UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

RONDINELLI ROCHA DA FONSECA

TÓPICOS MATRICIAIS E DETERMINANTES

FORTALEZA
2013

RONDINELLI ROCHA DA FONSECA

TÓPICOS MATRICIAIS E DETERMINANTES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

F747t Fonseca, Rondinelli Rocha da
Tópicos matriciais e determinantes / Rondinelli Rocha da Fonseca. – 2013.
35 f. : il., enc. ; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2013.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Matrizes (Matemática). 2. Sistemas lineares. 3. Ensino médio. I. Título.

CDD 512.9434

RONDINELLI ROCHA DA FONSECA

TÓPICOS MATRICIAIS E DETERMINANTES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 03/08/2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dedico este trabalho à minha esposa Jéssica Gomes do Amaral Fonseca.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus pelo dom da vida e por todas as bençãos concedidas.

Agradeço à minha esposa Jéssica Gomes do Amaral Fonseca por todo o Amor, Carinho e Incentivo durante esse curso.

Agradeço aos meus pais, Domingos Sávio Alcântara da Fonseca e Maria de Fátima Rocha da Fonseca, pelo amor, carinho, apoio e criação.

Agradeço aos meus irmãos, Robson Ítalo Rocha da Fonseca, Rêuvula Maria Rocha da Fonseca e Rônald Emanuel Rocha da Fonseca, pelo apoio em toda minha vida.

Agradeço aos meus sogros, Manoel Ferreira do Amaral e Maria Aurilene Gomes do Amaral, pela consideração, apoio e amizade.

Agradeço aos meus filhos, Neumany Kellen de Lima Alcântara da Fonseca e Pedro Levi de Lima Alcântara da Fonseca, pela compreensão em todos os momentos de minha ausência para a realização desse curso.

Agradeço ao meu professor e orientador Marcelo Ferreira de Melo, pelas aulas, indicações e pronto atendimento ao trabalho de orientação e pelo compromisso contínuo durante todo o programa de mestrado.

Agradeço aos professores, José Afonso de Oliveira, Marcos Ferreira de Melo, José Robério Rogério, José Othon Dantas Lopes, Cleon da Silva Barroso, José Fábio Bezerra Montenegro pelas aulas ministradas e dedicação neste projeto de mestrado.

Agradeço a todos os meus colegas de pós-graduação em matemática da UFC.

Agradeço a todos os colegas do PROFMAT que contribuíram a distância nas disciplinas do mestrado, em especial, a Elisângelo Lopes e José Xavier, pelas valorosas sugestões nos exercícios.

Agradeço a todos os responsáveis pela criação deste programa de mestrado profissional em matemática em rede nacional, em especial aos professores idealizadores Elon Lages Lima, Eduardo Wagner e Paulo César Pinto Carvalho.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todos que de maneira direta ou indireta contribuíram para que este sonho se realizasse.

"O temor do Senhor é o princípio da sabedoria; todos os que cumprem os seus preceitos revelam bom senso. Ele será louvado para sempre!"

Salmos 111:10

RESUMO

Neste trabalho abordaremos alguns tópicos matriciais e determinantes e sua aplicação no Ensino Médio. Em especial a Matriz de Gram em uma transformação linear que pode ser aplicada, por exemplo, para calcular a área de um triângulo em função dos seus lados e também o Gramiano (determinante da Matriz de Gram) que permite calcular o volume de um paralelepípedo. Ambos podem ser aplicados no ensino médio. Nesse trabalho tembém fazemos uma generalização do produto vetorial e algumas de suas propriedades envolvendo determinantes. Por fim mostramos a Identidade de Lagrange.
Palavras-chave: Matriz de Gram, Gramiano, Transformação Linear, Volume de paralelepípedo, Produto Vetorial e Identidade de Lagrange.

ABSTRACT

In this paper we discuss some topics and determinants matrix and its application in high school. In particular, the Gram matrix in a linear transformation which can be applied, for example, to calculate the area of a triangle in terms of their sides and also Gramiano (Gram matrix determinant) for calculating the volume of a parallelepiped. Both can be applied in high school. In this work we tembém a generalization of the vector product and some of its properties involving determinants. Finally we show the identity of Lagrange.
Keywords: Gram matrix, Gramiano, Transforms cc to Linear, Volume cobblestone, Vector Product Identity and Lagrange.

Sumário

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

No Ensino Médio o estudo de Matrizes e Determinantes fica basicamente restrito à resolução de Sistemas Lineares, salvo uma ou outra aplicação na Geometria Analítica. Historicamente esses conteúdos realmente surgiram da resolução de Sistemas Lineares. O início da teoria das matrizes remonta a um artigo de Cayley em 1855 quando ele as utilizou para simplificar a notação de uma transformação linear.

Neste trabalho tentaremos introduzir a noção de Matrizes de Gram e dar algumas aplicações do uso dessas matrizes como possibilidade de resolução de alguns problemas de geometria no ensino médio, como o cálculo da área de um triângulo em função apenas dos comprimentos dos seus lados. Apresentaremos também o Gramiano, determinante da Matriz de Gram, e o utilizaremos para o cálculo do volume de um paralelepípedo quando se conhecem quatro pontos não coplanares desse sólido.

