UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FRANCISCO ADEVALDO GONÇALVES DA SILVEIRA

ASPECTOS DA EQUIVALÊNCIA ENTRE MODELOS TOPOLOGICAMENTE MASSIVOS COM TERMO $B \wedge F$ ACOPLADOS À MATÉRIA EM $3+1$ DIMENSÕES.

FORTALEZA

2021

FRANCISCO ADEVALDO GONÇALVES DA SILVEIRA

ASPECTOS DA EQUIVALÊNCIA ENTRE MODELOS TOPOLOGICAMENTE MASSIVOS COM TERMO $B \wedge F$ ACOPLADOS À MATÉRIA EM $3+1$ DIMENSÕES.

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Maluf Vinhaes Cavalcante.

FORTALEZA
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

S588a Silveira, F A G .
Aspectos da equivalência entre modelos topologicamente massivos com termo $B \wedge F$ acoplados à matéria em $3+1$ dimensões. / Francisco Adevaldo Gonçalves da Silveira. - 2021.
86

Tese (doutorado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2021.
Orientação: Prof. Dr. Roberto Maluf Vinhaes Cavalcante.

1. Dualidade. 2. Auto dual. 3. Ação mestre. 4. Modelo $B \wedge F$. I. Título.

CDD 530

FRANCISCO ADEVALDO GONÇALVES DA SILVEIRA

ASPECTOS DA EQUIVALÊNCIA ENTRE MODELOS TOPOLOGICAMENTE MASSIVOS COM TERMO $B \wedge F$ ACOPLADOS À MATÉRIA EM $3+1$ DIMENSÕES.

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 15/01/2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roberto Maluf Vinhaes Cavalcante.
(Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Calos Alberto Santos de Almeida.
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim.
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva.
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Prof. Dr. Wilami Teixeira da Cruz.
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Aos Meus Pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à todos que contribuíram para essa tese seja concluída. Em especial a Deus por ter me sustentado em momentos cruciais desta caminhada.

Ao meu orientador professor Roberto Vinhares Maluf Cavalcante, pela paciência e apoio constante, confiança desde o mestrado ao doutorado.

Aos professores membros da banca examinadora, por terem aceitado o convite e disporem do seu tempo para analisar o trabalho.

Aos amigos da UFC e do Laboratório de Simulação de Sistemas Coerentes - LASSCO, pela amizade e presença constante: Samuel, Diego (Uhuu!), Michel (Michelangelo), Cleiton, Rubens, Augusto Plácido.

Ao Corpo Docente e funcionários do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará.

A *Fundação Cearense de Apoio ao desenvolvimento Cientifico e Tecnológico* (FUNCAP) pelo auxílio financeiro durante o doutorado.

À Jeniffer Moraes Silva, minha esposa, por todo apoio, incentivo e confiança. Obrigado por tudo.

RESUMO

O objetivo deste trabalho, é revisitar algumas dualidades entre uns modelos não invariantes de calibre e topologicamente massivos, em especial uma teoria em $3+1$ dimensões contendo o termo topológico conhecido com $B \wedge F$. O lagrangiano do modelo auto dual em $3+1$ dimensões é composto por um campo vetorial e um tensor de campo antissimétrico, enquanto o lagrangiano do modelo topologicamente massivo é construído usando um termo $B \wedge F$. Embora os lagrangianos sejam bem diferentes, eles têm equações de movimento que são conectadas por um mapeamento dual simples entre os campos. Discutimos essa dualidade analisando os graus de liberdade em ambas as teorias e comparando seus modos de propagação no nível clássico. Além disso, empregamos o método de ação mestre para obter uma lagrangiana fundamental que interpola entre essas duas teorias e torna evidente o papel do termo topológico $B \wedge F$ na relação de dualidade. Ao acoplar essas teorias a campos de matéria, mostramos que a dualidade se mantém, desde que um termo semelhante ao de Thirring seja incluído. Além disso, usamos a ação mestre para testar a dualidade nos campos quantizados. Realizamos uma integração funcional dos campos e comparamos os lagrangianos efetivos resultantes.

Palavras-chave: Dualidade. Auto dual. Ação mestre. Modelo $B \wedge F$.

ABSTRACT

The aim of this work is to revisit some dualities between non-invariant gauge and topologically massive models, in particular a $3+1$ dimension theory containing the topological term known as $B \wedge F$. The lagrangian of the self-dual model in $3+1$ dimensions consists of a vector field and an antisymmetric field tensor, while the Lagrangian of the topologically massive model is constructed using a term $B \wedge F$. Although lagrangians are quite different, they have equations of motion that are connected by a simple dual mapping between fields. We discussed this duality by analyzing the degrees of freedom in both theories and comparing their modes of propagation at the classical level. In addition, we use the master action method to obtain a fundamental lagrangian that interpolates between these two theories and makes the role of the topological term $B \wedge F$ evident in the duality relationship. By coupling these theories to fields of matter, we show that duality remains, as long as a term similar to Thirring's is included. In addition, we use the master action to test the duality in the quantized fields. We performed a functional integration of the fields and compared the resulting effective Lagrangians.

