



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS RUSSAS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

MATHEUS PASCOAL MARTINS DE SOUSA

**PROPAGAÇÃO DE ONDAS MECÂNICAS EM QUASICRISTAIS FONÔNICOS
UNIDIMENSIONAIS SEGUNDO A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI COM
ESPELHAMENTOS SIMÉTRICO E ANTISSIMÉTRICO**

RUSSAS - CE

2021

MATHEUS PASCOAL MARTINS DE SOUSA

PROPAGAÇÃO DE ONDAS MECÂNICAS EM QUASICRISTAIS FONÔNICOS
UNIDIMENSIONAIS SEGUNDO A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI COM
ESPELHAMENTOS SIMÉTRICO E ANTISSIMÉTRICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Graduação em Engenharia Civil
do Campus Russas da Universidade Federal do
Ceará como requisito parcial à obtenção do grau
de bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Humberto
Oliveira Costa

RUSSAS - CE

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S697p Sousa, Matheus Pascoal Martins de.
Propagação de ondas mecânicas em quasicristais fonônicos unidimensionais segundo a sequência de Fibonacci com espelhamentos simétrico e antissimétrico / Matheus Pascoal Martins de Sousa. – 2021.
60 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Campus de Russas, Curso de Engenharia Civil, Russas, 2021.
Orientação: Prof. Dr. Carlos Humberto Oliveira Costa.

1. Fonônica. 2. Quasicristais. 3. Fibonacci convencional e espelhado. 4. Bandas fonônicas proibidas. 5. Método da matriz de transferência. I. Título.

CDD 620

MATHEUS PASCOAL MARTINS DE SOUSA

PROPAGAÇÃO DE ONDAS MECÂNICAS EM QUASICRISTAIS FONÔNICOS
UNIDIMENSIONAIS SEGUNDO A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI COM
ESPELHAMENTOS SIMÉTRICO E ANTISSIMÉTRICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Graduação em Engenharia Civil
do Campus Russas da Universidade Federal do
Ceará como requisito parcial à obtenção do grau
de bacharel em Engenharia Civil.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Humberto Oliveira Costa (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Anderson Magno Chaves Cunha
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Francisco Adriano de Lima Santiago
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Claudionor Gomes Bezerra
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

Ao Jesus, meu Senhor e Salvador, pelo fôlego de vida e pelo seu inesgotável amor. À minha família, por toda confiança e esforços investidos em mim.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus, acima de tudo, por ter sempre me guiado e permanecido ao meu lado por toda caminhada, e por toda sorte de bênçãos que, por intermédio de Cristo, imerecidamente recebi. Seu folego de vida em mim foi-me sustento e me deu coragem para questionar realidades e propor sempre um novo mundo de possibilidades.

À toda a minha família, especialmente aos meu pais, Maria Jassineide Lima e Edriano de Sousa, que sempre me apoiaram e não mediram esforços para que nosso sonho, ter a oportunidade de estudar e alcançar um bom futuro, se tornasse realidade. Obrigado por serem minha principal base na vida sempre com muito amor, carinho e fé.

À minha amada noiva, Jaiane Sousa, que compartilhou comigo essa e muitas outras conquistas, demonstrou compreensão em minhas ausências e me ajudou bastante me dando dicas e apoio moral para o desenvolvimento deste e de todos os outros trabalhos da universidade. Obrigado, meu amor, por não deixar eu me abalar em nenhum momento e desistir dos meus sonhos.

Aos alunos de graduação em Engenharia Civil, grandes amigos e minha equipe, Emanuel Carneiro, Matheus Teles, Tálisson Rodrigues e Douglas Sampaio, que compartilharam risadas, conselhos e me ajudaram em todos os trabalhos, dos mais fáceis aos mais difíceis, além de proporcionar muitos momentos bons e que vou levar pra toda vida.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Carlos H. Costa, por todo apoio, confiança e conhecimentos despendidos para comigo, compartilhando suas ideias e reflexões, e possibilitando assim o aperfeiçoamento científico e o desafiador projeto de pesquisa que vínhamos desenvolvendo.

Aos colaboradores, Prof. Dr. Adriano Santiago e Prof. Dr. Edson Miranda Jr. pela disponibilidade, apoio e conhecimentos compartilhados que se mostraram muito necessários à conclusão deste trabalho.

Às Agências de Pesquisa Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento (Funcap) e PIBIC-UFC-CNPq, pelo financiamento da pesquisa de iniciação científica via bolsa de estudos.

Ao Doutorando em Engenharia Elétrica, Ednardo Moreira Rodrigues, e seu assistente, Alan Batista de Oliveira, aluno de graduação em Engenharia Elétrica, pela adequação do *template* utilizado neste trabalho para que o mesmo ficasse de acordo com as normas da biblioteca da Universidade Federal do Ceará (UFC).

“Em tudo que fizerem, trabalhem de bom ânimo, como se fosse para o Senhor, e não para os homens. Lembrem-se de que o Senhor lhes dará uma herança como recompensa e de que o Senhor a quem servem é Cristo.”

(Colossenses 3:23, 24)

RESUMO

O objetivo deste trabalho é investigar as mudanças decorrentes das modificações no arranjo dos cristais fonônicos unidimensionais onde os materiais constituintes são espacialmente organizados de acordo com as sequências quasiperiódicas espelhadas de Fibonacci simétricas e anti-simétricas. Neste trabalho, estudamos quasicristais fonônicos compostos por dois materiais distintos, chumbo e epóxi, envolvidos por duas camadas semi-infinitas compostas por um terceiro material, o alumínio. Esses cristais possuem propriedades que podem ser ajustadas de acordo com o empilhamento de seus componentes, podendo dar origem a *bandgaps* acústicos. Por isso, a fonônica é atualmente um campo de pesquisa altamente atrativo e possui diversas aplicações, principalmente em sensores, filtros, isoladores acústicos, entre outras áreas. Aplicando as condições de continuidade nas interfaces, os espectros de transmissão da onda sonora incidente foram calculados numericamente, empregando-se o método de matriz de transferência. Estudamos os efeitos do ângulo de incidência e do arranjo espacial da estrutura. Nossos resultados mostram que a propagação de ondas acústicas longitudinais (ou p) e transversais (ou s) são quase semelhantes porque a velocidade da onda para o modo longitudinal é apenas cerca de metade da velocidade da onda transversal. Além disso, alguns efeitos são obtidos variando-se o ângulo de incidência e a quasiperiodicidade, que tem origem nas correlações de longo alcance dos arranjos simétricos e antissimétricos da sequência espelhada de Fibonacci. É possível observar alguns aspectos que destacam o potencial de aplicações tecnológicas demonstrado pela estrutura, como a presença de *bandgaps* fonônicos amplos, para aplicação em sistemas de *bandgap* ultra-largo, e múltiplos de transmissão em regiões de *bandgap* sem a necessidade de introdução de defeitos.

Keywords: Fonônica. Quasicristais. Fibonacci convencional e espelhado. Bandas fonônicas proibidas. Método da matriz de transferência.

ABSTRACT

The goal of this work is to investigate the changes resulting from the modifications in the arrangement of the one-dimensional phononic crystals where the constituent materials are spatially organized according to the symmetric and anti-symmetric mirrored quasiperiodic Fibonacci sequences. In this work, we study phononic quasicrystals composed of two different materials, lead and epoxy, surrounded by two semi-infinite layers composed of a third material, aluminum. These crystals have properties that can be adjusted according to the stacking of their components, and can give rise to the acoustic bandgaps. Because of this, phononics are currently a highly attractive research field and have several applications, mainly in sensors, filters, acoustic insulators, among other areas. By applying continuity conditions at the interfaces, the transmission spectra of the incident sound wave were calculated numerically by employing the transfer-matrix method. We studied the effects of the incidence angle and the spatial arrangement of the structure. Our results show that the propagation of longitudinal (or p) and transversal (or s) acoustic waves are almost similar because the wave speed for longitudinal mode is only about half the wave speed of the transversal one. Besides, some effects are obtained by varying the incidence angle and the quasiperiodicity, which has origin on the long-range correlations of the arrangements symmetric and antisymmetric of the mirrored Fibonacci sequence. It is possible to observe some aspects that highlight the potential for technological applications demonstrated by the structure, such as the presence of wide phononic bandgaps, for application in ultra-wide bandgap systems, and transmission multi-peaks in bandgap regions without the need to introduce defects.

Keywords: Phononics. Quasicrystals. Conventional and mirrored Fibonacci. Phononic bandgaps. Transfer-matrix method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação de exemplos de cristais fonônicos com periodicidade em uma, duas e três dimensões.	17
Figura 2 – Um exemplo de cristal fonônico bidimensional: a peça de arte moderna de Eusebio Sempere consiste de uma escultura composta de cilindros de aço de 2.9 cm de diâmetro arranjados em uma malha quadrada e com período de 10 cm.	17
Figura 3 – Árvores urbanas como cristal fonônico natural em larga escala. (a) Árvores fonônicas. (b) Layout do experimento de vibração nas árvores fonônicas. (c) Esquema representando o arranjo periódico das arvores fonônicas e do ruído e ondas de Rayleigh originadas devido a vibração do tráfego.	19
Figura 4 – Diagrama estrutural de um cristal unidimensional (1D) de bandas de passagem ajustáveis devido a presença de uma camada piezoelétrica como defeito. O coeficiente de transmissão da onda varia como função de x devido ao contraste das propriedades mecânicas das camadas subsequentes.	20
Figura 5 – Cristais 2D retangular (a) e prismático (b) usados em experimentos de Yang <i>et al.</i> (2002), Sukhovich <i>et al.</i> (2004), Yang <i>et al.</i> (2004), Sukhovich <i>et al.</i> (2008), composto de hastes de aço inoxidável mantidas no lugar por duas placas de policarbonato, imerso e preenchido por água. PnC 3D usado em experimentos de Yang <i>et al.</i> (2002), Yang <i>et al.</i> (2004), Page <i>et al.</i> (2004), Biest <i>et al.</i> (2005), montado em água, composto de esferas de carboneto de tungstênio em camadas empilhadas. Em (d) temos uma imagem aproximada da superfície do cristal tridimensional.	22
Figura 6 – Sequências de Fibonacci (a) convencional, e espelhadas (b) simétrica, e (c) antissimétrica.	27
Figura 7 – Um esquema ilustrativo do 1D-PnQC com arranjo de acordo com a quarta geração das sequências de Fibonacci espelhadas (a) simétrica e (b) antissimétrica.	28
Figura 8 – As ondas incidentes ψ_E^+ e ψ_D^- são espalhadas pela amostra. As ondas saindo, ψ_E^- e ψ_D^+ consistem da reflexão e transmissão devido as propriedades da amostra. As ondas no meio externo a amostra pode ser descritas pelas Equações 3.21 e 3.22.	32

Figura 9 – Explicação esquemática do cálculo da transmissão através de duas barreiras. As amostras são separadas para que se possa exibir alguns caminhos da propagação da onda. Na representação, t é a transmissão e r é a reflexão. . .	38
Figura 10 – Transmissão de uma onda se propagando através de um sistema consistindo de duas amostras 1 + 2.	38
Figura 11 – Transmissão T em função da frequência reduzida f/f_0 para incidência normal em um 1D-PnQC com arranjo baseado em multicamadas quasiperiódicas de Fibonacci convencional para: (a) quarta, (b) quinta, (c) sexta e (d) sétima geração. As linhas sólidas azuis e vermelhas tracejadas significam ondas longitudinais (ou p) e transversais (ou s), respectivamente.	45
Figura 12 – Assim como na Figura 11, mas para sequência de Fibonacci espelhada simétrica.	47
Figura 13 – Assim como na Figura 11, mas para sequência de Fibonacci espelhada antisimétrica.	48
Figura 14 – Transmitância (T) em função da frequência reduzida f/f_0 e do ângulo de incidência θ_C em um 1D-PnQCs com arranjo baseado na multicamada quasiperiódica de Fibonacci convencional para: (a) segunda, (b) terceira, (c) quarta e (d) quinta gerações.	50
Figura 15 – Assim como na Figura 14, mas para sequência de Fibonacci espelhada simétrica.	51
Figura 16 – Assim como na Figura 14, mas para sequência de Fibonacci espelhada antisimétrica.	52

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Constantes dos materiais considerados neste trabalho.	43
--	----

LISTA DE SÍMBOLOS

θ	Ângulo de incidência ($^{\circ}$)
ν	Coefficiente de Poisson (1)
λ_0	Comprimento de onda (m)
λ	Constante de Lamé (N/m^2)
ρ	Densidade de massa (kg/m^3)
d	Espessura da camada (m)
f	Frequência (Hz)
ω	Frequência angular (rad/s)
μ	Módulo de cisalhamento (N/m^2)
E	Módulo de Young (N/m^2)
t	Tempo (s)
τ	Tensão cisalhante (N/m^2)
v_p	Velocidade longitudinal da onda (m/s)
v_s	Velocidade transversal da onda (m/s)
\vec{k}	Vetor de onda (rad/m)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	CRISTAIS FONÔNICOS	16
2.1	O que são Cristais Fonônicos	16
2.2	Cristais em 1, 2 e 3 Dimensões	18
2.2.1	<i>PnC's em uma dimensão</i>	18
2.2.2	<i>PnC's em duas dimensões e três dimensões</i>	20
2.3	Aplicações	23
2.3.1	<i>Sensores</i>	23
2.3.2	<i>Refração negativa e superlente</i>	23
2.3.3	<i>Controle de ruído e isolamento acústico</i>	23
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	25
3.1	Sequências quasiperiódicas	25
3.2	Sequências de Fibonacci convencional e espelhadas simétrica e antissimétrica	26
3.3	Modelo Físico e Equação de Propagação de Ondas	28
3.4	Método de Matriz de Transferência	31
3.4.1	<i>Definição de Matriz de Transferência</i>	32
3.4.1.1	<i>Conservação das amplitudes</i>	34
3.4.1.2	<i>Simetria de reversão temporal</i>	35
3.4.2	<i>Amplitudes de transmissão e reflexão</i>	36
3.4.3	<i>Multiplicação de Matrizes de Transferência</i>	37
3.5	Matriz de Transferência para PnC 1D de Fibonacci com simetria e antissimetria espelho	39
3.6	Espelhos de Bragg	42
4	RESULTADOS	43
4.1	Caso de Incidência Normal	44
4.2	Caso de Incidência Oblíqua	49
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	54
	REFERÊNCIAS	56

1 INTRODUÇÃO

As vibrações derivadas da perturbação de ruídos ambientais, as ocasionadas por cargas de impacto de colisões, as induzidas por fluxo turbulento ou pelo próprio motor em aeronaves e, até mesmo, ondas de ultrassom aplicadas na inspeção de estruturas ou do corpo humano são apenas alguns das muitas aplicações de ondas vibro-acústicas e cargas dinâmicas; exemplifica Hedayatrasa (2018b). Diante da observação de tamanha influência, o autor ressalta a necessidade de projetos apropriados e otimização das estruturas constituídas para comportamento vibro-acústico, desde pequenos transdutores ultrassônicos até grandes peças automotivas.

Cristais fonônicos (PnCs, do inglês *phononic crystals*), são materiais que, nos últimos anos, têm ganhado inúmeras aplicações no tratamento de ondas mecânicas por serem estruturas cujas propriedades acústicas podem ser manipuladas a partir da configuração de suas camadas, de acordo com sua geometria e as propriedades mecânicas dos materiais que os constituem (KUSHWAHA *et al.*, 1993; SIGALAS; ECONOMOU, 1993; LU *et al.*, 2009).

Dos vários estudos que estão sendo realizados acerca deste novo material, muitas aplicações em engenharia, por exemplo, no *design* de dispositivos acústicos como filtros, sensores, isoladores de vibrações e supressores de ruído (ALY; MEHANEY, 2012a; XIAO *et al.*, 2013; BARKAT; MAMRI, 2018; KHATEIB *et al.*, 2020) têm sido desenvolvidas com base no potencial de bandas proibidas. Isto é devido a capacidade destes cristais poderem apresentar a chamadas bandas fonônicas proibidas (PBGs, do inglês *phononic bandgaps*).

Em sistemas unidimensionais, o número de camadas e suas espessuras são fatores que tornam possível a calibragem da largura desses PBGs, tanto da largura quanto da posição. Não obstante, as bandas de passagens existentes nos intervalos entre bandas proibidas podem ser introduzidas através da aplicação de camadas de defeito ou da utilização de *designs* quasiperiódicos como base para as estruturas (AYNAOU *et al.*, 2005; ZHANG *et al.*, 2012; ALY *et al.*, 2017; ALY *et al.*, 2019).

Diante da vasta aplicabilidade deste novo tipo de estrutura e do anseio de promover avanços no desenvolvimento deste tipo de estruturas, percebe-se a necessidade de avaliar os efeitos que a quasiperiodicidade implica na propagação de ondas transversais e longitudinais em quasicristais fonônicos unidimensionais (1D-PnQCs, do inglês *one-dimensional phononic quasicrystals*) de Fibonacci. Portanto, quais os novos resultados que poderão ser obtidos a partir do estudo da propagação de ondas acústicas através de PnCs unidimensionais de estrutura baseada na sequência quasiperiódica de Fibonacci espelhada simétrica e antissimetricamente?

