UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

LUIZ FELIPE FERNANDES FREITAS

CONDIÇÕES DE CONSISTÊNCIA PARA LOCALIZAÇÃO DE CAMPOS EM MUNDOS-BRANA

FORTALEZA

2021

LUIZ FELIPE FERNANDES FREITAS

CONDIÇÕES DE CONSISTÊNCIA PARA LOCALIZAÇÃO DE CAMPOS EM MUNDOS-BRANA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

Coorientador: Prof. Dr. Makarius Oliveira Tahim.

FORTALEZA
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

F936c Freitas, L. F. F.
Condições de consistência para localização de campos em mundos-brana / Luiz Felipe Fernandes Freitas. - 2021.
72 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2021.
Orientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.
Coorientação: Prof. Dr. Makarius Oliveira Tahim.

1. Localização de Campos. 2. Equações de Einstein. 3. Campo espinorial. 4. Campo Vetorial Abeliano. 5. Formas Diferenciais. I. Título.

CDD 530

LUIZ FELIPE FERNANDES FREITAS

CONDIÇÕES DE CONSISTÊNCIA PARA LOCALIZAÇÃO DE CAMPOS EM MUNDOS-BRANA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 30/04/2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Makarius Oliveira Tahim (Coorientador)
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Prof. Dr. Júlio Marny Hoff da Silva
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP)

Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Junior
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Prof. Dr. Marcony Silva Cunha
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

À minha esposa e filha.

AGRADECIMENTOS

À toda minha família pela paciência, confiança e apoio durante toda minha trajetória acadêmica. Especialmente, agradeço minha esposa, Jéssica M. Pontes, pela dedicação e companheirismo nessa caminhada. Agradeço também minha mãe, Maria das Dores Fernandes, por me orientar e ensinar que os caminhos mais fáceis nem sempre levam aonde desejamos chegar. Agradeço também aos meus irmãos, João Fabrício Fernandes Freitas e Fabíola Dara Fernandes Freitas.

Ao professor Dr. Geová M. Alencar pela orientação acadêmica e por sempre me incentivar a buscar os degraus mais altos. Agradeço também pelos conselhos sobre relações pessoais no ambiente acadêmico, o que me permitiu reavaliar minhas atitudes e evoluir como profissional. Levarei essas orientações para todas as áreas da minha vida. Aos professores Drs. Ricardo R. Landim e Makarius O. Tahim, pela disponibilidade e pelas orientações em vários momentos da minha trajetória acadêmica. Aos amigos que estiveram presentes durante todo, ou parte, dos seis anos que estive na Universidade Federal do Ceará, registro aqui minha satisfação e prazer da companhia.

Agradeço à coordenação do Programa de Pós-graduação em Física por proporcionar os recursos necessários para o desenvolvimento das minhas atividades. Aos professores e funcionários do Departamento que participaram diretamente ou indiretamente de minha formação.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro.

RESUMO

Nesta tese, estudamos a consistência da localização dos campos escalar, espinorial e vetorial abeliano em modelos de brana. No contexto de dimensões extras, os chamados mundos-brana desempenham um importante papel. Esses modelos têm como premissa a possibilidade de descrição do nosso universo (4D) como uma hipersuperfície (brana) em um espaço-tempo de dimensão superior (*bulk*). Além disso, exigi-se que os campos gravitacional e de matéria sejam confinados na brana, de modo a reproduzir os resultados conhecidos. De uma maneira geral, o confinamento consiste em fatorar a ação dos campos no *bulk* em uma ação efetiva na brana e uma integral nas dimensões extras K. A partir disso, dizemos que a teoria efetiva na brana é bem definida (localizada) na brana se a integral nas dimensões extras é finita. Esse procedimento, quando aplicado aos campos de matéria, não considera os possíveis efeitos desses campos na métrica. Esse é exatamente o ponto que abordamos nesta tese. Partindo do pressuposto de que a equação de Einstein deve ser satisfeita, obtivemos duas condições que o tensor energia-momento dos campos de matéria deve obedecer para que o confinamento destes seja consistente. Com essas condições, testamos a consistência para o campo escalar (livre), o espinorial (livre e com interação) e o vetorial abeliano (livre e com interação) em vários mundos-brana encontrados na literatura. Para o campo vetorial livre obtivemos um resultado bem interessante. A localização do modo-zero, mesmo tendo a integral K finita em alguns modelos 6D, não é consistente com as equações de Einstein. Isso indica, portanto, que os efeitos desse campo sobre a métrica não podem ser ignorados. Além disso, indica que o argumento de integral finita não é suficiente para garantir uma localização consistente. Para concluir, discutimos a possibilidade de confinar campos por argumentos de simetria. Explorando a simetria de dualidade Hodge para p-formas livres mostramos ser possível inferir a localização de outros campos.

Palavras-chave: Localização de Campos. Equações de Einstein. Campo espinorial. Campo Vetorial Abeliano. Formas Diferenciais.

ABSTRACT

In this thesis, we study the consistency of the localization of the scalar, spinor and abelian vector fields in brane models. In the context of extra dimensions, the so-called braneworlds play an important role. These models are premised on the possibility of describing our universe (4D) as a hypersurface (brane) in a higher dimensional spacetime (bulk). In addition, it is required that the gravitational and matter fields are confined on the brane, in order to reproduce the known results. In general, confinement consists of factoring the action of the fields on the bulk into an effective action on the brane and an integral on the extra dimensions K. From this, we say that the effective theory on the brane is well-defined (localized) on the brane when the integral in the extra dimensions is finite. This procedure, when applied to fields of matter, does not consider the possible effects of these fields on the metric. This is exactly the point that we address in this thesis. Based on the assumption that Einstein's equation must be satisfied, we obtained two conditions that the energy-momentum tensor of the fields of matter must obey in order for their confinement to be consistent. With these conditions, we tested the consistency for the scalar (free), spinorial (free and interacting) and abelian vector (free and interacting) fields in several braneworlds found in the literature. For the free vector field we obtained a very interesting result. The zero-mode localization, even with the K integral finite in some 6D models, is not consistent with Einstein's equations. This indicates, therefore, that the effects of this field on the metric cannot be ignored. Furthermore, it indicates that the finite integral argument is not sufficient to ensure a consistent localization. To conclude, we discussed the possibility of confining fields by arguments of symmetry. Exploring the Hodge duality symmetry for free p-form fields, we show that it is possible to infer the localization of other fields.

Keywords: Fields Localization. Einstein's Equations. Spinor field. Abelian Vector Field. Differential Forms.

NOTAÇÃO E CONVENÇÕES

Os índices M, N etc. (a, b etc.) geralmente assumem valores sob todas as D-dimensões do espaço-tempo curvo (plano). Os índices gregos μ, ν etc. assumem valores nas d-dimensões da brana. Já os índices latinos minúsculos j, k etc. assumem valores sob as $(D-d)$-dimensões extras.

Usamos a convenção de soma de Einstein, portanto, índices repetidos são somados, a menos que se indique o contrário. As coordenadas x^μ mapeiam a brana. Já as coordenadas y^j, que podem aparecer como r e/ou θ, mapeiam as dimensões extras.

Definimos a assinatura da métrica com a componente temporal negativa e todas as demais positivas. As quantidades $g_{MN}(x,y)$, $\hat{g}_{\mu\nu}(x)$ e $\bar{g}_{jk}(y)$ são as métricas do *bulk*, da brana e do subespaço compreendido pelas dimensões extras, respectivamente.

Objetos com "chapéu", como por exemplo $\hat{g}, \hat{R}, \hat{R}_{\mu\nu}, \hat{G}_{\mu\nu}$ etc., são calculados com as componentes $\hat{g}_{\mu\nu}(x)$ e dependem apenas das coordenadas da brana x^μ. Objetos com "barra", $\bar{g}, \bar{R}, \bar{G}_{jk}$ etc., são calculados com as componentes $\bar{g}_{jk}(y)$ e dependem apenas das coordenadas das dimensões extras y^j. Uma exceção é o caso do campo espinorial $\bar{\Psi}(x,y)$, que denota o spinor adjunto de Dirac.

As matrizes gamma no espaço-tempo curvo Γ^N satisfazem a relação

$$\Gamma^M\Gamma^N + \Gamma^N\Gamma^M = \{\Gamma^M, \Gamma^N\} = -2g^{MN}.$$

Elas são relacionadas aquelas no espaço-tempo plano γ^a por $\Gamma^N(x,y) = E_a^N(x,y)\gamma^a$, onde os objetos $E_a^N(x,y)$ são os *vierbein* e satisfazem a relação $E_a^N E^{aM} = g^{MN}$.

A delta de Kronecker generalizada é definida como

$$\delta^{M_1..M_p}_{N_1..N_p} = \begin{cases} +1 & \text{se } N_1..N_p \text{ são inteiros distintos e permutações pares de } M_1..M_p \\ -1 & \text{se } N_1..N_p \text{ são inteiros distintos e permutações ímpares de } M_1..M_p \\ \;\;0 & \text{todos os demais casos.} \end{cases}$$

Dada a p-forma $A_{[p]}$, definimos a derivada exterior como $F_{[p+1]} = \mathbf{d}A_{[p]}$. Em componentes, essa definição fica $F_{N_1..N_{p+1}} = (p+1)\partial_{[N_1}A_{N_2..N_{p+1}]}$, onde a anti-simetrização é definida como

$$T_{[N_1..N_p]} = \frac{1}{p!}\delta^{M_1..M_p}_{N_1..N_p}T_{M_1..M_p}.$$

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No início do século XX, em uma tentativa de unificar gravitação e eletromagnetismo, surgiram as primeiras formulações de universos com mais de 4-dimensões, os chamados modelos de Kaluza-Klein [1–4]. Nesses artigos, propunha-se um espaço-tempo em 5-dimensões (x^μ, ϕ) e, ao considerar a dimensão extra ϕ compactada, seria possível recuperar uma métrica 4D e um 4-vetor como componentes da métrica 5D. Vale destacar a mudança de *status* da simetria de *gauge* do campo vetorial, que deixa de ser uma simetria interna associada ao grupo $U(1)$ para ser uma do próprio espaço-tempo proveniente da invariância por transformação geral de coordenadas. Uma discussão muito interessante sobre esses modelos pode ser encontrada em [5].

Na formulação acima, a dimensão extra ϕ deve ser compactada devido à incapacidade experimental de detectá-la na escala de energia disponível. Na lei da gravitação de Newton, por exemplo, a força é $F_N \propto r^{-2}$, onde r é a distância, e o expoente aqui é diretamente relacionado à existência de apenas 3 dimensões espaciais infinitas. Até o momento, não há nenhuma evidência experimental de desvio dessa lei para distâncias menores que uma unidade astronômica [distância Terra-Sol]. Vale mencionar que surgem muitas dificuldades práticas para aferir a força gravitacional em distância menores que $10\mu m$ [6], onde as demais forças fundamentais se tornam dominantes. Assim, não podemos descartar com certeza a existência de outras dimensões além das que conhecemos. Em razão disso, teorias/modelos em cenários com dimensões extras constituem objeto de interesse entre muitos físicos, seja para explicar fenômenos que as teorias/modelos atuais não comportam [7–9], seja em cenários de unificação [10, 11].

Alternativas aos modelos de Kaluza-Klein foram propostas no final dos anos 90 e, a partir delas, iniciou-se a discussão sobre a física dos mundos-brana. Um ponto bem interessante que esses modelos introduziram foi a possibilidade de as dimensões extras serem infinitas. Os primeiros a especular sobre isso foram V. Rubakov e M. Shaposhnikov [12]. Eles arguem que outras dimensões espaciais infinitas poderiam existir desde que o campo gravitacional, bem como os campos do Modelo Padrão da Física de Partículas (MP), fossem confinados em uma hipersuperfície espacial 3-dimensional (3-brana). Isso nos permitiria obter uma teoria gravitacional efetiva em acordo com a observada em 4D e essas dimensões extras não teriam sido detectadas ainda por conta da escalar de energia. Nesse contexto, os dois modelos de L. Randall e R. Sundrum merecem um certo destaque.

Até o momento, acreditamos que as forças fundamentais da natureza podem ser divididas em interação forte ($\sim 10^{-21} TeV \cdot m$), eletromagnética ($\sim 10^{-22} TeV \cdot m$), fraca ($\sim 10^{-25} TeV \cdot m$) e gravitacional ($\sim 10^{-58} TeV \cdot m$) [13]. Como podemos notar, a interação gravitacional é muito mais fraca que as demais forças e essa disparidade é conhecida como *problema da hierarquia*. Foi com o objetivo de solucionar esse problema que L. Randall e R. Sundrum propuseram o modelo de brana RS-I [14]. Nesse modelo, os autores consideram um universo com 5D (x^μ, ϕ), em que ϕ é compactada com uma simetria *orbifold* S_1/Z_2. Essa simetria gera dois pontos fixos, $(\phi = 0, \pi)$, e em cada um deles é "colocada" uma 3-brana tipo delta. Nessa configuração, os campos do Modelo Padrão são confinados, a priori, na brana posicionada em $\phi = \pi$ e esta corresponderá ao nosso universo visível. Com isso, o problema da hierarquia seria atribuído ao "espalhamento" da gravidade através da dimensão extra o que não aconteceria com os demais campos. Uma revisão bem acessível sobre o modelo RS-I pode ser encontrada nas referências [15, 16].

Assim como no modelo de Kaluza-Klein, a lei da gravitação de Newton pode ser recuperada no modelo RS-I. Isso poderia ser atribuído ao fato da dimensão extra ser compacta, mas, como mostrado no modelo RS-II [17], que possui uma dimensão extra infinita, essa é uma consequência da formulação (métrica não-fatorizável) a qual permite o confinamento da gravidade. Esses dois modelos de Randall-Sundrum abriram a discussão sobre mundos-brana com gravidade localizada. Em 5D, por exemplo, foram propostos alguns modelos tipo RS-II com brana espessa (*thick branes*) [18, 19]; outros, com brana espessa e com estrutura interna [20–24]; e até mesmo, modelos cosmológicos, onde a 3-brana possui uma métrica tipo Robertson-Walker [25, 26]. Já em 6 dimensões, foram propostos modelos onde a 3-brana é gerada por defeitos topológicos como cordas cósmicas ou vórtices [27–33]; ou pela intersecção de duas branas tipo RS-II [34]. Há também modelos em cenários dimensionais superiores, como aquele apresentado em [35], entre outros [36–40].

Os modelos RS consideram os campos do Modelo Padrão da física de partículas previamente confinados na brana. No entanto, estudos subsequentes sobre a dinâmica desses campos no modelo RS-II mostraram que essa suposição não se confirma para todos eles [41–44]. Na verdade, muitos daqueles modelos mencionados no parágrafo anterior, e que possuem dimensões extras infinitas, padecem desse problema. Isso iniciou outra discussão importante nesse contexto relacionada a localização dos campos de matéria [45–51]. Aqui, os campos de gauge abeliano e espinorial merecem um certo destaque. Nos modelos de brana 5D que citamos acima, os campos de gauge e espinorial livres não podem ser confinados. Já em modelos 6D ou superior, o confinamento do campo vetorial livre pode ser alcançado para alguns deles [52–58]. Enquanto o campo espinorial livre ainda apresenta alguns problemas [59, 60]. Em vista disso, o confinamento desses campos deve ser alcançado adicionando-se termos de interação a teoria livre, denominamos isso de *mecanismo de localização* [61–71].

Até então, o procedimento usado para discutir a localização dos campos baseia-se no argumento de *integral finita*, isto é, a integral nas dimensões extras, presente na ação, deve ser finita para que a teoria efetiva na brana seja bem definida. Esse requerimento é necessário, no entanto, ele não é suficiente para garantir um confinamento consistente. Por exemplo, explorando a equação de Einstein, a referência [72] mostra que a localização do campo vetorial livre em codimensão 1 não é consistente. Em uma publicação nossa, mostramos que a localização do campo espinorial livre também não é consistente em codimensão 1. Além disso, mostramos que o confinamento do campo vetorial livre não é consistente para nenhum modelo de brana, independente da codimensão [73]. Esses resultados indicam, portanto, que o confinamento desses campos deve ser realizado usando algum mecanismo de localização ou devemos modificar a métrica para considerar a presença desses campos no *bulk*.

Nesta tese, discutimos os resultados publicados em dois artigos de autoria própria publicados no *The European Physical Journal C* (EPJC) com os títulos "Consistency conditions for fields localization on braneworlds" [73] e "Consistency conditions for p-form field localization on codimension two braneworlds" [74]. No primeiro artigo, discutimos a consistência do procedimento de localização dos campos com a equação de Einstein. Com isso, obtivemos duas condições que o tensor energia-momento dos campos confinados deve satisfazer para que a localização seja consistente. Para concluir, aplicamos essas condições aos casos dos campos escalar, espinorial e vetorial abeliano. Nesse estudo, testamos tanto os campos livres como alguns casos com mecanismos de localização. No segundo artigo, discutimos se as simetrias podem ser usadas para confinar campos. Para isso, usamos a simetria de dualidade Hodge para mostrar que se uma dada p-forma é confinada, o campo dual também deve ser. Nos próximos capítulos, realizaremos uma discussão mais didática e melhor fundamentada dos pontos mencionados acima.

Organizamos este trabalho da seguinte forma. No capítulo (2), fazemos uma revisão sobre modelos de brana com gravidade localizada e apresentamos alguns modelos em 5 e 6 dimensões. O capítulo (3) é dedicado ao confinamento dos campos, onde estudamos os casos dos campos escalar, espinorial e vetorial abeliano. No capítulo (4), discutimos a consistência da localização apresentada no capítulo (3). No capítulo (5), mostramos como a simetria de dualidade Hodge pode ser usada para inferir a localização de campos. Finalmente, as conclusões são deixadas para o capítulo (6).

2 MUNDOS-BRANA E GRAVIDADE LOCALIZADA

Como mencionamos na introdução, até hoje não há nenhuma evidência experimental que confirme ou proíba a existência de outras dimensões além das quatro, uma tipo-tempo e três tipo-espaço, que conhecemos. Desta forma, mesmo sem uma base empírica que guie a formulação de uma teoria, seguimos a filosofia de P. A. M. Dirac [75], onde a matemática se torna o próprio método de investigação da natureza. Nessa perspectiva, a descrição de fenômenos em cenários com dimensões extras tem se mostrado um método de investigação teórica perfeitamente viável e bastante atrativo [7–9]. Dentre os vários cenários, os chamados modelos de brana merecem um certo destaque. Em tais modelos, nosso universo visível 4-dimensional é descrito como uma hipersuperfície (brana) em um espaço-tempo de dimensão superior, o *bulk*. Neste capítulo, faremos um apanhado geral sobre esses modelos.

2.1 Mundos-Brana

Vimos na introdução que há uma variedade de modelos de brana com características e em configurações dimensionais diversas. Nesta secção, vamos discutir o procedimento geral usado para obter esses modelos. Portanto, a descrição abaixo se aplica a maior parte dos modelos que citamos na introdução.

O ponto de partida de grande parte daqueles modelos é uma ação na forma

$$S^{(g)} = \int \left[\frac{1}{2\kappa^2} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_b \right] \sqrt{-g} d^d x d^{D-d} y, \tag{2.1}$$

em que R é o escalar de Ricci, Λ é a constante cosmológica, $\kappa^2 = 8\pi G^{(D)}$ é a constante gravitacional em D-dimensões e $\mathcal{L}_b$ é a lagrangiana que gera a brana. A partir dessa ação, podemos calcular as equações de movimento e obter uma solução para a métrica. Fazendo a variação da ação com relação à métrica obteremos a equação de Einstein no *bulk*,

$$G_{MN} + g_{MN}\Lambda = \kappa^2 T^b_{MN}, \tag{2.2}$$

onde T^b_{MN} é o tensor energia-momento obtido da lagrangiana $\mathcal{L}_b$. Além da equação (2.2), há ainda as equações de movimento para os campos presentes na lagrangiana $\mathcal{L}_b$. No entanto, visto que essa lagrangiana ainda não foi especificada, não iremos escrever essas equações aqui. Além disso, elas não serão necessárias nessa discussão inicial.

Para o que se segue, iremos usar um *ansatz* para a métrica na forma

$$ds^2 = g_{MN}dx^M dx^N = e^{2A(y)}\hat{g}_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu + \bar{g}_{kj}(y)dy^k dy^j, \tag{2.3}$$

em que o fator de deformação $A(y)$ e as componentes $\bar{g}_{kj}(y)$ dependem apenas das coordenadas das dimensões extras y^j. As componentes $\hat{g}_{\mu\nu}(x)$ definem a métrica na brana. Com a métrica na forma acima, as componentes do tensor de Ricci podem ser escritas como

$$R_{\mu\nu}(x,y) = \hat{R}_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{d}\hat{g}_{\mu\nu}(x)e^{-(d-2)A(y)}\bar{\nabla}_l\bar{\nabla}^l e^{dA(y)}, \tag{2.4}$$

$$R_{jk}(x,y) = \bar{R}_{jk}(y) - de^{-A(y)}\bar{\nabla}_j\bar{\nabla}_k e^{A(y)}. \tag{2.5}$$

As componentes $R_{\mu j}$ são todas nulas. A derivada covariante $\bar{\nabla}_j$ é definida no subespaço das dimensões extras. Calculando o traço do tensor de Ricci obteremos o escalar de Ricci

$$R(x,y) = \hat{R}(x)e^{-2A(y)} + \bar{R}(y) - de^{-A(y)}\bar{\nabla}_l\bar{\nabla}^l e^{A(y)} - e^{-dA(y)}\bar{\nabla}_l\bar{\nabla}^l e^{dA(y)}. \tag{2.6}$$

Nas três expressões acima, as quantidades com “chapéu” são funções apenas das coordenadas da brana x^μ e são calculadas usando a métrica $\hat{g}_{\mu\nu}(x)$. Por outro lado, as quantidades com “barra” são funções apenas das dimensões extras y^j e são definidas no subespaço descrito pelas componentes $\bar{g}_{kj}(y)$. Essa notação é obedecida por toda a tese[1].

Com as equações (2.4), (2.5) e (2.6) definidas, podemos escrever as componentes da equação de Einstein (2.2) na forma

$$\hat{G}_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\left[(d-1)\bar{\nabla}_k\bar{\nabla}^k A + \frac{d(d-1)}{2}\bar{\nabla}_k A\bar{\nabla}^k A - \frac{1}{2}\bar{R} + \Lambda\right] = \kappa^2 T^b_{\mu\nu}, \tag{2.7}$$

$$\bar{G}_{jk} + \bar{g}_{jk}\left[d\bar{\nabla}_l\bar{\nabla}^l A + \frac{d(d+1)}{2}\bar{\nabla}_l A\bar{\nabla}^l A - \frac{1}{2}\hat{R}e^{-2A} + \Lambda\right] - de^{-A}\bar{\nabla}_j\bar{\nabla}_k e^A = \kappa^2 T^b_{jk}, \tag{2.8}$$

$$G_{j\mu} = 0 = \kappa^2 T^b_{j\mu}. \tag{2.9}$$

Em todos os modelos discutidos aqui, os campos na lagrangiana $\mathcal{L}_b$, e ela própria, dependem apenas das coordenadas y^j. Essa característica da lagrangiana faz com que as componentes $T^b_{\mu\nu}$ do tensor energia-momento assumam uma forma bastante conveniente para nossa discussão, a saber,

$$T^b_{\mu\nu}(x,y) = g_{\mu\nu}(x,y)\mathcal{L}^{(b)}(y). \tag{2.10}$$

[1] Outros detalhes sobre a notação são apresentados nas seções pré-textuais desta tese.

