

# Material and geometric nonlinear analysis of reinforced concrete frames

## *Análise não linear física e geométrica de pórticos de concreto armado*

E. PARENTE JR <sup>a</sup>  
evandro@ufc.br

G. V. NOGUEIRA <sup>a</sup>  
geovanneviana@gmail.com

M. MEIRELES NETO <sup>a</sup>  
marcelomeirelesneto@gmail.com

L. S. MOREIRA <sup>a</sup>  
leandrosmcivil@gmail.com

### Abstract

The analysis of reinforced concrete structures until failure requires the consideration of geometric and material nonlinearities. However, nonlinear analysis is much more complex and costly than linear analysis. In order to obtain a computationally efficient approach to nonlinear analysis of reinforced concrete structures, this work presents the formulation of a nonlinear plane frame element. Geometric nonlinearity is considered using the co-rotational approach and material nonlinearity is included using appropriate constitutive relations for concrete and steel. The integration of stress resultants and tangent constitutive matrix is carried out by the automatic subdivision of the cross-section and the application of the Gauss quadrature in each subdivision. The formulation and computational implementation are validated using experimental results available in the literature. Excellent results were obtained.

**Keywords:** concrete structures, nonlinear analysis, plane frames, finite element method.

### Resumo

A análise de estruturas de concreto armado até à ruína requer a consideração das não linearidades física e geométrica. Contudo, a análise não linear é mais complexa e possui custo computacional mais elevado que a análise linear. Com objetivo de obter uma alternativa eficiente para a análise não linear de estruturas reticuladas de concreto armado, este trabalho apresenta a formulação de um elemento finito de pórtico plano não linear. A não linearidade geométrica é tratada através do uso da formulação corrotacional e a não linearidade física é considerada através do uso de relações constitutivas apropriadas para o concreto e o aço. A integração dos esforços e da matriz constitutiva tangente é realizada pela subdivisão automática da seção transversal em faixas seguida pelo uso da quadratura de Gauss em cada faixa. A formulação e implementação computacional são validadas através da comparação com resultados experimentais, tendo sido obtidos excelentes resultados.

**Palavras-chave:** estruturas de concreto, análise não linear, pórticos planos, método dos elementos finitos.

<sup>a</sup> Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil.

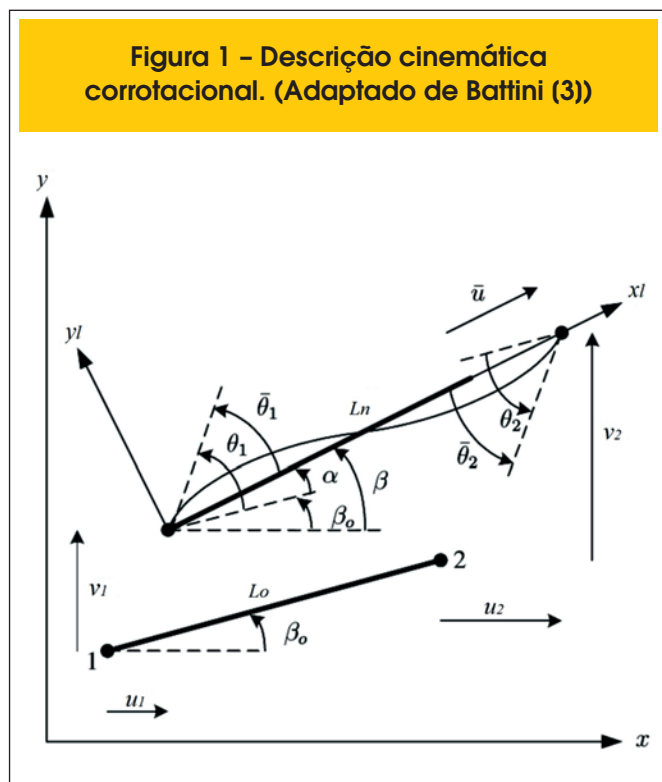
## 1. Introdução

As estruturas de edifícios de concreto armado são constituídas principalmente por vigas e pilares ligados de forma rígida formando pórticos. A simulação do comportamento destas estruturas de forma realista, principalmente próximo à ruína requer a consideração da não linearidade física, devido a presença de fenômenos como fissuração do concreto e plastificação da armadura, e geométrica, devido aos grandes deslocamentos e elevados esforços de compressão. A busca por projetos mais econômicos, o uso de materiais de resistência mais elevada e de estruturas mais esbeltas tem aumentado a importância da análise não linear.

O concreto apresenta um comportamento mecânico altamente complexo. Assim, na modelagem computacional de ensaios de laboratório muitas vezes são utilizados elementos planos e sólidos juntamente com modelos constitutivos bi e tridimensionais. Estes modelos permitem representar os efeitos do estado de tensão sobre o comportamento do concreto, levando a uma excelente concordância das curvas carga-deslocamento numéricas e experimentais [11].

Contudo, esta abordagem não é viável na análise de estruturas de edifício formadas por um grande número de vigas e pilares devido ao elevado esforço computacional, além da dificuldade de modelagem geométrica e geração da malha de elementos finitos. Por outro lado, o projeto de estruturas de edifício é realizado utilizando análise linear e modelos de elementos finitos de pórtico. O efeito da não linearidade é considerado de forma aproximada através da utilização da rigidez secante para representar a não linearidade física e o uso do parâmetro  $\gamma_z$  para estimar os efeitos de 2ª ordem (não linearidade geométrica) [1].

**Figura 1 – Descrição cinemática corrotacional. (Adaptado de Battini (3))**



Com objetivo de permitir a análise não linear de estruturas reticuladas de concreto armado de forma simples e eficiente, este trabalho apresenta a formulação de um elemento finito de pórtico plano para análise não linear geométrica e física. A não linearidade geométrica é considerada por meio da utilização da formulação corrotacional, permitindo a análise de estruturas com grandes deslocamentos e rotações.

A não linearidade física é considerada utilizando relações tensão-deformação não lineares para o aço e o concreto na compressão apresentadas nas normas NBR 6118:2007 [1] e Eurocode 2:2004 [7]. A contribuição do concreto à tração (*tension stiffening*) é considerado utilizando o modelo do CEB [10]. Um método para a integração das tensões e da matriz constitutiva na seção transversal é proposto neste trabalho. Este método de integração é baseado na subdivisão automática da seção de acordo com os trechos da curva tensão-deformação e uso da quadratura de Gauss em cada trecho, resultando em uma formulação simples, eficiente, de elevada precisão numérica e independente da curva-tensão deformação adotada.

As formulações e implementações são avaliadas através da comparação com resultados numéricos e experimentais disponíveis na literatura. Apresenta-se ainda o estudo da influência do número de elementos utilizado na discretização das barras e do número de pontos de integração utilizado em cada faixa sobre a resposta do modelo numérico proposto.

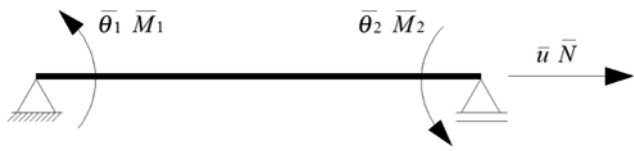
## 2. Elemento finito corrotacional de pórtico plano

O equilíbrio de uma estrutura sob efeito de carregamento externo ocorre quando as forças internas geradas pela deformação do elemento equilibram as forças externas aplicadas. Portanto, o equilíbrio deve ser escrito na configuração deformada da estrutura. Quando os deslocamentos são pequenos as mudanças de geometria são desprezíveis e o equilíbrio pode ser escrito na configuração indeformada. Por outro lado, a análise não linear geométrica é utilizada quando os deslocamentos e rotações são grandes e o equilíbrio precisa ser escrito na configuração deformada. A análise não linear geométrica pode ser realizada utilizando a formulação Lagrangiana ou corrotacional. As formulações Lagrangianas [2] são mais utilizadas no caso de elementos finitos contínuos, pois o uso da deformação de Green-Lagrange permite filtrar os deslocamentos de corpo rígido. Contudo, a aplicação das formulações Lagrangianas a elementos de pórtico com grandes deslocamentos e rotações levam a expressões muito complexas [13]. Desta forma, a maior parte destes elementos é restrito ao problema de rotações moderadas [12][16]. Uma alternativa para a consideração de grandes deslocamentos e rotações baseada no uso das deformações de Reissner foi apresentada [4]. Contudo, esta formulação é bastante complexa, envolvendo a interpolação da deformação de membrana e da curvatura ao longo do elemento.