Dessa forma, o objetivo geral do presente trabalho é estudar os efeitos da utilização das estruturas quasiperiódicas de Fibonacci simétrica e antissimetricamente espelhadas como base para configuração de cristais fonônicos em uma dimensão. Para tanto, foram delineados os seguintes objetivos específicos: observar e comparar os resultados obtidos para os espectros de transmissão das ondas propagadas de modo longitudinal e transversal; investigar a influência do ângulo de incidência em relação ao eixo normal ao plano de incidência, do número de períodos da sequência adicionados ao cristal e, também, destacar as principais características e divergências da utilização de simetria e antissimetria no espelhamento das configurações investigadas.

Parte-se da hipótese de que, devido ao grau de desordem característico, as estruturas quasiperiódicas que, por sua vez, tem seus comportamentos amplificados ou atenuados por conta da condição de espelhamento, para que assim seja possível observar os comportamentos que podem vir a ser explorados em engenharia, tais como modos localizados de onda e faixas de frequência completamente proibidas, com base no potencial destas bandas proibidas.

No Capítulo 2, fazemos uma breve introdução aos cristais fonônicos evidenciando suas principais propriedades, abordando sobre os comportamentos e vantagens de cada uma das suas configurações de periodicidade em uma, duas e três dimensões e destacando algumas das principais aplicações do material já estudadas em trabalhos realizados, que foram utilizados como base bibliográfica para este trabalho.

No Capítulo 3, abordou-se algumas das ferramentas utilizadas para as simulações realizadas no cristal fonônico e, também, das utilizadas como base para o *design* dos mesmos. Discutimos sobre a quasiperiodicidade, a sequência de Fibonacci e das condições de simetria e antissimetria espelho; apresentamos as equações que regem a propagação das ondas mecânicas; descrevemos, em detalhes, o método da matriz de transferência, que se utiliza das condições de continuidade nas interfaces, que foi aplicado para obtenção dos valores de transmissão.

No Capítulo 4, apresentamos os nossos resultados do cálculo numérico, discutindo quanto a influência da quasiperiodicidade, a condição de espelhamento e do grau de desordem da estrutura, além, das influências dos modos de propagação normal e transversal, faixas de frequências e ângulo de incidência. Além disso discutimos os principais resultados obtidos.

Por fim, no Capítulo 5 apresentamos as principais conclusões do trabalho desenvolvido, dentre as quais destacamos: a presença de uma banda fonônica proibida muito larga e de picos ou multipicos nesta região, e as principais aplicações tecnológicas do sistema considerado. Além disto, apresentamos ideias de trabalhos que poderão ser desenvolvidos futuramente.

2 CRISTAIS FONÔNICOS

Neste capítulo realizamos uma breve introdução aos cristais fonônicos evidenciando seu conceito, suas principais propriedades e abordando sobre os comportamentos que estes proporcionam. Também foi reservado um espaço para tratar das suas configurações de periodicidade em uma, duas e três dimensões e algumas características de cada uma. Por fim, foram listadas e discutidas algumas das aplicações do material já estudadas em trabalhos realizados por diversos autores e outras que demonstram seu potencial para futuras inovações.

2.1 O que são Cristais Fonônicos

Khelif e Adibi (2015) define PnCs como sendo um novo tipo de estrutura periódica sintético com capacidades promissoras de manipulação da propagação de ondas elásticas (ou acústicas). É, em seu conceito, uma estrutura em rede heterogênea composta pelo arranjo periódico de dois ou mais materiais com certo contraste entre si, ou formando inclusões de vazios em um único material (DEYMIER, 2013b; HEDAYATRASA, 2018a).

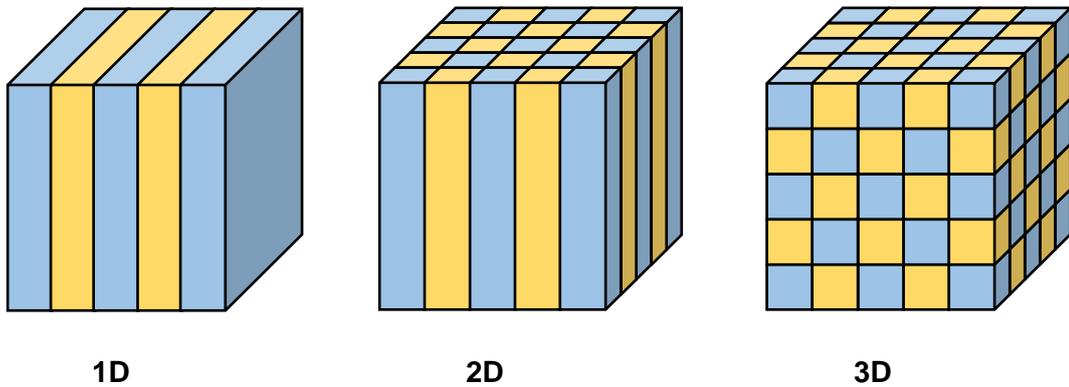
PnCs apresentam novas características não encontradas em materiais sólidos, como por exemplo, a capacidade de dar origem a intervalos de frequência em quais não é permitida a propagação de ondas acústicas através de sua estrutura. Este fenômeno, conhecido como PBGs, pode ser explicado com base na natureza periódica dos PnCs (KHELIF; ADIBI, 2015).

Deymier (2013b), Khelif e Adibi (2015) exemplificam outra propriedade de manipulação de ondas, citando que, em decorrência da adição de qualquer tipo de defeito a cristais perfeitos ou alterando os recursos de algumas poucas células adjacentes, podemos obter efeitos de modos localizados de ressonância dentro das bandas proibidas, permitir o *design* de dispositivos como guias de onda e cavidade para controle de propagação.

É, então, extremamente importante controlar e otimizar as bandas proibidas, em termos de largura e localização, com base no interesse de aplicação, ajustando as propriedades do material. A eficiência dos cristais é definida principalmente pelas configurações das suas unidades de repetição (célula unitária), como geometria, topologia, composição e periodicidade, podendo ser em uma, duas e três dimensões (ver Figura 1) criando bandas proibidas unidirecionais, no plano e omnidirecionais (HEDAYATRASA, 2018a).

Em 1995, pesquisas mostraram a capacidade de atenuar fortemente ondas acústicas a certas frequências por meio da utilização da escultura minimalista de Eusebio Sempere, exibido

Figura 1 – Representação de exemplos de cristais fonônicos com periodicidade em uma, duas e três dimensões.



Fonte: Elaborada pelo autor.

a céu aberto em um parque em Madrid (ver Figura 2). As pesquisas dirigidas pelo Instituto de Ciência dos Materiais de Madrid resultaram na primeira mensuração experimental de atenuação de som Deymier (2013a), Khelif e Adibi (2015), Hedayatrasa (2018a).

Figura 2 – Um exemplo de cristal fonônico bidimensional: a peça de arte moderna de Eusebio Sempere consiste de uma escultura composta de cilindros de aço de 2.9 cm de diâmetro arranjados em uma malha quadrada e com período de 10 cm.



Fonte: (KHELIF; ADIBI, 2015)

Segundo Deymier (2013a), este efeito é causado não devido a absorção advinda da rigidez do arranjo de tubos de aço no ar, mas pode ser justificado devido a múltiplas interferências das ondas sonoras. O autor ainda afirma que o arranjo periódico é o verdadeiro responsável pelo fenômeno por conta da capacidade de gerar essas interferências construtivas e destrutivas, sendo esta segunda responsável pela atenuação da amplitude das ondas transmitidas. Além dos cristais artificiais que tem seus *designs* sendo investigados e então produzidos pela ciência, podemos encontrar na natureza estruturas de capacidade semelhante à dos cristais. Um conjunto de árvores urbanas arranjadas periodicamente, como apresentado na Figura 3, pode apresentar um comportamento similar ao de um cristal fonônico natural em larga escala.

Hoje, usando o PnC, novos dispositivos (filtros acústicos, ressonadores, fontes de luz e lentes) com excelentes indicadores de desempenho podem ser realizados. Além disso, ao utilizar-se dessas estruturas para formar metamateriais acústicos, pode-se descobrir novos efeitos, como refração negativa, invisibilidade acústica ou hiperlentes. Espera-se que, em um futuro próximo, o impacto do PnC apareça em aplicações como comunicação sem fio, sensoriamento, processamento de sinal acústico e imagem de ultrassom (KHELIF; ADIBI, 2015).

O exemplo da Figura 3 tem base em estudos que comprovaram, através de simulações computacionais em um modelo tridimensional e verificação experimental, resultados que averiguaram a validade das bandas proibidas geradas (HUANG *et al.*, 2019). Segundo o autor, o crescente estudo com enfoque nas capacidades de proibição da propagação de ondas permitidas nos cristais foi a responsável pela abertura de novas perspectivas que buscam esclarecer o mecanismo efetivo, ecológico e econômico de redução de vibração e controle de ruídos propiciados pela vegetação urbana.

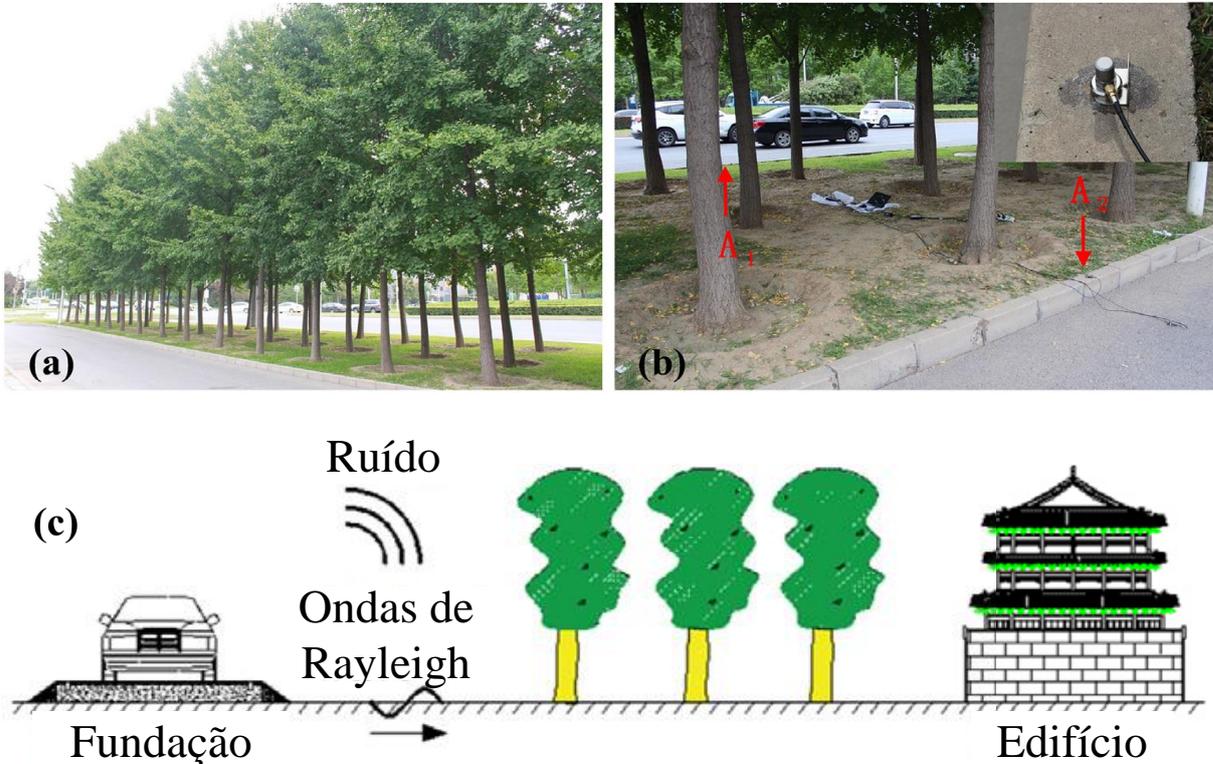
2.2 Cristais em 1, 2 e 3 Dimensões

2.2.1 PnCs em uma dimensão

A Figura 4 exemplifica uma estrutura de multicamadas com periodicidade em apenas uma dimensão que tem ganhado destaque e grande importância na ciência. Este tipo de material, também chamado de super-rede, geralmente tem em sua composição a presença de dois ou mais materiais dispostos em camadas repetidas em uma determinada sequência (BOUDOUTI; DJAFARI-ROUHANI, 2013; SÁNCHEZ-DEHESA; KROKHIN, 2016).

O aspecto mais característico dessas heteroestruturas é a capacidade que possuem,

Figura 3 – Árvores urbanas como cristal fonônico natural em larga escala. (a) Árvores fonônicas. (b) Layout do experimento de vibração nas árvores fonônicas. (c) Esquema representando o arranjo periódico das arvores fonônicas e do ruído e ondas de Rayleigh originadas devido a vibração do tráfego.



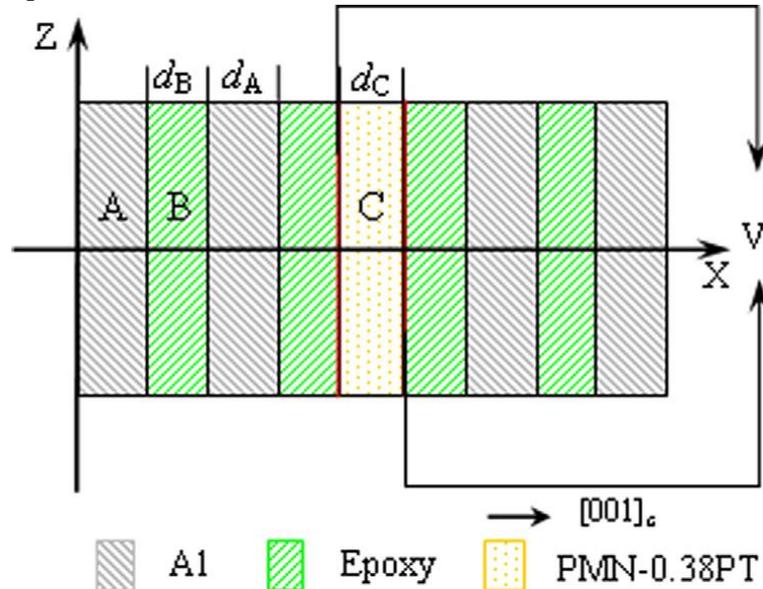
Fonte: Adaptado de Huang *et al.* (2019).

diferentemente dos materiais sólidos, de possibilitar a existência de bandas de frequência proibidas devido a diferença entre os parâmetros acústicos de seus materiais constituintes (KRIEGEL; SCOTOGNELLA, 2017; ALAMI *et al.*, 2019). Sánchez-Dehesa e Krokhn (2016) mencionam também que, neste caso particular, podemos obter de maneira fechada a relação de dispersão e, ainda, temos que há propagação independente das ondas de polarização longitudinal e transversal no caso do vetor de Bloch estar direcionado na mesma direção do eixo da super-rede:

Apesar do problema de ondas acústicas em materiais sólidos e fluidos terem sido estudados intensivamente desde o início do último século, este campo de pesquisa continua atraindo a atenção de estudos por conta do alto nível de qualidade de controle e perfeição alcançado no desenvolvimento de técnicas de micro e nanoestruturas, mas também devido técnicas de experimentação sofisticadas usadas para provar diferentes modos desses sistemas em diferentes domínios de frequência. Em adição, esses sistemas podem apresentar diversas aplicações guiando, proibindo e filtrando ondas. (BOUDOUTI; DJAFARI-ROUHANI, 2013, p. 90, tradução nossa).

Algumas demonstrações teóricas e experimentais vem sendo realizadas nos últimos anos com a finalidade de comprovar o comportamento de reflexão *omnidirecional* que as estru-

Figura 4 – Diagrama estrutural de um cristal unidimensional (1D) de bandas de passagem ajustáveis devido a presença de uma camada piezoelétrica como defeito. O coeficiente de transmissão da onda varia como função de x devido ao contraste das propriedades mecânicas das camadas subsequentes.



Fonte: (WANG *et al.*, 2014).

ras de apenas um grau de periodicidade também podem apresentar, como é o caso do exposto por Manzanares-Martínez *et al.* (2004 apud BOUDOUTI; DJAFARI-ROUHANI, 2013) que atestou essa capacidade em super-redes compostas de alguns períodos de chumbo e epóxi sanduichados entre substratos de Nylon. Este comportamento consiste da reflexão total, independentemente do ângulo de incidência e da polarização das ondas acústicas.

Boudouti e Djafari-Rouhani (2013) destaca, ainda, que devido a facilidade para execução de seus *designs* e dos cálculos empregados, analíticos e numéricos, para este tipo de material é requerido apenas ferramentas relativamente simples. Este fato é também uma notável vantagem desses sistemas em uma dimensão, que possibilita uma compreensão mais aprofundada das bandas proibidas e a relação destas com as propriedades físicas deste tipo de estrutura.

2.2.2 PnCs em duas dimensões e três dimensões

Devido a sua periodicidade podemos observar no cristal 2D - estruturas que apresentam periodicidade em dois eixos e homogeneidade no terceiro - e 3D - cuja característica periódica das estruturas se estendem aos três eixos - apresentam comportamentos não comumente encontrados nas estruturas em uma dimensão abordados na subseção anterior.

Quanto aos métodos de confecção destes materiais, Sukhovich *et al.* (2013) afirma que estes são geralmente construídos, para realização de estudos teóricos e experimentais, utilizando-se de cilindros, no caso de estruturas 2D que são comumente considerados simplesmente como seções vazadas e preenchidas por ar. De maneira similar para os cristais 3D, que faz uma clássica analogia a cristais naturais, esferas são comumente utilizadas como unidade de repetição.