Isso nos permite escrever a equação (2.7) como

$$\hat{G}_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\left[(d-1)\bar{\nabla}_k\bar{\nabla}^k A + \frac{d(d-1)}{2}\bar{\nabla}_k A\bar{\nabla}^k A - \frac{1}{2}\bar{R} + \Lambda - \kappa^2\mathcal{L}^{(b)}\right] = 0. \tag{2.11}$$

Aqui, visto que $\hat{G}_{\mu\nu} = \hat{G}_{\mu\nu}(x)$, $g_{\mu\nu}(x,y) = \hat{g}_{\mu\nu}(x)e^{2A(y)}$ e a expressão entre colchetes depende apenas das coordenadas y^j, podemos realizar uma separação de variáveis e obter as equações

$$\hat{G}_{\mu\nu}(x) + \hat{g}_{\mu\nu}(x)\alpha = 0, \tag{2.12}$$
$$(d-1)\bar{\nabla}_k\bar{\nabla}^k A + \frac{d(d-1)}{2}\bar{\nabla}_k A\bar{\nabla}^k A - \frac{1}{2}\bar{R} + \Lambda - \kappa^2\mathcal{L}^{(b)} = \alpha e^{-2A(y)}. \tag{2.13}$$

O parâmetro α vem da separação de variáveis e pode ser interpretado como uma constante cosmológica efetiva na brana. A expressão (2.13) terá um papel fundamental em nossa discussão sobre a consistência do procedimento de localização. Quanto as demais equações, observe que a equação (2.8) possui um termo dependente apenas de x^μ, que é o escalar de Ricci $\hat{R}$ na brana. Esse termo é obtido realizando-se a contração $\hat{R} = \hat{g}^{\mu\nu}(x)\hat{R}_{\mu\nu}(x)$. Desta forma, usando a relação (2.12), podemos mostrar que esse escalar deve ser constante e proporcional ao parâmetro α. Logo, as relações (2.8) e (2.13) dependem efetivamente apenas de y^j e devem definir o fator de deformação $A(y)$ e as componentes $\bar{g}_{jk}(y)$. Portanto, a métrica será definida a partir das equações

$$\hat{G}_{\mu\nu}(x) - \hat{g}_{\mu\nu}(x)\alpha = 0, \tag{2.14}$$
$$(d-1)\bar{\nabla}_k\bar{\nabla}^k A + \frac{d(d-1)}{2}\bar{\nabla}_k A\bar{\nabla}^k A - \frac{1}{2}\bar{R} + \Lambda - \kappa^2\mathcal{L}^{(b)} = -\alpha e^{-2A(y)}, \tag{2.15}$$
$$\bar{G}_{jk} + \bar{g}_{jk}\left[d\bar{\nabla}_l\bar{\nabla}^l A + \frac{d(d+1)}{2}\bar{\nabla}_l A\bar{\nabla}^l A + \frac{d\alpha}{d-2}e^{-2A} + \Lambda\right] - de^{-A}\bar{\nabla}_j\bar{\nabla}_k e^A = \kappa^2 T^b_{jk}, \tag{2.16}$$
$$R_{j\mu} = \kappa^2 T^b_{j\mu} = 0. \tag{2.17}$$

Evidentemente, a definição completa da métrica irá depender do tensor energia-momento T^b_{MN}. Mais a frente, iremos defini-lo e assim obter alguns modelos encontrados na literatura. Antes disso e ainda nessa descrição geral, podemos discutir a localização da gravidade.

2.2 Flutuações Gravitacionais

Um ponto importante nesses modelos de brana é verificar se a lei da gravitação de Newton pode ser recuperada. Para discutir isso, iremos retornar a métrica e propor a modificação

$$g_{\mu\nu}(x,y) = e^{2A(y)}\hat{g}_{\mu\nu}(x) \to \tilde{g}_{\mu\nu}(x,y) = e^{2A(y)}\left[\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x,y)\right]. \tag{2.18}$$

Aqui, $h_{\mu\nu}$ são pequenas flutuações do campo gravitacional geradas por uma perturbação na distribuição de energia na brana $\delta t_{\mu\nu}$. Por simplicidade, vamos realizar essa discussão considerando a solução mais simples para a métrica na brana, ou seja, iremos assumir $\hat{g}_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$. Não consideraremos flutuações escalares nas componentes $\bar{g}_{jk}$ ou vetoriais na forma $g_{\mu j}$.

Para a métrica modificada (2.18), podemos calcular os novos tensor e escalar de Ricci mantendo apenas termos de primeira ordem em $h_{\mu\nu}$. Com isso, as novas componentes do tensor de Einstein ficam

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{\mu\nu}(x,y) = \frac{1}{2}\left[2\partial_{(\mu}\partial^{\rho}\tilde{h}_{\nu)\rho} - \Box\tilde{h}_{\mu\nu} + \frac{\eta_{\mu\nu}\Box\tilde{h}}{(d-1)} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu\tilde{h}}{(d-1)}\right] - \frac{1}{2}e^{-(d-2)A}\bar{\nabla}_l\left[e^{dA}\bar{\nabla}^l\tilde{h}_{\mu\nu}\right] \\ -\frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}e^{-2A}\partial^\lambda\partial^\rho\tilde{h}_{\lambda\rho} + \tilde{g}_{\mu\nu}\left[(d-1)\bar{\nabla}_l\bar{\nabla}^l A + \frac{d(d-1)}{2}\bar{\nabla}_l A\bar{\nabla}^l A - \frac{1}{2}\bar{R}\right],\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{jk}(x,y) = \bar{G}_{jk} - de^{-A}\bar{\nabla}_k\left[e^{A}\bar{\nabla}_j A\right] + \bar{g}_{jk}\left[d\bar{\nabla}_l\bar{\nabla}^l A + \frac{d(d+1)}{2}\bar{\nabla}_l A\bar{\nabla}^l A\right] \\ -\frac{1}{2}\bar{g}_{jk}e^{-2A}\partial^\lambda\partial^\rho\tilde{h}_{\lambda\rho} + \frac{e^{-2A}}{2(d-1)}\bar{\nabla}_{(k}\left[e^{2A}\bar{\nabla}_{j)}\tilde{h}\right] - \frac{e^{-(d+1)A}}{2(d-1)}\bar{g}_{jk}\bar{\nabla}_l\left[e^{(d+1)A}\bar{\nabla}^l\tilde{h}\right],\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\tilde{G}_{j\mu}(x,y) = \frac{1}{2}\bar{\nabla}_k\partial_\rho\tilde{h}^\rho_\mu, \tag{2.21}$$

em que definimos $\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}h$. Incluindo a pertubação $\delta t_{\mu\nu}$, as componentes da equação de Einstein podem ser escritas agora como

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(x,y) + \tilde{g}_{\mu\nu}(x,y)\Lambda = \kappa^2 T^b_{\mu\nu} + \kappa^2\delta t_{\mu\nu}, \tag{2.22}$$

$$\tilde{G}_{jk}(x,y) + \tilde{g}_{jk}(x,y)\Lambda = \kappa^2 T^b_{jk}, \tag{2.23}$$

$$\tilde{G}_{j\mu}(x,y) = \kappa^2 T^b_{j\mu}. \tag{2.24}$$

Quando comparamos as equações acima com aquela obtida sem a pertubação, a saber, a Eq. (2.2), encontramos as seguintes equações para as flutuações,

$$-\frac{1}{2}\Box\tilde{h}_{\mu\nu} + \frac{\eta_{\mu\nu}\Box\tilde{h}}{2(d-1)} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu\tilde{h}}{2(d-1)} - \frac{1}{2}\bar{\nabla}_l\bar{\nabla}^l\tilde{h}_{\mu\nu}e^{2A} - \frac{d}{2}\bar{\nabla}_l A\bar{\nabla}^l\tilde{h}_{\mu\nu}e^{2A} = \kappa^2\delta t_{\mu\nu}, \tag{2.25}$$

$$\frac{1}{2}\bar{\nabla}_k\bar{\nabla}_j\tilde{h} + \bar{\nabla}_{(k}A\bar{\nabla}_{j)}\tilde{h} - \bar{g}_{jk}\left[\frac{1}{2}\bar{\nabla}_l\bar{\nabla}^l\tilde{h} + \frac{(d+1)}{2}\bar{\nabla}_l A\bar{\nabla}^l\tilde{h}\right] = 0, \tag{2.26}$$

$$\frac{1}{2}\bar{\nabla}_k\partial_\rho\tilde{h}^\rho_\mu = 0, \tag{2.27}$$

onde já usamos a relação $\partial_\rho\tilde{h}^\rho_\mu = 0$, obtida da equação (2.27), nas equações (2.25) e (2.26). Normalmente, esta relação é imposta com uma condição de gauge na gravitação 4D devido à invariância pelas transformações

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu .$$

No entanto, quando lidamos com modelos em dimensões mais altas e desejamos realizar uma redução dimensional, tais condições surgem naturalmente em decorrência das próprias equações de movimento. Isso também acontece, por exemplo, para o campo de gauge abeliano. A condição $\partial_\rho \tilde{h}^\rho_\mu = 0$, no entanto, é consistente apenas se $\partial_\mu \delta t^{\mu\nu} = 0$, o que pode ser alcançado por requerer que a energia seja conservada (localmente). A seguir, vamos estudar as soluções das equações (2.25) e (2.26).

Como pode ser observado facilmente, na equação (2.26) aparece apenas o traço das flutuações tensoriais $\tilde{h}_{\mu\nu}$, isto é, $\tilde{h}$. A princípio, poderíamos então assumir a solução trivial para essa quantidade, ou seja, $\tilde{h} = 0$. No entanto, como podemos ver fazendo a contração da equação (2.25) com a métrica $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} e^{-2A}$, essa solução, $\tilde{h} = 0$, só é consistente se o traço do tensor energia-momento é nulo, isto é, $\delta t = e^{-2A}\eta^{\mu\nu}\delta t_{\mu\nu} = 0$. Essa condição, entretanto, é muito restritiva. Por exemplo, o tensor energia-momento de uma massa pontual localizada na brana não obedece tal condição. Portanto, para evitar esse tipo de restrição, não iremos usar a solução $\tilde{h} = 0$.

Tentemos obter uma solução para $\tilde{h}_{\mu\nu}$. Para isso, vamos iniciar escrevendo a equação (2.25) em uma forma mais conveniente, a saber,

$$\left[-\delta^\rho_{(\mu}\delta^\lambda_{\nu)} \left(\Box + e^{2A}\bar{\nabla}_l \bar{\nabla}^l + d e^{2A} \bar{\nabla}_l A \bar{\nabla}^l \right) + \frac{\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\lambda}\Box}{(d-1)} - \frac{\eta^{\rho\lambda}\partial_\mu\partial_\nu}{(d-1)} \right] \tilde{h}_{\rho\lambda} = 2\kappa^2 \delta t_{\mu\nu}. \quad (2.28)$$

Nessa forma, podemos usar o método das funções de Green e escrever a solução geral

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(x,y) = \tilde{s}_{\mu\nu}(x,y) + 2\kappa^2 \int d^d x' d^{D-d} y' G^{\rho\lambda}_{\mu\nu}(x,y;x',y') \delta t_{\rho\lambda}(x',y'). \quad (2.29)$$

Nessa solução, $\tilde{s}_{\mu\nu}(x,y)$ satisfaz a equação homogênea e $G^{\rho\lambda}_{\mu\nu}(x,y;x',y')$ é uma função de Green que satisfaz

$$K^{\rho\lambda}_{\mu\nu}(x,y) G^{\mu'\nu'}_{\rho\lambda}(x,y;x',y') = \delta^\rho_{(\mu}\delta^\lambda_{\nu)} \delta^d(x-x')\delta^{D-d}(y-y'), \quad (2.30)$$

com

$$K^{\rho\lambda}_{\mu\nu}(x,y) \equiv -\delta^\rho_{(\mu}\delta^\lambda_{\nu)} \left(\Box + e^{2A}\nabla_l \nabla^l + d e^{2A} \nabla_l A \nabla^l \right) + \frac{\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\lambda}\Box}{(d-1)} - \frac{\eta^{\rho\lambda}\partial_\mu\partial_\nu}{(d-1)}.$$

Visto que $\tilde{s}_{\mu\nu}(x,y)$ é solução da equação homogênea, é totalmente consistente fazermos o traço dessa quantidade nulo. Desta forma, as componentes $\tilde{s}_{\mu\nu}(x,y)$ obedecem efetivamente à equação

$$\Box\tilde{s}_{\mu\nu}(x,y) + e^{2A}\nabla_l\nabla^l\tilde{s}_{\mu\nu}(x,y) + de^{2A}\nabla_l A\nabla^l\tilde{s}_{\mu\nu}(x,y) = 0. \tag{2.31}$$

Os dois últimos termos no operador $K_{\mu\nu}^{\rho\lambda}(x,y)$ atuarão exatamente no traço de $\tilde{s}_{\mu\nu}(x,y)$ que é nulo, desta forma, eles não contribuem na equação (2.31). Para evitar complicações, vamos nos restringir à discussão da solução homogênea $\tilde{s}_{\mu\nu}$. Com isso, iremos obter alguns resultados importantes sobre a dinâmica do campo gravitacional nesse contexto de branas.

Seguindo o procedimento já bastante conhecido para resolver equações diferenciais parciais (EDP), podemos propor a separação de variáveis

$$\tilde{s}_{\mu\nu}(x,y) = e^{-\frac{d}{2}A(y)}\sum_n \hat{s}_{\mu\nu}^{(n)}(x)\xi_n(y),$$

onde $\hat{s}_{\mu\nu}^{(n)}(x)$ são os chamados modos gravitacionais. Com essa proposta obteremos

$$\Box\hat{s}_{\mu\nu}^{(n)}(x) = m_n^2\hat{s}_{\mu\nu}^{(n)}(x), \tag{2.32}$$

$$-\bar{\nabla}_l\bar{\nabla}^l\xi_n(y) + \frac{d}{2}\left[\bar{\nabla}_l\bar{\nabla}^l A + \frac{d}{2}\bar{\nabla}_l A\bar{\nabla}^l A\right]\xi_n(y) = m_n^2\xi_n(y)e^{-2A}. \tag{2.33}$$

A constante m_n^2 vem da separação de variáveis e pode ser interpretada como a massa dos modos $\hat{s}_{\mu\nu}^{(n)}(x)$. Observe que podemos escrever a equação (2.33) na forma

$$Q^\dagger\cdot Q\xi_n(y) = m_n^2\xi_n(y), \tag{2.34}$$

em que os operadores Q e $Q^\dagger$ são definidos como

$$Q = e^A\left(-\bar{\nabla}_l + \frac{d}{2}\bar{\nabla}_l A\right) \quad \text{e} \quad Q^\dagger = e^A\left(\bar{\nabla}_l + \frac{d}{2}\bar{\nabla}_l A\right).$$

Lembremos que o fator de deformação $A(y)$ deve ser uma função real. Fazendo uma analogia com a mecânica quântica não-relativística, podemos interpretar a equação (2.33) como uma equação tipo-Schrödinger e, observando a expressão equivalente (2.34), concluímos que a 'Hamiltoniana' $H\equiv Q^\dagger\cdot Q$ é um operador Hermitiano. Desta forma, seus autovalores m_n^2 são positivos definidos ($m_n^2\geq 0$) e, portanto, o sistema não apresenta modos taquiônicos. Além disso, as soluções ξ_n devem ser ortonormais, ou seja, devem satisfazer a condição

$$\int d^{D-d}y\,\xi_n(y)\xi_{n'}(y) = \delta_{nn'}.$$

Caso elas formem um conjunto completo, também devem satisfazer a relação

$$\sum_n \xi_n(y)\xi_n(y') = \delta^{D-d}(y-y').$$

De um modo geral, para se obter as soluções $\xi_n(y)$ precisamos definir o modelo de brana, em outras palavras, devemos definir a métrica. No entanto, mesmo nesse cenário genérico, podemos discutir o caso especial do modo-zero ($m_0^2 = 0$). Para esse caso, as equações (2.32) e (2.33) ficam

$$\Box \hat{s}^{(0)}_{\mu\nu}(x) = 0, \tag{2.35}$$

$$-\bar{\nabla}_l \bar{\nabla}^l \xi_0(y) + \frac{d}{2}\left[\bar{\nabla}_l \bar{\nabla}^l A + \frac{d}{2}\bar{\nabla}_l A \bar{\nabla}^l A\right]\xi_0(y) = 0. \tag{2.36}$$

E uma das soluções da equação (2.36) pode ser obtida de forma genérica em função do fator de deformação $A(y)$. Tal solução é dada por

$$\xi_{0(1)}(y) = c_1 e^{\frac{d}{2}A(y)}. \tag{2.37}$$

Há ainda outra solução $\xi_{(0)2}(y)$, visto que a equação (2.36) é uma EDP de segunda ordem. No entanto, essa segunda solução depende da forma da função $A(y)$, curiosamente, para os modelos de brana conhecidos, ela não é normalizável. Assim, a única solução que nos interessa é a obtida acima.

O confinamento pode ser discutido calculando o escalar de Ricci e mantendo os termos de segunda ordem em $h_{\mu\nu}$. Como estamos discutindo somente as solução da equação homogênea $\tilde{s}_{\mu\nu}$, podemos assumir que $\delta t_{\mu\nu} = 0$ e assim $h_{\mu\nu} = \tilde{s}_{\mu\nu}$. Desta forma, podemos mostrar que a ação para o modo-zero $\hat{s}^{(0)}_{\mu\nu}(x)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{4\kappa^2}\int d^dx \int d^{D-d}y\sqrt{\bar{g}}e^{(d-2)A}\partial_\rho \tilde{s}^{(0)}_{\mu\nu}(x,y)\partial^\rho \tilde{s}^{\mu\nu}_{(0)}(x,y) \\ &= \frac{1}{4\kappa^2}\int d^dx \partial_\rho \hat{s}^{(0)}_{\mu\nu}(x)\partial^\rho \hat{s}^{\mu\nu}_{(0)}(x)\int d^{D-d}y\sqrt{\bar{g}(y)}e^{-2A(y)}\xi^2_{(0)}(y), \end{aligned} \tag{2.38}$$

em que as contrações são realizadas com a métrica de Minkowski. Assim, a teoria será bem definida na brana (localizada) se as integrais em y^j forem finitas. A convergência dessa integral para o modo-zero gravitacional depende do fator de deformação $A(y)$ e das componentes da métrica $\bar{g}_{jk}(y)$. Caso o campo seja confinado, podemos definir uma constante gravitacional efetiva na forma

$$\frac{1}{\kappa^2_{ef}} \equiv \frac{1}{\kappa^2}\int d^{D-d}y\sqrt{\bar{g}(y)}e^{-2A(y)}\xi^2_{(0)}(y). \tag{2.39}$$

Nesse sentido, dizemos que o campo gravitacional é confinado e a lei da gravitação de Newton pode ser recuperada. Note que uma das soluções possíveis para o campo $\hat{s}^{(0)}_{\mu\nu}(x)$, obtida da equação (2.35) para o caso estático, é

$$\hat{s}^{(0)}_{\mu\nu}(x) = \epsilon_{\mu\nu}\phi(x) = \epsilon_{\mu\nu}\frac{C}{r},$$

onde $\epsilon_{\mu\nu}$ é a polarização, C é uma constante relacionada a κ_{ef}^2 e $r = |\vec{x} - \vec{x}'|$ é a distância. Esse não é nada mais que o potencial Newtoniano. Com isso, concluímos essa discussão e, para encerrar o capítulo, iremos apresentar alguns exemplos de métricas.

2.3 Exemplos

Toda a discussão realizada acima tem um caráter bastante geral no contexto definido pela ação (2.1) e pela métrica (2.3). Nesse sentido, todos os resultados apresentados até agora devem ser válidos para uma grande variedade de mundos-brana presentes na literatura. Abaixo, descrevemos alguns desses modelos e suas principais características.

2.3.1 Modelos em codimensão 1

Os primeiros modelos de brana apresentados na literatura consideraram apenas uma dimensão extra. Assim, para descrever esses modelos, iremos usar uma métrica 5 dimensional na forma

$$ds^2 = e^{2A(y)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2. \tag{2.40}$$

Vale lembrar que estamos nos restringindo a discussão apenas dos casos em que a dimensão extra é infinita, portanto, aqui $y \in (-\infty, +\infty)$.

a) **Modelo de Randall-Sundrum: brana delta**

Vamos iniciar essa discussão apresentando os modelos com brana tipo-delta propostos por L. Randall e R. Sundrum (RS) [14, 17]. Iremos nos limitar ao modelo RS do tipo II (RS-II). Nesse modelo, há apenas uma brana e a dimensão extra é infinita. A lagrangiana $\mathcal{L}^b$ que gera a 3-brana nesse modelo é na forma

$$\mathcal{L}^b(y) = -\lambda\delta(y), \tag{2.41}$$

em que λ é uma constante que descreve a tensão da brana. Com essa lagrangiana, podemos obter o tensor energia-momento

$$T^b_{MN}(y) = -\lambda g_{\mu\nu}\delta^\mu_M\delta^\nu_N\delta(y). \tag{2.42}$$

Na expressão acima, $g_{\mu\nu} = e^{2A(y)}\eta_{\mu\nu}$. Usando a métrica (2.40) e o tensor (2.42), as equações (2.15) e (2.16) ficam

$$\begin{aligned} 3A'' &= -\kappa^2\lambda\delta\left(y\right), && (2.43)\\ 6A'^2 &= -\Lambda, && (2.44)\end{aligned}$$

Aqui, 'linha' representa derivada com relação a y. As demais equações, (2.14) e (2.17), serão identicamente nulas. A solução para o sistema acima é

$$A(y) = \pm\sqrt{-\frac{\Lambda}{6}}|y| = \pm k|y|, \tag{2.45}$$

em que as constantes Λ e λ devem ser relacionadas por $\kappa^2\lambda = 2\sqrt{-\Lambda/6}$. Essa relação entre as constantes é conhecida na literatura como ajuste fino ou *fine-tuning*. Além disso, k deve ser real, portanto, $\Lambda < 0$. Se calcularmos o escalar de Ricci para esse modelo, podemos mostrar que $R(y \to \infty) \to -k^2 \propto \Lambda < 0$. Portanto, a geometria do *bulk* é assimptoticamente AdS_5.

A motivação inicial de Randall-Sundrum era prover uma explicação para o problema da hierarquia na física de partículas. Com essa perspectiva, entre as soluções obtidas acima para o fator de deformação $A(y)$, aquela com o sinal negativo fornece a solução mais adequada para esse problema. Desse modo, a força gravitacional seria exponencialmente decrescente na dimensão extra, enquanto, as demais forças do MP não sentiriam tal atenuação devido à dimensão extra. Para os modelos de branas apresentados posteriormente, o requerimento passou a ser aquele onde a gravidade pode ser confinada na brana. Nessa outra perspectiva, usamos a discussão apresentada na subseção anterior. Portanto, quem determina o sinal é a relação (2.39), mais precisamente a integral

$$\int d^{D-d}y\sqrt{\bar{g}(y)}e^{(d-2)A(y)}c_0^2 \to \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{2A(y)}c_0^2 \to finito,$$

em que usamos $D = 5$, $d = 4$ e $\bar{g}(y) = 1$. Também por essa perspectiva, o sinal que permite o confinamento é o negativo, portanto, a métrica fica

$$\boxed{ds^2 = e^{-2k|y|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2.} \tag{2.46}$$

Essa é a solução obtida para o modelo de brana tipo II apresentado por L. Randall e R. Sundrum [17]. Além deste modelo com branas delta (infinitamente finas), foram apresentados outros modelos em que a brana possui uma certa espessura. Vejamos alguns.

b) **Modelos com brana espessa**

Ainda em 5D e com a métrica na forma (2.40), podemos mencionar também os modelos com brana espessa. Nesses casos, a brana é gerada dinamicamente devido à evolução de um campo escalar $\Phi(y)$ submetido a um potencial $V(\Phi)$.

Vamos iniciar escrevendo a lagrangiana para o campo escalar na forma

$$\mathcal{L}_b = -\frac{1}{2}\partial_M \Phi \partial^M \Phi - V(\Phi). \tag{2.47}$$

Nessa lagrangiana, o campo escalar depende apenas da dimensão extra y. Da equação (2.47), podemos obter o tensor energia-momento

$$T^b_{MN} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_b\right)}{\delta g^{MN}} = \partial_M \Phi \partial_N \Phi + g_{MN}\mathcal{L}_b. \tag{2.48}$$

Uma vez que o campo escalar depende apenas de y, as componentes $T^b_{\mu y}$ são nulas e a relação (2.17) já é satisfeita. Quanto as outras duas equações, a saber (2.15) e (2.16), para uma brana com $d = 4$ (3-brana), ficam

$$3A'' + 6A'^2 + \Lambda = \kappa^2 \mathcal{L}_b, \tag{2.49}$$

$$6A'^2 + \Lambda = \kappa^2 \left[\Phi'^2 + \mathcal{L}_b\right]. \tag{2.50}$$

Assim como no caso anterior, 'linha' representa derivada com relação a y. Substituindo a equação (2.49) em (2.50), chegamos a relação

$$-3A'' = \kappa^2 \Phi'^2. \tag{2.51}$$

Além dessas equações, devemos usar ainda a equação de movimento para o campo Φ obtida da lagrangiana $\mathcal{L}_b$, que é dada por

$$\Phi'' + 4A'\Phi' = \frac{\partial V}{\partial \Phi}. \tag{2.52}$$

Portanto, a definição do modelo de brana depende do potencial $V(\Phi)$. Abaixo, explicitamos alguns desses modelos.