Ao trabalhar a Geometria Analítica com uma abordagem vetorial este trabalho fica simplificado e permite ao aluno do Ensino Médio uma compreensão de forma razoavelmente simples dessas aplicações.

No segundo capítulo mostramos a Matriz de Gram relacionada com algumas transformações lineares. Já no terceiro capítulo introduzimos o Gramiano, relacionando-o com projeções ortogonais de um vetor sobre um subespaço e com a ideia e cálculo do volume do paralelepípedo. Ainda neste capítulo, usamos os determinantes para fazer a generalização do produto vetorial e por fim mostramos a Identidade de Lagrange que pode ser utilizada para o desenvolvimento de alguns produtos notáveis.

Capítulo 2

TÓPICOS MATRICIAIS

2.1 MATRIZES DE GRAM

Seja E um espaço vetorial de dimensão finita, munido de produto interno. A *matriz de Gram* dos vetores $v_1, \cdots, v_k \in$ E é a matriz $\mathbf{g} = (g_{ij}) \in M(k \times k)$, onde $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$. Quando precisarmos ser mais explícitos, escreveremos g = g($v_1, \cdots, v_k$).

Exemplo 2.1 *Sejam $u = (2,3)$ e $v = (1,4)$ dois vetores em $\mathbb{R}^2$. A Matriz de Gram desses vetores é a matriz:*

$$g = \begin{pmatrix} \langle u,u \rangle & \langle u,v \rangle \\ \langle v,u \rangle & \langle v,v \rangle \end{pmatrix}.$$

Calculemos:
$\langle u,u \rangle = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 4 + 9 = 13$
$\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 2 + 12 = 14$
$\langle v,v \rangle = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 1 + 16 = 17$
Daí temos:

$$g = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 14 & 17 \end{pmatrix}.$$

Dada uma base $\mathcal{U} = \{u_1, \cdots, u_n\} \subset$ E, seja a = $[a_{ij}] \in M(n \times k)$ a matriz das coordenadas dos vetores v_j em relação à base $\mathcal{U}$, isto é:

$$v_j = a_{1j}u_1 + \cdots + a_{nj}u_n \quad \text{para } j = 1, ..., k.$$

Seja ainda **h** = $[h_{ij}] \in M(n \times n)$ a matriz de Gram da base $\mathcal{U}$, isto é, $h_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle$.

Então, para $i, j = 1, \cdots, k$ temos (escrevendo $\mathbf{m}_{ij}$ para indicar o ij-ésimo elemento de uma matriz **m**):

$$g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = \left\langle \sum_{r=1}^{n} a_{ri}u_r, \sum_{s=1}^{n} a_{sj}u_s \right\rangle.$$

Usando a bilinearidade do produto interno, que diz que $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$ e $\langle u, \alpha v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$, temos:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \sum_{r,s=1}^{n} a_{ri}a_{sj}.\langle u_r, u_s\rangle = \sum_{r,s=1}^{n} a_{ri}a_{sj}h_{rs} \\ &= \sum_{r=1}^{n} a_{ri}\left(\sum_{s=1}^{n} h_{rs}a_{sj}\right) = \sum_{r=1}^{n}(\mathbf{a}^T)_{ir}(\mathbf{ha})_{rj} = (\mathbf{a}^T\mathbf{ha})_{ij}. \end{aligned}$$

Portanto g = $\mathbf{a}^T\mathbf{ha}$.

Em particular, se tomarmos uma base ortonormal $\{u_1, \cdots, u_n\} \subset$ E, teremos $\mathbf{h} = \mathbf{I_n}$, portanto a matriz de Gram se escreve como

$$\mathrm{g} = \mathrm{g}(v_1, \cdots, v_k) = \mathbf{a}^T.\mathbf{a},$$

onde $\mathbf{a}$ é a matriz das coordenadas dos vetores v_j em relação a essa base ortonormal de E.

Exemplo 2.2 *Tomando os vetores u e v do exemplo 2.1 temos a matrizes $a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $a^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Assim a Matriz de Gram será:*

$$g = a^T \cdot a = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 14 & 17 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.3 *Usemos a Matriz de Gram para calcularmos a área de um triângulo cujos lados medem a, b e c.*
Representando os lados do triângulo pelos vetores u, v e u - v, os comprimentos dos seus lados serão a = |u|, b = |v| e c = |u - v|.
Sabemos da geometria analítica que a área do triângulo é:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\det a|, \tag{2.1}$$

onde a é a matriz cujas colunas são os vetores u, v e $u - v$.
Sabemos ainda que $g = a^T \cdot a$.
Daí:

$$\det g = \det(a^T \cdot a) = \det a^T \cdot \det a = \det a \cdot \det a = (\det a)^2. \tag{2.2}$$