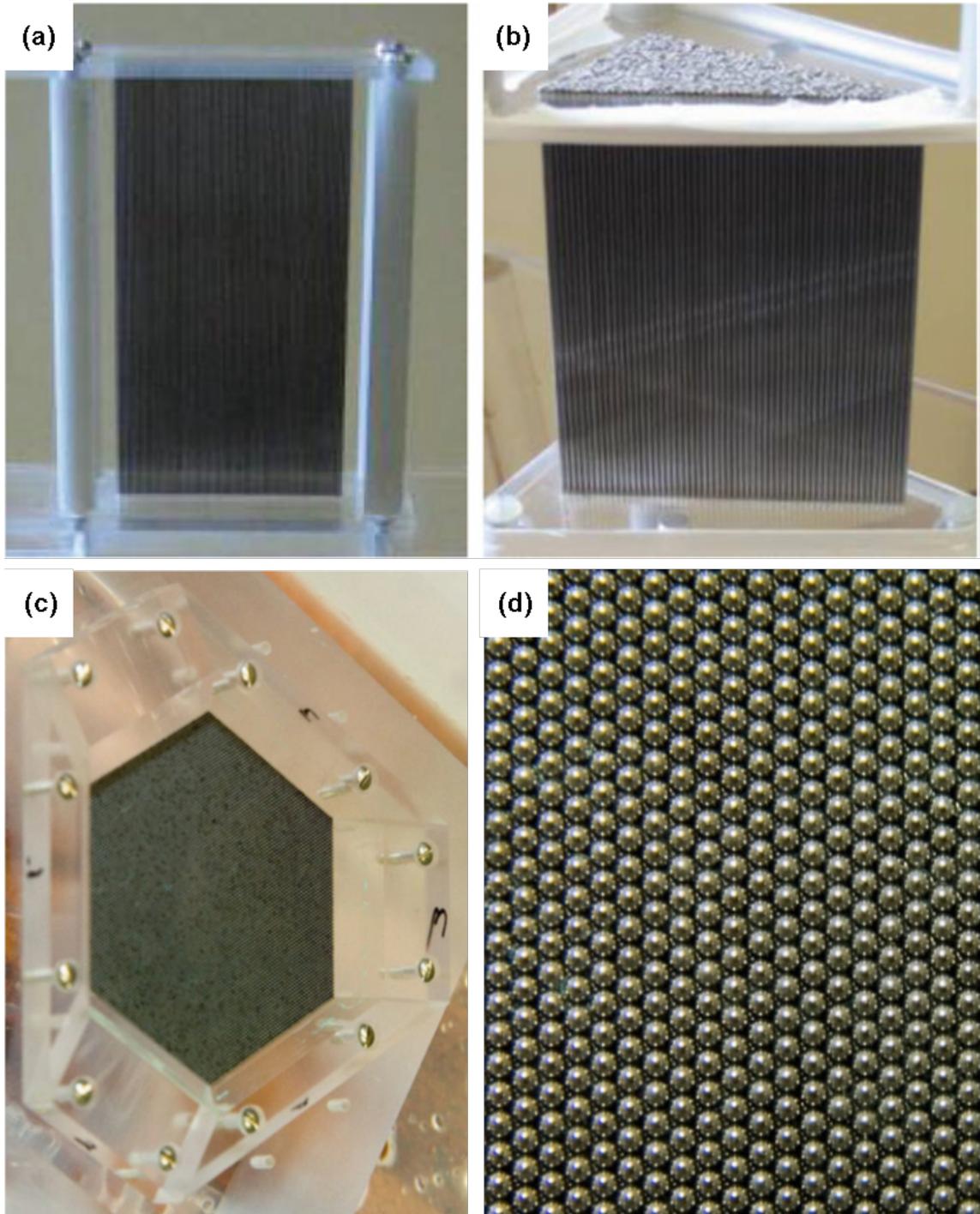
Embora existam muitas maneiras diferentes de se obter cristais fonônicos teórica e experimentalmente (pela variação do material das unidades de repetição e da matriz em que se baseia a estrutura), algumas condições são sempre observadas: o tamanho característico da unidade de repetição (cilindro ou esfera) e a condição da constante de rede ser sempre em função do comprimento de onda da radiação incidente para garantir que as características cristalinas decorrentes de sua regularidade afetem a propagação da onda através do cristal. (SUKHOVICH *et al.*, 2013, p. 96, tradução nossa).

Fazendo uma breve comparação entre os cristais em duas e três dimensões, podemos destacar em primeiro momento a maior capacidade que os cristais 3D tem de apresentar um comportamento particular de corte de onda elástica *omnidirecional* e, evidentemente por analogia, maior capacidade de exibir zonas proibidas de frequência em relação aos de menor ordem (ASSOUAR *et al.*, 2016).

Outra diferença entre os cristais 2D e 3D é que, há para este segundo há uma maior dificuldade e uma maior delicadeza, geralmente, exigida na sua fabricação (HENDERSON *et al.*; KINRA; KER; MASLOV *et al.*, 2001, 1983, 2000 apud ASSOUAR *et al.*, 2016). Todavia, Assouar *et al.* (2016) destaca que, ainda assim, cristais fonônicos em três dimensões continuam sendo fabricados e experimentados em macroescala e estudos recentes em nanoestruturas tem sido possibilitados por conta de novas técnicas químicas e com métodos de mensuração não destrutivos.

Por fim, apesar da grande variedade de implementações possíveis aos cristais fonônicos que Sukhovich *et al.* (2013) expõe - isolamento de som, guias de ondas, ressonadores e filtros com fundamento na existência de bandas proibidas e refração negativa, que ocorre quando a velocidade e vetor da onda são antiparalelos no material - ele afirma que estas propriedades podem sempre ser descritas por meio das interferências construtivas ou destrutivas das ondas acústicas ou elásticas originadas das reflexões de Bragg.

Figura 5 – Cristais 2D retangular (a) e prismático (b) usados em experimentos de Yang *et al.* (2002), Sukhovich *et al.* (2004), Yang *et al.* (2004), Sukhovich *et al.* (2008), composto de hastes de aço inoxidável mantidas no lugar por duas placas de policarbonato, imerso e preenchido por água. PnC 3D usado em experimentos de Yang *et al.* (2002), Yang *et al.* (2004), Page *et al.* (2004), Biest *et al.* (2005), montado em água, composto de esferas de carboneto de tungstênio em camadas empilhadas. Em (d) temos uma imagem aproximada da superfície do cristal tridimensional.



Fonte: Adaptado de Sukhovich *et al.* (2013)

2.3 Aplicações

Mohammadi *et al.* (2016) reforça que estruturas de cristais fonônicos possuem uma grande variedade de aplicações possíveis utilizando-se de vários padrões para configuração destas e diante dos intervalos de frequência que podem atuar. O autor faz ainda menção a futuros desenvolvimentos em diversas áreas onde se encontra um grande potencial para aplicações e pesquisas acerca de cristais fonônicos e metamateriais, de onde destacamos e discutimos brevemente sobre algumas destas.

2.3.1 Sensores

A utilização das estruturas de cristais fonônicos para aplicações de sensoriamento tem se demonstrado como uma área com grande potencial para pesquisas futuras, embora sua exploração tenha sido iniciada recentemente. Para aplicação no *design* de biossensores, o desejável é sua utilização junto a meios gasosos ou líquidos, sendo assim mais interessante o projeto e análise de estruturas para detecção de objetos alvos neste tipo de meio. A perda advinda da atenuação nos líquidos pode ser minimizada ao se utilizar de modos apropriados a estrutura. (LUCKLUM; LI, 2009 apud MOHAMMADI *et al.*, 2016)

2.3.2 Refração negativa e superlente

Mohammadi *et al.* (2016) cita, como potenciais aplicações de metamateriais acústicos, a proteção contra terremotos e tsunamis, lentes compactas para uso em testes médicos e não destrutivos. Este ramo de pesquisas vem sendo uma das áreas mais ativas nos estudos de cristais fonônicos e metamateriais. Estas aplicações se tornam possíveis devido a efeitos de refração negativa (ZHANG; LIU, 2004 apud MOHAMMADI *et al.*, 2016), lentes eficientes e compactas (WU *et al.*, 2011 apud MOHAMMADI *et al.*, 2016), e camuflagem utilizando-se da capacidade dessas estruturas de modificar grandemente as características de dispersão da propagação de ondas.

2.3.3 Controle de ruído e isolamento acústico

A partir da atenuação sonora observada em esculturas periódicas publicadas há alguns anos (MARTÍNEZ-SALA *et al.*, 1995 apud MOHAMMADI *et al.*, 2016), estruturas de cristal fonônico têm sido utilizadas para controle e isolamento de ruído (WEN *et al.*, 2005

apud MOHAMMADI *et al.*, 2016) e embora seja conhecido experimentalmente que estruturas periódicas podem isolar vibrações, com surgimento da análise de cristais fonônicos tornou-se mais sistemática a observação. As principais aplicações além do controle de som e acústica podem incluir isolamento de vibração e mesas livres de vibração em aeronaves, como continua Mohammadi *et al.* (2016).

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo abordamos brevemente sobre PnCs 1D e explicamos como construí-los um de acordo com a sequência quasiperiódica de Fibonacci. Em seguida, reservamos espaço para discutir as propriedades mecânicas dos materiais, apresentar a equação da onda mecânica, o método da matriz de transferência e algumas de suas propriedades.

3.1 Sequências quasiperiódicas

Albuquerque e Cottam (2004) citam o rápido desenvolvimento de técnicas altamente sofisticadas de crescimento como sendo uma das razões da recente viabilidade da pesquisa de superfície e interface; e um maior desenvolvimento dessas tecnologias devido a sua aplicação na indústria. Os autores reforçam também que o desenvolvimento da tecnologia de crescimento de cristal tornou os materiais científicos mais versáteis e os avanços na fabricação de materiais multicamadas permitiram revelar as novas características dessa estrutura.

Eles permitem também uma intrigante nova classe de materiais artificiais periódicos (ou super-rede) e de camadas quasiperiódicas, onde neste suas propriedades macroscópicas estão prontamente sujeitas a projeto ou controle por meio da variação da espessura ou composição dos filmes constituintes. Na verdade, algumas dessas propriedades podem ser únicas a estrutura de multicamadas e fornecem o potencial para aplicações de dispositivos (JAROS, 1989 apud ALBUQUERQUE; COTTAM, 2004, p. 25, tradução nossa).

Do ponto de vista teórico, os espectros de muitos tipos de excitações elementares em estruturas quasiperiódicas foram extensivamente estudadas por varios grupos. Já do lado experimental, foi a partir dos trabalhos de Merlin e colaboradores (MERLIN *et al.*, 1985; TODD *et al.*, 1986; BAJEMA; MERLIN, 1987), que, através da técnica de crescimento epitaxial por feixe molecular (MBE, do inglês *molecular beam epitaxy*), relataram a construção da primeira super-rede quasiperiódica seguindo a sequência de Fibonacci (ALBUQUERQUE; COTTAM, 2004; COELHO, 2010).

Para este trabalho, as estruturas quasiperiódicas investigadas foram desenvolvidas com base na sequência de Fibonacci, um exemplo de sequências conhecidas como sequências substitucionais. Albuquerque e Cottam (2004), Coelho *et al.* (2010) descrevem essas sequências como sendo obtidas a partir de regras de substituição e destacam o fato destas serem objetos frequentes de estudos em diversas áreas, tais como a Matemática (DEKKING, 1976; DEKKING, 1977; CHRISTOL *et al.*, 1980), Computação (COBHAM, 1969; COBHAM, 1972), além da

Física. Essas sequências são caracterizadas pela natureza de seu espectro de Fourier (QUEFFÉ-LEC, 1987), como citam os autores, podendo ser *singular continuos* (sequência de Thue-Morse e período duplo), ou a tratada neste trabalho, *dense pure point* (sequência de Fibonacci).

Com a finalidade de apresentar uma breve definição de sequência substitucional consideremos ξ um conjunto infinito chamado alfabeto (onde $\xi = A, B$, por exemplo, sendo A e B dois blocos constituintes diferentes), e o conjunto de todas as "palavras" de comprimento finito (como $AABAB$) que podem ser escritas com base no alfabeto será denotado por ξ^* . Agora definimos ζ , que atua nestas palavras substituindo cada letra (por exemplo, A) dela por sua imagem correspondente, denotada por $\zeta(A)$, servindo como um mapa de ξ a ξ^* . Por fim, se uma sequência se mantém invariável quando cada letra da sequência é substituída pela sua imagem em ζ , ou seja, é um ponto fixado de ζ , esta é dita como sendo uma sequência substitucional (ALBUQUERQUE; COTTAM, 2004).

Uma vez que se define a sequência quasiperiódica que será investigada, é feita a associação com a superposição dos blocos de construção que constituem a célula unitária do sistema físico quasiperiódico. Os blocos de construção associados conterão informações físicas sobre os tipos de materiais usados no sistema em estudo.

3.2 Sequencias de Fibonacci convencional e espelhadas simétrica e antissimétrica

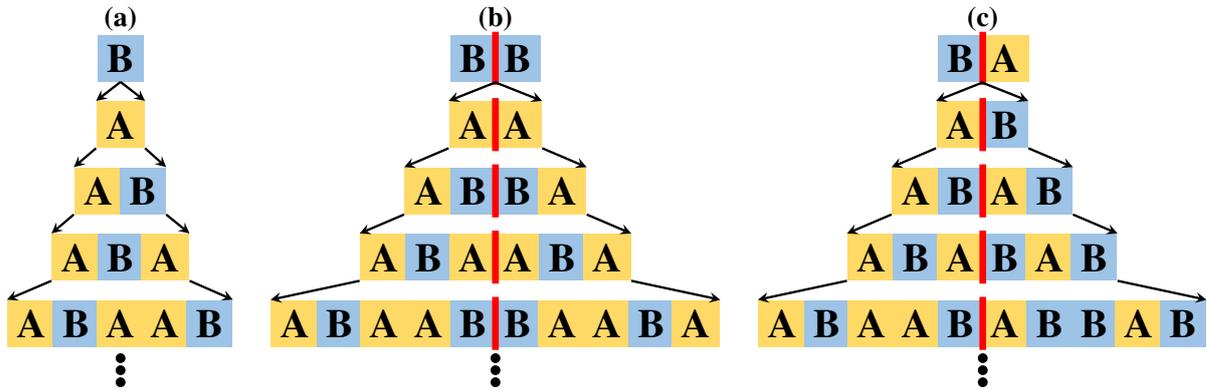
Em primeiro lugar, deve-se construir a sequência de Fibonacci, aqui denominada de Fibonacci convencional, que pode ser obtida por um processo iterativo ou por uma regra de substituição que é: dada uma cadeia de duas letras A e B e começando com uma letra B como uma semente, substitui-se todas as letras A e B na cadeia por AB e A , respectivamente, ou, resumidamente, $A \rightarrow AB$ e $B \rightarrow A$. Mais especificamente, considerando N como o número da geração e começando $F_0 = [B]$, as próximas cadeias de letras são $F_1 = [A]$, $F_2 = [A|B]$, $F_3 = [A|B|A]$, $F_4 = [A|B|A|A|B]$, $F_5 = [A|B|A|A|B|A|B|A]$, e assim por diante. Alternativamente, pode-se obter as sequências de Fibonacci por uma regra geral de inflação

$$F_N = F_{N-1}F_{N-2} \quad (\text{for } N \geq 2), \quad (3.1)$$

com $F_0 = B$ e $F_1 = A$ (COSTA *et al.*, 2017). A Figura 6 (a) apresenta as primeiras gerações da sequência de Fibonacci convencional.

As sequências de Fibonacci espelhadas simétrica e antissimétrica podem ser obtidas a partir da convencional. Partindo do caso espelhado simétrico, obtém-se este inserindo um

Figura 6 – Sequências de Fibonacci (a) convencional, e espelhadas (b) simétrica, e (c) antissimétrica.



