



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL: ESTRUTURAS E

CONSTRUÇÃO CIVIL

MESTRADO EM ENGENHARIA CIVIL: ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

SAMIR PARENTE AUAD

**ANÁLISE ISOGOMÉTRICA DE CASCAS CILÍNDRICAS DE MATERIAL COM
GRADAÇÃO FUNCIONAL**

FORTALEZA

2019

SAMIR PARENTE AUAD

ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA DE CASCAS CILÍNDRICAS DE MATERIAL COM
GRADAÇÃO FUNCIONAL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Evandro Parente Junior

Coorientador: Prof. João Batista Marques de Sousa Júnior

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- A91a Auad, Samir Parente.
Análise Isogeométrica de Cascas Cilíndricas de Material com Gradação Funcional / Samir Parente
Auad. – 2019.
92 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, 2019.
Orientação: Prof. Dr. Evandro Parente Junior.
Coorientação: Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa.
1. Análise Isogeométrica. 2. Cascas Cilíndricas. 3. Teoria de Donnell. 4. Materiais Compósitos. 5. Material com Gradação Funcional. I. Título.

CDD 624.1

SAMIR PARENTE AUAD

ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA DE CASCAS CILÍNDRICAS DE MATERIAL COM
GRADAÇÃO FUNCIONAL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Evandro Parente Junior (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. João Batista Marques de Sousa
Júnior (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profa. Áurea Silva de Holanda
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Frederico Martins Alves da Silva
Universidade Federal do Goiás (UFG)

À minha família, espero sempre honrar nosso nome e poder apoiá-los em todos os momentos dessa vida. Dedico a vocês o meu amor incondicional, a força, paciência e calma que sempre busco cultivar.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e minhas irmãs, pelo amor e apoio que me conduziram até aqui, espero sempre poder honrar o nome de vocês.

Ao meu orientador, Evandro Parente Júnior, pela orientação dada em todos os momentos desses últimos anos, pelos conselhos e apoio, por ser sempre um ser humano e profissional que irá me inspirar e fazer refletir sobre dedicação, profissionalismo e conduta.

Ao meu coorientador, João Batista Marques de Sousa Júnior, pelas contribuições no trabalho e pelos ensinamentos de sala.

A Professora Áurea Silva de Holanda, pela orientação dada nos tempos de graduação, que me conduziram até aqui, pelos ensinamentos e apoio dados ao longo desses mais de 7 anos entre graduação e mestrado. Me sinto muito feliz e honrado por a senhora fazer parte dessa minha caminhada.

Ao Professor Frederico Martins Alves da Silva, pela forma gentil e solícita em aceitar participar da banca examinadora. Aos professores do PEC, pelo aprendizado de sala de aula e pelo convívio dentro e fora dela.

A Jamires Praciano, Pedro Sanderson, Elias Barroso, Bergson Matias, Marina Maia e Juliana Cunha, todos foram fundamentais e muito importantes nessa caminhada, são pessoas muito queridas, as quais quero levar para o resto da vida. Obrigado por todas as conversas, momentos de alegria e por todos os demais instantes em que pude contar com todos vocês.

Aos meus irmãos e irmãs de vida, Renan Carioca, Pedro Victor, Roberto Torquato, Guilherme Braga, Lucas Ramos, Felipe Amon, Matheus Fontenelle, Abigail Domingos, Mariana Câmara, Nayara Almeida e Raina Cândido por todo afeto, companheirismo e apoio desses muitos anos, sem vocês certamente esse caminho não seria o mesmo. Obrigado pela compreensão nas minhas ausências e por sempre me receberem sempre de braços abertos a cada retorno.

Ao Projeto Novo Vestibular, onde encontrei e abracei o caminho da educação, na figura dos meus alunos e de todos com quem convivi ao longo de mais de 3 anos. Em especial ao João Lucas, Vinícius Mesquita, Leonardo Vieira, Sarah Monteiro, Wesley Farias e Paulo Xavier, o afeto que tenho por vocês é infinito. Obrigado por tudo que me ensinaram e por todos os momentos que construímos juntos.

Aos funcionários e meus amigos de laboratório e pós-graduação, pelo convívio dentro e fora do ambiente acadêmico. A todos que contribuíram de forma direta ou indireta neste trabalho e a CAPES pelo suporte financeiro.

“A alegria não chega apenas no encontro do achado, mas faz parte do processo da busca. E ensinar e aprender não pode dar-se fora da procura, fora da boniteza e da alegria.”

(Paulo Freire)

RESUMO

Cascas são estruturas de grande interesse nas engenharias, pois possuem vastos campos de aplicação, os quais podemos citar aplicações civis, aeronáuticas, mecânicas, automobilísticas e navais. Associados aos materiais compósitos, essas estruturas adquirem propriedades melhoradas, como maior rigidez e resistência específica. Dentre os materiais compósitos, merecem destaque os materiais laminados reforçados por fibras e os materiais com gradação funcional. Sob o ponto de vista da engenharia, é fundamental determinar o comportamento das estruturas, como as cascas de materiais compósitos, de forma a projetá-las e utilizá-las de forma econômica e segura. Com esse objetivo, diversas teorias foram propostas, sendo as teorias de cascas cilíndricas consideradas bons modelos de partida para formulações mais complexas. Dentre elas, por sua eficiência e simplicidade, se destaca a teoria não linear de Donnell, sendo objeto de vários estudos. O método escolhido para realizar o estudo foi a análise isogeométrica, uma vez que é um campo recente e aberto a muitas possibilidades, apresentando vantagens como representação exata da geometria do problema e facilidade no refinamento, em especial quando comparado ao MEF. O presente trabalho se propõe a contribuir com o avanço da análise de cascas cilíndricas de MGF sujeitas a carregamentos mecânicos utilizando uma abordagem isogeométrica. Para isso, foi inicialmente desenvolvida uma formulação de elemento finito isoparamétrico baseado na teoria não linear de Donnell adaptada, adicionando-se termos de cisalhamento transversal, implementado no programa FAST. Posteriormente, essa formulação foi estendida para um elemento isogeométrico. As propriedades efetivas dos materiais foram determinadas através de uma rotina externa ao FAST, sendo lida posteriormente como input ao programa. Exemplos da literatura e comparações com software comercial foram realizadas com o intuito de validar a implementação, utilizando refinamentos e diversos esquemas de integração. Em todos os testes o elemento apresentou excelentes resultados, validando a implementação da formulação e da rotina externa para a determinação das propriedades efetivas. Foi proposta uma análise do caminho pós-crítico de painéis cilíndricos MGF sujeitos a carga transversal e a compressão uniaxial. Foram determinados pontos importantes no caminho de equilíbrio. Os resultados confirmam o previsto na literatura, onde a resposta da estrutura MGF se encontra intermediária a respostas de seus constituintes isolados.

Palavras-chave: Análise Isogeométrica. Cascas Cilíndricas. Teoria de Donnell. Materiais Compósitos. Material com Gradação Funcional.

ABSTRACT

Shells are structures of great interest in engineering and present a wide range of applications, among which we can mention civil, aeronautical, mechanical, automotive and naval applications. Associated with composite materials, these structures offer improved properties, such as increased stiffness and specific strength. Among the composite materials, fiber-reinforced laminated materials and functionally graded materials deserve particular attention. From the engineering point of view, it is essential to determine the behaviour of structures, such as the composite shells, in order to provide safe and economical design. For this purpose, several theories have been proposed, being the theories of cylindrical shells considered good starting models for more complex formulations. Among them, due to its efficiency and simplicity, Donnell's nonlinear theory stands out, being the object of several studies. The method chosen to carry out the study was the isogeometric analysis, since this is a recent and open field to many possibilities with great advantages such as the exact representation of the geometry of the problem and the easy refinement, especially when compared to the MEF. The present work aims to contribute to the advancement of the analysis of FGMs cylindrical shells subjected to mechanical loading using an isogeometric approach. To that end, an isoparametric finite element formulation based on Donnell's nonlinear theory was adapted by adding transversal shear terms and implemented in a program named FAST. Thereafter, this formulation was extended to an isogeometric element. The effective properties of the materials were evaluated using an external routine to FAST and later read as input to the program. To validate the implementation, numerical examples found in the literature and results obtained by commercial software were compared to the ones found here use of refinements and different integration schemes. In all tests, the element presented excellent results, validating the implementation of the proposed formulation and the external routine for the effective properties determination. An analysis of the FGMs cylindrical panels subjected to transverse load and uniaxial compression was proposed. The postbuckling response was studied. The results confirm the behaviour predicted in the literature, where the response of the FGM structure is between the responses of its isolated constituents.

Keywords: Isogeometric Analysis. Cylindrical Shells. Donnell's Theory. Composite Materials. Functionally Graded Materials.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Materiais compósitos.	17
Figura 2 – Esquema de Laminação.	19
Figura 3 – Eixos locais e globais da lâmina ortotrópica.	20
Figura 4 – Variação de deformações e tensões ao longo da espessura de acordo com uma teoria de Lâmina Equivalente.	23
Figura 5 – Materiais com Gradação Funcional.	23
Figura 6 – Número de publicações científicas na área de MGF entre os anos de 1980 a 2016.	24
Figura 7 – Resposta ao carregamento térmico.	24
Figura 8 – MGF fabricados com os métodos de metalurgia em pó e processamento por fusão.	26
Figura 9 – Variação da fração de volume ao longo de uma seção.	28
Figura 10 – Sistema de coordenadas de uma casca cilíndrica.	32
Figura 11 – Funções de base <i>B-Splines</i> e suas continuidades no interior dos <i>spans</i> de um vetor de <i>knots</i> $\Xi = [0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5]$	40
Figura 12 – Funções de base <i>B-Splines</i> $p = 2$ e vetor de <i>knots</i> $\Xi = [0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5]$	40
Figura 13 – Refinamento por <i>inserção de knots</i>	41
Figura 14 – Refinamento por <i>elevação de grau</i>	42
Figura 15 – Refinamento <i>k</i>	42
Figura 16 – O efeitos dos pesos e a comparação com curvas NURBS e <i>B-Splines</i> na representação da geometria de uma semicircunferência.	43
Figura 17 – Superfícies NURBS.	44
Figura 18 – Múltiplos <i>patches</i> em placa com geometria complexa.	45
Figura 19 – Rotações cartesianas.	48
Figura 20 – Perda de estabilidade por bifurcação.	52
Figura 21 – Perda de estabilidade por bifurcação.	52
Figura 22 – Caminho pós-crítico de placas de MGF.	54
Figura 23 – Fenômeno <i>snap-through</i>	56
Figura 24 – Comportamento complexo de uma estrutura.	57
Figura 25 – Geometria, carregamento e condições de contorno do Exemplo 5.1.1.	59
Figura 26 – Malhas utilizadas no Exemplo 5.1.1.	60

Figura 27 – Deslocamentos radiais considerando diferentes bases.	61
Figura 28 – Deslocamentos radiais no centro w_c e no ponto de deslocamento máximo w_{max}	62
Figura 29 – Relação w/w_c para diversas espessuras.	62
Figura 30 – Geometria, carregamento e condições de contorno do Exemplo 5.1.2	63
Figura 31 – Deslocamentos radiais no centro w e no ponto de aplicação da carga.	64
Figura 32 – Geometria, carregamento e condições de contorno do Exemplo 5.1.3.	65
Figura 33 – Relação w/w_{ref} para diferentes malhas e funções de base no Exemplo 5.1.3.	66
Figura 34 – Geometria, carregamento e condições de contorno do Exemplo 5.1.4.	67
Figura 35 – Relação $P_{cr}^{AIG}/P_{cr}^{MEF}$ para diferentes malhas e funções de base no Exemplo 5.1.4.	69
Figura 36 – Caminho pós-crítico para o Exemplo 5.1.4.	70
Figura 37 – Geometria, carregamento e condições de contorno do Exemplo 5.1.5.	71
Figura 38 – Curvas carga-deslocamento das cascas isotrópicas e laminadas ($h = 6.35mm$) utilizando refinamento h.	72
Figura 39 – Curvas carga-deslocamento das cascas [0/90/0] ($h = 6.35mm$) utilizando refinamento k.	72
Figura 40 – Curvas carga-deslocamento das cascas isotrópicas e [90/0/90] ($h = 6.35mm$).	73
Figura 41 – Curvas carga-deslocamento da casca isotrópica ($h = 6.35mm$).	73
Figura 42 – Curvas carga-deslocamento das cascas isotrópicas e [90/0/90] ($h = 12.7mm$).	74
Figura 43 – Curvas carga-deslocamento das cascas laminadas <i>angle-ply</i> ($h = 12.7mm$).	74
Figura 44 – Geometria, carregamento e condições de contorno do Exemplo 5.1.6.	75
Figura 45 – Caminho de equilíbrio do Exemplo 5.1.6.	76
Figura 46 – Curvas carga-deslocamento das cascas MGF ($h = 12.7mm$).	77
Figura 47 – Curvas carga-deslocamento das cascas MGF ($h = 6.35mm$).	78
Figura 48 – Caminhos primários e secundários das cascas MGF ($h = 6.35mm$).	79
Figura 49 – Caminhos primário e secundário para casca de MGF ($N \rightarrow \infty$)	80
Figura 50 – Caminho de equilíbrio do Exemplo 5.1.6.	81
Figura 51 – Caminhos de equilíbrio para casca de MGF.	81

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Exemplos de aplicações de MGF em diversas áreas.	25
Tabela 2 – Relação w/w_c	60
Tabela 3 – Relação w/w_{max}	61
Tabela 4 – Relação w/w_{ref} para uma mesma malha utilizando graus distintos.	65
Tabela 5 – Relação w/w_{ref} no Exemplo 5.1.5.	67
Tabela 6 – Relação $P_{cr}^{AIG}/P_{cr}^{MEF}$ para o Exemplo 5.1.4.	68
Tabela 7 – Propriedades do material compósito utilizado no Exemplo 5.1.5.	70
Tabela 8 – Propriedades do material MGF utilizado no Exemplo 5.1.5.	77
Tabela 9 – Diferenças entre as cargas dos pontos limites e as cargas de bifurcação.	80
Tabela 10 – Propriedades do material MGF utilizado no Exemplo 5.2.2.	80
Tabela 11 – Valores de N_b para diversos métodos de análise.	82
Tabela 12 – Valores de N_b e w/h para diversos métodos de análise.	82

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Objetivos e contribuições	15
1.2	Organização da dissertação	16
2	MATERIAIS COMPÓSITOS	17
2.1	Materiais Compósitos Reforçados por Fibras	18
2.1.1	<i>Relações Constitutivas</i>	20
2.2	Materiais com Gradação Funcional	23
2.2.1	<i>Propriedades Efetivas</i>	25
2.2.1.1	<i>Lei das Misturas</i>	26
2.2.1.2	<i>Método de Mori-Tanaka</i>	27
2.2.2	<i>Fração de Volume</i>	28
3	TEORIA DE CASCAS CILÍNDRICAS	29
3.1	Teoria Não Linear de Cascas Cilíndricas	32
3.2	Esforços Internos	35
3.2.1	<i>Compósitos Laminados Reforçados por Fibras</i>	35
3.2.2	<i>Materiais com Gradação Funcional</i>	37
4	ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA	38
4.1	NURBS	38
4.1.1	<i>B-Splines</i>	39
4.1.2	<i>Refinamentos</i>	41
4.1.3	<i>B-Splines Racionais</i>	42
4.1.4	<i>Superfícies NURBS</i>	43
4.1.5	<i>Múltiplos Patches</i>	44
4.2	Análise Não Linear Geométrica	45
4.3	Elemento de Casca Cilíndrica	46
4.4	Estabilidade das Estruturas	51
4.5	Traçado do Caminho de Equilíbrio	55
5	EXEMPLOS NUMÉRICOS	59
5.1	Exemplos de Validação	59
5.1.1	<i>Cilindro Fino Submetido à Pressão Interna</i>	59

5.1.2	<i>Cilindro de paredes finas com carga concentrada no centro</i>	63
5.1.3	<i>Casca cilíndrica com carga distribuída (Scordelis-Lo)</i>	64
5.1.4	<i>Painel curvo Submetido à Compressão Uniaxial</i>	67
5.1.5	<i>Casca abatida submetida a carga concentrada</i>	70
5.1.6	<i>Cilindro de paredes finas com carga concentrada no centro - Não Linear</i> .	75
5.2	Exemplos de Aplicação	76
5.2.1	<i>Estudo de Painéis de MGF sujeitos à carga concentrada transversal</i>	76
5.2.2	<i>Estudo de Painéis MGF sujeitos à compressão uniaxial</i>	80
6	CONCLUSÃO	83
6.1	Sugestões para trabalhos futuros	84
	REFERÊNCIAS	86

1 INTRODUÇÃO

Cascas são estruturas de grande interesse nas engenharias, pois possuem vastos campos de aplicação, os quais podemos citar aplicações civis, aeronáuticas, mecânicas, automobilísticas e navais. Nesses setores, busca-se aliar a essas estruturas propriedades como elevada rigidez específica, resistência à fadiga e isolamento térmico.

Com esse objetivo, os materiais compósitos ganham espaço, pois buscam a melhoria de diversas propriedades quando comparados aos seus constituintes isolados. Dentre eles, podemos destacar dois tipos, que são os laminados reforçados por fibras e os materiais com gradação funcional.

Por sua versatilidade e capacidade de unir resistência e rigidez, os laminados reforçados por fibras são explorados em vários estudos (DANIEL *et al.*, 1994; BARBERO, 2017; REDDY, 2004). No Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) há diversas contribuições nesse campo (TEÓFILO, 2010; SILVA, 2012; ROCHA, 2013; MORORÓ, 2013; JÚNIOR, 2014; BARROSO, 2015; BARROS, 2016 ; D'AGUIAR, 2017), consolidando o tema e abrindo espaços para a investigação de novos materiais.

Devido às dificuldades dos laminados tradicionais em respostas envolvendo gradientes de temperatura elevados e concentrações de tensão, os Materiais com Gradação Funcional (MGF) (*Functionally Graded Materials – FGM*) ganharam destaque. Seu conceito foi proposto por cientistas japoneses na década de 80, inicialmente para problemas envolvendo barreiras térmicas em estruturas aeroespaciais e reatores de fusão. Uma análise histórica de seu desenvolvimento no Japão pode ser encontrada em Koizumi (1997). Desde então, os MGF vêm recebendo uma grande atenção por pesquisadores do mundo todo.

Sua principal característica é a variação contínua e suave de seus componentes ao longo de uma direção preferencial, o que evita descontinuidades expressivas como as dos laminados. Além dessa vantagem, possui diversas outras, dentre as quais podemos citar uma melhor distribuição de tensões residuais e maior tenacidade à fratura (BIRMAN; BYRD, 2007).

Para a utilização de cascas de material compósito de forma econômica e segura, é necessária a utilização de técnicas que permitam determinar seus comportamentos, como deslocamentos, deformações e tensões. Diversas teorias foram propostas e utilizadas ao longo do tempo para descrever o comportamento estrutural de cascas. Entre elas estão as teorias de cascas cilíndricas, como as apresentadas por Donnell, Flugge, Sanders e Koiter, consideradas um bom modelo de partida para a compressão de modelos mais complexos (BRUSH; ALMROTH, 1975).

Vários trabalhos foram realizados explorando as respostas mecânicas dessas estruturas quando sujeitas a carregamentos mecânicos e térmicos. Uma revisão desses estudos pode ser encontrada nos trabalhos de Jha *et al.* (2013) e Swaminathan *et al.* (2015).

Por conta de sua elevada esbelteza, as cascas são estruturas sensíveis ao colapso por perda de estabilidade, sendo necessária uma investigação criteriosa sobre sua carga crítica, modos de flambagem e caminho pós-crítico. Para isso, são necessárias análises não-lineares, nas quais a consideração de grandes deslocamentos é fundamental.

Shen (2003) estudou o comportamento pós-crítico de cascas MGF sujeitas à pressão externa e efeitos térmicos utilizando um campo de deformações baseado na teoria de Donnell. Shahsiah e Eslami (2003) apresentaram um estudo de estabilidade de cascas cilíndricas sujeitas a carregamentos térmicos. Zhao e Liew (2007) estudaram o comportamento não-linear de painéis feitos com MGF compostos de metal e cerâmica utilizando um campo de deformações baseado na teoria de Sanders. Liew *et al.* (2012) determinaram o estudo do caminho pós-crítico de cascas cilíndricas MGF sujeitas a compressão axial e carregamentos térmicos. Huang *et al.* (2014) estudaram o comportamento pós-crítico de cascas MGF com material elastoplástico sujeitos a carregamento axial. Rezaiee-Pajand *et al.* (2019) apresentam uma análise da estabilidade de cascas MGF sujeitas a carregamentos térmicos e mecânicos baseados em uma formulação de casca geral.

Existem inúmeros métodos de análise que podem ser utilizados na modelagem desses problemas, sendo o Método dos Elementos Finitos (MEF) o mais utilizado atualmente. Entretanto, apesar de consolidado, o MEF apresenta algumas limitações inerentes a sua formulação, entre os quais podemos citar a dificuldade em se obter elevação de grau e continuidade em suas funções base e a representação aproximada da geometria.

A análise isogeométrica (AIG), proposta por Hughes *et al.* (2005), por sua vez, é um método que utiliza B-Splines e NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*) como funções de forma. Essas funções são as mesmas utilizadas em programas CAD (*Computer Aided Design*). Assim, a geometria do problema é representada de forma exata, independente do grau de discretização adotado.

Dessa forma, eliminasse o erro na geometria, o que possui um potencial muito grande quando levado em conta que estruturas de cascas possuem sensibilidade às imperfeições. Além dessa vantagem, o método permite a utilização de três métodos de refinamento: refinamento p , equivalente à elevação de grau do MEF, o qual possui limitações em sua aplicação no MEF

devido à difícil implementação. O refinamento h , equivalente ao refinamento de malha no MEF. Por fim, o refinamento k , que não possui equivalente no MEF, que se apresenta como a combinação dos anteriores e promove uma elevação na continuidade entre elementos (HUGHES *et al.*, 2005; COTTRELL *et al.*, 2009).

A análise isogeométrica vem sendo explorada no contexto de placas MGF em vários trabalhos recentes (BARROS, 2016; PRACIANO, 2018). Tran *et al.* (2013) estudaram o comportamento de placas MGF utilizando uma formulação AIG baseada em uma teoria de cisalhamento de primeira ordem, obtendo bons resultados. Yin *et al.* (2014) estudou o travamento em placas MGF utilizando uma formulação AIG baseada em uma teoria de cisalhamento de primeira ordem. Yu *et al.* (2015) apresentaram uma análise não linear isogeométrica de placas MGF, realizando diversos estudos paramétricos. Tran *et al.* (2016) apresenta uma análise de estabilidade de placas MGF sujeitas a carregamentos térmicos e mecânicos. Do *et al.* (2019) apresentam uma análise isogeométrica da estabilidade de placas MGF sujeitas a diversos tipos de gradientes de temperatura. Entretanto, o mesmo não ocorre quando se trata de análise de cascas cilíndricas com abordagem isogeométrica.

Assim, a análise isogeométrica de cascas de MGF e laminados reforçados com fibras apresenta várias vantagens. Como se trata de uma abordagem recente, faz-se necessário o desenvolvimento de pesquisas, buscando ampliar e aprofundar o conhecimento sobre este assunto.

1.1 Objetivos e contribuições

Este trabalho tem como objetivo contribuir para o avanço da análise de cascas cilíndricas de MGF sujeitas a carregamentos mecânicos utilizando uma abordagem isogeométrica.

Deste modo, foi desenvolvida inicialmente uma formulação de um elemento finito isoparamétrico de casca cilíndrica no programa FAST (*Finite element AnalySis Tool*), baseado na teoria não linear de Donnell com inclusões de termos de cisalhamento transversal. Esta formulação foi estendida para a análise isogeométrica.

Quanto ao material, foram desenvolvidas rotinas para a determinação de suas propriedades efetivas através da Lei das Misturas. As matrizes constitutivas foram calculadas externamente ao programa FAST e lidas posteriormente como um *input* ao programa. Também foram modeladas cascas de compósitos laminados, utilizando rotinas já implementadas anteriormente no programa.

Devido ao fato da AIG não eliminar o travamento causado pela integração numérica, foram utilizadas algumas técnicas de integração reduzida, alternativas à proposta clássica utilizada no MEF. Foram observados os efeitos dessas técnicas ao buscar eliminar ou aliviar o efeito de travamento.

A formulação foi utilizada no estudo do comportamento estrutural de cascas e painéis cilíndricos, através de comparações com exemplos da literatura e resultados obtidos no software comercial ABAQUS.

1.2 Organização da dissertação

O presente trabalho foi dividido em seis capítulos. No Capítulo 2 são apresentados os materiais compósitos reforçados por fibras e materiais com gradação funcional, seus principais conceitos e classificações. Nesse capítulo também são apresentadas as relações constitutivas e as teorias e modelos utilizados para determinar as propriedades efetivas desses materiais.

No Capítulo 3 é feita uma breve discussão sobre teorias de cascas, destacando-se as teorias de cascas cilíndricas, optando-se pela teoria não linear de Donnell para o presente trabalho. É apresentada a formulação cinemática da teoria, as adaptações utilizadas no trabalho e, por fim, a determinação dos esforços internos para laminados e MGF.

No Capítulo 4 é apresentada uma breve revisão sobre análise isogeométrica, curvas B-Splines e NURBS. São explorados seus tipos de refinamento, o conceito de superfície NURBS e a estratégia de múltiplos *patches*. É apresentada uma formulação isogeométrica de casca cilíndrica baseada no modelo cinemático apresentado no Capítulo 3. Também são revisados conceitos de análise não linear geométrica e estabilidade de estruturas.

No Capítulo 5 estão os exemplos numéricos da dissertação, onde são estudadas cascas cilíndricas isotrópicas, laminadas e MGF, avaliando-se deslocamentos, cargas críticas e caminhos pós-críticos. Para isso, são utilizados exemplos clássicos do *Shell Obstacle Course*, além de outras referências da literatura. Em seguida, é apresentado o estudo de painéis cilíndricos de MGF, determinando o comportamento pós-crítico para diferentes frações de volume.

No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões da dissertação e sugestões para trabalhos futuros.

2 MATERIAIS COMPÓSITOS

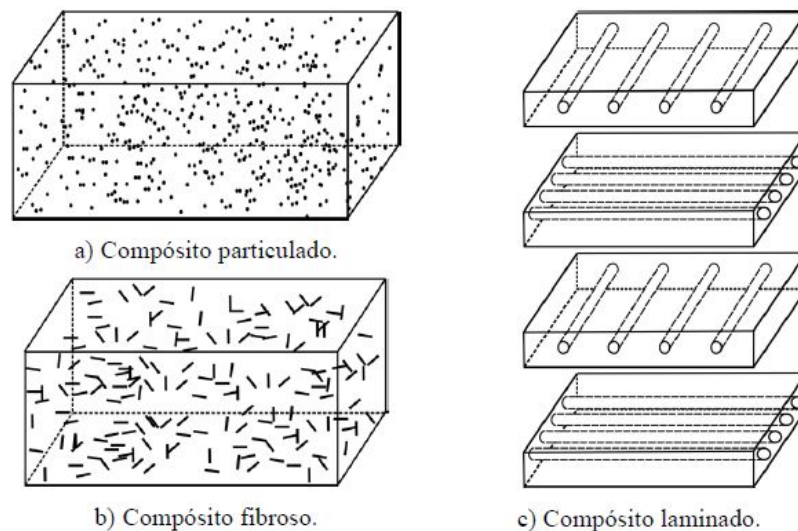
Neste capítulo serão apresentados os materiais compósitos reforçados por fibras e os materiais de gradação funcional (MGF), suas principais características e propriedades.

Os materiais compósitos são sistemas constituídos da combinação de dois ou mais materiais, também chamados de fases, de forma a gerar um único material que proporcione um desempenho melhor quando comparados aos seus constituintes atuando de forma isolada (REDDY, 2004).

Essas fases são, em geral, chamadas de reforço e matriz, sendo as propriedades do compósito sensíveis a diversos fatores relacionados a elas, como sua distribuição, propriedades isoladas e geometria. Como exemplo, a distribuição desses reforços pode determinar o quão heterogêneo é o compósito. Já sua geometria e orientação influem diretamente sobre a anisotropia do sistema. Os materiais compósitos, ilustrados na Figura 1, podem ser classificados como (DANIEL *et al.*, 1994):

1. Compósitos particulados;
2. Compósitos fibrosos;
3. Compósitos laminados;

Figura 1 – Materiais compósitos.



Fonte: PRACIANO, 2018

O reforço comumente se apresenta descontínuo, rígido e resistente. Por outro lado, a matriz se apresenta contínua, sendo menos rígida e resistente que o reforço, sendo a função de cada um dependente do tipo e da aplicação do compósito. No caso de compósitos com

alta performance estrutural, por exemplo, os reforços são responsáveis por fornecer a rigidez e resistência necessárias para responder às solicitações, enquanto a matriz desempenha a função de transferir as tensões, assim como proteger e dar suporte aos reforços.

Dentre as propriedades comumente melhoradas, podemos destacar, sob a perspectiva estrutural, a elevada rigidez específica e a elevada resistência específica. Outros aperfeiçoamentos importantes podem ser obtidos em relação a resistência à fadiga, resistência à corrosão e condutividade térmica (BARBERO, 2017). É importante ressaltar que esses materiais permitem um maior número de variáveis de projeto no uso de técnicas de otimização, sendo uma vantagem sob o ponto de vista de engenharia. Entre as desvantagens, podemos citar o maior grau de complexidade por se tratarem de materiais heterogêneos, ortotrópicos (compósitos reforçados com fibras) e sua caracterização também demandar um número mais elevado de parâmetros.