Keywords: Duality. Self-dual. Master action. Theory $B \wedge F$.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de uma teoria unificada, que engloba as interações eletromagnética, fraca e forte em uma única teoria, foi uma das maiores conquistas da física, o conhecido Modelo Padrão (*MP*) [1]. Com a interação gravitacional não fazendo parte do modelo.

Os princípios básicos do *MP* começaram a ser consolidados quando Salam e Ward propuseram uma teoria para descrever as interações forte e fraca por meio de transformações de calibre [2]. Neste mesmo ano, Glashow divulga uma descrição para as interações entre as partículas através de bósons vetoriais Z^0 e $W^{\pm}$ [3]. Nos revelando que as interações ocorrem por meio de partículas mediadoras. Posteriormente Salam, Glashow e Weinberg estimaram a massa dos bósons mediadores W e Z por meio da construção da lagrangiana do setor eletrofraco [4, 5]. Assim, consolidava-se a teoria eletrofraca como uma das principais áreas de estudo da física de partículas. Possuindo um grande poder de predição que foi testada com sucesso quando se obteve a primeira medição dos bósons Z^0 e $W^{\pm}$ [6–9]. Recentemente, as colaborações *Compact Muon Solenoid* (*CMS*) e *A Toroidal LHC ApparatuS* (*ATLAS*) [10, 11], do *European Organization for Nuclear Research* (*CERN*), publicaram a descoberta de uma nova partícula, identificada com o bóson de Higgs predito na década de 60 [12, 13].

Na construção do modelo descrito acima, *MP*, as simetrias desenvolvem um papel crucial [14]. Dentre as mais relevantes encontram-se as simetrias associadas à invariância das leis, a transformações de Lorentz, que englobam rotações, translações e boosts [15], e as simetrias internas associadas às transformações de calibre [14]. Além das simetrias mencionadas, desempenham um papel importante na física as chamadas simetrias discretas C, P e T, que representam, respectivamente, as operações de conjugação da carga, transformação de paridade e inversão temporal.

Tendo em vista a importância das simetrias para caracterizar e prever fenômenos físico. Poderíamos conectar diferentes teorias ou regimes opostos de um mesmo modelo, cada uma contendo diferentes simetrias associadas? Se sim, tal mecanismo nos proporcionaria uma poderosa ferramenta para buscar e entender novos efeitos. Desta forma, estudo de dualidade torna-se um tema sempre atual e relevante em física por ser um laboratório para entendimento aprofundado em certas teorias. Notavelmente, temos a teoria de cordas são conectadas pelas dualidades T e S [16, 17] e a correspondência AdS/CFT que vincula uma teoria gravitacional de baixa energia no espaço-tempo AdS a um regime de acoplamento forte de uma teoria de campo conforme na fronteira [18]. Entre os processos de dualidade, a chamada bosonização tem uma importância especial e amplamente utilizada para investigar as propriedades não perturbativas na teoria quântica de campos e sistemas de matéria condensada em baixas dimensões [19]. Na dimensão $1+1$, é possível estabelecer uma correspondência férmion-bóson com base nas propriedades das superfícies de Fermi [20]. Essa dualidade pode ser mais generalizada para campos não abelianos [21] e até para dimensões mais altas [22, 23]. Recentemente, a bosonização levou a novas relações $2+1$ chamadas dualidade web [24, 25].

Outro exemplo de dualidade, envolve as teorias de calibre topologicamente massiva. Uma dualidade conhecida ocorre entre os modelos Auto Dual (*AD*) [26] e Maxwell-Chern-Simons (*MCS*) [27]. Essas duas teorias descrevem uma única partícula massiva de $spin-1$ no espaço-tempo de Minkowski $2+1$ dimensional. No entanto, apenas o modelo *MCS* é invariante de calibre. A equivalência entre os modelos *AD* e *MCS* foi inicialmente comprovada por Deser e Jackiw [27], e ao longo dos anos, vários estudos dessa equivalência foram realizados na literatura [28–35]. Particularmente, considerando acoplamentos com campos fermiônicos, foi mostrado em [33] que os modelos são equivalentes, desde que seja incluída uma interação do tipo Thirring. Além disso, extensões supersimétricas [36–38] e não comutativas [39] à dualidade envolvendo os modelos *AD* e *MCS* foram estudadas em diferentes contextos.