(i) Um caso bem conhecido em 5D é o modelo apresentado em [18]. Neste modelo, o potencial é do tipo Sine-Gordon

$$V(\Phi) = \frac{3(4b+1)ba^2}{2\kappa^2}\cos^2\left[\sqrt{\frac{\kappa^2}{3b}}\Phi\right]. \tag{2.53}$$

Com esse potencial, podemos mostrar que a solução para o campo escalar é do tipo degrau,

$$\Phi(y) = \sqrt{\frac{3b}{\kappa^2}}\arctan[\sinh(ay)], \tag{2.54}$$

e a solução para o fator de deformação $A(y)$ fica na forma

$$A(y) = b\ln[\mathrm{sech}(ay)]\,. \tag{2.55}$$

As constantes a e b (reais e positivas) são relacionadas a constante cosmológica Λ por $ab = \sqrt{-\Lambda/6}$. A métrica final, portanto, pode ser escrita na forma

$$\boxed{ds^2 = \mathrm{sech}^{2b}(ay)\,\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2.} \tag{2.56}$$

Assim como no modelo de RS-II, a geometria do *bulk* também é assimptoticamente AdS_5.

(ii) Outro modelo bastante conhecido em 5D é aquele apresentado na ref. [19]. Nesse outro caso, o potencial é na forma

$$V(\Phi) = \frac{\lambda}{4}\left[\Phi^2 - v^2\right]^2 - \frac{\lambda\kappa^2}{27}\left[\Phi^3 - 3v^2\Phi\right]^2. \tag{2.57}$$

Com esse outro potencial, podemos mostrar que a solução para o campo escalar também é do tipo degrau,

$$\Phi(y) = v\tanh(ay)\,, \tag{2.58}$$

e a solução para o fator de deformação é dada por

$$A(y) = b\ln\left[\mathrm{sech}^2(ay)\right] - \frac{b}{2}\tanh^2(ay)\,. \tag{2.59}$$

As constantes a e b são relacionadas aos demais parâmetros por $a^2 = \frac{\lambda v^2}{2}$ e $b = \frac{v^2\kappa^2}{9}$. Finalmente, a métrica desse modelo é definida por

$$\boxed{ds^2 = \mathrm{sech}^{4b}(ay)\,e^{-b\tanh^2(ay)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2.} \tag{2.60}$$

Mais uma vez, a geometria do *bulk* é assimptoticamente AdS_5.

Ambos os modelos discutidos acima apresentam um perfil similar aquele apresentado no modelo RS-II. De fato, no limite quando a espessura da brana tende a zero ($a \to \infty$), o modelo RS-II pode ser recuperado para os dois casos acima. Isso permite inferir que, também para esses casos, a gravidade pode ser confinada na brana. Evidentemente, há ainda muitos outros modelos de brana na literatura [20–24], entretanto, não iremos explicitar todos aqui.

2.3.2 Modelos em codimensão 2

Antes de concluirmos esse capítulo, é instrutivo apresentarmos também alguns modelos em 6 dimensões. Iremos discutir a localização de alguns campos do Modelo Padrão nessa configuração dimensional e esses modelos apresentam resultados bem interessantes. Os modelos em 6D podem ser obtidos, basicamente, em dois cenários gravitacionais distintos: (a) aqueles modelos de brana gerados por defeito topológico tipo vórtices [54], corda cósmica [27–29] ou defeitos cônicos [33, 76]; (b) e aqueles gerados por intersecção de branas tipo-delta [34, 35]. Como queremos apresentar apenas alguns exemplos, vamos nos limitar aqueles do primeiro tipo.

Para modelos do tipo (a), podemos escrever a métrica na forma

$$ds^2 = e^{2A(r)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dr^2 + e^{2B(r)}d\theta^2, \tag{2.61}$$

em que, mais uma vez, estamos assumindo que a métrica na brana é plana (Minkowski). Quanto as dimensões extras (r, θ), teremos r infinita e θ compacta, isto é, $r \in [0, \infty)$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Além disso, assumimos que os fatores de deformação $A(r)$ e $B(r)$ dependem apenas da coordenada infinita r.

Diferente dos modelos em 5D, iremos assumir que o tensor energia-momento é aquele de um fluido perfeito dado por

$$T^b_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}f_0(r), \quad T^b_{rr} = \bar{g}_{rr}f_r(r), \quad T^b_{\theta\theta} = \bar{g}_{\theta\theta}f_\theta(r). \tag{2.62}$$

As funções $f_i(r)$ serão definidas posteriormente para fornecer um modelo de brana viável.

Com uma distribuição de energia nessa forma, as componentes da equação de Einstein podem ser escritas como

$$B'' + B'^2 + 3A'' + 6A'^2 + 3B'A' + \Lambda = \kappa^2 f_0, \tag{2.63}$$

$$4A'' + 10A'^2 + \Lambda = \kappa^2 f_\theta, \tag{2.64}$$

$$6A'^2 + 4B'A' + \Lambda = \kappa^2 f_r. \tag{2.65}$$

Além destas equações, devemos adicionar ainda ao sistema aquelas que vêm da equação de conservação $\nabla_N T^{MN} = 0$, a saber,

$$f_r' = 4\left[f_0 - f_r\right]A' + \left[f_\theta - f_r\right]B' \tag{2.66}$$

Nas equações (2.63)-(2.66), a 'linha' representa derivada com relação à coordenada r. De posse dessas equações, a maioria dos trabalhos encontrados na literatura assumem uma forma para o fator de deformação $A(r)$ e, a partir disso, discute as consequências de tal escolha para a função $B(r)$ e para a distribuição de energia, funções f_0, f_r e f_θ. Abaixo, explicitamos alguns casos.

(i) Um caso bem conhecido em 6D é o modelo apresentado nas referências [27–29]. Esse modelo descreve um mundo-brana gerado por um defeito topológico tipo corda cósmica de espessura infinitamente fina. Para esse caso, propõe-se

$$A(r) = -ar, \tag{2.67}$$

com a uma constante real e positiva. Com isso, as equações (2.63)-(2.66) ficam

$$B'' + B'^2 + 6a^2 - 3B'a + \Lambda = \kappa^2 f_0, \tag{2.68}$$

$$10a^2 + \Lambda = \kappa^2 f_\theta, \tag{2.69}$$

$$6a^2 - 4B'a + \Lambda = \kappa^2 f_r, \tag{2.70}$$

$$f_r' = -4a\left[f_0 - f_r\right] + \left[f_\theta - f_r\right] B'. \tag{2.71}$$

Usando as equações (2.69) e (2.70), podemos obter a seguinte solução para o fator de deformação $B(r)$,

$$B(r) = -\left[a - \frac{\kappa^2 f_\theta}{4a}\right] r - \frac{\kappa^2}{4a}\int_r f_r(z)dz, \tag{2.72}$$

onde já usamos que f_θ é uma constante como pode ser observado na equação (2.69). Com isso, a métrica para esse modelo fica na forma,

$$\boxed{ds^2 = e^{-2ar}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dr^2 + e^{2B(r)}d\theta^2,} \tag{2.73}$$

com $B(r)$ definido pela relação (2.72). Outros detalhes, como a forma da distribuição de energia f_0 e f_r, ainda podem ser discutidos, mas não iremos fazer isso aqui. Para mais detalhes sobre esse modelo recomendamos as referências originais [27–29].

(ii) Outro caso bastante interessante é o apresentado na referência [33]. Nesse modelo, os autores propõem um espaço-tempo em 6 dimensões, em que o subespaço bidimensional $\mathcal{C}_2$, definido pelas dimensões extras (r, θ), é uma solução da equação de fluxo de Ricci, mais precisamente, um *sóliton tipo-charuto de Hamilton*[2].

Nesse cenário, os fatores de deformação $A(r)$ e $B(r)$ são definidos como

$$2A(r) = -ar + \tanh(ar), \qquad B(r) = A(r) + \ln\left[\frac{1}{a}\tanh(ar)\right], \tag{2.74}$$

[2]Estou usando uma tradução livre da expressão em inglês *Hamilton's cigar soliton.*

em que a é uma constante real e positiva. Portanto, a métrica fica na forma

$$\boxed{ds^2 = e^{2A(r)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dr^2 + e^{2A(r)}\frac{\tanh^2(ar)}{a^2}d\theta^2.} \tag{2.75}$$

Diferente do caso anterior, o sóliton tipo-charuto, que é similar a uma corda cósmica, possui uma espessura e a métrica é completamente definida dentro e fora da corda. Além disso, o escalar de curvatura assume um valor constante negativo no limite $r \to \infty$, o que evidencia o caráter assimptoticamente AdS_6 desse modelo. Outros detalhes sobre esse modelo podem ser obtidos nas referências [33, 76].

Com isso, vamos encerrar essa discussão sobre mundos-brana. Acredito que tenhamos resumido de forma didática como os modelos são obtidos e em que sentido dizemos que a gravidade é confinada nesses modelos. Passemos agora ao estudo da localização dos campos de matéria nesses cenários.

3 CONFINAMENTO DOS CAMPOS DE MATÉRIA

Nesse capítulo iremos discutir a dinâmica dos campos de matéria em cenários de mundos-brana. Visto que não há nenhuma evidência experimental de 'fuga' dos campos do Modelo Padrão da física de partículas para possíveis dimensões extras, devemos concluir então que, assim como a gravidade (modo-zero), esses campos também devem ser confinados. Um ponto importante que deve ficar claro é que a métrica é considerada apenas um *background* nessa discussão. Assim, vamos considerar que a presença dos campos de matéria não provocará modificações na métrica. No capítulo (4), iremos determinar sob quais condições essa hipótese é consistente.

3.1 Localização de campos - procedimento geral

Como sabemos, a dinâmica de qualquer campo pode ser estudada partindo-se de uma ação definida como

$$S^{(m)} = \int d^d x d^{D-d} y \sqrt{-g} \mathcal{L}^{(m)}(x, y) \,. \tag{3.1}$$

Nessa ação, $\mathcal{L}^{(m)}$ é a lagrangiana do campo de matéria definida no *bulk*. A partir dessa expressão, podemos obter as equações de movimento, discutir as simetrias do modelo, entres outros pontos importantes.

Nos cenários de brana, o procedimento usado no estudo da localização dos campos consiste, de modo geral, em fatorar a ação (3.1) em um produto de dois setores: um efetivo na brana, que depende apenas das coordenadas x^μ, e outro que depende apenas das coordenadas das dimensões extras y^j. Ou seja, devemos ter algo do tipo

$$S^{(m)} = \int d^d x \sqrt{-\hat{g}(x)} \hat{L}^{(m)}(x) \int d^{D-d} y \sqrt{\bar{g}(y)} F\,(y) \,. \tag{3.2}$$

Assim, a primeira integral provê a ação efetiva na brana e o modelo será bem definido se a integral nas coordenadas y^j for finita. Em outras palavras, dizemos que o campo é confinado (localizado) se

$$K \equiv \int d^{D-d} y \sqrt{\bar{g}(y)} F\,(y) \to finito. \tag{3.3}$$

Todas as publicações na literatura sobre confinamento de campos seguem e se limitam a essa premissa. Abaixo, vamos apresentar alguns casos específicos.

3.2 Campo escalar real

Por ser um exemplo relativamente simples, vamos iniciar discutindo o confinamento do campo escalar real sem massa. Esse tipo de campo desempenha um importante papel em física de partículas. Por exemplo, podemos citar o campo de Higgs (campo escalar complexo), responsável por gerar as massas das partículas no modelo padrão. A descrição de partículas escalares como os píons ($\pi^0, \pi^\pm$) também pode ser realizada com esse tipo de campo.

A ação mais simples para um campo escalar real não massivo $\phi(x,y)$ pode ser escrita como

$$S^{(m)} = -\frac{1}{2}\int d^d x d^{D-d} y \sqrt{-g}\partial_M \phi(x,y)\partial^M \phi(x,y). \tag{3.4}$$

A quantidade $g = g(x,y)$ é o determinante da métrica g_{MN} apresentada no capítulo (2). A partir dessa ação, podemos realizar a variação com relação ao campo escalar e obter a equação de movimento

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_M \left[\sqrt{-g}\partial^M \phi\right] = 0. \tag{3.5}$$

Para fatorar a ação (3.4) na forma (3.2), vamos usar a métrica (2.3) e também o seguinte *ansatz* para o campo escalar,

$$\phi(x,y) = e^{-\frac{d}{2}A(y)}\sum_n \varphi^{(n)}(x)\xi_n(y).$$

Com isso, a equação de movimento (3.5) pode ser separada em

$$\frac{1}{\sqrt{-\hat{g}}}\partial_\mu \left[\sqrt{-\hat{g}}\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\nu \varphi^{(n)}(x)\right] = m_n^2 \varphi^{(n)}(x), \tag{3.6}$$

$$-\bar{\nabla}_j \bar{\nabla}^j \xi_n(y) + \left[e^{-\frac{d}{2}A}\bar{\nabla}_j \bar{\nabla}^j e^{\frac{d}{2}A} - m_n^2 e^{-2A}\right]\xi_n(y) = 0. \tag{3.7}$$

Nesta última expressão, estamos definindo o operador

$$\bar{\nabla}_j \bar{\nabla}^j (\ ) = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}}\partial_j \left[\sqrt{\bar{g}}\bar{g}^{jk}\partial_k (\ )\right],$$

ou seja, o operador laplaciano no subespaço das dimensões extras. Aqui, estamos interessados em discutir as soluções e o confinamento do modo-zero $\varphi^{(0)}(x)$. Portanto, vamos considerar $m_0^2 = 0$ nas equações (3.6) e (3.7). Fazendo isso, podemos obter uma solução para $\xi_0(y)$ válida para qualquer modelo de brana, independente do número de dimensões extras, dada por

$$\xi_{0,(1)}(y) = c_1 e^{\frac{d}{2}A(y)}. \tag{3.8}$$

A outra solução para a equação (3.7) com $m_0^2 = 0$ depende da forma específica do fator de deformação $A(y)$ e das componentes $\bar{g}_{jk}(y)$, portanto, depende de cada modelo de brana. Essa segunda solução, no entanto, não pode ser normalizada para nenhum dos modelos que discutimos no capítulo anterior. Assim, a única que realmente nos interessa é a que foi apresentada acima.

Retornando a ação (3.4) e usando o *ansatz* proposto anteriormente para o campo escalar $\phi(x, y)$ podemos escrever

$$S^{(m)} = -\frac{1}{2}\sum_n \int d^d x d^{D-d} y \sqrt{-g}\xi_n^2 e^{-(d+2)A}\left[\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi_{(n)}\partial_\nu\varphi_{(n)} + m^2\varphi_{(n)}^2\right]. \tag{3.9}$$

Desta forma, uma vez que $\sqrt{-g} = \sqrt{-\hat{g}(x)}\sqrt{\bar{g}(y)}e^{dA(y)}$, podemos fatorar a ação acima na forma

$$S^{(m)} = -\frac{1}{2}\sum_n \int d^d x \sqrt{-\hat{g}}\left[\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi_{(n)}\partial_\nu\varphi_{(n)} + m^2\varphi_{(n)}^2\right]\int d^{D-d}y\sqrt{\bar{g}}e^{-2A}\xi_n^2. \tag{3.10}$$

Portanto, a teoria efetiva para cada modo será bem definida se sua respectiva integral,

$$K_n^{(escalar)} = \int d^{D-d}y\sqrt{\bar{g}(y)}e^{-2A(y)}\xi_n^2(y), \tag{3.11}$$

for finita. Mais uma vez, considerando apenas o modo-zero, podemos usar a solução (3.8) e mostrar que a integral $K_0^{(escalar)}$ é igual aquela obtida para o campo gravitacional (2.39). Portanto, sempre que a gravidade (modo-zero) é confinada, o campo escalar (modo-zero) também o será [25, 41, 42, 52, 53, 77–81]. Quanto ao confinamento dos modos massivos ($m_n^2 \neq 0$), não realizaremos essa discussão aqui. No capítulo (4), faremos um breve comentário sobre esses modos para um mundo-brana especifico.

3.3 Campo espinorial de Dirac

Em física de partículas, a descrição de todos os férmions é realizada usando-se campos espinoriais. Isso inclui desde partículas fundamentais, como o elétron, os neutrinos e os quarks, bem como partículas compostas, a exemplo do próton e do nêutron. Vamos nos limitar a discussão dos férmions com spin meio e, como sabemos, a descrição desses campos é realizada com a equação de Dirac. Tendo em vista o caráter matricial dessa equação e a sua dependência com a dimensão do espaço-tempo, vamos discutir o confinamento apenas para modelos de brana em 5 dimensões. Portanto, nessa seção, iremos considerar uma métrica genérica na forma

$$ds^2 = e^{2A(y)}\hat{g}_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu + e^{2B(y)}dy^2. \tag{3.12}$$

Mesmo com essa restrição dimensional, a métrica acima inclui toda uma variedade de modelos de brana 5D, entre eles, os que apresentamos na subseção (2.3.1) do capítulo anterior.

Para podermos discutir tanto o caso livre como alguns modelos que usam um acoplamento tipo Yukawa, vamos iniciar esse estudo escrevendo a ação

$$S^{(m)} = -\int d^4x dy \sqrt{-g}\bar{\Psi}\left[i\Gamma^M D_M + \lambda f(y)\right]\Psi, \tag{3.13}$$

em que a derivada covariante é definida como $D_M = \partial_M - \omega_M$, com $\omega_M = \frac{1}{4}\omega_M^{ab}\Gamma_a\Gamma_b$ sendo as conexões de spin. Além disso, como indicado, introduzimos uma interação tipo Yukawa em que λ é a constante de acoplamento e $f(y)$ uma função que iremos definir posteriormente.

Seguindo os passos já bastante conhecidos, podemos fazer a variação da ação (3.13) com relação a $\bar{\Psi}$ e obter a equação de movimento

$$\left[i\Gamma^M D_M + \lambda f(y)\right]\Psi = \left[i\Gamma^\mu D_\mu + i\Gamma^y D_y + \lambda f(y)\right]\Psi = 0. \tag{3.14}$$

As matrizes gamma no espaço-tempo curvo Γ^M são relacionadas aquelas no espaço-tempo de Minkowski por $\Gamma^M(x,y) = E_a^M(x,y)\gamma^a$, onde $E_a^M(x,y)$ são os *vierbein*[1]. Vamos definir essas quantidades da seguinte forma[2],

$$\left.\begin{aligned} E_a^\mu(x,y) &= e^{-A(y)}\hat{e}_a^\mu(x) \\ E_a^y(x,y) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ para } a = 1,2,3,4,$$

$$\left.\begin{aligned} E_5^\mu(x,y) &= 0 \\ E_5^y(x,y) &= e^{-B(y)} \end{aligned}\right\} \text{ para } a = 5.$$

Assim, as conexões de spin podem ser calculadas e são dadas por

$$\omega_\mu(x,y) = \hat{\omega}_\mu(x) + \frac{1}{2}\Gamma_\mu\Gamma^y A', \quad \omega_y(x,y) = 0. \tag{3.15}$$

Mais uma vez, a 'linha' representa derivada com relação à dimensão extra y. Com tudo isso, a equação (3.14) fica na forma

$$i\hat{\Gamma}^\mu(x)\hat{D}_\mu\Psi + 2ie^{A-B}A'\gamma^5\Psi + ie^{A-B}\gamma^5\Psi' + \lambda e^A f(y)\Psi = 0, \tag{3.16}$$

onde $\hat{D}_\mu = \partial_\mu - \hat{\omega}_\mu(x)$ e $\hat{\Gamma}^\mu(x) = \hat{e}_a^\mu(x)\gamma^a$. Para facilitar a separação de variáveis, iremos

[1] Ver as notações e convenções nas seções pré-textuais desta tese.

[2] As componentes $\hat{e}_a^\mu(x)$ devem satisfazer $\hat{e}_a^\mu(x)\hat{e}^{\nu a}(x) = \hat{g}^{\mu\nu}(x)$.

propor o *ansatz*

$$\Psi(x,y) = \sum_n \Psi_n(x,y) = \sum_n \left[\psi^+_{(n)}(x)\xi^+_n(y) + \psi^-_{(n)}(x)\xi^-_n(y)\right],$$

em que as quantidades $\psi^\pm_{(n)}$ satisfazem $-i\gamma^5\psi^\pm_{(n)} = \pm\psi^\pm_{(n)}$. Além disso, vamos assumir que a equação de Dirac seja recuperada em 4 dimensões, ou seja,

$$i\hat{\Gamma}^\mu \hat{D}_\mu \Psi_n + m_n \Psi_n = 0.$$

Com isso, podemos fazer a separação de variáveis na equação (3.16) e obter

$$i\hat{\Gamma}^\mu \hat{D}_\mu \psi^\pm_{(n)} + m_n \psi^\mp_{(n)} = 0, \tag{3.17}$$

$$e^{A-B}\frac{d\xi^\pm_n(y)}{dy} + 2e^{A-B}A'\xi^\pm_n(y) \mp \lambda e^A f(y)\xi^\pm_n(y) = \mp m_n \xi^\mp_n(y). \tag{3.18}$$

Antes de partir para o estudo confinamento, façamos um breve comentário sobre a Eq. (3.17). Como dissemos acima, os espinores $\psi^\pm_{(n)}(x)$ satisfazem $-i\gamma^5\psi^\pm_{(n)}(x) = \pm\psi^\pm_{(n)}(x)$. Um exercício deveras simples é mostrar que $\psi^\pm_{(n)}(x)$ pode ser escrito como

$$\psi^\pm_{(n)} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \mp i\gamma^5)\psi_n,$$

onde o spinor $\psi_n(x)$ satisfaz a equação de Dirac $i\hat{\Gamma}^\mu \hat{D}_\mu \psi_n(x) + m_n\psi_n(x) = 0$. Com isso, é fácil mostrar que

$$i\hat{\Gamma}^\mu \hat{D}_\mu \psi^\pm_{(n)} = \frac{i}{2}\hat{\Gamma}^\mu \hat{D}_\mu(\mathbf{1} \mp i\gamma^5)\psi_n = \frac{i}{2}(\mathbf{1} \pm i\gamma^5)\hat{\Gamma}^\mu \hat{D}_\mu \psi_n = -m_n\frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm i\gamma^5)\psi_n = -m_n\psi^\mp_{(n)},$$

Na segunda igualdade, usamos a relação de anticomutação entre as matrizes gamma. Desta forma, podemos justificar a equação (3.17). Vamos discutir agora o confinamento do modo-zero.

Tal qual fizemos para o caso do campo escalar, estamos interessados no estudo do confinamento do modo-zero Ψ_0. Note que, assim como ocorre em 4 dimensões, a massa m_n acopla as duas quiralidades $\psi^\pm_{(n)}$ de cada modo. No entanto, também como esperado, isso não ocorre para o caso sem massa (modo-zero). Nesse último caso, as soluções para a equação (3.18) com $m_0 = 0$, serão obtidas realizando-se uma integração simples. Fazendo isso, obtemos

$$\xi^+_0(y) = c_1 \exp\left[-2A(y) + \lambda \int_y dz e^{B(z)} f(z)\right], \tag{3.19}$$

$$\xi^-_0(y) = c_2 \exp\left[-2A(y) - \lambda \int_y dz e^{B(z)} f(z)\right]. \tag{3.20}$$

Desta forma, ao especificar a função $f(y)$ e os fatores de deformação $A(y)$ e $B(y)$, a discussão sobre a localização pode ser realizada. Voltemos a ação (3.13) e vejamos se é possível fatorá-la. Considerando apenas o modo-zero, podemos escrever

$$S_0^{(m)} = -i \int d^4x dy \sqrt{-\hat{g}} e^{3A+B} \left[\bar{\psi}_0^+ \hat{\Gamma}^\mu \hat{D}_\mu \psi_0^+ \left(\xi_0^+\right)^2 + \bar{\psi}_0^- \hat{\Gamma}^\mu \hat{D}_\mu \psi_0^- \left(\xi_0^-\right)^2 \right]. \quad (3.21)$$

Daí, obtemos a integral na dimensão extra y dada por

$$K_0^{(spinor)\pm} = \int dy e^{3A+B} \left(\xi_0^\pm\right)^2. \quad (3.22)$$

Finalmente, podemos substituir as soluções (3.19) e (3.20), e discutir o confinamento. Para o caso livre ($\lambda = 0$), podemos usar os modelos de brana apresentados na seção (2.3.1) e verificar que o campo livre não pode ser localizado. Por outro lado, se a interação com o termo tipo Yukawa está presente, podemos escolher adequadamente a função $f(y)$ e obter o confinamento. No entanto, não é possível localizar as duas quiralidades simultaneamente [19, 70, 82–84]. Outros estudos sobre localização de férmions em codimensão superior já foram realizados, por exemplo, em modelos com 6 dimensões [59, 60]. Nesses artigos, as conclusões sobre o confinamento são similares as que obtivemos acima.