Embora as primeiras referências sobre esses materiais não sejam recentes, sendo vastamente utilizados ao longo da história, houve um expressivo crescimento em seu desenvolvimento durante o século XX, em especial nas indústrias aeronáutica e naval, com a aplicação, por exemplo, das fibras de vidro e carbono.

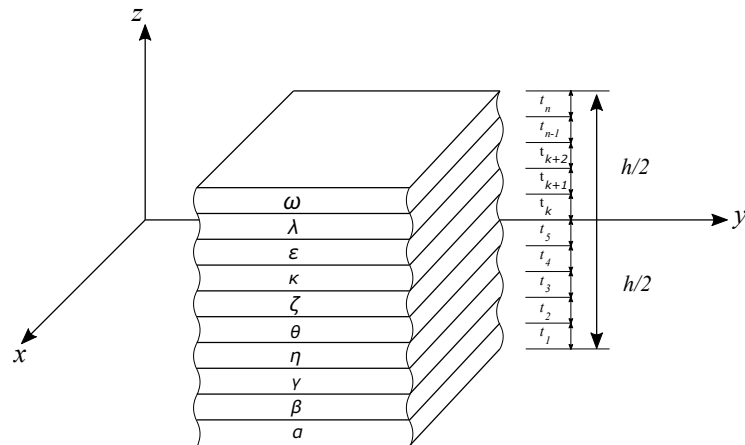
Na década de 80 houve uma expansão na aplicação de fibras com alta rigidez e, já recentemente, a ênfase dada as pesquisas nesse campo estão sobre os compósitos de metal-cerâmica e nanotubos de carbono, com aplicações aeroespaciais, automotivas, navais e biomecânicas. Dentre esses materiais, dois tipos merecem destaque, sendo eles os materiais compósitos reforçados por fibras e os materiais com gradação funcional.

2.1 Materiais Compósitos Reforçados por Fibras

Os compósitos reforçados por fibras são compostos por fibras curtas, longas ou contínuas dispersas em uma matriz. As fibras podem ser unidirecionais, bidirecionais, trançadas ou aleatórias. Elas podem ser inorgânicas, sendo mais utilizados vidro, carbono, cerâmicas e metais, mas podem ser também orgânicas, utilizando-se polímeros. No caso da matriz, são normalmente compostas por polímeros, embora seja possível encontrar compostas por metais ou cerâmicas (BARBERO, 2017).

Esses compósitos podem se organizar em forma de lâminas, com materiais e espessuras que podem ser diferentes ou iguais, que são empilhadas e unidas entre si, formando os compósitos laminados, sendo, no presente trabalho, abordados os laminados compostos por lâminas unidirecionais.

Figura 2 – Esquema de Laminação.



Fonte: Autor.

Esses compósitos são caracterizados por vários parâmetros, como número, tipo, orientação e sequência de empilhamento de suas lâminas, sendo essa configuração chamada de esquema de laminação (*layup*). Um esquema de laminação pode ser representado da seguinte maneira: $[\alpha/\beta/\gamma/.../\omega]$, onde α , β , γ e ω são ângulos de orientação das fibras da primeira, segunda, terceira e última camada, como ilustrado na Figura 2.

Suas principais classificações são relativas aos ângulos de orientação das fibras e da simetria das lâminas em relação à superfície média do laminado. Quanto à orientação das fibras, podemos citar duas classificações:

1. Laminados *Cross – ply*: Apresentam ângulos de laminação iguais a 0° ou 90° ;
2. Laminados *Angle – ply*: Apresentam ângulos de laminação de qualquer valor, desde que um deles seja diferente de 0° ou 90° .

São exemplos de *cross – ply* e *angle – ply*, respectivamente, os seguintes esquemas: $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ e $[30^\circ/-30^\circ/30^\circ/-30^\circ]$.

Em relação à simetria, os laminados podem receber as seguintes classificações:

1. Laminados Simétricos: Possuem simetria de espessura, material e orientação das fibras em relação à superfície média;
2. Laminados Balanceados: Possuem uma lâmina com orientação $-\alpha$ para cada lâmina com orientação α diferente de 0° e 90° , mantendo o mesmo material e a mesma espessura;
3. Laminados Balanceados e Simétricos: Apresentam de forma simultânea as características apresentadas nos itens anteriores;
4. Laminados Anti-Simétricos: Possuem simetria em relação à espessura, mas são

anti-simétricas em relação às orientações das fibras;

5. Laminados Assimétricos: Caso genérico, onde não existe qualquer simetria em relação à superfície média.

São exemplos de laminados simétricos, anti-simétricos e assimétricos, respectivamente: $[0^\circ/-45^\circ/45^\circ/45^\circ/-45^\circ/0^\circ]$, $[0^\circ/30^\circ/-30^\circ/30^\circ/-30^\circ/0^\circ]$, $[45^\circ/90^\circ]$. No primeiro caso, além de simétrico, o laminado também é balanceado.

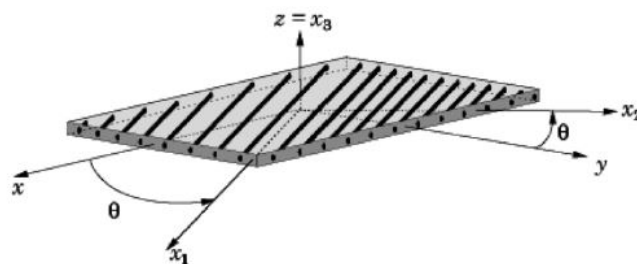
2.1.1 Relações Constitutivas

O comportamento mecânico de uma lâmina pode ser descrito através de duas abordagens, sendo elas a abordagem micromecânica e a abordagem macromecânica.

No primeiro caso, os constituintes da lâmina, ou seja, a matriz e a fibra, são analisadas de forma separada, sendo observada a interação entre elas. No segundo caso, a lâmina se torna uma combinação homogênea da matriz com as fibras. Nos compósitos laminados abordados no presente trabalho, será dado enfoque à abordagem macromecânica.

A lâmina, como sistema isolado, é considerada ortotrópica, uma vez que há uma grande diferença entre a rigidez das fibras e da matriz. Essa rigidez depende da direção considerada, sendo definido um sistema local com eixos coincidentes aos planos de ortotropia da lâmina. Neste sistema, as direções 1, 2 e 3 são, respectivamente, a direção das fibras, a direção perpendicular às fibras e a direção perpendicular para fora plano, como ilustrado na Figura 3.

Figura 3 – Eixos locais e globais da lâmina ortotrópica.



Fonte: TEÓFILO, 2010

Seu comportamento antes da falha pode ser considerado elástico-linear, sendo descrito através da Lei de Hooke Generalizada para materiais anisotrópicos. No estado plano de

tensões, adotando as condições de ortotropia das fibras e simetria da matriz, temos:

$$\sigma_1 = \mathbf{Q} \varepsilon_1 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

onde \mathbf{Q} é a matriz constitutiva da lâmina em seu sistema local (x_1, x_2, x_3) , representado pelo subscrito 1, onde os valores dos coeficientes Q_{ij} são:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad Q_{12} = \frac{\nu_{21} E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad Q_{66} = G_{12} \quad (2.2)$$

As tensões de cisalhamento transversais são dadas por:

$$\tau_1 = \mathbf{Q}_s \gamma_1 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

onde Q_{44} e Q_{55} são:

$$Q_{44} = G_{13} \quad Q_{55} = G_{23} \quad (2.4)$$

Como as equações de equilíbrio para a análise estrutural são determinadas no sistema global, enquanto as equações acima são determinadas no sistema local da lâmina, é necessário realizar uma conversão entre os sistemas através de uma matriz de rotação:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Na forma compacta:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \mathbf{T} \varepsilon \\ \gamma_1 &= \mathbf{T}_s \gamma \end{aligned} \quad (2.7)$$

Aplicando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, pode-se realizar a seguinte transformação de tensões:

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathbf{T}^T \sigma_1 \\ \tau &= \mathbf{T}_s^T \tau_1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dessa forma, a relação constitutiva para o sistema global é dada por:

$$\sigma = \mathbf{T}^T \mathbf{Q} \mathbf{T} \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \sigma = \bar{\mathbf{Q}} \varepsilon \quad (2.9)$$

$$\tau = \mathbf{T}_s^T \mathbf{Q} \mathbf{T}_s \gamma \quad \Rightarrow \quad \tau = \bar{\mathbf{Q}}_s \gamma$$

sendo:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

onde:

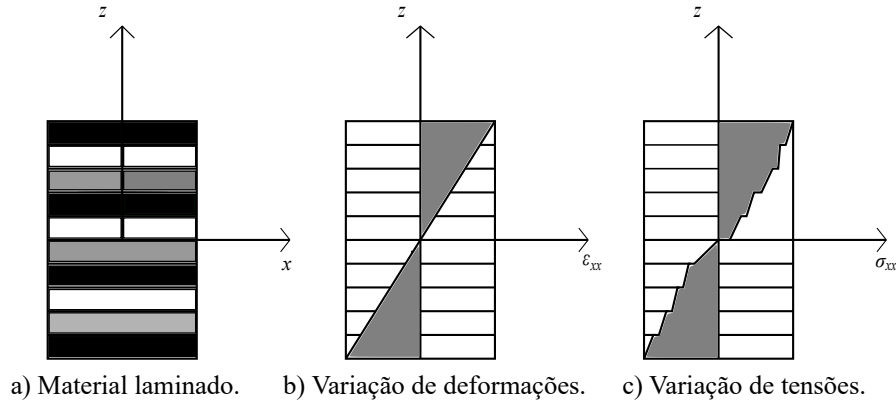
$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= \cos^4 \theta Q_{11} + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta (Q_{12} + 2Q_{66}) + \sin^4 \theta Q_{22} \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) Q_{12} \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{22} &= \sin^4 \theta Q_{11} + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta Q_{22} \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) Q_{66} \\ \bar{Q}_{44} &= \cos^2 \theta Q_{44} + \sin^2 \theta Q_{55} \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \sin \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{55} &= \sin^2 \theta Q_{44} + \cos^2 \theta Q_{55} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Para combinar o efeitos das lâminas, com objetivo de modelar o comportamento mecânico, existem duas abordagens: as Teorias de Lâmina Equivalente (*Equivalent Single Layer*) e as Teorias de Lâminas Discretas (*Layerwise*). No presente trabalho, a teoria utilizada para modelagem dos laminados pertence ao primeiro grupo, sendo a hipótese de compatibilidade nas deformações do laminado utilizada para transformar o problema tridimensional em bidimensional, permitindo que a contribuição de cada lâmina seja então somada.

As matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{Q}_s , apresentadas, respectivamente, nas Equações (2.10) e (2.3), dependem das propriedades dos materiais de cada lâmina e da orientação das fibras, podendo variar em cada uma delas. As tensões, portanto, também podem variar e se tornar descontínuas, mesmo que haja continuidade entre as deformações, como apresentado na Figura 4.

Devido à descontinuidade das tensões nos laminados, podem ser observadas concentrações de tensões que surgem na transição entre camadas, principalmente em elevadas temperaturas, onde a variação do coeficiente de dilatação térmica pode gerar altas tensões residuais, tendo como consequência fraturas e delaminações.

Figura 4 – Variação de deformações e tensões ao longo da espessura de acordo com uma teoria de Lâmina Equivalente.

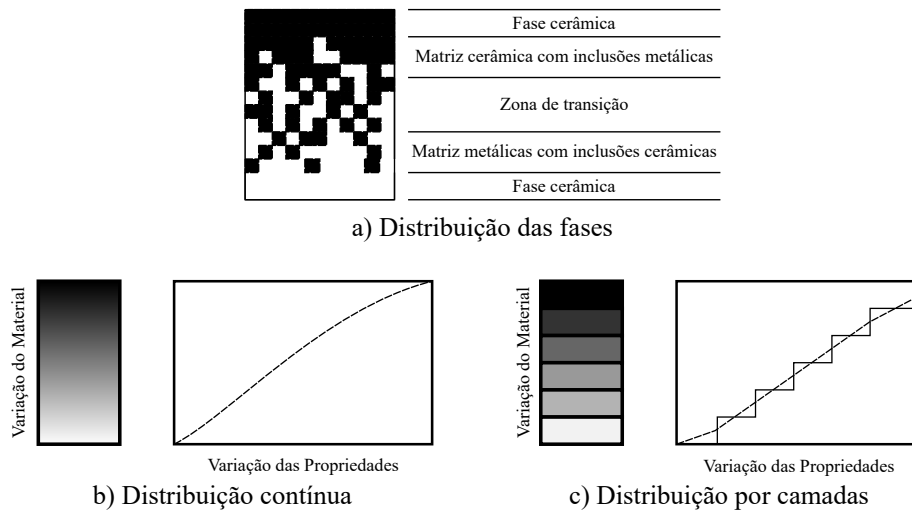


Fonte: Adaptado de REDDY, 2004

2.2 Materiais com Gradação Funcional

Os Materiais com Gradação Funcional (MGF) são materiais compósitos constituídos por duas ou mais fases. Sua principal característica é uma variação contínua e suave de sua composição em sua espessura, como apresentado na Figura 5.

Figura 5 – Materiais com Gradação Funcional.



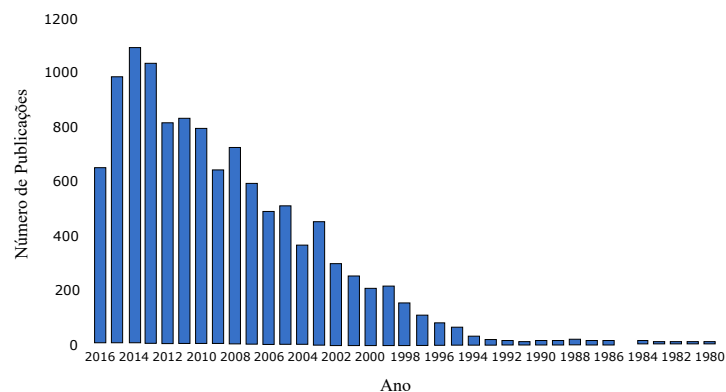
Fonte: Autor.

Dentro dessa proposta, muitas possibilidades de misturas podem ser realizadas utilizando diversos componentes, sendo comumente classificados como metal-cerâmica, cerâmica-cerâmica, cerâmica-plástico, entre outros (UDUPA *et al.*, 2014). No caso dos metais, podemos citar como exemplo o magnésio, titânio, alumínio e aço, enquanto nas cerâmicas podemos citar a zircônia, alumina e o carboneto de silício, entre outros (SHEN, 2016). É possível encontrar na literatura estudos detalhados sobre diversos MGF, como o caso dos compostos por

zircônia-alumina ($ZrO_2-Al_2O_3$), entre outros (SHANMUGAVELAYUTHAM; KOBAYASHI, 2007; YONGMING *et al.*, 2003; HONG *et al.*, 2008; ZHANG *et al.*, 2013).

Seu desenvolvimento tem início a partir da década de 80, no Japão, com pesquisas envolvendo materiais que apresentassem boas respostas a problemas abrangendo grandes gradientes de temperatura. Nas últimas duas décadas, o número de publicações científicas na área vem crescendo, assim como o interesse da comunidade mundial em seu desenvolvimento, como indicado na Figura 6.

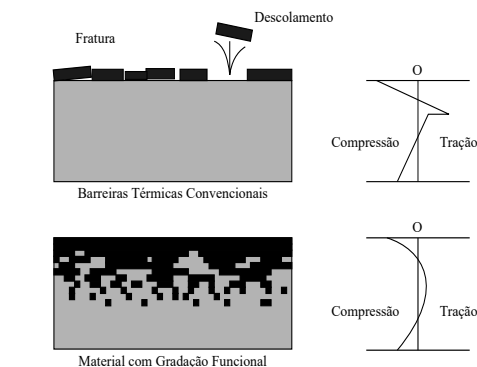
Figura 6 – Número de publicações científicas na área de MGF entre os anos de 1980 a 2016.



Fonte: Adaptado de NAEBE; SHIRVANIMOGHADDAM (2015)

Assim como os laminados, esses materiais possuem propriedades melhoradas em relação aos seus constituintes isolados. Entretanto, quando observados efeitos térmicos relativos às concentrações de tensões, tensões residuais e fraturas, os MGF apresentam vantagens, uma vez que eles não apresentam descontinuidades ou variações abruptas, como mostrado na Figura 7.

Figura 7 – Resposta ao carregamento térmico.



Fonte: Adaptado de GUPTA; TALHA (2015)

Suas desvantagens estão no elevado custo para sua preparação, assim como a necessi-

dade do desenvolvimento de mais pesquisas na área, como modelos mais robustos para predição de seu comportamento ou técnicas mais precisas de controle de sua composição na fabricação (UDUPA *et al.*, 2014). Entretanto, apesar das bases matemáticas e das técnicas necessárias para sua fabricação serem recentes, são inúmeros os exemplos desses materiais na natureza, como são os casos do bambu, da pele e dos ossos.

Quanto às aplicações modernas dos MGF, exemplificadas na Tabela 1, deve-se destacar a sua utilização na indústria aeroespacial, onde foram inicialmente desenvolvidos. Também é possível observar sua participação em equipamentos industriais, meios de comunicação e aplicações biomecânicas, como próteses biomecânicas (JHA *et al.*, 2013).

Mais recentemente, no início da década de 90, o desenvolvimento e utilização de compósitos que unem baixo peso com alto desempenho vêm ampliando os estudos sobre MGF cujos componentes são micro e nanopartículas. Nesses estudos, vale destacar o espaço dado aos nanotubos de carbono (NTC) como reforço (COLEMAN *et al.*, 2006).

Quanto ao seu processo de fabricação, dois merecem destaque: a técnica de metalurgia em pó e o processamento por fusão, apresentados na Figura 8. Detalhes sobre os processos podem ser encontrados nos trabalhos de Kieback *et al.* (2003) e Naebe e Shirvanimoghaddam (2016).

Tabela 1 – Exemplos de aplicações de MGF em diversas áreas.

Área	Exemplos
Nuclear	Parede de plasma para reatores de fusão e pastilha de combustível.
Comunicações	Fibras ópticas, lentes e semicondutores.
Aeroespacial	Componentes de foguetes e estruturas de aviões espaciais.
Medicina	Ossos artificiais, pele e odontologia.
Energia	Geradores termoelétricos, células solares e sensores.
Diversos	Materiais de construção, artigos esportivos e vidraçarias.

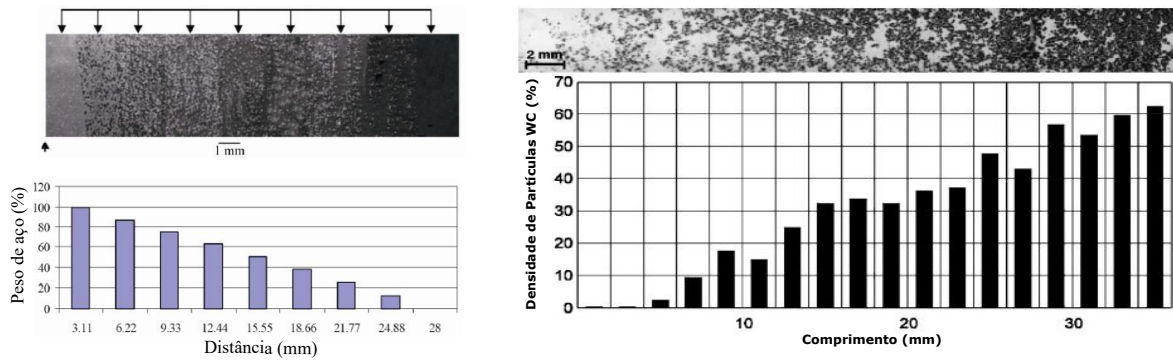
Fonte: Adaptado de GUPTA; TALHA, 2015.

2.2.1 Propriedades Efetivas

Em uma escala microscópica, todos os materiais são heterogêneos, ainda que aparentemente ser homogêneos em escala macroscópica. Essa heterogeneidade pode se apresentar de várias formas, como fraturas, vazios, partículas, lâminas e fibras, entre outras. No caso dos MGF, essa heterogeneidade acontece devido à presença da matriz e do reforço.

Outro importante fator nos MGF, em especial devido a sua relação com problemas

Figura 8 – MGF fabricados com os métodos de metalurgia em pó e processamento por fusão.



a) MGF fabricado por metalurgia em pó

b) MGF fabricado por processamento por fusão

Fonte: Adaptado de NEMAT-ALLA *et al.* (2011) e KIEBACK *et al.* (2003)

de gradiente térmico, é a influência da temperatura, podendo as propriedades dos materiais serem consideradas dependentes ou independentes da mesma. A relação entre as propriedades dos materiais e a temperatura pode ser descrita utilizando a fórmula de Touloukian (TOULOUKIAN, 1967), sendo:

$$P(T) = P_0 \left(\frac{P_{-1}}{T} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3 \right) \quad (2.12)$$

onde T é a temperatura em Kelvin e P_0 , P_{-1} , P_1 , P_2 e P_3 são coeficientes únicos de cada constituinte.

Dessa forma, surge a necessidade de investigar a influência desses fatores no comportamento dos materiais. O comportamento microscópico do material pode ser descrito através do estado mecânico de um ponto material a nível macroscópico pelas chamadas propriedades efetivas.

Existem vários modelos analíticos que buscam determinar essas propriedades (REITER *et al.*, 1997; GASIK, 1998), sendo a resposta das estruturas influenciada diretamente por sua escolha e suas limitações (AKBARZADEH *et al.*, 2015; ZUIKER, 1995).

Determinadas as propriedades efetivas, a relação constitutiva é análoga à apresentada nas Equações (2.10) e (2.3), sendo os MGF considerados isotrópicos, variando suas propriedades na direção z . Dessa forma, os termos da matriz \mathbf{Q} são dados por:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2(z)} \quad Q_{12} = \frac{E(z)\nu(z)}{1 - \nu^2(z)} \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu(z))} \quad (2.13)$$

2.2.1.1 Lei das Misturas

A lei das misturas é um modelo simples e utilizado na maior parte das análises feitas em estruturas de MGF. Ela consiste em uma média ponderada das propriedades dos constituintes,

onde cada um deles contribui com sua fração de volume.

Dessa forma, as propriedades do material nos pontos ao longo da espessura podem ser calculadas pela seguinte expressão (SHEN, 2016):

$$P_f = \sum_{j=1}^{nc} P_j V_{f_j} \quad (2.14)$$

onde P_f são as propriedades efetivas do material, P_j e V_{f_j} são as propriedades e a fração de volume do constituinte j , sendo nc o número de constituintes. A fração de volume expressa a quantidade relativa de cada um dos constituintes em relação ao volume total do sistema. Sendo assim:

$$\sum_{j=1}^{nc} V_{f_j} = 1 \quad (2.15)$$

Dessa forma, utilizando o exemplo dos MGF compostos por metal e cerâmica, temos:

$$E(z) = (E_m - E_c) V_m(z) + E_c \quad (2.16)$$

$$\nu(z) = (\nu_m - \nu_c) V_m(z) + \nu_c$$

onde m e c denotam, respectivamente, metal e cerâmica.

2.2.1.2 Método de Mori-Tanaka

O método de Mori-Tanaka é um modelo aplicado em materiais com gradação cuja microestrutura possui uma matriz bem definida. Ele leva em consideração os efeitos da vizinha à inclusão e a interação entre os constituintes (SHEN, 2016).

As propriedades efetivas do material, para partículas isotrópicas distribuídas aleatoriamente em uma matriz também isotrópica, são dadas por (SHEN, 2016):

$$K(z) = K_m + \frac{V_c}{\frac{1}{K_c - K_m} + \frac{V_m}{K_m + \frac{4G_m}{3}}} \quad (2.17)$$

$$G(z) = G_m + \frac{V_c}{\frac{1}{G_c - G_m} + \frac{V_m}{G_m + f_M}}$$

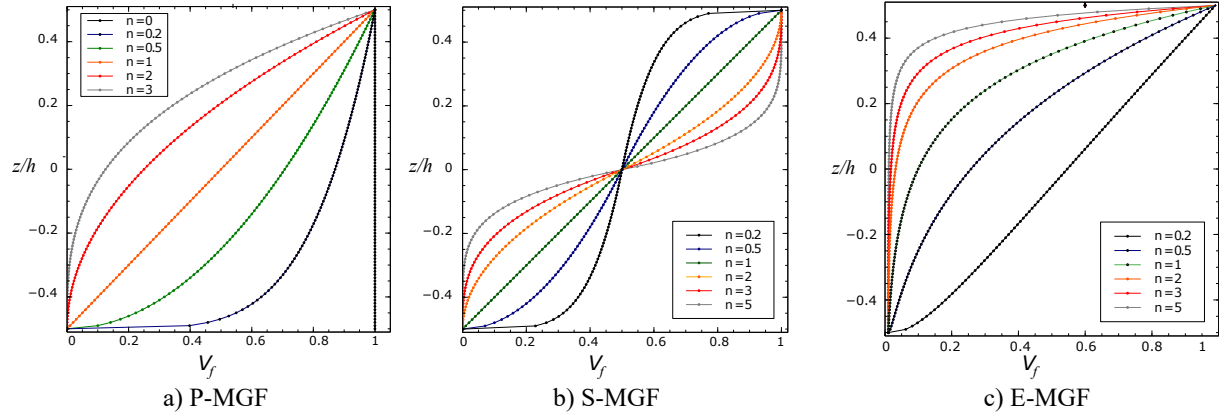
onde K é o módulo volumétrico e G é o módulo de cisalhamento. O parâmetro f_m é dado por:

$$f_m = \frac{G_m(9K_m + 8G_m)}{6(K_m + 2G_m)} \quad (2.18)$$

2.2.2 Fração de Volume

Como visto anteriormente, as propriedades efetivas do MGF são influenciadas pela variação contínua de sua composição. Dessa forma, é necessário determinar como as fases constituintes se distribuem ao longo de uma coordenada.

Figura 9 – Variação da fração de volume ao longo de uma seção.



Fonte: Autor.

Na literatura, é possível encontrar três modelos usuais para a variação da fração de volume. A Figura 9 apresenta a distribuição de fração de volume proposta por esses modelos. A forma mais utilizada para descrever essa distribuição é a lei da potência (P-MGF), dada pela expressão:

$$V_{f_j} = V_{f_b} + (V_{f_t} - V_{f_b}) \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^n \quad (2.19)$$

onde V_{f_t} e V_{f_b} são, respectivamente, as frações de volume da inclusão no topo ($z = +h/2$) e na base ($z = -h/2$), sendo n um fator de não homogeneidade e h a espessura da estrutura. Outra opção é a distribuição sigmóide (S-MGF), dada por:

$$V_{f_j} = \begin{cases} V_{f_b} + (V_{f_t} - V_{f_b}) \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h - 2z}{h} \right)^n \right), & 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \\ V_{f_b} + (V_{f_t} - V_{f_b}) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{h + 2z}{h} \right)^n \right), & -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

e a distribuição exponencial (E-MGF), dada por:

$$V_{f_j} = V_{f_t} e^{\left(\ln \left(\frac{V_{f_b}}{V_{f_t}} \right) \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^n \right)} \quad (2.21)$$

Para $V_{f_t} = 1$ e $V_{f_b} = 0$, ou seja, com apenas a presença de um dos componentes no topo e na base, a expressão P-MGF apresentada é reduzida à lei da potência clássica apresentada em diversos trabalhos.

3 TEORIA DE CASCAS CILÍNDRICAS

As cascas, no âmbito da engenharia estrutural, são definidas como elementos onde uma dimensão, no caso a espessura, é muito inferior às demais dimensões. Elas se diferem das placas pelo fato de não serem necessariamente planas, podendo possuir uma curvatura inicial.

Dessa forma, um dos principais objetivos das teorias de cascas é transformar um problema que é tridimensional, em um problema bidimensional. Essa transformação é possível devido ao uso de hipóteses simplificadoras feitas em relação aos campos de deslocamentos e tensões. Estas hipóteses acarretam em erros que dependem da espessura da casca e da magnitude dos deslocamentos.

Em todas as teorias que serão discutidas, considera-se que os deslocamentos de todos os pontos da placa em sua espessura podem ser escritos em função dos deslocamentos de uma superfície de referência. São considerados que as deformações normais ao plano da casca são nulas, ou seja, $\varepsilon_z = 0$ e as tensões também desprezíveis, sendo assim $\sigma_z = 0$.

As teorias de cascas variam entre si devido a suas hipóteses, em especial devido à consideração do cisalhamento transversal. Nelas se destacam a teoria de Kirchhoff-Love, a teoria de Reissner-Mindlin e as teorias de alta ordem.

Nesse contexto, a teoria de Kirchhoff-Love, também conhecida como teoria clássica, é a mais simplificada entre elas, uma vez que as deformações de cisalhamento transversal são desprezadas. Isso acontece devido à hipótese que as linhas retas e normais à superfície de referência permanecem retas e normais após a deformação. Por conta desta hipótese, sua utilização é limitada às cascas finas, onde o efeito do cisalhamento pode ser desprezado sem maiores prejuízos à análise.

A teoria de Reissner-Mindlin, também chamada de Teoria de Deformações de Cisalhamento de Primeira Ordem, considera uma deformação de cisalhamento constante ao longo da espessura da casca. Sua hipótese é que as seções retas e normais à superfície de referência permanecem retas, mas não necessariamente normais após a deformação. A Teoria da Elasticidade apresenta como solução exata uma variação quadrática para a deformação de cisalhamento (TIMOSHENKO; GERE, 1985), sendo uma limitação dessas teorias, fazendo-se necessário utilizar um fator de correção que será discutido posteriormente (REDDY, 2004).

As teorias de alta ordem, que utilizam expansão em séries dos termos do campo de deslocamentos, buscam aprimorar a consideração do efeito de cisalhamento melhorando, dessa forma, sua precisão. A mais conhecida delas é a teoria de deformações de cisalhamento de

terceira ordem, desenvolvida por Reddy (1984).