No cerne dessa dualidade, o termo Chern-Simons desempenha um papel fundamental. Um termo topológico alternativo em $3+1$ dimensões pode ser formado a partir de um campo vetorial de calibre A_μ e de um campo tensorial de categoria 2 antissimétrico $B_{\mu\nu}$, também conhecido como campo Kalb-Ramond [40, 41]. Tal termo topológico é chamado de termo $B\wedge F$ [42–45]. Portanto, uma generalização natural do modelo *MCS* em quatro dimensões consiste nos campos Maxwell e Kalb-Ramond acoplados por um termo $B\wedge F$ [46]. Essa teoria topologicamente massiva (*MKR*) é invariante de calibre, unitária e renormalizável quando minimamente acoplada a férmions e representa uma partícula massiva de $spin-1$ [42]. Modelos envolvendo o campo de Kalb-Ramond têm sido extensivamente estudados na literatura, especialmente em relação às teorias de cordas [47], teoria quântica de campos [48, 49], supersimetria [50], violação de simetria de Lorentz [51–54], buraco negro soluções [55], cosmologia [56] e cenários de mundos de branas [57, 58].

Uma versão auto dual do modelo *MKR* foi estudada em [59]. Envolvendo o termo $B\wedge F$ e termos de massa não invariante de calibre $AD_{B\wedge F}$. Neste trabalho mostrou a equivalência clássica entre os modelos, ou seja, no nível das equações de movimento, através do procedimento de imersão de calibre [35]. Além disso, quando as interações com campos fermiônicos são consideradas, o mapeamento de dualidade é preservado apenas se os termos do tipo Thirring forem levados em consideração, analogamente ao caso *AD*/*MCS* em $2+1$ dimensões. No entanto, as questões relativas à generalização de correntes arbitrárias de matéria não conservada e a prova da dualidade quântica serão elucidadas no presente trabalho.

O objetivo principal deste trabalho é fornecer um método alternativo, por meio da ação mestre [60], para provar a dualidade entre as teorias $AD_{B\wedge F}$ e *MKR*, quando os campos do setor $AD_{B\wedge F}$ se acoplam linearmente com correntes não conservadas, composto por campos dinâmicos arbitrários da matéria. A abordagem da ação mestre tem a vantagem de fornecer uma teoria fundamental que interpola entre os dois modelos e permite uma demonstração mais direta da dualidade no nível quântico. Além disso, o método de ação mestre é uma trilha natural para a generalização supersimétrica da dualidade estudada aqui [38].

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 3 iremos revisitar a dualidade AD/MCS com e sem acoplamento com a matéria. No capítulo 4, vamos conhecer alguns métodos de estabelecer a dualidade, nosso laboratório será a dualidade AD/MCS. No capítulo 5 analisaremos a dualidade em $3+1$ dimensões com o termo $B \wedge F$, neste capítulo supriremos as questões relativas à generalização de correntes arbitrárias e a prova da dualidade quântica. Estes resultados foram publicados em [61].

2 DUALIDADE

Neste capítulo, faremos uma apresentação ao estudo da equivalência entre o modelo de Maxwell-Chern-Simons *MCS* e o modelo auto dual *AD*. Este estudo foi publicado primeiramente por [27]. Vamos também apresentar uma extensão desta dualidade, acoplando matéria fermiônica e estendendo sua validade ao setor quântico, por meio da ação mestre.

2.1 Introdução à dualidade

O estudo feito por S. Deser e R. Jackiw [27], teve a intenção de estabelecer um mapeamento do modelo AD [26] com a eletrodinâmica topologicamente massiva, em $(2+1)$ dimensões, conhecida como modelo *MCS*. Podemos encontrar um estudo mais detalhado sobre as propriedades desta eletrodinâmica em [62]. O modelo *MCS* tem simetria de calibre e descreve uma partícula de spin 1 que tem helicidade definida ± 1, esta característica podemos observar junto ao termo topológico na densidade lagrangiana do modelo. Para nosso estudo, a característica mais empolgante é existir um mapeamento de um modelo que não apresenta a invariância de calibre para o modelo *MCS*, que é invariante de calibre.

A dualidade entre estes os modelos *AD*/*MCS* têm consequências que contemplam não somente a teoria quântica de campos, mas alguns sistemas em matéria condensada. Podemos citar alguns trabalhos relevantes em vários cenários da física, no contexto de duas dimensões [21, 63, 64]. Em dimensão maior, três dimensões espaço temporais[22, 65, 66]. Os êxitos dos trabalhos de dualização nos impulsionam de forma positiva a pesquisar nesta área.