3.4 Campo vetorial

Vamos discutir agora o confinamento do campo vetorial. Como sabemos, esse tipo de campo desempenha um importante papel no Modelo Padrão sendo responsável pela descrição dos bósons de interação, a saber, fótons, glúons, $W_\mu^\pm$ e Z_μ^0. Para evitar complicações desnecessárias, uma vez que dois tipos de vetores, abelianos e não-abelianos, são usados para descrever essas partículas, vamos nos limitar ao caso do confinamento de campos vetoriais abelianos. Além disso, vamos realizar um estudo mais detalhado deste campo para incluir tanto a discussão do caso livre, como alguns casos com interação, entre eles, um que foi apresentado por nós [71].

3.4.1 Campo vetorial livre

Consideremos inicialmente o confinamento do campo vetorial abeliano livre. Diferente do estudo realizado para o campo espinorial, não há necessidade de nos limitarmos a mundos-brana em 5 dimensões. Desta forma, os resultados que serão discutidos a seguir, de forma genérica, incluem uma variedade de modelos de brana em diferentes configurações dimensionais.

A ação para o campo vetorial abeliano livre é dada por

$$S^{(m)} = -\frac{1}{4} \int dx^d x d^{D-d} y \sqrt{-g} \mathcal{F}_{MN} \mathcal{F}^{MN}, \quad (3.23)$$

com $\mathcal{F}_{MN} = \partial_M \mathcal{A}_N - \partial_N \mathcal{A}_M$. Para esse campo específico, usaremos uma abordagem um pouco diferente da usada nos dois casos anteriores. Vou propor a seguinte decomposição $\mathcal{A}_M = \left(\mathcal{A}^t_\mu + \partial_\mu \theta, \mathcal{B}_j\right)$, em que as componentes $\mathcal{A}^t_\mu$ satisfazem $\nabla_\mu \mathcal{A}^\mu_t = 0$. Note que essa decomposição não configura uma definição de *gauge*, uma vez que não eliminamos graus de liberdade. Apenas estamos definindo um referencial, tal que o vetor $\mathcal{A}_\mu$ pode ser separado na sua parte transversa $\mathcal{A}^t_\mu$ e longitudinal $\mathcal{A}^L_\mu = \partial_\mu \theta$. Quanto as componentes $\mathcal{B}_j$, elas são relacionadas às dimensões extras e são escalares por transformações de Lorentz na brana. Vou usar essa decomposição diretamente na ação (3.23) para separar os campos.

Abrindo as somas nos índices M, N daquela ação, podemos escrever a lagrangiana como

$$\mathcal{F}_{MN}\mathcal{F}^{MN} = \mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + \mathcal{F}_{jk}\mathcal{F}^{jk} + 2\mathcal{F}_{\mu j}\mathcal{F}^{\mu j}.$$

Usando a decomposição apresentada acima, podemos mostrar que o primeiro termo no lado direito depende apenas dos campos $\mathcal{A}^t_\mu$, o segundo termo depende apenas dos campos escalares $\mathcal{B}_j$ e o último termo possui acoplamentos entre esses campos. Estamos interessados em discutir o confinamento das componentes que descreverão o eletromagnetismo, ou seja, os campos $\mathcal{A}^t_\mu$. Portanto, vamos trabalhar um pouco o último termo na expressão acima. Veja que

$$\mathcal{F}_{\mu j}\mathcal{F}^{\mu j} = g^{\mu\nu} g^{jk} (\partial_\mu \mathcal{C}_j \partial_\nu \mathcal{C}_k - 2\partial_\mu \mathcal{C}_j \partial_k \mathcal{A}^t_\nu + \partial_j \mathcal{A}^t_\mu \partial_k \mathcal{A}^t_\nu),$$

em que definimos $\mathcal{C}_j = \mathcal{B}_j - \partial_j \theta$. Retornando a ação (3.23), podemos escrever,

$$S^{(m)} = -\frac{1}{4}\int dx^d x d^{D-d} y \sqrt{-g} \left[\mathcal{F}^t_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}_t + 2\partial_j \mathcal{A}^t_\mu \partial^j \mathcal{A}^\mu_t - 2\partial_\mu \mathcal{C}_j \partial^j \mathcal{A}^\mu_t + \mathcal{L}[\mathcal{C}_j]\right]. \quad (3.24)$$

Veja que, no termo com os campos $\mathcal{C}_j$ e $\mathcal{A}^\mu_t$ acoplados, podemos fazer uma integração por partes, de modo que obtemos

$$\begin{aligned} S^{(m)} = &-\frac{1}{4}\int dx^d x d^{D-d} y \sqrt{-g} \left[\mathcal{F}^t_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}_t + 2\partial_j \mathcal{A}^t_\mu \partial^j \mathcal{A}^\mu_t\right] \\ &+\frac{1}{2}\int dx^d \partial_\mu \left[\int d^{D-d} y \sqrt{-g} \mathcal{C}_j \partial^j \mathcal{A}^\mu_t\right] + S[\mathcal{C}_j], \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde já usamos a condição de transversalidade $\nabla_\mu \mathcal{A}^\mu_t = 0$. Agora, assumiremos que o primeiro termo na linha de baixo é um termo de superfície na brana e, como tal, podemos descarta-lo se considerarmos que os campos $\mathcal{A}^t_\mu$ vão a zero na fronteira (da brana). Assim, a ação para as componentes transversas fica

$$S^{(m)}[\mathcal{A}^t_\mu] = -\int dx^d x d^{D-d} y \sqrt{-g} \left[\frac{1}{4}\mathcal{F}^t_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}_t + \frac{1}{2}\partial_j \mathcal{A}^t_\mu \partial^j \mathcal{A}^\mu_t\right]. \quad (3.26)$$

Agora, podemos seguir para o estudo do confinamento dessas componentes.

Calculando-se as equações de movimento para o campo $\mathcal{A}^t_\mu$ da ação (3.26), obteremos

$$\partial_\rho\left[\sqrt{-g}\mathcal{F}^{\rho\mu}_t\right]+\partial_j\left[\sqrt{-g}\partial^j\mathcal{A}^\mu_t\right]=0. \tag{3.27}$$

A separação de variáveis pode ser realizada facilmente propondo-se o *ansatz* $\mathcal{A}^\mu_t(x,y)=\sum_n\hat{A}^\mu_{t(n)}(x)\xi_n(y)$. Desta forma,

$$\frac{1}{\sqrt{-\hat{g}}}\partial_\rho\left[\sqrt{-\hat{g}}\hat{F}^{\rho\mu}_{t(n)}(x)\right]=m_n^2\hat{A}^\mu_{t(n)}(x), \tag{3.28}$$

$$-\frac{e^{-(d-4)A(y)}}{\sqrt{\bar{g}}}\partial_k\left[\sqrt{\bar{g}}\bar{g}^{kj}e^{(d-2)A(y)}\partial_j\xi_n(y)\right]=m_n^2\xi_n(y). \tag{3.29}$$

As equações acima são válidas para qualquer configuração dimensional. Como fizemos para os casos anteriores, estamos interessados em discutir o confinamento do modo-zero. Portanto, fazendo $m_0^2=0$ as equações acima ficam

$$\partial_\rho\left[\sqrt{-\hat{g}}\hat{F}^{\rho\mu}_{t(0)}(x)\right]=0, \tag{3.30}$$

$$\partial_k\left[\sqrt{\bar{g}}\bar{g}^{kj}e^{(d-2)A(y)}\partial_j\xi_0(y)\right]=0, \tag{3.31}$$

onde a equação (3.30) descreve a dinâmica de um campo vetorial abeliano transverso sem massa na brana. Usando essa configuração de campo, podemos mostrar que a ação para o modo-zero pode ser fatorada na forma

$$S_0^{(m)}=-\frac{1}{4}\int d^dx\sqrt{-\hat{g}}\hat{g}^{\mu\lambda}\hat{g}^{\nu\rho}\hat{F}^{t(0)}_{\mu\nu}\hat{F}^{t(0)}_{\lambda\rho}\int d^{D-d}ye^{(d-4)A}\sqrt{\bar{g}}\xi_0^2. \tag{3.32}$$

Assim como fizemos para os campos anteriores, o confinamento requer que a integral nas dimensões extras seja finita e isso depende do modelo de brana. Vamos considerar somente 3-branas, isto é, façamos $d=4$ na integral acima. Logo,

$$K^{(vetorial)}_{[livre],0}=\int d^{D-4}y\sqrt{\bar{g}(y)}\xi_0^2(y). \tag{3.33}$$

Agora, observe que uma das soluções possíveis para a equação (3.31) é uma constante, $\xi_{0,(1)}(y)=c_0$, e essa solução existe para qualquer modelo. Quanto a outra solução $\xi_{0,(2)}(y)$, ela é modelo-depende. No entanto, assim como acontece para o campo escalar, a solução que dependem do modelo, $\xi_{0,(2)}(y)$, não pode ser confinada. Portanto, a única solução importante para nós é a constante.

Usando a solução constante $\xi_{0,(1)}(y)=c_0$ na integral (3.33) chegamos as seguintes conclusões. Para o modelo 5D de Randall-Sundrum tipo II, em que $\bar{g}_{55}=1$, a integral $K^{(vetorial)}_{[livre],0}$ diverge e, portanto, o modo-zero vetorial não pode ser confinado [42, 44]. O mesmo resultado é obtido para os dois casos com brana espessa apresentados no capítulo

(2) [19, 67]. Já para modelos em 6 dimensões com métrica na forma da equação (2.61), o confinamento do campo vetorial livre pode ser alcançado [46, 54, 55, 58, 85, 86]. Ainda em 6D, se as duas dimensões extras são infinitas como nos modelos [34, 35], o confinamento já não é mais possível [73]. Esses resultados para o campo vetorial são bastante interessantes e irão exemplificar de forma clara nossa discussão sobre a consistência desse procedimento.

3.4.2 Localização do campo vetorial com interação

Nesta subseção, vamos rever alguns mecanismos usados na literatura para confinar o campo vetorial abeliano. Como argumentamos na subseção anterior, não é possível confinar o campo vetorial livre para modelos[3] em 5D, mas o é para vários modelos em 6 dimensões. Desta forma, a maioria dos mecanismos de localização encontrados na literatura são para mundos-brana 5-dimensionais. Sendo assim, os resultados apresentados a seguir consideram um *background* com a métrica genérica na forma

$$ds^2 = e^{2A(y)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + e^{2B(y)}dy^2. \tag{3.34}$$

Essa métrica inclui todos aqueles modelos apresentados na seção (2.3), além de outros que não explicitamos [20–24]. Entre os principais mecanismos, temos aqueles que são invariantes por transformações de gauge, como os apresentados em [19, 66, 67, 87, 88]; e temos também modelos que não são invariantes de gauge em 5 dimensões, como os apresentados em [68] ou o chamado acoplamento geométrico [69, 71, 89]. Mesmo não possuindo simetria de gauge no *bulk*, é possível recuperá-la na teoria efetiva após o confinamento do campo na brana. Vamos aos mecanismos.

a) **Acoplamento com campo escalar**

O primeiro mecanismo de localização que iremos apresentar é aquele discutido nas referências [19, 87]. Esse mecanismo, usado comumente em modelos de brana espessa, propõe o acoplamento do campo vetorial com uma função escalar $\mathcal{H}(y)$ através do *field strength*. Mais precisamente, a ação do campo vetorial livre deve ser modificada na forma

$$S^{(m)} = -\frac{1}{4}\int d^4x dy\sqrt{-g}\mathcal{H}(y)\mathcal{F}_{MN}\mathcal{F}^{MN}. \tag{3.35}$$

A função $\mathcal{H}(y)$ será definida depois para alguns casos conhecidos. O procedimento que se segue é muito similar aquele apresentado na subseção anterior e isso inclui o

[3] Esse não é exatamente o caso. Para alguns modelos 5D em que o *dilaton* está presente o confinamento do campo vetorial livre pode ser alcançado, pois $\bar{g}_{55}(y) = \bar{g}(y) = e^{2B(y)}$. Mostraremos isso ao discutir o caso com interação.

uso da decomposição $\mathcal{A}_M = \left(\mathcal{A}^t_\mu + \partial_\mu\theta, \mathcal{B}_j\right)$. Assim, por economia, iremos omitir algumas etapas. Podemos mostrar que a equação de movimento para as componentes $\mathcal{A}^t_\mu$ é fatorada como

$$\partial_\rho \hat{F}^{\rho\mu}_{t(n)} = m_n^2 \hat{A}^\mu_{t(n)}, \tag{3.36}$$

$$-\frac{e^{-B}}{\mathcal{H}}\left[e^{2A-B}\mathcal{H}\xi_n'\right]' = m_n^2\xi_n. \tag{3.37}$$

Aqui, já usamos a métrica (3.34) e o *ansatz* $\mathcal{A}^t_\mu(x,y) = \sum_n \hat{A}^{t(n)}_\mu(x)\xi_n(y)$. Mais uma vez, a 'linha' representa derivada com relação à coordenada y. Além disso, o setor da ação (3.35) com o campo $\mathcal{A}^t_\mu$ pode ser escrito como

$$S^{(m)} = -\sum_n \int d^4x \left[\frac{1}{4}\hat{F}^{t(n)}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}_{t(n)} + \frac{1}{2}m^2\hat{A}^{t(n)}_\mu\hat{A}^\mu_{t(n)}\right] K_n^{(vetorial)}, \tag{3.38}$$

onde a quantidade $K_n^{(vetorial)}$ é definida como a integral na dimensão extra

$$K_n^{(vetorial)} = \int dy e^{B(y)}\mathcal{H}(y)\xi_n^2(y). \tag{3.39}$$

Desta forma, um campo de gauge efetivo na brana pode ser obtido fazendo-se $m_n^2 = 0$ (modo-zero). E, escolhendo adequadamente a função $\mathcal{H}(y)$, o confinamento deste modo-zero pode ser alcançado. Abaixo, vamos discutir alguns casos específicos.

Veja que uma das soluções da equação (3.37) para o modo-zero ($m_0^2 = 0$) é uma constante, ou seja, $\xi_{0,(1)}(y) = c_0$. Todos os resultados apresentados abaixo consideram essa solução na integral $K_0^{(vetorial)}$. Assim, só iremos discutir as funções $\mathcal{H}(y)$. Veja que o caso livre é recuperado quando fazemos $\mathcal{H}(y) = 1$ e, nesse caso, o confinamento pode ser alcançado se $B(y) \neq 0$ e é do tipo gaussiano. Isso é possível se o *dilaton* está presente na teoria, o que leva a algo do tipo $B(y) \propto A(y)$. Portanto, nessa configuração o campo vetorial livre (modo-zero) pode ser localizado.

Há na literatura algumas publicações com diferentes escolhas para a função $\mathcal{H}(y)$. Na ref. [19], por exemplo, os autores consideram $4B(y) = A(y)$ e usam um acoplamento na forma $\mathcal{H}_{[Kehagias]}(y) = \exp[\lambda A(y)/2]$. Como discutimos no capítulo (2), o fator de deformação $A(y)$ possui um perfil gaussiano. Desta forma, pode-se mostrar que a integral (3.39), para o modo-zero, é finita para qualquer valor de λ que satisfaz a relação $\lambda > -1/2$. A referência [80] também considera uma 3-brana, mas diferente do caso anterior, a relação entre os fatores de deformação é $B(y) = rA(y)$ com o parâmetro r positivo. A função escalar é escolhida na forma $\mathcal{H}_{[Fu]}(y) = \exp[\lambda\sqrt{r}A(y)]$. Para esse caso, segundo os autores, a localização é obtida para os seguintes valores dos parâmetros, $\lambda > -\sqrt{r}$, para $0 < r < 1$; ou $\lambda > -\sqrt{1/r}$, para $r > 1$.

Há outro caso bem interessante, apresentado na ref. [87], onde a função $\mathcal{H}(y)$ é definida como $\mathcal{H}_{[Chumbes]}(y) = \mathcal{H}(\phi) \propto \left[\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi}\right]^{2s}$. Nessa expressão, $W(\phi)$ é um superpotencial relacionando ao campo escalar $\phi(y)$ que gera a brana. O intuito dos autores com essa proposta é apresentar um mecanismo de localização de seja válido para qualquer modelo de brana espessa. Após alguma discussão geral, os autores aplicam esse método para dois modelos, o apresentado em [18], onde

$$W(\phi) = \frac{3bc}{2}\sin\!\left(\sqrt{\frac{\kappa^2}{3b}}\phi(y)\right), \quad \text{com} \quad \phi(y) = \sqrt{\frac{3b}{\kappa^2}}\arctan[\tanh(ay)]\,.$$

Para esse exemplo, pode-se mostrar que $\mathcal{H}^{Gremm}_{[Chumbes]}(y) = \text{sech}^{2s}(ay)$ e a localização pode ser alcançada para $s > 0$. Outro exemplo discutido é o modelo apresentado por [19], onde

$$W(\phi) = av\left(\phi - \frac{\phi^3}{3v^2}\right), \quad \text{com} \quad \phi(y) = v\arctan(ay)\,.$$

Agora, a função escalar fica na forma $\mathcal{H}^{Kehagias}_{[Chumbes]}(y) = \text{sech}^{4s}(ay)$ e mais uma vez o confinamento pode ser obtido para $s > 0$. Há ainda outros modelos [66, 67, 88], no entanto, os exemplos mencionados acima são suficientes para ilustrar o mecanismo de localização e eles serão importantes no próximo capítulo.

b) **Mecanismo de localização GN**

Agora, vamos verificar o mecanismo de localização não covariante proposto por K. Ghoroku e A. Nakamura (GN) na ref. [68]. Os autores discutem esse mecanismo para o modelo RS-II [17]. Para esse caso, a métrica é dada por (3.34), com os fatores de deformação definidos como $A(y) = B(y) = -\ln(1 + k|y|)$.

A lagrangiana para o campo vetorial com o mecanismo GN é escrita como

$$\mathcal{L}^m = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{MN}\mathcal{F}^{MN} - \frac{1}{2}\left[M^2 + \lambda\delta(y)\right]\mathcal{A}_M\mathcal{A}^M. \tag{3.40}$$

Embora não seja invariante por transformações de gauge ou, mesmo, por difeomorfismo, a teoria efetiva possui todas essas características com relação a transformações na brana. Após algumas manipulações, como as que foram realizadas nos casos anteriores, podemos obter a equação de movimento para as componentes $\mathcal{A}^t_\mu$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\rho\left[\sqrt{-g}\mathcal{F}^{\rho\mu}_t\right] + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_y\left[\sqrt{-g}g^{yy}g^{\mu\rho}\partial_y\mathcal{A}^t_\rho\right] - \left[M^2 + \lambda\delta(y)\right]g^{\mu\rho}\mathcal{A}^t_\rho = 0 \tag{3.41}$$

A partir dessa expressão, podemos realizar a separação de variáveis, tal qual fizemos anteriormente e, considerando apenas o modo-zero, obter a solução

$$\xi_0(y) = c_0 \exp\left[-\frac{\lambda}{2k}A(y)\right], \text{ com } \lambda = 2\left(k - \sqrt{k^2+M^2}\right). \tag{3.42}$$

Assim como fizemos antes, temos que escrever a ação usando a Lagrangiana (3.40) e, levando em conta apenas o modo-zero, podemos mostrar que a integral nas dimensões extras é

$$K_0^{(vetorial)} = \int dy e^{A(y)} \xi_0^2(y).$$

Portanto, usando a solução (3.42), o confinamento é obtido para $\lambda < 0$, o que implica em $M^2 > 0$. Para concluir esse capítulo, vejamos a versão covariante desse mecanismo GN.

c) **Acoplamento geométrico**

Para concluir, vamos apresentar o mecanismo de localização discutido nas refs. [69,71,89]. Esse mecanismo, foi proposto inicialmente para confinar o campo vetorial no modelo com brana tipo-delta RS-II. No entanto, posteriormente, foi observado que ele é valido para uma larga variedade de modelos de brana e para diferentes configurações dimensionais. Esse mecanismo propõe um acoplamento não-mínimo do campo vetorial $\mathcal{A}_M$ com a gravidade através do escalar e/ou tensor de Ricci. Esse tipo de interação surge naturalmente em teorias de Kaluza-Klein, quando consideramos $g_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu}(x)$, $g_{\mu 5} = A_\mu(x)$ e $g_{55} = 1$. Com isso, ao calcular o escalar de Ricci no *bulk* e mantendo termos até segunda ordem em A_μ, pode-se mostrar que um dos setores do escalar de Ricci é

$$R^{(v)} \sim -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\alpha}{2}\hat{R}A_\mu A^\mu + \frac{\beta}{2}\hat{R}_{\mu\nu}A^\mu A^\nu,$$

em que $\hat{R}$ e $\hat{R}_{\mu\nu}$ são o escalar e o tensor de Ricci, respectivamente, calculados com a métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$.

Agora, vamos considerar a seguinte ação para um campo vetorial[4] $\mathcal{A}_M$ no *bulk*,

$$S^{(m)} = -\int d^d x dy \sqrt{-g}\left[\frac{1}{4}\mathcal{F}_{MN}\mathcal{F}^{MN} - \frac{\lambda_1}{2}R\mathcal{A}_M\mathcal{A}^M - \frac{\lambda_2}{2}R_{MN}\mathcal{A}^M\mathcal{A}^N\right], \tag{3.43}$$

em que d é a dimensão da brana, R e R_{MN} são o escalar e o tensor de Ricci, respectivamente, calculados com a métrica (3.34). Seguindo os mesmos passos dos

[4]Aqui, o campo vetorial $\mathcal{A}_M$ não é uma componente da métrica g_{MN}. Apenas me referi ao caso de Kaluza-Klein para motivar esse tipo de interação.

casos anteriores, podemos mostrar que a equação de movimento para $\mathcal{A}_\mu^t$ é dada por

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\rho\left[\sqrt{-g}\mathcal{F}_t^{\rho\mu}\right]+\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_y\left[\sqrt{-g}g^{yy}g^{\rho\mu}\partial_y\mathcal{A}_\rho^t\right]+\lambda_1 R\mathcal{A}_t^\mu+\lambda_2 R^\mu{}_\rho\mathcal{A}_t^\rho=0. \quad (3.44)$$

Também aqui, não estamos nos preocupando com as equações de movimento para as componentes escalares $\mathcal{B}_j$. Além disso, para os próximos passos, consideraremos $B(y)=A(y)$ na métrica (3.34). Isso nos permite escrever R e $R_{\mu\nu}$ como

$$\begin{aligned} R_\rho^\mu(y) &= -\delta_\rho^\mu\left[A''(y)+(D-2)\,A'^2(y)\right]e^{-2A(y)}, \\ R(y) &= -(D-1)\big[2A''(y)+(D-2)\,A'^2(y)\big]\,e^{-2A(y)}. \end{aligned}$$

Mais uma vez, podemos propor a separação de variáveis $\mathcal{A}_\mu^t(x,y)=\sum_n\hat{A}_\mu^{t(n)}(x)\xi_n(y)$ e escrever uma equação para ξ_n, a saber,

$$-e^{-(d-2)A}\left[e^{(d-3)A}\xi_n'\right]'+\left[(2d\lambda_1+\lambda_2)A''+(d-1)(d\lambda_1+\lambda_2)A'^2\right]\xi_n=m_n^2\xi_n.$$

Essa equação irá determinar as funções ξ_n e com essas soluções poderemos estudar o confinamento. Considerando apenas o modo-zero ($m_n^2=0$) na equação acima, podemos propor o *ansatz*

$$\xi_0(y)=c_0\exp\left[aA(y)\right]. \quad (3.45)$$

Com isso, iremos obter a expressão

$$(a-2d\lambda_1-\lambda_2)A''+[a(d-3)+a^2-(d-1)(d\lambda_1+\lambda_2)]A'^2=0$$

Assim, para que tenhamos uma solução geral para qualquer $A(y)$, devemos requerer que os coeficientes nas derivadas sejam nulos independentemente, ou seja,

$$\begin{aligned} a &= 2d\lambda_1+\lambda_2, && (3.46) \\ a(d-3+a) &= [d\lambda_1+\lambda_2](d-1). && (3.47) \end{aligned}$$

Quanto ao confinamento, podemos retornar a ação (3.43) e, usando a métrica do modelo RS-II com $A(y)=B(y)=-\ln(1+k|y|)$, mostrar que a localização do modo-zero será obtida se $2a>-(d-4)$.