Um importante membro da família das cascas são as cascas cilíndricas, sendo uma de suas configurações mais comuns para fins estruturais, como tanques de armazenamento, tubos, colunas e peças aeroespaciais e navais. Assim, diversas teorias foram desenvolvidas para a análise de cascas cilíndricas, sendo seu estudo considerado um importante ponto de partida para modelos gerais mais complexos (BRUSH; ALMROTH, 1975).

Donnell (1934) apresentou uma teoria para cascas cilíndricas baseada em análises experimentais da flambagem torcional de tubos de paredes finas. Devido a diferenças entre os resultados experimentais e teóricos tornou-se necessária a inclusão de termos não-lineares à teoria, equivalentes à teoria de von Kármán. A teoria de Donnell é baseada nas seguintes hipóteses (YAMAKI, 1984):

1. A casca é fina:

$$h/R \ll 1, \quad h/L \ll 1 \quad (3.1)$$

2. As deformações ε são suficientemente pequenas ($\varepsilon \ll 1$) e a lei de Hooke é válida;
3. As linhas retas e normais à superfície média permanecem retas e normais após a deformação;
4. A tensão normal que atua na direção normal à superfície média é desprezível em comparação à tensão nas demais direções;
5. Os deslocamentos longitudinal e circunferencial, u e v , respectivamente, são infinitesimais, enquanto w é da mesma ordem da espessura da casca:

$$|u| \ll h, \quad |v| \ll h, \quad |w| = O(h) \quad (3.2)$$

6. As derivadas de w são pequenas, mas seu quadrado e seus produtos são da mesma ordem das deformações e, por isso, consideradas. Dessa forma:

$$\left\{ \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right| \right\} \ll 1$$

$$\left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \left| \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right|, \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} = O(\varepsilon) \quad (3.3)$$

7. As mudanças na curvatura são pequenas e as influências de u e v são desprezadas, sendo, assim, funções lineares que dependem apenas de w .

Suas principais hipóteses são equivalentes às propostas por Kirchoff-Love. Dessa forma, as deformações de cisalhamento transversais são desconsideradas, sendo limitada à análise de cascas de pequenas espessuras. Pela simplicidade e precisão é a teoria mais utilizada em estudos não-lineares (SILVA, 2008), sendo amplamente utilizada em análises de cascas e painéis cilíndricos (BRUSH; ALMROTH, 1975; YAMAKI, 1984; JONES, 2006; LIEW *et al.*, 2007; ZHAO *et al.*, 2007; LIEW *et al.*, 2012; ZHANG *et al.*, 2014a; ZHANG *et al.*, 2014b; SHEN, 2016; ESLAMI *et al.*, 2018).

A teoria de Donnell, entretanto, possui limitações, principalmente quando a casca cilíndrica apresenta deslocamentos no plano da mesma ordem de grandeza da deflexão (YAMAKI, 1984). Dessa forma, algumas alternativas foram propostas de forma a superar as limitações impostas por essas hipóteses, na qual podemos destacar as apresentadas por Flügge, Sanders e Koiter.

Flügge (1932) utilizou as mesmas expressões de flambagem que Donnell, porém não considerou as aproximações de cascas abatidas. Entretanto, por não considerar os efeitos das deformações de flexão antes da flambagem, os resultados não foram suficientemente precisos (YAMAKI, 1984). Sanders (1963) propôs um conjunto de equações para deformações finitas em cascas cilíndricas de paredes finas, mais complexas que as de Donnell e mais simplificadas que as de Flügge, sendo aplicável a cascas não abatidas. Koiter (1960) apresentou de forma simultânea as expressões obtidas por Sanders, porém na forma tensorial. Dessa forma, essa teoria também pode ser denominada Sanders-Koiter. As hipóteses adotadas por essa teoria são (ARGENTA, 2013):

1. A casca é esbelta:

$$h \ll L, \quad h \ll R \quad (3.4)$$

Essa condição é garantida, em aplicações prática, para $h/R \leq 1/20$ (AMABILI, 2008);

2. O deslocamento radial w é da mesma espessura da casca e pequeno comparado às dimensões L e R ;
3. As rotações são pequenas:

$$\left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right| \ll 1 \quad (3.5)$$

4. As deformações são pequenas, sendo possível aplicar a teoria da elasticidade linear;

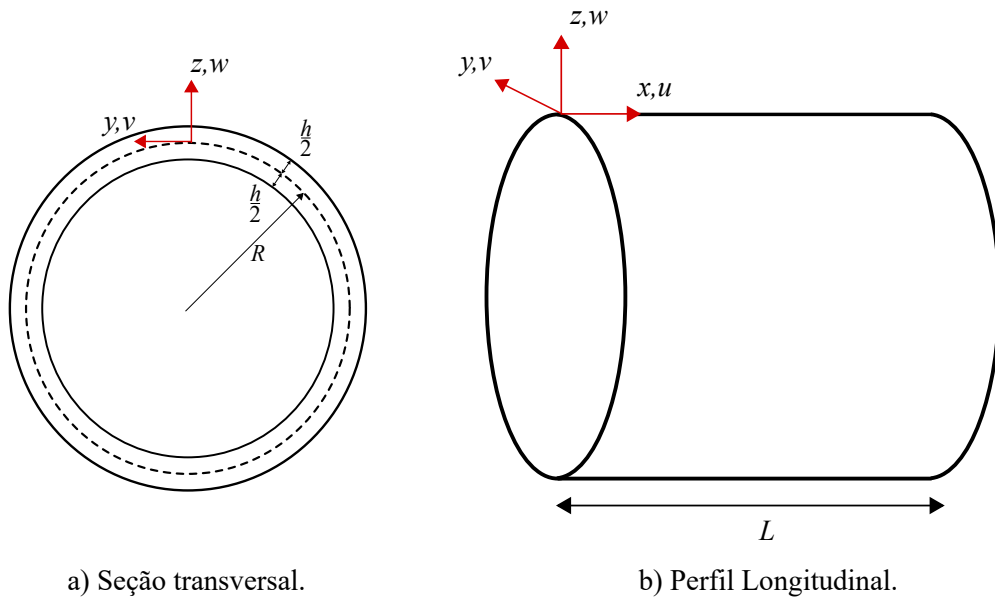
5. As hipóteses de Kirchhoff-Love são garantidas.

Embora mais simplificada que as demais teorias envolvendo cascas cilíndricas, a teoria de Donnell apresenta bons resultados para diversas situações, superando limitações observadas em teorias de cascas abatidas, como a apresentada por Marguerre (CRISFIELD, 1991) e discutida em trabalhos como Rocha (2013), Barros (2016) e Praciano (2018), sendo, portanto, abordada no presente trabalho.

3.1 Teoria Não Linear de Cascas Cilíndricas

No presente trabalho foi adotado um sistema de coordenadas (x, y, z) , onde x é a coordenada longitudinal, y é a coordenada circunferencial e z é a coordenada radial, como apresentados na Figura 10, sendo L o comprimento longitudinal da casca cilíndrica e R o seu raio.

Figura 10 – Sistema de coordenadas de uma casca cilíndrica.



Fonte: Autor.

O campo de deslocamentos em um ponto qualquer da casca é dado por:

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y, z) &= u(x, y) + z\beta_x \\
 u_y(x, y, z) &= v(x, y) + z\beta_y \\
 u_z(x, y, z) &= w(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

onde u , v e w são os deslocamentos na superfície média da casca nas direções x , y e z , respectivamente, e β_x e β_y são as rotações normais aos planos xz e yz .

Dessa forma, a partir do campo de deslocamentos apresentado na Equação (3.6), as deformações no plano de um ponto qualquer na casca são dadas por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}^m + z \boldsymbol{\kappa}, \quad (3.7)$$

As deformações em um ponto da superfície média da casca $(\varepsilon_x^m, \varepsilon_y^m, \gamma_{xy}^m)$ são dadas, de acordo com a teoria de Sanders-Koiter por (ARGENTA, 2013):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^m &= u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + \frac{1}{8} (v_{,x}^* - u_{,y}^*)^2 \\ \varepsilon_y^m &= v_{,y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{R} - w_{,y} \right)^2 + \frac{1}{8} (v_{,x}^* - u_{,y}^*)^2 \\ \gamma_{xy}^m &= u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} - \left(\frac{v}{R} w_{,x} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

As mudanças na curvatura, segundo a mesma teoria, são dadas por:

$$\begin{aligned} \kappa_x &= \beta_{x,x} \\ \kappa_y &= \beta_{y,y} + \left(\frac{v_{,y}}{R} \right) \\ \kappa_{xy} &= \beta_{x,y} + \beta_{y,x} + \left(\frac{3v_{,x}^*}{2R} - \frac{u_{,y}^*}{2R} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Considerando pequenas as rotações em relação à direção normal à superfície da casca e admitindo o comprimento de onda das deformações pequenos em relação ao raio de curvatura principal mínimo (KYRIAKIDES; CORONA, 2007), alguns termos (*) da Equação (3.8) podem ser desprezados. Neste caso, o campo de deformações dado pela teoria de Donnell (SILVA, 2008) é dado por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^m &= u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \\ \varepsilon_y^m &= v_{,y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 \\ \gamma_{xy}^m &= u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} \end{aligned} \quad (3.10)$$

As mudanças na curvatura, dessa forma, são dadas por:

$$\begin{aligned} \kappa_x &= \beta_{x,x} \\ \kappa_y &= \beta_{y,y} \\ \kappa_{xy} &= \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{aligned} \quad (3.11)$$

As teorias clássicas de Sanders e Donnell não trazem consigo termos relativos ao cisalhamento transversal, pois assumem as hipóteses de Kirchoff-Love. Entretanto, nas análises

realizadas no presente trabalho, esses termos foram adicionados aos campos de deformação apresentados na Equação (3.7), sendo similares aos termos de presentes na teoria de Reissner-Mindlin (ZHANG *et al.*, 2013):

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \beta_x + w_{,x} \\ \gamma_{yz} &= \beta_y + w_{,y} - \frac{v}{R}\end{aligned}\quad (3.12)$$

Dessa forma, a partir das Equações (3.7), (3.8) e (3.12) as deformações de um ponto qualquer na casca são obtidos. As deformações de membrana são a soma de parcelas lineares e não lineares representadas, respectivamente, pelos sobrescritos 0 e L:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m = \boldsymbol{\varepsilon}_0^m + \boldsymbol{\varepsilon}_L^m = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} + \frac{w}{R} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}w_{,x}^2 \\ \frac{1}{2}w_{,y}^2 \\ w_{,x}w_{,y} \end{Bmatrix}\quad (3.13)$$

Os termos de flexão e cisalhamento transversal são dados por:

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \beta_x + w_{,x} \\ \beta_y + w_{,y} - \frac{v}{R} \end{Bmatrix}\quad (3.14)$$

Quando $R \rightarrow \infty$ as relações apresentadas nas Equações (3.10) e (3.11) são equivalentes a teoria de von Kármán:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_x^m &= u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y^m &= v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^m &= u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y}\end{aligned}\quad (3.15)$$

Como abordado anteriormente, outras teorias podem ser utilizadas para incluir as deformações de cisalhamento nas análises. Simitses e Anastasiadis (1991) investigaram a influência dessas teorias na determinação da carga crítica de cascas cilíndricas laminadas, onde concluíram que as teorias de Primeira Ordem e Alta Ordem possuem resultados muito próximos quando consideradas cascas de espessura fina ou moderada, desde que na teoria de Primeira Ordem seja utilizado um fator de correção adequado.

No presente trabalho, optou-se pela utilização da teoria de Primeira Ordem por sua continuidade C^0 , o que possibilita a utilização de múltiplos *patches* na Análise Isogeométrica e que será abordada com mais detalhes posteriormente, assim como por sua simplicidade e boas aproximações.

3.2 Esforços Internos

Nas cascas, as equações de equilíbrio, importantes para o estudo de estabilidade, serão determinadas de forma mais simples através de seus esforços internos.

Como discutido anteriormente, é importante ressaltar que os compósitos reforçados por fibras, em seu esquema de laminação, serão considerados homogêneos e ortotrópicos em cada lâmina. Já os MGF serão considerados isotrópicos, mas não homogêneos, com suas propriedades variando ao longo da espessura.

3.2.1 Compósitos Laminados Reforçados por Fibras

A partir da Equação (2.9) é possível obter os esforços a partir da integração das tensões em cada lâmina:

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} dz \quad (3.16)$$

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} z dz \quad (3.17)$$

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} V_{xz} \\ V_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} k_s \bar{\mathbf{Q}}_s^{(k)} \boldsymbol{\gamma}^{(k)} dz \quad (3.18)$$

onde nl é o número de lâminas, sendo z a coordenada de cada lâmina, representadas por k . É utilizado um fator de correção k_s , adotado como $5/6$, devido às hipóteses de Reissner-Mindlin.

Dessa forma, separando as deformações de membrana, flexão e cisalhamento, a relação constitutiva pode ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ V_{xz} \\ V_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{44} & G_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{45} & G_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \varepsilon_{xy}^m \\ \kappa_x^m \\ \kappa_y^m \\ \kappa_{xy}^m \\ \gamma_x^m \\ \gamma_y^m \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

De forma compacta, podemos escrever:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^m \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

sendo as matrizes dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}^{(k)} dz & \mathbf{B} &= \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}^{(k)} z dz \\ \mathbf{D} &= \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}^{(k)} z^2 dz & \mathbf{G} &= \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} k_s \bar{\mathbf{Q}}_s^{(k)} dz \end{aligned} \quad (3.21)$$

Sendo \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{D} e \mathbf{G} , respectivamente, as matrizes de rigidez extensional, de acoplamento membrana-flexão, flexional e de cisalhamento. As matrizes podem ser determinadas através de integração analítica, quando considerada em regime elástico:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ij} &= \sum_{k=1}^{nl} \bar{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) & \mathbf{B}_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{nl} \bar{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^2 - z_k^2) \\ \mathbf{D}_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{nl} \bar{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) & \mathbf{G}_{ij} &= \sum_{k=1}^{nl} k_s \bar{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) \end{aligned} \quad (3.22)$$

As matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{D} são dadas por $i, j = 1, 2, 3$, enquanto a matriz \mathbf{G} é dada por $i, j = 4, 5$.

A avaliação das matrizes \mathbf{ABDG} é importante para compreender o comportamento das estruturas laminadas, em especial devido ao acoplamento membrana-flexão, representado pela matriz \mathbf{B} . Quando não nula, as estruturas podem apresentar comportamentos termo-mecânicos indesejáveis e necessitem de análises complexas (DANIEL *et al.*, 1994). Esse comportamento acontece em laminados não simétricos. Já no caso dos laminados simétricos, os termos da matriz \mathbf{B} são nulas, eliminando esse acoplamento.

3.2.2 Materiais com Gradação Funcional

A partir das Equações (2.10) e (2.3) é possível obter os esforços a partir da integração das tensões ao longo da espessura. Como o material é considerado isotrópico, a matriz de rotação \mathbf{T} apresentada na Equação (2.5) não é necessária. Dessa forma, os esforços são dados por:

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q}(z) \boldsymbol{\varepsilon} dz \quad (3.23)$$

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q}(z) \boldsymbol{\varepsilon} z dz \quad (3.24)$$

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} V_{xz} \\ V_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{Bmatrix} dz = \int_{-h/2}^{h/2} k_s \mathbf{Q}_s(z) \boldsymbol{\gamma} dz \quad (3.25)$$

As relações constitutivas dos MGF são dadas de forma análoga às Equações (3.19) e (3.20), sendo as matrizes dadas por:

$$\mathbf{A} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q}(z) dz \quad \mathbf{B} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q}(z) z dz \quad \mathbf{D} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q}(z) z^2 dz \quad \mathbf{G} = \int_{-h/2}^{h/2} k_s \mathbf{Q}_s(z) dz \quad (3.26)$$

Assim como nos laminados, os termos das matrizes apresentados na Equação (3.26) podem ser calculados de forma analítica ou numérica. No presente trabalho, as matrizes foram integradas numericamente utilizando a quadratura de Gauss, sendo o número de pontos de Gauss escolhido de acordo com o fator de não homogeneidade n apresentado na Equação (2.21).

Devido à assimetria na distribuição do material, os termos da matriz \mathbf{B} são não nulos, gerando o acoplamento membrana-flexão. Este acoplamento tem impacto significativo no comportamento estrutural e na estabilidade de cascas. As discussões sobre este assunto serão feitas com mais detalhes na Seção 3.2.1.

4 ANÁLISE ISOGOMÉTRICA

Proposta por Hughes *et al.* (2005), a Análise Isogeométrica, utiliza funções de base *B-Splines*, NURBS e, mais recentemente, *T-Splines* (BAZILEVS *et al.*, 2010). O grande potencial dessas funções consiste na representação exata de diversas geometrias, sendo amplamente utilizadas em softwares do tipo CAD (*Computer Aided Design*). Dessa forma, utilizando o conceito isoparamétrico, as mesmas funções são utilizadas para a modelagem geométrica e para a representação do campo de deslocamentos. Essa aproximação entre a modelagem geométrica e o método de análise pode gerar benefícios em diversos problemas, dentre as quais podemos citar a estabilidade de cascas que são amplamente conhecidas por sua sensibilidade a imperfeições (COTTRELL *et al.*, 2009).

Outras vantagens apresentadas pelo método são suas possibilidades de refinamento, como, por exemplo, a maior facilidade na elevação do grau dos polinômios da base, o que supera as limitações do Método dos Elementos Finitos devido à utilização dos polinômios de Lagrange, sendo também possível elevar a continuidade entre elementos simultaneamente, algo que não é possível no MEF. Com isso, é possível trabalhar com diversas teorias consagradas e que exigem nas funções de base continuidades distintas, como é o caso das teorias de Kirchoff-Love (KIENDL *et al.*, 2009), Reissner-Mindlin (BENSON *et al.*, 2010) e Alta Ordem (TRAN *et al.*, 2016).

4.1 NURBS

Os recentes avanços nas análises de engenharia, assim como das ferramentas computacionais de alta-performance vem propiciando um ambiente de mais precisão e maior integração entre os processos de modelagem e análise. Do ponto de vista da engenharia, as funções NURBS são mais utilizadas no processo de modelagem geométrica.

Suas maiores vantagens estão em abranger a representação de seções cônicas, no geral, podendo representar com exatidão circunferência, cilindros, esferas, assim como formas livres. Além disso, há muitos algoritmos eficientes e estáveis para gerar esses modelos (COTTRELL *et al.*, 2009).

Do ponto de vista matemático, também oferecem propriedades importantes, como, por exemplo, a partição da unidade e propriedades relacionadas a sua continuidade, que são muito importantes para a análise estrutural e serão discutidas com mais detalhes posteriormente.

Dessa forma, as NURBS são um ponto de partida natural ao tratarmos de Análise Isogeométrica.

4.1.1 B-Splines

Para construir o conceito das NURBS (*Non Uniform Rational B-Splines*), é necessário, inicialmente, discutir-se as *B-Splines* que as constituem. As curvas *B-Splines* são obtidas a partir da combinação linear entre os pontos de controle \mathbf{p}_i e funções de base $N_{i,p}(\xi)$:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{p}_i \quad (4.1)$$

onde n é o número de funções de base, p é o grau da curva e ξ é a coordenada paramétrica da curva.

As *B-Splines* são caracterizadas pela capacidade de descrever vários segmentos diferentes ao longo de um mesmo espaço paramétrico, sendo obtidas através da limitação da atuação das funções de base em regiões desse espaço. Essas regiões são chamadas na literatura de *knot spans*, sendo definidas por um vetor de valores paramétricos chamado vetor de *knots*. Esse vetor é dado por um conjunto de valores paramétricos $[\xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}]$ não-decrescentes e não-negativos dentro do intervalo onde a curva foi definida.

A partir de um vetor de knots $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}]$, as funções de bases são definidas pela fórmula recursiva de Cox-de Boor (PIEGL; TILLER, 1997):

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.2)$$

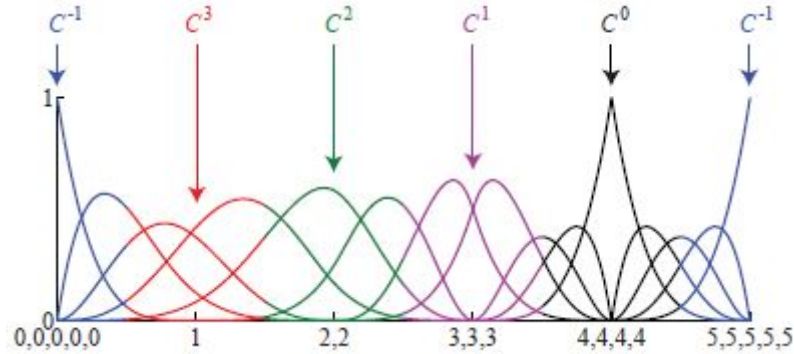
$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi)$$

Os valores paramétricos podem ser repetidos no interior do vetor de *knots*, sendo o número de repetições conhecido como multiplicidade do *knot*. Esse conceito é importante, pois tem consequências na continuidade dentro do *knot span* que, nas *B-Splines*, possui continuidade C^{p-1} em seu interior. Caso haja uma multiplicidade m em um determinado *knot*, a continuidade da curva é C^{p-m} em sua coordenada paramétrica, como ilustrado na Figura 11.

Os vetores também podem ser classificados como uniformes quando seus valores paramétricos variam com uma mesma razão. Os vetores de knots $\Xi = [0, 0, 0.5, 1, 1]$ e $\Xi = [0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1]$ são uniformes, enquanto $\Xi = [0, 0, 0, 0.3, 0.5, 1, 1, 1]$ não é.

Os *knots* nos extremos do vetor de *knots* são interpoladores quando possuem multiplicidade $m = p + 1$. Em geral, na Análise Isogeométrica são utilizados vetores com essa

Figura 11 – Funções de base *B-Splines* e suas continuidades no interior dos *spans* de um vetor de *knots* $\Xi = [0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5]$.



Fonte: Cottrell *et al.* (2009).

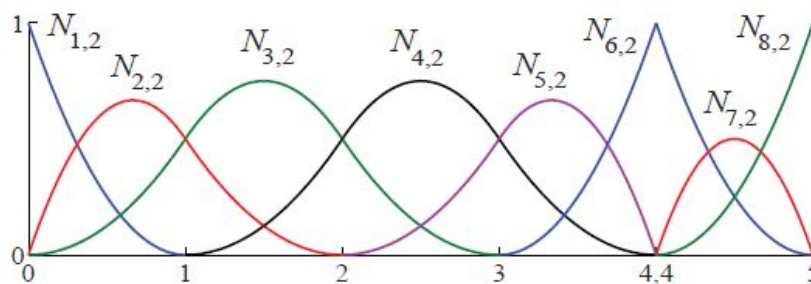
característica, classificados como vetor de *knots* abertos, garantindo que os pontos de controles inicial e final sejam interpolados. No caso dos *knots* internos, os mesmos serão interpolados quando possuírem multiplicidade $m = p$.

Cada base $N_{i,p}$ contribui ao longo do intervalo paramétrico $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$, sendo o número de bases não nulas em cada *knot span* sempre igual a $p + 1$, como apresentado na Figura 12. O número de bases pode ser calculado em função do tamanho do vetor de knots e pelo grau da curva, onde:

$$n = ks - p - 1 \quad (4.3)$$

onde n é o número de bases, ks é o tamanho do vetor de knots e p é o grau da curva.

Figura 12 – Funções de base *B-Splines* $p = 2$ e vetor de *knots* $\Xi = [0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5]$.



Fonte: Cottrell *et al.* (2009).

Como principais características das *B-Splines*, podem ser listadas:

1. Não-negatividade:

$$N_{i,p}(\xi) \geq 0 \quad (4.4)$$

2. Partição da unidade:

$$\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1 \quad (4.5)$$

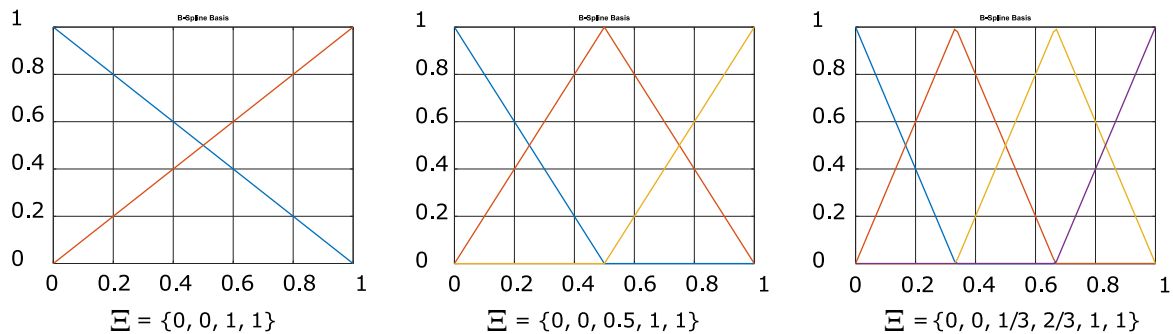
3. Suporte compacto: as funções de base $N_{i,p}(\xi)$ são nulas se ξ estiver fora do intervalo $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$;
4. Dado um *knot span*, $p + 1$ funções de base são não nulas neste intervalo;
5. Todas as derivadas de $N_{i,p}$ existem no interior dos *knot spans*. Nos *knots*, as bases são diferenciáveis $p - m$ vezes, sendo m a multiplicidade do *knot*.

4.1.2 Refinamentos

Quanto aos processos de refinamento utilizados nas *B-Splines*, são possíveis três tipos: *inserção de knot*, *elevação de grau* e *refinamento k*. Nos dois primeiros casos, existem refinamentos semelhantes no MEF, porém, no último tipo, não existe processo semelhante, sendo essa uma das vantagens apresentadas pelo AIG.

No refinamento por *inserção de knot*, ilustrado na Figura 13, um novo knot ξ_i é inserido no vetor Ξ , gerando uma nova base e um novo ponto de controle, sem alterar a geometria da curva. Em relação a análise estrutural, esse refinamento proporciona uma elevação no número de graus de liberdade, sendo semelhante ao *refinamento h* realizado no MEF.

Figura 13 – Refinamento por *inserção de knots*.

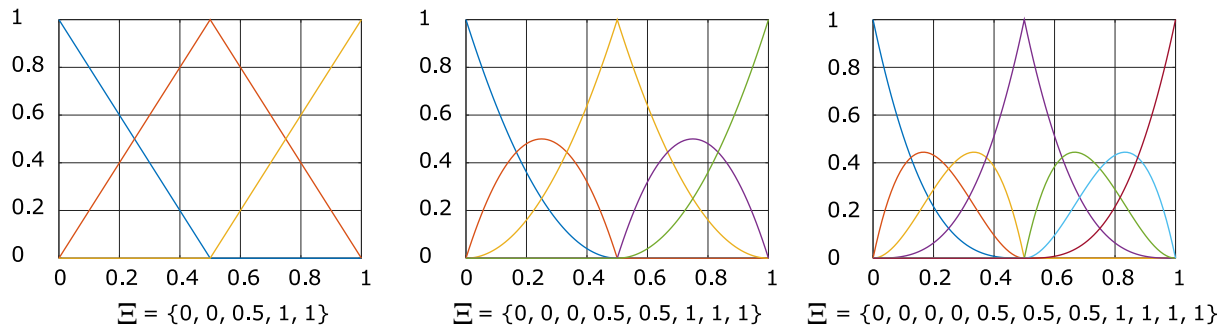


Fonte: Autor.

No refinamento por *elevação de grau*, ilustrado na Figura 14, acontece a elevação do grau da curva ao elevar a multiplicidade do *knot* em 1 dentro do intervalo paramétrico, mantendo sua continuidade. Em relação a análise estrutural, esse refinamento proporciona funções de forma de ordens mais elevadas, sendo uma melhoria do ponto de vista numérico, semelhante ao *refinamento p* realizado no MEF.

No *refinamento k*, ilustrado na Figura 15, é realizada a combinação dos dois processos acima, acontecendo, portanto, a elevação do grau do polinômio e a elevação da continuidade entre os *knots*.

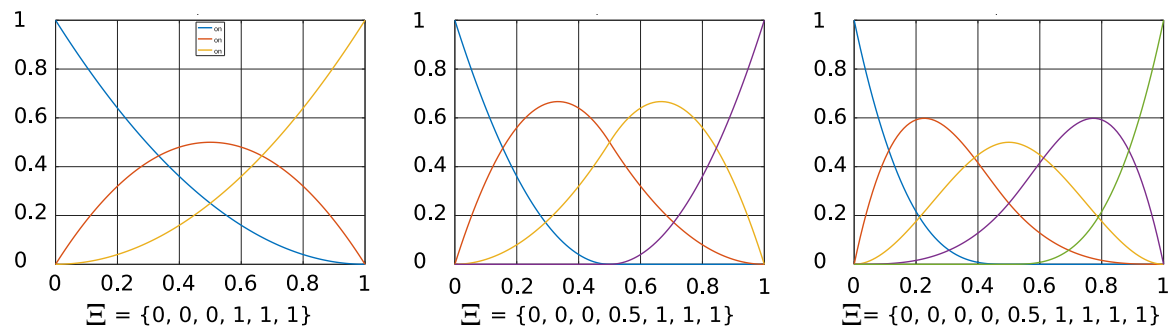
Figura 14 – Refinamento por *elevação de grau*.



Fonte: Autor.

É importante ressaltar que não é possível realizar esse refinamento no MEF devido a limitações impostas pelas funções de forma que o método utiliza.

Figura 15 – Refinamento *k*.



Fonte: Autor.

Mais detalhes sobre as implementações computacionais utilizadas para os processos de refinamento descritos podem ser obtidos no trabalho de Piegl & Tiller (1997).