De (2.1) e (2.2) escrevemos:

$$A^2 = \frac{1}{4} \cdot \det g = \frac{1}{4} \cdot \det \begin{pmatrix} |u|^2 & \langle u, v\rangle \\ \langle u, v\rangle & |v|^2 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Como $|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2 \cdot \langle u, v\rangle$, temos que:

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2} \cdot \left(|u|^2 + |v|^2 - |u - v|^2\right) = \frac{1}{2} \cdot (a^2 + b^2 - c^2). \tag{2.4}$$

Então:

$$A^2 = \frac{1}{4} \cdot \det \begin{pmatrix} a^2 & \frac{1}{2} \cdot (a^2 + b^2 - c^2) \\ \frac{1}{2} \cdot (a^2 + b^2 - c^2) & b^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 4A^2 = a^2b^2 - \frac{1}{4} \cdot (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2b^2 - \frac{1}{4} \cdot (a^2 + b^2 - c^2)^2}.$$

Em particular, se a = b = c, temos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2a^2 - \frac{1}{4} \cdot (a^2 + a^2 - a^2)^2}$$
$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

2.2 POSTO DE UMA MATRIZ

Definição 2.1 *O posto segundo colunas de uma matriz $a \in M(m \times n)$ é o número máximo de linhas ou colunas linearmente independentes em A. De maneira análoga, o posto segundo linhas da matriz $a \in M(m \times n)$ é o número máximo de linhas linearmente independentes.*

Teorema 2.1 *Seja A: E $\longrightarrow$ F é uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita munidos de produto interno. O operador A*A: E $\longrightarrow$ F tem o mesmo posto de A, onde A* é o operador adjunto de A.*

Prova
Com efeito, sabemos que $\mathcal{N}$(A) $\subset$ $\mathcal{N}$(A*A) pois $\mathcal{N}$(A) $\subset$ $\mathcal{N}$(BA) para qualquer B: F$\longrightarrow$ E.
Por outro lado:

$$v \in \mathcal{N}(\text{A*A}) \Rightarrow \text{A*A}v = 0$$
$$\Rightarrow \text{A}v \in \mathcal{N}(\text{A*}) = \mathcal{I}m(\text{A})^{\perp}$$
$$\Rightarrow \text{A}v \in \mathcal{I}m(\text{A}) \cap \mathcal{I}m(\text{A})^{\perp}.$$

Logo $v \in \mathcal{N}$(A*A) $\Rightarrow$ A$v = 0$ ou seja, $\mathcal{N}$(A*A) $\subset$ $\mathcal{N}$(A). Assim se $\mathcal{N}$(A) $\subset$ $\mathcal{N}$(A*A) e $\mathcal{N}$(A*A) $\subset$ $\mathcal{N}$(A) então $\mathcal{N}$(A) $=$ $\mathcal{N}$(A*A). Então pelo Teorema do Núcleo e da Imagem temos que:

P(A*A) = dim E - dim $\mathcal{N}$ (A*A)
P(A*A) = dim E - dim $\mathcal{N}$ (A)
P(A*A) = P(A)
Onde P(A) é o posto de A.

Proposição 2.1 *Os vetores $v_1, \cdots, v_k \in$ E geram um subespaço vetorial de dimensão r se, e somente se, a matriz de Gram g($v_1, \cdots, v_k$) tem posto r.*

Prova
Devemos mostrar que a dimensão do subespaço gerado por $v_1, \cdots, v_k$ é igual ao posto da matriz de Gram desses vetores, ou seja, P(g) = dim(S($v_1, \cdots, v_k$)).
Sejam

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i \quad (j = 1, \cdots, k),$$

onde $u_1, \cdots, u_n$ é uma base ortonormal de E. Daí a matriz de Gram será g = $a^T.a$.
Seja A o operador cuja matriz na base canônica é a.
Temos que:

$$P(\text{A*A}) = P(A) \Rightarrow P(a^T.a) = P(a).$$

Como P(a) é o número de colunas de a (vetores v_j) que são linearmente independentes então P(a) é a dimensão do subespaço gerado por ($v_1, \cdots, v_k$). Então

$$\text{P(g) = dim(S}(v_1, \cdots, v_k))$$

2.3 TRANSFORMAÇÃO LINEAR ORTOGONAL

Teorema 2.2 *As seguintes afirmações a respeito de uma transformação linear A: E $\longrightarrow$ F, entre espaços vetoriais de dimensão finita providos de produto interno, são equivalentes:*

(1) A preserva norma: |Av| = |v| *para todo v $\in$ E;*

(2) A preserva distância: |Au - Av| = |u - v| *para quaisquer u, v $\in$ E;*

(3) A preserva produto interno: $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$ para quaisquer u, v $\in$ E;

*(4) A*A = I_E;*

(5) A matriz de A relativa a qualquer par de bases ortonormais $\mathcal{U} \subset E, \mathcal{V} \subset F$ é uma matriz ortogonal;

(6) A matriz de A relativa a um certo par de bases ortonormais $\mathcal{U} \subset E, \mathcal{V} \subset F$ é uma matriz ortogonal;