Fonte: Elaborada pelo autor.

espelho no final da sequência e considerando o seu reflexo. Por exemplo, vamos considerar a terceira geração da sequência convencional de Fibonacci $F_3 = [A|B|A]$, a sequência simétrica espelhada é obtida justapondo-a com sua sequência espelhada $[A|B|A]$ e o resultado é a terceira geração da sequência simétrica de Fibonacci espelhada $F_3^S = [A|B|A|A|B|A]$. Da mesma forma, a sequência antissimétrica é obtida da estrutura simétrica correspondente trocando A por B e vice-versa apenas na parte espelhada. Continuando com o exemplo anterior, a sequência espelhada antissimétrica é $[B|A|B]$ e justapondo-a depois de F_3 , temos a terceira geração da sequência antissimétrica de Fibonacci, que é $F_3^A = [A|B|A|B|A|B]$. Em geral, as regras de inflação das sequências espelhadas simétricas e antissimétricas são, respectivamente,

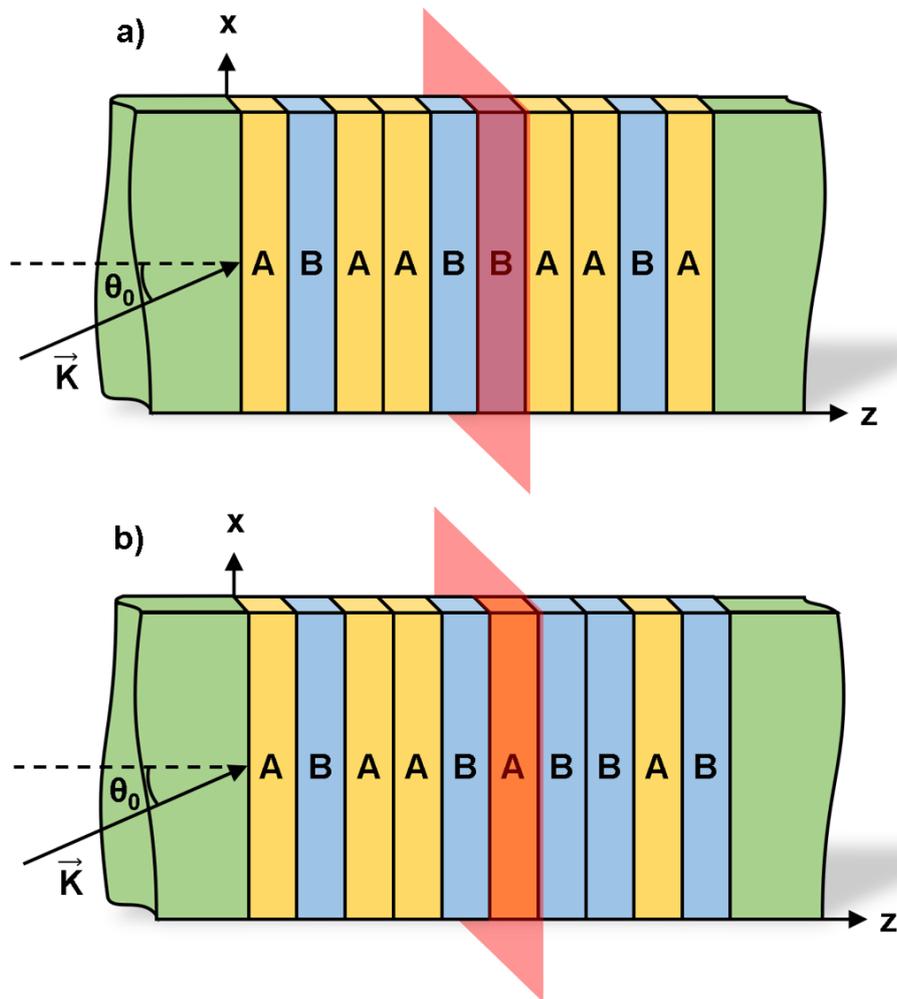
$$F_N^S = F_N \bar{F}_N \quad (3.2)$$

e

$$F_N^A = F_N \bar{F}_N^\dagger, \quad (3.3)$$

onde F_N , \bar{F}_N e \bar{F}_N^\dagger são a N -ésima geração das sequências de Fibonacci convencional e espelhadas simétrica e antissimétrica, respectivamente. Observe que as condições iniciais para as duas sequências espelhadas permanecem as mesmas da convencional. Nos rótulos (b) e (c) da Figura 6, apresentamos as primeiras gerações das sequências de Fibonacci espelhadas simétrica e antissimétrica, respectivamente. A linha sólida vermelha representa o espelho.

Figura 7 – Um esquema ilustrativo do 1D-PnQC com arranjo de acordo com a quarta geração das sequências de Fibonacci espelhadas (a) simétrica e (b) antissimétrica.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.3 Modelo Físico e Equação de Propagação de Ondas

Agora, para descrever a geometria do sistema fonônico, na Figura 7, apresentamos um esquema ilustrativo onde as camadas espacialmente dispostas na direção z e com interfaces no plano xy . As estruturas consideradas neste trabalho são compostas por camadas de dois tipos de materiais distintos, denominadas A (camada amarela) e B (camada azul), as quais foram dispostas de acordo com as sequências quasiperiódicas de Fibonacci espelhada simétrica (a) e espelhada antissimétrica (b). Como exemplo, a quarta geração das sequências espelhadas de Fibonacci simétricas e antissimétricas (ver Figura 6). A superfície vermelha simboliza o espelho. Como estamos interessados em investigar a propagação (ou, mais especificamente, a transmissão) de ondas mecânicas em um sistema de multicamadas finitas, ele deve ser circundado

por um meio incidente e emergente, denominado C (regiões verdes). Os meios A , B e C são todos materiais sólidos isotrópicos e não dispersivos. O parâmetro geométrico é a espessura da camada d_j , enquanto os parâmetros físicos (ou mecânicos) são a constante de Lamé λ_j , módulo de cisalhamento μ_j , coeficiente de Poisson ν_j , densidade de massa ρ_j e módulo de Young E_j ($j = A, B$ e C).

Para a onda acústica se propagando na direção z através de um cristal fonônico da esquerda para a direita, o deslocamento em um meio j pode ser escrito pela seguinte equação (ROSE, 2014)

$$\vec{\nabla}^2 \varphi_{j\gamma} = \frac{1}{v_{j\gamma}^2} \frac{\partial^2 \varphi_{j\gamma}}{\partial t^2}, \quad (3.4)$$

onde $\gamma = p$ ou $\gamma = s$ para ondas longitudinais (ou p) e transversais (ou s), $\varphi_{jp}(x, y, t)$ e $\varphi_{js}(x, y, t)$ são as componentes dos deslocamentos ao longo das direções z e x , respectivamente, e $\vec{\nabla}^2$ é o operador Laplaciano em coordenadas cartesianas (MALDOVAN; THOMAS, 2009). A velocidade da onda $v_{j\gamma}$ tem duas expressões, a saber,

$$v_{jp} = \sqrt{\frac{\lambda_j + 2\mu_j}{\rho_j}} \quad (3.5)$$

e

$$v_{js} = \sqrt{\frac{\mu_j}{\rho_j}}, \quad (3.6)$$

para ondas longitudinais e transversais, respectivamente.

Propondo a propagação de ondas planas na direção z para um meio j , com um vetor de onda $\vec{k}_j = (k_{xj}, 0, k_{zj})$ e um ângulo de incidência θ_j , a solução para o deslocamento neste meio pode ser expressa como (para simplificar, omitimos o índice γ em algumas expressões a partir de agora)

$$\varphi_j(x, z, t) = \phi_j(z) e^{i(k_{xj}x - 2\pi ft)}, \quad (3.7)$$

onde $\phi_j(z)$ é a amplitude do deslocamento, $k_{xj} = k_j \sin \theta_j = k_{xC} = k_C \sin \theta_C$ é a componente x do vetor de onda \vec{k}_j enquanto θ_C é o ângulo de incidência (ver Figura 7). Da relação $\omega = 2\pi f = v_j k_j$, segue que $k_C = \omega/v_C = 2\pi f/v_C$, onde ω é a frequência angular, f é a frequência e v_C é a velocidade da onda no meio C .

A amplitude dos deslocamentos $\phi_j(z)$ tem duas contribuições: uma para uma onda que se propaga da esquerda para a direita e outra que se propaga na direção oposta com suas

respectivas amplitudes desconhecidas. Para cada um dos três meios, $\phi_j(z)$ pode ser escrito da seguinte forma,

$$\phi_A(z) = Ae^{ik_z A z} + \bar{A}e^{-ik_z A z}, \quad (3.8)$$

$$\phi_B(z) = Be^{ik_z B z} + \bar{B}e^{-ik_z B z} \quad (3.9)$$

e

$$\phi_C(z) = \begin{cases} Ce^{ik_z C z} + \bar{C}e^{-ik_z C z} & \text{(para o meio incidente),} \\ C'e^{ik_z C z} & \text{(para o meio emergente),} \end{cases} \quad (3.10)$$

onde $k_{zj} = k_j \cos \theta_j$ é a componente z do vetor de onda \vec{k}_j que pode ser desenvolvida, como mostrado a seguir, resolvendo a Equação 3.4 através do operador de Laplace e da derivada parcial de segunda ordem de t , como se segue abaixo:

$$\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} = -k_C^2 \sin^2 \theta_C \phi_j; \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial z^2} = \frac{d^2 \phi}{dz^2} e^{i(k_C \sin \theta_C x - 2\pi f t)} \quad (3.12)$$

e

$$\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial t^2} = -(2\pi f)^2 \phi_j, \quad (3.13)$$

obtemos a expressão

$$-k_C^2 \sin^2 \theta_C \phi_j + \frac{d^2 \phi}{dz^2} e^{i(k_C \sin \theta_C x - 2\pi f t)} = -\frac{(2\pi f)^2}{v_j^2} \phi_j. \quad (3.14)$$

Substituindo a Equação 3.7 na Equação 3.14 obtemos a expressão,

$$-k_C^2 \sin^2 \theta_C \phi_j + \frac{d^2 \phi}{dz^2} = -\frac{(2\pi f)^2}{v_j^2} \phi_j. \quad (3.15)$$

e daí

$$\frac{d^2 \phi_j}{dz^2} = - \left[\frac{(2\pi f)^2}{v_j^2} - k_C^2 \sin^2 \theta_C \right] \phi_j \quad (3.16)$$

sendo parte do segundo termo da equação, entre os parênteses,

$$k_{zj}^2 = \left(\frac{(2\pi f)^2}{v_j^2} + \frac{(2\pi f)^2}{v_C^2} \sin^2 \theta_C \right). \quad (3.17)$$

que pode ser reescrita como

$$k_{zj} = \frac{2\pi f}{v_C} \sqrt{\left(\frac{v_C}{v_j}\right)^2 - \sin^2 \theta_C}. \quad (3.18)$$

ou

$$k_{zj} = k_C \sqrt{\left(\frac{v_C \gamma}{v_j \gamma}\right)^2 - \sin^2 \theta_C}. \quad (3.19)$$

Portanto, substituindo as Equações 3.8 à 3.10 na Equação 3.7, para o respectivo meio, tem-se a solução geral da equação de onda na Equação 3.4.

3.4 Método de Matriz de Transferência

A metodologia utilizada neste capítulo baseia-se principalmente na apresentação realizada por Markos e Soukoulis (2008) sobre método de matriz de transferência que, para sistemas unidimensionais, torna possível a análise de propagação de ondas, como eletromagnéticas, acústicas, elásticas, etc. O autor reforça que, uma vez desenvolvida a técnica para um tipo de propagação, pode-se facilmente adaptar a aplicação para outros tipos de onda.

Em geral, faz-se a análise do espalhamento da propagação de onda através de determinado meio descrevendo a amplitude de uma onda do lado esquerdo em relação ao do direito deste, sendo que a onda em ambos os lados possui duas componentes uma se movendo para direita e outra à esquerda. Esta relação define a matriz de transferência M que, devido as componentes da onda, é uma matriz 2×2 e por meio desta pode-se facilmente obter os valores de amplitude de transmissão e reflexão (MARKOS; SOUKOULIS, 2008).

Inferre-se do que é dito por Markos e Soukoulis (2008) que, calcular analiticamente a matriz de transferência para investigar a propagação por através de "n" meios é relativamente descomplicado a partir da extensão do cálculo para um primeiro meio. Com o aumento do número de camadas as ondas passam a dar origem as bandas proibidas e bandas de passagem; comportamento característico da propagação de ondas por através de meios periódicos. O método é de extrema utilidade no cálculo de reflexão e transmissão de ondas incidindo em sistemas de estrutura periódica, quasiperiódica ou randômica.

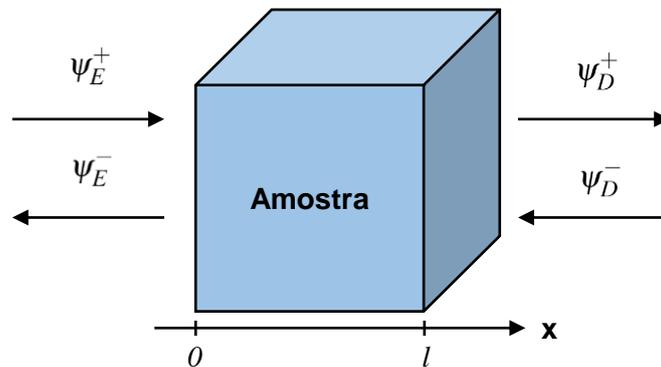
3.4.1 Definição de Matriz de Transferência

Para uma explicação geral sobre o método da matriz de transferência, considere uma função de onda $\psi(\vec{r}, t) = \psi(x, y, z, t)$, onde $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ é o vetor posição e t é o tempo, e que é solução da seguinte equação de onda

$$\vec{\nabla}^2 \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (3.20)$$

onde $\vec{\nabla}^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ é o operador Laplaciano.

Figura 8 – As ondas incidentes ψ_E^+ e ψ_D^- são espalhadas pela amostra. As ondas saindo, ψ_E^- e ψ_D^+ consistem da reflexão e transmissão devido as propriedades da amostra. As ondas no meio externo a amostra pode ser descritas pelas Equações 3.21 e 3.22.



Fonte: Adaptado de Markos e Soukoulis (2008).

O fenômeno de dispersão, significa a interação da onda com o meio, podendo dar origem ao comportamento de reflexão ou transmissão devido a propagação através da amostra. As amplitudes de transmissão t e de reflexão r podem ser calculadas e partindo destes valores obtidos pode-se prever as propriedades físicas da amostra.

Assumimos que as equações de onda antes de incidir sobre a amostra e logo após ter se propagado por através desta são conhecidas e podem ser escritas como sendo uma superposição de ondas planas:

$$\begin{aligned} \psi_E(x, t) &= \psi_E^+(x, t) + \psi_E^-(x), & x \leq 0, \\ \psi_D(x, t) &= \psi_D^+(x, t) + \psi_D^-(x), & x \geq l. \end{aligned} \quad (3.21)$$

A posição da onda em relação a amostra é indicada pelos subscritos D (direita) e E (esquerda) e a direção da propagação é determinada pelos sobrescritos +(-) de maneira que + significa que a propagação da onda se dá na direção positiva (da esquerda para a direita) e - significa que a

propagação ocorre na direção negativa (direita para a esquerda). Por exemplo, a onda incidente, indicada por ψ_E^+ , é descrita pela equação de onda a esquerda da amostra que se propaga para a direita, se aproximando da amostra (ver Figura 8).

As componentes da equação de onda podem ser expressas por:

$$\begin{aligned} \psi_E^+(x,t) &= ae^{ikx}, & \psi_E^-(x,t) &= be^{-ikx} \\ \psi_D^+(x,t) &= a'e^{ik'x}, & \psi_D^-(x,t) &= b'e^{-ik'x} \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde k é o vetor de onda.

A fim de relacionar as amplitudes das ondas à esquerda e à direita da estrutura, faz-se necessário o uso de condições de contorno nas interfaces em $x = 0$ e $x = l$. Em geral, tais condições de contorno envolvem a continuidade da função de onda e de suas derivadas (em geral, é a primeira derivada) nas interfaces. Supondo que a continuidade seja na função e na sua primeira derivada, da exigência da continuidade da função de onda e sua derivada nos limites da amostra obtemos

$$\psi_E(x=0^-) = \phi(x=0^+), \quad \left. \frac{\partial \psi_E(x)}{\partial x} \right|_{x=0^-} = \left. \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \right|_{x=0^+} \quad (3.23)$$

na extremidade esquerda da amostra, e

$$\psi_D(x=l^+) = \phi(x=l^-), \quad \left. \frac{\partial \psi_D(x)}{\partial x} \right|_{x=l^+} = \left. \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \right|_{x=l^-} \quad (3.24)$$

na extremidade da direita, onde $\phi(x)$ é a solução da equação que descreve a onda se propagando dentro da região da amostra $0 \leq x \leq l$.

Desde que a equação de onda consista apenas da superposição de ondas planas, como discutido nas Equações 3.21 e 3.22, a resolução deste problema se torna muito simples. Conhecendo o lado direito das quatro Equações 3.23 e 3.24 pode-se estimar os coeficientes que descrevem completamente as propriedades de dispersão da amostra; a , a' , b e b' definidos nas Equação 3.22.

Em geral, as relações lineares entre as ondas chegando e saindo da amostra pode ser escritas como

$$\begin{pmatrix} \psi_D^+(x=l,t) \\ \psi_D^-(x=l,t) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \psi_E^+(x=0,t) \\ \psi_E^-(x=0,t) \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

que define a matriz de transferência M , que relaciona os coeficientes da função de onda do lado direito da amostra em termos dos coeficientes da função de onda do lado esquerdo. A matriz de transferência é mais apropriada para análises de sistemas unidimensionais.

As matrizes de transferência possuem parâmetros complexos que podem ter seu número reduzido ao se utilizar de simetrias físicas. Discutiremos duas dessas simetrias: conservação das amplitudes e simetria de reversão temporal.

3.4.1.1 Conservação das amplitudes

Podemos introduzir uma relação entre os elementos da matriz de transferência M a partir dos resultados que comprovam que amplitude das ondas incidindo na amostra de um lado devem ser iguais em magnitude ao das que saem da amostra no outro lado, de modo que

$$|\psi_E^-|^2 + |\psi_D^+|^2 = |\psi_E^+|^2 + |\psi_D^-|^2 \quad (3.26)$$

onde $|\psi|^2 = \psi^* \psi$ e ψ^* é a conjugada complexa de ψ .