A abordagem corrotacional é baseada na separação dos deslocamentos de corpo rígido das deformações sofridas pelo elemento utilizando um sistema de coordenadas que acompanha o elemento [3][6]. Esta abordagem foi adotada neste trabalho porque permite considerar grandes deslocamentos e rotações de uma forma simples e computacionalmente eficiente, além de simplificar a consideração da não linearidade física, como será discutido adiante.

A Figura 1 mostra um elemento de pórtico plano corrotacional

**Figura 2 - Graus de liberdade e forças internas do elemento local**



sofrendo o deslocamento de corpo rígido e deformação, salientando que as coordenadas dos nós 1 e 2 no sistema global são dadas por  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ , respectivamente. A Figura 2 mostra os graus de liberdade do elemento corrotacional em seu sistema local bem como suas forças internas associadas. Esta figura mostra que não existem deslocamentos de corpo rígido no sistema local, mas apenas três modos de deformação para o elemento de pórtico plano, sendo um associado à deformação axial ( $\bar{u}$ ) e dois associados às deformações de flexão ( $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2$ ).

### 2.1 Deformações

Com base nos parâmetros da Figura 1 e nos modos de deformação da Figura 2, pode-se definir os deslocamentos devidos às deformações do elemento:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= L_n - L_0 \\ \bar{\theta}_1 &= \theta_1 - \alpha \\ \bar{\theta}_2 &= \theta_2 - \alpha \end{aligned} \tag{1}$$

onde  $L_n$  e  $L_0$  são os comprimentos final e inicial, respectivamente, e  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são as rotações globais dos nós 1 e 2, respectivamente. Por outro lado,  $\bar{u}$ ,  $\bar{\theta}_1$  e  $\bar{\theta}_2$  são o deslocamento axial e as rotações dos nós no sistema local. Por fim,  $\alpha$  representa a rotação de corpo rígido do elemento:

$$\alpha = \beta - \beta_0 \tag{2}$$

onde  $\beta$  e  $\beta_0$  são os ângulos de inclinação do elemento no sistema global nas configurações final e inicial, respectivamente. Os comprimentos dos elementos podem ser calculados como:

$$\begin{aligned} L_0 &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \\ L_n &= \sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2} \end{aligned} \tag{3}$$

sendo

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_2 - x_1 \\ \Delta y &= y_2 - y_1 \\ \Delta x' &= x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1) + (u_2 - u_1) \\ \Delta y' &= y'_2 - y'_1 = (y_2 - y_1) + (v_2 - v_1) \end{aligned} \tag{4}$$

Um importante passo da formulação corrotacional é a separação das rotações totais na parcela de corpo rígido e na parcela associada às deformações. Partindo da Equação (2), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \text{sen} \alpha &= \text{sen}(\beta - \beta_0) = s \cdot c_0 - c \cdot s_0 \\ \text{cos} \alpha &= \text{cos}(\beta - \beta_0) = c \cdot c_0 + s \cdot s_0 \end{aligned} \tag{5}$$

em que os senos e cossenos dos ângulos de inclinação dos elementos são calculados como:

$$\begin{aligned} c_0 &= \text{cos} \beta_0 = \Delta x / L_0 \\ s_0 &= \text{sen} \beta_0 = \Delta y / L_0 \\ c &= \text{cos} \beta = \Delta x' / L_n \\ s &= \text{sen} \beta = \Delta y' / L_n \end{aligned} \tag{6}$$

É importante notar que a Equação (5) é capaz de determinar a rotação rígida da barra desde que  $\alpha$  esteja dentro do intervalo de  $-\pi$  a  $\pi$ , que é um intervalo grande para rotações quando comparadas às rotações normalmente sofridas pelas estruturas. Contudo, para determinar a rotação rígida, independente da amplitude do ângulo, pode-se atualizar a rotação rígida a cada incremento de carga pela expressão:

$$\alpha = \alpha_a + \Delta \alpha \tag{7}$$

onde  $\alpha_a$  corresponde a rotação de corpo rígido anterior e o incremento de rotação  $\Delta \alpha$  é definido como:

$$\Delta \alpha = \beta - \beta_a \tag{8}$$

em que  $\beta_a$  é o ângulo de inclinação do incremento anterior. Comparando essas duas últimas equações, pode-se perceber que o incremento da rotação  $\Delta \alpha$  pode ser obtido a partir da Equação (5), desde que se faça a substituição de  $\beta$  por  $\beta_a$  e  $\alpha$  por  $\Delta \alpha$ . Isso é permitido, pois apesar da rotação rígida total poder ser grande, o incremento da rotação a cada passo de carga é pequeno.

## 2.2 Transformação local-global

A análise da estrutura completa é realizada no sistema global, assim é necessário que se calcule o vetor de forças internas e a matriz de rigidez do elemento e se faça a transformação para o sistema global. Esta transformação será realizado utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). O vetor de deslocamentos no sistema local é dado por:

$$\bar{\mathbf{u}} = [\bar{u} \quad \bar{\theta}_1 \quad \bar{\theta}_2]^T \quad (9)$$

enquanto o vetor de deslocamentos no sistema global é dado por:

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2]^T \quad (10)$$

Utilizando a Equação (1), pode-se escrever os deslocamentos virtuais no sistema local como:

$$\delta \bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \delta \bar{u} \\ \delta \bar{\theta}_1 \\ \delta \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta L_n \\ \delta \theta_1 - \delta \beta \\ \delta \theta_2 - \delta \beta \end{bmatrix} \quad (11)$$

Utilizando as Equações (3) e (4), tem-se:

$$L_n^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 \quad (12)$$

Consequentemente:

$$2L_n \delta L_n = 2\Delta x'(\delta u_2 - \delta u_1) + 2\Delta y'(\delta v_2 - \delta v_1) \quad (13)$$

Considerando a Equação (6), pode-se escrever a variação do comprimento como:

$$\delta L_n = \mathbf{r}^T \delta \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{r}^T = [-c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0] \quad (14)$$

A determinação da variação do ângulo  $\beta$  é dada a partir da Equação (6):

$$\text{sen } \beta = \frac{\Delta y'}{L_n} = \frac{\Delta y + v_2 - v_1}{L_n} \quad (15)$$

Fazendo a variação desta expressão e algumas manipulações algébricas chega-se a:

$$\delta \beta = \frac{\mathbf{z}^T}{L_n} \delta \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{z}^T = [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0] \quad (16)$$

A transformação entre os deslocamentos globais e locais é obtida com a substituição das Equações (14) e (16) na Equação (11). O resultado desta operação pode ser escrita de forma matricial como:

$$\delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{T} \delta \mathbf{u} \quad (17)$$

onde  $\mathbf{T}$  é a matriz de transformação definida por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ -s/L_n & c/L_n & 1 & s/L_n & -c/L_n & 0 \\ -s/L_n & c/L_n & 0 & s/L_n & -c/L_n & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

De acordo com a Figura 2 o vetor de forças internas no sistema local é dado por:

$$\bar{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Como o trabalho é um escalar, o trabalho virtual interno é indiferente para qualquer sistema, assim, pode-se defini-lo como:

$$\delta U = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} = \delta \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{g}} \quad (20)$$

Substituindo a Equação (17) na expressão acima, obtém-se uma equação capaz de transformar o vetor de forças internas do elemento no sistema local para o sistema global:

$$\mathbf{g} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{g}} \quad (21)$$