Como mencionamos acima, esse modelo foi proposto inicialmente com objetivo de confinar o campo vetorial no modelo RS-II [17]. No entanto, como pudemos observar da solução para o modo-zero, esta é uma função do fator de deformação $A(y)$. De fato, ao usar a *ansatz* $\xi_0(y)=c_0\exp[aA(y)]$ na equação de movimento para o modo-zero, obtivemos algo na forma

$$b_1 A'' + b_2 A'^2 = 0.$$

E a solução foi obtida exigindo-se que b_1 e b_2 fossem nulos, independente da forma de $A(y)$. Portanto, esse mecanismo possui uma validade bem geral, podendo ser aplicado para uma larga variedade de modelos de brana em codimensão 1. Vale enfatizar que a condição de localização $2a > -(d-4)$, pode ser modificada para outros modelos que não o RS-II [17].

d) **Mecanismo geral para codimensão arbitrária**

Geralmente, para a maioria dos modelos em codimensão 2 ou superior, não existe necessidade de adicionarmos mecanismos para confinar o campo vetorial [53]. Ainda assim, é possível encontrar alguns na literatura. Na ref. [34], os autores discutem o confinamento do campo vetorial em um modelo 6-dimensional, onde a 3-brana é gerada pela interseção de duas 4-branas tipo-delta. No entanto, vamos apresentar abaixo alguns resultados discutidos em uma publicação nossa [71]. Nesse artigo, generalizamos o mecanismo do caso (c) para um modelo de brana genérico como métrica na forma

$$ds^2 = e^{2A(y)} \left[\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \eta_{jk} dy^j dy^k \right], \tag{3.48}$$

em que $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e $\eta_{jk} = \delta_{jk}$ é a delta de Kronecker. Vejamos abaixo os principais pontos dessa discussão.

Para esse estudo, consideramos uma ação para o campo vetorial na mesma forma apresentada na equação (3.43), mas agora com um número qualquer de dimensões extras, ou seja,

$$S^{(m)} = -\int d^d x dy^{D-d} \sqrt{-g} \left[\frac{1}{4} \mathcal{F}_{MN} \mathcal{F}^{MN} - \frac{\lambda_1}{2} R \mathcal{A}_N \mathcal{A}^N - \frac{\lambda_2}{2} R_{MN} \mathcal{A}^M \mathcal{A}^N \right], \tag{3.49}$$

em que d é a dimensão da brana e $(D-d)$ é o número de dimensões extras. Assim como fizemos para o caso em 5 dimensões, podemos obter as equações de movimento, propor a separação de variáveis $\mathcal{A}^t_\mu(x,y) = \sum_n \hat{A}^{t(n)}_\mu(x) \xi_n(y)$ e escrever uma equação para ξ_n na forma

$$e^{-4A} m_n^2 \xi_n + e^{-dA} \bar{\nabla}_l \left[e^{(d-2)A} \bar{\nabla}^l \xi_n \right] + \lambda_1 R(y) e^{-2A} \xi_n + \lambda_2 F(y) e^{-4A} \xi_n = 0, \tag{3.50}$$

onde já usamos que $R^\mu_\rho = \delta^\mu_\rho F(y)$. De fato, usando a métrica (3.48), podemos mostrar que

$$R^{\mu}_{\rho}(y) = -\delta^{\mu}_{\rho}\left[\partial_l\partial^l A + (D-2)\,\partial_l A\partial^l A\right]e^{-2A}, \tag{3.51}$$

$$R(y) = -(D-1)\left[2\partial_l\partial^l A + (D-2)\,\partial_l A\partial^l A\right]e^{-2A(y)}. \tag{3.52}$$

E a equação para o modo-zero ξ_0 fica

$$e^{-(D-4)A}\partial_l\left[e^{(D-4)A}\partial^l\xi_0\right] - \left[2\lambda_1(D-1)+\lambda_2\right]\partial_l\partial^l A\xi_0 - (D-2)\left[\lambda_1(D-1)+\lambda_2\right]\partial_l A\partial^l A\xi_0 = 0. \tag{3.53}$$

Após algumas manipulações, podemos mostrar que a solução para o modo-zero é na forma geral $\xi_0(y) = c_0\exp[aA(y)]$, com as constantes a, λ_1 e λ_2 satisfazendo

$$a = 2\lambda_1(D-1)+\lambda_2, \tag{3.54}$$

$$a(D-4+a) = (D-2)[\lambda_1(D-1)+\lambda_2]. \tag{3.55}$$

Quanto ao confinamento, podemos voltar a ação (3.49), calcular a ação efetiva para o modo-zero $\hat{A}^{t(0)}_{\mu}(x)$ e mostrar que a integral nas dimensões extras com a solução ξ_0 é finita para

$$a > -\frac{d-4}{2}.$$

Com todos esses resultados, podemos discutir alguns casos particulares como, por exemplo, interação somente com o escalar de Ricci ($\lambda_2 = 0$), somente com o tensor de Ricci ($\lambda_1 = 0$), interação com o tensor de Einstein ($\lambda_2 = -2\lambda_1$) e o caso geral $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$. Não irei detalhar essa discussão aqui, mas ela pode ser encontrada em [71]. Há uma similaridade muito grande da discussão acima com aquela realizada no item (c) e isso não é coincidência. Na verdade, para definir os valores permitidos de a na última expressão acima, usamos a métrica apresentada em N. Arkani-Hamed *et.al.* [35], a saber,

$$A(y) = -\ln\left[1 + k\sum_j |y^j|\right].$$

Esse modelo generaliza a métrica de RS-II para um número arbitrário de dimensões extras.

Desta forma, concluímos esse capítulo apenas lembrando que toda a discussão apresentada acima considerou apenas o confinamento do modo-zero dos campos, isto é, os modos que são "vistos" na brana como campo sem massa. Há ainda toda uma discussão para os modos massivos que, diferente do modo-zero, depende mais fortemente de cada modelo de brana. Como pode ser verificado na literatura, os modos massivos não costumam ser confinados, mas, ainda assim, eles podem gerar alguns efeitos na brana. Por exemplo, para branas espessas em 5 dimensões podem ocorrer ressonâncias, o que poderia gerar um "acumulo" de modos massivos na região da brana e isso poderia permitir uma detecção desses modos. Agora, vamos ao ponto principal desta tese que é discutir a consistência e viabilidade do procedimento de localização que apresentamos em detalhes nesse capítulo. Quando falamos em *procedimento* aqui, estamos nos referindo ao argumento de que as integrais nas dimensões extras devem ser finitas, não aos mecanismos de localização que apresentamos. Isso deve ficar claro no próximo capítulo.

4 CONDIÇÕES DE CONSISTÊNCIA - EQUAÇÃO DE EINSTEIN

Como vimos, o confinamento dos campos de matéria (escalar, espinorial e vetorial) foi estudado usando-se a métrica como um *background*. Portanto, a contribuição do tensor energia-momento desses campos na definição da métrica é ignorada. Nesse capítulo, vamos discutir a consistência desse procedimento. Em outras palavras, queremos determinar sob quais condições podemos adicionar campos de matéria em um modelo de brana sem que a métrica mude sua forma, portanto, mantendo a gravidade confinada.

4.1 Discussão Geral

No capítulo (2), mostramos como as métricas dos modelos de brana são determinadas. Naquela discussão, partimos da ação $S^{(g)}$ e não consideramos outros campos senão aqueles que, de alguma forma, geram a brana. Por exemplo, nos modelos de brana espessa 5-dimensionais apresentados em [18, 19], a brana é gerada por campos escalares que dependem apenas das dimensões extras. Para modelos em 6D, como aqueles tipo-vórtex [30], a brana é gerada por um campo escalar e, também, um campo vetorial com ambos dependendo apenas das dimensões extras. Isso posto, passa-se ao estudo do confinamento dos campos do Modelo Padrão e, nesse contexto, a métrica é considerada apenas um *background*. Desta forma, as únicas equações de movimento levadas em conta são aquelas obtidas da ação $S^{(m)}$. A partir disso, é realizada a separação das variáveis (x^μ, y^j), fatora-se a ação $S^{(m)}$ na forma (3.2) e a teoria efetiva é dita ser bem definida (localizada) se as integrais nas dimensões extras forem finitas. De modo geral, esse é o procedimento corriqueiro nesse tipo de análise.

Agora, vamos considerar as equações de movimento obtidas da ação total $S = S^{(g)} + S^{(m)}$. Como isso, queremos testar a consistência do procedimento de localização com as equações de Einstein. Para isso, iremos assumir que as soluções obtidas, separadamente, de $S^{(g)}$ e de $S^{(m)}$ ainda são válidas. Assim, obteremos condições (restrições) que o sistema deve satisfazer para que as soluções, obtidas separadamente, sejam consistentes (compatíveis). Quando essas condições não podem ser satisfeitas, significa que os efeitos dos campos de matéria na métrica não podem ser ignorados e esta deve ser redefinida para levar em conta essa nova contribuição de energia. Note que não pretendemos definir uma nova métrica, apenas queremos verificar sob quais condições o procedimento de localização comumente usado literatura pode ser consistente.

Vamos iniciar essa discussão escrevendo a ação completa

$$S = S^{(g)} + S^{(m)} = \int \left[\frac{1}{2\kappa^2} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_b + \mathcal{L}_m \right] \sqrt{-g} d^D x. \tag{4.1}$$

A diferença da expressão acima para aquela apresentada no capítulo (2) é, evidentemente, a presença da lagrangiana de matéria $\mathcal{L}_m$. É claro que devemos esperar que a presença desse novo termo modifique a métrica encontrada anteriormente. No entanto, visto que os campos em $\mathcal{L}_m$ podem ser confinados, essa modificação pode ocorrer sem que a localização da gravidade seja perdida.

Fazendo a variação da ação (4.1) com relação à métrica obteremos a equação de Einstein

$$G_{MN} + g_{MN}\Lambda = \kappa^2 \left[T^b_{MN} + T^m_{MN} \right], \tag{4.2}$$

onde T^m_{MN} é o tensor energia-momento obtido da lagrangiana $\mathcal{L}_m$. Além da equação (4.2), há ainda aquelas obtidas para os campos presentes nas lagrangianas $\mathcal{L}_b$ e $\mathcal{L}_m$. No entanto, como elas não são necessárias para nossa discussão por enquanto não iremos escrevê-las.

Assim como fizemos no capítulo (2), vamos usar o seguinte *ansatz*,

$$ds^2 = g_{MN} dx^M dx^N = e^{2A(y)} \hat{g}_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu + \bar{g}_{kj}(y) dy^k dy^j. \tag{4.3}$$

Com a métrica nessa forma, as componentes do tensor de Einstein são iguais aquelas obtidas anteriormente usando as Eqs. (2.4)-(2.6), portanto, a equação (4.2) fica

$$\hat{G}_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \left[(d-1)\bar{\nabla}_k \bar{\nabla}^k A + \frac{d(d-1)}{2} \bar{\nabla}_k A \bar{\nabla}^k A - \frac{1}{2}\bar{R} + \Lambda \right] = \kappa^2 \left[T^b_{\mu\nu} + T^m_{\mu\nu} \right], \tag{4.4}$$

$$\bar{G}_{jk} + \bar{g}_{jk} \left[d\bar{\nabla}_l \bar{\nabla}^l A + \frac{d(d+1)}{2} \bar{\nabla}_l A \bar{\nabla}^l A - \frac{1}{2}\hat{R} e^{-2A} + \Lambda \right] - d e^{-A} \bar{\nabla}_j \bar{\nabla}_k e^A = \kappa^2 \left[T^b_{jk} + T^m_{jk} \right], \tag{4.5}$$

$$R_{j\mu} = 0 = \kappa^2 \left[T^b_{j\mu} + T^m_{j\mu} \right]. \tag{4.6}$$

A partir dessas equações, vamos então definir o que estou chamando de *condições de consistência*. Para deixar claro o regime de validade dessas condições, precisamos esclarecer alguns pontos importantes.

Como já mencionamos algumas vezes, ao estudar o confinamento dos campos usamos a métrica de vácuo, ou seja, aquela obtida pelo procedimento do capítulo (2). Portanto, essas métricas não levam em conta a contribuição do tensor energia-momento T^m_{MN}. Aqui, iremos propor o seguinte: vamos assumir que as métricas obtidas no capítulo (2) não mudam sua forma. Deste modo, as soluções para $A(y)$ e $\bar{g}_{jk}(y)$ não serão modificadas. No entanto, uma vez que os campos podem ser confinados, a métrica da brana deve ser modificada. Isso posto, vejamos então sob quais condições essa proposta pode ser consistente com as soluções obtidas para os campos de matéria no capítulo (3).

Ao impor que as soluções para $A(y)$ e $\bar{g}_{jk}(y)$ não mudam, devemos assumir que a equação (2.15), a saber,

$$2(d-1)\bar{\nabla}_k\bar{\nabla}^k A + d(d-1)\bar{\nabla}_k A\bar{\nabla}^k A - \bar{R} + 2\Lambda - 2\kappa^2\mathcal{L}^{(b)} = -2\alpha e^{-2A(y)}, \tag{4.7}$$

e a equação (2.16), que definem essas quantidades, são válidas. Usando a equação acima, podemos obter uma simplificação da equação (4.4) na forma,

$$\hat{G}_{\mu\nu}(x) + \hat{g}_{\mu\nu}(x)\alpha = \kappa^2 T^m_{\mu\nu}(x,y). \tag{4.8}$$

Dessa expressão, tiramos a primeira, e principal, condição (restrição). Como o lado esquerdo dessa equação não depende das coordenadas extras y^j, por consistência, o lado direito não deve depender. Portanto, obtemos uma restrição sobre as componentes (μ,ν) do tensor energia-momento dos campos de matéria que é dada por

$$\boxed{T^m_{\mu\nu}(x,y) = \hat{T}^m_{\mu\nu}(x).} \tag{4.9}$$

Agora veja que, no capítulo (2), tínhamos obtido na equação (2.14) que

$$\hat{G}_{\mu\nu}(x) + \hat{g}_{\mu\nu}(x)\alpha = 0,$$

o que nos permitiu obter $\hat{R}(x) \propto \alpha$. Agora, se contrairmos a equação (4.8) com $\hat{g}^{\mu\nu}(x)$, obtemos

$$\frac{d-2}{2}\hat{R}(x) - d\alpha = -\kappa^2\hat{g}^{\mu\nu}(x)\hat{T}^m_{\mu\nu}(x) = -\kappa^2\hat{T}^m(x).$$

Usando esse resultado e a equação (2.16) na equação (4.5), obteremos uma condição sobre as componentes (j,k) do tensor energia-momento dos campos de matéria que é dada por

$$\boxed{T^m_{jk}(x,y) = \frac{1}{d-2}\bar{g}_{jk}(y)e^{-2A(y)}\hat{T}^m(x).} \tag{4.10}$$

Assim, obtivemos duas condições que o tensor T^m_{MN} deve satisfazer para que o confinamento dos campos seja consistente com a hipótese de que a métrica não tem sua forma modificada pela presença desses novos campos. Abaixo, iremos aplicar essas *condições de consistência* aos modelos apresentados no capítulo (3). É importante ter em mente que esses resultados partem do pressuposto de que as soluções de vácuo para $A(y)$ e $\bar{g}_{jk}(y)$ não mudam. Assim, sua validade está restrita a essa configuração. Faremos algumas aplicações nas próximas seções.

4.2 Aplicação - Campo escalar real

No capítulo (3), nós apresentamos vários resultados encontrados na literatura sobre o confinamento dos campos do Modelo Padrão. Como vimos naquele capítulo, o campo escalar livre pode ser confinado para todos os modelos em que a gravidade é localizada. Agora vejamos se esse confinamento é consistente com as equações de Einstein.

A lagrangiana que usamos para um campo escalar livre sem massa (no *bulk*) é dada por

$$\mathcal{L}^m(x,y) = -\frac{1}{2}\partial_N\phi(x,y)\partial^N\phi(x,y). \tag{4.11}$$

A partir dessa lagrangiana, calculamos as equações de movimento, propusemos uma separação de variáveis na forma

$$\phi(x,y) = e^{-\frac{d}{2}A(y)}\sum_n \varphi^{(n)}(x)\xi_n(y)$$

e mostramos que, para o modo-zero, a solução confinante é dada por

$$\xi_{0,(1)}(y) = c_1 \exp\left[dA(y)/2\right].$$

Para testar a consistência, devemos calcular o tensor energia-momento a partir da lagrangiana (4.11) e verificar se as condições (4.9) e (4.10) podem ser satisfeitas.

Usando a definição do tensor energia-momento, a saber,

$$T_{MN} = -2\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{MN}} + g_{MN}\mathcal{L}, \tag{4.12}$$

podemos obter para o campo escalar o tensor

$$T^m_{MN}(x,y) = \partial_M\phi(x,y)\partial_N\phi(x,y) + g_{MN}\mathcal{L}^m(x,y). \tag{4.13}$$

Agora vamos separar as componentes desse tensor para o modo-zero, ou seja,

$$T^{m,0}_{\mu\nu}(x,y) = \partial_\mu\phi_0(x,y)\partial_\nu\phi_0(x,y) + g_{\mu\nu}\mathcal{L}^m_0(x,y), \tag{4.14}$$

$$T^{m,0}_{jk}(x,y) = \partial_j\phi_0(x,y)\partial_k\phi_0(x,y) + g_{jk}\mathcal{L}^m_0(x,y). \tag{4.15}$$

Observe que a solução para o modo-zero é dada por

$$\phi_0(x,y) = \varphi_0(x)\xi_0(y)e^{-dA(y)/2} = \varphi_0(x)c_1.$$

Portanto, já levando em conta a métrica na forma (4.3), as componentes (4.14) e (4.15) ficam

$$T^{m,0}_{\mu\nu}(x,y) = c_1^2\left[\partial_\mu\phi_0(x)\partial_\nu\phi_0(x) + \hat{g}_{\mu\nu}(x)\hat{L}_0^m(x)\right], \tag{4.16}$$

$$T^{m,0}_{jk}(x,y) = c_1^2\bar{g}_{jk}e^{-2A(y)}\hat{L}_0^m(x), \tag{4.17}$$

em que $2\hat{L}_0^m(x) = -\hat{g}^{\mu\nu}(x)\partial_\mu\phi_0(x)\partial_\nu\phi_0(x)$. Assim, concluímos de imediato que a condição de consistência (4.9) é satisfeita. Quanto a condição (4.10), temos que calcular o traço das componentes $T^{m,0}_{\mu\nu}$. Fazendo isso, obteremos

$$\hat{g}^{\mu\nu}(x)T^{m,0}_{\mu\nu}(x) = T^{m,0}(x) = c_1^2(d-2)\hat{L}_0^m(x) \to c_1^2\hat{L}_0^m(x) = \frac{1}{(d-2)}\hat{T}^{m,0}(x). \tag{4.18}$$

Logo, usando a relação (4.16) e comparando as equações (4.15) e (4.10), concluímos que o confinamento do campo escalar (modo-zero) é consistente com as equações de Einstein.

Essa consistência implica que podemos confinar um campo escalar nos modelos de brana e o modo-zero deste campo não irá modificar a forma da métrica, isto é, não irá alterar as soluções de $A(y)$ e $\bar{g}_{jk}(y)$. Note que não foi necessário definir ou especificar um modelo de brana para que as condições fossem discutidas, portanto, os resultados obtidos para o campo escalar (modo-zero) são válidos para qualquer mundo-brana e com qualquer número de dimensões. Antes de concluir, façamos um breve comentário sobre os modos massivos.

Vimos no capítulo (3) o problema da localização dos campos em mundos-brana, mais precisamente o confinamento dos modos não massivos (modos-zero). Como mencionamos naquele capítulo, nos restringimos a esses modos porque queríamos discutir, de forma geral, a consistência do procedimento de localização. Além disso, as soluções $\xi_n(y)$ para os modos massivos são mais sensíveis às definições do fator de deformação $A(y)$ e das componentes $\bar{g}_{jk}(y)$. No entanto, agora, acredito que seja instrutivo discutir esses casos pelo menos para um modelo de brana especifico. Desta forma, poderemos apresentar, mesmo que brevemente, alguns pontos interessantes desses modos.

Para isso, iremos usar o modelo de brana espessa 5-dimensional [18]. Nesse modelo, a métrica é definida pela equação (2.56), a saber,

$$ds^2 = \mathrm{sech}^{2b}(ay)\,\hat{g}_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu + dy^2.$$

Como vimos no capítulo (3), após realizar a separação de variáveis na equação (3.5), obtivemos a equação (3.7) para as funções $\xi_n(y)$. Usando a métrica acima, aquela equação fica

$$-\xi_n''(y) + 4a^2b\left[b - (1+b)\mathrm{sech}^2(ay)\right]\xi_n(y) = m_n^2\cosh^{2b}(ay)\xi_n(y).$$

Devido algumas dificuldades em obter uma solução para a equação acima que seja válida para qualquer b, nos limitamos ao caso de $b = 1$. Nessas condições, uma das soluções encontradas é a função confluente de Heun, a saber,

$$\xi_n(y) = c_n \text{sech}^2(ay)\text{HeunC}\left[0, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{m_n^2}{4a^2}, \frac{7}{8}, \cosh^2(ay)\right].$$

Antes de mais nada, independente dessa função ser ou não confinada, note que ela não pode satisfazer as condições de consistência. Usando a equação (4.13) podemos escrever para cada modo massivo,

$$T_{\mu\nu}^{m,(n)}(x,y) = e^{-2A}\xi_n^2(y)\left[\partial_\mu\varphi^{(n)}(x)\partial_\nu\varphi^{(n)}(x) + \hat{g}_{\mu\nu}\mathcal{L}^{m,(n)}(x)\right],$$

onde usamos o *ansatz* apresentado depois da Eq. (4.11) para o campo escalar com $d = 4$. Desta forma, para satisfazer a condição (4.9), devemos ter

$$e^{-2A}\xi_n^2(y) = constante$$

e única forma de conseguir isso é se $m_n^2 = 0$, porque, nesse caso, teremos

$$\text{HeunC}\left[0, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{7}{8}, \cosh^2(ay)\right] = 1$$

e o resultado (3.8), com $b = 1$ e $d = 4$, é recuperado. Para qualquer outro valor de massa, não é possível satisfazer a equação (4.9) e, consequentemente, os modos massivos devem modificar a métrica.

No contexto do confinamento, esses modos também apresentam problemas, visto que as soluções apresentadas acima não são normalizáveis e, portanto, não podem ser localizados. Na verdade, costuma-se analisar outras questões como, por exemplo, possíveis ressonâncias desses modos entre as paredes de branas espessas. Isso poderia gerar picos de probabilidade na região da brana que, em tese, poderiam ser verificados experimentalmente. No entanto, esses cálculos envolvem análises numéricas que estão fora do escopo desta tese [90–92]. Acredito que os resultados acima ilustram bem os problemas dos modos massivos. Conclusões similares são obtidas para outros mundos-brana e, também, para outros campos. Em razão disso, não realizaremos essa discussão nas próximas seções para os campos espinorial e vetorial.