É simples verificar que a Equação 3.26 pode ser reescrita em forma vetorial como

$$(\psi_E^{+*} \psi_E^{-*}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_E^+ \\ \psi_E^- \end{pmatrix} = (\psi_D^{+*} \psi_D^{-*}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_D^+ \\ \psi_D^- \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Utilizando a definição de matriz de transferência, Equação 3.25, e sua forma conjugada

$$(\psi_D^{+*} \psi_D^{-*}) = (\psi_E^{+*} \psi_E^{-*}) M^\dagger \quad (3.28)$$

obtemos

$$(\psi_E^{+*} \psi_E^{-*}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_E^+ \\ \psi_E^- \end{pmatrix} = (\psi_D^{+*} \psi_D^{-*}) M^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} \psi_D^+ \\ \psi_D^- \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Uma vez que esta relação deve ser válida para qualquer função de onda ψ_E^+ e ψ_E^- , obtém-se a relação

$$M^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

que em sua forma explicita é dada por

$$\begin{pmatrix} M_{11}^* & M_{21}^* \\ M_{12}^* & M_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{21} \\ M_{12} & M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

e por sua vez, implica que os elementos da matriz de transferência satisfazem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} |M_{11}|^2 - |M_{21}|^2 &= 1, & |M_{22}|^2 - |M_{12}|^2 &= 1 \\ M_{11}^* M_{12} - M_{21}^* M_{22} &= 0, & M_{12}^* M_{11} - M_{22}^* M_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

3.4.1.2 Simetria de reversão temporal

Existe outra simetria para sistemas físicos que são simétricos no que diz respeito a inversão de tempo, que reduz ainda mais o número de parâmetros independentes na matriz M .

Se o sistema possui simetria de reversão temporal e se $\psi(z)$ é uma solução para a equação de onda, então $\psi^*(z)$, conjugada complexa, também é solução. A conjugada complexa da equação

$$\psi(z) = e^{ikz} \quad (3.33)$$

é a onda

$$\psi^*(z) = e^{-ikz}, \quad (3.34)$$

cuja propagação é dada no sentido oposto. Isso faz com que, neste caso, as ondas que adentram a amostra são ψ_E^{-*} e ψ_D^{+*} e as que saem dela são ψ_E^{+*} e ψ_D^{-*} , mantendo ainda o mesmo sistema físico de antes. Como a matriz de transferência relaciona as ondas que entram com as que saem obtemos

$$\begin{pmatrix} \psi_D^{-*} \\ \psi_D^{+*} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \psi_E^{-*} \\ \psi_E^{+*} \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

A equação acima segue o modelo da Equação 3.25, que é a definição da matriz de transferência M , e pode ser reescrita como

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_D^{-*} \\ \psi_D^{+*} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_E^{-*} \\ \psi_E^{+*} \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

A conjugada complexa da Equação 3.25, por outro lado pode ser descrita como

$$\begin{pmatrix} \psi_D^{+*} \\ \psi_D^{-*} \end{pmatrix} = M^* \begin{pmatrix} \psi_E^{+*} \\ \psi_E^{-*} \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

No caso de simetria de reversão temporal, pela comparação das duas últimas equações pode-se observar que a matriz de transferência satisfaz a relação

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M^*. \quad (3.38)$$

Com o uso de simetria (Equação 3.38) obtemos que, para sistemas com simetria de reversão temporal, a matriz de transferência tem a seguinte forma

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21}^* & M_{22}^* \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

e que

$$\det[M] = 1. \quad (3.40)$$

Da Equação 3.39 também se obtém que $\text{Tr}[M] = M_{11} + M_{22} = M_{11} + M_{11}^*$ é um número real quando a simetria de reversão temporal é preservada.

Reduzimos o número de elementos independentes na matriz de transferência para três por meio da aplicação dos dois requisitos para conservação do fluxo de probabilidade e simetria de reversão temporal. M é dada por dois números complexos M_{11} e M_{12} , ou por quatro números reais, que determinam as partes real e imaginária de M_{11} e M_{12} , na verdade. Como a restrição para que $\det[M] = 1$, os quatro números não são independentes.

3.4.2 Amplitudes de transmissão e reflexão

De modo a encontrar o significado físico dos elementos da matriz de transferência M retornamos ao experimento de dispersão descrito na Seção 3.4.1. Considere uma onda se propagando pela esquerda na direção da amostra. Como nenhuma onda se propaga vindo pela direção da direita, temos

$$\psi_D^- = 0. \quad (3.41)$$

e Equação 3.25 passa a ser

$$\begin{pmatrix} \psi_D^+(x=l) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_E^+(x=0) \\ \psi_E^-(x=0) \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

donde obtemos,

$$\psi_D^+(x=l) = M_{11}\psi_E^+(x=0) + M_{12}\psi_E^-(x=0) \quad (3.43)$$

e

$$0 = M_{21}\psi_E^+(x=0) + M_{22}\psi_E^-(x=0) \quad (3.44)$$

Por definição, os coeficientes de transmissão e de reflexão são definidos como sendo a razão entre as amplitudes das ondas incidente e transmitida, e incidente refletida, respectivamente.

Logo, das Equações anteriores, obtemos

$$T = \left| \frac{\psi_D^+(x=l)}{\psi_E^+(x=0)} \right|^2 = \left| \frac{1}{M_{22}} \right|^2 \quad (3.45)$$

e

$$R = \left| \frac{\psi_E^-(x=0)}{\psi_E^+(x=0)} \right|^2 = \left| \frac{M_{21}}{M_{22}} \right|^2 \quad (3.46)$$

3.4.3 Multiplicação de Matrizes de Transferência

Consideremos um experimento mais complexo em que a onda irá se propagar através de duas amostras individuais (ver Figura 9), sendo a primeira amostra localizada em $(a < x \leq b)$, e a segunda amostra em $(b \leq x < c)$.

Podemos utilizar as matrizes de transferência M_1 e M_2 , que determinam as propriedades físicas de cada uma das amostras, ou podemos considerar as propriedades equivalentes ao intervalo $a \leq x \leq c$ e usar uma matriz de transferência correspondente M_{12} para solucionar o problema de transmissão e reflexão. Os resultados obtidos por esses dois métodos devem ser os mesmos.

Percebemos, então, que os elementos das matrizes de transferência M_1 e M_2 podem ser utilizados para determinar completamente a matriz de transferência M_{12} . Afim de chegarmos a relação entre as matrizes de transferência expressamos a função de onda em três regiões:

$$\begin{aligned} \psi_E(x) &= \psi_E^+(x) + \psi_E^-(x), & x \leq a, \\ \psi(x=b) &= \psi^+(b) + \psi^-(b), & x \equiv b, \\ \psi_D(x) &= \psi_D^+(x) + \psi_D^-(x), & x \geq c. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Então, a partir da definição do matriz de transferência M , Equação 3.25, temos

$$\begin{pmatrix} \psi^+(b) \\ \psi^-(b) \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} \psi_E^+(a) \\ \psi_E^-(a) \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

e

$$\begin{pmatrix} \psi_D^+(c) \\ \psi_D^-(c) \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} \psi^+(b) \\ \psi^-(b) \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Da combinação das Equações 3.48 e 3.49, obtemos

$$\begin{pmatrix} \psi_D^+(c) \\ \psi_D^-(c) \end{pmatrix} = M_2 M_1 \begin{pmatrix} \psi_E^+(a) \\ \psi_E^-(a) \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

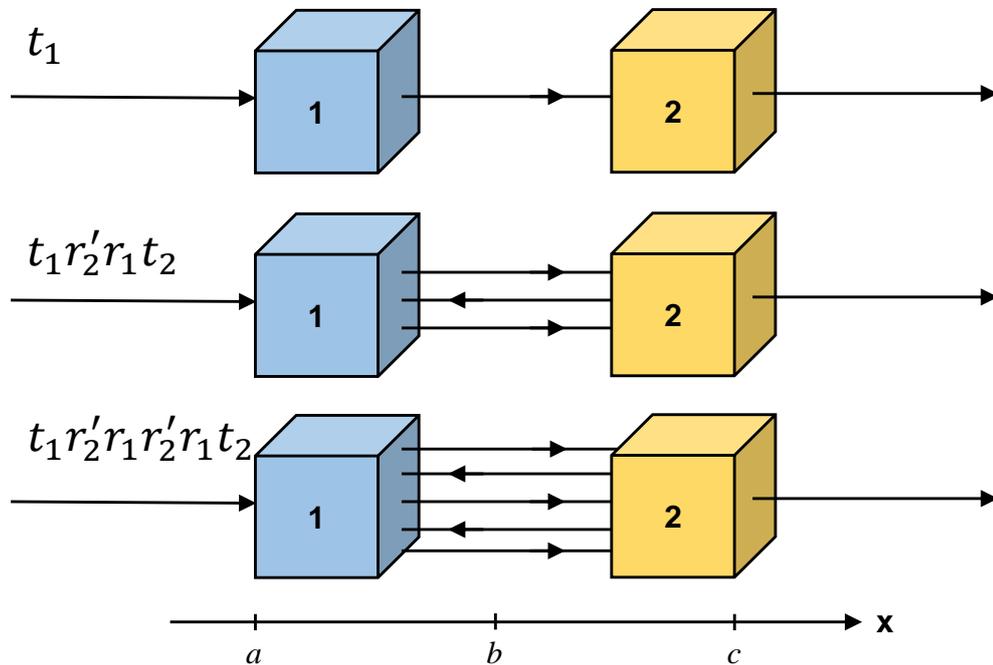
Podemos considerar, como discutido previamente, todo o sistema sendo representado pela transferência matriz M_{12} . Então podemos escrever

$$\begin{pmatrix} \psi_D^+(c) \\ \psi_D^-(c) \end{pmatrix} = M_{12} \begin{pmatrix} \psi_E^+(a) \\ \psi_E^-(a) \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

da comparação entre as Equações 3.50 e 3.51 é que obtemos a lei da composição

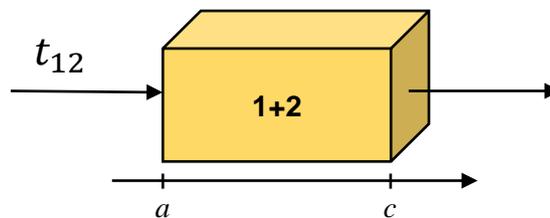
$$M_{12} = M_2 M_1. \quad (3.52)$$

Figura 9 – Explicação esquemática do cálculo da transmissão através de duas barreiras. As amostras são separadas para que se possa exibir alguns caminhos da propagação da onda. Na representação, t é a transmissão e r é a reflexão.



Fonte: Adaptado de Markos e Soukoulis (2008).

Figura 10 – Transmissão de uma onda se propagando através de um sistema consistindo de duas amostras $1 + 2$.



Fonte: Adaptado de Markos e Soukoulis (2008).

Podemos, então, determinar as amplitudes de transmissão e reflexão para todo sistema (Figura 10) em termos dos elementos das matrizes de transferência dos sistemas constituintes, uma vez que a matriz M_{12} é a matriz de transferência de todo o sistema.

A relação de composição (Equação 3.52) pode ser facilmente generalizada para o caso de N barreiras, resultando na matriz de transferência M dada por

$$M = M_N M_{N-1} \cdots M_2 M_1. \quad (3.53)$$

3.5 Matriz de Transferência para PnC 1D de Fibonacci com simetria e antissimetria espelho

Para calcular numericamente o coeficiente de transmissão das ondas mecânicas em 1D-PnQCs, deve-se relacionar as amplitudes da onda emergente com a incidente e, aqui, empregamos o método de matriz de transferência (TMM, do inglês *transfer-matrix method*), que é de uma abordagem muito simples e poderosa para solução destes tipos de problemas. Existem dois tipos de matrizes: a matriz de transmissão, que conecta as amplitudes em uma interface, e a matriz de propagação, que conecta a onda em propagação em um meio homogêneo.

Ao aplicar as duas condições de contorno nas interfaces, a continuidade da função de onda φ e os componentes de tensão, dados por (ZHENG; WEI, 2009; ALY; MEHANEY, 2012b)

$$\tau_{zz} = \tau_p = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (\text{para ondas longitudinais}), \quad (3.54)$$

e

$$\tau_{zx} = \tau_s = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (\text{para ondas transversais}). \quad (3.55)$$

A fim de desenvolver um método geral de matriz de transferência para ondas longitudinais e transversais, para simplificar, também definimos o componente de tensão como sendo

$$\tau_\gamma = \Lambda_\gamma \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial z}, \quad (3.56)$$

onde $\Lambda_p = \lambda + 2\mu$ e $\Lambda_s = \mu$, para $\gamma = p$ e $\gamma = s$, respectivamente.

Considerando que a onda atravessa a interface em $z = 0$ de um determinado meio α para outro β (α e β são A , B ou C), a partir da continuidade da função de onda e do componente geral de tensão, Equação 3.56, temos

$$\varphi_\beta(x, 0, t) = \varphi_\alpha(x, 0, t), \quad (3.57)$$

e

$$\tau_{\beta\gamma}(0) = \tau_{\alpha\gamma}(0). \quad (3.58)$$

Ao substituir as Equações 3.7, 3.10 em 3.57 e 3.58, obtemos

$$\beta + \bar{\beta} = \alpha + \bar{\alpha}, \quad (3.59)$$

$$\beta - \bar{\beta} = \frac{\Lambda_{\alpha\gamma} k_{z\alpha}}{\Lambda_{\beta\gamma} k_{z\beta}} (\alpha - \bar{\alpha}). \quad (3.60)$$

A partir dessas duas ultimas equações, temos

$$\beta = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Lambda_{\alpha\gamma} k_{z\alpha}}{\Lambda_{\beta\gamma} k_{z\beta}} \right) \alpha + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Lambda_{\alpha\gamma} k_{z\alpha}}{\Lambda_{\beta\gamma} k_{z\beta}} \right) \bar{\alpha}, \quad (3.61)$$

e

$$\bar{\beta} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Lambda_{\alpha\gamma} k_{z\alpha}}{\Lambda_{\beta\gamma} k_{z\beta}} \right) \alpha + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Lambda_{\alpha\gamma} k_{z\alpha}}{\Lambda_{\beta\gamma} k_{z\beta}} \right) \bar{\alpha}. \quad (3.62)$$

Podemos escrever as Equações 3.61 e 3.62 em forma matricial de afim de obtermos

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \bar{\beta} \end{pmatrix} = M_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} \alpha \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (3.63)$$

onde

$$M_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\Lambda_{\alpha\gamma} k_{z\alpha}}{\Lambda_{\beta\gamma} k_{z\beta}} & 1 - \frac{\Lambda_{\alpha\gamma} k_{z\alpha}}{\Lambda_{\beta\gamma} k_{z\beta}} \\ 1 - \frac{\Lambda_{\alpha\gamma} k_{z\alpha}}{\Lambda_{\beta\gamma} k_{z\beta}} & 1 + \frac{\Lambda_{\alpha\gamma} k_{z\alpha}}{\Lambda_{\beta\gamma} k_{z\beta}} \end{pmatrix}, \quad (3.64)$$

é a matriz de transmissão de uma onda mecânica que cruza a interface de α para β . Observe que, para um meio idêntico, a Equação 3.64 se reduz à matriz identidade, como deveria ser.

Agora, para uma onda que se propaga dentro de uma camada α com espessura d_α e que tem vetor de onda $k_{z\alpha}$, como não há interface, pode-se obter a matriz de propagação apenas pela aplicação da continuidade da função de onda na região $0 \leq z \leq d_\alpha$, ou seja,

$$\varphi_\alpha(x, d_\alpha, t) = \varphi_\alpha(x, 0, t), \quad (3.65)$$

que resulta em

$$\alpha' e^{ik_{z\alpha} d_\alpha} + \bar{\alpha}' e^{-ik_{z\alpha} d_\alpha} = \alpha + \bar{\alpha}, \quad (3.66)$$

onde $(\alpha', \bar{\alpha}')$ são as amplitudes da onda em $z = d_\alpha$. Essa equação também pode ser escrita em forma matricial, que é dada por

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \bar{\alpha}' \end{pmatrix} = M_\alpha \begin{pmatrix} \alpha \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (3.67)$$

onde

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} e^{-ik_{z\alpha} d_\alpha} & 0 \\ 0 & e^{ik_{z\alpha} d_\alpha} \end{pmatrix}, \quad (3.68)$$

é a matriz de propagação para uma onda mecânica em um meio α .

Conhecendo as formas das matrizes de transmissão e propagação, dadas pelas Equações 3.64 e 3.68, respectivamente, somos capazes de calcular numericamente o coeficiente de transmissão de uma onda acústica em um 1D-PnQC de acordo com uma dada cadeia de letras A e B cercado pelo meio incidente e emergente, rotulado como C , apenas multiplicando as matrizes correspondentes da estrutura considerada. Considerando, por exemplo, a segunda geração das sequências de Fibonacci convencionais, simétricas e antissimétricas, que são, respectivamente

$$F_2 = [A|B], \quad (3.69)$$

$$F_2^S = [A|B|B|A] \quad (3.70)$$

e

$$F_2^A = [A|B|A|B] \quad (3.71)$$

(ver Figura 6), a matriz de transferência para essas sequências são

$$M_2 = M_{CA}M_A M_{AB}M_B M_{BC}, \quad (3.72)$$

$$M_2^S = M_{CA}M_A M_{AB}M_B M_B M_{BA}M_A M_{AC} \quad (3.73)$$

e

$$M_2^A = M_{CA}M_A M_{AB}M_B M_{BA}M_A M_{AB}M_B M_{BC}. \quad (3.74)$$

Assim, em geral, qualquer que seja a sequência da estrutura fonônica, sua matriz de transferência M correspondente terá uma forma 2×2 , e relaciona as amplitudes da onda no meio emergente com as amplitudes no meio incidente como segue abaixo

$$\begin{pmatrix} C' \\ 0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} C \\ \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ \bar{C} \end{pmatrix}, \quad (3.75)$$

a partir do qual obtemos o coeficiente de transmissão é dado por

$$T = \left| \frac{C'}{C} \right|^2 = \left| \frac{1}{M_{11}} \right|^2, \quad (3.76)$$

lembrando que, devido ao princípio de conservação de energia, o determinante da matriz de transferência é igual a 1, ou seja $\det[T] = M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = 1$.