A determinação do vetor de forças internas no sistema global considerando a não linearidade física será discutido posteriormente. A solução das equações não lineares de equilíbrio é realizada

normalmente utilizando o Método de Newton-Raphson [2][6], que requer a utilização da matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_t$ . Esta matriz relaciona o incremento de forças internas com o incremento de deslocamentos:

$$d\mathbf{g} = \mathbf{K}_t d\mathbf{u} \quad (22)$$

Portanto, a determinação da matriz de rigidez no sistema global pode ser realizada diferenciando a Equação (21):

$$d\mathbf{g} = \mathbf{T}^T d\bar{\mathbf{g}} + d\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{g}} = \mathbf{K}_e d\mathbf{u} + \mathbf{K}_g d\mathbf{u} \quad (23)$$

onde  $\mathbf{K}_e$  corresponde parcela da matriz de rigidez dependente do material e  $\mathbf{K}_g$  à matriz de rigidez geométrica ou das tensões iniciais. Pode-se calcular a matriz de rigidez tangente como:

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g \quad (24)$$

A matriz de rigidez tangente do sistema local  $\bar{\mathbf{K}}_t$  relaciona o incremento de deslocamentos e forças neste sistema:

$$d\bar{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{K}}_t d\bar{\mathbf{u}} \quad (25)$$

A determinação da matriz de rigidez no sistema global considerando a não linearidade física será discutido posteriormente. Utilizando as Equações (17) e (23), obtém-se a expressão da matriz  $\mathbf{K}_e$  no sistema global, que será simétrica sempre que a matriz de rigidez tangente local for simétrica:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}}_t \mathbf{T} \quad (26)$$

A matriz de rigidez geométrica vem da segunda parcela da Equação (23) correspondente à variação da matriz de transformação:

$$\mathbf{K}_g d\mathbf{u} = d\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{g}} = \bar{N} dt_1 + \bar{M}_1 dt_2 + \bar{M}_2 dt_3 \quad (27)$$

onde  $t_k$  indica a coluna  $k$  da matriz  $\mathbf{T}^T$ . A matriz de transformação definida na Equação (18) pode ser escrita em função dos vetores  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{z}$  definidos nas Equações (14) e (16), respectivamente. Diferenciando a expressão resultante e considerando que:

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \mathbf{z} d\beta \\ d\mathbf{z} &= -\mathbf{r} d\beta \end{aligned} \quad (28)$$

Pode-se escrever a matriz de rigidez geométrica no sistema global como:

$$\mathbf{K}_g = \bar{N} \frac{\mathbf{z}\mathbf{z}^T}{L_n} + \frac{(\bar{M}_1 + \bar{M}_2)}{L_n^2} (\mathbf{r}\mathbf{z}^T + \mathbf{z}\mathbf{r}^T) \quad (29)$$

Portanto, verifica-se que esta matriz é sempre simétrica.

### 2.3 Elemento local

É importante destacar que as transformações entre os sistemas local e global são independentes do tipo de elemento empregado no sistema local, desde que os graus de liberdade e forças internas do elemento sejam os representados na Figura 2. Isto permite o uso de diferentes teorias para formulação do elemento local, sendo o vetor de forças internas e a matriz de rigidez no sistema global obtidos utilizando as Equações (18), (21), (24), (26) e (29). Neste trabalho, foi utilizado um elemento local baseado na Teoria Clássica de Vigas (Euler-Bernoulli). Segundo essa teoria, as seções transversais das vigas continuam planas e perpendiculares ao eixo longitudinal quando as vigas se deformam, pois a deformação de cisalhamento é desprezada. Utilizando esta hipótese pode-se mostrar que a deformação na direção do eixo de barra ( $\epsilon_x$ ) pode ser escrita como:

$$\epsilon_x = \epsilon_m - y\kappa \quad (30)$$

onde  $\epsilon_m$  é a deformação no centroide da seção transversal (deformação de membrana),  $\kappa$  é a curvatura da barra e  $y$  é a distância vertical do ponto considerado até o centroide da seção. Portanto, pode-se definir o vetor de deformações generalizadas ( $\epsilon$ ) como:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_m \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (31)$$

Na análise de estruturas reticuladas é mais conveniente trabalhar com esforços internos (resultante de tensões ou tensões generalizadas) do que com as tensões propriamente ditas. A força normal  $N$  é a força resultante das tensões na direção do eixo da barra:

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad (32)$$

onde  $\sigma_x$  é a tensão normal na direção do eixo da barra e  $A$  é a

área da seção transversal. O momento fletor  $M$  é a resultante dos momentos gerados pelas tensões em torno do eixo horizontal da seção transversal:

$$M = \int_A (-y\sigma_x) dA \quad (33)$$

Com objetivo de simplificar a notação, os esforços internos podem ser agrupados no vetor de tensões generalizadas ( $\sigma$ ):

$$\sigma = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \quad (34)$$

A formulação de elementos finitos não lineares é normalmente desenvolvida através do Princípio dos Trabalhos Virtuais. No caso da teoria clássica de vigas pode-se escrever:

$$\delta U = \int_V \delta \epsilon_x \sigma_x dV = \int_L \delta \epsilon^T \sigma dx \quad (35)$$

A formulação deste elemento inclui o cálculo das deformações ( $\epsilon$ ), forças internas ( $\mathbf{g}$ ) e matriz de rigidez tangente ( $\mathbf{K}_t$ ). As deformações no interior do elemento são dadas por:

$$\begin{aligned} \epsilon_m &= u_{,x} + \frac{1}{2} v_{,x}^2 \\ \mathbf{K} &= v_{,xx} \end{aligned} \quad (36)$$

onde  $u$  é o deslocamento axial e  $v$  é o deslocamento transversal da barra. É importante ressaltar que a expressão da curvatura é linear porque no sistema local as rotações são sempre pequenas. Por outro lado, a deformação de membrana é não linear, incorporando o efeito dos deslocamentos transversais por meio do uso da deformação de Green-Lagrange. Alternativamente, poderia ser considerada apenas a parcela linear da deformação de membrana, pois os deslocamentos transversais no sistema local são pequenos. Contudo, o uso da deformação Green-Lagrange no sistema local torna o elemento mais preciso, permitindo reduzir a discretização da estrutura.

Devido à ordem das derivadas que aparecem na Equação (36), o deslocamento axial  $u$  requer funções de interpolação com continuidade  $C^0$  e deslocamento transversal  $v$  requer funções com continuidade  $C^1$  [5]. Portanto, os deslocamentos no interior do elemento são interpolados a partir dos deslocamentos locais utilizando a expressão:

$$\begin{aligned} u &= L_2 \bar{u} \\ v &= H_2 \bar{\theta}_1 + H_4 \bar{\theta}_2 \end{aligned} \quad (37)$$

onde  $L_2$  é um polinômio de Lagrange linear e  $H_2$  e  $H_4$  são

os polinômios de Hermite [5]. No intervalo de  $0 \leq x \leq L$ , estas funções são definidas como:

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{x}{L} \\ H_2 &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ H_4 &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{aligned} \quad (38)$$

A fim de evitar o travamento de membrana devido ao desbalanceamento dos termos axiais e transversais [6], utiliza-se a deformação de membrana média:

$$\epsilon_m = \frac{1}{L} \int_L \left( u_{,x} + \frac{1}{2} v_{,x}^2 \right) dx \quad (39)$$

Utilizando a Equação (37) e integrando as expressões resultantes chega-se a:

$$\epsilon_m = \frac{\bar{u}}{L} + \frac{1}{30} (2\bar{\theta}_1^2 - \bar{\theta}_1 \bar{\theta}_2 + 2\bar{\theta}_2^2) \quad (40)$$

Desta forma a deformação axial é constante no elemento. Utilizando a Equação (1) verifica-se que  $\bar{u} = L_n - L$ , portanto a primeira parcela da deformação axial representa a variação da distância entre os nós do elemento, de forma semelhante a um elemento de treliça, enquanto a segunda parcela representa o efeito dos deslocamentos transversais devido à flexão do elemento.