Desde a construção do modelo *MCS* [67], seguido pela proposta do modelo *AD* [26] e a equivalência de ambos vide [27], podemos ver a comprovação da equivalência entre os modelos. Esta equivalência se mantém quando os modelos apresentam acoplamento com matéria fermiônica [33] e bosônica [68]. Várias técnicas para encontrar uma teoria dual foram propostas. Tornando a busca da dualidade um assunto sempre atual.

Um exemplo de técnica que possibiliza a expansão do estudo da dualidade, e o método da **projeção dual** proposta por [69, 70], que consiste em separar as helicidades do modelo. Outro método adicional, é o mecanismo proposto por [71–73], que faz o processo inverso da projeção dual, mecanismo comumente chamando de **soldagem**.

Podemos idealizar uma teoria não invariante de calibre, por exemplo a teoria *AD*, como uma teoria que apresenta a invariância de calibre porem com o calibre fixado. Este pensamento nos sugere um outro método de estabelecer uma equivalência entre dois modelos. Tal método trata de “embutir”uma simetria de calibre na teoria não invariante, desta forma obtendo uma teoria invariante. A aplicação desta ideia no cenário de equivalência foi proposta por [74].

Recentemente foi publicado um trabalho onde os autores estabelecem a equivalência de uma superfície bidimensional ao um modelo unidimensional, descrevendo a superfície como uma coleção de fios unidimensionais. Desta forma os autores conseguiram estabelecer uma conexão entre uma rede de fios quânticos com férmions em uma superfície com bóson de baixas energias. Evidenciando como a dualidade de bosonização unidimensional gera à bidimensional [25].

Devido a essas diversas ferramentas, é previsível que possamos analisar a equivalência em sistemas mais complexos. Exemplo desse tipo de exploração ocorre na Eletrodinâmica Quântica *QED* com um termo de violação de Lorentz [75]. Neste trabalho os autores não estabeleceram a ação mestre, método presente em [27], o que dificulta a análise através das integrais de caminho. Desta forma a equivalência quântica foi estabelecida a nível de árvore por meio do espalhamento elétron-elétron.

Nas próximas seções, apresentaremos a dualidade contida no eletromagnetismo de Maxwell e posteriormente a dualidade *MCS*/*AD* sem e com acoplamento com matéria seguindo a descrição de [33].

2.2 Dualidade no Eletromagnetismo

O eletromagnetismo de Maxwell pode ser descrito por quatro equações, que levam seu nome, podendo ser escritas no sistema internacional de unidades (*SI*) como,

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, && \text{(Lei de Gauus)} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, && \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, && \text{(Lei de Faraday)} \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. && \text{(Lei de Ampère-Maxwell)}
\end{aligned}
$$

Estas equações nos indicam que os campos elétricos podem ser produzidos por densidade de carga elétrica (ρ) ou pela a variação dos campos magnéticos. Por outro lado, podemos afirmar que os campos magnéticos podem ser obtidos tanto por densidade de correntes ($\vec{J}$) quanto pela a variação dos campos elétricos. Outro fato que podemos observando nas equações de Maxwell, que devido a não existência de monopolos magnéticos, há uma quebra na simetria das equações. Por outro lado, observando as equações de Maxwell no regime longe das as correstes (J) e das densidades de cargas (ρ), obtemos um conjunto de equações que apresentam uma forma simétrica, diferente do caso anterior:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \;= 0; \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} \;= -\partial_t\vec{B}; \tag{2.1}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}; \;= 0; \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} \;= \partial_t\vec{E}, \tag{2.2}$$

nas equações acima foram usadas as definições: $\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$ e $c = 1$. Em 2.1 e 2.2 percebemos que ao substituir $\vec{E} \to \vec{B}$ e $\vec{B} \to -\vec{E}$, o primeiro conjunto de equações se transforma no segundo e vice-versa.

Esta transformação de dualidade nos indica que no vácuo, longe das cargas e corrente, os campos elétricos e magnéticos são indistinguíveis. O sinal negativo é resultado da estrutura do espaço-tempo de Minkowski. A não observância da carga magnética, monopolo magnético, quebra a simetria das equações.