3.6 Espelhos de Bragg

A partir da alternância de materiais com alto contraste em suas propriedades elásticas na composição de estruturas periódicas que se obtém os efeitos dos mecanismos de Bragg, que se baseia nas interferências destrutivas das ondas espalhadas pelas camadas. Este fenômeno é que dá origem aos comportamentos de bandas proibidas e sua primeira ocorrência se dá a uma frequência que pode ser aproximada pela fração v/a , sendo a velocidade típica do som v , e a o período da estrutura (PENNEC; DJAFARI-ROUHANI, 2016).

Um caso específico deste tipo de estruturas de Bragg, é a condição de $\frac{1}{4}$ de comprimento de onda, que consiste na aplicação de camadas que possuem espessura igual a um quarto do comprimento de onda no qual se deseja máxima refletividade (COTTA, 2004 apud LEITE, 2013). Nesta pesquisa utilizou-se de camadas periódicas cujas espessuras correspondem a um quarto do comprimento da onda sonora incidente.

$$d = \frac{\lambda_0}{4} \quad (3.77)$$

onde λ_0 é o comprimento de onda central.

Leite (2013) cita ainda que devido às interferências construtivas que afetam as reflexões de cada camada para este comprimento de onda específico, esta construção permite produzir, de modo proporcional a quantidade de pares de camadas periódicas e o contraste das propriedades elásticas destas, espelhos com alta refletividade.

As demonstrações e estudos de cristais fonônicos que tem como base os espelhos de Bragg tem sido mais comuns e tem se expandido em um ritmo ainda mais acelerado nos dias de hoje (MOHAMMADI; ADIBI, 2016). Este fato pode ser justificado pelo fato de que as condições aplicadas intensificam os comportamentos esperados da configuração do cristal, proporcionando, também, maiores funcionalidades aos dispositivos fonônicos.

4 RESULTADOS

Nesta seção, apresentamos os resultados dos espectros de transmissão calculados numericamente de ondas acústicas longitudinais e transversais em um cristal fonônico 1D quasiperiódico.

As estruturas de PnCs, exemplificadas na Figura 7, são compostas por dois materiais sólidos diferentes, chumbo e epóxi, denotados pelas letras *A* e *B*, respectivamente. A escolha dos materiais baseia-se no fato de serem de fácil obtenção e manuseio, podendo assim ser feito um estudo experimental com muito menos dificuldades. O sistema multicamadas é cercado por um terceiro material semi-infinito, alumínio, rotulado como *C*.

Consideramos que as camadas, individualmente, satisfazem a condição de um quarto de comprimento de onda (MARKOS; SOUKOULIS, 2008), pois, de acordo com trabalhos anteriores (STEURER; SUTTER-WIDMER, 2007), esperamos que as correlações de longo alcance, induzidas pelas regras de inflação das sequências substitucionais, façam com que os efeitos quasiperiódicos sejam mais eficazes. Por exemplo, uma vez que a condição de um quarto de comprimento de onda é satisfeita, os resultados apresentarão espectros simétricos em relação à frequência central $f_0 = 10^6$ Hz, neste trabalho (BRANDÃO *et al.*, 2015; SILVA *et al.*, 2019).

Esta condição garante as espessuras $d_j = v_j/(4f_0)$ ($j = A, B$), então fazendo $d_A/v_A = d_B/v_B$. As propriedades mecânicas, as velocidades de onda, assim como as espessuras dos materiais usados na simulação numérica estão listadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Constantes dos materiais considerados neste trabalho.

Material (Símbolo)	Onda (γ)	Chumbo (A)	Epóxi (B)	Alumínio (C)
ρ_j ($\times 10^3$ kg/m ³)		11.4	1.18	2.699
λ_j ($\times 10^{10}$ N/m ²)		3.3	0.443	6.1
μ_j ($\times 10^{10}$ N/m ²)		0.54	0.159	2.5
E_j ($\times 10^{10}$ N/m ²)		1.536	0.435	6.752
v_j ($\times 10^3$ m/s)	<i>p</i>	1.96	2.54	6.413
	<i>s</i>	0.688	1.161	3.043
d_j ($\times 10^{-4}$ m)	<i>p</i>	4.9	6.35	
	<i>s</i>	1.721	2.9	

Fonte: Adaptado de Aly e Mehaney (2019).

A investigação numérica foi realizada para duas situações diferentes: na Seção 4.1, apresentamos o coeficiente de transmissão para ondas normalmente incidentes longitudinais e

transversais; e na Seção 4.2, apresentamos a transmissão para ondas incidentes oblíquas. Em ambos os casos, os resultados para sequências de Fibonacci espelhadas simétricas e antissimétricas são comparados com a sequência de Fibonacci convencional.

4.1 Caso de Incidência Normal

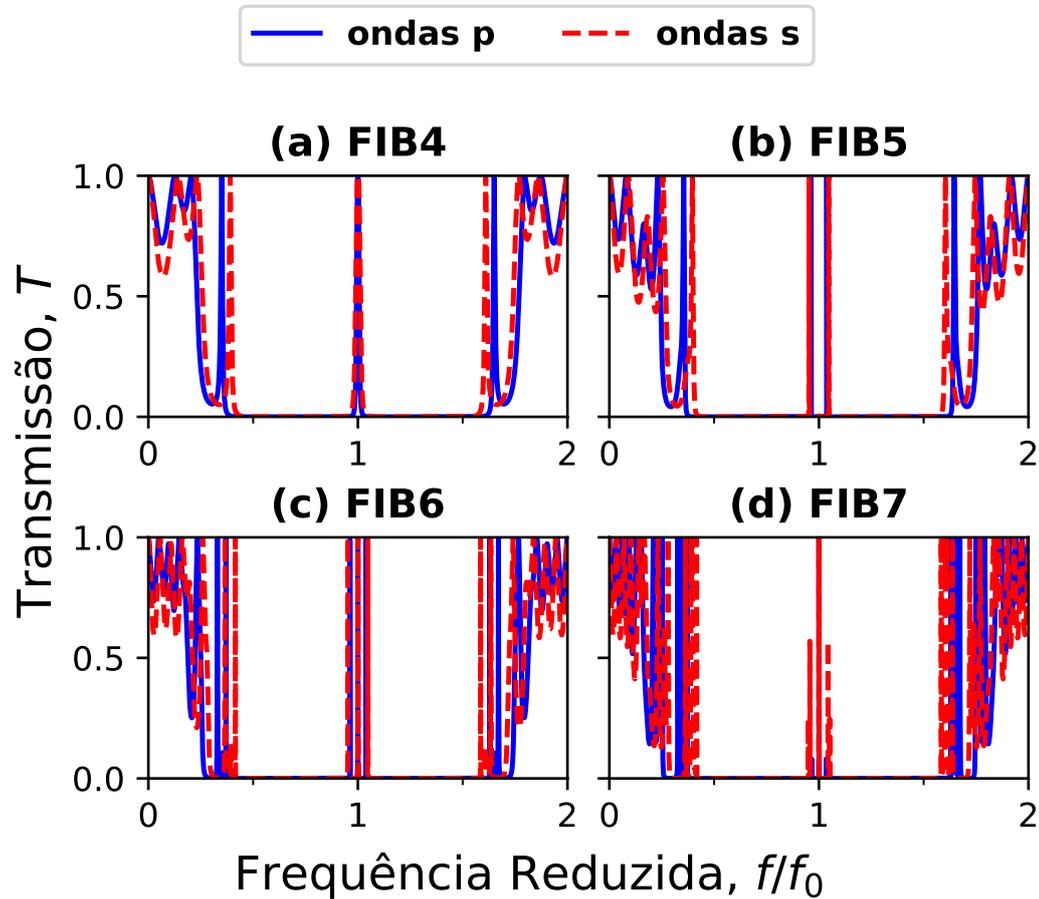
Os resultados obtidos para ondas acústicas normalmente incidentes em uma estrutura Fibonacci convencional são mostrados na Figura 11 para: (a) quarta, (b) quinta, (c) sexta e (d) sétima gerações, nela plotamos a transmissão T em função da frequência reduzida f/f_0 . O caso de incidência normal é importante porque os resultados mostram apenas os efeitos de sequência substitucional, geração e tipos de ondas (s ou p). Ao longo desta seção, as linhas sólidas azuis e tracejadas vermelhas significam ondas longitudinais (ou p) e transversais (ou s), respectivamente.

A partir desta figura, pode-se observar que a transmissão para as ondas p e s são similares por conta da constante de Lamé λ ser menor que o coeficiente do Poisson ν (ver Tabela 1) e, conseqüentemente, por conta de que das Equações 3.5 e 3.6, a velocidade da onda longitudinal é apenas cerca de metade da velocidade da onda transversal.

Ainda da Figura 11, em todas as gerações consideradas, notamos o surgimento de uma banda fonônica proibida larga, com frequências de borda de, aproximadamente, 0,5 a 1,5, que têm aplicações muito importantes em materiais com bandas proibidas muito largas para frequências da ordem de MHz (MARTÍNEZ *et al.*, 2021). Além disso, para frequências reduzidas inferiores a 0,5 e superiores a 1,5, têm-se regiões de alta probabilidade para propagação de ondas, ou seja, são bandas permitidas.

Para frequências reduzidas em torno do intervalo médio ou frequência central $f/f_0 = 1$, pode-se notar a presença de picos de transmissão muito localizados, especialmente para a quarta e sétima gerações, rótulos (a) e (d), respectivamente, que apresentam transmissão máxima. Para a sexta e sétima geração, os rótulos (c) e (d), respectivamente, outros dois picos de transmissão aparecem e uma estrutura cujos espectros de transmissão podem ter aplicações em filtros acústicos (LEE; JEON, 2020).

Figura 11 – Transmissão T em função da frequência reduzida f/f_0 para incidência normal em um 1D-PnQC com arranjo baseado em multicamadas quasiperiódicas de Fibonacci convencional para: (a) quarta, (b) quinta, (c) sexta e (d) sétima geração. As linhas sólidas azuis e vermelhas tracejadas significam ondas longitudinais (ou p) e transversais (ou s), respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para estruturas de Fibonacci espelhadas simétricas, os resultados da transmissão de ondas acústicas são mostrados na Figura 12. Como na Figura 11, o surgimento de picos de transmissão em torno da frequência central $f/f_0 = 1$ também é observado, mas, aqui, a maioria dos picos tem alto coeficiente de transmissão. Um espectro muito interessante é observado na Figura 12(a), que é a quarta geração, e apresenta três picos bem espaçados e de transmitância máxima ($T = 1,0$) em torno da frequência reduzida 1,0, situação ideal para aplicações de filtros. Também como ocorreu na sequência convencional de Fibonacci, a banda proibida está localizada em uma faixa de frequência reduzida de 0,5 a 1,5, e bandas permitidas para $f/f_0 < 0,5$ e $f/f_0 > 1,5$.

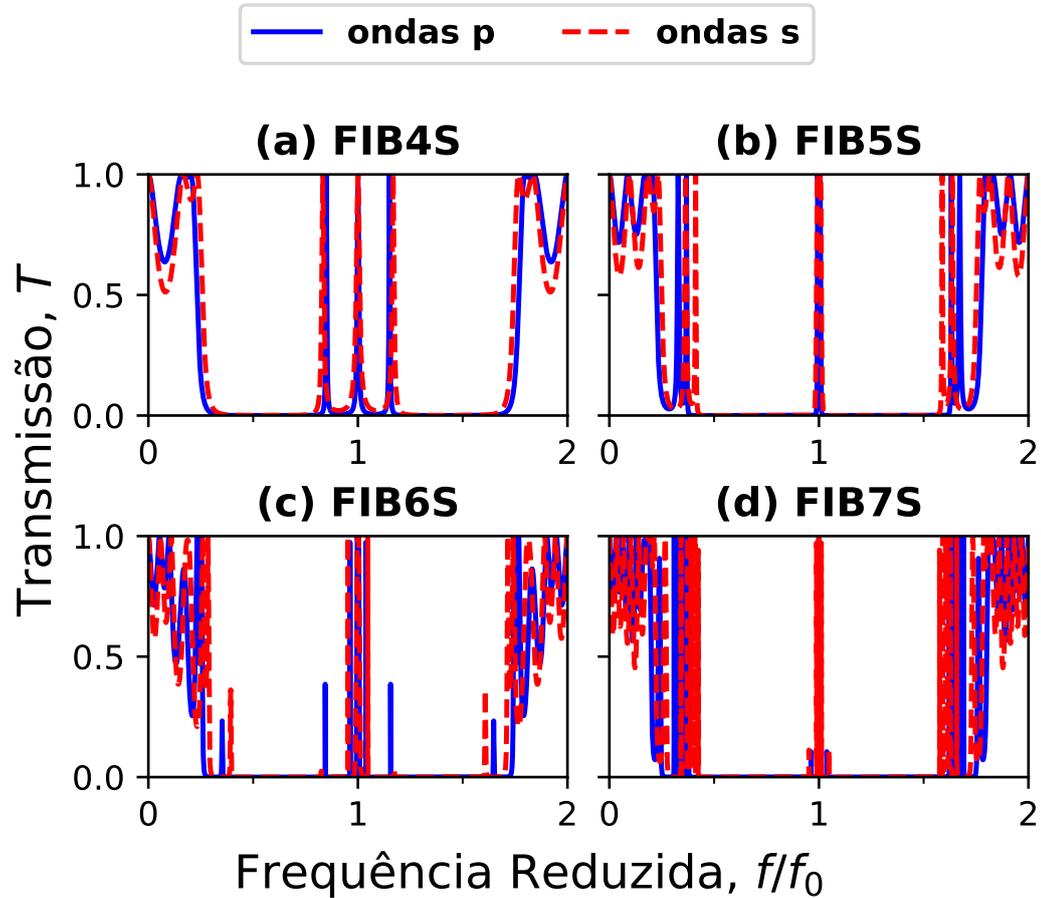
Para a quinta e sexta gerações, rótulos (b) e (c), respectivamente, o pico central de transmissão tem valor máximo, ao contrário do que acontecia na sequência convencional, pois as

duas camadas B no meio da estrutura funcionam como um camada defeituosa (ver Figura 6). Já para a sexta e sétima gerações, rótulos (c) e (d), respectivamente, os espectros de transmissão são bastante semelhantes, apresentando um pico central em torno da frequência reduzida 1,0 e mais dois picos menores.

Os resultados para 1D-PnQCs de acordo com a sequência antissimétrica de Fibonacci são apresentados na Figura 13. Com exceção da quinta geração, rótulo (b), pode-se observar que o pico de transmissão, nos rótulos (a) e (d), ou picos, no rótulo (c), surgem em torno da frequência central $f/f_0 = 1$. Mas, na Figura 13(d), o pequeno pico de transmissão no meio da lacuna aparece apenas para ondas transversais.

Ao contrário da Figura 12(a), uma estrutura com múltiplos picos não é encontrada na sequência antissimétrica. Também é notado que os picos de transmissão no caso simétrico são, em geral, maiores do que no caso antissimétrico. Novamente, a região da banda larga proibida é a mesma que nas sequências convencionais e simétricas: a faixa de frequência reduzida é de 0,5 a 1,5.

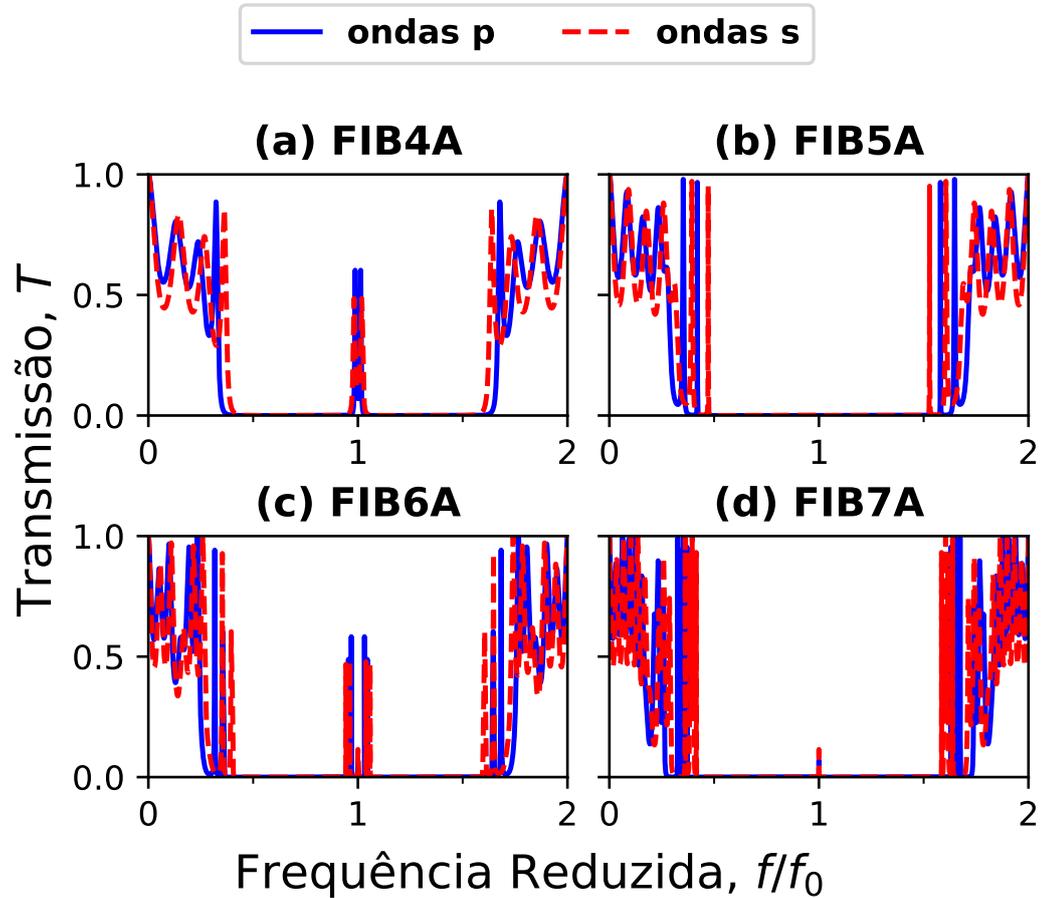
Figura 12 – Assim como na Figura 11, mas para sequência de Fibonacci espelhada simétrica.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Esses picos mostram a existência de estados localizados (HLADKY-HENNION; BILLY, 2007; CASTRO-ARCE *et al.*, 2010; CASTRO-ARCE *et al.*, 2018), que têm aplicações extremamente importantes no *design* de filtros (BARKAT; MAMRI, 2018; LEE; JEON, 2020), filtros polarizadores (ZHU *et al.*, 2010), portas de demultiplexação de comprimento de onda (BENCHABANE *et al.*, 2005), ressonadores (ZHOU *et al.*, 2012; YU *et al.*, 2017; BELI *et al.*, 2018) e modos topologicamente protegidos (MOUSAVI *et al.*, 2015; KIM *et al.*, 2017).