Utilizando as Equações (36), (37) e (40), pode-se escrever as deformações generalizadas de forma matricial:

$$\epsilon = \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} \quad (41)$$

onde

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L \quad (42)$$

com

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 1/L & 0 & 0 \\ 0 & H_{2,xx} & H_{4,xx} \end{bmatrix} \quad (43)$$

e

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2}{30} & \frac{4\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{30} \end{bmatrix} \quad (44)$$

As deformações internas virtuais podem ser obtidas por variação da Equação (41):

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{B}}\delta\bar{\mathbf{u}} \quad (45)$$

onde

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L \quad (46)$$

Finalmente, utilizando estas equações pode-se expressar o trabalho virtual interno como:

$$\delta U = \delta\bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{g}} = \int_0^L \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dx = \delta\bar{\mathbf{u}}^T \int_0^L \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dx \quad (47)$$

Portanto, o vetor de forças internas é dado por:

$$\bar{\mathbf{g}} = \int_0^L \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dx \quad (48)$$

A matriz de rigidez tangente é obtida diferenciando a equação acima em relação aos deslocamentos nodais:

$$\bar{\mathbf{K}}_t = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} = \bar{\mathbf{K}}_e + \bar{\mathbf{K}}_g \quad (49)$$

A matriz de rigidez  $\bar{\mathbf{K}}_e$  é dada por:

$$\bar{\mathbf{K}}_e = \int_0^L \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} dx \quad (50)$$

Esta matriz pode ser escrita como:

$$\bar{\mathbf{K}}_e = \int_0^L \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_t \bar{\mathbf{B}} dx \quad (51)$$

onde  $\mathbf{C}_t$  é a matriz constitutiva tangente que relaciona incrementos de tensões e deformações generalizadas:

$$\mathbf{C}_t = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \bar{EA} & \bar{ES} \\ \bar{ES} & \bar{EI} \end{bmatrix} \quad (52)$$

Diferenciado as tensões generalizadas ( $N$  e  $M$ ) em relação às deformações generalizadas ( $\boldsymbol{\varepsilon}_m$  e  $\boldsymbol{\kappa}$ ) chega-se a:

$$\begin{aligned} \bar{EA} &= \int_A E_t dA \\ \bar{ES} &= -\int_A E_t y dA \\ \bar{EI} &= \int_A E_t y^2 dA \end{aligned} \quad (53)$$

onde  $E_t$  corresponde ao módulo de elasticidade tangente da curva tensão-deformação do material:

$$E_t = \frac{d\sigma_x}{d\varepsilon_x} \quad (54)$$

Finalmente, a matriz de rigidez geométrica deste elemento no sistema local é dada por:

$$\mathbf{K}_g = \int_0^L \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \boldsymbol{\sigma} dx = \int_0^L N \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_m^T}{\partial \bar{\mathbf{u}}} dx + \int_0^L M \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_b^T}{\partial \bar{\mathbf{u}}} dx \quad (55)$$

onde  $\bar{\mathbf{B}}_m$  e  $\bar{\mathbf{B}}_b$  representam a primeira e segunda linha da matriz  $\bar{\mathbf{B}}$ , respectivamente. A matriz  $\bar{\mathbf{B}}_b$  não depende dos deslocamentos, logo sua derivada é nula. O outro termo é obtido diferenciando as Equações (44) e (46):

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_m^T}{\partial \bar{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/30 & -1/30 \\ 0 & -1/30 & 4/30 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Como a matriz  $\mathbf{A}$  é constante, a matriz de rigidez geométrica local pode ser escrita como:

$$\bar{\mathbf{K}}_g = \mathbf{A} \int_0^L N dx \quad (57)$$

### 3. Não linearidade física

Neste trabalho, o comportamento tensão-deformação do aço é considerado elasto-plástico perfeito (Figura 3a), tanto na tração quanto na compressão. Este modelo possui apenas dois parâmetros para sua definição (o módulo de elasticidade  $E_s$  e a tensão de escoamento  $f_y$ ) e apresenta boa concordância com os resultados experimentais. Duas relações tensão-deformação foram adotadas para representar o comportamento do concreto à compressão: a curva parábola-retângulo [1] (Figura 3b) e a curva recomendada pelo Eurocode 2:2004 [7] para análise não-linear (Figura 3c). A equação que representa o trecho parabólico do diagrama parábola-retângulo (PR):

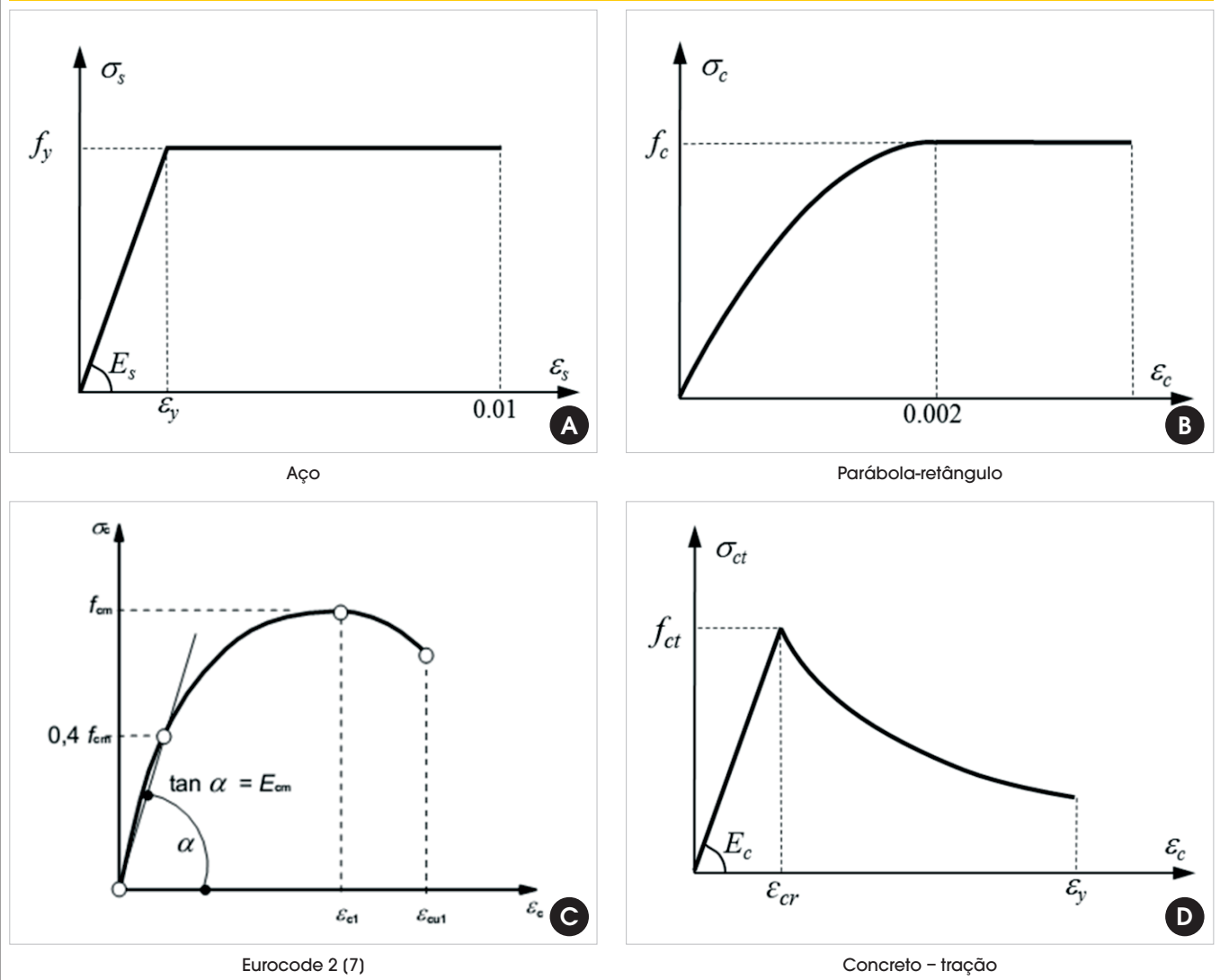
$$\sigma_c = f_c \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{2 \text{‰}} \right)^2 \right] \tag{58}$$