(7) *A transforma uma certa base ortonormal* $\mathcal{U} \subset E$ *num conjunto ortonormal* $\mathcal{X} \subset F$*; (Se dim E = dim F,* $\mathcal{X}$ *é uma base.)*

(8) *A transforma toda base ortonormal* $\mathcal{W} \subset E$ *num conjunto ortonormal* $\mathcal{Z} \subset F$*.*

Prova

Se (1) vale então $|Au - Av| = |A(u - v)| = |u - v|$. Logo (1) $\Rightarrow$ (2).
Se (2) vale então

$$\begin{aligned}\langle Au, Av\rangle &= \frac{1}{2}[|Au|^2 + |Av|^2 - |Au - Av|^2] \\ &= \frac{1}{2}[|u|^2 + |v|^2 - |u - v|^2] = \langle u, v\rangle,\end{aligned}$$

logo (2) $\Rightarrow$ (3). Se (3) vale então, para quaisquer u e $v \in E$ tem-se $\langle u, v\rangle = \langle Au, Av\rangle = \langle A^*Au, v\rangle$, portanto $A^*Au = u$ para todo $u \in E$, donde A*A = I_E, logo (3) $\Rightarrow$ (4). Se (4) vale e a é a matriz de A nas bases ortonormais $\mathcal{U} \subset E, \mathcal{V} \subset F$ então $a^T \cdot a = I_n$ e a é uma matriz ortogonal, logo (4) $\Rightarrow$ (5). Obviamente (5) $\Rightarrow$ (6). Se vale (6), sejam $\mathcal{U} = \{u_1, \cdots, u_n\}, \mathcal{V} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ e $a = [a_{ij}]$ a matriz ortogonal de A nessas bases. De

$$Au_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} v_k$$

e

$$Au_j = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} v_k$$

resulta

$$\langle Au_i, Au_j\rangle = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij},$$

logo $\mathcal{X} = \{x_1, \cdots, x_n\} \subset F$, com $x_i = Au_i$, é um conjunto ortonormal e (6) $\Rightarrow$ (7). Se (7) vale seja $\mathcal{W} = \{w_1, \cdots, w_n\} \subset E$ uma base ortonormal qualquer. Para $i, j = 1, \cdots n$, temos:

$$w_i = \sum_k p_{ki} u_k$$

e

$$w_j = \sum_k p_{kj} u_k,$$

onde a matriz de passagem **p** = (p_{ij}) é ortogonal. Pondo $\mathcal{Z} = \{z_1, \cdots, z_n\}$, onde $z_i = Aw_i$, vem, para $i, j = 1, \cdots, n$:

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ki} Au_k = \sum_{k=1}^{n} p_{ki} x_k$$

e

$$z_j = \sum_{k=1}^{n} p_{kj} x_k.$$

Como $\mathcal{X} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ é ortonormal, resulta daí que

$$\langle z_i, z_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} p_{ki} p_{kj} = \delta_{ij},$$

logo $\mathcal{Z}$ é ortonormal e (7) $\Rightarrow$ (8).
Finalmente, se vale (8), seja $\mathcal{U} = \{u_1, \cdots, u_n\} \subset E$ uma base ortonormal. Para todo $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \in E$ tem-se

$$|u|^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2.$$

Como $\{Au_1, \cdots, Au_n\} \subset F$ é um conjunto ortonormal,

$$|Au|^2 = \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A u_i \right|^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = |u|^2,$$

logo $|Au| = |u|$ e (8) $\Rightarrow$ (1).

Proposição 2.2 *Se dim E $\leq$ dim F, prove que existe uma tranformação linear ortogonal $A : E \to F$ tal que $Av_1 = w_1, \cdots, Av_k = w_k$ se, e somente se, as matrizes de Gram g($v_1, \cdots, v_k$) e g($w_1, \cdots, w_k$) são iguais.*

Prova
Seja $v_{m\times k}$ a matriz cujas colunas são as coordenadas dos vetores v_i numa base ortonormal U de E e $w_{n\times k}$ a matriz cujas colunas são as coordenadas dos vetores w_i numa base ortonormal T de F.
Então sabemos que

$$g_v = v^T v$$

e

$$g_w = w^t w.$$

Seja A: E$\longrightarrow$ F uma transformação linear cuja matriz nas bases U e T é a.
Então $a_{n\times m} v_{m\times k} = w_{n\times k}$.

($\Longrightarrow$) Suponha que exista A e que A seja ortogonal (A*A = I):

$$g_w = w^T w = v^T a^T a v = v^T v = g_v.$$

($\Longleftarrow$) Seja $\alpha = \{v_1, \cdots, v_k\}$ uma base de E e $\beta = \{w_1, \cdots, w_k\} \subset F$ um conjunto LI. Como dim E $\leq$ dim F então uma base de F tem pelo menos k elementos. Daí β pode ser uma base de F.
Defina A: E$\longrightarrow$ F com $Av_1 = w_1, \cdots, Av_k = w_k$. Como α é base de E então A é uma transformação linear.