Podemos escolher outra abordagem para demonstrar esta mesma dualidade, agora enfatizando a invariância de Lorentz. Para esta tarefa, vamos escrever as equações de Maxwell utilizando o tensor antissimétrico $F_{\mu\nu}$, o uso deste tensor faz-se necessário visto que as componentes dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ ficam misturados ao passar de um sistema inercial para outro. A definição do tensor $F_{\mu\nu}$ é:

$$F_{0i} \equiv -E_i, \qquad F^{ij} = -\epsilon^{ijk}B_k \qquad \text{ou} \qquad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \tag{2.3}$$

onde $A_\mu = (A_0, A_i)$ são os potencias escalar e vetoriais respectivamente. Podemos optar por escrever o tensor $F^{\mu\nu}$ na forma de matriz:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

O tensor antissimétrico $F^{\mu\nu}$ pode ser reescrito de outra maneira e levando as mesmas transformações dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ de um referencial inercial para outro. Esta nova maneira chamaremos de tensor dual $\tilde{F}^{\mu\nu}$, definimos sua forma matricial como:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^x & -B^y & -B^z \\ B^x & 0 & E_z & -E_y \\ B^y & -E_z & 0 & E_x \\ B^z & -E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Os tensores $F^{\mu\nu}$ e $\tilde{F}^{\mu\nu}$ podem ser mapeados segundo a definição:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \tag{2.4}$$

O termo acima $\tilde{F}^{\mu\nu}$, é conhecido como o dual Hodge do campo $F_{\mu\nu}$. Facilmente podemos comprovar que as quatros equações de Maxwell podem ser reescritas utilizando os tensores $F^{\mu\nu}$ e $\tilde{F}^{\mu\nu}$, tornando as equações mais compactas e simétricas. Adotando a densidade lagrangiana do eletromagnetismo:

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{2.5}$$

encontraremos o seguinte par de equações de movimento:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{2.6}$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{2.7}$$

Podemos reescrever a dualidade entre os campo elétrico $\vec{E}$ e o campo magnético $\vec{B}$ descrita anteriormente por uma simples troca de sinal, pelas as seguintes relações:

$$F^{\mu\nu} \longrightarrow \tilde{F}^{\mu\nu}, \qquad \text{e} \qquad \tilde{F}^{\mu\nu} \longrightarrow -F^{\mu\nu}, \tag{2.8}$$

que nos sugere a possibilidade de escrever a lagrangiana de Maxwell 2.5 somente em termos dos tensores duais:

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4}\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}. \tag{2.9}$$

Ao estender a análise da dualidade dos campos elétricos e magnético para dimensões menores encontraremos resultados interessantes. Em sistemas de $2+1$ dimensões, mantendo a definição do tensor $F^{\mu\nu}$ inalterado. A dualidade deverá ser modificada, pois a natureza dos campos neste novo sistema não é mais compatível. O campo elétrico ainda se transforma como um vetor, entretendo o campo magnético se comporta com um pseudo-escalar. A definição do tensor de Holge $\tilde{F}^{\mu\nu}$ tornará:

$$\tilde{F}^{\mu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\nu\alpha} \tag{2.10}$$

onde $\epsilon^{\mu\nu\alpha}$ é definido com apenas três índices, devido a mudança de dimensionalidade.

As equações de movimento do eletromagnetismo neste sistema, três dimensões espaço temporais, têm as mesmas formas do caso em dimensão maior; $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu} = 0$. Essa equação nos revela que o eletromagnetismo em $2+1$ dimensões, equivale com uma teoria de um campo escalar não massivo.

2.3 Equivalência MCS/AD

2.3.1 Maxwell-Chern-Simons (MCS)

Uma teoria vetorial massiva em $3+1$ dimensões é possível se não for considerada a simetria de calibre, exemplo deste modelo é a teoria de Maxwell-Proca. Porém, se analisarmos em dimensões inferiores encontraremos no caso 2+1 a teoria de Maxwell-Chern-Simons. Sua densidade lagrangiana é definida por:

$$\mathcal{L}_{MCS} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \pm \frac{1}{4}m\epsilon^{\mu\nu\rho}A_{\mu}F_{\nu\rho}. \tag{2.11}$$

Este modelo apresenta invariância de calibre a menos de uma derivada total, o que restringe um grau de liberdade. Ao fixarmos o calibre por exemplo, o calibre de Lorentz $\partial_{\mu}A^{\mu} = 0$, retiramos mais um grau de liberdade. Portanto restando somente um grau de liberdade para a teoria. O modelo MCS descreve uma excitação massiva de spin 1 que viola a simetria de paridade e cuja helicidade ± 1 é definida pelo sinal do segundo termo da equação 2.11, também conhecido como termo de Chern-Simons $\epsilon^{\mu\nu\alpha}A_{\mu}\partial_{\nu}A_{\alpha}$. A massa do modelo tem sua origem no termo de Chern-Simons. Esse termo é um invariante topológico, o que significa que ele não depende da métrica. O termo de Chern-Simons não é capaz de "sentir"a curvatura do espaço-tempo, tonando-se assim conhecida como um modelo topologicamente massivo. Calculando as equações de movimento do modelo MCS,

$$m\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial^{\nu}A^{\alpha} - \partial_{\lambda}\partial^{\mu}A^{\lambda} + \partial_{\rho}\partial^{\rho}A^{\mu} = 0. \tag{2.12}$$

A partir deste ponto escolheremos o sinal positivo para o termo de Chern Simons no modelo, vale ressaltar que esta escolha não tem preferência de sinal estamos adotando por convenção.