Figura 13 – Assim como na Figura 11, mas para sequência de Fibonacci espelhada antissimétrica.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A presença desses picos de transmissão está relacionada a uma das propriedades mais interessantes das sequências quasiperiódicas: criar modos de propagação em regiões de banda proibida sem a necessidade de introduzir defeitos na estrutura (COSTA; VASCONCELOS, 2013). Este é um comportamento mais comumente obtido através da aplicação de camadas defeituosas na composição da estrutura cristalina (ALY *et al.*, 2019; KHATEIB *et al.*, 2020; MEHANEY; AHMED, 2020).

Este fenômeno, onde é possível simular a interferência na transmissão das ondas de forma semelhante ao uso de um terceiro material na construção do quasicristal, deve-se ao fato de que os arranjos baseados na sequência de Fibonacci com simetria espelhada causaram regiões de frequência localizadas dentro das regiões de banda proibida (COELHO *et al.*, 2010). Como consequência, sequências de pelo menos duas vezes a espessura de uma única camada são criadas rotineiramente e são interrompidas por outra camada, criando o mesmo efeito que ao adicionar uma camada de defeito. Ora, é interessante notar que, apesar do maior grau de

desordem, esse efeito também pode ser observado em estruturas antissimétricas, embora com menores valores de transmissão.

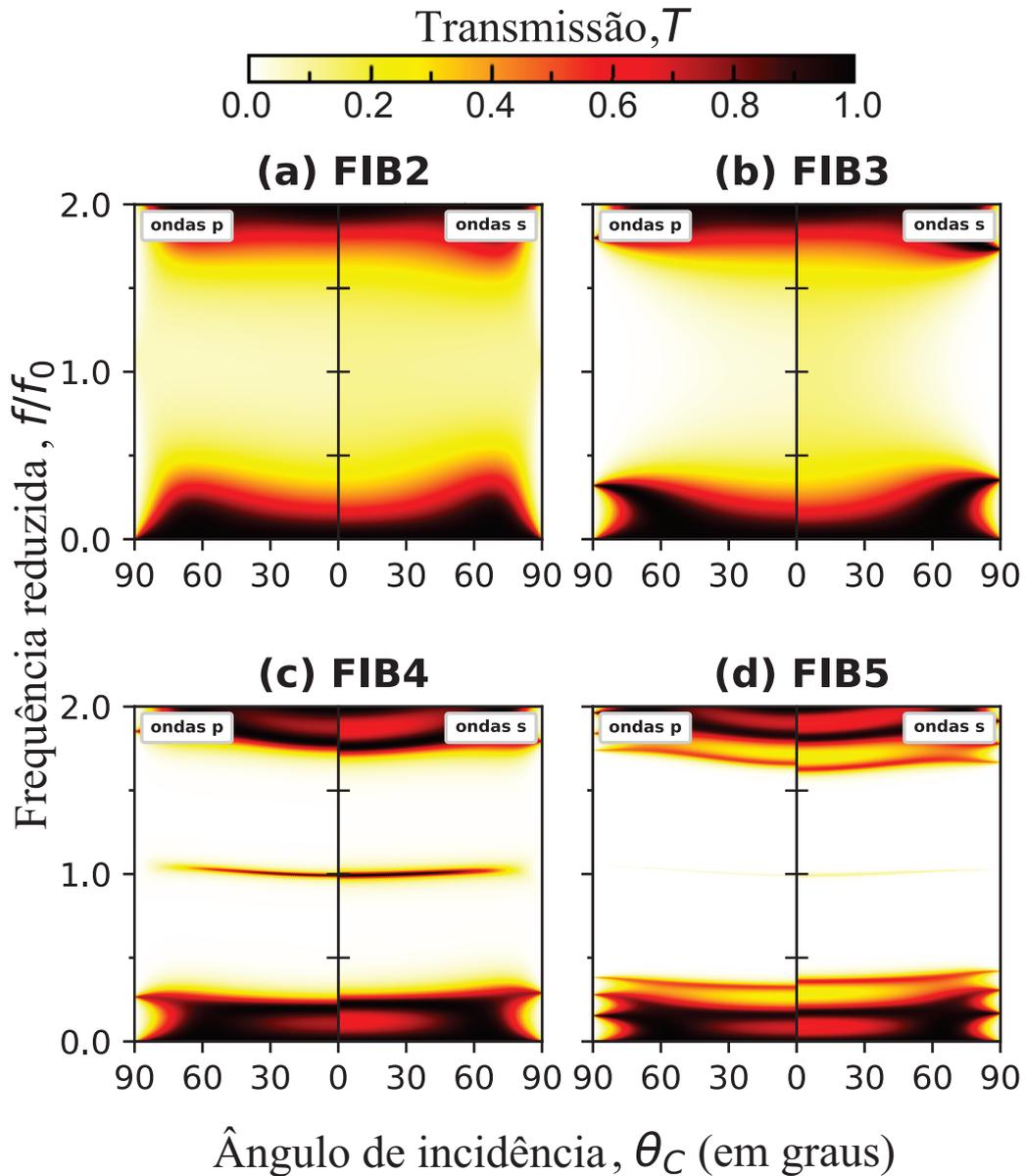
4.2 Caso de Incidência Oblíqua

A fim de investigar a influência do ângulo de incidência na propagação de ondas mecânicas em 1D-PnQCs, apresentamos gráficos de superfície do coeficiente de transmissão T em função da frequência reduzida f/f_0 e do ângulo de incidência θ_C . A cor branca (preta) no mapa de cores significa transmissão 0 (1).

Os resultados para sequências de Fibonacci convencionais e espelhadas simétricas e antissimétricas são apresentados nas Figuras 14, 15 e 16, respectivamente. Para todas essas figuras e para um determinado rótulo, a transmissão para ondas longitudinais (ou p) e transversais (ou s) são plotadas à esquerda e à direita, respectivamente. Além disso, nos rótulos (a), (b), (c) e (d), plotamos os espectros para a segunda, terceira, quarta e quinta gerações.

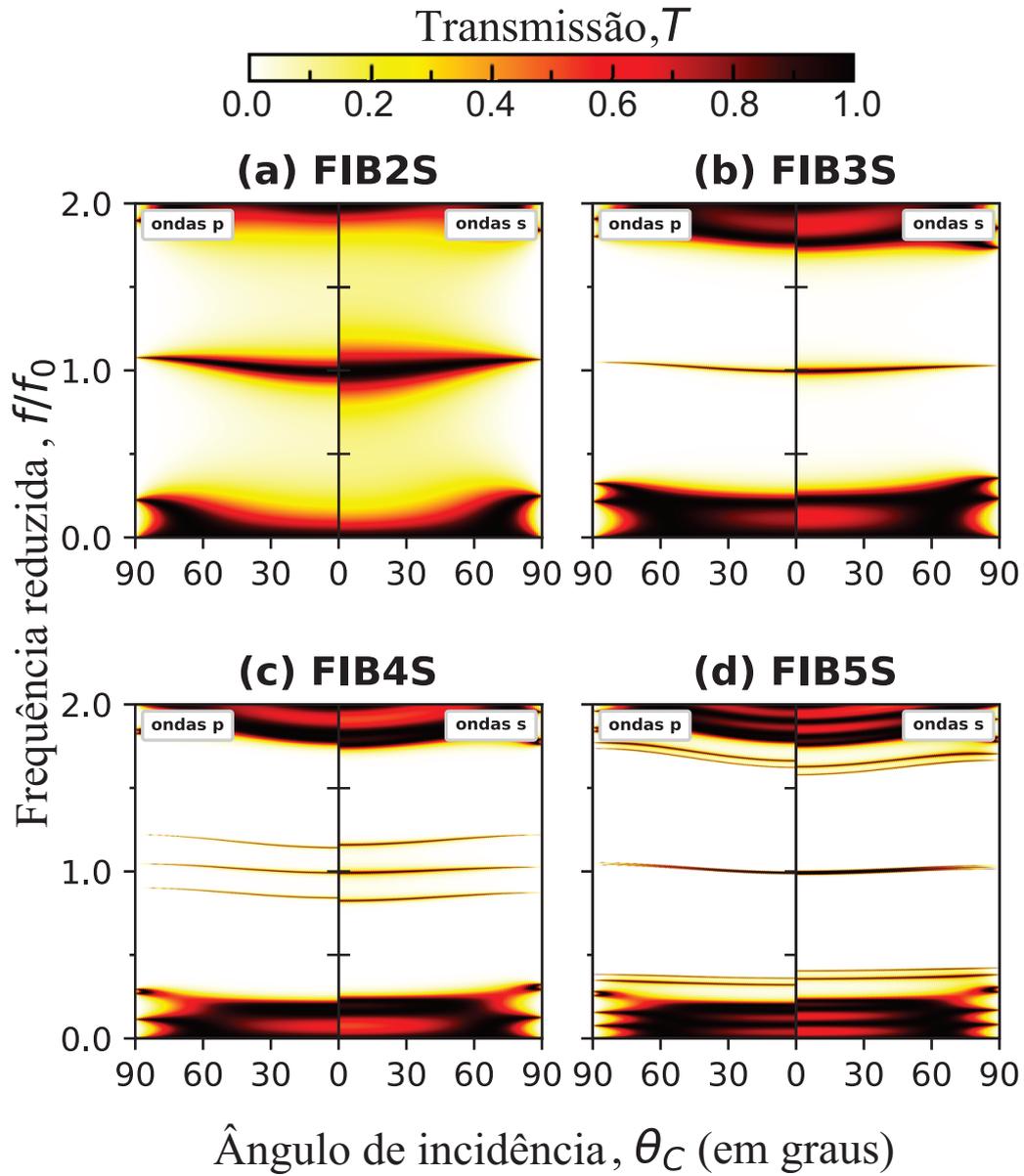
Em geral, pode-se observar que o amplo PBG é fortemente afetado pelo ângulo de incidência. Como esperado, as bandas de transmissão desaparecem à medida que o ângulo de incidência θ_C aumenta, e, conseqüentemente, a componente paralela do vetor de onda k_x aumentam. Além disso, para todas as sequências investigadas, observamos que a transmissão para o caso antissimétrico é menor devido ao maior grau de desordem que esta estrutura apresenta, e proporciona uma propriedade que pode ser explorada no desenvolvimento de isolantes acústicos (XIA *et al.*, 2017; YU *et al.*, 2019; LI *et al.*, 2021).

Figura 14 – Transmitância (T) em função da frequência reduzida f/f_0 e do ângulo de incidência θ_C em um 1D-PnQCs com arranjo baseado na multicamada quasiperiódica de Fibonacci convencional para: (a) segunda, (b) terceira, (c) quarta e (d) quinta gerações.



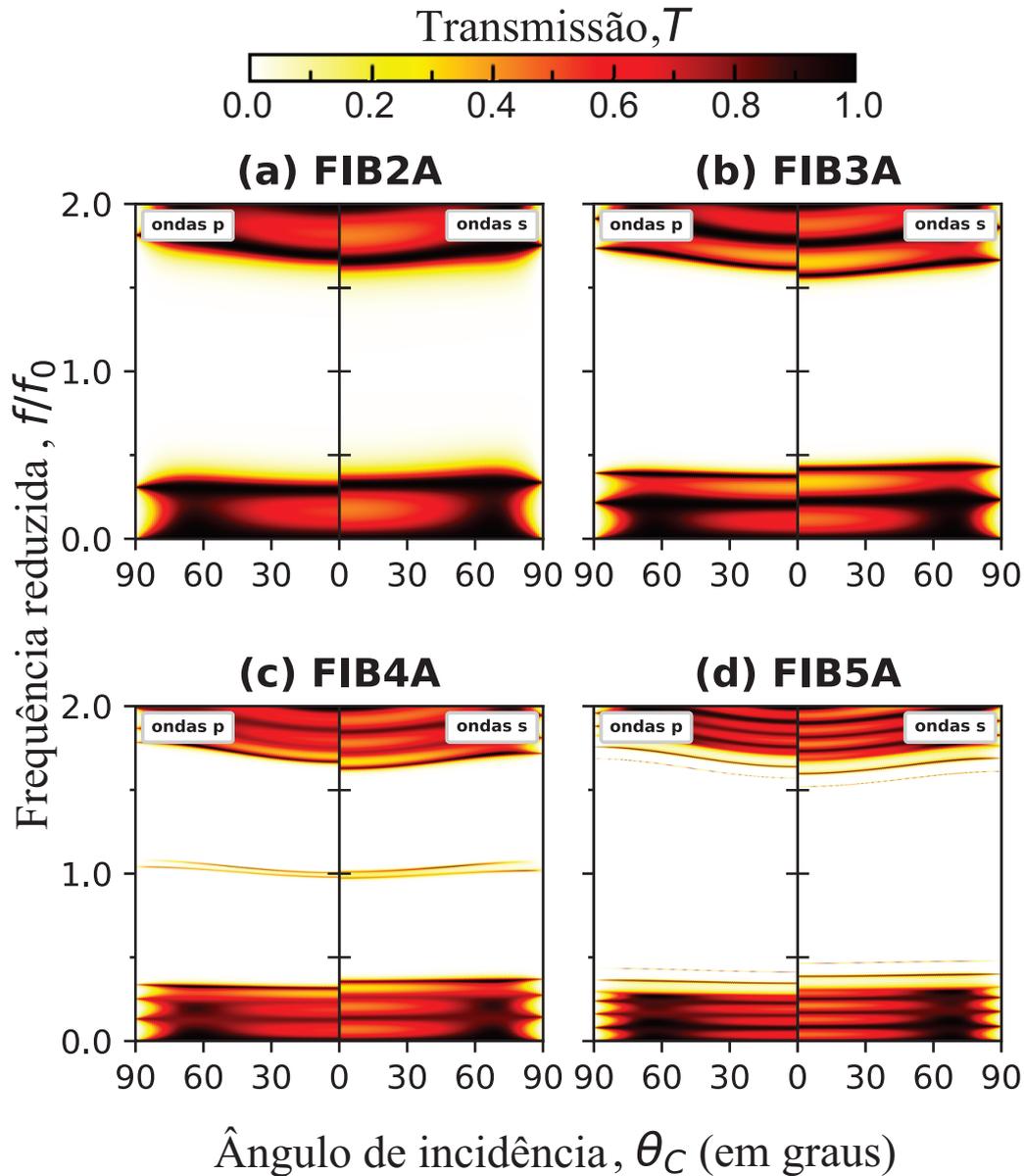
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 15 – Assim como na Figura 14, mas para sequência de Fibonacci espelhada simétrica.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 16 – Assim como na Figura 14, mas para sequência de Fibonacci espelhada antissimétrica.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nas Figuras 14(c), 15(c) e 16(c), pode-se notar os picos de transmissão em torno da frequência central $f/f_0 = 1$ que, em geral, não se apresenta como sendo fortemente afetado pelo ângulo de incidência. Do ponto de vista das aplicações, a situação mais interessante está presente na Figura 15(c), que é a quarta geração da sequência simétrica e mostra os três picos bem definidos, que podem ser explorados em avanços no *design* dos filtros.

Finalmente, mas não menos importante, temos que, à medida que o número de geração aumenta, a probabilidade de transmissão da onda vai a zero e as regiões de bandas proibidas tornam-se bem definidas porque o número de camadas na estrutura também aumenta.

Esse comportamento pode ser melhor observado em estruturas antissimétricas devido à maior desordem neste tipo de arranjo. Isso pode ser notado pela súbita mudança de cor do preto para o branco. Nos gráficos de segunda geração, Figuras 14(a), 15(a) e 16(a), a mudança de cor é mais suave.