(1° caso) Se $\alpha = \{v_1, \cdots, v_k\}$ é uma base ortonormal de E então:

$$g_v = I_k = g_k.$$

Dessa forma $\beta = \{w_1, \cdots, w_k\}$ é um conjunto ortonormal em F.
Pelo Teorema 2.2 temos que A é ortogonal.

(2° caso) Se $\alpha = \{v_1, \cdots, v_k\}$ é uma base, não necessariamente ortonormal, de E então $\forall u, v \in E$ temos:

$$u = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i \quad e \quad v = \sum_{j=1}^{k} b_j v_j.$$

Observe que A preserva o produto interno:

$$\langle Au, Av\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} a_i w_i, \sum_{j=1}^{k} b_j w_j \right\rangle.$$

Pela bilinearidade do produto interno temos:

$$\langle Au, Av\rangle = \sum_{i,j=1}^{k} a_i b_j \langle w_i, w_j\rangle.$$

Como $\langle w_i, w_j\rangle = \langle v_i, v_j\rangle$ então:

$$\langle Au, Av\rangle = \sum_{i,j=1}^{k} a_i b_j \langle v_i, v_j\rangle.$$

Novamente, pela bilinearidade do produto interno, temos:

$$\langle Au, Av\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} a_i v_i, \sum_{j=1}^{k} a_j v_j \right\rangle.$$

E portanto:

$$\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle.$$

Daí, se A preserva o produto interno, pelo teorema 2.2, A é ortogonal.

Capítulo 3

DETERMINANTES

3.1 GRAMIANO

Chama-se *gramiano* dos vetores $v_1, v_2, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n$ ao número

$$\gamma(v_1, \cdots, v_k) = \det(\langle v_i, v_j \rangle),$$

o determinante da matriz de Gram $\mathrm{g}(v_1, \cdots, v_k)$.

Proposição 3.1 *$\gamma(v_1, \cdots, v_k) > 0$ se, e somente se, os vetores $v_1, \cdots, v_k$ são linearmente independentes.*

Prova
A matriz de Gram é não-negativa e é positiva, se e somente se, os vetores $v_1, \cdots, v_k$ são linearmente independentes. Logo o determinante da matriz de Gram será não-negativo, sendo 0 apenas se os vetores forem linearmente dependentes.

Proposição 3.2 *Se v_1 é perpendicular a $v_2, \cdots, v_k$, então $\gamma(v_1, \cdots, v_k) = |v_1|^2 \cdot \gamma(v_2, \cdots, v_k)$.*

Prova
Se v_1 é perpendicular aos outros vetores, então

$$det\langle v_i, v_j \rangle = \begin{vmatrix} |v_1|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{vmatrix} = |v_1|^2 .detB = |v_1|^2 .\gamma(v_2, \cdots, v_k).$$

3.2 PROJEÇÃO ORTOGONAL E GRAMIANO

Com a notação das proposições 3.1 e 3.2, sejam w_1 a projeção ortogonal do vetor v_1 sobre o subespaço gerado por $v_2, \cdots, v_k$ e $h_1 = v_1 - w_1$, logo h_1 é perpendicular aos v_j com $2 \leq j \leq k$.

Afirmamos que $\gamma(v_1, \cdots, v_k) = |h_1|^2 \cdot \gamma(v_2, \cdots, v_k)$.

Prova
Se $h_1 = v_1 - w_1$ então $v_1 = h_1 + w_1$. Daí

$$\gamma(v_1, \cdots, v_k) = \gamma(h_1 + w_1, \cdots, v_k) = \gamma(h_1, \cdots, v_k) + \gamma(w_1, \cdots, v_k).$$

Como h_1 é perpendicular aos vetores $v_2, \cdots, v_k$ e w_1 pertence ao subespaço gerado pelos vetores $v_2, \cdots, v_k$, então

$$\gamma(v_1, \cdots, v_k) = |h_1|^2 .\gamma(v_2, \cdots, v_k) + 0.$$

Então:

$$\gamma(v_1, \cdots, v_k) = |h_1|^2 .\gamma(v_2, \cdots, v_k).$$

3.3 PARALELEPÍPEDO E VOLUME

Proposição 3.3 *O* paralelepípedo *gerado pelos vetores linearmente independentes $v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n$ é o conjunto $P[v_1, \cdots, v_k]$ das combinações lineares $t_1v_1 + \cdots + t_kv_k$, onde $0 \leq t_i \leq 1$. O* volume *(k-dimensional) do paralelepípedo é definido por indução: Se $k = 1$, ele se reduz ao segmento de reta $[0, v_1]$, cujo "volume"uni-dimensional é, por definição, $|v_1|$. Supondo definido o volume de um paralelepípedo de dimensão $k - 1$, põe-se*

$$volP[v_1, \cdots, v_k] = |h_1| \cdot volP[v_2, \cdots, v_k],$$

onde $|h_1|$ é a altura do paralelepípedo, isto é, $h_1 = v_1 - w_1$ e w_1 é a projeção ortogonal de v_1 sobre o subespaço gerado por $v_2, \cdots, v_k$. Prove que

$$volP[v_1, \cdots, v_k] = \sqrt{\gamma(v_1, \cdots, v_k)} = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j\rangle)}\ .$$

Prova
Faremos essa demonstração por indução sobre k.
Para k = 1 temos:

$$VolP[v_1] = |v_1|, \text{por definição.}$$

Mas $\gamma(v_1) = \det\left(\langle v_1, v_1\rangle\right) = |v_1|^2 \Rightarrow |v_1| = \sqrt{\gamma(v_1)}$.