Podemos reescrever a equação acima de maneira mais compacta, para isto vamos utilizar a seguinte definição: $F_{\mu} \equiv \frac{1}{m}\epsilon_{\mu\nu\rho}\partial^{\nu}A^{\rho}$. Deste modo, a equação de movimento para o modelo MCS, torna-se:

$$m^2F^{\mu} - m\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_{\nu}F_{\rho} = 0. \tag{2.13}$$

No modelo MCS temos que adicionar um fixador de calibre, caso contrário a obtenção do propagador da teoria torna-se impossível, fato devido a invariância de calibre. A escolha do fixador de calibre não deve alterar o comportamento físico do sistema, para calcular o propagador utilizamos este fixador: $\mathcal{L}_{GF} = \frac{(\partial_{\mu}A_{\nu})^2}{2\lambda}$, onde o termo λ é um parâmetro de fixação de calibre. Desta forma a densidade lagrangiana que iremos considerar é;

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{MCS} + \mathcal{L}_{fg}$$
$$\mathcal{L}_{MCS+fg} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}m\epsilon^{\mu\nu\alpha}A_{\mu}F^{\nu\alpha} + \frac{1}{2\lambda}(\partial_{\mu}A^{\nu})^2. \tag{2.14}$$

Para calcularmos o propagador da teoria, reescrever a lagrangiana MCS no formato onde evidência o operador de onda do modelo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A_{\mu}\mathcal{O}^{\mu\nu}A_{\nu}$$
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A_{\mu}\left[\eta^{\mu\nu}\Box - \partial^{\mu}\partial^{\nu} + m\epsilon^{\mu\alpha\nu}\partial_{\alpha} + \frac{\partial^{\mu}\partial^{\nu}}{\lambda}\right]A_{\nu} \tag{2.15}$$

a expressão entre coxetes, operador de onda, chamaremos de $\mathcal{O}^{\mu\nu}_{MCS}$, e o termo $\Box \equiv \partial^{\mu}\partial_{\mu}$. Para obtenção do propagador deveremos invertê-lo. Para esta etapa podemos fazer uso dos operadores de projeção vetorial.

Fazendo uso do teorema de Helmholtz, que afirma ser possível decompor um campo vetorial V_{μ} como uma soma de duas contribuições: uma com divergente nulo, componente transversal do vetor V^T_{μ}; e outra com rotacional nulo , componente longitudinal V^L_{μ}.

$$V_{\mu} = V^L_{\mu} + V^T_{\mu}, \tag{2.16}$$
$$\partial^{\nu}V^L_{\mu} - \partial^{\mu}V^L_{\nu} = 0, \tag{2.17}$$
$$\partial^{\mu}V^T_{\mu} = 0. \tag{2.18}$$

Podemos resolver estas equações tomando V^L_{μ} sob a forma de um gradiente de um campo escalar:

$$V^L_{\mu} \equiv \partial_{\mu}\alpha \to \partial^{\nu}V^L_{\mu} - \partial^{\mu}V^L_{\nu} = \partial^{\nu}\partial_{\mu}\alpha - \partial^{\mu}\partial_{\nu}\alpha = 0, \tag{2.19}$$
$$V^T_{\mu} \equiv V_{\mu} - V^L_{\mu}. \tag{2.20}$$

Desta maneira, podemos utilizar as definições acima para calcular a seguinte quantidade:

$$\partial_{\mu}\partial^{\nu}V_{\nu} = \partial_{\mu}\partial^{\nu}V^L_{\nu} + \partial_{\mu}\partial^{\nu}V^T_{\nu} \tag{2.21}$$
$$= \partial_{\mu}\partial^{\nu}\partial_{\nu}\alpha = \Box\partial_{\mu}\alpha \tag{2.22}$$