Também é importante notar que o comportamento de auto-similaridade, que é uma assinatura de um espectro fractal e encontrado em várias outras sequências substitucionais (COELHO *et al.*, 2010; COELHO *et al.*, 2011; COSTA; VASCONCELOS, 2013; COSTA *et al.*, 2017), não é observado em todas as sequências investigadas, mesmo para o Fibonacci convencional. Isso mostra que um espectro auto-similar tem origem não apenas na sequência substitucional, mas também no modelo físico do sistema.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Em resumo, usamos o método da matriz de transferência para estudar a propagação de ondas mecânicas em cristais fonônicos unidimensionais quasiperiódicos onde as multicamadas são compostas de dois tipos de blocos sólidos, a saber, chumbo (bloco A) e epóxi (bloco B), e construídos de acordo com as sequências de Fibonacci convencional e espelhadas simétrica e antissimétrica. Calculamos numericamente o coeficiente de transmissão para investigar a propagação de dois modos distintos, a saber, longitudinal (ou p) e transversal (ou s), os efeitos do ângulo de incidência e a quasiperiodicidade das sequências substitucionais no sistema físico.

Para ondas que incidem normalmente às superfícies das camadas, os resultados mostraram que a transmissão para as ondas p e s são similares porque a velocidade da onda para o modo longitudinal é apenas cerca da metade da velocidade da onda transversal. Os espectros também apresentam o surgimento de uma larga banda fonônica proibida, com frequências de borda de, aproximadamente, 0,5 a 1,5 MHz, e que têm aplicações muito importantes em materiais com bandas proibidas muito largas, principalmente aqueles que trabalham em frequências na faixa de MHz. As bandas permitidas estão localizadas em regiões de frequência abaixo de 0,5 MHz e acima de 1,5 MHz, mostrando que o sistema também pode ser muito útil para dispositivos ultrassônicos na faixa de poucos MHz.

Quando se considera o caso da incidência oblíqua, nota-se uma maior influência do ângulo de incidência apenas para frequências superiores a 1 MHz, com maior ênfase no fato de que, à medida que o ângulo de incidência aumenta, pode-se observar um deslocamento para frequências mais altas da borda superior da banda proibida e na banda permitida superior.

Pode-se notar também o surgimento de picos de transmissão em torno da frequência central $f_0 = 1$ MHz que, em geral, não apresentam ser fortemente afetados pelo ângulo de incidência e tais sistemas podem ser explorados no desenvolvimento de filtros acústicos, modos localizados, ressonadores, entre outras aplicações tecnológicas muito interessantes. Em relação às aplicações para filtros acústicos, de todas as estruturas consideradas, a quarta geração da sequência de Fibonacci simetricamente espelhada, Figura 12(a), mostra-se como sendo o arranjo mais adequado por apresentar três picos de alta transmissão e bem espaçados.

A presença desses picos de transmissão está relacionada a uma das propriedades mais fascinantes das sequências quasiperiódicas: criar modos de propagação em regiões de banda proibida sem a necessidade de introduzir defeitos na estrutura. Verificamos também que a presença de simetria e antissimetria de espelho no crescimento da estrutura quasiperiódica é

capaz de amplificar sua propriedade de gerar modos localizados.

A utilização de outros materiais e de outros métodos de simulação computacional, além de estruturas arrançadas de acordo com outras sequências substitucionais e quasicristais em 2D e 3D são sugestões para trabalhos futuros. É importante notar que todos os resultados físicos apresentados neste trabalho podem ser reproduzidos experimentalmente (HLADKY-HENNION; BILLY, 2007; WALKER *et al.*, 2014; KHATEIB *et al.*, 2020), e esperamos que esses resultados surpreendentes possam incentivar grupos de pesquisa experimental a investigá-los.

REFERÊNCIAS

- ALAMI, M.; QUOTANE, I.; BOUDOUTI, E. E.; DJAFARI-ROUHANI, B. Transverse acoustic waves in piezoelectric-metallic fibonacci multilayers. **Materials Today: Proceedings**, Elsevier, v. 13, p. 541–548, 2019.
- ALBUQUERQUE, E. L.; COTTAM, M. G. **Polaritons in periodic and quasiperiodic structures**. [S. l.]: Elsevier, 2004.
- ALY, A.; MEHANEY, A. Phononic crystals and thermal effects. In: _____. [S. l.: s. n.], 2019. ISBN 978-1-83962-266-3.
- ALY, A. H.; MEHANEY, A. Enhancement of phononic band gaps in ternary/binary structure. **Physica B: Condensed Matter**, Elsevier, v. 407, n. 21, p. 4262–4268, 2012.
- ALY, A. H.; MEHANEY, A. Enhancement of phononic band gaps in ternary/binary structure. **Physica B: Condensed Matter**, v. 407, n. 21, p. 4262, 2012. ISSN 0921-4526. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921452612006990>.
- ALY, A. H.; NAGATY, A.; KHALIFA, Z. Propagation of acoustic waves in 2d periodic and quasiperiodic phononic crystals. **International Journal of Modern Physics B**, World Scientific, v. 31, n. 21, p. 1750147, 2017.
- ALY, A. H.; NAGATY, A.; KHALIFA, Z. Piezoelectric material and one-dimensional phononic crystal. **Surface Review and Letters**, World Scientific, v. 26, n. 02, p. 1850144, 2019.
- ALY, A. H.; NAGATY, A.; KHALIFA, Z. Piezoelectric material and one-dimensional phononic crystal. **Surface Review and Letters**, v. 26, n. 02, p. 1850144, 2019.
- ASSOUAR, B.; SAINIDOU, R.; PSAROBAS, I. The three-dimensional phononic crystals. In: **Phononic Crystals**. [S. l.]: Springer, 2016. p. 51–83.
- AYNAOU, H.; BOUDOUTI, E. E.; DJAFARI-ROUHANI, B.; AKJOUJ, A.; VELASCO, V. Propagation and localization of acoustic waves in fibonacci phononic circuits. **Journal of Physics: Condensed Matter**, IOP Publishing, v. 17, n. 27, p. 4245, 2005.
- BARKAT, O.; MAMRI, B. Numerical method for a one dimensional defective photonic crystal selective filters. **Electric Electron Tech Open Acc J**, v. 1, n. 2, p. 83, 2018.
- BELI, D.; ARRUDA, J.; RUZZENE, M. Wave propagation in elastic metamaterial beams and plates with interconnected resonators. **International Journal of Solids and Structures**, v. 139-140, p. 105, 2018. ISSN 0020-7683.
- BENCHABANE, S.; KHELIF, A.; CHOUJAA, A.; DJAFARI-ROUHANI, B.; LAUDE, V. Interaction of waveguide and localized modes in a phononic crystal. **Europhysics Letters (EPL)**, IOP Publishing, v. 71, n. 4, p. 570, aug 2005.
- BOUDOUTI, E. H. E.; DJAFARI-ROUHANI, B. One-dimensional phononic crystals. In: **Acoustic metamaterials and phononic crystals**. [S. l.]: Springer, 2013. p. 45–93.
- BRANDÃO, E.; COSTA, C.; VASCONCELOS, M.; ANSELMO, D.; MELLO, V. Octonacci photonic quasicrystals. **Optical Materials**, v. 46, p. 378, 2015. ISSN 0925-3467. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925346715002797>.

- CASTRO-ARCE, L.; MANZANARES-MARTÍNEZ, B.; RAMOS-MENDIETA, F. Localized sagittal modes of variable transverse and longitudinal components in one-dimensional phononic crystals. **Journal of Applied Physics**, v. 107, n. 3, p. 033515, 2010.
- CASTRO-ARCE, L.; MOLINAR-T., M. E.; CAMPOS-G., J. C.; FIGUEROA-N., C. Area of reflection of longitudinal waves in multilayer fibonacci arrangements. **Results in Physics**, v. 11, p. 501, 2018. ISSN 2211-3797.
- COELHO, I.; VASCONCELOS, M.; BEZERRA, C. Effects of mirror symmetry on the transmission fingerprints of quasiperiodic photonic multilayers. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 374, n. 13-14, p. 1574–1578, 2010.
- COELHO, I. P. Excitações elementares em super-redes quasiperiódicas com simetria espelho. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2010.
- COELHO, I. P.; VASCONCELOS, M. S. d.; BEZERRA, C. G. Transmission fingerprints in quasiperiodic magnonic multilayers. **Journal of magnetism and magnetic materials**, Elsevier, v. 323, n. 23, p. 3162–3167, 2011.
- COSTA, C. H.; PEREIRA, L. F. C.; BEZERRA, C. G. Light propagation in quasiperiodic dielectric multilayers separated by graphene. **Phys. Rev. B**, American Physical Society, v. 96, p. 125412, Sep 2017. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.96.125412>.
- COSTA, C. H. O.; VASCONCELOS, M. S. Band gaps and transmission spectra in generalized fibonacci $\sigma(p, q)$ one-dimensional magnonic quasicrystals. **Journal of Physics: Condensed Matter**, IOP Publishing, v. 25, n. 28, p. 286002, jun 2013.
- DEYMIER, P. A. **Acoustic metamaterials and phononic crystals**. [S. l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 173.
- DEYMIER, P. A. Introduction to phononic crystals and acoustic metamaterials. In: **Acoustic metamaterials and phononic crystals**. [S. l.]: Springer, 2013. p. 1–12.
- HEDAYATRASA, S. Background and research scope. In: **Design Optimisation and Validation of Phononic Crystal Plates for Manipulation of Elastodynamic Guided Waves**. [S. l.]: Springer, 2018. p. 1–12.
- HEDAYATRASA, S. Design optimisation and validation of phononic crystal plates for manipulation of elastodynamic guided waves. Springer, 2018.
- HLADKY-HENNION, A.-C.; BILLY, M. d. Experimental validation of band gaps and localization in a one-dimensional diatomic phononic crystal. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 122, n. 5, p. 2594, 2007.
- HUANG, J.; LIU, Y.; LI, Y. Trees as large-scale natural phononic crystals: Simulation and experimental verification. **International Soil and Water Conservation Research**, Elsevier, v. 7, n. 2, p. 196–202, 2019.
- KHATEIB, F.; MEHANEY, A.; ALY, A. H. Glycine sensor based on 1d defective phononic crystal structure. **Optical and Quantum Electronics**, Springer, v. 52, n. 11, p. 1–16, 2020.
- KHELIF, A.; ADIBI, A. **Phononic crystals**. [S. l.]: Springer, 2015.

- KIM, I.; IWAMOTO, S.; ARAKAWA, Y. Topologically protected elastic waves in one-dimensional phononic crystals of continuous media. **Applied Physics Express**, IOP Publishing, v. 11, n. 1, p. 017201, dec 2017.
- KRIEGEL, I.; SCOTOGNELLA, F. Three material and four material one-dimensional phononic crystals. **Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures**, Elsevier, v. 85, p. 34–37, 2017.
- KUSHWAHA, M. S.; HALEVI, P.; DOBRZYNSKI, L.; DJAFARI-ROUHANI, B. Acoustic band structure of periodic elastic composites. **Physical review letters**, APS, v. 71, n. 13, p. 2022, 1993.
- LEE, K.; JEON, W. Hierarchical phononic crystals for filtering multiple target frequencies of ultrasound. **Sci. Rep.**, v. 10, p. 8070, May 2020.
- LEITE, H. D. **Propagação da Luz em Meios Periódicos Unidimensionais: Cristais Fotônicos**. [S. l.]: Universidade Federal do Espírito Santo, 2013.
- LI, J.; LIU, J.; BARONETT, S. A.; LIU, M.; WANG, L.; LI, R.; CHEN, Y.; LI, D.; ZHU, Q.; CHEN, X.-Q. Computation and data driven discovery of topological phononic materials. **Nat. Commun.**, v. 12, p. 1204, Feb 2021.
- LU, M.-H.; FENG, L.; CHEN, Y.-F. Phononic crystals and acoustic metamaterials. **Materials today**, Elsevier, v. 12, n. 12, p. 34–42, 2009.
- MALDOVAN, M.; THOMAS, E. L. **Periodic Materials and Interference Lithography: For Photonics, Phononics and Mechanics**. 1. ed. [S. l.]: Wiley-VCH, 2009. ISBN 9783527625406.
- MARKOS, P.; SOUKOULIS, C. M. **Wave propagation: from electrons to photonic crystals and left-handed materials**. [S. l.]: Princeton University Press, 2008.
- MARTÍNEZ, J. A. I.; MOUGHAMES, J.; ULLIAC, G.; KADIC, M.; LAUDE, V. Three-dimensional phononic crystal with ultra-wide bandgap at megahertz frequencies. **Applied Physics Letters**, v. 118, n. 6, p. 063507, 2021.
- MEHANEY, A.; AHMED, A. M. Theoretical design of porous phononic crystal sensor for detecting CO₂ pollutions in air. **Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures**, v. 124, p. 114353, 2020. ISSN 1386-9477.
- MOHAMMADI, S.; ADIBI, A. Phononic crystal membranes (slabs or plates). In: **Phononic Crystals**. [S. l.]: Springer, 2016. p. 109–143.
- MOHAMMADI, S.; KHELIF, A.; ADIBI, A. Future prospects of phononic crystals and phononic metamaterials. In: **Phononic Crystals**. [S. l.]: Springer, 2016. p. 239–245.
- MOUSAVI, S.; KHANIKAEV, A.; WANG, Z. Topologically protected elastic waves in phononic metamaterials. **Nat Commun.**, v. 6, p. 8682, Nov 2015.
- PENNEC, Y.; DJAFARI-ROUHANI, B. Fundamental properties of phononic crystal. In: **Phononic Crystals**. [S. l.]: Springer, 2016. p. 23–50.
- ROSE, J. L. **Ultrasonic Guided Waves in Solid Media**. 1. ed. [S. l.]: Cambridge University Press, 2014. ISBN 9781107048959.

- SÁNCHEZ-DEHESA, J.; KROKHIN, A. Introduction to acoustics of phononic crystals. homogenization at low frequencies. In: **Phononic Crystals**. [S. l.]: Springer, 2016. p. 1–21.
- SIGALAS, M.; ECONOMOU, E. N. Band structure of elastic waves in two dimensional systems. **Solid state communications**, Elsevier, v. 86, n. 3, p. 141–143, 1993.
- SILVA, E.; VASCONCELOS, M.; COSTA, C.; ANSELMO, D.; MELLO, V. Effects of graphene on light transmission spectra in dodecanacci photonic quasicrystals. **Optical Materials**, v. 98, p. 109450, 2019. ISSN 0925-3467. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925346719306706>.
- STEURER, W.; SUTTER-WIDMER, D. Photonic and phononic quasicrystals. **Journal of Physics D: Applied Physics**, IOP Publishing, v. 40, n. 13, p. R229, jun 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0022-3727/40/13/r01>.
- SUKHOVICH, A.; PAGE, J.; VASSEUR, J.; ROBILLARD, J.; SWINTECK, N.; DEYMIER, P. A. 2d–3d phononic crystals. In: **Acoustic Metamaterials and Phononic Crystals**. [S. l.]: Springer, 2013. p. 95–157.
- WALKER, E.; REYES, D.; ROJAS, M. M.; KROKHIN, A.; WANG, Z.; NEOGI, A. Tunable ultrasonic phononic crystal controlled by infrared radiation. **Applied Physics Letters**, v. 105, n. 14, p. 143503, 2014.
- WANG, Y.; SONG, W.; SUN, E.; ZHANG, R.; CAO, W. Tunable passband in one-dimensional phononic crystal containing a piezoelectric 0.62 pb (mg1/3nb2/3) o3–0.38 pbtio3 single crystal defect layer. **Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures**, Elsevier, v. 60, p. 37–41, 2014.
- XIA, B.-Z.; LIU, T.-T.; HUANG, G.-L.; DAI, H.-Q.; JIAO, J.-R.; ZANG, X.-G.; YU, D.-J.; ZHENG, S.-J.; LIU, J. Topological phononic insulator with robust pseudospin-dependent transport. **Phys. Rev. B**, American Physical Society, v. 96, p. 094106, Sep 2017.
- XIAO, Y.; WEN, J.; YU, D.; WEN, X. Flexural wave propagation in beams with periodically attached vibration absorbers: band-gap behavior and band formation mechanisms. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 332, n. 4, p. 867–893, 2013.
- YU, X.; LU, Z.; CUI, F.; CHENG, L.; CUI, Y. Tunable acoustic metamaterial with an array of resonators actuated by dielectric elastomer. **Extreme Mechanics Letters**, v. 12, p. 37, 2017. ISSN 2352-4316. *Frontiers in Mechanical Metamaterials*.
- YU, Z.; REN, Z.; LEE, J. Phononic topological insulators based on six-petal holey silicon structures. **Sci. Rep.**, v. 9, p. 1805, Feb 2019.
- ZHANG, H.-b.; CHEN, J.-j.; HAN, X. Lamb wave band gaps in a homogenous plate with periodic tapered surface. **Journal of Applied Physics**, American Institute of Physics, v. 112, n. 5, p. 054503, 2012.
- ZHENG, M.; WEI, P. jun. Band gaps of elastic waves in 1-d phononic crystals with imperfect interfaces. **International Journal of Minerals, Metallurgy and Materials**, v. 16, n. 5, p. 608, 2009. ISSN 1674-4799. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1674479909601059>.

ZHOU, X.; LIU, X.; HU, G. Elastic metamaterials with local resonances: an overview. **Theoretical and Applied Mechanics Letters**, v. 2, n. 4, p. 041001, 2012. ISSN 2095-0349.

ZHU, X.; ZOU, X.; LIANG, B.; CHENG, J. One-way mode transmission in one-dimensional phononic crystal plates. **Journal of Applied Physics**, v. 108, n. 12, p. 124909, 2010.