4.1.3 *B-Splines Racionais*

Apesar de sua flexibilidade, as *B-Splines* são incapazes de representar curvas não polinomiais, como círculos e elipses. As NURBS, que são *B-Splines* racionais com vetores não uniformes, foram desenvolvidas para resolver este problema.

Uma curva NURBS é representada por uma base racional $H_{i,p}$ e pontos de controle \mathbf{p}_i através da expressão:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n H_{i,p}(\xi) \mathbf{p}_i \quad (4.6)$$

onde p é o grau da curva NURBS e n é o número de bases da curva. As funções de base racional

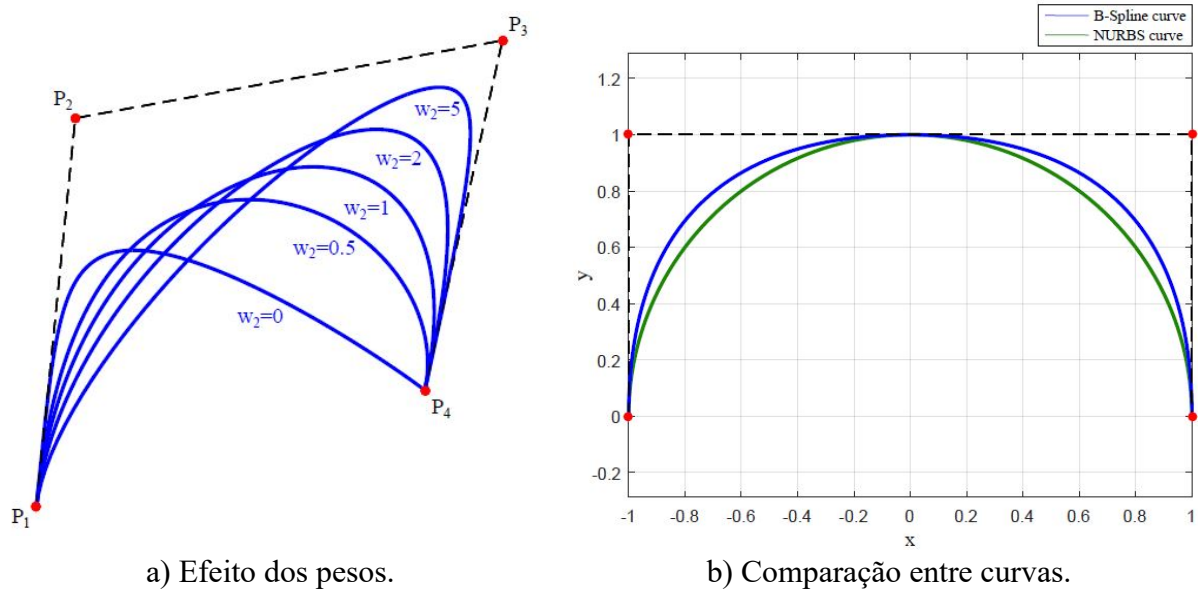
são dadas por:

$$H_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi)w_i} = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{W(\xi)} = \frac{A(\xi)}{W(\xi)} \quad (4.7)$$

$N_{i,p}(\xi)$ são funções de base *B-Splines* e w_i são os pesos relativos a cada ponto de controle.

A Figura 16.a ilustra o efeito do peso sobre uma curva NURBS. É possível observar que, variando-se os pesos, várias curvas distintas podem ser representadas através dos mesmos pontos de controle. A Figura 16.b ilustra uma semicircunferência modelada com NURBS e o arco de 180° modelado com uma *B-Spline* não racional.

Figura 16 – O efeitos dos pesos e a comparação com curvas NURBS e *B-Splines* na representação da geometria de uma semicircunferência.



a) Efeito dos pesos.

b) Comparação entre curvas.

Fonte: Adaptado de Barroso (2015).

É importante ressaltar que as funções de base racional herdam as características apresentadas anteriormente para as funções de base *B-Splines*, incluindo os processos de refinamento.

4.1.4 Superfícies NURBS

Uma superfície NURBS definida por um produto tensorial é obtida através do produto de duas bases univariantes NURBS. Dessa forma, uma superfície S é definida por um tensor de pontos de controle \mathbf{P} ($n \times m$), onde dada uma curva NURBS de grau p na direção ξ com vetor de *knots* $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}]$ e outra curva NURBS de grau q na direção η com vetor de *knots*

$\Omega = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n+p+1}]$, a superfície pode ser determinada por:

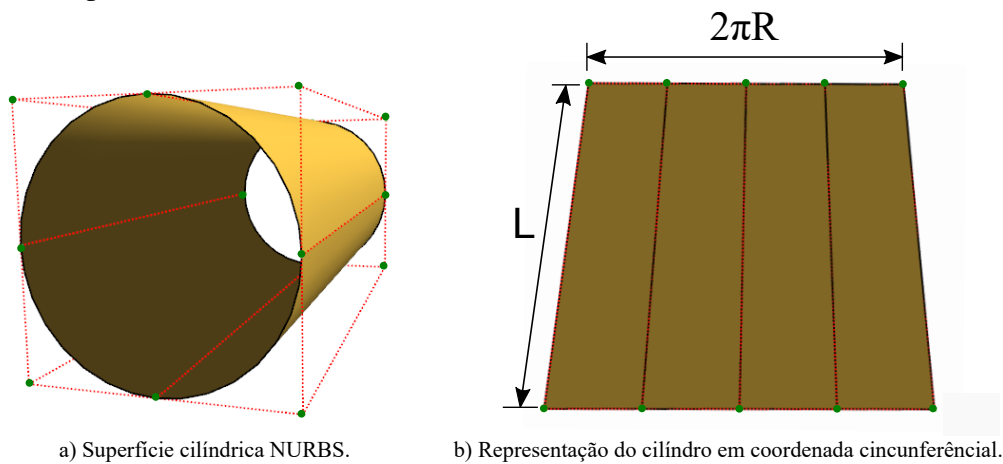
$$S(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n H_{i,j}(\xi, \eta) \mathbf{p}_{ij} \quad (4.8)$$

onde a função de base racional bivalente $H_{i,j}(\xi, \eta)$ é dada por:

$$H_{i,j}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)w_{ij}}{\sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi)N_{\hat{j},q}(\eta)w_{\hat{i}\hat{j}}} = \frac{N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)w_{ij}}{W(\xi, \eta)} \quad (4.9)$$

sendo $W(\xi, \eta)$ a função peso bivalente, $N_{i,p}(\xi)$ e $N_{j,q}(\eta)$ as funções de base *B-Splines* e w_{ij} os pesos relativos a cada ponto de controle.

Figura 17 – Superfícies NURBS.



a) Superfície cilíndrica NURBS.

b) Representação do cilindro em coordenada circunferencial.

Fonte: Autor.

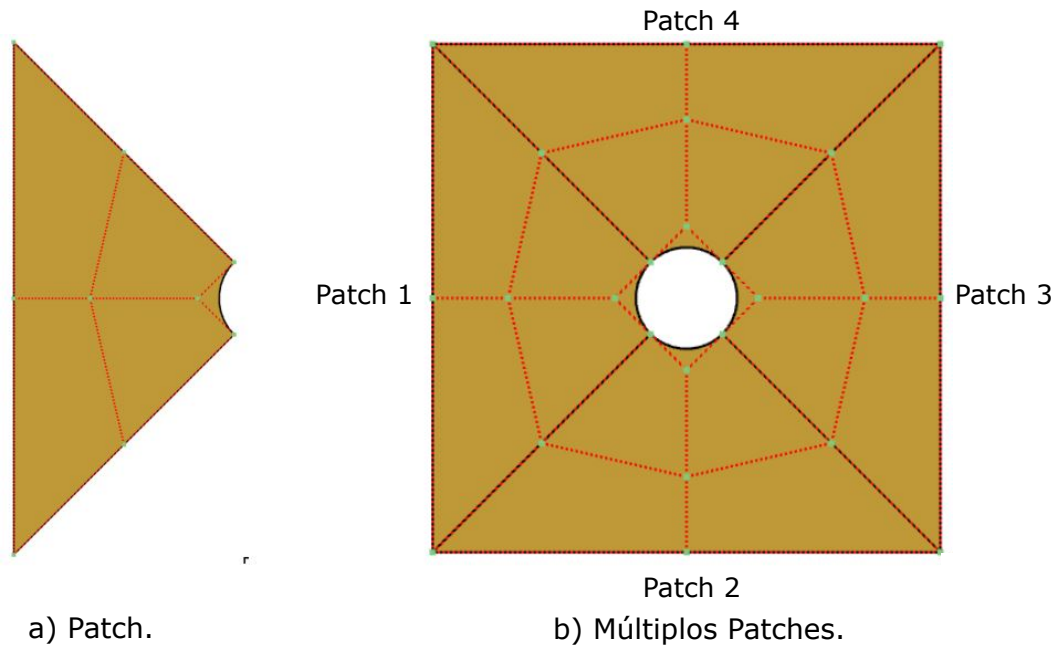
A Figura 17.a apresenta uma superfície cilíndrica modelada por NURBS. É importante ressaltar que no sistema de coordenadas apresentado na Figura 10 todos os pontos na superfície do cilindro estão em uma mesma coordenada z em relação ao seu eixo. Dessa forma, esses pontos podem ser modelados em um plano, como na Figura 17.b, sendo adotados pesos w_{ij} constantes e unitários, semelhante aos modelos de placas NURBS.

4.1.5 Múltiplos Patches

Em caso de AIG com estruturas de geometrias complexas, é possível utilizar modelos compostos por várias entidades NURBS (curvas, superfícies, sólidos), chamadas *patches*, de forma conjunta, onde cada uma delas terá atributos, como materiais e condições de contorno, distintos, contribuindo para a representação adequada do modelo. A Figura 18 apresenta a utilização dessa estratégia.

No entanto, apesar de oferecer benefícios em situações expostas acima, é importante observar que a utilização da estratégia de vários *patches* leva a uma redução na continuidade em suas fronteiras para C^0 , podendo resultar em resultados inesperados em problemas que exijam continuidade maior. A teoria de Reissner-Mindlin facilita a utilização dessa estratégia, uma vez que também possui continuidade C^0 , contribuindo na conexão entre os vários *patches*.

Figura 18 – Múltiplos *patches* em placa com geometria complexa.



Fonte: Autor.

4.2 Análise Não Linear Geométrica

Embora apresente bons resultados e ofereça simplicidade em sua utilização, a análise linear possui limitações quando as estruturas apresentam grandes deslocamentos ou seu material sai do regime elástico. De uma forma mais ampla, as estruturas apresentam um comportamento não linear quando estão próximas ao colapso.

Essa não linearidade pode se apresentar de três formas, sendo elas a não linearidade física, de contato e geométrica. No presente trabalho, será dada ênfase à não linearidade geométrica.

A não linearidade geométrica inclui os efeitos dos grandes deslocamentos sobre comportamento estrutural. Ao serem submetidas a um carregamento, as estruturas naturalmente se deformam em busca de uma configuração de equilíbrio. A não linearidade, nesse caso, expõe a diferença entre a configuração inicial, antes da aplicação do carregamento, chamada também

de indeformada, em relação a sua configuração deformada.

Entre os efeitos da consideração dos deslocamentos moderados e grandes nas estruturas estão o enrijecimento de vigas e placas, nesse último sendo mais acentuado, e o estudo da estabilidade dessas peças, onde seu equilíbrio é analisado, obrigatoriamente, em sua configuração deformada.

É importante ressaltar que, apesar das considerações sobre os deslocamentos, as deformações, ainda assim, são consideradas pequenas em função da limitação nos materiais, pois os mesmos não suportariam deformações excessivas sem comprometer a segurança do projeto.

Nas análises realizadas através de métodos numéricos, como no MEF e na AIG, os deslocamentos moderados e grandes são incorporados através de termos de deformações não lineares. Como formulações utilizadas para esse intento, podemos citar a Lagrangiana Total, Lagrangiana Atualizada e Corrotacional.

Na formulação Lagrangiana Total, as deformações são determinadas através dos termos de Green-Lagrange e as tensões compatíveis são determinadas pelos termos de Piola-Kirchoff II. Nela, a referência será a configuração indeformada, sendo o trabalho virtual integrado em seu volume inicial. Sua utilização em análises não lineares é extensa, pois produz expressões mais simples em relações a outras medidas de deformações.

Para a resolução das equações de equilíbrio não lineares, serão apresentados métodos numéricos apropriados, importantes para o traçado do caminho de equilíbrio, determinação dos pontos limites e caminhos secundários, fundamentais para o estudo da estabilidade.

4.3 Elemento de Casca Cilíndrica

Nesta seção será apresentada a formulação isogeométrica para análise de cascas cilíndricas. Esta formulação é baseada no campo de deformações apresentadas no Capítulo 3.

Na Análise Isogeométrica, utilizando uma formulação isoparamétrica, os deslocamentos da estrutura são interpolados utilizando as funções que descrevem sua geometria, sendo estas, como já apresentadas, as NURBS.

Desde modo, para as cascas cilíndricas, a geometria será representada da seguinte forma:

$$x = \sum_{i=1}^{nn} H_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^{nn} H_i y_i \quad R = \sum_{i=1}^{nn} H_i z_i \quad (4.10)$$

onde H_i são as funções de forma definidas pela Equação (4.7) e nn é o número de nós.

Os deslocamentos do modelo são aproximados a partir dos deslocamentos dos pontos de controle:

$$u = \sum_{i=1}^{nm} H_i u_i \quad v = \sum_{i=1}^{nm} H_i v_i \quad w = \sum_{i=1}^{nm} H_i w_i \quad \theta_x = \sum_{i=1}^{nm} H_i \theta_{xi} \quad \theta_y = \sum_{i=1}^{nm} H_i \theta_{yi} \quad (4.11)$$

sendo u , v e w os deslocamentos de membrana e transversal, respectivamente, θ_x e θ_y as rotações relacionadas à flexão. Utilizando uma notação matricial:

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{u}_e \quad (4.12)$$

sendo a contribuição em cada nó:

$$\mathbf{H}_i = H_i \mathbf{I}_{5 \times 5} \quad (4.13)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade.

A relação não linear de deformação-deslocamento é dada em termos da componente do deslocamento da superfície média da casca na Equação (3.7), apresentadas no Capítulo 3. O vetor de deformações e o vetor de deslocamentos nodais se relacionam através da matriz \mathbf{B} descrita abaixo:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^m \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0^m \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_L^m \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{u}_e \quad (4.14)$$

Onde as deformações de membrana são a soma de parcelas lineares e não lineares representadas, respectivamente, pelos subscritos 0 e L . As matrizes foram determinadas separadamente para cada termo apresentado na Equação (4.14). O termo de deformações de membrana lineares é dado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0^m = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} + \frac{w}{R} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_0^m \mathbf{u}_e \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}_0^m = \begin{bmatrix} H_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{i,y} & \frac{H_i}{R} & 0 & 0 \\ H_{i,y} & H_{i,x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

onde R é dado pela Equação (4.10). Já o termo de deformações de membrana não lineares é dado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L^m = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} w_{,x}^2 \\ w_{,y}^2 \\ 2w_{,x}w_{,y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_{,x} & 0 \\ 0 & w_{,y} \\ w_{,y} & w_{,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{u}_e \quad (4.16)$$

$$\varepsilon_L^m = \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{G} \mathbf{u}_e = \frac{1}{2} \mathbf{B}_L^m \mathbf{u}_e \Rightarrow \mathbf{B}_L^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{i,x} W_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{i,y} W_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{i,x} W_y + H_{i,y} W_x & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

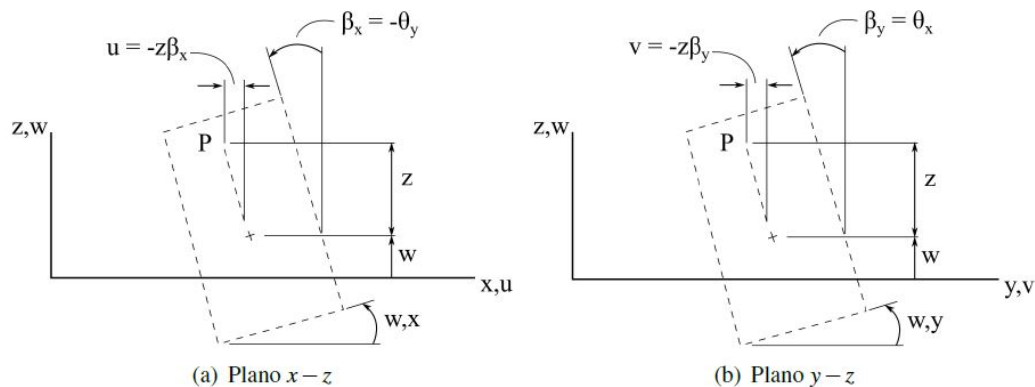
onde:

$$W_x = \sum_{n=1}^{nm} H_{i,x} w_i \quad W_y = \sum_{n=1}^{nm} H_{i,y} w_i \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} w_{,x} & 0 \\ 0 & w_{,y} \\ w_{,y} & w_{,x} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{i,y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Nas matrizes \mathbf{B} relativas à flexão e ao cisalhamento transversal, β_x e β_y são dados em termos das rotações cartesianas, como ilustrado na Figura 19:

$$\beta_x = \theta_y \quad \beta_y = -\theta_x \quad (4.19)$$

Figura 19 – Rotações cartesianas.



Fonte: Rocha (2013).

Dessa forma,

$$\kappa = \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_{y,x} \\ -\theta_{x,y} \\ \theta_{y,y} - \theta_{x,x} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_0^b \mathbf{u}_e \quad (4.20)$$

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \beta_x + w_{,x} \\ \beta_y + w_{,y} - \frac{v_0}{R} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_y + w_{,x} \\ -\theta_x + w_{,y} - \frac{v}{R} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_0^s \mathbf{u}_e \quad (4.21)$$

$$\mathbf{B}_0^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & H_{i,x} \\ 0 & 0 & 0 & -H_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -H_{i,x} & H_{i,y} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_0^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{i,x} & 0 & H_i \\ 0 & -\frac{H_i}{R} & H_{i,y} & -H_i & 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Portanto, a Equação (4.14) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^m \\ \mathbf{B}_0^b \\ \mathbf{B}_0^s \end{bmatrix} \mathbf{u}_e + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_L^m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_e = \left(\mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L \right) \mathbf{u}_e = \mathbf{B} \mathbf{u}_e \quad (4.23)$$

A partir do campo de deformações apresentado na Equação (4.14), as equações de equilíbrio do sistema podem ser obtidas através do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Aplicando o PTV, temos:

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}} \quad (4.24)$$

onde:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{V_0} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dV_0 = \int_{A_0} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^m)^T \mathbf{N} dA_0 + \int_{A_0} (\delta \boldsymbol{\kappa})^T \mathbf{M} dA_0 + \int_{A_0} (\delta \boldsymbol{\gamma})^T \mathbf{V} dA_0 \quad (4.25)$$

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_{V_0} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV_0 + \int_{A_0} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dA_0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i^T \mathbf{p}_i = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (4.26)$$

onde δW_{int} e δW_{ext} são as variações do trabalho interno e externo, respectivamente. Devido à formulação Lagrangeana Total, as integrais são feitas na área e volume inicial, representados, respectivamente, por A_0 e V_0 , sendo $\boldsymbol{\sigma}$ o vetor de tensões, \mathbf{b} , \mathbf{q} e \mathbf{p}_i , respectivamente, as forças de corpo, superfície e concentradas, assim como \mathbf{f} é o vetor de forças externas.

Para relacionar os incrementos de deformação $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ com os incrementos de deslocamentos nodais $\delta \mathbf{u}_e$, faz-se necessária a matriz $\bar{\mathbf{B}}$, obtida da seguinte forma:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_0^m \\ \delta \boldsymbol{\kappa} \\ \delta \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_L^m \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{B}} \delta \mathbf{u}_e \quad (4.27)$$

Os termos da Equação (4.27) podem ser reescritos como:

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_0^m &= \bar{\mathbf{B}}_0^m \delta \mathbf{u}_e = \mathbf{B}_0^m \delta \mathbf{u}_e \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon}_L^m &= \frac{1}{2} \delta (\mathbf{A} \mathbf{G}) \mathbf{u}_e + \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{G} \delta \mathbf{u}_e = \mathbf{A} \mathbf{G} \delta \mathbf{u}_e = \bar{\mathbf{B}}_L^m \delta \mathbf{u}_e = \mathbf{B}_L^m \delta \mathbf{u}_e \\ \delta \boldsymbol{\kappa} &= \bar{\mathbf{B}}_0^b \delta \mathbf{u}_e = \mathbf{B}_0^b \delta \mathbf{u}_e \\ \delta \boldsymbol{\gamma} &= \bar{\mathbf{B}}_0^s \delta \mathbf{u}_e = \mathbf{B}_0^s \delta \mathbf{u}_e \end{aligned} \quad (4.28)$$

Sendo reescrita, portanto, como:

$$\delta \varepsilon = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_0^m \\ \bar{\mathbf{B}}_0^b \\ \bar{\mathbf{B}}_0^s \end{Bmatrix} \delta \mathbf{u}_e + \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_L^m \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \delta \mathbf{u}_e = (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L) \delta \mathbf{u}_e = \bar{\mathbf{B}} \delta \mathbf{u}_e \quad (4.29)$$

Aplicando na Equação (4.25), tem-se:

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{u}^T \left[\int_{A_0} (\bar{\mathbf{B}})^T \mathbf{N} dA_0 + \int_{A_0} (\bar{\mathbf{B}}^b)^T \mathbf{M} dA_0 + \int_{A_0} (\bar{\mathbf{B}}^s)^T \mathbf{V} dA_0 \right] = \delta \mathbf{u}^T \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dA_0 \quad (4.30)$$

Aplicando o PTV e compactando as expressões, tem-se:

$$\delta \mathbf{u}^T \left(\int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dA_0 - \mathbf{f} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g}(\mathbf{u}) = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dA_0 \quad (4.31)$$

sendo $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ o vetor de forças internas. Pelo PTV, admite-se um incremento $\delta \mathbf{u}$ arbitrário e cinematicamente admissível, dessa forma é possível obter-se a condição de equilíbrio do sistema:

$$\mathbf{r} = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{f} = 0 \quad (4.32)$$

Para a solução das equações de equilíbrio não lineares serão utilizados algoritmos incrementais-iterativos discutidos posteriormente. Neles, será aplicado o método de Newton-Raphson que, por ser baseado na linearização das equações de equilíbrio, utiliza a matriz de rigidez tangente da estrutura:

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial [\mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}]}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \mathbf{u}} dA_0 + \int_{A_0} \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{u}} \hat{\boldsymbol{\sigma}} dA_0 = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma \quad (4.33)$$

Observando a primeira parcela da Equação (4.33), é possível obter-se:

$$\int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \mathbf{u}} dA_0 = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{u}} dA_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K}_L = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_t \bar{\mathbf{B}} dA_0 \quad (4.34)$$

onde \mathbf{K}_L é a parcela da matriz de rigidez que incorpora os termos geometricamente lineares e não lineares do modelo, assim como as considerações sobre o comportamento do material através da matriz constitutiva tangente \mathbf{C}_t .

A segunda parcela, por sua vez, apresenta a derivada parcial da matriz $\bar{\mathbf{B}}$ em relação aos deslocamentos nodais. Entretanto, sabe-se que a única parcela que depende dos deslocamentos é \mathbf{B}_L^m , sendo os esforços de membrana \mathbf{N} , portanto, os únicos de interesse. Assim, a expressão pode ser escrita como:

$$\int_{A_0} \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{u}} \hat{\boldsymbol{\sigma}} dA_0 = \int_{A_0} \frac{\partial (\mathbf{B}_L^m)^T}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{N} dA_0 = \mathbf{K}_\sigma \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K}_\sigma d\mathbf{u} = \int_{A_0} d(\mathbf{B}_L^m)^T \mathbf{N} dA_0 \quad (4.35)$$

Da Equação (4.16), obtém-se:

$$\mathbf{K}_\sigma d\mathbf{u} = \int_{A_0} (d(\mathbf{A}\mathbf{G}))^T \mathbf{N} dA_0 = \int_{A_0} \mathbf{G}^T d\mathbf{A}^T \mathbf{N} dA_0 = \left(\int_{A_0} \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G} dA_0 \right) d\mathbf{u} \quad (4.36)$$

Dessa forma, obtém-se a Matriz de Rigidez Geométrica \mathbf{K}_σ , dada por:

$$\mathbf{K}_\sigma = \int_{A_0} \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G} dA_0 \quad (4.37)$$

onde:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

4.4 Estabilidade das Estruturas

De uma forma geral, o colapso das estruturas pode se dar através da perda de resistência do material ou através da perda de sua estabilidade, sendo possível também a combinação desses dois processos.

A falha por perda de estabilidade ocorre em estruturas comprimidas e está relacionada com a rigidez e esbeltez dessas peças (CEDOLIN *et al.*, 2010). Ela pode ser caracterizada como uma grande variação no deslocamento de uma peça devido a uma pequena variação no carregamento aplicado (GALAMBOS; SUROVEK, 2008), acontecendo, muitas vezes, de forma repentina.

O estudo da estabilidade das estruturas possui diversos objetivos, como a determinação de sua carga crítica, modos de flambagem e caminho pós-crítico. O estudo do comportamento pós-crítico é fundamental em cascas, pois determina fatores como sensibilidade às imperfeições iniciais e reserva de carga no regime pós-crítico, além do tipo de perda de estabilidade, sendo feito através das curvas carga-deslocamento, também chamados de caminhos de equilíbrio. Essas curvas são obtidas pelos pares de solução (\mathbf{u}, λ) do sistema de equação de equilíbrio da estrutura, dado por:

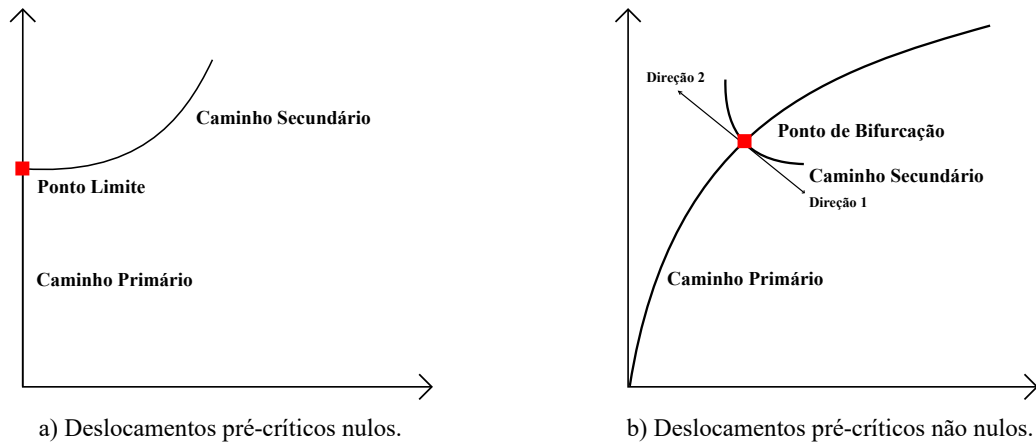
$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{q} \quad (4.39)$$

onde \mathbf{r} é o vetor de resíduos, \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos, \mathbf{q} é a carga de referência e λ é o fator de carga, que controla o nível de carregamento aplicado à estrutura.

$$\mathbf{f} = \lambda \mathbf{q} \quad (4.40)$$

Existem dois tipos de perda de estabilidade, sendo eles por bifurcação ou por ponto limite. A perda de estabilidade por bifurcação acontece quando dois ou mais caminhos de equilíbrio se cruzam, sendo o caminho inicial chamado de caminho primário e os demais de caminhos secundários ou pós-críticos, como ilustra a Figura 20. O ponto crítico, nesse caso, é chamado de ponto de bifurcação.

Figura 20 – Perda de estabilidade por bifurcação.

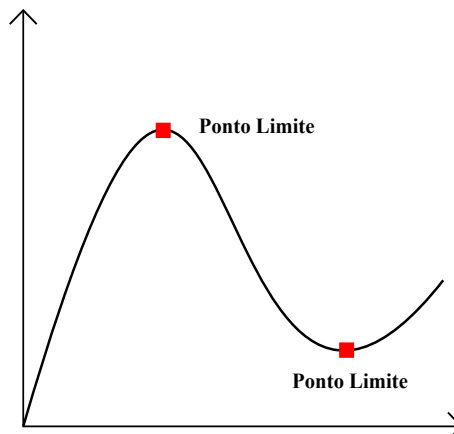


Fonte: Autor.

Já a perda de estabilidade por ponto limite se dá quando a tangente à curva é nula, como ilustra a Figura 21, sendo o tipo mais comum em estruturas reais. Em ambos os casos, porém, a matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_t é singular. Dessa forma:

$$\det \mathbf{K}_t(\mathbf{u}, \lambda) = 0 \quad (4.41)$$

Figura 21 – Perda de estabilidade por bifurcação.



Fonte: Autor.

O ponto crítico também pode ser identificado usando a condição do autovalor nulo:

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{u}, \lambda)\phi = 0, \quad \text{com } \|\phi\| = 1 \quad (4.42)$$

onde o modo de flambagem é representado pelo autovalor ϕ . A partir das Equações (4.39) e (4.42) é possível montar o sistema não linear estendido (WRIGGERS; SIMO, 1990):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) \\ \mathbf{K}_t(\mathbf{u}, \lambda)\phi \\ \|\phi\| - 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.43)$$

sendo o par de soluções do $(\mathbf{u}_{cr}, \lambda_{cr})$ do sistema apresentado na Equação (4.43) um ponto crítico. Para a classificação quanto ao tipo de flambagem, é realizada uma avaliação posterior ao cálculo do ponto crítico, sendo avaliado o modo de flambagem associado, de tal forma que (PARENTE *et al.*, 2006):

$$\begin{cases} \phi^T \bar{\mathbf{f}} \neq 0 & \Rightarrow \text{ponto limite} \\ \phi^T \bar{\mathbf{f}} = 0 & \Rightarrow \text{ponto de bifurcação} \end{cases} \quad (4.44)$$

onde $\bar{\mathbf{f}} = -\mathbf{r}$, λ , sendo $\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$ quando a estrutura é sujeita apenas a carregamentos mecânicos.