onde  $f_c$  é a resistência a compressão e  $\epsilon_c$  a deformação do concreto. Esta expressão é válida para  $0 \leq \epsilon_c \leq 2 \text{‰}$ . A curva tensão-deformação do concreto na compressão recomendado pelo Eurocode 2:2004 [7] (EC2) é dada por:

$$\sigma_c = f_{cm} \left[ \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta} \right] \tag{59}$$

onde  $f_{cm}$  é a resistência à compressão,  $\eta = \epsilon_c / \epsilon_{c1}$ , em que  $\epsilon_{c1}$  é a deformação no pico da tensão,  $k = 1.05 E_{cm} |\epsilon_{c1}| / f_{cm}$  e  $E_{cm}$  é o módulo de elasticidade secante correspondente à uma tensão de  $0.4 f_{cm}$ , como indicado na Figura 3c. A Equação (59) é válida para  $0 < |\epsilon_c| < |\epsilon_{cu1}|$ , onde  $|\epsilon_{cu1}| = 3.5 \text{‰}$ . Verifica-se que esta curva considera o amolecimento (*softening*) do concreto após o pico de tensão, enquanto a curva parábola-retângulo considera a tensão

Figura 3 – Diagramas tensão-deformação





constante entre 2‰ e 3.5‰. Para deformações além de 3.5‰ considera-se o esmagamento total do concreto ( $\sigma_c = 0$ ) para as duas curvas.

O comportamento do concreto simples à tração sob o estado uniaxial de tensões pode ser representado por um diagrama bilinear [1], onde após a primeira fissura o concreto perde toda sua resistência. Entretanto, no concreto armado, entre seções fissuradas, as forças de tração na peça são transmitidas do aço para o concreto em volta da barra de aço por forças de superfície. Esse efeito é denominado *tension stiffening* [17].

Neste trabalho, o efeito do *tension stiffening* é considerado utilizando a formulação apresentada em [10]. Esta formulação é baseada no modelo do CEB, desenvolvido a partir de ensaios de tirantes de concreto armado. No modelo adotado, as tensões de tração ( $s_{ct}$ ) no concreto pós-fissuração são calculadas pela expressão:

$$\sigma_{ct} = -\frac{\rho}{2} E_s \varepsilon_c + \sqrt{\left(\frac{\rho}{2} E_s \varepsilon_c\right)^2 + f_{ct}^2 (1 + \eta \rho)} \quad (60)$$

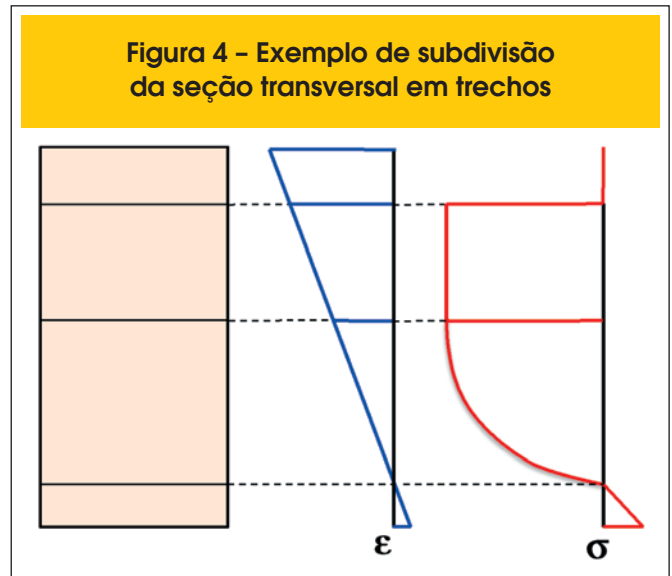
onde  $f_{ct}$  é a resistência do concreto à tração,  $\eta$  é a relação entre o módulo de elasticidade do aço e do concreto ( $\eta = E_s / E_c$ ) e  $\rho$  é a taxa efetiva de armadura ( $\rho = A_s / A_{c,ef}$ ), sendo  $A_{c,ef}$  a área efetiva de concreto à tração (i.e. a área que contribui para o *tension stiffening*). O CEB-FIP 1990 recomenda a utilização de  $A_{c,ef} = 2.5b(h-d)$ , onde  $b$  é a largura,  $h$  é a altura e  $d$  a altura útil da seção. A curva tensão-deformação do concreto tracionado (TS) considerada neste trabalho é composta por um trecho linear até a fissuração ( $s_{ct} = f_{ct}$ ) seguido por trecho de decaimento (*softening*), dado pela Equação (60), até a deformação de escoamento da armadura ( $\varepsilon_y$ ). Esta curva é ilustrada na Figura 3d.

As formulações apresentadas neste trabalho permitem que diferentes curvas tensão-deformação sejam adotadas para modelo o comportamento do aço e do concreto. Desta forma, as relações tensão-deformação descritas neste item e representadas na Figura 3 foram escolhidas para a implementação computacional devido a sua grande utilização na literatura e boa concordância obtida com resultados experimentais.

### 3.1 Integração na seção transversal

Conhecidas as deformações generalizadas ( $\varepsilon_m$  e  $\kappa$ ) da seção transversal, as tensões atuantes são calculadas a partir da lei constitutiva do material. Os esforços internos ( $\sigma$ ) e a matriz constitutiva tangente ( $C_t$ ), definidas pelas Equações (32), (33), (34), (52) e (53), são obtidos por integração das tensões e do módulo tangente na seção transversal. No caso de material elástico linear estas integrações são simples, sendo realizadas de forma analítica. Adicionalmente, a matriz constitutiva é constante, permitindo que o vetor de forças internas e as matrizes de rigidez material e geométrica, definidas pelas Equações (48), (51) e (57), sejam integradas analiticamente, resultando em expressões simples em função dos esforços internos e das propriedades mecânicas da seção transversal ( $EA$  e  $EI$ ).

Por outro lado, no caso de curvas tensão-deformação não lineares definidas por trechos, como as adotadas neste trabalho, a integração analítica é complexa, além de ser de implementação computacional trabalhosa e sujeita a erros devido à necessidade



de obtenção e codificação de várias expressões específicas para cada trecho, como feito em [12]. Uma aplicação eficiente desta estratégia para curvas tensão-deformação definidas por trechos polinomiais até o terceiro grau foi apresentada em [15].

Devido à complexidade da integração analítica, normalmente o cálculo dos esforços internos e da matriz tangente é realizado através da integração numérica utilizando as quadraturas de Gauss ou Lobatto [6]. Esta abordagem é de fácil implementação computacional, pois a mesma expressão é utilizada para qualquer curva tensão-deformação. Adicionalmente, estas quadraturas produzem resultados exatos para curvas polinomiais, desde que se use o número adequado de pontos de integração, e apresentam convergência rápida para as integrais exatas no caso de curvas tensão-deformação suaves (i.e. continuamente diferenciáveis). Contudo, as curvas utilizadas para descrever o comportamento do concreto normalmente são definidas por trechos, não sendo continuamente diferenciáveis. Em alguns casos, como ocorre após a ruptura por tração ou compressão, as curvas podem inclusive ser descontínuas. Neste caso, uso das quadraturas de Gauss e Lobatto requer um número elevado de pontos de integração para obtenção de uma precisão adequada, aumentando o custo computacional.