Realizando a passagem para espaço dos momentos via uma transformada de Fourier da expressão acima, temos

$$\partial_\mu \partial^\nu V_\nu = \Box \partial_\mu \alpha \quad \longmapsto \quad \kappa_\mu \kappa^\nu \tilde{V}_\nu = \kappa^2 \kappa_\mu \tilde{\alpha} \tag{2.23}$$

$$\longmapsto \quad \tilde{\alpha} = \frac{\kappa^\nu}{\kappa^2} \tilde{V}_\nu \tag{2.24}$$

o que nos leva as expressões;

$$\tilde{V}^L_\mu \equiv \kappa_\mu \tilde{\alpha} = \left(\frac{\kappa_\mu \kappa_\nu}{\kappa^2} \right) \tilde{V}^\nu, \tag{2.25}$$

$$\tilde{V}^T_\mu \equiv \tilde{V}_\mu - \tilde{V}^L_\mu = \left(\eta_{\mu\nu} - \left[\frac{\kappa_\mu \kappa_\nu}{\kappa^2} \right] \right) \tilde{V}^\nu. \tag{2.26}$$

Podemos tratar as duas expressões anteriores no espaço das posições simbolicamente como;

$$V^L_\mu = \left(\frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\Box} \right) V^\nu, \tag{2.27}$$

$$V^T_\mu = \left(\eta_{\mu\nu} - \left[\frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\Box} \right] \right) V^\nu. \tag{2.28}$$

Os termos destacados entre parênteses funcionam como operadores, atuando em um vetor V^μ seleciona apenas uma componente do vetor. Para o operador que seleciona a componente longitudinal chamaremos de $\omega_{\mu\nu}$ e para o que seleciona a componente transversal será o $\theta_{\mu\nu}$:

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\Box}, \qquad \theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\Box}. \tag{2.29}$$

Os operadores de projeção, $\omega_{\mu\nu}$ e $\theta_{\mu\nu}$, são idempotentes e ortogonais;

$$\omega_{\mu\nu} \omega^\nu_\beta = \omega_{\mu\beta}, \tag{2.30}$$

$$\theta_{\mu\alpha} \theta^\alpha_\beta = \theta_{\mu\beta}, \tag{2.31}$$

$$\omega_{\mu\nu} \theta^\nu_\beta = 0, \tag{2.32}$$

a soma dos projetores nos leva a identidade,

$$\omega_{\mu\nu} + \theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}. \tag{2.33}$$

A construção de uma tabela com os produtos dos operadores, nos auxiliará na tarefa de calcular o propagador MCS,

Na tabela 1 foi introduzido um novo operador vetorial, necessário devido a presença do termos de Chern-Simons na lagrangiana 2.14. A definição deste operador é: $S_{\mu\alpha} \equiv m \epsilon_{\mu\nu\alpha} \partial^\nu$.

Reescrevendo o operador $\mathcal{O}_{MCS}$, termos entre colchetes na expressão em 2.15, em

	ω^{ν}_{α}	θ^{μ}_{α}	S^{ν}_{α}
$\omega_{\mu\nu}$	$\omega_{\mu\alpha}$	0	0
$\theta_{\mu\nu}$	0	$\theta_{\mu\alpha}$	$S_{\mu\alpha}$
$S_{\mu\nu}$	0	$S_{\mu\alpha}$	$-m^2\Box\theta_{\mu\alpha}$

Tabela 1: Produtos dos operadores de projeção.

função dos operadores vetoriais de projeção encontraremos:

$$\mathcal{O}^{\mu\nu}_{MCS} = \eta^{\mu\nu}\Box + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)\partial^{\mu}\partial^{\nu} + m\epsilon^{\mu\alpha\nu}\partial_{\alpha} \tag{2.34}$$

Expandindo este operador em termos dos operadores de projeção encontramos a seguinte expressão:

$$\mathcal{O}^{\mu\nu} = \Box\theta^{\mu\nu} + \frac{\Box}{\lambda}\omega^{\mu\nu} + S^{\mu\nu} \tag{2.35}$$

O cálculo do propagador, trata-se de inverter a equação 2.35. Com esta finalidade vamos utilizar um modelo genérico de operador de onda inverso, como:

$$\mathcal{O}^{-1}_{\alpha\beta} = A\theta_{\alpha\beta} + B\omega_{\alpha\beta} + CS_{\alpha\beta}. \tag{2.36}$$

Faremos uso da identidade $\mathcal{O}^{\mu\nu}\mathcal{O}^{-1}_{\nu\alpha} = I^{\mu}_{\alpha}$ e utilizaremos a tabela 1 para nos auxiliar com os produtos dos projetores. Encontraremos o seguinte sistema de equações para determinar os coeficientes de 2.36:

$$A = -\Box C \tag{2.37}$$

$$B = \frac{\lambda}{\Box} \tag{2.38}$$

$$1 = -A\Box - m^2\Box^2 C. \tag{2.39}$$

Resultando como produto final o propagador escrito em função dos projetores:

$$\mathcal{O}^{-1}_{\mu\nu}(\kappa) = \frac{1}{\Box + m^2}\theta_{\mu\nu} + \frac{\lambda}{\Box}\omega_{\mu\nu} - \frac{1}{\Box(\Box + m^2)}S_{\mu\nu} \tag{2.40}$$