Quando os deslocamentos pré-críticos são pequenos, a matriz de rigidez \mathbf{K}_L , dada na Equação (4.34), pode ser obtida através de uma análise linear, uma vez que os termos não lineares da matriz $\bar{\mathbf{B}}$ são desprezíveis. A matriz de rigidez geométrica, por sua vez, é proporcional ao carregamento aplicado. Substituindo a Equação (4.33) na Equação (4.42), tem-se:

$$(\mathbf{K}_0 + \lambda \mathbf{K}_\sigma)\phi = 0 \quad (4.45)$$

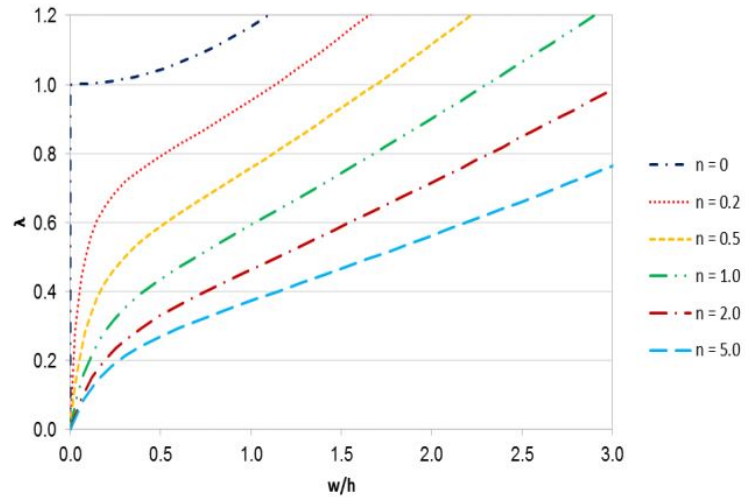
onde \mathbf{K}_0 é a rigidez inicial, obtida através de uma análise linear, λ é a carga crítica e ϕ é o modo de flambagem. Essa análise é conhecida como estabilidade linear (*eigenvalue buckling*) e oferece boas aproximações para a carga crítica de estruturas que sofrem perda de estabilidade com deslocamentos pré-críticos desprezíveis, como na Figura 20.

Entretanto, apesar de permitir o cálculo da carga crítica, o método não permite obter informações sobre o caminho pós-crítico, cuja importância pode ser evidenciada no caso dos materiais compósitos. Shen (2002), baseado nas contribuições de Leissa (1986) e Qatu e Leissa (1993), relata equívocos cometidos nas análises de estabilidades realizadas em estruturas com MGF.

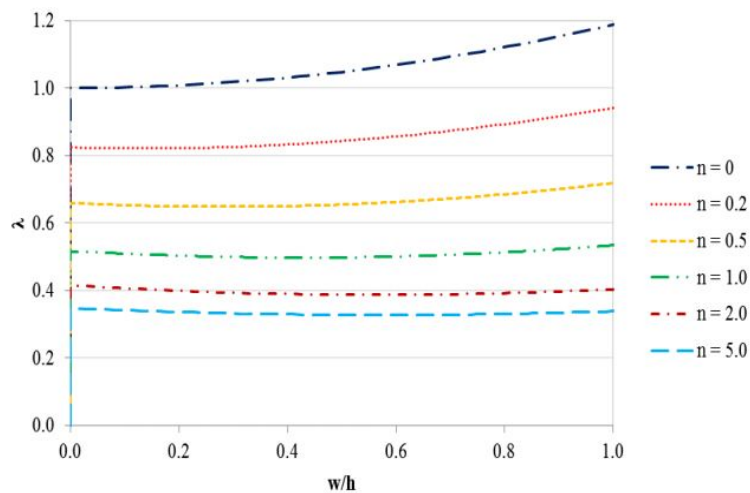
Nessas análises, é considerado que as placas com MGF sujeitas a carregamentos de compressão no plano e simplesmente apoiadas sofrem bifurcação. Essa situação não é possível,

uma vez que o comportamento dessas estruturas é similar ao de placas laminadas *cross-ply* assimétricas, sendo possível somente nos casos em que todos os lados estão engastados, pois os termos de acoplamento membrana-flexão da matriz **ABDG** são não nulos, causando a flexão desde o início da compressão centrada. Resultados em concordância com o exposto foram obtidos utilizando o software *FAST*, como apresentados na Figura 22.

Figura 22 – Caminho pós-crítico de placas de MGF.



(a) Simplesmente Apoiada



(b) Engastada

Fonte: Autor.

Dessa forma, ele conclui que as análises de estabilidade realizadas simplesmente como problema de autovetor podem ser incorretas, sendo necessário uma boa compreensão prévia do fenômeno. Portanto, é fundamental o conhecimento do comportamento pós-crítico, a fim de evitar equívocos.

Para isso, serão utilizados métodos numéricos apropriados, como os métodos de

traçado do caminho de equilíbrio (*path-following methods*) e *branch-switching*, discutidos a seguir.

4.5 Traçado do Caminho de Equilíbrio

Como abordado anteriormente, com os pares de solução (\mathbf{u} , λ) do sistema apresentado na Equação (4.39) é possível obter uma curva carga – deslocamento que representa o comportamento da estrutura, sendo, para seu traçado, utilizados alguns métodos numéricos, conhecidos como métodos de traçado do caminho de equilíbrio (*path-following methods*). Esse tópico é baseado nas contribuições de Parente Jr. e Souza Jr. (2014) e Parente Jr. *et al.* (2006).

Para a solução do sistema de equações, por serem não lineares, também é necessário um método apropriado, sendo o mais utilizado, como mencionado anteriormente, o método de Newton-Raphson. A partir dele, a Equação (4.39) é linearizada:

$$\mathbf{K}_t \delta \mathbf{u} - \mathbf{q} \delta \lambda = -\mathbf{r}_i \quad (4.46)$$

onde \mathbf{K}_t é a matriz de rigidez tangente do problema. Vale ressaltar que uma das principais razões para a utilização do método de Newton-Raphson está na sua convergência quadrática. De uma forma geral, é considerado que o processo convergiu quando:

$$\frac{\|\mathbf{r}\|}{\max(1, \|\mathbf{f}\|)} \leq tol \quad (4.47)$$

onde *tol* é uma tolerância adotada.

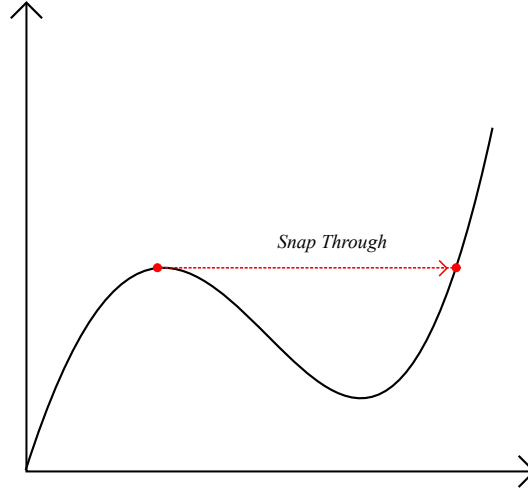
Como é possível observar, o sistema de equações apresentado na Equação (4.46) possui $n + 1$ incógnitas e n equações, não sendo possível, portanto, resolvê-lo. Para isso, são necessários os métodos de traçado do caminho de equilíbrio, como o método do controle de carga, controle de deslocamento e comprimento de arco (BATOZ; DHATT, 1979; WEMPNER, 1971; RIKS, 1979; CRISFIELD, 1981; RAMM, 1981).

O método do Controle de Carga é o mais simples entre eles, sendo o primeiro a ser desenvolvido. Nele, o incremento de deslocamentos é calculado mantendo um fator de carga constante, atualizando, assim, os deslocamentos nodais, que são utilizados para o cálculo dos vetores de forças internas e do resíduo, como apresentado na Equação (4.39). O processo iterativo permanece até a tolerância, como na Equação (4.47).

Apesar de ser intuitivo e de fácil utilização, o método do Controle de Carga é limitado, não sendo capaz de traçar caminhos de equilíbrio para estruturas que apresentem

pontos limite. A principal consequência disso é o surgimento de um fenômeno chamado salto dinâmico (*snap-through*), como ilustrado na Figura 23.

Figura 23 – Fenômeno *snap-through*.



Fonte: Autor.

Essa limitação acontece devido ao fator de carga ser mantido constante durante as interações. Para permitir sua variação, é necessário adicionar uma equação de restrição ao sistema apresentado na Equação (4.46), com objetivo de limitar os incrementos de carga e deslocamento calculados nas iterações (PARENTE *et al.*, 2006). Dessa forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) \\ a(\Delta\mathbf{u}, \Delta\lambda) \end{bmatrix} = 0 \quad (4.48)$$

onde $a(\mathbf{u}, \delta)$ é a restrição associada aos deslocamentos e ao fator de carga. Dessa forma, o sistema possui $n + 1$ equações e $n + 1$ incógnitas. Portanto, esse sistema pode ser resolvido, desde que a matriz dos coeficientes não seja singular.

Dados os valores de $\delta\mathbf{u}$ e $\delta\lambda$, os próximos passos da interação são calculados:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i+1} &= \mathbf{u}_i + \delta\mathbf{u} \\ \lambda_{i+1} &= \lambda_i + \delta\lambda \end{aligned} \quad (4.49)$$

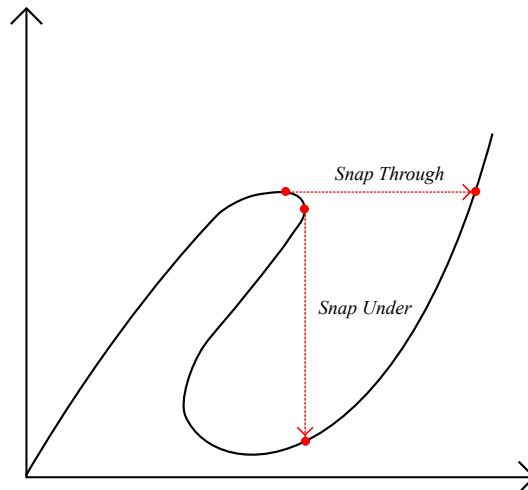
Os incrementos acumulados podem ser determinados por:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{u}_{i+1} &= \mathbf{u}_{i+1} - \bar{\mathbf{u}} \\ \Delta\lambda_{i+1} &= \lambda_{i+1} - \bar{\lambda} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Batoz e Dhett (1979) apresentaram o método do Controle de Deslocamentos. Nele, o deslocamento em um grau de liberdade é controlado, sendo seu incremento prescrito a cada

interação. Apesar dos avanços em relação ao salto dinâmico e serem métodos bastante intuitivos, uma vez que seus incrementos são em grandezas com um significado físico muito presente nas análises, os métodos citados não oferecem suporte para problemas cujo comportamento da estrutura é complexo, como mostra a Figura 24. Para isso, foi desenvolvido o método do Comprimento de Arco.

Figura 24 – Comportamento complexo de uma estrutura.



Fonte: Autor.

O método do Comprimento de Arco possui como parâmetro um critério geométrico, no caso a distância entre dois pontos sucessivos na curva de equilíbrio, em contrapartida aos métodos anteriores, cujos parâmetros eram físicos (carga e deslocamento) e mais intuitivos.

Esse método foi proposto por Wempner (1971) e Riks (1979), tendo como objetivo o traçado completo dos caminhos de equilíbrio de estruturas que apresentassem comportamentos complexos. Posteriormente, outras formulações para o método foram propostas, na qual se destaca o método do Comprimento de Arco Cilíndrico, proposto por Crisfield (1981) e Ramm (1981), os quais serão utilizados no presente trabalho. Mais detalhes sobre o método e sua implementação podem ser encontrados em Crisfield (1991).

Em análises realizadas por softwares comerciais, como o ABAQUS (SIMULIA, 2013), as respostas pós-críticas são obtidas através da introdução de pequenas imperfeições iniciais à estrutura. Entretanto, existem dificuldades para escolher a magnitude dessas imperfeições e a forma na qual elas são aplicadas, fazendo com que essas aproximações não sejam uma representação completa do fenômeno.

Os pontos limites, nesse caso, são calculados indiretamente utilizando incrementos no caminho de equilíbrio determinados por técnicas de comprimento de arco, sendo necessários

incrementos muito pequenos, o que é computacionalmente oneroso.

Embora importante no traçado dos caminhos das estruturas, em especial de estruturas com comportamento complexo, o método do Comprimento de Arco possui a limitação de capturar apenas o caminho primário das estruturas, não sendo capaz de traçar o caminho secundário no caso de estruturas que apresentam bifurcação.

Dessa forma, para além das abordagens numéricas utilizadas no traçado do caminho de equilíbrio, faz-se necessária a determinação de pontos críticos e caminhos pós-críticos. Para Battini *et al.* (2003) uma avaliação precisa dos pontos de bifurcação é necessária por dois fatores. O primeiro é que esses pontos frequentemente estabelecem condições críticas para o funcionamento da estrutura. O segundo, quando o caminho secundário precisa ser investigado, é necessário isolar esse ponto para que seja executado o traçado do caminho secundário. Os métodos utilizados para esse traçado são chamados na literatura de *branch-switching*.

Existem vários métodos de *branch-switching*. Parente *et al.* (2006) discute dois desses métodos. No primeiro, é utilizada uma adaptação do método do comprimento do arco cilíndrico, porém utilizando comprimentos de arco diferentes, uma vez que no caminho pré-crítico os passos dependem fundamentalmente do carregamento, enquanto no pós-crítico os termos dependem do deslocamento. No segundo caso, é utilizado o método do controle dos deslocamentos, sendo o controle feito sobre o grau de liberdade do maior componente do autovetor. Mais detalhes sobre a aplicação do método podem ser encontrados na referência.

Zhou *et al.* (2015) afirmam que, apesar dos grandes progressos feitos nos traçados desses caminhos, algumas características das respostas pós-críticas continuam despercebidas. Alguns exemplos consagrados na literatura foram revisitados, mostrando que neles haviam cargas críticas superestimadas e falsos modos de flambagem. O caminho secundário foi traçado a partir de uma perturbação no caminho primário, utilizando a direção do autovetor e um fator de escala adotado. Praciano (2018) obteve resultados semelhantes a Zhou *et al.* (2015) através dos procedimentos numéricos apresentados por Parente *et al.* (2006), também utilizados no presente trabalho.

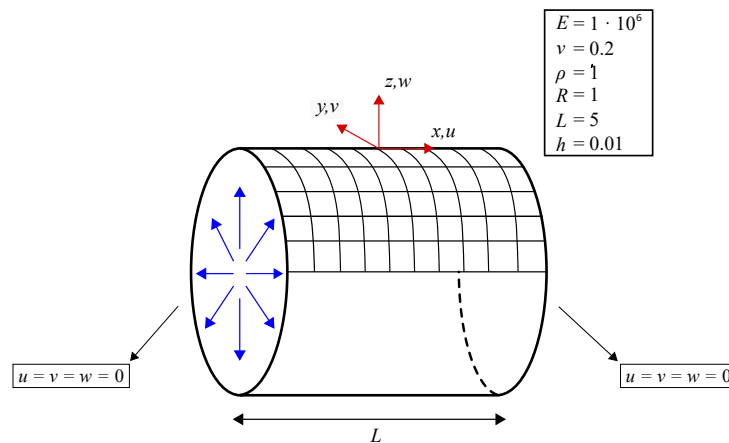
5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

5.1 Exemplos de Validação

5.1.1 Cilindro Fino Submetido à Pressão Interna

O presente exemplo foi obtido no trabalho de Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) e consiste na determinação dos deslocamentos radiais ao longo do comprimento de um cilindro de paredes finas sujeito a uma pressão interna. A geometria, carga e condições de contorno do problema são mostradas na Figura 25. O problema foi discretizado em 5 malhas distintas, sendo numeradas de 1 a 5, utilizando, respectivamente, 10, 40, 80, 160 e 320 elementos (e.g. 5×2), como mostrado na Figura 26, sendo dada preferência à discretização ao longo do eixo longitudinal, em especial nas regiões próximas às extremidades.

Figura 25 – Geometria, carregamento e condições de contorno do Exemplo 5.1.1.



Fonte: Autor.

A solução analítica do problema é dada por (TIMOSHENKO; WOINOWSKY-KRIEGER, 1959):

$$u(x) = -\frac{PR^2}{Eh} (1 - C_1 \sin \beta x \sinh \beta x - C_2 \cos \beta x \cosh \beta x) \quad x \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right] \quad (5.1)$$

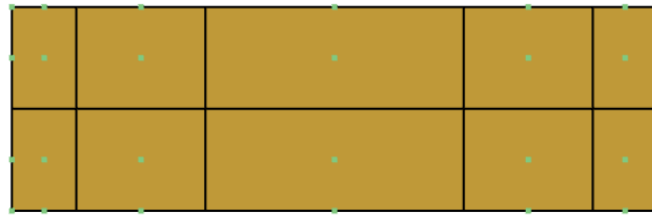
onde:

$$C_1 = \frac{\sin \alpha \cosh \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha}{\sinh \alpha \cosh \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}$$

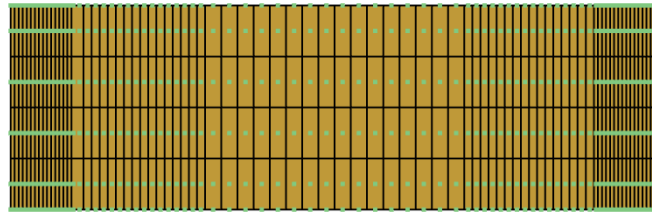
$$C_2 = \frac{\cos \alpha \sinh \alpha + \sin \alpha \cosh \alpha}{\sinh \alpha \cosh \alpha + \sin \alpha \cos \alpha} \quad (5.2)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^3)} \quad \beta = \left(\frac{Eh}{4R^2D} \right)^{(1/4)}; \quad \alpha = \frac{\beta L}{2};$$

Figura 26 – Malhas utilizadas no Exemplo 5.1.1.



a) Malha 1.



b) Malha 5.

Fonte: Autor.

Na Equação (5.1), o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson são substituídos respectivamente por $\frac{E}{1-\nu^2}$ e $\frac{\nu}{1-\nu}$. As propriedades do material são $E = 1 \cdot 10^5$ e $\nu = 0.2$.

O problema é solucionado através de uma Análise Isogeométrica, sendo utilizada a condição de simetria, de forma que um quarto do cilindro foi modelado. Os resultados apresentados na Figura 27 foram obtidos utilizando bases de diversos graus (p) e foi utilizado em todos os casos uma quadratura de Gauss completa. É válido ressaltar que na Análise Isogeométrica as malhas são definidas pelos *knots spans*.

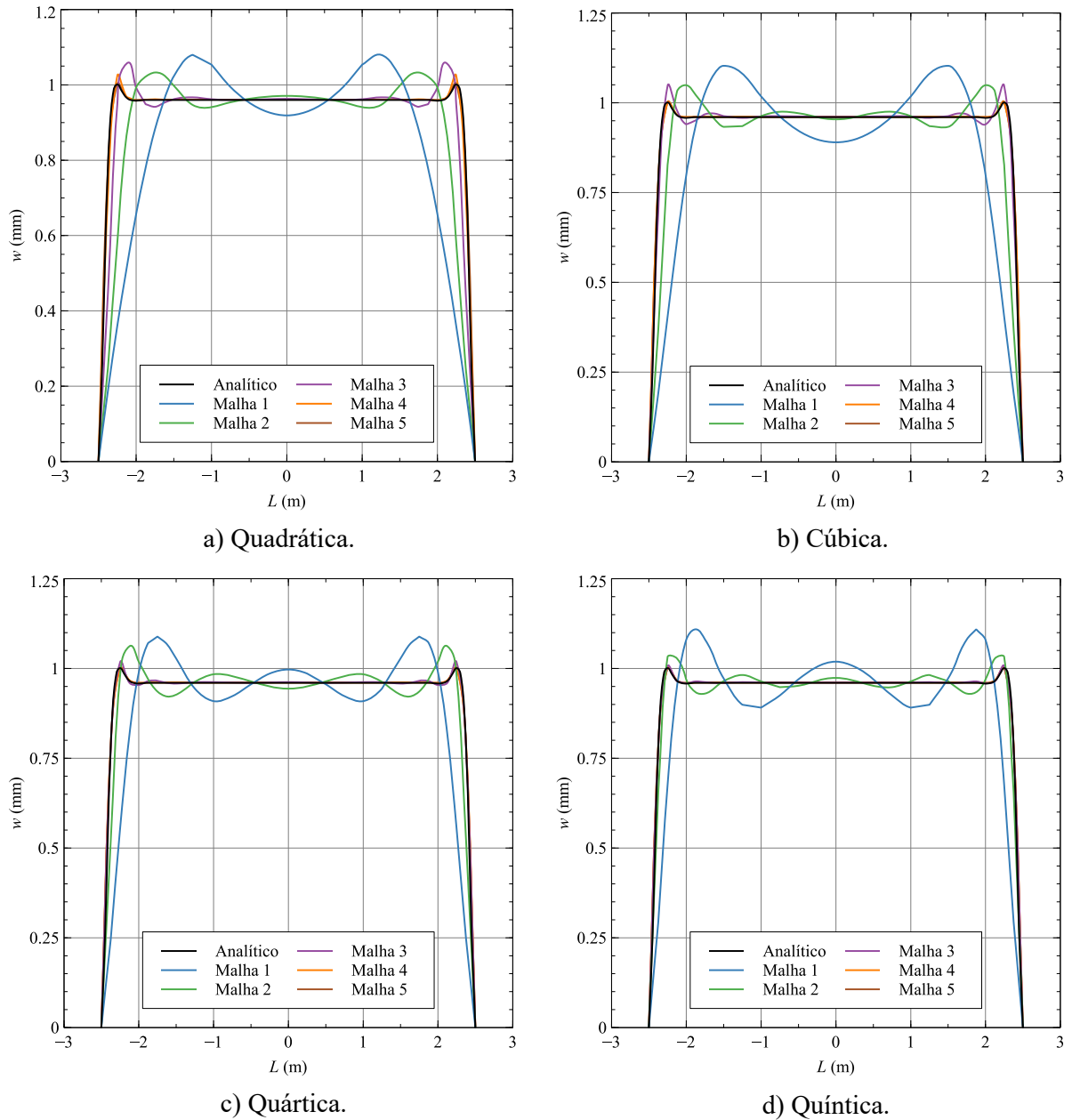
Através da Equação (5.1) foram obtidos os valores dos deslocamentos radiais no centro e seu valor máximo ao longo do comprimento, sendo, respectivamente, $w_c = 0.960$ na coordenada $x = 0$ e $w_{max} = 1.000$ na coordenada $x = -2.25$. A Figura 28 e as Tabelas 2 e 3 apresentam a relação entre esses valores e os valores obtidos pelas análises. Os valores são dados por w/w_c e w/w_{max} .

Tabela 2 – Relação w/w_c .

Grau (p)	Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
2	0.957	1.021	1.003	1.001	1.001
3	0.925	0.992	1.000	1.001	1.001
4	1.042	0.988	1.002	1.001	1.001
5	1.058	1.013	1.001	1.001	1.001

Fonte: Autor.

Figura 27 – Deslocamentos radiais considerando diferentes bases.



Fonte: Autor.

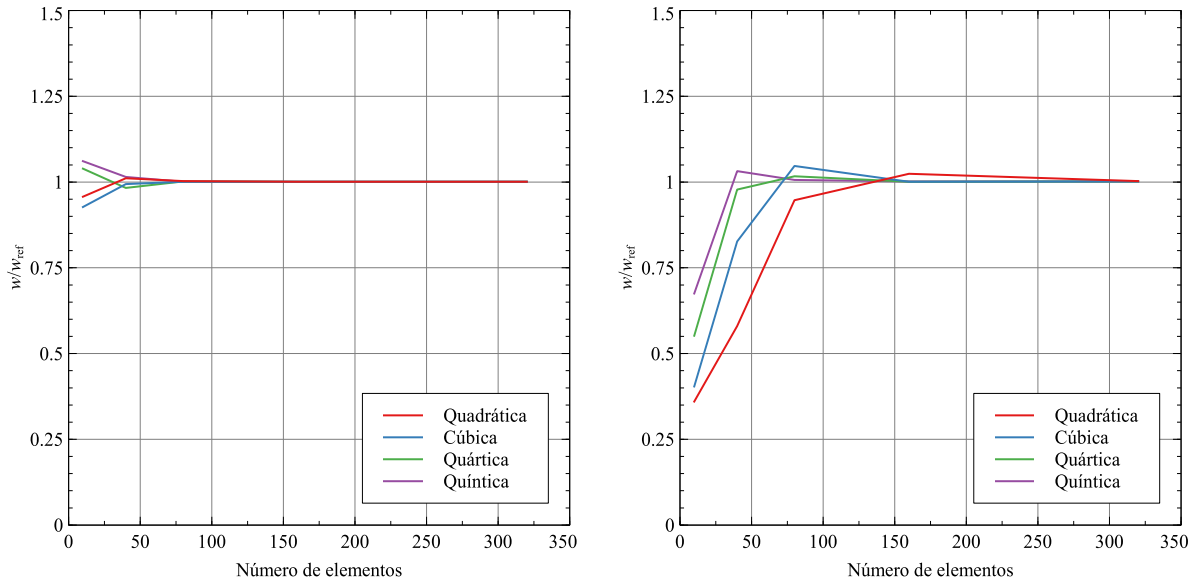
Tabela 3 – Relação w/w_{max} .

Grau (p)	Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
2	0.360	0.580	0.947	1.024	1.003
3	0.405	0.843	1.045	1.001	1.002
4	0.572	1.022	1.010	1.001	1.002
5	0.700	1.046	1.008	1.002	1.002

Fonte: Autor.

Observa-se que os resultados obtidos pelo modelo apresentam boa concordância com a solução analítica. A utilização de elementos de grau mais elevados fez com os resultados

Figura 28 – Deslocamentos radiais no centro w_c e no ponto de deslocamento máximo w_{max} .



a) Deslocamento no centro.

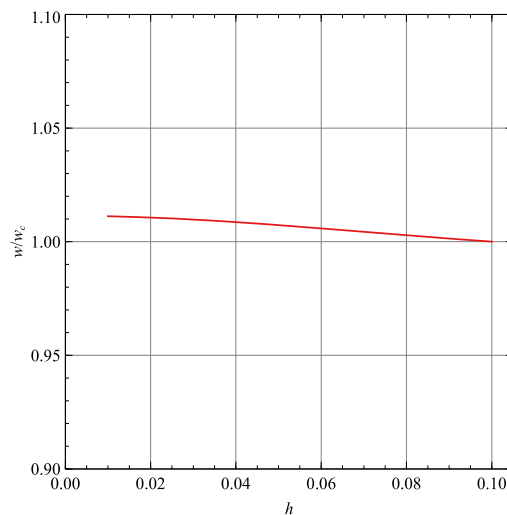
b) Deslocamento no pico.

Fonte: Autor.

obtidos fossem mais próximos à solução analítica com malhas menos refinadas.

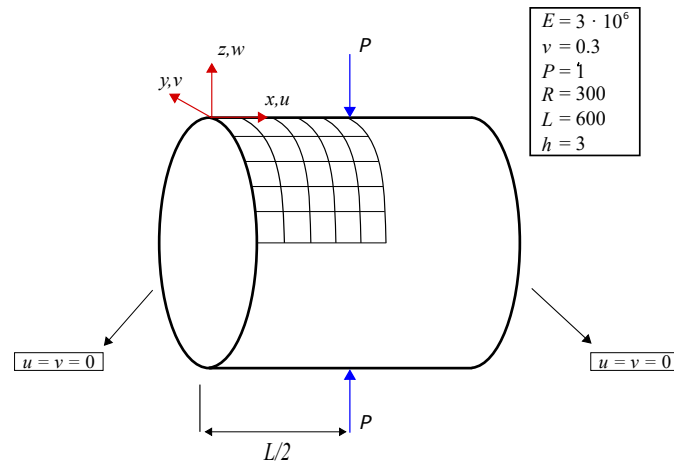
Fixou-se uma malha de 40 elementos (Malha 2) de funções de base quadrática e variou-se a espessura do cilindro de forma a verificar a relação w/w_c para cada espessura adotada. Os resultados são apresentados na Figura 29, onde é possível observar que ao aumentar a espessura do cilindro, há uma melhor aproximação dos resultados.

Figura 29 – Relação w/w_c para diversas espessuras.



Fonte: Autor.

Figura 30 – Geometria, carregamento e condições de contorno do Exemplo 5.1.2



Fonte: Autor.