Outra técnica de integração numérica bastante utilizada é o Método das Fatias [14]. Neste método, a seção transversal é dividida em um número de fatias horizontais. Em cada fatia considera-se para  $\sigma$  e  $E_t$  valores constantes calculados no centro da fatia. Desta forma, as integrações são calculadas somando-se a contribuição das fatias. Este método também é simples e independente da curva tensão-deformação utilizada, porém requer um grande número de fatias para obter resultados precisos, resultando em um custo computacional elevado.

Em [4] é utilizada uma técnica mista onde a seção é dividida em um número pré-definido de faixas de altura constante, como no Método das Fatias, porém dentro de cada faixa as integrações são realizadas utilizando a quadratura de Gauss. Infelizmente, neste método cada faixa pode conter trechos diferentes da curva tensão-deformação, fazendo com que os integrandos não sejam suaves. Portanto, é necessário utilizar um elevado número de pontos de Gauss em cada faixa para obter resultados satisfatórios.

**Figura 5 – Algoritmo de subdivisão da seção**

Dadas as deformações limites ( $\bar{\epsilon}_j$ ) das curvas tensão-deformação, a deformação de membrana ( $\epsilon_m$ ) e a curvatura ( $\kappa$ ) na seção considerada:

- 1) Calcular as deformações na base ( $\epsilon_b$ ) e no topo ( $\epsilon_t$ ) da seção utilizando a Equação (30) e as coordenadas da base ( $y_b$ ) e do topo ( $y_t$ ) da seção;
- 2) Determinar os trechos de deformação  $f_b$  e  $f_t$  que contém  $\epsilon_b$  e  $\epsilon_t$ , respectivamente;
- 3) Calcular o número de faixas:  $n = |f_t - f_b| + 1$ ;
- 4) Fazer  $y_1 = y_b$  e  $y_{n+1} = y_t$ ;
- 5) Para  $i = 2$  até  $n$  calcular os limites entre as faixas:  
 se ( $f_t > f_b$ )  $j = f_b - 2 + i$   
 senão  $j = f_b + 1 - i$   
 $y_i = (\epsilon_m - \bar{\epsilon}_j) / \kappa$

Neste trabalho é proposto um método computacionalmente eficiente, de fácil implementação e de elevada precisão numérica para integração dos esforços internos e da matriz tangente em seções de concreto armado submetidas a carregamento monotônico e cujas curvas tensão-deformação são definidas por trechos. Este método é baseado na subdivisão da seção transversal em faixas de altura variável cujos limites são definidos de acordo com os limites de cada trecho da curva tensão-deformação, como ilustrado na Figura 4. O algoritmo utilizado para subdivisão automática da seção transversal é apresentado na Figura 5.

Como resultado da subdivisão da seção utilizando o algoritmo proposto, as curvas tensão-deformação dentro de cada faixa são continuamente diferenciáveis. Portanto, os esforços internos e os termos da matriz constitutiva tangente podem ser integrados com elevada precisão em cada faixa utilizando a quadratura de Gauss. Tabelas contendo as coordenadas paramétricas ( $r_k$ ) no intervalo [-1, 1] e pesos ( $w_k$ ) dos pontos de Gauss são apresentadas em [2] e [5]. Para utilização da quadratura de Gauss, coordenadas verticais ( $y$ ) dentro de cada faixa são interpoladas utilizando a coordenada paramétrica  $r$ :

$$y = \frac{y_{i+1} + y_i}{2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{2} r \Rightarrow dy = \frac{h_i}{2} dr \quad (61)$$

Nesta equação,  $h_i = y_{i+1} - y_i$  representa a altura de cada faixa. No procedimento proposto o momento fletor é calculado somando a contribuição de cada faixa:

$$M = \sum_{i=1}^n M_i, \quad M_i = - \sum_{k=1}^{np} w_k y_k \sigma_k b_k \frac{h_i}{2} \quad (62)$$

onde  $n$  é o número de faixas,  $np$  é o número de pontos de Gauss

da faixa,  $y_k$  é a coordenada vertical do ponto Gauss calculado substituindo a coordenada paramétrica  $r_k$  na Equação (61),  $\sigma_k$  é tensão no ponto de Gauss e  $b_k$  é a largura da seção no ponto de Gauss. As demais integrais são calculadas da mesma forma.

É importante notar que o procedimento proposto, baseado no uso da Equação (62), produz resultados exatos quando as relações tensão-deformação de todos os trechos são polinômios, desde que seja utilizado o número de pontos de Gauss apropriado. Como o grau ( $g$ ) do polinômio integrado exatamente pela quadratura de Gauss é dado por  $g = 2np - 1$ , verifica-se que 1 ponto de Gauss é necessário para trechos com  $\sigma$  constante e 2 pontos para trechos com  $\sigma$  parabólico. No caso de curvas não polinomiais, como a Equação (59), o procedimento não é exato, mas produz resultados com elevada precisão mesmo utilizando apenas 3 ou 4 pontos de integração, como será mostrado nos exemplos.

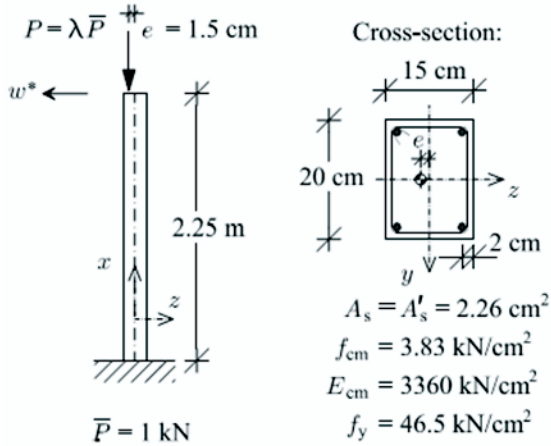
A contribuição do aço que está embutido dentro da seção transversal de concreto é calculada considerando a distribuição de tensões constante na seção de cada barra da armadura, pois as dimensões são pequenas para haver uma variação significativa das tensões. Assim, conhecida a posição do centro das armaduras, a deformação de cada barra é calculada com a Equação (30) e a tensão no centro das barras utilizando a relação tensão-deformação representada na Figura 3a. Dessa forma, a contribuição do aço para o momento fletor é calculada pelo somatório:

$$M_s = - \sum_{i=1}^m \Delta \sigma_i y_i A s_i \quad (63)$$

onde  $m$  é o número de barras, onde  $A s_i$  é a área da barra de aço,  $y_i$  é a coordenada do centro da barra e  $\Delta \sigma_i = \sigma_{s_i} - \sigma_{c_i}$  é a diferença entre as tensões no aço e concreto, respectivamente. O procedimento é idêntico para as demais integrais.

No caso da análise fisicamente não linear, a variação dos esforços internos e da matriz constitutiva tangente, ao longo do comprimento

**Figura 6 – Pilar de concreto armado: geometria, material e carregamento (4)**



do elemento não é conhecida de forma explícita, o que impede que as integrais definidas nas Equações (48), (51) e (57), sejam calculadas analiticamente. Desta forma, o vetor de forças internas e a matriz de rigidez do elemento no sistema local são calculados utilizando a quadratura de Gauss com 2 pontos de integração ao longo do comprimento do elemento.

#### 4. Resultados e discussão

A formulação e implementação foram avaliadas através da comparação com resultados numéricos e experimentais disponíveis na literatura. Dentre as estruturas analisadas, duas foram escolhidas para serem apresentadas neste trabalho, com objetivo de ilustrar o comportamento de estruturas de concreto onde ambas as não linearidades (física e geométrica) são importantes e de estudar o comportamento do elemento finito e do método de integração apresentados. Quando os parâmetros das curvas tensão-deformação descritas no Item 3 não foram determinados de forma experimental, eles foram estimados através das expressões:  $\epsilon_{c1} = 0.7 f_{cm}^{0.31}$ ,  $\epsilon_{cu1} = -3.5\%$ ,  $E_{cm}(\text{GPa}) = 22 [f_{cm}/10]^{0.3}$ ,  $E_{ci}(\text{GPa}) = 21.5 [f_{cm}/10]^{1/3}$ ,  $f_{ctm} = 0.3 f_{ck}^{2/3}$  e  $f_{cm} = f_{ck} + 8$  [7].