4.3 Aplicação - Campo espinorial

Mencionamos antes que o caráter matricial da equação de Dirac e sua dependência com o número de dimensões do espaço-tempo pode tornar complicada a discussão da localização. Assim, nos limitamos ao estudo do confinamento do campo espinorial em 5 dimensões. Nessa configuração dimensional, a métrica foi escrita na forma

$$ds^2 = e^{2A(y)}\hat{g}_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu + e^{2B(y)}dy^2. \tag{4.19}$$

Vamos aplicar as condições de consistência (4.9) e (4.10) nesse cenário. Para 5D, podemos escrevê-las como

$$T^m_{\mu\nu}(x,y) = \hat{T}^m_{\mu\nu}(x), \quad \text{e} \quad T^m_{jk}(x,y) = \frac{1}{2}e^{2(B-A)}\hat{T}^m(x). \tag{4.20}$$

Discutimos no capítulo (3) o confinamento do campo espinorial partindo de uma lagrangiana na forma

$$\mathcal{L}^m(x,y) = -i\bar{\Psi}\Gamma^M D_M\Psi - \lambda f(y)\bar{\Psi}\Psi. \tag{4.21}$$

Com $f(y)$ uma função escalar a ser definida adequadamente (convenientemente) para alcançar o confinamento. A partir dessa lagrangiana, podemos calcular o tensor energia-momento

$$T^m_{MN}(x,y) = i\bar{\Psi}(x,y)\Gamma_{(M}D_{N)}\Psi(x,y) + g_{MN}\mathcal{L}^m(x,y). \tag{4.22}$$

No estudo realizado no capítulo (3), usamos um *ansatz* para o modo-zero espinorial dada pela equação

$$\Psi(x,y) = \sum_n \Psi_n(x,y) = \sum_n \left[\psi^+_{(n)}(x)\xi^+_n(y) + \psi^-_{(n)}(x)\xi^-_n(y)\right]. \tag{4.23}$$

Como mostramos, as soluções do modo-zero para as funções $\xi^\pm_0(y)$ são dadas por

$$\xi^\pm_0(y) \;\; = \;\; c_\pm \exp\left[\pm\lambda\int_y dz e^{B(z)}f(z) - 2A(y)\right]. \tag{4.24}$$

No capítulo anterior, argumentamos que apenas uma dessas soluções pode ser confinada com uma escolha adequada da função $f(y)$. Agora, vejamos como ficam as condições de consistência para esse modo-zero.

Separando a equação (4.22) em componentes e levando em conta apenas o modo-zero, temos

$$T^{m,0,\pm}_{\mu\nu}(x,y) \;\; = \;\; e^{A(y)}(\xi^\pm_0)^2\left[i\bar{\psi}^\pm_0(x)\hat{\Gamma}_{(\mu}\hat{D}_{\nu)}\psi^\pm_0(x) + \hat{g}_{\mu\nu}\hat{L}^{m,\pm}_0(x)\right], \tag{4.25}$$

$$T^{m,0,\pm}_{yy}(x,y) \;\; = \;\; e^{2B(y)-A(y)}(\xi^\pm_0)^2\hat{L}^{m,\pm}_0(x), \tag{4.26}$$

onde já usamos as definições do capítulo (3) para as matrizes gamma e as expressões acima são válidas apenas para a quiralidade confinada (a não localizada é feita igual a zero). Além disso,

$$\hat{L}^{m,\pm}(x) = -i\bar{\psi}_0^{\pm}(x)\hat{\Gamma}^{\rho}\hat{D}_{\rho}\psi_0^{\pm}(x). \tag{4.27}$$

Da expressão (4.25), obtemos que a condição de consistência (4.9) é satisfeita se

$$e^{A(y)}\xi_0^{\pm}(y)^2 = \text{constante}.$$

Após algumas manipulações, podemos mostrar que se a condição acima é satisfeita, a segunda condição de consistência dada na equação (4.10) também é. Usando as soluções (4.24), a condição acima é equivalente a seguinte relação,

$$\pm 2\lambda \int_y dz e^{B(z)} f(z) - 3A(y) = \text{constante}. \tag{4.28}$$

Portanto, a consistência com a equação de Einstein impõe uma forma muito específica à função $f(y)$. Se desejamos confinar a solução ξ_0^{+}, a função escalar deve ser

$$f(y) = +\frac{3}{2\lambda}e^{-B(y)}\frac{dA(y)}{dy}.$$

Para confinar a solução ξ_0^{-}, a função escalar é a mesma, mas com o sinal trocado $(+ \to -)$. Aqui, já fica claro que, sem o acoplamento $(\lambda = 0)$, as condições de consistência não podem ser satisfeitas para qualquer y. Observe que a condição de consistência, assim como a integral na dimensão extra, exclui uma das quiralidades.

Com isso, podemos analizar alguns mecanismos de localização apresentados na literatura para o campo espinorial. A referência [42], por exemplo, propõe $f(y)$ igual a 'função' sinal, isto é,

$$f_{[Bajc]}(y) \propto \text{sgn}(y),$$

para confinar o campo espinorial no modelo RS-II[17]. Como nesse mundo-brana, $B(y) = 0$ e $A(y) = -k|y|$, a derivada de $A(y)$ dá exatamente a função sinal e, portanto, essa proposta é consistente com a equação de Einstein. Já os mecanismos apresentados nas refs. [19,48,50,70], para confinar o spinor em modelos de brana espessa, não obedecem aos requisitos apresentados acima, desta forma, acreditamos que estes trabalhos devem ser revistos. Vale comentar que para modelos de brana espessa em 5D, o superpotencial $\mathcal{W}(\Phi)$ é proporcional a derivada do fator de deformação $A(y)$ [93]. Portanto, nesses modelos, podemos escrever $f(z) \propto e^{-B(z)}\mathcal{W}(\Phi)$, o que leva à $\mathcal{L}_{[int]} \propto e^{-B(z)}\mathcal{W}(\Phi)\bar{\Psi}\Psi$. Há na literatura toda uma discussão sobre o papel do superpotencial em teorias supersimétricas [94], no entanto, não iremos aprofundar essa discussão aqui. Com isso, encerramos essa seção e passamos agora ao estudo do campo vetorial.

4.4 Aplicação - Campo vetorial abeliano

Vejamos agora a aplicação das condições de consistência ao caso do campo vetorial abeliano. Essa discussão já foi realizada antes para o modelo de brana RS-II [72]. Recentemente, em dois artigos que publicamos, generalizamos essa discussão para um número arbitrário de dimensões extras e exploramos alguns caso com interação [73, 74]. Abaixo, apresentamos alguns dos principais resultados obtidos nesses artigos. Aqui, novamente, não há necessidade de restrição do número de dimensões extras, portanto, iremos usar a métrica geral (4.3).

4.4.1 Campo vetorial livre

Começaremos essa discussão com o caso do campo vetorial livre. No capítulo (3), estudamos o confinamento deste campo partindo de uma ação com a lagrangiana

$$\mathcal{L}^m(x,y) = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{MN}\mathcal{F}^{MN}. \tag{4.29}$$

Com isso, mostramos que é possível obter uma teoria efetiva na brana para um campo de gauge $\mathcal{A}^t_\mu$. Para isso, propusemos a decomposição $\mathcal{A}_M = \left(\mathcal{A}^t_\mu + \partial_\mu\theta, \mathcal{B}_j\right)$, separamos uma lagrangiana para as componentes $\mathcal{A}^t_\mu$ e calculamos as equações de movimento para este campo. Depois, usando o *ansatz*

$$\mathcal{A}^t_\mu(x,y) = \sum_n \hat{A}^{t(n)}_\mu(x)\xi_n(y),$$

mostramos que existe uma solução para o modo-zero válida para qualquer modelo de brana e dada por $\xi_{0(1)}(y) = c_0$. Então, comentamos sobre os modelos de brana em que o confinamento pode ser alcançado. Agora, vamos usar essa mesma configuração de campo para testar a consistência desse confinamento.

A exemplo dos casos anteriores, vamos calcular o tensor energia-momento para a lagrangiana (4.29). Fazendo isso, obteremos

$$T^m_{MN}(x,y) = \mathcal{F}_{MP}(x,y)\mathcal{F}_N{}^P(x,y) + g_{MN}\mathcal{L}^m(x,y). \tag{4.30}$$

Usando a configuração de campo mencionada acima e considerando apenas a contribuição do modo-zero, podemos escrever as componentes (μ,ν) como

$$T^m_{\mu\nu}(x,y) = e^{-2A(y)}\xi_0^2(y)\left[\hat{F}^t_{\mu\rho}(x)\hat{F}^t_\nu{}^\rho(x) + \hat{g}_{\mu\nu}(x)\hat{L}^m_0(x)\right]. \tag{4.31}$$

Com isso, vemos que a condição de consistência (4.9) será satisfeita apenas quando

$$e^{-2A(y)}\xi_0^2(y) = constante.$$

Visto que, para alguns modelos, a única solução que permite o confinamento é a constante $\xi_{0(1)}(y) = c_0$, concluímos que a condição de consistência requerida não pode ser satisfeita. Além disso, esse resultado independe do número de dimensões extras ou do modelo de brana considerado. Quanto a segunda condição de consistência, (4.10), não há necessidade de testá-la, uma vez que a condição acima já não pode ser satisfeita.

Esse resultado põe em *xeque* uma variedade de modelos, especialmente em 6 dimensões, os quais afirmam que o campo vetorial é confinado usando apenas o acoplamento mínimo com gravidade [53,57,58,86]. Para esses modelos, a integral nas dimensões extras é finita, mas, como acabamos de mostrar, a solução obtida para $\xi_{0(1)}(y)$ não é compatível com a equação de Einstein. Esse resultado sugere, portanto, que os efeitos do campo vetorial livre sobre a métrica não podem ser ignorados. Aqui, temos duas formas de tratar esse problema, modificar a métrica ou propor algum mecanismo de localização para o campo vetorial. Vamos optar pela segunda opção por dois motivos: primeiro, porque é mais fácil; segundo, porque, como vimos no estudo da localização, o campo vetorial livre não pode ser confinado para uma variedade de modelos e, para que isso seja alcançado, recorre-se a mecanismos de localização.

4.4.2 Campo vetorial com interação

Como acabamos de verificar, o confinamento do campo vetorial livre, com a solução $\xi_0(y) = c_0$, não pode ser consistente com a equação de Einstein. Assim, vejamos agora alguns casos em que um mecanismo de localização é usado para confinar o campo vetorial. Mais uma vez, é conveniente separarmos essa discussão para os casos com apenas uma dimensão extra, em que a métrica é na forma

$$ds^2 = e^{2A(y)}\hat{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + e^{2B(y)}dy^2, \tag{4.32}$$

e o caso geral com número arbitrário de dimensões extras. Desta forma, conseguiremos abordar uma variedade de modelos de brana e tornar a discussão mais didática.

a) **Acoplamento com campo escalar**

Como já discutimos, um mecanismo muito comum usado em modelos de brana espessa com apenas uma dimensão extra é aquele em que o campo vetorial é acoplado a uma função escalar por meio do *field strengh* [19,66,67,80,87,88]. Nesses modelos, a lagrangiana é na forma

$$\mathcal{L}^m = -\frac{1}{4}\mathcal{H}(y)\mathcal{F}_{MN}\mathcal{F}^{MN}. \tag{4.33}$$

Como mostramos antes, a função $\mathcal{H}(y)$ é escolhida convenientemente de modo que o confinamento seja possível. Visto que já discutimos a questão do confinamento, vamos direto a análise da consistência. Para isso, usaremos a mesma configuração de campo usada na subseção (3.4.2) quando estudamos o confinamento do campo vetorial com esse mecanismo.

A partir da lagrangiana (4.33), podemos obter o tensor energia-momento

$$T^m_{MN} = \mathcal{H}(y)\left[\mathcal{F}_{MP}\mathcal{F}_N{}^P - \frac{1}{4}g_{MN}\mathcal{F}_{PQ}\mathcal{F}^{PQ}\right], \tag{4.34}$$

onde consideramos que não há fatores de métrica na função $\mathcal{H}(y)$. Mais uma vez, vamos nos limitar ao caso do modo-zero e, portanto, as componentes (μ, ν) do tensor acima ficam

$$T^{m,0}_{\mu\nu}(x,y) = e^{-2A(y)}\mathcal{H}(y)\xi_0^2(y)\left[\hat{F}^{t(0)}_{\mu\rho}(x)\hat{F}^{t(0)\rho}_{\nu}(x) - \frac{1}{4}\hat{g}_{\mu\nu}(x)\hat{F}^{t(0)}_{\rho\lambda}(x)\hat{F}^{\rho\lambda}_{t(0)}(x)\right]. \tag{4.35}$$

Dessa expressão, a condição de consistência (4.9) será satisfeita apenas se

$$e^{-2A(y)}\mathcal{H}(y)\xi_0^2(y) = constante.$$

Como vimos no capítulo (3), o confinamento do modo-zero neste modelo é realizado usando também a solução constante $\xi_{0(1)}(y) = c_0$. Portanto, eliminamos qualquer arbitrariedade na escolha da função $\mathcal{H}(y)$ e, pela relação acima, ela deve ser na forma

$$\mathcal{H}_{[Consist]}(y) \propto e^{2A(y)}.$$

Essa forma da função escalar restringe consideravelmente os modelos que são consistentes com esse tipo de acoplamento. Quanto a condição (4.10), após algumas manipulações, podemos mostrar que ela também é satisfeita. Vejamos alguns exemplos abaixo.

Na referência [19], os autores definem $\mathcal{H}_{[Kehagias]}(y) = e^{\frac{\lambda}{2}A(y)}$ e, pelo argumento de integral finita, encontram uma faixa de valores de λ que permite o confinamento, a saber, $\lambda > -1/2$. Comparando essa função com nosso resultado, $\mathcal{H}_{[Consist]}(y)$, concluímos que o parâmetro λ possui um valor bem definido e dado por $\lambda = 4$. Esse valor está na faixa permitida pelo argumento de integral finita. Outro exemplo é o modelo [80], onde se usa $\mathcal{H}_{[Fu]}(y) = e^{\lambda\sqrt{r}A(y)}$, e a localização é alcançada para

$\lambda \geq -\sqrt{r}$, com $0 < r < 1$. Comparando essa função com nosso resultado, obtemos $\lambda = \frac{2}{\sqrt{r}}$, o que também está entre os valores permitidos. Portanto, os dois modelos acima podem ser consistentes com a equação de Einstein se fixamos os parâmetros nos valores indicados.

Outro exemplo bem interessante, é o apresentado na ref. [87], onde a função escalar é definida como $\mathcal{H}_{[Chumbes]}(y) = \mathcal{H}(\phi) \propto \frac{\partial W^{2s}(\phi)}{\partial \phi}$. Como discutimos no capítulo (3), os autores mostram que este mecanismo funciona para o modelo discutido na ref. [18], onde a função escalar assume a forma $\mathcal{H}^{Gremm}_{[Chumbes]}(y) = \operatorname{sech}^{2s}(cy)$. E também para o modelo apresentado na referência [19], onde $\mathcal{H}^{Kehagias}_{[Chumbes]}(y) = \operatorname{sech}^{4s}(cy)$. Se comparamos esses dois resultados com nossa condição de consistência, a saber, $\mathcal{H}_{[Consist]}(y) \propto e^{2A(y)}$, concluímos que apenas o primeiro caso, $\mathcal{H}^{Gremm}_{[Chumbes]}(y)$, pode ser consistente, pois o fator de deformação é $e^{2A(y)} = \operatorname{sech}^{2b}(cy)$. Para o modelo [19], o fator de deformação é dado por $e^{2A(y)} = \operatorname{sech}^{4b}(cy)\, e^{-b\tanh^2(cy)}$, portanto, $\mathcal{H}^{Kehagias}_{[Chumbes]}(y) \neq e^{2A(y)}$ e isso não é compatível com nossa condição de consistência. Resultados similares a este último são obtidos para outros modelos de brana espessa, como em [80]. Esta conclusão indica que a proposta $\mathcal{H}_{[Chumbes]}(y) = \mathcal{H}(\phi) \propto \frac{\partial W^{2s}(\phi)}{\partial \phi}$ não tem uma validade geral, como afirmado pelos autores. Apesar de permitir o confinamento para uma variedade de mundos-brana.

Note a importância do teste de consistência. Ele nos permitiu obter alguns resultados (condições) que o argumento de integral finita não evidência. Por exemplo, para os modelos [19, 80] alguns parâmetros antes "livres" são fixados pelas condições de consistência. Já para o caso [87], a aparente validade geral do mecanismo, pretendida pelos autores, não se confirma quando fazemos o teste de consistência.

b) **Mecanismo de localização GN**

Agora, vejamos o mecanismo não-covariante proposto por K. Ghoroku e A. Nakamura (GN) na ref. [68] e que discutimos no capítulo anterior. A lagrangiana para o campo vetorial com esse mecanismo GN é escrita na forma

$$\mathcal{L}^m = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{MN}\mathcal{F}^{MN} - \frac{1}{2}\left[M^2 + \lambda\delta(y)\right]\mathcal{A}_M\mathcal{A}^M. \tag{4.36}$$

Como discutimos naquele capítulo, é possível obter um campo vetorial com simetria de gauge abeliana $\mathcal{A}^t_\mu$. Ao propor a separação de variáveis $\mathcal{A}^t_\mu = \sum_n \hat{A}^{t(n)}_\mu(x)\xi_n(y)$, mostramos que a solução de modo-zero é dada por

$$\xi_0(y) = c_0 \exp\left[-\frac{\lambda}{2k}A(y)\right], \tag{4.37}$$

onde $\lambda = 2\left(k - \sqrt{k^2 + M^2}\right)$ e a localização é obtida para $\lambda < 0$. Vejamos se este mecanismo pode ser consistente.

A partir da lagrangiana (4.36), podemos obter o tensor energia-momento e as componentes (μ, ν) para o modo-zero ficam na forma

$$T^{m,(0)}_{\mu\nu}(x,y) = e^{-2A(y)}\xi_0^2(y)\left[\hat{F}^{t(0)}_{\mu\rho}(x)\hat{F}^{t(0)\rho}_{\nu}(x) - \frac{1}{4}\hat{g}_{\mu\nu}(x)\hat{F}^{t(0)}_{\rho\lambda}(x)\hat{F}^{\rho\lambda}_{t(0)}(x)\right]. \quad (4.38)$$

Mais uma vez, para que a condição de consistência (4.9) seja satisfeita, devemos ter

$$e^{-2A(y)}\xi_0^2(y) = constante.$$

Usando a solução (4.37), fixamos os dois parâmetros do modelo, $\lambda = -2k$ e $|M| = \sqrt{3}|k|$, e estes passam a depender apenas de k que é relacionado com a constante gravitacional no *bulk*. Também aqui, após algumas manipulações, podemos mostrar que a condição (4.10) é satisfeita. Portanto, esse modelo também é consistente com as equações de Einstein e, assim como nos casos anteriores, os parâmetros "livres" são fixados pelas condições de consistência.

c) **Acoplamento geométrico**

Para concluir essa discussão sobre a consistência, vejamos agora o mecanismo de localização proposto nas referências [69, 71, 89]. No capítulo anterior discutimos o confinamento partindo de uma lagrangiana na forma

$$\mathcal{L}^m = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{MN}\mathcal{F}^{MN} + \frac{\lambda_1}{2}R\mathcal{A}_M\mathcal{A}^M + \frac{\lambda_2}{2}R_{MN}\mathcal{A}^M\mathcal{A}^N, \quad (4.39)$$

em que R e R_{MN} são o escalar e o tensor de Ricci, respectivamente. Como mostramos no capítulo (3), podemos obter um campo vetorial com simetria de gauge confinado na brana, em que a solução para o modo-zero é na forma

$$\xi_0(y) = c_0 \exp\left[aA(y)\right]. \quad (4.40)$$

Além disso, para que essa solução exista, as equações (3.46) e (3.47) devem ser satisfeitas. Antes de passarmos ao teste de consistência, façamos um breve comentário sobre o tensor energia-momento desse modelo.

Dada a lagrangiana (4.39), o tensor energia-momento terá termos com acoplamentos na forma $R\mathcal{A}_M\mathcal{A}^M$ e $R_{MN}\mathcal{A}^M\mathcal{A}^N$. Visto que os objetos R e R_{MN} são da ordem de $(\mathcal{A}_N)^2$, pela equação de Einstein, os termos de interação são de quarta ordem em $\mathcal{A}_N$. Em razão disso, iremos simplesmente descartar esses termos de ordem superior à $(\mathcal{A}_N)^2$.

Nessa configuração de campo e considerando apenas o modo-zero, as componentes (μ,ν) do tensor energia-momento para o campo $\mathcal{A}_{\mu}^{t(0)}$ ficam

$$T_{\mu\nu}^{m,0}(x,y) \sim e^{-2A(y)}\xi_0^2(y)\left[\hat{F}_{\mu\rho}^{t(0)}(x)\hat{F}_{\nu}^{t(0)\rho}(x) - \frac{1}{4}\hat{g}_{\mu\nu}(x)\hat{F}_{\rho\lambda}^{t(0)}(x)\hat{F}_{t(0)}^{\rho\lambda}(x)\right]. \quad (4.41)$$

Portanto, usando a solução de modo-zero (4.40), a consistência requer que $a = 1$. Também para este caso, essa condição implica na fixação de parâmetros. Veja que se usamos $a = 1$ nas equações para os parâmetros λ_1 e λ_2, podemos mostrar que

$$\lambda_2 = \frac{D-4}{D-2} \quad \text{e} \quad \lambda_1 = \frac{1}{(D-2)(D-1)}. \quad (4.42)$$

Assim, o mecanismo apresentado acima pode ser feito de forma consistente com a equação de Einstein. No entanto, vale reforçar que isso só acontece se os dois parâmetros são não nulos. Se consideramos, por exemplo, o caso em que somente a interação com o escalar de Ricci está presente, isso quer dizer que $\lambda_2 = 0$. Nesse caso, podemos verificar facilmente, usando as relações entre os parâmetros em (3.45) e (3.46), que a condição de consistência $a = 1$ não pode ser obtida. O mesmo vale se mantivermos apenas a interação com o tensor de Ricci ($\lambda_1 = 0$).

d) **Mecanismo geral para codimensão arbitrária**

Quando discutimos o confinamento do campo vetorial no capítulo (3) usando o acoplamento geométrico, vimos que as soluções obtidas para o modo-zero, tanto no caso de codimensão 1 como no caso de codimensão arbitrária, são muito similares. Na verdade, a discussão que realizamos acima no item (c), não faz nenhuma menção ao número de dimensões extras e, portanto, também se aplica a este caso de codimensão arbitrária. Desta forma, não há necessidade de repetirmos essa discussão aqui.

Como pudemos notar, as condições de consistência podem ser usadas não somente como um teste de viabilidade do modelo, mas também como fonte de informação sobre os parâmetros do sistema ou até determinar a forma das interações, o que outros meios não fornecem. Com isso concluímos esse capítulo sobre a consistência. Passemos agora a outra discussão interessante nesse contexto de localização de campo em mundos-brana.

5 CONFINAMENTO POR SIMETRIA

Os três capítulos anteriores trataram da localização de alguns campos do Modelo Padrão, a saber, os campos escalar, espinorial e vetorial abeliano, e sua consistência com a equação de Einstein. Agora, iremos mudar um pouco a perspectiva e introduzir uma discussão sobre o confinamento de campos através de simetrias. Na verdade, queremos explorar um contexto específico em que uma simetria pode ser usada para deduzir a localização de campos. Para essa discussão, vamos considerar apenas campos bosônicos.

Como sabemos, em 4 dimensões e *on-shell*, o campo escalar é equivalente ao campo de Kalb-Ramond e o campo vetorial abeliano livre é auto-dual [95, 96]. Essa equivalência é uma consequência da simetria de dualidade Hodge (DH), que relaciona uma p-forma a uma $(D-p)$-forma em um espaço D-dimensional. Isso posto, uma pergunta natural a se fazer é, uma vez que uma p-forma é confinada em determinado mundo-brana, podemos afirmar que seu dual também é localizado? Um estudo nesse sentido já foi realizado na referência [72], para mundos-brana em codimensão 1 com métrica tipo RS-II [17]. Em um artigo que publicamos recentemente [74], fizemos uma generalização desse estudo para modelos em codimensão 2 e obtivemos alguns resultados bastante interessantes que apresentaremos a seguir.

5.1 Dualidade Hodge em Mundos-Brana

Vamos iniciar discutindo a dualidade Hodge em cenários de brana e suas consequências para o confinamento dos campos. Para isso, escreveremos a lagrangiana de um campo p-forma livre $\mathcal{A}_{[p]}$ na seguinte forma,

$$\mathcal{L}^{(p)} = -\frac{1}{2(p+1)!}\mathcal{F}_{M_1\ldots M_{p+1}}\mathcal{F}^{M_1\ldots M_{p+1}}, \tag{5.1}$$

onde $\mathcal{F}_{M_1\ldots M_{p+1}} = (p+1)\partial_{[M_1}\mathcal{A}_{M_2\ldots M_{p+1}]}$ são as componentes do *field strength* $\mathcal{F}_{[p+1]} = \mathbf{d}\mathcal{A}_{[p]}$. A lagrangiana (5.1) é invariante pela transformação de *gauge*

$$\mathcal{A}'_{[p]} = \mathcal{A}_{[p]} + \mathbf{d}\theta_{[p-1]}, \tag{5.2}$$

em que $\theta_{[p-1]}$ é uma $(p-1)$-forma. Devido à simetria acima, nem todas as componentes da p-forma são independentes. Na verdade, podemos mostrar que para uma p-forma não massiva e após a fixação completa dos *gauges*, o campo $\mathcal{A}_{[p]}$ tem

$$_{D-2}C_p \equiv \frac{(D-2)!}{p!(D-2-p)!}$$

graus de liberdade. Por exemplo, em 4 dimensões, uma 0-forma (campo escalar) e uma 2-forma (campo de Kalb-Ramond) têm ${}_2C_0 = {}_2C_2 = 1$ grau de liberdade. É nesse sentido que dizemos que esses campos são equivalentes, pois eles contém, *on-shell*, o mesmo conteúdo físico.