5.1.2 Cilindro de paredes finas com carga concentrada no centro

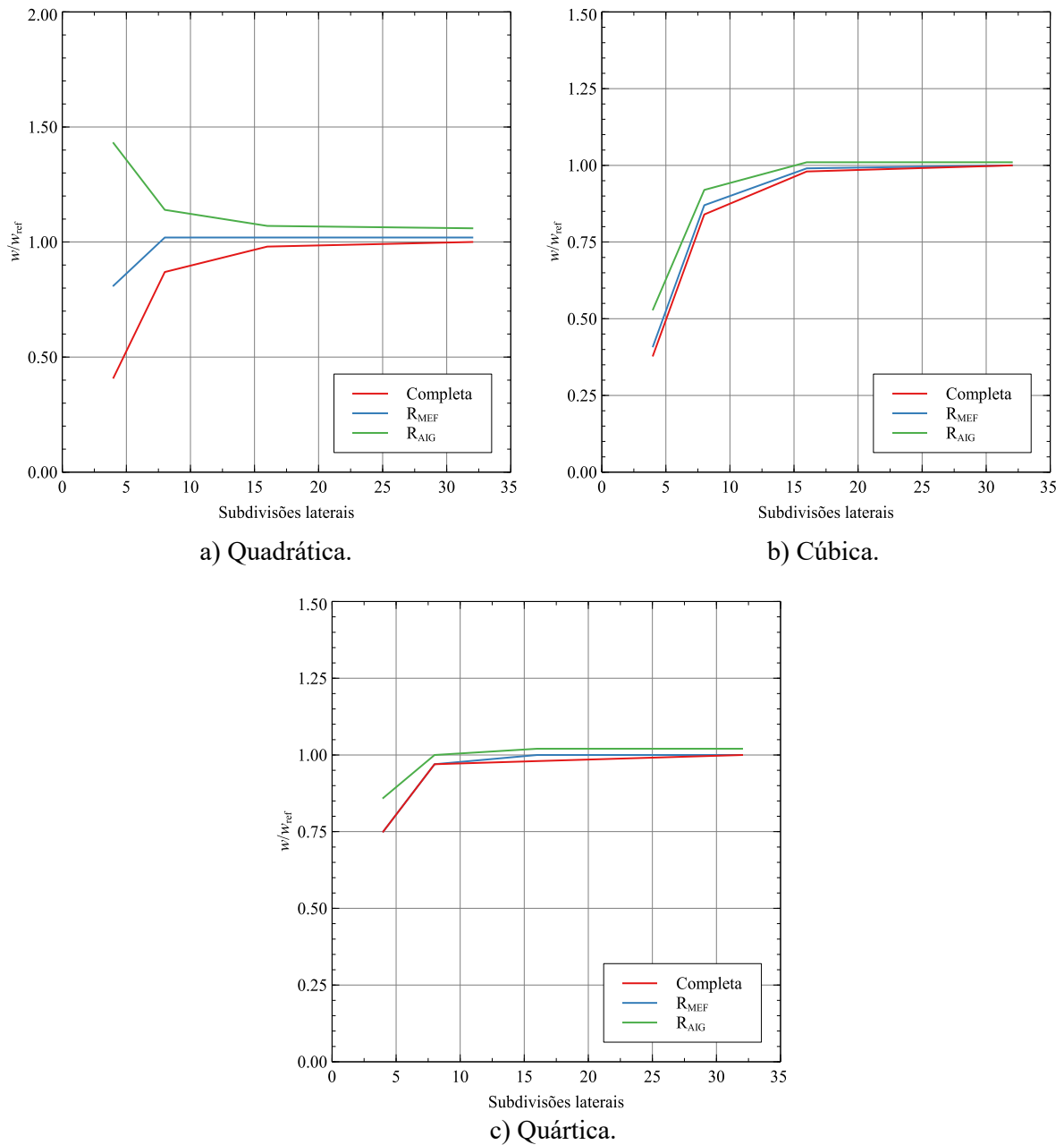
O presente exemplo foi obtido no trabalho de Belytschko *et al.* (1985) e consiste de um cilindro de paredes finas submetido a cargas concentradas de módulo igual, situadas em pontos opostos e localizadas no centro de seu comprimento. Este problema teste faz parte do *Shell Obstacle Course*, que são problemas teste de grande importância em análise de cascas, sendo explorado em diversos trabalhos e considerado um de seus mais severos testes (BELYTSCHKO *et al.*, 1985).

A geometria, carga e condições de contorno do problema são mostrados na Figura 30. Ele foi discretizado em 4 malhas distintas, numeradas de 1 a 4, utilizando, respectivamente, 16, 64, 256 e 1024 elementos, sendo todas malhas uniformes (e.g. 4×4).

Na solução numérica realizada é considerada a simetria do problema, de forma que apenas um oitavo do cilindro foi modelado. O cilindro é feito de um material isotrópico e suas propriedades são $E = 3.0 \cdot 10^6$ e $\nu = 0.3$. Os resultados apresentados na Figura 31 foram obtidos utilizando bases de diversos graus e três esquemas de integração distintos, sendo eles completa, R_{MEF} e R_{AIG} . Eles foram comparados com os resultados de Belytschko *et al.* (1985), cujo valor da deflexão radial obtida no ponto de aplicação da carga foi $w_{ref} = -1.8248 \cdot 10^{-5}$.

É possível observar que, para uma mesma malha, ao elevar o grau das funções de base o resultado melhora significativamente, como apresentado na Tabela 4. Com o refinamento do modelo, todos os esquemas de integração convergiram para o valor obtido pela referência. É possível observar também que embora apresente uma convergência mais lenta em relação a integração R_{AIG} , a integração R_{MEF} apresenta um comportamento mais estável, em especial

Figura 31 – Deslocamentos radiais no centro w e no ponto de aplicação da carga.



Fonte: Autor.

na base quadrática, onde o esquema proposto por Adam *et al.* (2015) fornece resultados mais flexíveis em relação ao valor de referência.

5.1.3 Casca cilíndrica com carga distribuída (Scordelis-Lo)

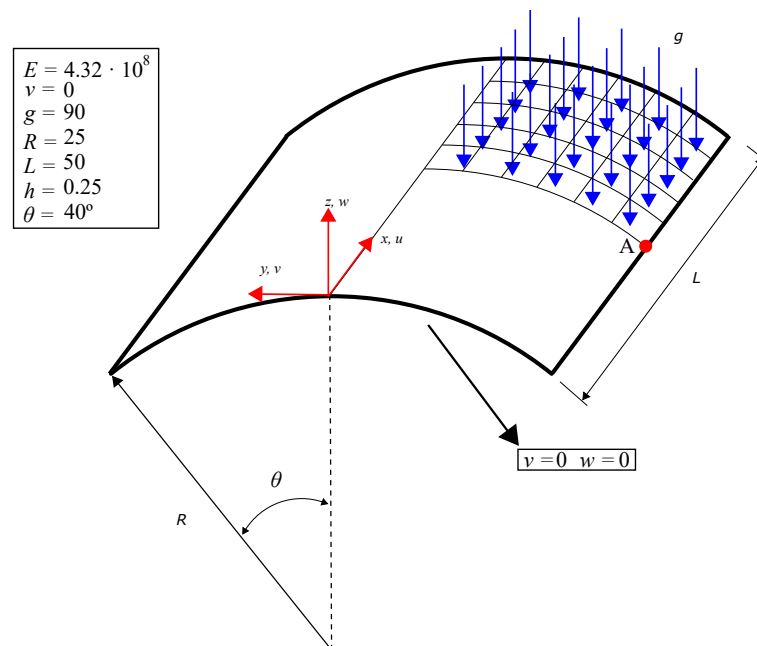
O presente exemplo foi obtido no trabalho de Belytschko *et al.* (1985) e consiste de uma casca cilíndrica carregada por uma carga vertical de peso próprio. Este problema teste,

Tabela 4 – Relação w/w_{ref} para uma mesma malha utilizando graus distintos.

Malha	Quadrática			Cúbica			Quártica		
	Completa	R_{MEF}	R_{AIG}	Completa	R_{MEF}	R_{AIG}	Completa	R_{MEF}	R_{AIG}
1	0.41	0.81	1.43	0.38	0.41	0.53	0.75	0.75	0.86
2	0.87	1.02	1.14	0.84	0.87	0.92	0.97	0.97	1.00
3	0.98	1.02	1.07	0.98	0.99	1.01	0.98	1.00	1.02
4	1.00	1.02	1.06	1.00	1.00	1.01	1.00	1.00	1.02

Fonte: Autor.

Figura 32 – Geometria, carregamento e condições de contorno do Exemplo 5.1.3.



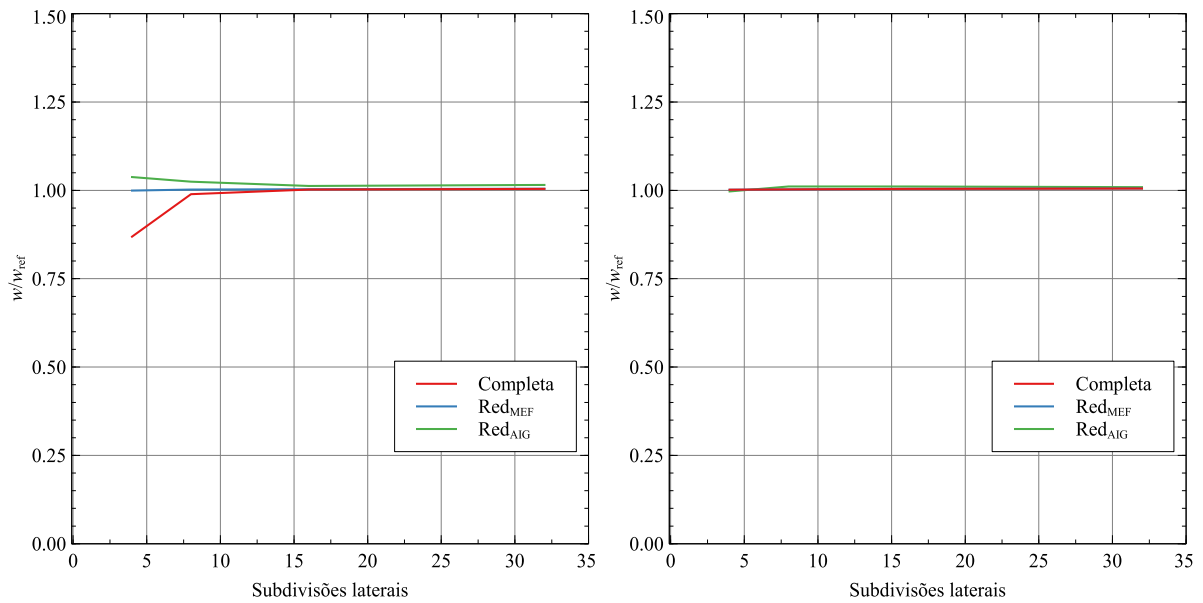
Fonte: Autor.

assim como o anterior, faz parte do *Shell Obstacle Course*.

A geometria, carga e condições de contorno do problema são mostrados na Figura 32. O problema foi discretizado em 4 malhas distintas, sendo numeradas de 1 a 4, utilizando, respectivamente, 16, 64, 256 e 1024 elementos, sendo todas malhas uniformes (e.g. 4×4).

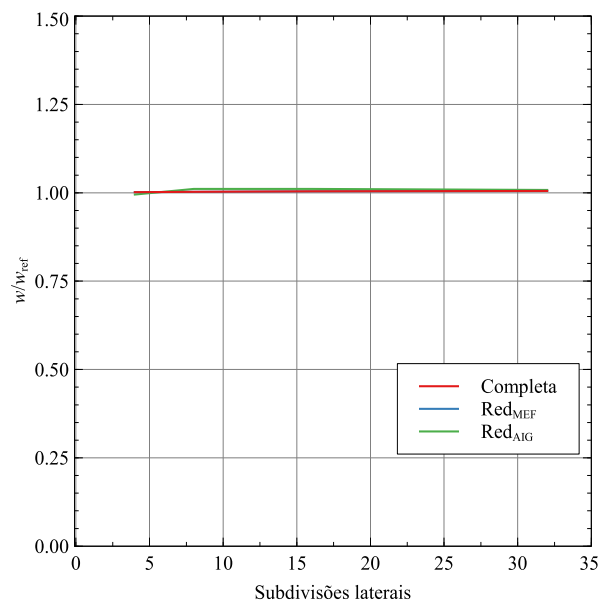
Na solução numérica realizada é considerada a simetria do problema, de forma que apenas um quarto da casca cilíndrica foi modelada. A casca é feita de um material isotrópico e suas propriedades são $E = 3.0 \cdot 10^6$ e $\nu = 0.3$. Os resultados apresentados na Figura 33 foram obtidos utilizando bases de diversos graus e três esquemas de integração distintos, sendo eles completa, R_{MEF} e R_{AIG} . Eles foram comparados com os resultados de Belytschko *et al.* (1985), cujo valor da deflexão vertical no ponto A indicado na Figura 32 foi $w_{ref} = -0.3024$.

Figura 33 – Relação w/w_{ref} para diferentes malhas e funções de base no Exemplo 5.1.3.



a) Quadrática.

b) Cúbica.



c) Quártica.

Fonte: Autor.

Observa-se que os resultados apresentaram uma rápida e boa convergência com os resultados da referência. Quando comparado com o Exemplo 5.1.2, é possível observar uma convergência mais rápida. Isso se deve à presença da carga concentrada no exemplo anterior, que provoca uma considerável descontinuidade ao problema, enquanto isso não ocorre no presente exemplo devido a a carga ser distribuída.

É possível observar que ao elevar o grau das funções de base o resultado melhora significativamente para uma mesma malha, como apresentado na Tabela 4. Com o refinamento

do modelo, todos os esquemas de integração convergiram para o valor obtido pela referência. Assim como no exemplo anterior, a integração R_{MEF} apresenta um comportamento mais estável, em especial na base quadrática.

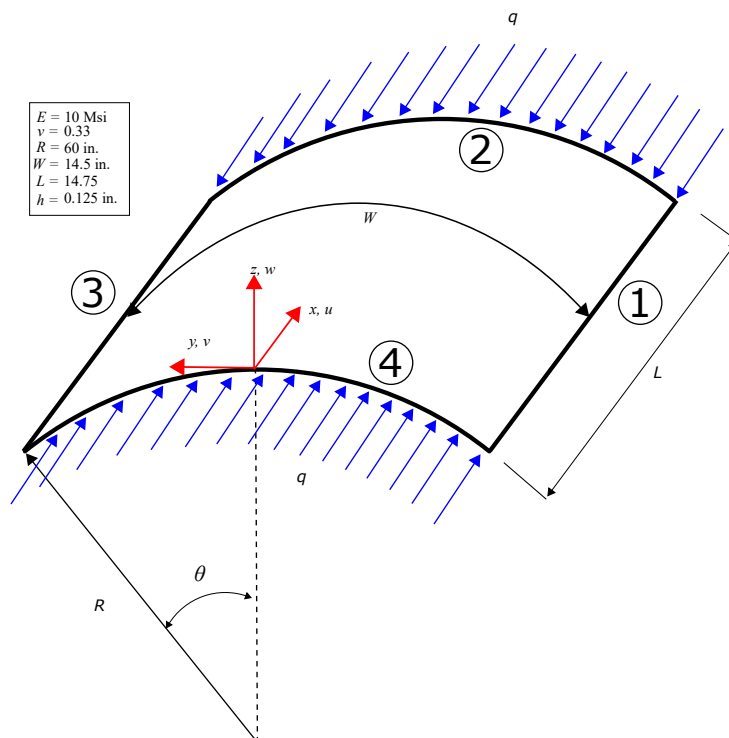
Tabela 5 – Relação w/w_{ref} no Exemplo 5.1.5.

Malha	Quadrática			Cúbica			Quártica		
	Completa	R_{MEF}	R_{AIG}	Completa	R_{MEF}	R_{AIG}	Completa	R_{MEF}	R_{AIG}
1	0.869	0.999	1.038	1.002	1.002	0.997	1.002	1.002	0.995
2	0.989	1.002	1.025	1.003	1.003	1.011	1.003	1.003	1.011
3	1.002	1.003	1.013	1.004	1.004	1.011	1.004	1.004	1.011
4	1.004	1.005	1.016	1.005	1.005	1.009	1.005	1.005	1.008

Fonte: Autor.

5.1.4 Painel curvo Submetido à Compressão Uniaxial

Figura 34 – Geometria, carregamento e condições de contorno do Exemplo 5.1.4.



Fonte: Autor.

O presente exemplo foi baseado no trabalho de Thornburgh e Hilburger (2005) e consiste de um painel curvo isotrópico sujeito a compressão uniaxial. Este problema também foi analisado por Liew *et al.* (2014) e Macías *et al.* (2017).

A geometria, carga e condições de contorno do problema são mostrados na Figura 34.

Ele foi discretizado em 3 malhas distintas, sendo numeradas de 1 a 3, utilizando, respectivamente, 64, 256 e 1024 elementos, sendo todas malhas uniformes (e.g. 8×8).

As condições de contorno indicadas na Figura 34 são:

$$\text{Laterais 1 e 3 (Simplesmente apoiadas)} : w_0 = \theta_x = 0; \quad (5.3)$$

$$\text{Laterais 2 e 4 (Engastadas)} : v_0 = w_0 = \theta_x = \theta_y = 0$$

Inicialmente, o material considerado é o alumínio, cujas propriedades são $E = 10\text{Msi}$ e $\nu = 0.33$. Os resultados foram obtidos utilizando bases de diversos graus e três esquemas de integração distintos, sendo eles completa, R_{MEF} e R_{AIG} . Eles foram comparados com os resultados obtidos no ABAQUS utilizando uma malha 80×80 elementos quadráticos do tipo S8R. Inicialmente, foi realizado um estudo da carga crítica, onde $P = q \cdot W$, cujos resultados são apresentados na Figura 35. A escolha da utilização do software se deu por possibilitar a comparação entre condições de contorno idênticas em ambos os modelos. No ABAQUS, o valor obtido foi $P_{cr} = 23.57\text{kips}$.

Os resultados mostram que todos os esquemas de integração convergiram para o valor obtido pela referência, sendo possível observar uma melhora na resposta com a utilização de bases de grau mais elevado.

Tabela 6 – Relação $P_{cr}^{AIG}/P_{cr}^{MEF}$ para o Exemplo 5.1.4.

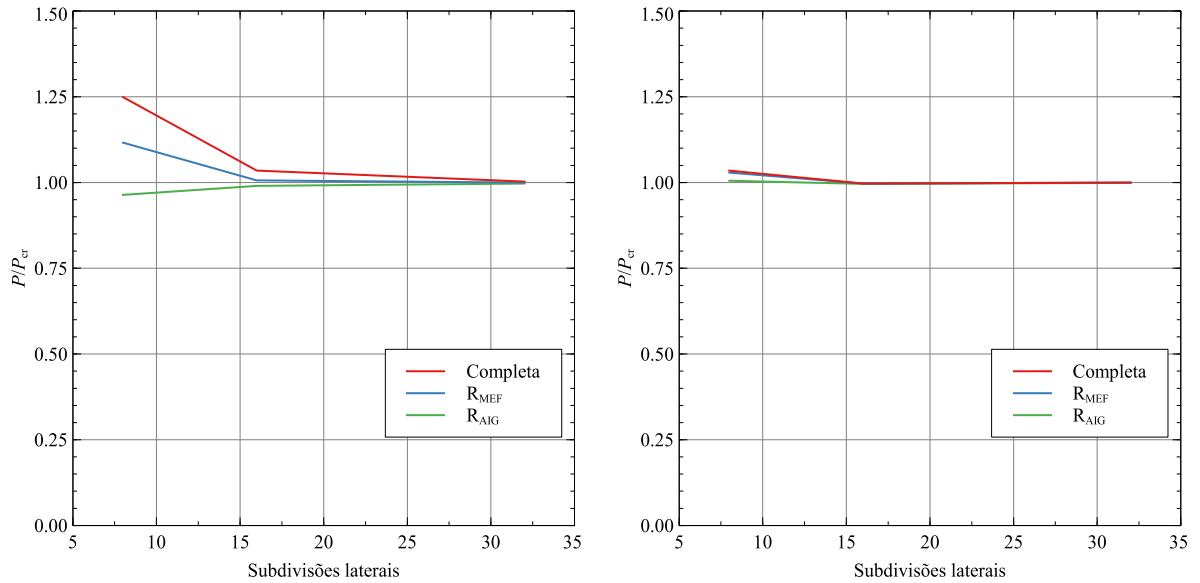
Malha	Quadrática			Cúbica			Quártica		
	Completa	R_{MEF}	R_{AIG}	Completa	R_{MEF}	R_{AIG}	Completa	R_{MEF}	R_{AIG}
1	1.249	1.116	0.964	1.035	1.029	1.005	0.996	0.996	0.988
2	1.035	1.006	0.990	0.997	0.997	0.996	0.998	0.998	0.995
3	1.003	1.000	0.997	1.000	1.000	0.999	0.990	0.990	0.990

Fonte: Autor.

Na sequência, foi realizado o estudo do caminho pós-crítico. Para isso, utilizou-se um modelo de base cúbica e uma malha de 256 elementos (16×16). Foi utilizada no ABAQUS a mesma malha do estudo anterior. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 36.a. Em ambos os casos, aplicou-se uma carga concentrada no centro da casca, com o objetivo de gerar uma imperfeição que possibilitasse sua bifurcação.

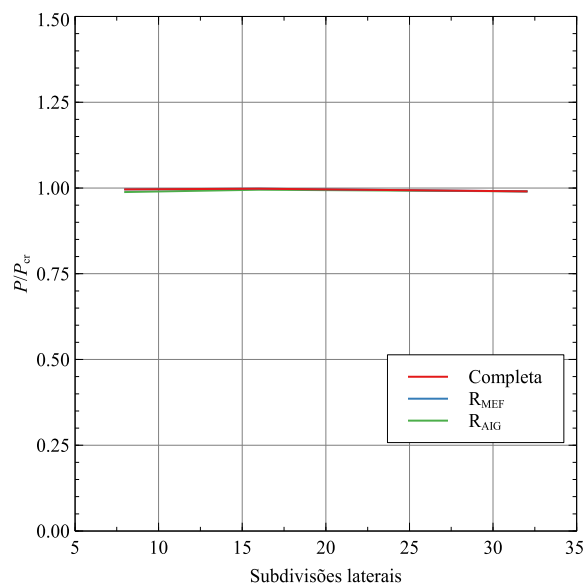
O resultado obtido também foi comparado com as demais referências sendo apresentado na Figura 36b. Thornburgh & Hilburguer (2005) obtiveram o resultado por ensaio experimental e por uma análise de elementos finitos, onde as condições de contorno foram consideradas através de sub-rotinas baseadas nas imperfeições medidas na casca e nos apoios aplicados, ambas medições foram realizadas com instrumentos adequados. Liew *et al.* (2014)

Figura 35 – Relação $P_{cr}^{AIG}/P_{cr}^{MEF}$ para diferentes malhas e funções de base no Exemplo 5.1.4.



a) Quadrática.

b) Cúbica.



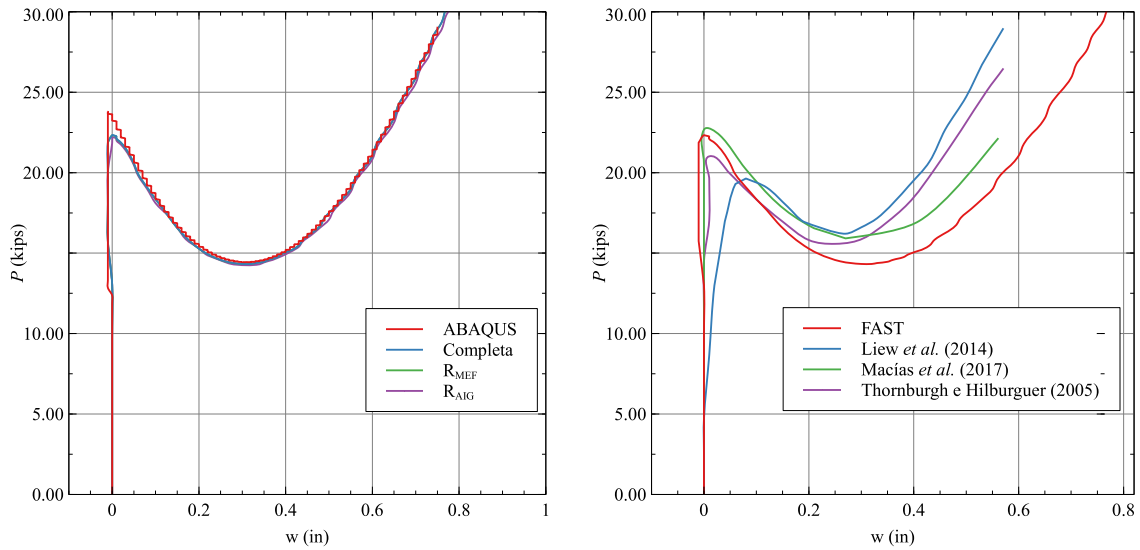
c) Quártica.

Fonte: Autor.

utilizaram o método de Ritz. Macías *et al.* (2017) realizaram a análise de elementos finitos através do software ANSYS e compararam seus resultados aos obtidos pelas duas referências anteriores, frisando que, embora seu resultado pré-crítico seja similar ao obtido por Thornburgh e Hilburguer (2005), seu resultado pós-crítico apresenta diferenças. Quando comparado ao resultado de Liew *et al.* (2014), há diferenças em ambas as etapas. O trabalho justifica que as diferenças se dão devido às diversas teorias adotadas.

O resultado obtido no caminho pré-crítico é próximo aos obtidos por Thornburgh

Figura 36 – Caminho pós-crítico para o Exemplo 5.1.4.



a) Comparação entre ABAQUS e FAST.

b) Comparação entre FAST e demais referências.

Fonte: Autor.

e Hilburguer (2005) e Macías *et al.* (2017), embora haja diferenças nos caminhos pós-críticos. Quando comparado ao resultado obtido por Liew *et al.* (2014), há diferenças em ambas as etapas. Todavia, em todos os casos o comportamento qualitativo das curvas são similares, reforçando que as diferenças se dão devido às teorias adotadas e às condições de contorno utilizadas.

5.1.5 Casca abatida submetida a carga concentrada

O presente exemplo foi obtido no trabalho de Sze *et al.* (2004) e consiste de uma casca cilíndrica submetida a uma carga concentrada no centro, sendo um *benchmark* analisado por vários autores, sendo inicialmente analisado por Sabir e Lock (1972).

A geometria, carga e condições de contorno do problema são mostrados na Figura 37. Ele foi discretizado em 3 malhas distintas, sendo numeradas de 1 a 3, utilizando, respectivamente, 256, 1024 e 2304 elementos, sendo todas malhas uniformes (e.g. 16×16).

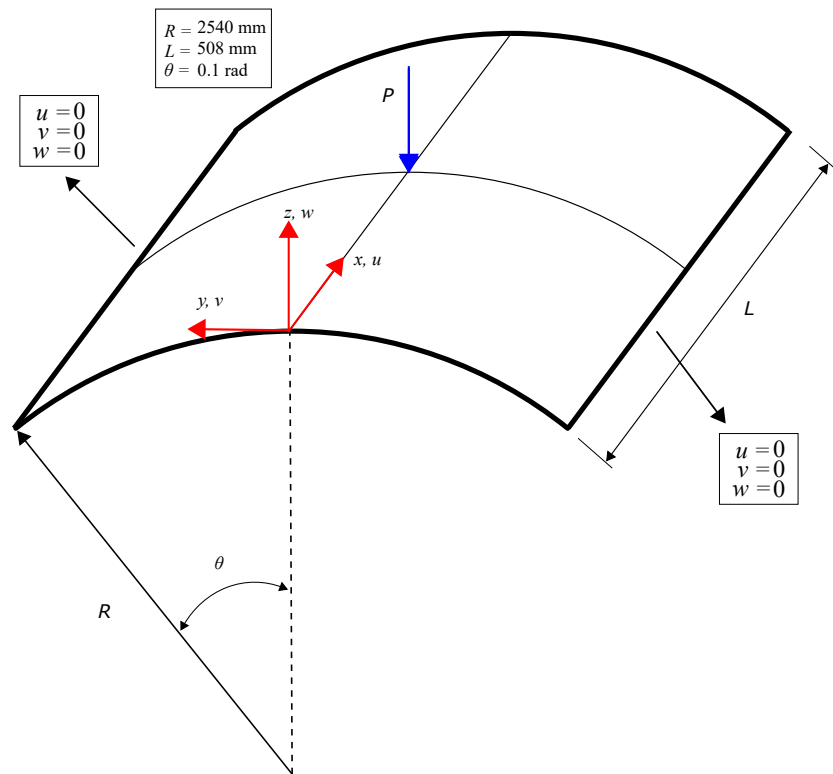
Tabela 7 – Propriedades do material compósito utilizado no Exemplo 5.1.5.

E_1 (MPa)	E_2 (MPa)	ν_{12}	$G_{12} = G_{13}$ (MPa)	G_{23} (MPa)
3000	1100	0.25	660	440

Fonte: Autor.

Inicialmente, são realizadas análises para cascas de material isotrópico, cujas propriedades são $E = 3102.75$ MPa e $\nu = 0.3$, e material compósito, cujas propriedades são descritas na Tabela 7, sendo a direção 0° das fibras paralelas ao eixo x .

Figura 37 – Geometria, carregamento e condições de contorno do Exemplo 5.1.5.



Fonte: Autor.

