Psi_c^a \wedge \Psi_b^c.$$

Considere, em G^c, a forma de Maurer-Cartan $\Phi = \begin{bmatrix} 0 & -c\Phi_b^0 \\ \Phi_0^a & \Phi_b^a \end{bmatrix} \in \mathfrak{g}^c$ e $\sigma : U \subset N_c^n \to G^c$

é uma seção local de π. Então, defina $\Psi = \sigma^*\Phi$. Como a forma de Maurer- Cartan satisfaz a equação de estrutura, então

$$d\Psi + \Psi \wedge \Psi = \sigma^* \left(d\Phi + \Phi \wedge \Phi \right) = 0$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} d\Psi + \Psi \wedge \Psi &= d \begin{bmatrix} 0 & -c\Psi_b^0 \\ \Psi_0^a & \Psi_b^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -c\Psi_c^0 \\ \Psi_0^a & \Psi_c^a \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & -c\Psi_b^0 \\ \Psi_0^c & \Psi_b^c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -c\left(\cdot d\Psi_b^0 + \cdot\Psi_c^0 \wedge \Psi_b^c\right) \\ d\Psi_0^a + \Psi_b^a \wedge \Psi^b & d\Psi_b^a - c\Psi_0^a \wedge \Psi_b^0 + \cdot\Psi_c^a \wedge \Psi_b^c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Theta_b^a - c \cdot \Psi_0^a \wedge \Psi_0^b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\Theta_b^a = \frac{1}{2} R_{bcd}^a \Psi_0^c \wedge \Psi_0^d = c \cdot \Psi_0^a \wedge \Psi_0^b.$$

Logo, $R_{bcd}^a = 2c$. Portanto, a curvatura de N_c^n é $2c$.

Agora reenunciaremos o Teorema Fundamental das Subvariedades e daremos a prova usando formalismo de Cartan.

Teorema 6.1 *Sejam M^m uma variedade riemanniana simplesmente conexa, $\pi : E \longrightarrow M^m$ um fibrado vetorial riemanniano de posto k com uma conexão ∇' compatível com a métrica de E e B uma seção simétrica dos homomorfismos de fibrados Hom$(TM \times TM, E)$. Defina, para cada seção local ξ de E, uma aplicação $A_\xi : TM \longrightarrow TM$ por:*

$$\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle B(X,Y), \xi \rangle, \qquad X, Y \in TM.$$

Se B e ∇' satisfazem as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para o caso de curvatura seccional constante c então existem uma imersão isométrica $f : M^m \longrightarrow N_c^{m+k}$, e um isomorfismo de fibrado $\tilde{f} : E \longrightarrow TM^\perp$ ao longo de f tal que para todo $X, Y \in TM$ e todas seções locais $\xi, \eta \in E$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}(\xi), \tilde{f}(\eta) \rangle &= \langle \xi, \eta \rangle \\ \tilde{f}(B(X,Y)) &= \tilde{B}(X,Y) \\ \tilde{f}(\nabla'_X \xi) &= \nabla_N^\perp \tilde{f}(\xi), \end{aligned}$$

onde $\tilde{B}$ e $\nabla^\perp$ são a segunda forma fundamental e a conexão normal de f respectivamente.

Prova:

Queremos usar o teorema fundamental do cálculo para grupos não abelianos. Podemos escrever

$$N_c^n := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n, & \text{se} & c=0 \\ \mathbb{S}^n, & \text{se} & c=1 \\ \mathbb{H}^n, & \text{se} & c=-1 \end{array} \right\}.$$

Para aplicar o teorema em N_c^n precisamos dota-lo de uma estrutura de espaço homogêneo G/G_0, onde G é um grupo de Lie e G_0 um subgrupo fechado. Denotamos

$$G^c := \left\{ \begin{array}{ccc} E(n), & \text{se} & c=0 \\ SO(n+1), & \text{se} & c=1 \\ SO(1,n), & \text{se} & c=-1 \end{array} \right\}.$$

Em virtude da Proposição 2.2, em N_c^n age o grupo G^c transitivamente. Pela teoria, LEE (2003),

$$N_c^n \simeq G^c/G_0^c$$

e a aplicação $\pi : G^c \to G^c/G_0^c$ é uma submersão.