Como mencionamos acima, a dualidade Hodge (DH) relaciona uma q-forma e uma $(D-q)$-forma. Para mostrar isso, escrevemos a transformação de dualidade Hodge

$$(\star\mathcal{F})^{M_1...M_{D-(p+1)}} = -\frac{(-1)^{(p+1)(D-p-1)}}{(p+1)!\sqrt{-g}}\varepsilon^{M_1...M_{D-p-1}N_1...N_{p+1}}\mathcal{F}_{N_1...N_{p+1}}, \tag{5.3}$$

onde $(\star\mathcal{F})_{M_1...M_{D-(p+1)}}$ são as componentes de $(\star\mathcal{F})_{[D-(p+1)]} \equiv \mathbf{d}\mathcal{B}_{[D-p-2]}$ e $\varepsilon^{N_1...N_D}$ é o símbolo de Levi-Civita D-dimensional. Observação, o campo $\mathcal{B}_{[D-p-2]}$ não possui nenhuma relação com as componentes $\mathcal{B}_j$ que usamos nos capítulos anteriores. Aqui, ambos os campos $\mathcal{A}_{[p]}$ e $\mathcal{B}_{[D-p-2]}$ são formas diferenciais definidas no espaço D dimensional. Quanto a simetria, não é difícil mostrar, usando a transformação (5.3) e as propriedades do símbolo de Levi-Civita, que

$$\frac{1}{2(p+1)!}\mathcal{F}_{N_1..N_{p+1}}\mathcal{F}^{N_1..N_{p+1}} = \frac{1}{2(D-p-1)!}(\star\mathcal{F})^{N_1..N_{D-(p+1)}}(\star\mathcal{F})_{N_1..N_{D-(p+1)}}, \tag{5.4}$$

o que demonstra a simetria. Agora veja, os graus de liberdade estão contidos nos campos $\mathcal{A}_{[p]}$ e $\mathcal{B}_{[D-p-2]}$. E como discutimos acima, uma q-forma tem, *on-shell*, ${}_{D-2}C_q$ graus de liberdade. Aplicando isso aos campos acimas, obteremos que $\mathcal{A}_{[p]}$ tem ${}_{D-2}C_p$ e $\mathcal{B}_{[D-p-2]}$ tem ${}_{D-2}C_{D-p-2}$ componentes independetes, isto é, após todos os *gauges* fixados. Usando a definição de ${}_{D-2}C_q$ dada acima, é fácil mostrar a identidade ${}_{D-2}C_p = {}_{D-2}C_{D-p-2}$. Assim, ambos os campos possuem o mesmo número de graus de liberdade sendo, portanto, campos equivalentes como a equação (5.4) indica [97]. Para firmar a denominação, mesmo que a transformação de dualidade Hodge seja aplicada aos *fields strength*, são os campos $\mathcal{A}_{[p]}$ e $\mathcal{B}_{[D-p-2]}$ que contêm os graus de liberdade e, portanto, chamaremos esses campos de duais.

O desenvolvimento que apresentamos acima tem algumas consequências importantes, e interessantes, para o estudo da localização de p-forma. Essas consequências podem ser resumidas nas duas afirmações seguintes.

- **Afirmação (i):** *O confinamento, se possível, deve ocorrer para ambos os campos, a p-forma e seu bulk dual $(D-p-2)$-forma.*

  Esta é uma consequência imediata da equação (5.4). Como as lagrangianas para $\mathcal{A}_{[p]}$ e $\mathcal{B}_{[D-p-2]}$ são iguais, as respectivas ações também devem ser. Assim, se a ação para o campo $\mathcal{A}_{[p]}$ tem a integral nas dimensões extras finita, por consistência, a ação para o campo $\mathcal{B}_{[D-p-2]}$ também deve ter.

- **Afirmação (ii):** *A dualidade Hodge deve ser válida mesmo após a redução dimensional, isto é, para os campos efetivos na brana.*
  Esta é uma consequência de (5.3), que pode ser verificada quando decompomos os campos do *bulk* em campos efetivos na brana.

Essas afirmações são simples, mas elas nos fornecem informações importantes sobre o confinamento das p-forma. Façamos alguns comentários gerais sobre os campos efetivos na brana antes de particularizarmos as considerações acima para o caso de codimensão 2.

Em cenários de brana, é sempre possível escrever uma q-forma em termos de componentes da seguinte maneira,

$$\mathcal{A}_{N_1..N_q} = \Big(\mathcal{A}_{\mu_1..\mu_q}, \mathcal{A}_{\mu_1..\mu_{q-1}j_1}, \mathcal{A}_{\mu_1..\mu_{q-2}j_1j_2}, ..., \mathcal{A}_{\mu_1..\mu_{q-(D-d)}j_1,..,j_{D-d}}\Big)\,.$$

Todas as componentes acima são q-formas no *bulk*, mas elas são vistas na brana como uma q-forma $\mathcal{A}_{\mu_1..\mu_q}$, $(q-1)$-formas $\mathcal{A}_{\mu_1..\mu_{q-1}j_1}$, $(q-2)$-formas $\mathcal{A}_{\mu_1..\mu_{q-2}j_1j_2}$ e assim por diante. Esse é o espectro de campos efetivos possíveis na brana. Um procedimento comum na literatura, ao estudar o confinamento desses campos, é considerar apenas as componentes $\mathcal{A}_{\mu_1..\mu_q}$ não nulas [98–100]. Assim, uma q-forma no *bulk* será localizada e vista na brana como uma q-forma. A princípio, e para alguns casos é permitido, se poderia argumentar que esses campos são eliminados devido à simetria de *gauge* (5.2). No entanto, ao contar os graus de liberdade, podemos verificar que essa simetria não permite, de modo geral, eliminar todas as componentes

$$\mathcal{A}_{\mu_1..\mu_{q-1}j_1}, \mathcal{A}_{\mu_1..\mu_{q-2}j_1j_2}, ..., \mathcal{A}_{\mu_1..\mu_{q-(D-d)}j_1,..,j_{D-d}}.$$

Por exemplo, um campo vetorial em D dimensões pode ser escrito como $\mathcal{A}_N = (\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_j)$, onde $\mathcal{A}_\mu$ será um campo vetorial d-dimensional na brana e $\mathcal{A}_j$ serão $(D-d)$ campos escalares $(j = 1, .., D-d)$. Ao contar os graus de liberdade do campo no *bulk*, teremos ${}_{D-2}C_1 = (D-2)$ graus de liberdade, portanto, podemos eliminar apenas duas das D componentes que $\mathcal{A}_N$ possui. Desta forma, para $D > 6$ não podemos eliminar todas as componentes escalares $\mathcal{A}_j$ por simetria de *gauge*. Outra forma de verificar isso para um caso qualquer, é recorrendo às afirmações (i) e (ii).

Observe que pela afirmação (i), poderíamos ter apenas as componentes $\mathcal{A}_{\mu_1..\mu_q}$ não nulas. Assim, teríamos os campos $\mathcal{A}_{\mu_1..\mu_p}$ e $\mathcal{B}_{\mu_1..\mu_{D-p-2}}$ diferentes de zero, a equação (5.4) ficaria

$$\frac{1}{2(p+1)!}\mathcal{F}_{\mu_1..\mu_{p+1}}\mathcal{F}^{\mu_1..\mu_{p+1}} = \frac{1}{2(D-p-1)!}(\star\mathcal{F})^{\mu_1..\mu_{D-(p+1)}}(\star\mathcal{F})_{\mu_1..\mu_{D-(p+1)}}$$

e isso ainda poderia funcionar de alguma forma. Entretanto, pela afirmação (ii), notamos que isso não pode ser consistente. Pois, em uma brana d-dimensional, a dualidade Hodge deve ser entre $\hat{A}_{\mu_1..\mu_p}$ e $\hat{B}_{\mu_1..\mu_{d-p-2}}$. Para o campo $\mathcal{A}_{\mu_1..\mu_p}$ não há problema, uma vez que ele é visto na brana como uma p-forma $\hat{A}_{\mu_1..\mu_p}$. No entanto, partindo das componentes $\mathcal{B}_{\mu_1..\mu_{D-p-2}}$ não é possível obter o campo efetivo $\hat{B}_{\mu_1..\mu_{d-p-2}}$. Desta forma, a validade (aplicabilidade) da afirmação (ii) requer que outras componentes, além da q-forma efetiva, estejam presentes no modelo. Vejamos, por exemplo, o caso do campo escalar em 6 dimensões. O *bulk* dual desse campo é uma 4-forma. Uma 4-forma pode ser decomposta, para uma brana 4-dimensional, como

$$\mathcal{B}_{N_1N_2N_3N_4} = (\mathcal{B}_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}, \mathcal{B}_{\mu_1\mu_2\mu_3 j}, \mathcal{B}_{\mu_1\mu_2 j_1 j_2}) \,,$$

que serão “vistos” na brana como uma 4-forma, 3-forma e 2-forma, respectivamente. Não há outras componentes, pois só temos duas dimensões extras e os campos são totalmente antissimétricos. Por outro lado, o dual de um campo escalar em 4 dimensões é uma 2-forma. Portanto, entre os campos do espectro de $\mathcal{B}_{N_1N_2N_3N_4}$, pelo menos a componente $\mathcal{B}_{\mu_1\mu_2 j_1 j_2}$, que é uma 2-forma na brana, deve ser não nula para que a afirmação (ii) possa ser realizada. Iremos discutir mais esse caso na próxima seção. Mostraremos a seguir que se um campo é confinado seu dual também é e, além disso, essa localização preserva a dualidade na brana, comprovando assim as afirmações (i) e (ii).

5.2 Localização de p-Formas em Codimensão 2

Na seção anterior, obtivemos importantes resultados qualitativos sobre o papel da dualidade Hodge no confinamento dos campos. Agora vamos mostrar, quantitativamente, como as afirmações (i) e (ii) podem ser usadas para confinar campos sem tratar diretamente as equações de movimento. Para que possamos incluir na discussão o maior número possível de mundos-brana em codimensão 2, consideraremos a métrica genérica

$$ds^2 = g_{MN} dx^N dx^M = e^{2A(y)} \hat{g}_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu + \bar{g}_{jk}(y) dy^j dy^k, \tag{5.5}$$

onde $\mu, \nu = 1, .., d$ e $j, k = 1, 2$. Por simplicidade, vamos tratar a seguir o caso do campo escalar e seu dual.

Vimos no capítulo (3) que o campo escalar pode ser confinado para qualquer modelo com gravidade localizada. Como sabemos um campo escalar é uma 0-forma $\mathcal{A}_{[p=0]}$, ou seja, tem apenas uma componente $\phi(x, y)$. Em mundos-brana com codimensão 2, temos $(d+2)$-dimensões, portanto, o *bulk* dual desse escalar é uma d-forma $\mathcal{B}_{[d]}$. A ação para essa d-forma é

$$S = -\frac{1}{2(d+1)!}\int d^dxd^2y\sqrt{-g}(\star\mathcal{F})_{N_1..N_{d+1}}(\star\mathcal{F})^{N_1..N_{d+1}}. \tag{5.6}$$

Em que $(\star\mathcal{F})_{N_1..N_{d+1}} = (d+1)\partial_{[N_1}\mathcal{B}_{N_2..N_{d+1}]}$. Como já discutimos no fim da seção anterior, o dual de um campo escalar em uma brana d-dimensional, é uma $(d-2)$-forma. Portanto, entre as componentes do campo $\mathcal{B}_{N_1..N_d}$, a saber,

$$\mathcal{B}_{N_1,..,N_d} = \left(\mathcal{B}_{\mu_1,..,\mu_d}, \mathcal{B}_{\mu_1,..,\mu_{d-1}j}, \mathcal{B}_{\mu_1,..,\mu_{d-2}jk}\right),$$

a componente que devemos usar é a $\mathcal{B}_{\mu_1,..,\mu_{d-2}jk}$, visto que ela será confinada na brana como uma $(d-2)$-forma.

Agora, vamos assumir que as demais componentes, a saber, $\mathcal{B}_{\mu_1,..,\mu_d}$ e $\mathcal{B}_{\mu_1,..,\mu_{d-1}j}$, são zero. Observe que isso não prejudica nossa aplicação, pois essas componentes já seriam eliminadas naturalmente. Veja, $\mathcal{B}_{\mu_1,..,\mu_d}$ e $\mathcal{B}_{\mu_1,..,\mu_{d-1}j}$ são "vistos" na brana como uma d-forma e uma $(d-1)$-forma. Os respectivos *fields strength* na brana para essas componentes seriam uma $(d+1)$-forma e uma d-forma. Como a brana tem apenas d-dimensões, o primeiro é identicamente nulo e o segundo é proporcional ao símbolo de Levi-Civita. Portanto, esses campos não possuem dinâmica.

Retornando as componentes $\mathcal{B}_{\mu_1,..,\mu_{d-2}jk}$, podemos propor a separação de variáveis

$$\mathcal{B}_{\mu_1,..,\mu_{d-2}12}(x,y) = \hat{B}_{\mu_1,..,\mu_{d-2}}(x)\psi_d(y)$$

e escrever a ação (5.6) como

$$\begin{aligned} S &\propto -\int d^dxd^2y\sqrt{-g}(\star\mathcal{F})_{\mu_1..\mu_{d-1}12}(\star\mathcal{F})^{\mu_1..\mu_{d-1}12} \\ &= -\int d^dx\sqrt{-\hat{g}}(\star\hat{F})_{\mu_1..\mu_{d-1}}(\star\hat{F})^{\mu_1..\mu_{d-1}}\int d^2ye^{-(d-2)A(y)}\sqrt{\bar{g}}\bar{g}^{11}\bar{g}^{22}\psi_d^2(y), \end{aligned} \tag{5.7}$$

em que definimos $(\star\hat{F})_{\mu_1..\mu_{d-1}} = (d-2)\partial_{[\mu_1}\hat{B}_{\mu_2,..,\mu_{d-1}]}(x)$. A princípio, não poderíamos afirmar mais nada sem conhecer a função $\psi_d(y)$. No entanto, por conta da afirmação (ii), podemos obter uma 'solução' para essa função sem passar pela equação de movimento.

Note que estamos lidando apenas com dois campos, $\phi(x,y)$ e $\mathcal{B}_{\mu_1,..,\mu_{d-2}12}(x,y)$. Portanto, a partir da equação (5.3), podemos escrever as componentes

$$(\star\mathcal{F})^{\mu_1..\mu_{d-1}12} = \frac{(-1)^{(d+1)}}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{\mu_1..\mu_{d-1}\mu 12}\mathcal{F}_\mu. \tag{5.8}$$

Usando a métrica e os *ansatz* para os modos-zeros $\phi(x,y) = e^{-\frac{d}{2}A}\hat{\phi}^0(x)\xi_0(y)$ [igual ao do capítulo (3)] e $\mathcal{B}_{\mu_1,..,\mu_{d-2}12}(x,y) = \hat{B}_{\mu_1,..,\mu_{d-2}}(x)\psi_d(y)$, obtemos

$$e^{-2(d-1)A(y)}\bar{g}^{11}\bar{g}^{22}\psi_d(y)(\star\hat{F})^{\mu_1..\mu_{d-1}} = \frac{(-1)^{(d+1)}e^{-\frac{d}{2}A}\xi_0(y)}{e^{dA(y)}\sqrt{\bar{g}}\sqrt{-\hat{g}}}\varepsilon^{\mu_1..\mu_{d-1}\mu 12}\hat{F}_\mu. \tag{5.9}$$

Logo, pela afirmação (ii) devemos ter

$$(\star\hat{F})^{\mu_1..\mu_{d-1}}(x) = \frac{(-1)^{(d+1)}}{\sqrt{-\hat{g}(x)}}\epsilon^{\mu_1..\mu_{d-1}\mu}\hat{F}_\mu(x),$$

o que nos dá,

$$e^{-2(d-1)A(y)}\bar{g}^{11}(y)\bar{g}^{22}(y)\psi_d(y) = \frac{e^{-\frac{d}{2}A}\xi_0(y)}{e^{dA(y)}\sqrt{\bar{g}(y)}}.$$

A partir dessa relação, obtemos a 'solução' para $\psi_d(y)$ que é dada por,

$$\psi_d(y) = e^{-\frac{d}{2}A}e^{(d-2)A(y)}\xi_0(y)\sqrt{\bar{g}_{11}(y)\bar{g}_{22}(y)}, \tag{5.10}$$

onde usamos o fato de que $\bar{g} = \bar{g}_{11}\bar{g}_{22}$. Com essa 'solução', podemos analisar a integral nas dimensões extras em (5.7), pois a solução para $\xi_0(y)$ é conhecida [Eq. (3.8)]. Fazendo isso, aquela integral fica

$$K_d \equiv \int d^2y\sqrt{\bar{g}(y)}e^{-2A(y)}\xi_0^2(y), \tag{5.11}$$

A integral acima é exatamente aquela que obtivemos para o campo escalar na equação (3.11). Portanto, valem as mesmas conclusões. Ou seja, sempre que o campo escalar é confinado em codimensão 2 seu dual na brana, a saber, a $(d-2)$-forma, também será. Mas atenção as relações de dualidade. No *bulk* temos

$$\phi(x,y) \leftrightarrow \mathcal{B}_{N_1..N_d}$$

e esses campo são confinados na brana como

$$\hat{\phi}(x) \leftrightarrow \hat{B}_{\mu_1,..,\mu_{d-2}}(x),$$

sempre preservando a dualidade Hodge. Desta forma, sem fazer menção as equações de movimento do campo $\mathcal{B}_{N_1..N_d}$, conseguimos inferir a localização de outro campo, além do escalar, somente por argumentos de simetria.

Outro ponto importante que podemos discutir agora é sobre a consistência da localização do campo dual. Isso pode ser verificado de forma direta. Na configuração de campo acima, podemos calcular o tensor energia-momento a partir da ação (5.7) e obter

$$T^d_{\mu\nu} = \psi_d^2(y)\bar{g}^{11}(y)\bar{g}^{22}(y)e^{-2(d-2)A(y)}\hat{T}^{[d-2]}_{\mu\nu}(x). \tag{5.12}$$

Com $\hat{T}^{[d-2]}_{\mu\nu}(x)$ sendo o tensor energia-momento para a $(d-2)$-forma efetiva $\hat{B}_{\mu_1,..,\mu_{d-2}}(x)$. Para que a condição de consistência (4.9) seja satisfeita, devemos ter

$$\psi_d^2(y)\bar{g}^{11}(y)\bar{g}^{22}(y)e^{-2(d-2)A(y)} = constante.$$

Usando a solução (5.10), já com a solução do modo-zero $\xi_0^2(y)$ [Eq. (3.8)], é fácil verificar que essa condição é satisfeita e, portanto, a localização da 2-forma efetiva $\hat{B}_{\mu_1,..,\mu_{d-2}}(x)$, assim como do seu dual 0-forma, é consistente com a equação de Einstein. No artigo que publicamos [74], fazemos uma série de aplicações em diferentes modelos de branas 6-dimensionais e verificamos que esses resultados se confirmam para todos eles. Inclusive para o campo vetorial, que pode ser confinado em muitos desses modelos, muito embora essa localização não seja consistente com a equação de Einstein.

5.3 Aplicação

Para realizar uma aplicação dos resultados que obtivemos acima, vamos considerar um modelo de brana específico. De fato, vamos usar o modelo em 6 dimensões [33] que apresentamos no capítulo (2) e é descrito pela métrica

$$ds^2 = e^{-ar+\tanh(ar)}\left[\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \frac{\tanh^2(ar)}{a^2}d\theta^2\right] + dr^2, \tag{5.13}$$

em que a é uma constante positiva. Para todos os resultados que se seguem, iremos considerar $d = 4$ (3-brana). Como comentamos antes, esse modelo possui a geometria do *bulk* assimptoticamente AdS_6. Quanto ao confinamento dos campos nesse modelo, o caso do campo vetorial livre já foi discutido em detalhes na referência [58]. Abaixo, discutimos o caso do campo escalar.

Campo Escalar

Aqui, não há necessidade de realizarmos todos os cálculos novamente para o campo escalar $\phi(x, r)$. Iremos simplesmente usar a métrica acima na equação (3.11), para o modo-zero [Eq. (3.8)], e obter a integral

$$K_0^{(escalar)} = \frac{2\pi c_1^2}{a}\int_0^\infty dr e^{\frac{1}{2}[-ar+\tanh(ar)]}\tanh(ar). \tag{5.14}$$

A função no integrando é bem definida em todo o intervalo $r \in [0,\infty)$, portanto, a convergência da integral é determinada pelo comportamento do integrando no infinito. Nesse limite, obtemos simplesmente a integral de uma exponencial decrescente e, com isso, podemos inferir que a integral acima é finita. Portanto, o modo-zero do campo escalar será localizado.

Agora, segundo a discussão que realizamos nas duas seções anteriores, uma vez que localizamos o campo escalar (modo-zero), podemos assegurar, pela afirmação (ii), o confinamento do seu brana dual, ou seja, um campo de Kalb-Ramond. Mas vale lembra que esse campo de Kalb-Ramond não vem de uma 2-forma no *bulk*, mas sim, de uma 4-forma. Portanto, vale a relação de dualidade no *bulk* 6-dimensional, $\phi(x,r) \leftrightarrow \mathcal{B}_{M_1M_2M_3M_4}(x,r)$, e, como esses campos são confinados na brana como $\hat{\phi}(x)$ e $\hat{B}_{\mu_1\mu_2}(x)$, respectivamente, a dualidade Hodge na brana é preservada. Quanto a consistência dessa localização, os resultados que apresentamos anteriormente na seção (4.2) já confirma a consistência para o campo escalar. Para o campo dual, já mostramos no fim da seção anterior.

Desta forma, concluímos essa discussão. Como vimos, o confinamento pela simetria de dualidade Hodge é totalmente consistente como o argumento de integral finita. Acreditamos que uma discussão similar possa ser aplicada a outras simetrias que tem essa propriedade de relacionar campos como, por exemplo, transformações de supersimetria (SUSY). Como foi mencionado em [42],

> "...[We could 'look for' an] RS solution in some $N=2$ five-dimensional supergravity. (...). Since the background RS localizes gravitons, by supersymmetry, its SUGRA counterpart would also localize gravitinos."

Além do graviton-gravitino, outros pares SUSY poderiam apresentar a mesma característica. No entanto, essa análise está fora do escopo desta tese. Mas, assim como [42], acreditamos que essa seria uma discussão interessante para estudos futuros.