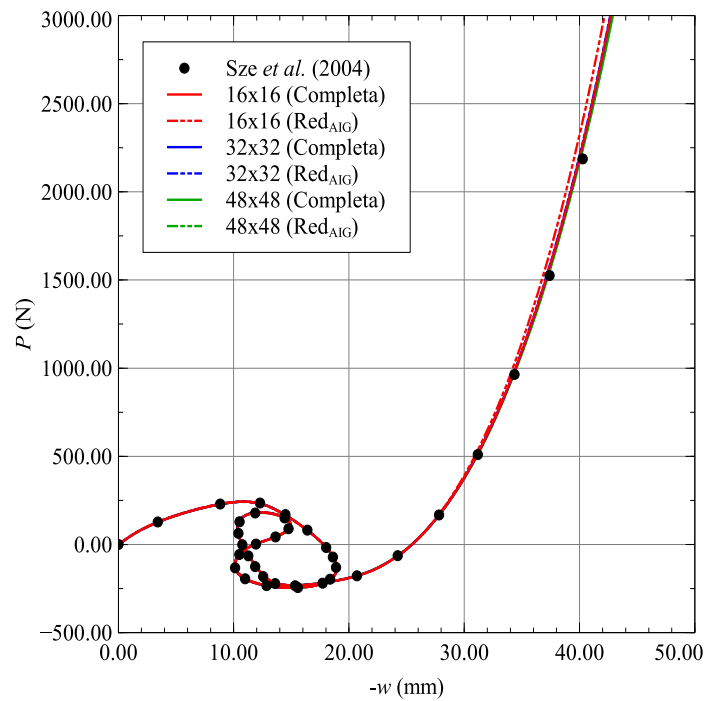
Foram consideradas duas espessuras distintas, sendo elas $h = 6.35 \text{ mm}$ e $h = 12.7 \text{ mm}$. Para $h = 6.35 \text{ mm}$ a estrutura apresenta um comportamento complexo nos três casos, onde é possível ver a presença de fenômenos como *snap-through* e *snap-back*. Na Figura 38 foram utilizadas funções de base cúbicas variando o número de elementos. Em ambos os casos anteriores, são utilizadas os esquemas de integração completa e R_{AIG} .

Na Figura 39 foi fixada uma malha 16×16 e utilizadas funções de base quadráticas, cúbicas e quárticas. Na Figura 40 são utilizadas malhas 16×16 e funções de base cúbicas, com integração R_{AIG} .

Os resultados para as malhas mais refinadas (16×16 e 24×24) são quase idênticos, assim como para as funções de base cúbica e quártica. Observa-se maiores diferenças entre as curvas obtidas por AIG e a curva obtida por Sze *et al.* (2004) apenas quando os deslocamentos são superiores à 30 mm. O resultado mostrado na Figura 41 apresenta o ponto de bifurcação presente no caminho primário da estrutura.

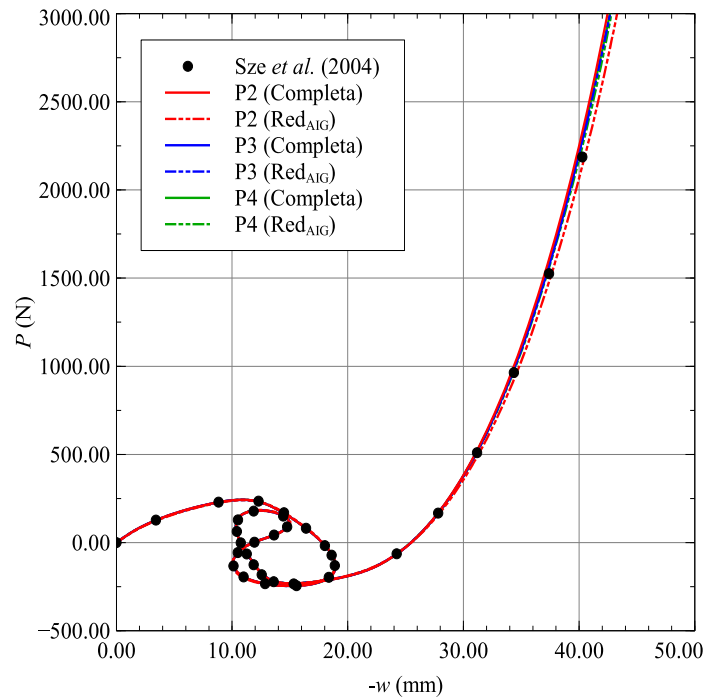
Já para $h = 12.7 \text{ mm}$ a estrutura apresenta um comportamento mais simples que o anterior. Os resultados apresentados na Figura 42 foram obtidos utilizando malhas 16×16

Figura 38 – Curvas carga-deslocamento das cascas isotrópicas e laminadas ($h = 6.35mm$) utilizando refinamento h.



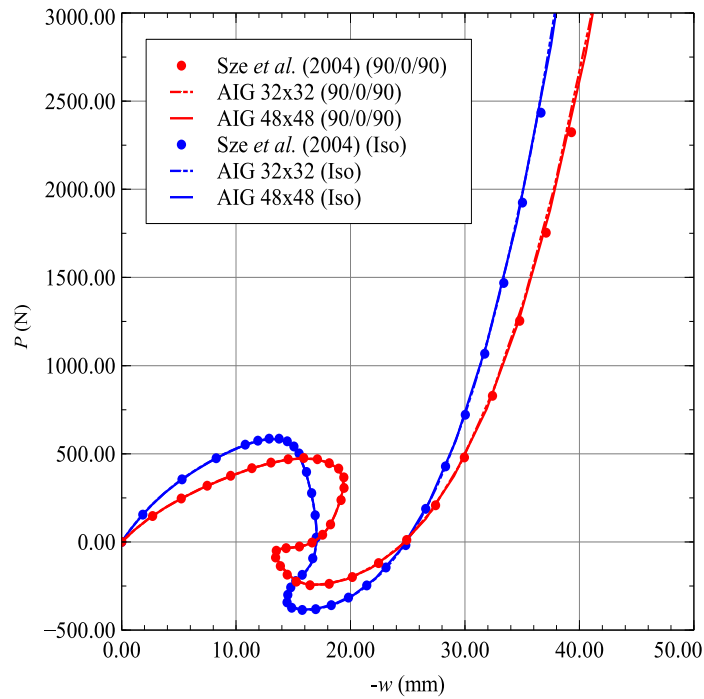
Fonte: Autor.

Figura 39 – Curvas carga-deslocamento das cascas [0/90/0] ($h = 6.35mm$) utilizando refinamento k.



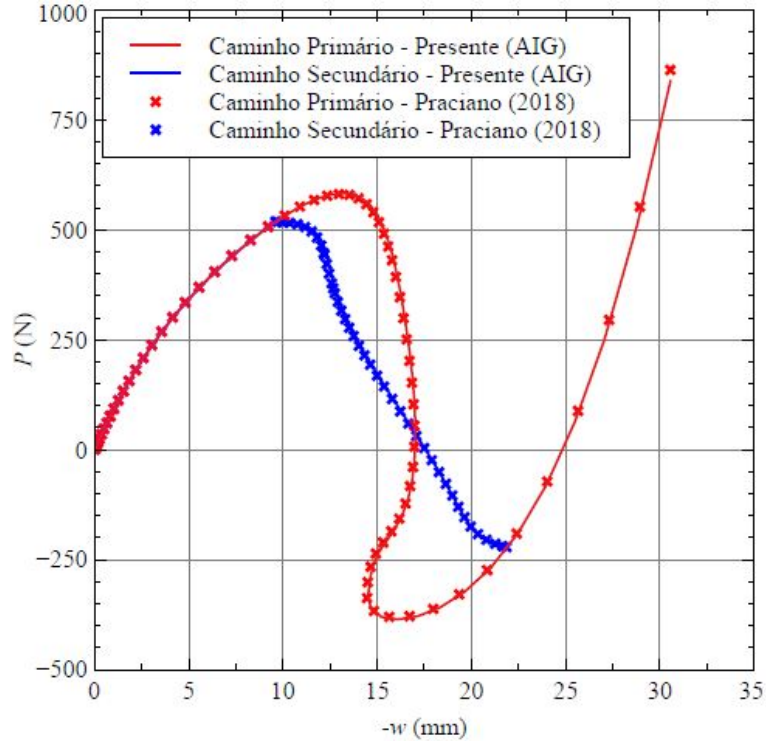
Fonte: Autor.

Figura 40 – Curvas carga-deslocamento das cascas isotrópicas e [90/0/90] ($h = 6.35mm$).



Fonte: Autor.

Figura 41 – Curvas carga-deslocamento da casca isotrópica ($h = 6.35mm$).

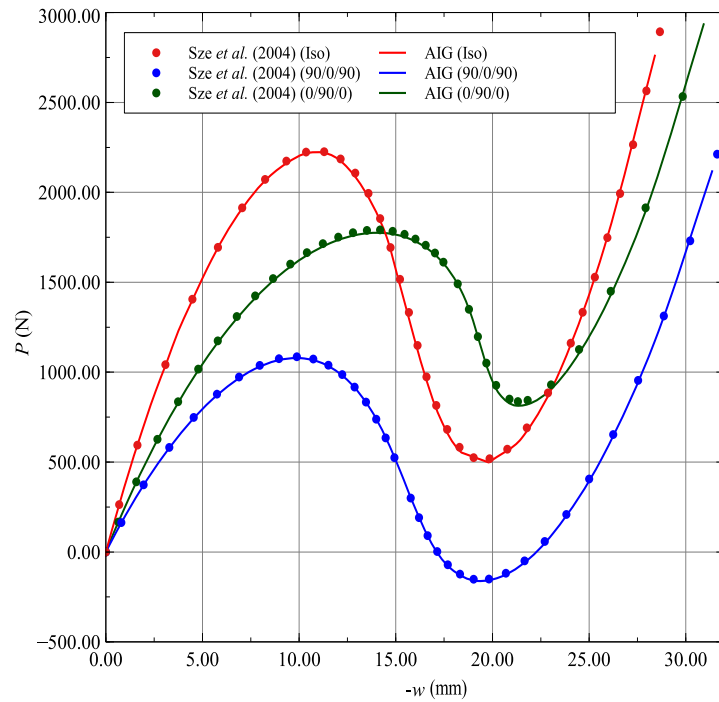


Fonte: Autor.

e funções de base cúbicas e estão muito próximos à referência, sendo, portanto, considerados satisfatórios.

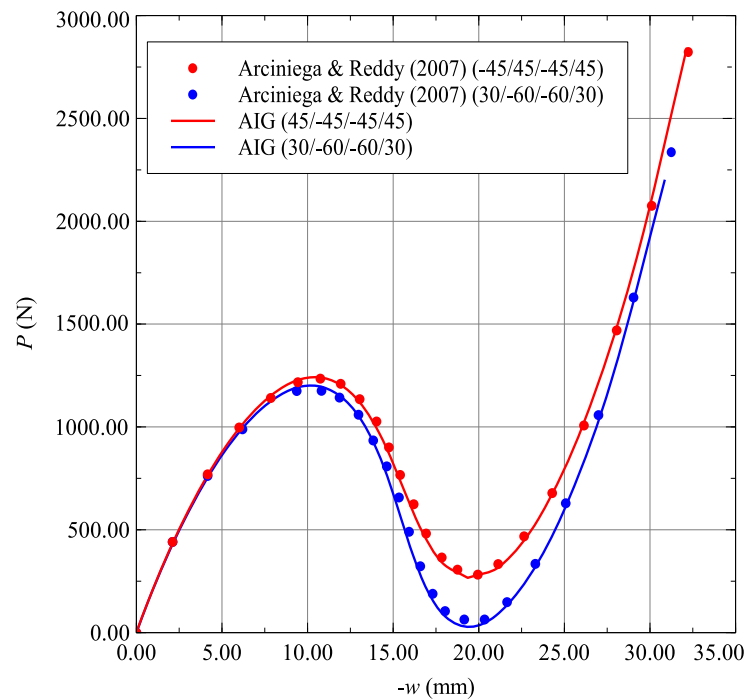
Arciniega & Reddy (2007) obtiveram resultados para laminações *angle-ply*. Os

Figura 42 – Curvas carga-deslocamento das cascas isotrópicas e [90/0/90] ($h = 12.7mm$).



Fonte: Autor.

Figura 43 – Curvas carga-deslocamento das cascas laminadas *angle-ply* ($h = 12.7mm$).



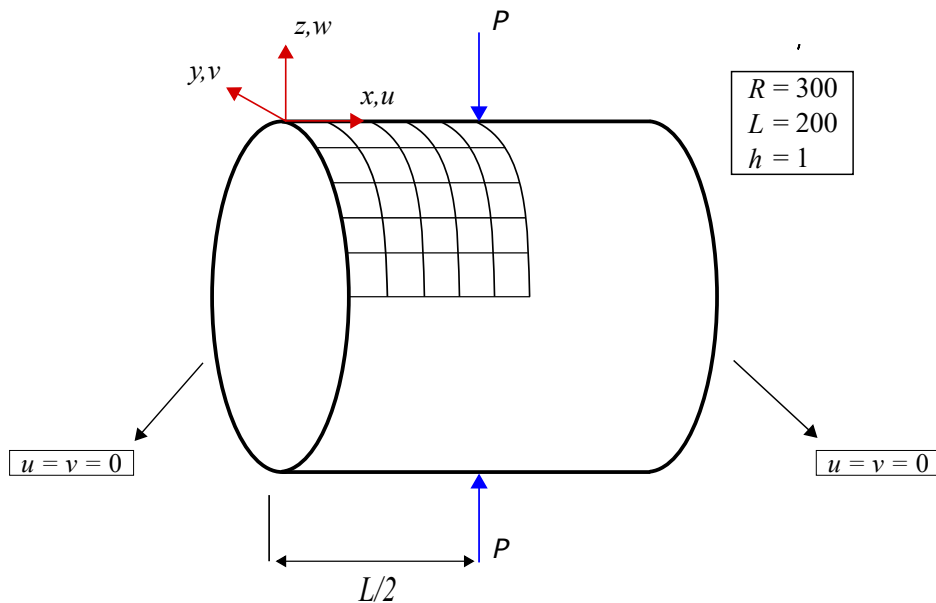
Fonte: Autor.

resultados obtidos pela AIG são comparados com a referência na Figura 43, utilizando malhas 16×16 e funções de base cúbicas com integração Red_{AIG}. Os resultados obtidos são muito

próximos e, portanto, considerados satisfatórios. O exemplo também pode ser encontrado no trabalho de Payette & Reddy (2014). O Método dos Elementos Finitos foi utilizado em ambas as referências.

5.1.6 Cilindro de paredes finas com carga concentrada no centro - Não Linear

Figura 44 – Geometria, carregamento e condições de contorno do Exemplo 5.1.6.

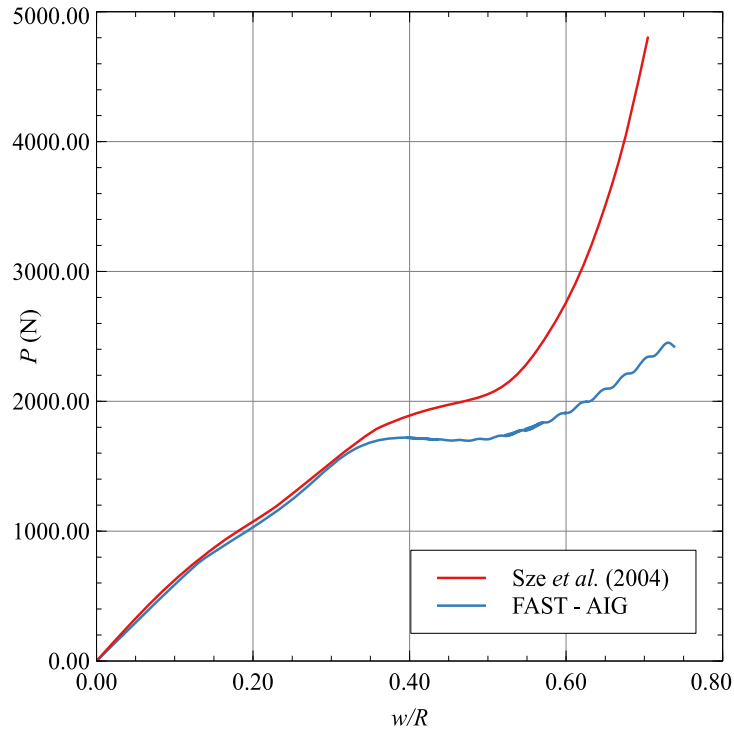


Fonte: Autor.

O presente exemplo foi obtido no trabalho de Sze *et al.* (2004) e consiste na análise não-linear de um cilindro de paredes finas submetido a cargas concentradas de módulo igual, situadas em pontos opostos e localizadas no centro de seu comprimento. A geometria, carga e condições de contorno do problema são mostrados na Figura 44. O problema foi discretizado em uma malha uniforme de 1600 elementos (40×40), funções de base cúbicas e integração R_{AIG} . O cilindro é de um material isotrópico de propriedades $E = 30 \cdot 10^3$ e $\nu = 0.3$. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 45 e comparados com os resultados obtidos por Sze *et al.* (2004), que utiliza o elemento quadrático S8R de um modelo de casca geral do software ABAQUS.

É possível observar que o elemento utilizado apresentou boa aproximação até uma relação em torno de $w/R = 0.3$. Entretanto, quanto maior a relação w/R , maiores serão as diferenças. Esse comportamento era esperado, uma vez que ao utilizar a teoria de Donnell, adotam-se simplificações e alguns termos não-lineares são desprezados, como visto nas Equações

Figura 45 – Caminho de equilíbrio do Exemplo 5.1.6.



Fonte: Autor.

3.8 e 3.10. Apesar disso, o alcance do elemento foi considerado satisfatório, uma vez que, dentro de seus limites, contempla a ordem de grandeza que envolvem problemas de estabilidade.

5.2 Exemplos de Aplicação

5.2.1 Estudo de Painéis de MGF sujeitos à carga concentrada transversal

Este exemplo corresponde a uma casca de material com gradação funcional com geometria, carregamento e condições de contorno idênticas às do Exemplo 5.1.5 (Figura 37). Ele foi discretizado em uma malha uniforme de 16×16 subdivisões elementos com base cúbica e integração RAIG.

Mars *et al.* (2017) realizaram o estudo considerando uma espessura de $h = 12.7\text{mm}$. Para isso, utilizaram uma distribuição de fração de volume dada por:

$$V_c(z) = \left[1 - a \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right) + b \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^c \right]^N \quad (5.4)$$

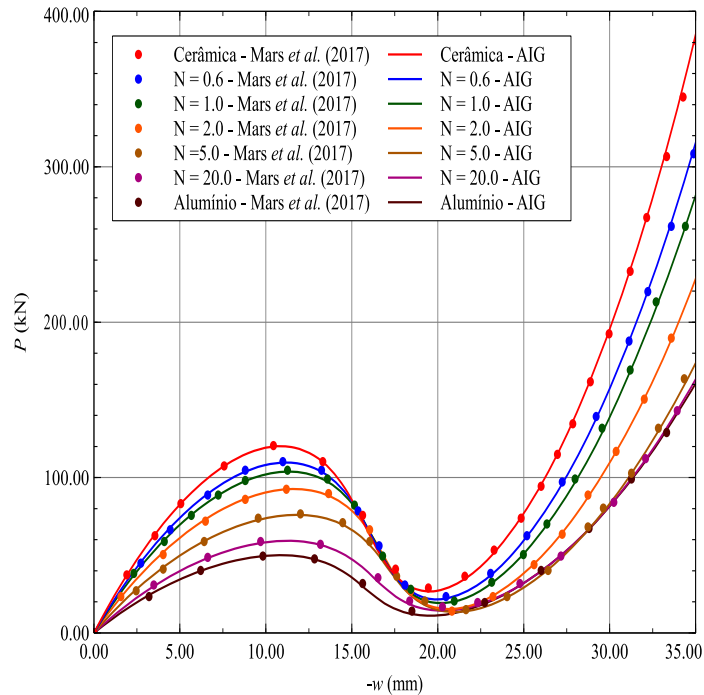
Quando adotados $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$ a Equação (5.4) é equivalente à Equação (2.21), quando $V_{fb} = 0$ e $V_{ft} = 1$. A Tabela 8 apresenta as propriedades dos materiais utilizados.

A Figura 46 apresenta os resultados obtidos pela AIG utilizando o Método do

Tabela 8 – Propriedades do material MGF utilizado no Exemplo 5.1.5.

E_m (GPa)	ν_m	E_c (GPa)	ν_c	a	b	c
70	0.3	168	0.3	1.0	0.5	2.0

Fonte: Autor.

Figura 46 – Curvas carga-deslocamento das cascas MGF ($h = 12.7mm$).

Fonte: Autor.

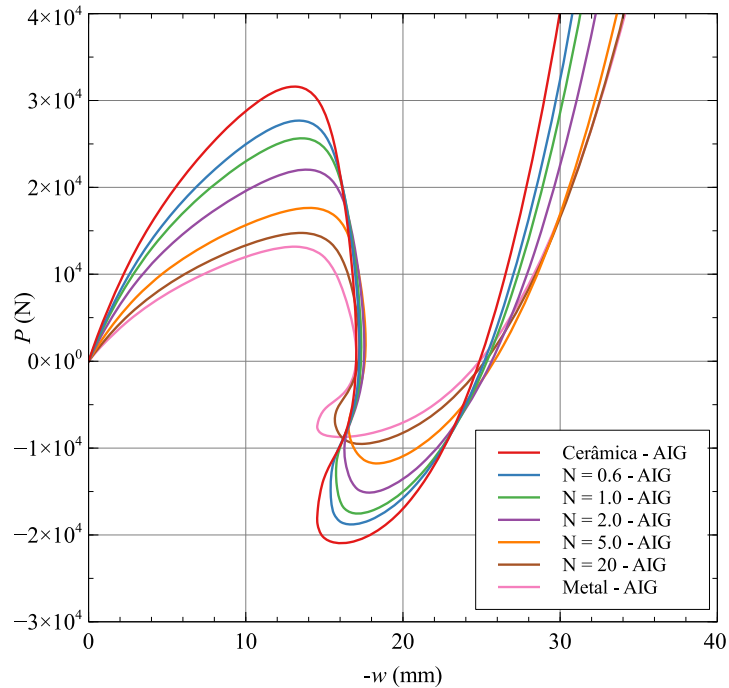
Comprimento de Arco. Os valores obtidos apresentaram excelente concordância com os obtidos por Mars *et al.* (2017).

Os valores do expoente N foram variados, onde é possível observar que os resultados estão entre o material mais rígido (Cerâmica - $N = 0$) e o material mais flexível (Alumínio - $N \rightarrow \infty$), embora todas as curvas apresentem uma forma geral parecida. O exemplo analisado pode ser encontrado de forma semelhante nos trabalhos de Arciniega & Reddy (2007), Payette & Reddy (2014) e Frikha & Dammark (2017). Em todos os estudos, os MGF apresentam respostas intermediárias entre seus componentes de origem, como apresentado pelo presente exemplo.

No presente trabalho, o estudo foi estendido para uma casca cilíndrica de MGF com espessura $h = 6.35mm$, utilizando as mesmas propriedades do estudo anterior e a mesma variação de fração de volume apresentada na Equação (5.4). Os resultados obtidos para os caminhos de equilíbrio estão apresentados na Figura 47.

Wardle (2008) constatou a existência uma bifurcação no caminho primário dessa

Figura 47 – Curvas carga-deslocamento das cascas MGF ($h = 6.35\text{mm}$).



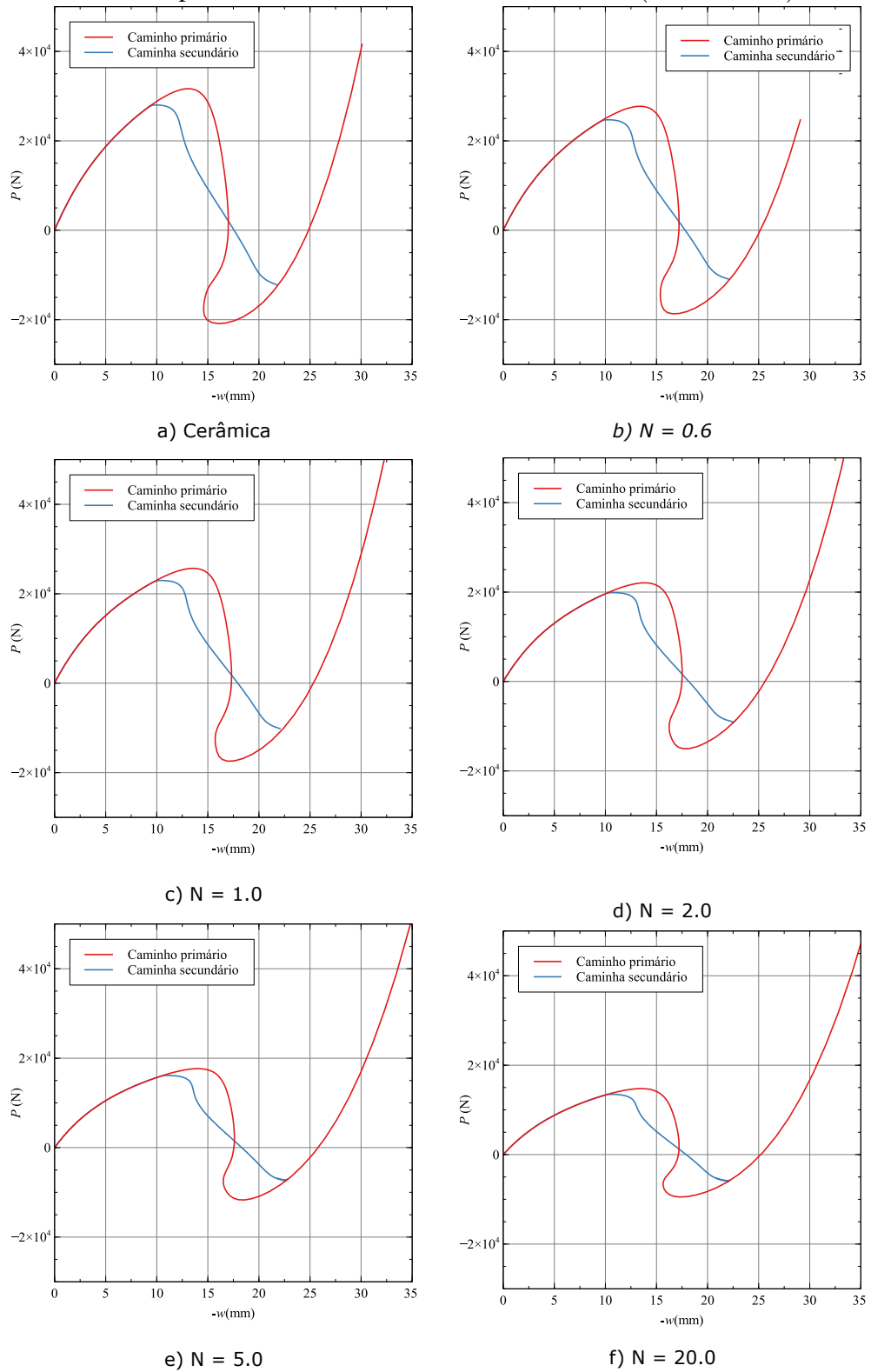
Fonte: Autor.

estrutura, como apresentado na Figura 41. Praciano (2018) encontrou resultado semelhante utilizando o programa FAST e utilizando um elemento de casca abatida com formulação AIG. Para isso, foi utilizado o método do comprimento de arco combinado a técnicas de traçado do caminho secundário (*branch-switching*), onde foi encontrada uma bifurcação a uma carga 11.43% abaixo do relatado por Sze *et al.* (2004). Um procedimento análogo foi adotado utilizando o elemento de casca cilíndrica apresentado neste trabalho. Devido ao comportamento observado no Exemplo 5.1.5, buscou-se expandir a investigação da ocorrência de um ponto de bifurcação no caminho de equilíbrio dessa estrutura. Os resultados apresentados nas Figuras 48 e 49.

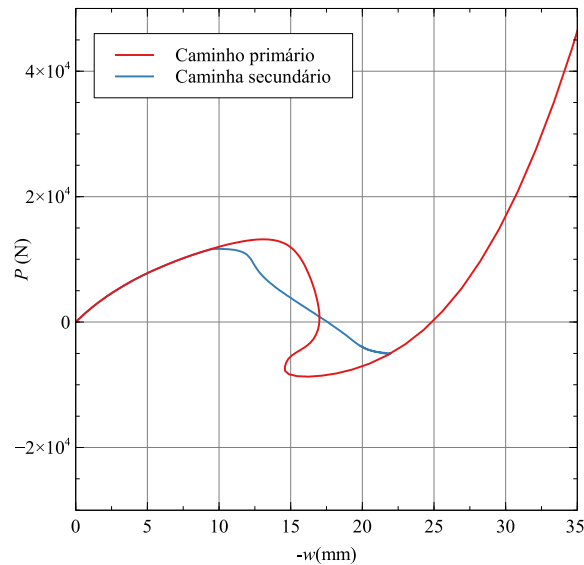
É possível observar que realmente há uma perda de estabilidade por bifurcação. A diferença entre os valores da carga no ponto limite e no ponto de bifurcação estão apresentados na Tabela 9, sendo, em todos os casos, a carga de bifurcação inferior a carga de ponto limite. É importante frisar que no exemplo, ao limitar a análise da estrutura ao seu caminho primário, se torna contrária a segurança, uma vez que a perda de capacidade de carga da estrutura ocorre de forma muito mais abrupta, como observado nas Figuras 48 e 49.

É possível observar, devido ao coeficiente de Poisson ter se mantido constante, que a relação entre os pontos de bifurcação apresentados no caso da cerâmica e do metal são proporcionais a relação entre seus modos de elasticidade (E_c/E_m).

Figura 48 – Caminhos primários e secundários das cascas MGF ($h = 6.35\text{mm}$).



Fonte: Autor.

Figura 49 – Caminhos primário e secundário para casca de MGF ($N \rightarrow \infty$)

Fonte: Autor.

Tabela 9 – Diferenças entre as cargas dos pontos limites e as cargas de bifurcação.

	Cerâmica	$n = 06$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 5$	$n = 20$	Metal
Ponto Limite (kN)	31.650	27.732	25.694	22.071	17.660	14.769	13.188
Ponto de Bifurcação (kN)	28.244	24.910	23.162	20.058	16.293	13.607	11.768
Dif (%)	10.76	10.18	9.85	9.12	7.74	7.87	10.76

Fonte: Autor.