Pela Proposição 6.1, $g = \sum_{a=1}^n \Psi_0^a \otimes \Psi_0^a$ é a métrica de N_c^n. Usando a Proposição 6.2 as formas de Levi-Civita com respeito a métrica g definida anteriormente são definidas pelo conjunto $\{\Psi_0^a\}$. Pela Proposição (6.3) temos que (G^c/G_0^c) tem curvatura igual a $2c$.

Agora, se consideramos M^m com as hipóteses do Teorema Fundamental das Subvariedades, para cada $p \in M^m$ existem um referencial ortonormal $\{e_i\}$ com correferencial dual $\{\theta^i\}$ e as formas de Levi-Civita $\left\{\omega_j^i\right\}$ no fibrado E tomo $\{\xi_\alpha\}$ base ortonormal de seções locais. Defino as 1-formas $\left\{\omega_\beta^\alpha\right\}$ da seguinte maneira:

$$\nabla' \xi_\beta = \omega_\beta^\alpha \otimes \xi_\alpha.$$

Denote por g_E a métrica no fibrado E. Como ∇' é compatível com a métrica g_E então, pela proposição 4.3, tem-se que $\omega_\beta^\alpha = -\omega_\alpha^\beta$.

Por hipotese, temos uma seção B cuja espressão em coordenadas pode ser escrita como

$$B = b_{ij}^\alpha \theta^i \otimes \theta^j \otimes \xi_\alpha,$$

onde

$$b_{ij}^\alpha = \langle B\left(e_i, e_j\right), \xi_\alpha \rangle.$$

Dessa forma é possivel definir um conjunto de 1-formas $\{\omega_i^\alpha\}$ da seguinte maneira:

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \theta^j$$

$$\omega_\alpha^i := -b_{ij}^\alpha \theta^j.$$

Note que $\omega_i^\alpha = -\omega_\alpha^i$ pois,

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \theta^j = -\left(-b_{ij}^\alpha \theta^j\right) = -\omega_\alpha^i.$$

De posse dessas informações, para encontrar uma imersão $\varphi : M^m \to N_c^n$, com $n = m + k$ que realiza o teorema das subvariedades, devemos encontrar uma aplicação $f : M^m \to G^c$ que valida o teorema fundamental do cálculo de forma que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & G^c \arrow[dr, "\pi"] & \\ M^m \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\varphi"] & & N_c^n \end{tikzcd}$$

comuta.

Dessa forma, a aplicação $\varphi : M^m \to N_c^n$ será $\pi \circ f : M^m \to N_c^n$.

Portanto, queremos definir uma conexão de Cartan $\omega \in \Lambda^1(M, \mathfrak{g}^c)$ que satisfaça a equação de estrutura (10). Para construí-la, usaremos as indicações que observamos no caso em que já temos uma imersão.

Observe que se $\varphi : M^m \to N_c^n$ é uma imersão isométrica e $\{\Psi_0^a\}$ e $\{\Psi_b^a\}$ são, respectivamente, os correferenciais e as formas Levi-Civita de N_c^n, em virtude do formalismo de Cartan para subvariedades 4, podemos encontrar um correferencial $\{\theta^j\}$ em M^m tal que

$$\begin{array}{rcl} \theta^j & = & \varphi^* \Psi_0^j \\ 0 & = & \varphi^* \Psi_0^\alpha \\ \omega_j^i & = & \varphi^* \Psi_j^i \\ \omega_\beta^\alpha & = & \varphi^* \Psi_\beta^\alpha \\ \omega_i^\alpha & = & \varphi^* \Psi_i^\alpha \end{array},$$

onde ω_j^i são as formas de conexão Levi-Civita de M^m, ω_β^α são as formas de uma conexão compatível no fibrado normal, $\omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \theta^j$ e $h_{ij}^\alpha \theta^j \otimes \theta^i \otimes e_\alpha$ é a segunda forma fundamental.

Tomando em consideração a forma de Maurer-Cartan de G^c, a métrica e a forma de Levi-Civita de de N_c^n. Isto nos dá a ideia de definir $\omega \in \Lambda'(M^m, \mathfrak{g}^c)$ como sendo