Assim $VolP[v_1] = \sqrt{\gamma(v_1)}$.

Logo o resultado vale para k = 1.

Suponhamos agora que o resultado seja válido para k = r - 1.

Temos $volP[v_2, \cdots, v_r] = \sqrt{\gamma(v_2, \cdots, v_r)}$.

Então:

$VolP[v_1, \cdots, v_r] = |h_1|.VolP[v_2, \cdots, v_r]$ (pela definição de volume do paralelepípedo.)

$VolP[v_1, \cdots, v_r] = |h_1|.\sqrt{\gamma(v_2, \cdots, v_r)}$ (hipótese de indução)

Como $\gamma(v_1, \cdots, v_r) = |h_1|^2.\gamma(v_2, \cdots, v_r)$,temos:

$$\sqrt{\gamma(v_2, \cdots, v_r)} = \frac{\sqrt{\gamma(v_1, \cdots, v_r)}}{|h_1|}.$$

Daí:

$$VolP[v_1, \cdots, v_r] = |h_1|.\frac{\sqrt{\gamma(v_1, \cdots, v_r)}}{|h_1|} = \sqrt{\gamma(v_1, \cdots, v_r)} = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)}.$$

Desse modo, se o resultado vale para k = r, então vale para todo k.

Exemplo 3.1 *Sejam A = (1, -1, 2), B = (-2, 1, 3), C = (2, -1, 1) e D = (4, 2, 1) quatro pontos do espaço (não-coplanares). Para calcular o volume do paralelepípedo que tem os segmentos AB, AC e AD como arestas tomamos os vetores* $u = \vec{AB} = (-3, 2, 1), v = \vec{AC} = (1, 0, -1)$ *e* $w = \vec{AD} = (3, 3, -1)$ *e com eles formamos a Matriz de Gram*

$$g(u, v, w) = \begin{bmatrix} \langle u, u \rangle & \langle u, v \rangle & \langle u, w \rangle \\ \langle v, u \rangle & \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle \\ \langle w, u \rangle & \langle w, v \rangle & \langle w, w \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -4 & -4 \\ -4 & 2 & 4 \\ -4 & 4 & 19 \end{bmatrix},$$

cujo determinante é 100. Dessa forma o volume desse paralelepípedo é 10.

3.4 GRAMIANO E VOLUME

Proposição 3.4 *Seja A a matriz quadrada invertível cujas colunas são os vetores $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Prove que $\gamma(v_1, \cdots, v_n) = (\det A)^2$ e conclua que o paralelepípedo gerado pelos vetores $v_1, \cdots, v_n$ tem volume igual a $|\det A|$, ou seja,*

$$volP[v_1, \cdots, v_n] = |\det(v_1, \cdots, v_n)|.$$

Prova
Seja a a matriz das coordenadas dos vetores $v_j, j = 1, \cdots, n$, numa base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Como temos n vetores no $\mathbb{R}^n$, então a matriz a é quadrada.
Assim:

$$\gamma(v_1, \cdots, v_n) = \det\langle v_i, v_j\rangle = \det(a^T.a) = \det(a^T).\det a = \det a.\det a = (\det a)^2.$$

Assim, como vol$P[v_1, \cdots, v_n] = \sqrt{\gamma(v_1, \cdots, v_n)}$ então:

$$\text{vol}P[v_1, \cdots, v_n] = \sqrt{(\det a)^2} = |\det a| = |\det(v_1, \cdots, v_n)|.$$

3.5 IMAGEM DE PARALELEPÍPEDO E VOLUME

Proposição 3.5 *Seja $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um operador linear invertível. Para todo paralelepípedo n-dimensional $X \subset \mathbb{R}^n$, prove que a imagem $T(X)$ é um paralelepípedo tal que vol$T(X) = |\det T| \cdot$ vol$X$.*

Prova
Se X é paralelepípedo então

$$\text{X} = \text{P}[v_1, \cdots, v_n] = t_1v_1 + \cdots + t_nv_n, \;\; 0 \leq t \leq 1$$

A imagem T(X) desse paralelepípedo é

$$A(X) = A(t_1v_1 + \cdots + t_nv_n) = t_1Av_1 + \cdots + t_nAv_n = t_1w_1 + \cdots + t_nw_n.$$

Logo A(X) é paralelepípedo.