**Tabela 1 – Método das fatias x Método proposto**

nf	P <sub>max</sub> (kN)	np	P <sub>max</sub> (kN)
10	457.276	2	459.673
20	459.599	3	460.092
50	459.991	4	460.092
100	460.069	5	460.092
600	460.092	-	-

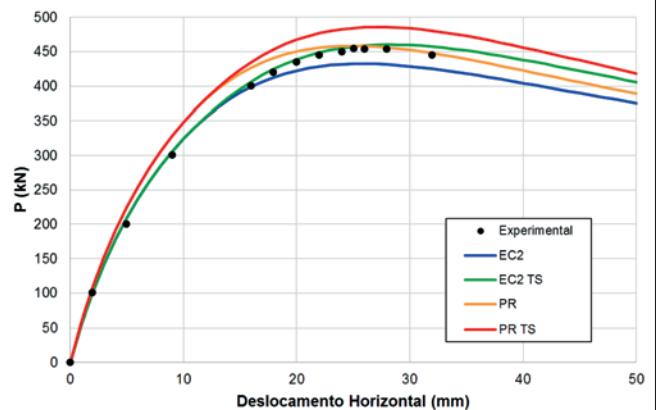
#### 4.1 Pilar com carga excêntrica

O pilar foi submetido a uma carga excêntrica até o colapso. Os dados de geometria, material e carregamento [4] estão ilustrados na Figura 6. O concreto tem resistência a compressão  $f_c = 38.3$  MPa. Na análise empregando o modelo constitutivo EC2, foram utilizadas as propriedades:  $f_{cm} = 38.3$  MPa [8],  $E_{cm} = 33.6$  GPa [8] e  $\epsilon_{c1} = -2.3\%$  [4]. Para o concreto a tração adotou-se  $f_{ct} = 2.9315$  MPa e  $E_c = 33.639$  GPa. Finalmente, as propriedades do aço são  $f_y = 465$  MPa [8] e  $E_s = 200$  GPa [4].

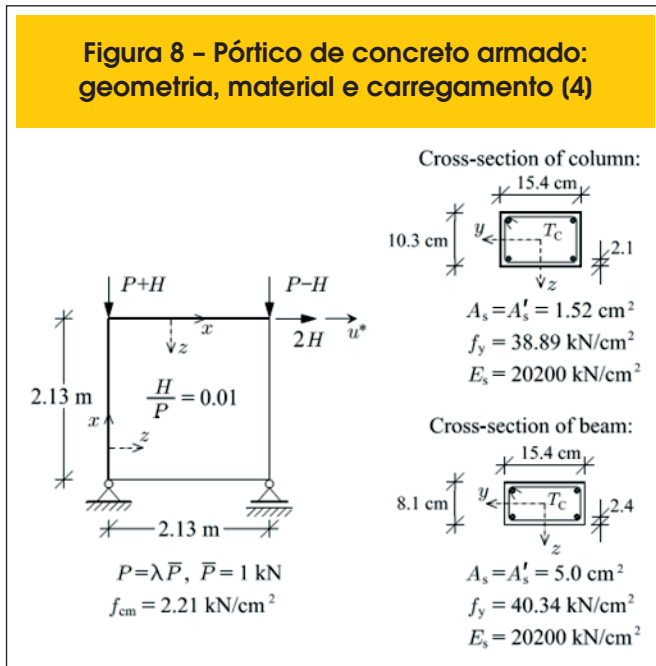
Inicialmente, utilizou-se o modelo EC2 com consideração da tração (TS) e integração pelo método proposto com 4 pontos de Gauss por faixa ( $np = 4$ ). Na análise não linear, adotou-se o método incremental-iterativo de Controle de Deslocamento, com incrementos de -1mm para o deslocamento horizontal do topo do pilar. Com objetivo de estudar o efeito da discretização, o pilar foi modelado utilizando malhas com 1, 2 e 4, obtendo-se as cargas máximas de 457.52 kN, 460.59 kN e 460.09 kN, respectivamente. Estes resultados estão em excelente concordância com a carga máxima de 454 kN obtida experimentalmente [8], mostrando que a formulação proposta não necessita de malhas muito refinadas para representar adequadamente o comportamento não linear físico e geométrico desta estrutura. É importante ressaltar que a carga máxima obtida neste trabalho foi mais próxima da experimental que o valor de 445 kN obtido em [4] utilizando o modelo EC2 sem tração. Verificou-se ainda que o Método de Newton-Raphson apresentou convergência quadrática, com o número de iterações variando entre 3 e 4 ao longo da análise, mesmo com a tolerância bastante apertada utilizada para convergência ( $10^{-8}$ ).

A seguir, variou-se o método de integração na seção transversal e o número de fatias ( $nf$ ) e pontos de Gauss ( $np$ ) utilizados, mantendo-se fixo o número de elementos (4) e o modelo constitutivo adotado (EC2 com TS). Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 1. Estes resultados mostram que a utilização de 20 fatias produz resultados satisfatórios em termos práticos. Contudo, o método proposto é muito mais preciso e eficiente que o Método das Fatias, produzindo resultados melhores do que 20 fatias com apenas 2 pontos de Gauss por faixa. Resultados exatos com

**Figura 7 – Curva de equilíbrio do pilar de concreto armado**



**Figura 8 – Pórtico de concreto armado: geometria, material e carregamento (4)**



6 algarismos significativos são obtidos utilizando apenas 3 pontos de Gauss por faixa, resultado equivalente ao uso de 600 fatias. É importante ressaltar que em [4] foram utilizadas 5 faixas de altura fixa e 10 pontos de Gauss em cada faixa, mostrando a grande vantagem da utilização de faixas variáveis determinadas de acordo com o método proposto.

Finalmente, o pilar foi analisado utilizando 4 elementos finitos e integração com 4 pontos de Gauss por faixa considerando-se os modelos EC2 e PR, com e sem a consideração da tração (TS). As curvas carga x deslocamento horizontal do topo do pilar são mostradas na Figura 7. Verifica-se que todos os modelos conseguem representar de forma adequada o comportamento estrutural do pilar. Contudo, o modelo EC2 com TS foi o que mais se aproximou dos resultados experimentais apresentados em [8]. O modelo PR com TS forneceu resultados mais rígidos (limite superior) e o modelo EC2 sem tração forneceu resultados mais flexíveis (limite inferior).

#### 4.2 Pórtico plano

Este pórtico plano de concreto armado foi ensaiado em [9]. A geometria, a seção transversal dos pilares e das vigas e os dados do concreto e do aço estão representados na Figura 8. Os demais parâmetros dos materiais necessários para a análise foram estimados da forma descrita no Item 4. Para a análise empregando a curva parábola-retângulo adotou-se  $f_c = 22.1 \text{ MPa}$ . Para a análise empregando o modelo EC2 adotou-se:  $f_{cm} = 22.1 \text{ MPa}$ ,  $E_{cm} = 27.909 \text{ GPa}$  e  $\mathcal{E}_{c1} = -1,828\text{‰}$  [4]. Para o concreto a tração adotou-se  $f_{ct} = 1.760 \text{ MPa}$  e  $E_c = 28.005 \text{ GPa}$ . Os aços empregados possuem tensão de escoamento  $f_y = 388,9 \text{ MPa}$  e  $f_y = 403,4 \text{ MPa}$  para pilares e vigas, respectivamente. O módulo de elasticidade é  $E_s = 202 \text{ GPa}$ .