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & -c \cdot \omega_j^0 & 0 \\ \omega_0^i & \omega_j^i & \omega_\beta^i \\ 0 & \omega_j^\alpha & \omega_\beta^\alpha \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{bmatrix} -c\theta^k \wedge \theta^k & -c\left(d\theta^j + \theta^k \wedge \omega_j^k\right) & -c\theta^k \wedge \omega_\beta^k \\ d\theta^i + \omega_k^i \wedge \theta^k & d\omega_j^i - c\theta^i \wedge \theta^j + \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \omega_j^i \wedge \omega_\beta^j & d\omega_\beta^i + \omega \wedge \omega + \omega \wedge \omega \\ \omega_k^\alpha \wedge \theta^k & d\omega_j^\alpha + \omega_k^\alpha \wedge \omega_j^k + \omega_j^\alpha \wedge \omega_j^j & d\omega_\beta^\alpha + \omega_k^\alpha \wedge \omega_\beta^k + \omega_j^\alpha \wedge \omega_\beta^j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -cd\theta^j & 0 \\ d\theta^i & d\omega_j^i & d\omega_\beta^i \\ 0 & d\omega_j^\alpha & d\omega_\beta^\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -c\theta^k & 0 \\ \theta^i & \omega_k^i & \omega_j^i \\ 0 & \omega_k^\alpha & \omega_j^\alpha \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & -c\theta^j & 0 \\ \theta^k & \omega_j^k & \omega_\beta^k \\ 0 & \omega_j^j & \omega_\beta^j \end{bmatrix} \\ &= d\omega + \omega \wedge \omega, \end{aligned}$$

o que segue justamente das equações (1), (2) e (3).

Seja $\varphi = \pi \circ f$ a nossa imersão isométrica. Pegamos uma base $\{e_\alpha\}$ para o fibrado normal. Sabemos que as componentes da segunda forma fundamental na base $\{e_i, e_j\}$ são dadas pela relações $\varphi^*\Psi_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \theta^j$. Porém,

$$\begin{aligned} \varphi^*\Psi_i^\alpha &= f^*\pi^*\Psi_i^\alpha \\ &= f^*\Phi_i^\alpha \\ &= \omega_i^\alpha \\ &= b_{ij}^\alpha \theta^j. \end{aligned}$$

Daí, $h_{ij}^\alpha = b_{ij}^\alpha$.

No tocante a identificação do fibrado E com $TM^\perp$ definamos $F : (R, \nabla') \to \left(TM^\perp, \nabla^\perp\right)$ por $\mathrm{F}(\xi_\alpha) = \tilde{e}_\alpha$ e assim se verifica que

$$\nabla_X^\perp \left(F\left(\xi\right)\right) = F\left(\nabla_x' \xi\right).$$

Basta verificar para ξ_α que $\nabla^\perp e_\alpha = F\left(\nabla' \xi_\alpha\right)$. Mas,

$$\begin{aligned} \nabla^\perp e_a &= \varphi^*\Psi_\alpha^\beta \otimes e_\beta \\ &= \omega_\beta^\alpha \otimes e_\beta \\ &= \omega_\beta^\alpha \otimes F\left(\xi_\beta\right) \\ &= F\left(\nabla' \xi_\alpha\right). \end{aligned}$$

e com isso encerramos a prova.

7 CONCLUSÃO

A construção deste trabalho permitiu entender alguns conceitos clássicos a partir do método do referencial móvel. Além disso, nos aproximou com o trabalho elaborado por Élie Cartan a fim de desenvolver uma prova para o teorema fundamental das subariedades.

REFERÊNCIAS

CARMO, M. P. do. **Geometria riemanniana**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988.

DAJCZER, M. **Submanifolds and isometric imersions**. Houston: Mathematics Lecture Series, 1990.

DANIEL, B. Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds. **Commentarii Mathematici Helvetici**, [*s. l.*], v. 82, n. 1, p. 87–131, 2007.

DANIEL, B. Isometric immersions into $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ and applications to minimal surfaces . **Transactions of the American Mathematical Society**, [United State], v. 361, n. 12, p. 6255–6282, 2009.

LEE, J. M. **Introduction to smooth manifolds**. New York: Springer, 2003.

LIRA, J. H.; TOJEIRO, R.; VITÓRIO, F. A Bonnet theorem for isometric immersions into products of space forms. **Archiv der Mathematik**, [Switzerland], v. 95, n. 5, p. 469–479, 2010.

PETERSEN, P. **Riemannian geometry**. New York: Springer-Verlag, 1998.

SHARPE, R. W. **Differential geometry**: Cartan's generalization of klein's erlangen program. New York: Springer Science & Business Media, 2000.

TENENBLAT, K. On isometric immersions of riemannian manifolds. **Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 2, n. 2, p. 23–36, 1971.