5.2.2 Estudo de Painéis MGF sujeitos à compressão uniaxial

O presente exemplo consiste na análise de um painel cilíndrico sujeitos a uma compressão uniaxial. A geometria e carregamento do problema são mostrados na Figura 50. No presente trabalho adotou-se $a = b = 0.2m$ e $h/R = 0.001$, com $R = 1m$.

As condições de contorno utilizadas foram análogas ao Exemplo 5.1.4, sendo apresentadas na Equação 5.3, onde apresenta duas laterais (1 e 3) simplesmente apoiadas, enquanto as demais extremidades (2 e 4) estão engastadas. Os deslocamentos na direção u foram restringidos na extremidade 4 e considerados iguais em todos os pontos da extremidade 2.

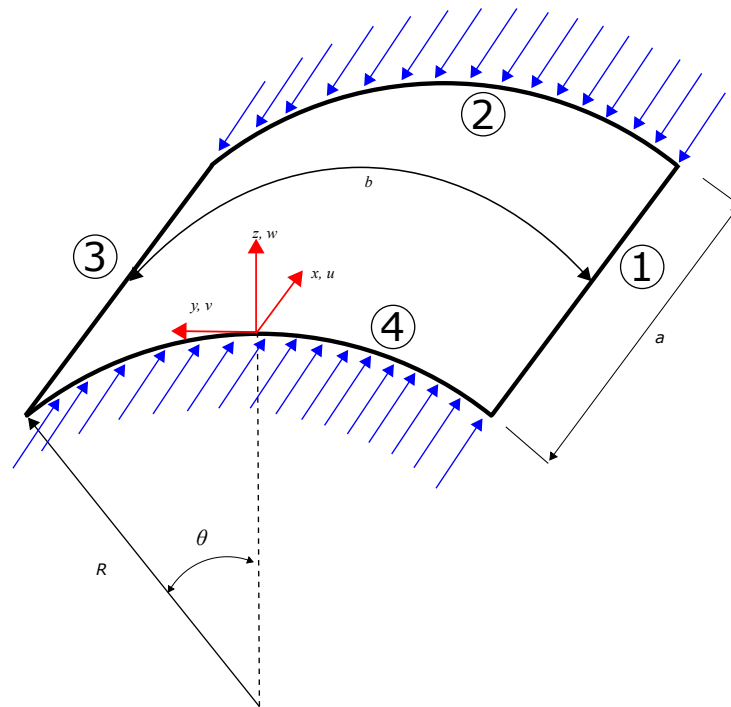
Tabela 10 – Propriedades do material MGF utilizado no Exemplo 5.2.2.

E_m (GPa)	ν_m	E_c (GPa)	ν_c
70	0.3	151	0.3

Fonte: Autor.

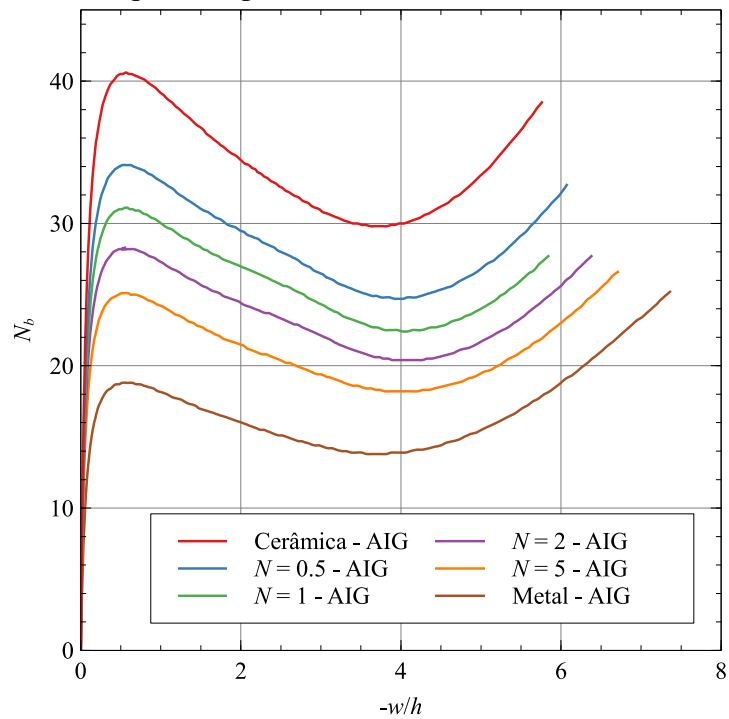
Os materiais utilizados foram o alumínio (Al) e a Zircônia (ZrO_2), cujas propriedades

Figura 50 – Caminho de equilíbrio do Exemplo 5.1.6.



Fonte: Autor.

Figura 51 – Caminhos de equilíbrio para casca de MGF.



Fonte: Autor.

estão apresentados na Tabela 10, representados, respectivamente, por m e c . As propriedades efetivas do material foram obtidas através da lei das misturas, utilizando uma distribuição de

fração de volume apresentada na Equação 2.21, onde $V_{fb} = 0$ e $V_{ft} = 1$, ficando, dessa forma:

$$V_{fj} = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^N \quad (5.5)$$

O problema foi discretizado em uma malha uniforme de 256 elementos (16×16) de base cúbica ($p = 3$), utilizando integração R_{AIG} . Os resultados obtidos estão na Figura 51. Na análise, constatou-se que a estrutura apresenta um ponto de bifurcação, entretanto o algoritmo utilizado para o traçado do caminho secundário não foi efetivo. Com isso, foi aplicada uma imperfeição à estrutura, através de uma carga concentrada de intensidade $P = -0.5N$ no centro de sua geometria, sendo esse o menor valor com o qual a análise conseguiu prosseguir no traçado do caminho de equilíbrio. As cargas críticas obtidas através da análise não linear com aplicação da imperfeição (ponto limite), sem a aplicação da imperfeição (ponto de bifurcação) e pela carga crítica linearizada, também sem aplicação da imperfeição, estão apresentados na Tabela 11.

Tabela 11 – Valores de N_b para diversos métodos de análise.

	Cerâmica	$N = 0.5$	$N = 1$	$N = 2$	$N = 5$	Metal
Ponto Limite	40.558	34.081	31.060	28.255	25.075	18.802
Ponto de Bifurcação	53.516	43.976	39.931	36.462	32.937	24.809
Ponto de Bifurcação Linearizado	52.832	45.609	41.349	37.359	33.023	24.492

Fonte: Autor.

Dessa forma, é possível observar um ponto limite apresentado pela estrutura imperfeita. No caminho traçado, o acréscimo no deslocamento é pequeno no começo da curva e passa a variar rapidamente ao passar pelo ponto limite. Após isso, a carga decai e, ao passar por um ponto de mínimo, volta a crescer. Esse ponto de mínimo, como apresentado na Tabela 12, é fundamental para a análise, uma vez que determina a capacidade de carga da estrutura.

Tabela 12 – Valores de N_b e w/h para diversos métodos de análise.

	Cerâmica	$N = 0.5$	$N = 1$	$N = 2$	$N = 5$	Metal
N_b	29.980	24.735	22.442	20.386	18.173	13.826
w/h	3.984	3.953	4.038	4.072	3.999	3.720

Fonte: Autor.

As características observadas nos exemplos anteriores, comuns aos MGF, são novamente observadas, onde suas respostas são intermediárias aos dos materiais de origem, indicando consistência na análise.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho tratou da análise isogeométrica de cascas cilíndricas de materiais compósitos laminados e materiais com gradação funcional. Para isso, foi desenvolvida uma formulação baseada na teoria não linear de Donnell utilizando uma abordagem Lagrangiana Total. A utilização da abordagem isogeométrica, além de possibilitar a representação exata de diversas geometrias, permite explorar a utilização dos refinamentos h , p e k nos estudos apresentados.

A proposta apresentada, utilizando um sistema de coordenadas circunferencial, permitiu que as cascas cilíndricas fossem representadas como um plano, facilitando o processo de modelagem. O elemento desenvolvido e a formulação isogeométrica apresentada mostraram excelentes resultados para os exemplos utilizados no estudo.

Em relação aos exemplos de validação, observou-se que o elemento apresenta excelentes resultados para geometrias abatidas e não abatidas, sendo, em todos os casos, possível verificar uma melhora na resposta ao utilizar-se os tipos de refinamento apresentados pelo método.

No primeiro exemplo, foi possível obter os deslocamentos radiais de um cilindro isotrópico sujeito a pressão interna. Nesse exemplo, ao aumentar a espessura da casca, é possível verificar uma melhor aproximação da solução numérica em relação a solução analítica, indicando que o elemento apresenta travamento. Dessa forma, optou-se por investigar os efeitos da elevação de grau e esquemas de integração reduzido nas respostas das estruturas.

Os esquemas de integração utilizados, apresentados por Adam *et al.* (2015), auxiliam na diminuição do efeito do travamento. É importante ressaltar que todos convergem para a solução com o refinamento do modelo, entretanto, quando utilizadas bases quadráticas, o esquema de integração reduzida proposto torna a estrutura mais flexível que o esquema de integração reduzida clássico, que apresenta um comportamento mais estável para todos os graus de bases utilizados.

Em problemas que apresentam uma descontinuidade acentuada, como os cilindros com carga concentrada, que são testes indicados como severos pela literatura, observou-se uma boa convergência dos resultados. No caso de cargas distribuídas, onde não há o efeito da descontinuidade na carga, é possível observar que os resultados convergem rapidamente e a elevação de grau é muito efetiva, mesmo para malhas pouco refinadas.

Quanto aos problemas de estabilidade, é possível observar que tanto os refinamentos, quanto os esquemas de integração reduzida aliviam o travamento sofrido pela estrutura. É

possível também observar a importância das condições de contorno e das teorias utilizadas na determinação do comportamento das cascas, evidenciado pelo caminho crítico apresentado pelo painel cilíndrico.

Quanto aos exemplos não lineares, é possível observar, no caso da casca abatida, um excelente resultado para todos os casos estudados. Foi também obtido o caminho secundário, muitas vezes ignorado nos estudos apresentados na literatura.

Já para o cilíndrico com carga concentrada, onde o efeito da não linearidade é mais acentuado, é possível verificar a limitação imposta pela teoria adotada, uma vez que ao simplificar termos não lineares, distancia-se do comportamento de modelos mais complexos ao elevar a ordem de grandeza de sua deflexão. Para o caso apresentado, o modelo representou bem o comportamento até uma deflexão na ordem de grandeza de 30% do raio da estrutura.

Quanto às análises realizadas em cascas de material com gradação funcional, os resultados obtiveram excelente concordância com as referências, validando a formulação apresentada e a implementação das rotinas externas utilizadas para determinar as propriedades efetivas dos MGF, assim como a forma escolhida para o *input* no programa.

O caminho secundário observado em outros exemplos foram estendidos para essa análise, sendo possível devido à utilização da combinação de técnicas de traçado do caminho secundário (*branch-switching*) com o Método do Comprimento do Arco. Com isso, foi possível observar que a perda de estabilidade nessas cascas, em todos os expoentes N utilizados, também se dá por bifurcação, sendo a carga inferior ao ponto limite encontrado quando observado apenas o caminho primário.

As cascas cilíndricas sujeitas à compressão uniaxial, considerando as condições de contorno adotadas, apresentaram uma variação pequena no deslocamento antes do ponto limite, passando a variar rapidamente após alcançá-lo. Embora extremamente sensíveis a condições de contorno e teorias utilizadas em suas análises, o comportamento pós-crítico apresentado pelas cascas está em concordância com os relatados na literatura. Os resultados obtidos também mostraram consistência em relação ao material, uma vez que, para os diversos expoentes utilizados, as respostas se mantiveram entre os limites dos materiais que o originaram.

6.1 Sugestões para trabalhos futuros

A análise isogeométrica ainda consiste em uma área recente e, com isso, abre espaços para diversas contribuições. As estruturas de casca são de grande interesse na engenharia, sendo

a análise isogeométrica capaz de modelar situação complexas, contemplando suas diversas geometrias. Dentro desse contexto, também é necessário explorar mais propostas de esquemas de integração, pois os elementos podem apresentar processos de travamento distintos entre si.

Quanto aos MGF, devido às inúmeras possibilidades de variação da fração de volume e materiais a serem combinados, como os CNT, sendo possível desenvolver inúmeros problemas de otimização. Também é possível contemplar mais modelos capazes de representar as propriedades efetivas dessas combinações.

Nos carregamentos, é possível avançar nas considerações sobre efeitos térmicos e acoplamento térmico-mecânico, que são importantes dentro do contexto que os MGF se inserem, sendo um campo complexo e que requer atenção. Também faz-se necessária a implementação de um melhor algoritmo de *branch-switching* de forma a traçar os caminhos secundários de forma mais efetiva e eficiente, possibilitando um melhor estudo do caminho pós-crítico, efeitos das imperfeições e das condições de contorno sob o comportamento da estrutura.

REFERÊNCIAS

- ADAM, C.; HUGHES, T. J.; BOUABDALLAH, S.; ZARROUG, M.; MAITOURNAM, H. Selective and reduced numerical integrations for nurbs-based isogeometric analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 284, p. 732–761, 2015.
- AKBARZADEH, A.; ABEDINI, A.; CHEN, Z. Effect of micromechanical models on structural responses of functionally graded plates. **Composite Structures**, Elsevier, v. 119, p. 598–609, 2015.
- AMABILI, M. **Nonlinear vibrations and stability of shells and plates**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2008.
- ARCINIEGA, R.; REDDY, J. Tensor-based finite element formulation for geometrically nonlinear analysis of shell structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 196, n. 4-6, p. 1048–1073, 2007.
- ARGENTA, A. L. D. P. **Efeito da geometria e do material nas vibrações não lineares de cascas cilíndricas ortotrópicas**. 2013. 168 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiania, 2013.
- ASHWELL, D.; SABIR, A. A new cylindrical shell finite element based on simple independent strain functions. **International Journal of Mechanical Sciences**, Elsevier, v. 14, n. 3, p. 171–183, 1972.
- BARBERO, E. J. **Introduction to composite materials design**. [S.l.]: CRC press, 2017.
- BARROS, P. S. B. **Abordagem isogeométrica para o estudo da estabilidade de compósitos laminados considerando falha progressiva**. 2016. 141 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.
- BARROSO, E. S. **Análise e otimização de estruturas laminadas utilizando a formulação isogeométrica**. 2015. 161 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.
- BATOZ, J.-L.; DHATT, G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 14, n. 8, p. 1262–1267, 1979.
- BATTINI, J.-M.; PACOSTE, C.; ERIKSSON, A. Improved minimal augmentation procedure for the direct computation of critical points. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 192, n. 16-18, p. 2169–2185, 2003.
- BAZILEVS, Y.; CALO, V. M.; COTTRELL, J. A.; EVANS, J. A.; HUGHES, T. J. R.; LIPTON, S.; SCOTT, M. A.; SEDERBERG, T. W. Isogeometric analysis using t-splines. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 199, n. 5-8, p. 229–263, 2010.
- BELYTSCHKO, T.; STOLARSKI, H.; LIU, W. K.; CARPENTER, N.; ONG, J. S. Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 51, n. 1-3, p. 221–258, 1985.

BENSON, D.; BAZILEVS, Y.; HSU, M.-C.; HUGHES, T. Isogeometric shell analysis: the reissner–mindlin shell. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 199, n. 5-8, p. 276–289, 2010.

BIRMAN, V.; BYRD, L. W. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. **Applied mechanics reviews**, American Society of Mechanical Engineers, v. 60, n. 5, p. 195–216, 2007.

BRUSH, D. O.; ALMROTH, B. O. **Buckling of bars, plates, and shells**. [S.l.]: McGraw-Hill New York, 1975. v. 6.

CEDOLIN, L. *et al.* **Stability of structures: elastic, inelastic, fracture and damage theories**. [S.l.]: World Scientific, 2010.

COLEMAN, J. N.; KHAN, U.; BLAU, W. J.; GUN'KO, Y. K. Small but strong: a review of the mechanical properties of carbon nanotube–polymer composites. **Carbon**, Elsevier, v. 44, n. 9, p. 1624–1652, 2006.

COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J.; BAZILEVS, Y. **Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009.

CRISFIELD, M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”. In: **Computational Methods in Nonlinear Structural and Solid Mechanics**. [S.l.]: Elsevier, 1981. p. 55–62.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**. [S.l.]: Wiley, 1991. v. 1.

D'AGUIAR, S. C. M. **Estabilidade de colunas de material compósito reforçado por fibras**. 2017. 120 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.

DANIEL, I. M.; ISHAI, O.; DANIEL, I. M.; DANIEL, I. **Engineering mechanics of composite materials**. [S.l.]: Oxford university press New York, 1994. v. 3.

DO, V. N. V.; ONG, T. H.; LEE, C.-H. Isogeometric analysis for nonlinear buckling of fgm plates under various types of thermal gradients. **Thin-Walled Structures**, Elsevier, v. 137, p. 448–462, 2019.

DONNELL, L. H. A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending. **Trans. Asme**, v. 56, n. 11, p. 795–806, 1934.

ESLAMI, M. R.; ESLAMI; JACOBS. **Buckling and postbuckling of beams, plates, and shells**. [S.l.]: Springer, 2018.

FRIKHA, A.; DAMMAK, F. Geometrically non-linear static analysis of functionally graded material shells with a discrete double directors shell element. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 315, p. 1–24, 2017.

GALAMBOS, T. V.; SUROVEK, A. E. **Structural stability of steel: concepts and applications for structural engineers**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.

- GARCÍA-MACÍAS, E.; RODRÍGUEZ-TEMBLEQUE, L.; CASTRO-TRIGUERO, R.; SÁEZ, A. Eshelby-mori-tanaka approach for post-buckling analysis of axially compressed functionally graded cnt/polymer composite cylindrical panels. **Composites Part B: Engineering**, Elsevier, v. 128, p. 208–224, 2017.
- GASIK, M. M. Micromechanical modelling of functionally graded materials. **Computational Materials Science**, Elsevier, v. 13, n. 1-3, p. 42–55, 1998.
- GUPTA, A.; TALHA, M. Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures. **Progress in Aerospace Sciences**, Elsevier, v. 79, p. 1–14, 2015.
- HONG, C.-Q.; ZHANG, X.-H.; LI, W.-J.; HAN, J.-C.; MENG, S.-H. A novel functionally graded material in the zrb₂-sic and zro₂ system by spark plasma sintering. **Materials Science and Engineering: A**, Elsevier, v. 498, n. 1-2, p. 437–441, 2008.
- HUANG, H.; HAN, Q. Elastoplastic buckling of axially loaded functionally graded material cylindrical shells. **Composite Structures**, Elsevier, v. 117, p. 135–142, 2014.
- HUGHES, T. J.; COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 194, n. 39-41, p. 4135–4195, 2005.
- JHA, D.; KANT, T.; SINGH, R. A critical review of recent research on functionally graded plates. **Composite Structures**, Elsevier, v. 96, p. 833–849, 2013.
- JONES, R. M. **Buckling of bars, plates, and shells**. [S.l.]: Bull Ridge Corporation, 2006.
- JR, J. L. S. Nonlinear theories for thin shells. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 21, n. 1, p. 21–36, 1963.
- JÚNIOR, E. M. D. **Análise não linear de compósitos laminados utilizando o método dos elementos finitos**. 2014. 116 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.
- KIEBACK, B.; NEUBRAND, A.; RIEDEL, H. Processing techniques for functionally graded materials. **Materials Science and Engineering: A**, Elsevier, v. 362, n. 1-2, p. 81–106, 2003.
- KIENDL, J.; BLETZINGER, K.-U.; LINHARD, J.; WÜCHNER, R. Isogeometric shell analysis with kirchhoff–love elements. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 198, n. 49-52, p. 3902–3914, 2009.
- KOITER, W. A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells. **Theory of thin elastic shells**, North-Holland Amsterdam, p. 12–33, 1960.
- KOIZUMI, M. Fgm activities in japan. **Composites Part B: Engineering**, Elsevier, v. 28, n. 1-2, p. 1–4, 1997.
- KYRIAKIDES, S.; CORONA, E. **Mechanics of offshore pipelines: volume 1 buckling and collapse**. [S.l.]: Elsevier, 2007. v. 1.
- LEISSA, A. W. Conditions for laminated plates to remain flat under inplane loading. **Composite structures**, Elsevier, v. 6, n. 4, p. 261–270, 1986.

LIEW, K.; LEI, Z.; YU, J.; ZHANG, L. Postbuckling of carbon nanotube-reinforced functionally graded cylindrical panels under axial compression using a meshless approach. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 268, p. 1–17, 2014.

LIEW, K.; ZHAO, X.; LEE, Y. Postbuckling responses of functionally graded cylindrical shells under axial compression and thermal loads. **Composites Part B: Engineering**, Elsevier, v. 43, n. 3, p. 1621–1630, 2012.

LIEW, K. M.; LEE, Y.; NG, T.; ZHAO, X. Dynamic stability analysis of composite laminated cylindrical panels via the mesh-free kp-ritz method. **International Journal of Mechanical Sciences**, Elsevier, v. 49, n. 10, p. 1156–1165, 2007.

MARS, J.; KOUBAA, S.; WALI, M.; DAMMAK, F. Numerical analysis of geometrically non-linear behavior of functionally graded shells. **Latin American Journal of Solids and Structures**, SciELO Brasil, v. 14, n. 11, p. 1952–1978, 2017.

MORORÓ, L. A. T. **Análise não linear geométrica de vigas laminadas de parede fina**. 2013. 151 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

NAEBE, M.; SHIRVANIMOGHADDAM, K. Applied materials today. 2016.

NEMAT-ALLA, M. M.; ATA, M. H.; BAYOUMI, M. R.; KHAIR-ELDEEN, W. Powder metallurgical fabrication and microstructural investigations of aluminum/steel functionally graded material. **Materials Sciences and Applications**, Scientific Research Publishing, v. 2, n. 12, p. 1708, 2011.

PARENTE, E.; HOLANDA, A. S. d.; SILVA, S. M. B. A. d. Tracing nonlinear equilibrium paths of structures subjected to thermal loading. **Computational Mechanics**, Springer, v. 38, n. 6, p. 567–567, 2006.

PARENTE, E.; SOUSA, J. B. M. **Análise não linear de estruturas - notas de aula**. **Universidade Federal do Ceará**, n. 1, 2014.

PAYETTE, G.; REDDY, J. A seven-parameter spectral/hp finite element formulation for isotropic, laminated composite and functionally graded shell structures. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 278, p. 664–704, 2014.

PIEGL, L.; TILLER, W. **The NURBS book**. [S.l.]: 2nd ed. Germany: Springer, 1997.

PRACIANO, J. S. C. **Análise da Estabilidade de Estruturas Laminadas e de Materiais com Gradação Funcional Utilizando uma Formulação Isogeométrica**. 2018. 101 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.

QATU, M.; LEISSA, A. Buckling or transverse deflections of unsymmetrically laminated plates subjected to in-plane loads. **AIAA journal**, v. 31, n. 1, p. 189–194, 1993.

RAMM, E. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. In: **Nonlinear finite element analysis in structural mechanics**. [S.l.]: Springer, 1981. p. 63–89.

REDDY, J. N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. **Journal of applied mechanics**, American Society of Mechanical Engineers, v. 51, n. 4, p. 745–752, 1984.

REDDY, J. N. **Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis**. [S.l.]: CRC press, 2004.

REITER, T.; DVORAK, G. J.; TVERGAARD, V. Micromechanical models for graded composite materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Pergamon, v. 45, n. 8, p. 1281–1302, 1997.

REZAIIEE-PAJAND, M.; POURHEKMAT, D.; ARABI, E. Thermo-mechanical stability analysis of functionally graded shells. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 178, p. 1–11, 2019.

RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. **International journal of solids and structures**, Elsevier, v. 15, n. 7, p. 529–551, 1979.

ROCHA, I. B. C. M. **Abordagem e otimização de cascas laminadas considerando não-linearidade geométrica e falha progressiva**. 2018. 159 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

SHAHSIAH, R.; ESLAMI, M. Thermal buckling of functionally graded cylindrical shell. **Journal of Thermal Stresses**, Taylor & Francis, v. 26, n. 3, p. 277–294, 2003.

SHANMUGAVELAYUTHAM, G.; KOBAYASHI, A. Mechanical properties and oxidation behaviour of plasma sprayed functionally graded zirconia–alumina thermal barrier coatings. **Materials chemistry and physics**, Elsevier, v. 103, n. 2-3, p. 283–289, 2007.

SHEN, H.-S. Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments. **International Journal of Mechanical Sciences**, Elsevier, v. 44, n. 3, p. 561–584, 2002.

SHEN, H.-S. Postbuckling analysis of pressure-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environments. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 25, n. 4, p. 487–497, 2003.

SHEN, H.-S. **Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells**. [S.l.]: CRC press, 2016.

SILVA, F. M. A. d. **Modelos de dimensão reduzida para análise das oscilações não-lineares e estabilidade de cascas cilíndricas**. 2008. 182 f. Dissertação (Doutorado em Engenharia Civil) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

SILVA, R. F. **Otimização de Risers de materiais compósitos**. 2012. 96 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2012.

SIMITSES, G. J.; ANASTASIADIS, J. S. Buckling of axially-loaded, moderately-thick, cylindrical laminated shells. **Composites Engineering**, Elsevier, v. 1, n. 6, p. 375–391, 1991.

SIMULIA. **ABAQUS standard user’s manual, version 6.14**. [S.l.]: Simulia Providence, RI, 2013.

SWAMINATHAN, K.; NAVEENKUMAR, D.; ZENKOUR, A.; CARRERA, E. Stress, vibration and buckling analyses of fgm plates—a state-of-the-art review. **Composite Structures**, Elsevier, v. 120, p. 10–31, 2015.

SZE, K.; LIU, X.; LO, S. Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells. **Finite elements in analysis and design**, Elsevier, v. 40, n. 11, p. 1551–1569, 2004.

TEÓFILO, F. A. F. **Análise e projeto de risers compósitos em catenária**. 2018. 155 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2010.

THORNBURGH, R. P.; HILBURGER, M. W. Identifying and characterizing discrepancies between test and analysis results of compression-loaded panels. 2005.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **Theory of elastic stability**. [S.l.]: Courier Corporation, 1985.

TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells**. [S.l.]: McGraw-hill, 1959.

TOULOUKIAN, Y. S. **Thermophysical Properties Research Literature Retrieval Guide: Editor: YS Touloukian**. [S.l.]: Plenum Press, 1967.

TRAN, L. V.; FERREIRA, A.; NGUYEN-XUAN, H. Isogeometric analysis of functionally graded plates using higher-order shear deformation theory. **Composites Part B: Engineering**, Elsevier, v. 51, p. 368–383, 2013.

TRAN, L. V.; PHUNG-VAN, P.; LEE, J.; WAHAB, M. A.; NGUYEN-XUAN, H. Isogeometric analysis for nonlinear thermomechanical stability of functionally graded plates. **Composite Structures**, Elsevier, v. 140, p. 655–667, 2016.

UDUPA, G.; RAO, S. S.; GANGADHARAN, K. Functionally graded composite materials: an overview. **Procedia Materials Science**, Elsevier, v. 5, p. 1291–1299, 2014.

WARDLE, B. L. Solution to the incorrect benchmark shell-buckling problem. **AIAA journal**, v. 46, n. 2, p. 381–387, 2008.

WEMPNER, G. A. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 7, n. 11, p. 1581–1599, 1971.

WRIGGERS, P.; SIMO, J. C. A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 30, n. 1, p. 155–176, 1990.

YAMAKI, N. **Elastic stability of circular cylindrical shells**. [S.l.]: Elsevier, 1984. v. 27.

YIN, S.; HALE, J. S.; YU, T.; BUI, T. Q.; BORDAS, S. P. Isogeometric locking-free plate element: a simple first order shear deformation theory for functionally graded plates. **Composite Structures**, Elsevier, v. 118, p. 121–138, 2014.

YONGMING, L.; WEI, P.; SHUQIN, L.; RUIGANG, W.; JIANQIANG, L. A novel functionally graded material in the ti–si–c system. **Materials Science and Engineering: A**, Elsevier, v. 345, n. 1-2, p. 99–105, 2003.

- YU, T. T.; YIN, S.; BUI, T. Q.; HIROSE, S. A simple fsdt-based isogeometric analysis for geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 96, p. 1–10, 2015.
- ZHANG, L.; LEI, Z.; LIEW, K.; YU, J. Large deflection geometrically nonlinear analysis of carbon nanotube-reinforced functionally graded cylindrical panels. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 273, p. 1–18, 2014.
- ZHANG, L.; LEI, Z.; LIEW, K.; YU, J. Static and dynamic of carbon nanotube reinforced functionally graded cylindrical panels. **Composite Structures**, Elsevier, v. 111, p. 205–212, 2014.
- ZHANG, Z.; SHEN, X.; ZHANG, C.; WEI, S.; LEE, S.; WANG, F. A new rapid route to in-situ synthesize tib–ti system functionally graded materials using spark plasma sintering method. **Materials Science and Engineering: A**, Elsevier, v. 565, p. 326–332, 2013.
- ZHAO, X.; YANG, Y.; LIEW, K. M. Geometrically nonlinear analysis of cylindrical shells using the element-free kp-ritz method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier, v. 31, n. 9, p. 783–792, 2007.
- ZHOU, Y.; STANCIULESCU, I.; EASON, T.; SPOTTSWOOD, M. Nonlinear elastic buckling and postbuckling analysis of cylindrical panels. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 96, p. 41–50, 2015.
- ZUIKER, J. R. Functionally graded materials: choice of micromechanics model and limitations in property variation. **Composites Engineering**, Elsevier, v. 5, n. 7, p. 807–819, 1995.