Se $(v_1, \cdots, v_n)$ geram o paralelepípedo X então

$$volA(X) = volP[Av_1, \cdots, v_n] = |\det Av_i| = |\det A\text{v}| = |\det A|.|\det \text{v}| = |\det A|.volX,$$

onde v é a matriz cujas colunas são os vetores v_j.

3.6 PRODUTO VETORIAL GENERALIZADO

Teorema 3.1 *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita, com produto interno. A correspondência $\xi : E \longrightarrow E^*$ que associa a cada $v \in E$ o funcional linear $\xi(v) = v*$, tal que $v*(w) = \langle w, v\rangle$ para todo $w \in E$, é um isomorfismo.*

Proposição 3.6 *Defina o* produto vetorial *de n vetores $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ como o vetor*

$$v = v_1 \times \cdots \times v_n,$$

tal que, para todo $w \in \mathbb{R}^{n+1}$, tem-se $\langle w, v\rangle = \det(v_1, \cdots, v_n, w) =$ determinante da matriz cujas colunas são os vetores $v_1, \cdots, v_n, w$ nesta ordem. Prove que:

a) O vetor $v_1 \times \cdots \times v_n$ está bem definido.

b) Seja $A = (v_1, \cdots, v_n)$ a matriz $(n+1) \times n$ cujas colunas são $v_1, \cdots, v_n$. Para cada $i = 1, \cdots, n+1$, seja $A_i \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ a matriz obtida de A pela omissão da i-ésima linha. Prove que a i-ésima coordenada do vetor $v = v_1 \times \cdots \times v_n$ é igual a $(-1)^{n+i+1}\det(A_i)$.

c) O produto vetorial $v = v_1 \times \cdots \times v_n$ é ortogonal a $v_1, \cdots, v_n$.

d) Tem-se que $v = v_1 \times \cdots \times v_n = 0$ se, e somente se, $v_1, \cdots, v_n$ são L.D.

e) Quando $v \neq 0$, a norma $|v| = |v_1 \times \cdots \times v_n|$ é igual ao volume do paralelepípedo n-dimensional $P[v_1, \cdots, v_n] \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

f) Se os vetores $v_1, \cdots, v_n$ são L.I., então $\det(v_1, \cdots, v_n, v_1 \times \cdots \times v_n) > 0$.

g) O produto vetorial $v = v_1 \times \cdots \times v_n$ é o único vetor de $\mathbb{R}^{n+1}$ com as propriedades (c), (d), (e), (f) acima.

Prova

a) Considere $f(w) = \det[v_1, \cdots, v_n, w]$. Note que $f(w)$ é um funcional linear, isto é, $f \in (\mathbb{R}^{n+1})^*$. Portanto, pelo teorema 3.1, há um único vetor v tal que $f = v^*$, isto é, $\langle v, w\rangle = \det[v_1, \cdots, v_n, w]$ para todo w. Assim, v está bem definido.

b) Pela definição de produto vetorial dada no texto temos que a i-ésima coordenada do produto vetorial $v = v_1 \times \cdots \times v_n$ é:

$$\langle v, e_i\rangle = \det[v_1, v_2, \cdots, v_n, e_i].$$

Calculando esse determinante pela última coluna, em que todos os elementos são iguais a zero exceto o elemento da i-ésima linha que vale 1 temos:

$$\langle v, e_i\rangle = (-1)^{i+(n+1)}. \det A_i,$$

onde A_i é obtida de A retirando a i-ésima linha.

c) De fato, veja que o produto interno de v por cada v_i é igual a:

$$\langle v, v_i\rangle = \det[v_1, v_2, \cdots, v_i, \cdots, v_n, v_i] = 0,$$

pois o determinante tem duas colunas iguais (coordenadas do vetor v_i).

Fazendo isso para cada vetor v_i, concluimos que v é ortogonal a todos os vetores v_i com $i = 1, 2, \cdots, n$.

d) Se $v_1, \cdots v_n$ são L.D. então $\det[v_1, v_2, \cdots, v_n, w] = 0$ para todo w e então $v = 0$. Por outro lado, se esses vetores são L.I., então é possível estender este conjunto a uma base $\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n, w\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Então $\det[v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n, w] \neq 0$ e, portanto, $v \neq 0$.

e) De acordo com a proposição 3.3 temos:

$$\text{vol}P[v, v_1, \cdots, v_n] = |h| \cdot \text{vol}P[v_1, \cdots, v_n]$$

onde $h = v - w$ e w é a projeção ortogonal de v sobre o espaço gerado por $v_1, \cdots, v_n$. Mas, nesse caso, $w = 0$ e então $h = v$. Daí:

$$\text{vol}P[v, v_1, \cdots, v_n] = |v| \cdot \text{vol}P[v_1, \cdots, v_n].$$

Por outro lado, de acordo com a proposição 3.4, temos:

$$\text{vol}P[v, v_1, \cdots, v_n] = |\det[v, v_1, \cdots, v_n]|\,.$$

Mas então:

$$\text{vol}P[v, v_1, \cdots, v_n] = |\det[v, v_1, \cdots, v_n]| = \langle v, v\rangle = |v|^2.$$

Daí:

$$|v|^2 = |v| \cdot \text{vol}P[v_1, \cdots, v_n].$$

E então:

$$\text{vol}P[v_1, \cdots, v_n] = |v| = |v_1 \times \cdots \times v_n|.$$

f) Veja que $\det(v_1, \cdots, v_n, v_1 \times \cdots \times v_n) = \det(v_1, \cdots, v_n, v)$.