6 DISCUSSÃO E CONCLUSÃO

Um dos primeiros comentários que faremos é relacionado a geometria do *bulk* antes e após o confinamento dos campos. No capítulo (2), mencionamos uma série de artigos com modelos de brana em cenários gravitacionais diversos. Mesmo com diferenças sensíveis entre eles, a vasta maioria partilha uma característica comum, eles são espaços-tempos assimptoticamente anti-de Sitter (AdS) [17–19, 21–24, 28, 32–35]. Isso quer dizer que no limite $y \to \infty$ o escalar de Ricci (curvatura) assume um valor constante e negativo. Por exemplo, no modelo de brana espessa 5-dimensional [18], o escalar de Ricci é dado por

$$R^{[Gremm]} = -20b^2a^2\left[1 - \frac{(5b+2)}{5b}\mathrm{sech}^2(ay)\right]. \tag{6.1}$$

Desta forma, no limite assimptótico ($y \to \infty$), a secante vai a zero e o escalar de Ricci assume o valor $R_{\infty}^{[Gremm]} \to -20b^2a^2$, o que evidencia a característica AdS (assimptótica) do *bulk*. Esse resultado (AdS) se repete para os outros modelos mencionados acima. Essa propriedade é importante, pois muitas vezes atribui-se a ela o confinamento da gravidade. Isto é, o campo gravitacional é localizado porque o espaço-tempo é AdS [16]. Essa característica, no entanto, não é preservada no cenário com campos localizados. Isso porque, a equação (6.1) é obtida para uma brana *flat* (Minkowski), para o caso em que os campos são confinados, a métrica da brana deve mudar de $\eta_{\mu\nu}$ para $\hat{g}_{\mu\nu}(x)$. Assim, o novo escalar de Ricci fica [Eq. (2.6)]

$$R_{brana\neq M_4}^{[Gremm]} = \hat{R}(x)\cosh^{2b}(ay) - 20b^2a^2\left[1 - \frac{(5b+2)}{5b}\mathrm{sech}^2(ay)\right]. \tag{6.2}$$

Essa nova expressão mostra que, assimptoticamente, a curvatura vai para infinito. Portanto, de modo geral, a característica AdS não é preservada com a localização dos campos. Isso, entretanto, não afeta o confinamento da gravidade. Como vimos na subsecção (2.2), o confinamento das flutuações gravitacionais depende do fator de deformação $A(y)$ e das componentes $\bar{g}_{jk}(y)$, os quais assumimos que não mudam com o confinamento dos campos. Outra forma de verificar isso, é integrar a equação para o escalar de Ricci (2.6). Fazendo isso para o modelo [18], obteremos algo na forma

$$S^{(g)} \sim \int d^4x dy\sqrt{-\hat{g}(x)}\hat{R}(x)e^{(d-2)A(y)} + (resultado\ flat), \tag{6.3}$$

com $e^{A(r)} = \mathrm{sech}^b(ay)$. Assim, mesmo que o escalar de Ricci no *bulk* [Eq. (6.2)] seja divergente, os termos de métrica no volume fazem com que a integral dele nas dimensões extras ainda permaneça finita. Esse resultado pode ser obtido também para outros modelos que citamos. Isso é importante, pois assegura que, mesmo introduzindo os campos de matéria, a gravidade permanecerá confinada. Um ponto que pode ser explorado futuramente em outros trabalhos é sobre a natureza da singularidade que aparece no escalar de Ricci (6.2).

Fazendo um apanhado geral, mostramos no capítulo (2) como os modelos de brana são definidos, a princípio, sem levar em conta a contribuição dos campos do Modelo Padrão (MP) da física de partículas. Naquele capítulo, apresentamos alguns exemplos de modelos de mundos-brana em 5 dimensões [17–19], em 6D [27–29, 33], além de citarmos tantos outros [20–24, 34, 35, 54]. No capítulo (3), discutimos o procedimento padrão usado para estudar o confinamento dos campos e aplicamos aos casos dos campos escalar, espinorial e vetorial abeliano, livres e com mecanismos de localização. Com isso, mostramos que pelo argumento de integral finita apenas o campo escalar (modo-zero) pode ser confinado para todos os modelos em que a gravidade é confinada. Quanto ao campo espinorial, nos limitamos a mundos-brana 5-dimensionais, e mostramos que o campo livre não pode ser confinado. No entanto, ao adicionar uma interação tipo-Yukawa $\mathcal{L}^{(m)}_{[int]} = -\lambda f(y)\bar{\Psi}\Psi$, conseguimos modificar a solução do modo-zero e, ao escolher adequadamente a função escalar $f(y)$, o confinamento pôde ser alcançado. Ainda assim, mesmo com uma certa liberdade na escolha da função $f(y)$, não é possível confinar as duas quiralidades do campo espinorial Ψ. Para concluir o capítulo (3), discutimos o caso do campo vetorial abeliano livre e com interação. Para o caso livre, decompomos o campo vetorial no *bulk* $\mathcal{A}_M$ em um setor vetorial $\mathcal{A}^t_\mu$ e um escalar $\mathcal{B}_j$ na brana, e mostramos que o confinamento do setor vetorial (modo-zero) é possível somente em algumas configurações dimensionais. Por exemplo, em mundos-brana 6-dimensionais gerados por defeitos topológicos tipo cordas cósmicas [46, 54, 55, 58, 85, 86]. Para modelos em 5D, o campo vetorial livre não pode ser confinado para nenhum dos modelos que analisamos. Para contornar esse problema apresentamos alguns mecanismos de localização na subseção (3.4.2) [19, 68, 69, 71, 80, 87, 89].

Todos esses resultados sobre localização já são conhecidos da literatura, e isso inclui alguns artigos apresentados por nós. O ponto novo aqui, que apresentamos em dois artigos [73, 74], é o teste de consistência do procedimento mencionado acima. No capítulo (4), nos propomos a verificar se os efeitos de *backreaction* podem realmente ser ignorados e, se sim, sob quais condições isso pode ser feito. Para isso, escrevermos a ação completa, com as contribuições gravitacional e de matéria $S^{(g)}+S^{(m)}$, e assumimos que a métrica de vácuo obtida somente de $S^{(g)}$ ainda é válida. Isso nos levou a duas condições, (4.9) e (4.10), que o tensor energia-momento dos campos de matéria deve satisfazer para que o confinamento seja consistente. Satisfazer essas condições quer dizer que podemos adicionar campos no *bulk* sem modificar o fator de deformação $A(y)$ ou as componentes da métrica $\bar{g}_{jk}(y)$. Isso é importante, visto que a localização da gravidade depende prioritariamente dessas funções, como mostramos na subseção (2.2). Nas seções (4.2)-(4.4), aplicamos essas condições de consistência aos casos dos campos escalar, espinorial e vetorial abeliano. Para os campos livres, apenas o campo escalar (modo-zero) satisfaz essas condições e, portanto, pode ser consistentemente confinado. O resultado mais significante ocorre para o campo vetorial livre. Mostramos na equação (4.31), que essas condições não podem ser satisfeitas para o campo vetorial livre em nenhum modelo de brana, independente do número de dimensões extras. Esse resultado se mostrou deveras interessante, visto que para alguns modelos em 6D [46, 54, 55, 58, 85, 86], a integral nas dimensões extras é finita e, portanto, o campo (modo-zero) é localizado, mas esse confinamento não é consistente.

Ainda nesse contexto, discutimos a consistência de alguns casos com interação para o campo espinorial e vetorial. Mencionamos acima que, para o campo espinorial, introduzimos uma interação tipo-Yukawa $\mathcal{L}^{(m)}_{[int]} = -\lambda f(y)\bar{\Psi}\Psi$ e, pelo argumento de integral finita, escolhíamos adequadamente a função $f(y)$ para confinar uma das quiralidades do modo-zero. Ao aplicar as condições de consistência, essa arbitrariedade na escolha de $f(y)$ é eliminada e, por consistência com as equações de Einstein, ela deve ser na forma $f(y) = 3\exp[-B(y)]A'(y)/2\lambda$. Comparamos esse resultado com algumas propostas encontradas na literatura e verificamos que muitos mecanismos não são consistentes [19, 48, 50, 70]. Quanto ao caso do campo vetorial, discutimos alguns mecanismos e não obtivemos restrições sobre a forma da interação. Entretanto, as condições (4.9) e (4.10) levaram à fixação dos parâmetros dos modelos. Todos esses resultados evidenciam que o argumento de integral finita, embora necessário, não é suficiente para garantir um confinamento consistente. Além disso, as condições acima podem nos fornecer informação sobre as interações e/ou parâmetros dos modelos que até então não se conhecia.

Para concluir, discutimos como a dualidade Hodge pode ser usada para inferir o confinamento de campos em cenários de branas com codimensão 2. Apresentamos duas afirmações, (i) e (ii), fundamentadas na simetria de dualidade Hodge e aplicamos ao caso do campo escalar. Essas ferramentas podem ser usadas futuramente em estudos de localização de campos para aumentar o espectro de campos confinados sem que seja necessário recorrer ao procedimento convencional de integral finita.

REFERÊNCIAS

[1] NORDSTRöM, G. On the possibility of unifying the electromagnetic and the gravitational fields. (2007). Tradução para o inglês do artigo de G. Nordström: 'Über die Möglichkeit, das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld zu vereinigen'. Phys. Z. 15, p. 504-506 (1914).

[2] KALUZA, T. On the unification problem in physics. *Inter. Jour. of Mod. Phys. D*, v. 27, n. 14, (2018). Tradução para o inglês do artigo de T. Kaluza: 'Zum Unitätsproblem der Physik'. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.). 1921, p. 966-972 (1921).

[3] KLEIN, O. Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik A*, v. 37, (1926).

[4] KLEIN, O. The atomicity of electricity as a quantum theory law. *Nature*, v. 118, (1926).

[5] WITTEN, E. Search for a realistic kaluza-klein theory. *Nuclear Physics B*, v. 186, n. 3, p. 412–428, 1981.

[6] MURATA, J.; TANAKA, S. A review of short-range gravity experiments in the LHC era. *Class. Quant. Grav.*, v. 32, n. 3, p. 033001, (2015).

[7] APPELQUIST, T.; DOBRESCU, B. A. Universal extra dimensions and the muon magnetic moment. *Phys. Lett. B*, v. 516, p. 85–91, (2001).

[8] KAHIL, M. E.; HARKO, T. Is dark matter an extra-dimensional effect? *Mod. Phys. Lett. A*, v. 24, p. 667–682, (2009).

[9] DAHIA, F.; LEMOS, A. S. Is the proton radius puzzle evidence of extra dimensions? *Eur. Phys. J. C*, v. 76, n. 8, p. 435, (2016).

[10] POLCHINSKI, J. *String theory*. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, (1998). Volumes 1 e 2.

[11] ZWIEBACH, B. *A First Course in String Theory*. 2nd. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, (2009).

[12] RUBAKOV, V. A.; SHAPOSHNIKOV, M. E. Do we live inside a domain wall? *Phys. Lett. B.*, v. 125, (1983).

[13] O'CONNELL, J. Comparison of the four fundamental interactions of physics. *The Physics Teacher*, v. 36, n. 1, p. 27–27, (1998).

[14] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. A large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys. Rev. Lett.*, v. 83, (1999).

[15] GABELLA, M. The randall-sundrum model. 01 (2006).

[16] MAARTENS, R.; KOYAMA, K. Brane-world gravity. *Living Reviews in Relativity*, v. 13, n. 1, (2010).

[17] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. An alternative to compactification. *Phys. Rev. Lett.*, v. 83, (1999).

[18] GREMM, M. Four-dimensional gravity on a thick domain wall. *Phys. Lett. B*, v. 478, (2000).

[19] KEHAGIAS, A.; TAMVAKIS, K. Localized gravitons, gauge bosons and chiral fermions in smooth spaces generated by a bounce. *Phys. Lett. B*, v. 504, (2001).

[20] BAZEIA, D.; MENEZES, J.; MENEZES, R. New global defect structures. *Phys. Rev. Lett.*, v. 91, (2003).

[21] BAZEIA, D.; FURTADO, C.; GOMES, A. R. Brane structure from scalar field in warped space-time. *JCAP*, v. 02, p. 002, (2004).

[22] BAZEIA, D.; GOMES, A. R. Bloch brane. *JHEP*, v. 05, (2004).

[23] BAZEIA, D. et al. Braneworld models of scalar fields with generalized dynamics. *Physics Letters B*, v. 671, n. 3, p. 402–410, (2009).

[24] BAZEIA, D.; FERREIRA, D. A.; MARQUES, M. A. Symmetric and asymmetric thick brane structures. *The European Physical Journal Plus*, v. 135, n. 7, (2020).

[25] LIU, Y.-X. et al. Bulk matters on symmetric and asymmetric de sitter thick branes. *JCAP*, v. 02, (2009).

[26] GUO, H. et al. Localization of bulk matter fields, the hierarchy problem and corrections to coulomb's law on a pure de sitter thick braneworld. *Phys. Rev. D*, v. 87, n. 9, (2013).

[27] GREGORY, R. Nonsingular global string compactifications. *Physical Review Letters*, v. 84, n. 12, p. 2564–2567, (2000).

[28] GHERGHETTA, T.; SHAPOSHNIKOV, M. Localizing gravity on a stringlike defect in six dimensions. *Physical Review Letters*, v. 85, n. 2, p. 240–243, (2000).

[29] ODA, I. Bosonic fields in the stringlike defect model. *Physical Review D*, v. 62, n. 12, (2000).

[30] GIOVANNINI, M.; MEYER, H.; SHAPOSHNIKOV, M. E. Warped compactification on Abelian vortex in six-dimensions. *Nucl. Phys. B*, v. 619, p. 615–645, (2001).

[31] GOGBERASHVILI, M.; SINGLETON, D. Brane in 6d with increasing gravitational trapping potential. *Phys. Rev. D*, v. 69, (2004).

[32] CARLOS, B. d.; MORENO, J. M. A cigar-like universe. *Journal of High Energy Physics*, v. 2003, n. 11, p. 040–040, (2003).

[33] SILVA, J. E. G.; SANTOS, V.; ALMEIDA, C. A. S. Gravity localization in a string-cigar braneworld. *Class. Quant. Grav.*, v. 30, (2013).

[34] FLACHI, A.; MINAMITSUJI, M. Field localization on a brane intersection in anti-de Sitter spacetime. *Phys. Rev. D*, v. 79, p. 104021, (2009).

[35] ARKANI-HAMED, N. et al. Infinitely large new dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, v. 84, (2000).

[36] COHEN, A. G.; KAPLAN, D. B. Solving the hierarchy problem with noncompact extra dimensions. *Phys. Lett. B*, v. 470, (1999).

[37] KIM, J. E.; KYAE, B.; LEE, H. M. Localized gravity and mass hierarchy in d= 6 with a gauss-bonnet term. *Phys. Rev. D*, v. 64, (2001).

[38] CORRADINI, O. et al. Gravity on a 3-brane in 6d bulk. *Phys. Lett. B*, v. 521, (2001).

[39] BARBOSA-CENDEJAS, N.; HERRERA-AGUILAR, A. Localization of 4-D gravity on pure geometrical thick branes. *Phys. Rev. D*, v. 73, p. 084022, (2006). [Erratum: Phys. Rev. D v. 77, p. 049901, (2008)].

[40] LIU, Y.-X. et al. Deformed brane with finite extra dimension. *Phys. Rev. D*, v. 85, p. 084023, (2012).

[41] CHANG, S. et al. Bulk standard model in the randall-sundrum background. *Phys. Rev. D*, v. 62, (2000).

[42] BAJC, B.; GABADADZE, G. Localization of matter and cosmological constant on a brane in anti-de sitter space. *Phys. Lett. B*, v. 474, (2000).

[43] POMAROL, A. Gauge bosons in a five-dimensional theory with localized gravity. *Phys. Lett. B*, v. 486, p. 153–157, (2000).

[44] DAVOUDIASL, H.; HEWETT, J. L.; RIZZO, T. G. Bulk gauge fields in the Randall-Sundrum model. *Phys. Lett. B*, v. 473, p. 43–49, (2000).

[45] RANDJBAR-DAEMI, S.; SHAPOSHNIKOV, M. E. Fermion zero modes on brane worlds. *Phys. Lett. B*, v. 492, p. 361–364, (2000).

[46] ODA, I. Localization of various bulk fields on a brane. (2000).

[47] KOLEY, R.; KAR, S. Scalar kinks and fermion localisation in warped spacetimes. *Class. Quant. Grav.*, v. 22, n. 4, p. 753–768, (2005).

[48] RINGEVAL, C.; PETER, P.; UZAN, J.-P. Localization of massive fermions on the brane. *Phys. Rev. D*, v. 65, p. 044016, (2002).

[49] LANDIM, R. R. et al. New Analytical Solutions for Bosonic Field Trapping in Thick Branes. *Phys. Lett. B*, v. 731, p. 131–135, (2014).

[50] MELFO, A.; PANTOJA, N.; TEMPO, J. D. Fermion localization on thick branes. *Phys. Rev. D*, v. 73, p. 044033, (2006).

[51] FU, C.-E.; ZHONG, Y.; LIU, Y.-X. $U(1)$ gauge vector field on a codimension-2 brane. *JHEP*, v. 01, p. 021, (2019).

[52] ODA, I. Localization of matters on a string-like defect. *Physics Letters B*, v. 496, n. 1-2, p. 113–121, (2000).

[53] MIDODASHVILI, P. Brane in 6-D and localization of matter fields. (2003).

[54] GIOVANNINI, M. Gauge field localization on Abelian vortices in six-dimensions. *Phys. Rev. D*, v. 66, p. 044016, (2002).

[55] GIOVANNINI, M. Gauge field localization on abelian vortices in six dimensions. *Physical Review D*, v. 66, n. 4, (2002).

[56] TORREALBA, S.; RAFAEL, S. Localizing gauge fields on a topological abelian string and the coulomb law. *Physical Review D*, v. 82, n. 2, (2010).

[57] COSTA, F. W. V.; SILVA, J. E. G.; ALMEIDA, C. A. S. Gauge vector field localization on a 3-brane placed in a warped transverse resolved conifold. *Physical Review D*, v. 87, n. 12, (2013).

[58] COSTA, F. et al. Gauge fields in a string-cigar braneworld. *Physics Letters B*, v. 747, p. 517–522, (2015).

[59] LIU, Y.-X.; ZHAO, L.; DUAN, Y.-S. Localization of Fermions on a String-like Defect. *JHEP*, v. 04, p. 097, (2007).

[60] DANTAS, D.; SILVA, J.; ALMEIDA, C. Fermions in a warped resolved conifold. *Physics Letters B*, v. 725, n. 4-5, p. 425–430, (2013).

[61] ODA, I. A new mechanism for trapping of photon. (2001).

[62] DVALI, G. R.; GABADADZE, G.; SHIFMAN, M. A. (Quasi)localized gauge field on a brane: Dissipating cosmic radiation to extra dimensions? *Phys. Lett. B*, v. 497, p. 271–280, (2001).

[63] GUERRERO, R. et al. Gauge field localization on brane worlds. *Phys. Rev. D*, v. 81, p. 086004, (2010).

[64] BATELL, B.; GHERGHETTA, T. Yang-Mills Localization in Warped Space. *Phys. Rev. D*, v. 75, p. 025022, (2007).

[65] VAQUERA-ARAUJO, C. A.; CORRADINI, O. Localization of abelian gauge fields on thick branes. *Eur. Phys. J. C*, v. 75, n. 2, p. 48, (2015).

[66] CRUZ, W. T.; TAHIM, M. O.; ALMEIDA, C. A. S. Gauge field localization on a dilatonic deformed brane. *Physics Letters B*, v. 686, n. 4, p. 259–263, (2010).

[67] CRUZ, W. T.; LIMA, A. R. P.; ALMEIDA, C. A. S. Gauge field localization on the Bloch Brane. *Phys. Rev. D*, v. 87, n. 4, p. 045018, (2013).

[68] GHOROKU, K.; NAKAMURA, A. Massive vector trapping as a gauge boson on a brane. *Phys. Rev. D*, v. 65, p. 084017, (2002).

[69] ALENCAR, G. et al. Gauge Field Localization on the Brane Through Geometrical Coupling. *Phys. Lett. B*, v. 739, p. 125–127, (2014).

[70] MENDES, W. M.; ALENCAR, G.; LANDIM, R. R. Spinors Fields in Co-dimension One Braneworlds. *JHEP*, v. 02, p. 018, (2018).

[71] FREITAS, L. F.; ALENCAR, G.; LANDIM, R. R. Universal Aspects of $U(1)$ Gauge Field Localization on Branes in D-dimensions. *JHEP*, v. 02, p. 035, (2019).

[72] DUFF, M. J.; LIU, J. T. Hodge duality on the brane. *Phys. Lett. B*, v. 508, p. 381–384, (2001).

[73] FREITAS, L. F. F.; ALENCAR, G.; LANDIM, R. R. Consistency Conditions for Fields Localization on Braneworlds. *Eur. Phys. J. C*, v. 80, n. 5, p. 432, (2020).

[74] FREITAS, L. F. F.; ALENCAR, G.; LANDIM, R. R. Consistency conditions for p-form field localization on codimension two braneworlds. *The European Physical Journal C*, v. 80, n. 12, (2020).

[75] DIRAC, P. A. M. Xi.—the relation between mathematics and physics. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, v. 59, p. 122–129, 1940.

[76] ZAYAS, L. A. P.; TSEYTLIN, A. A. 3-branes on resolved conifold. *Journal of High Energy Physics*, v. 2000, n. 11, p. 028–028, (2000).

[77] LIU, Y.-X. et al. Localization of matters on pure geometrical thick branes. *Journal of High Energy Physics*, v. 2008, n. 02, p. 067–067, (2008).

[78] LIU, Y.-X. et al. Bulk matter fields on a grs-inspired braneworld. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2010, n. 12, p. 031–031, (2010).

[79] MIDODASHVILI, P. Brane in 6-D and localization of matter fields. (2003).

[80] FU, C.-E.; LIU, Y.-X.; GUO, H. Bulk matter fields on two-field thick branes. *Physical Review D*, v. 84, n. 4, (2011).

[81] SILVA, J. E. G.; ALMEIDA, C. A. S. Scalar field localization on 3-branes placed at a warped resolved conifold. *Physical Review D*, v. 84, n. 8, (2011).

[82] RANDJBAR-DAEMI, S.; SHAPOSHNIKOV, M. Fermion zero-modes on braneworlds. *Physics Letters B*, v. 492, n. 3-4, p. 361–364, (2000).

[83] KOLEY, R.; KAR, S. Scalar kinks and fermion localization in warped spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, v. 22, n. 4, p. 753–768, (2005).

[84] CASTRO, L. B.; MEZA, L. E. A. Fermion localization on branes with generalized dynamics. *EPL (Europhysics Letters)*, v. 102, n. 2, p. 21001, (2013).

[85] SOUSA, L.; CRUZ, W.; ALMEIDA, C. Tensor gauge field localization on a string-like defect. *Physics Letters B*, v. 711, n. 1, p. 97–103, (2012).

[86] ODA, I. Localization of matters on a string-like defect. *Phys. Lett. B*, v. 496, p. 113–121, (2000).

[87] CHUMBES, A. E. R.; SILVA, J. M. Hoff da; HOTT, M. B. A model to localize gauge and tensor fields on thick branes. *Phys. Rev. D*, v. 85, p. 085003, (2012).

[88] ZHAO, Z.-H.; XIE, Q.-Y.; ZHONG, Y. New localization method of $U(1)$ gauge vector field on flat branes in (asymptotic) AdS_5 spacetime. *Class. Quant. Grav.*, v. 32, n. 3, p. 035020, (2015).

[89] ZHAO, Z.-H.; XIE, Q.-Y.; ZHONG, Y. New localization method of $u(1)$ gauge vector field on flat branes in (asymptotic) $ads5$ spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, v. 32, n. 3, p. 035020, (2015).

[90] LANDIM, R. R. et al. A Transfer Matrix Method for Resonances in Randall-Sundrum Models. *JHEP*, v. 08, p. 071, (2011).

[91] LANDIM, R. R. et al. A transfer matrix method for resonances in randall-sundrum models ii: the deformed case. *Journal of High Energy Physics*, v. 2012, n. 2, (2012).

[92] ALENCAR, G. et al. A transfer matrix method for resonances in randall-sundrum models iii: an analytical comparison. *Journal of High Energy Physics*, v. 2013, n. 1, (2013).

[93] DEWOLFE, O. et al. Modeling the fifth dimension with scalars and gravity. *Physical Review D*, v. 62, n. 4, (2000).

[94] COOPER, F.; KHARE, A.; SUKHATME, U. Supersymmetry and quantum mechanics. *Physics Reports*, v. 251, n. 5-6, p. 267–385, 1995.

[95] HJELMELAND, S. E.; LINDSTROM, U. Duality for the nonspecialist. (1997).

[96] DUFF, M. J.; NIEUWENHUIZEN, P. van. Quantum Inequivalence of Different Field Representations. *Phys. Lett. B*, v. 94, p. 179–182, (1980).

[97] TANII, Y. *Introduction to supergravity.* [S.l.]: Springer, (2014). v. 1. (Springer briefs in mathematical physics, v. 1).

[98] ALENCAR, G. et al. Antisymmetric Tensor Fields in Codimension Two Brane-World. *EPL*, v. 93, n. 1, p. 10003, (2011).

[99] FU, C.-E. et al. Localization and mass spectrum of q-form fields on branes. *Physics Letters B*, v. 757, p. 180–186, (2016).

[100] FU, C.-E. et al. q-form fields on p-branes. *Journal of High Energy Physics*, v. 2012, n. 10, (2012).