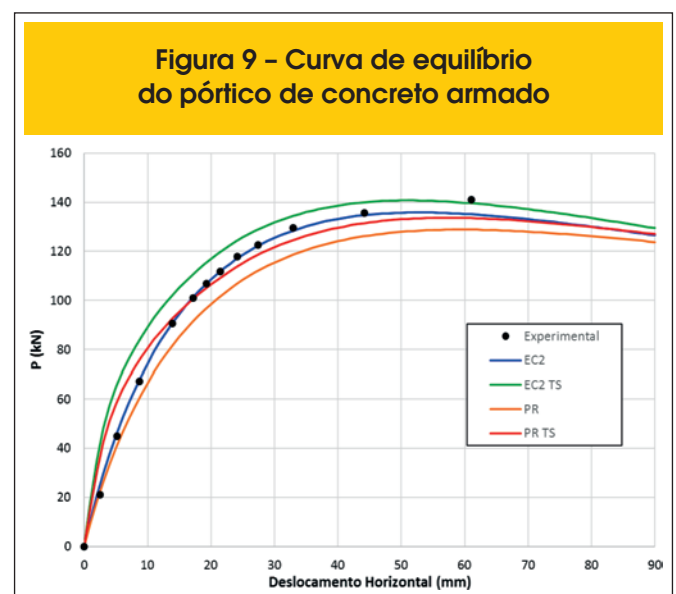
Inicialmente, utilizou-se o modelo EC2 com consideração da tração (TS) e integração pelo método proposto com 4 pontos de Gauss por faixa ( $np = 4$ ). Na análise não linear, adotou-se o método incremental-iterativo de Controle de Deslocamento, com

incrementos de  $-1 \text{ mm}$  para o deslocamento horizontal do nó onde atua a carga horizontal  $H$ . Com objetivo de estudar o efeito da discretização, o pilar foi modelado utilizando malhas com 1, 2, 4 e 8 elementos por barra, obtendo-se as cargas máximas de 152.868 kN, 143.897 kN, 141.555 kN e 140.806 kN, respectivamente. Estes resultados estão em excelente concordância com a carga máxima de 141 kN obtida experimentalmente [9], mostrando que 4 elementos por barra é suficiente para representar adequadamente o comportamento não linear físico e geométrico desta estrutura. A carga máxima obtida neste trabalho foi mais próxima da experimental que o valor de 136.4 kN obtido em [4] utilizando o modelo EC2 sem tração. Verificou-se ainda que o Método de Newton-Raphson apresentou convergência quadrática, com o número de iterações variando entre 3 e 4 ao longo da análise, mesmo com a tolerância de  $10^{-6}$  utilizada para convergência.

Ao contrário do exemplo anterior, o estudo dos métodos de integração mostrou que para este exemplo apenas 10 fatias ou 2 pontos de Gauss por faixa já levam a resultados praticamente exatos com 6 algarismos significativos. Ainda assim, o método proposto é mais eficiente que o Método das Fatias devido ao menor número de pontos utilizados.

Finalmente, o pilar foi analisado utilizando 8 elementos finitos por barra e integração com 3 pontos de Gauss por faixa considerando-se os modelos EC2 e PR, com e sem a consideração da tração (TS). As curvas carga x deslocamento horizontal do ponto de aplicação da carga  $H$  são mostradas na Figura 9. Verifica-se que todos os modelos conseguem representar de forma adequada o comportamento do pórtico analisado. O modelo EC2 sem tração foi o que mais se aproximou dos resultados experimentais [9], porém o modelo EC2 incluindo a tração (TS) foi o que melhor aproximou a carga máxima. Para esta estrutura, o modelo EC2 com TS forneceu resultados mais rígidos (limite superior) e o modelo PR sem tração forneceu resultados mais flexíveis (limite inferior). Verifica-se ainda que a rigidez inicial dos modelos com tração (TS) parecem superestimados, indicando que o valor do módulo de elasticidade do concreto à tração ( $E$ ) é menor que o estimado utilizando as expressões dadas em [7].

**Figura 9 – Curva de equilíbrio do pórtico de concreto armado**



## 5. Conclusão

Este trabalho apresentou a formulação de um elemento finito de pórtico plano para análise não linear física e geométrica, incluindo um novo método para integração dos esforços e matriz constitutiva tangente na seção transversal. As formulações apresentadas e as implementações computacionais foram validadas através da comparação com resultados experimentais e numéricos disponíveis na literatura. Todos os modelos propostos apresentaram resultados consistentes, representando de forma adequada o comportamento observado em laboratório. Contudo, verificou-se, que o modelo do Eurocode 2:2004 [7] leva a melhores resultados que o modelo parábola-retângulo. A consideração da tração no concreto revelou-se importante para a avaliação da carga última das estruturas estudadas. Por outro lado, esta consideração requer um número significativo de parâmetros, cuja determinação experimental normalmente não é realizada. Isto leva ao uso de expressões baseadas em correlações que nem sempre levam a resultados adequados.

O método de integração baseado na subdivisão automática da seção transversal em faixas de acordo com os trechos curvas tensão-deformação e no uso da quadratura de Gauss em cada faixa se mostrou simples, eficiente e de elevada precisão na análise de estruturas com carregamento monotônico, para todos os modelos constitutivos adotados. Finalmente, o estudo da discretização mostrou que o elemento proposto leva a resultados adequados quando são utilizados entre 2 e 4 elementos por barra, configurando-se como alternativa eficiente para a análise não linear de pórticos planos de concreto armado, com vistas ao seu uso na análise de estruturas com grande número de barras.

## 6. Referências bibliográficas

- concrete column in a frame subjected to lateral loads. Symposium on Reinforced Concrete Columns. American Concrete Institute SP-13, 1966.
- [10] HERNÁNDEZ-MONTES, E.; CESETTI, A.; GIL-MARTÍN, L.M. Discussion of "An efficient tension-stiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members", by Renata S.B. Stramandinoli, Henriette L. La Rovere, *Engineering Structures*, v. 48, p. 763–764, 2013.
- [11] MENIN, R.C.G.; TRAUTWEIN, L.M.; BITTENCOURT, T.N. Modelos de fissuração distribuída em vigas de concreto armado pelo método dos elementos finitos. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, v.2, n.2, p.166-200, 2009.
- [12] MELO, A. M. C. de Projeto ótimo de pórticos planos de concreto armado. 2000. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2000.
- [13] NANAKORN, P.; VU, L.N. A 2D field-consistent beam element for large displacement analysis using the total Lagrangian formulation. *Finite Elements in Analysis and Design*, v.42, p.14-15, 2006.
- [14] SPACONE, E.; FILIPPOU, F.C.; TAUCER, F.F. Fibre beam-column model for non-linear analysis of R/C frames: Part I. Formulation. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.25, p.711-725, 1996.
- [15] SOUSA JR., J.B.M.; MUNIZ, C.F.D.G. Analytical integration of cross section properties for numerical analysis of reinforced concrete, steel and composite frames. *Engineering Structures*, v. 29 p. 618–625, 2007.
- [16] STRAMANDINOLI, R.S.B. Modelos de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado. 2007. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.
- [17] STRAMANDINOLI, R.S.B.; LA ROVERE, H.L. An efficient tension-stiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members, *Engineering Structures*, v. 30, p. 2069–2080, 2008.
- [01] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimentos. Rio de Janeiro, 2007.
- [02] BATHE, K.J. *Finite element procedures*. New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- [03] BATTINI, J.M. Co-rotational beams elements in instability problems. 2002. Phd thesis – Royal Institute of Technology, Sweden.
- [04] BRATINA, M.; SAJE, S.; PLANINC, I. On materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames. *International Journal of Solids and Structures*, v.41, p.7181-7207, 2004.
- [05] COOK, R.D.; MALKUS, D.S.; PLESHA, M.E. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 4th ed. New York: John Wiley & Sons, 2002.
- [06] CRISFIELD, M.A. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. New York: John Wiley & Sons, 1991. v.1.
- [07] EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings. EN 1992-1-1. Brussels, 2004.
- [08] ESPION, B. Benchmark examples for creep and shrinkage analysis computer programs: creep and shrinkage of concrete. TC 114 RILEM. E&FN Spon, 1993.
- [09] FERGUSON, P.M.; BREEN, J.E. Investigation of the long