E pela definição do produto vetorial temos:

$$\det[v_1, \cdots, v_n, v] = \langle v, v\rangle = |v|^2 > 0.$$

g) Suponhamos que exista um vetor u com as propriedades (c), (d), (e), (f) acima.
Pela propriedade (c) se os vetores $v_1, \cdots, v_n$ forem L.D. então $u = 0$. Daí $u = v$.
Pela prorpiedade (d) se os vetores $v_1, \cdots, v_n$ forem L.I. então eles geram um subespaço F de dimensão n tal que seu complemento ortogonal tem dimensão 1, já que $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$. Daí esse complemento ortogonal seria gerado por u ou por v. Mas se assim fosse teríamos $u = \lambda v$ para algum λ.
Como pela propriedade (e) $|u| = |v| = \mathrm{vol}P[v_1, \cdots, v_n]$ concluimos que $\lambda = \pm 1$.
Por fim, se $u = -v$, teríamos $\det[v_1, \cdots, v_n, u] = \det[v_1, \cdots, v_n, v] < 0$ e isso contradiz a propriedade (f). Daí $u = v$.

3.7 IDENTIDADE DE LAGRANGE

Proposição 3.7 *Para cada $i = 1, \cdots, n+1$, seja $A_i \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ a matriz obtida omitindo a i-ésima linha de $A \in M_{(n+1)\times n}(\mathbb{R})$. Prove que*

$$\det({}^tA \cdot A) = \sum_{i=1}^{n+1} (\det A_i)^2 \ . \quad (\textit{Identidade de Lagrange})$$

Prova Sejam $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ as colunas de A. Então ${}^tA \cdot A = (\langle v_i, v_j \rangle)$ e portanto pela proposição 3.3 temos:

$$\det\left({}^tA \cdot A\right) = \det\left(\langle v_i, v_j \rangle\right) = (\mathrm{vol}P[v_1, \cdots, v_n])^2 = |v|^2 \,,$$

onde $v = v_1 \times \cdots \times v_n$.

Mas $|v|^2$ é a soma dos quadrados das coordenadas de v que, pelo item (b) da proposição 3.6, são:

$$|v|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \left((-1)^{n+1+i} \det A_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n+1} (\det A_i)^2.$$

Daí:

$$\det\left({}^tA \cdot A\right) = \sum_{i=1}^{n+1} (\det A_i)^2.$$

Capítulo 4

Conclusão

Neste trabalho buscamos trazer uma nova perspectiva para o estudo de matrizes e determinantes no ensino médio, o que antes ficava restrito à resolução de sistamas lineares e à condição de alinhamento de três pontos na geometria analítica. Com esse estudo o professor da escola secundarista pode usar oconhecimento de matrizes para mostrar ao aluno um pouco mais da importância do estudo das matrizes e determinantes.

Alguns dos resultados obtidos e mostrados ainda usam uma linguagem alheia à realidade dos alunos desse nível de ensino, mas com uma boa dose de perícia do docente pode ser aplicado em alguns casos.

No tocante à Matriz de Gram, o aluno ganha, implicitamente, a idéia do produto interno de vetores que é uma operação acessível ao discente nesse nível de ensino. Esse conhecimento pode, por exemplo, ser usado como condição de perpendicularismo de dois vetores.

Já com o Gramiano fica fácil a tarefa de se calcular o volume do paralelepípedo conhecendo apenas quatro de seus pontos não coplanares por um método algébrico e interessante. Tal método poderia ser usado como uma outra saída para a resolução desse problema quando o aluno estuda geometria analítica.

Espero que esse trabalho possa contribuir para o enriquecimento das aulas no Ensino Médio dando ao professor de Matemática uma nova ferramenta, ou um outro método de abordagem.

Referências Bibliográficas

[1] Boldrini, J. L. *Álgebra Linear.* São Paulo: Harbra, 1980.

[2] Bueno, H. P. *Álgebra Linear - um segundo curso.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[3] Filho, M. F. de A. *Geometria Analítica e Álgebra Linear.* Fortaleza: Ediçẽs Livro Técnico, 2003.

[4] Hazzan, S.;Iezzi, G *Fundamentos de Matemática Elementar.* 7.ed. São Paulo: Atual, 2004.

[5] Lima, E. L. *Álgebra Linear.* Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2011. (Coleção matemática universitária)

[6] Lima, E. L. *Geometria Analítica e Álgebra Linear.* Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2011. (Coleção matemática universitária)

[7] Teixeira, R. C. *Álgebra Linear. Exercícios e soluções.* Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2012. (Coleção matemática universitária)