Retirando a dependência explicita dos operadores vetoriais, nos leva a conhecida expressão do propagador da teoria Maxwell-Chern-Simons:

$$\Delta^{\mu\nu}_{MCS} = \frac{1}{\Box + m^2}\left[\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^{\mu}\partial^{\nu}}{\Box} - m\epsilon^{\mu\alpha\nu}\frac{\partial_{\alpha}}{\Box}\right] + \lambda\frac{\partial^{\mu}\partial^{\nu}}{\Box^2}. \tag{2.41}$$

Deixando o propagador escrito nos espaços dos momentos teremos,

$$\Delta^{\mu\nu}_{MCS}(\kappa) = -\frac{1}{\kappa^2 - m^2}\left[g^{\mu\nu} - \frac{\kappa^\mu \kappa^\nu}{\kappa^2} + im\epsilon^{\mu\alpha\nu}\frac{\kappa_\alpha}{\kappa^2}\right] - \lambda\frac{\kappa^\mu \kappa^\nu}{\kappa^4}. \tag{2.42}$$

O resultado acima nos revela um polo em $\kappa^2 = m^2$. Em resultados experimentais o fator de fixação λ não deve exercer nenhuma contribuição. A fixação de calibre foi necessária devido a impossibilidade de inversão do operador de onda 2.35. Fortalecendo o argumento de não contribuição física do termo da fixação, o propagador aparece no cálculo da energia potencial contraído com as correntes conservadas, logo os termos do propagador que contém κ_μ ou κ_ν não contribuirão. Isso ocorre em virtude da conservação da corrente no espaço dos momentos ser expressa por $\kappa_\mu j^\mu = 0$, que implica dizer κ_μ e j^μ são ortogonais.

2.3.2 Modelo Auto-Dual (AD)

Na seção anterior falamos sobre o modelo vetorial topologicamente massivo em 2+1 dimensões. Podemos nos questionar se existe alguma relação com o modelo Maxwell-Proca em 2+1 dimensões, pois ambos os modelos descrevem um eletromagnetismo massivo e com dimensionalidades semelhantes. Temos como característica do modelo MCS a invariância de calibre e a descrição de um modo massivo com helicidade definida. No modelo Maxwell-Proca, temos um modelo não invariante de calibre e uma descrição de dois modos massivos de propagação. Estes fatos nos ajudam a acreditar que não existe relação entre os modelos. Consideremos a densidade lagragiana do modelo Maxwell-Proca (MP) como;

$$\mathcal{L}_{MP} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu. \tag{2.43}$$

A equação de movimento deste modelo é dada por:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0. \tag{2.44}$$

Aplicando a derivada ∂_ν na equação acima obtemos a seguinte condição: $\partial_\mu A^\mu = 0$. O que deixa o modelo apenas com dois graus de liberdade massivos independentes e a liberdade de reescreve-lo como:

$$\left(\Box + m^2\right)A^\mu = 0. \tag{2.45}$$

Por outro lado, pode-se escrever explicitamente as excitações do modelo MP, pois estamos em 2+1 dimensões. Este procedimento é conhecido como tirar a raiz quadrada da equação 2.44, apresentado por Townsend [26]. Podemos reescrever a equação 2.44 como;

$$\begin{aligned} &\Box A^{\nu} - \partial_{\mu}\partial^{\nu}A^{\mu} + m^{2}A^{\nu} = 0 \\ &\left(\frac{\Box}{m^{2}}\delta^{\nu}_{\mu} - \frac{\partial_{\mu}\partial^{\nu}}{m^{2}} + \delta^{\nu}_{\mu}\right)A^{\mu} = 0. \end{aligned} \tag{2.46}$$

O termo entre parênteses na equação acima, pode ser apresentado como produto dois outros operadores;

$$\left(\frac{\Box}{m^{2}}\delta^{\nu}_{\mu} - \frac{\partial_{\mu}\partial^{\nu}}{m^{2}} + \delta^{\nu}_{\mu}\right) = \left(g^{\nu\alpha} + \frac{1}{m}\epsilon^{\nu\beta\alpha}\partial_{\beta}\right)\left(g_{\alpha\mu} - \frac{1}{m}\epsilon_{\alpha\rho\mu}\partial^{\rho}\right). \tag{2.47}$$

Desta forma, se um campo satisfaz $\left(g^{\nu\alpha} + \frac{1}{m}\epsilon^{\nu\beta\alpha}\partial_{\beta}\right)f_{\alpha} = 0$ ou $\left(g_{\alpha\mu} - \frac{1}{m}\epsilon_{\alpha\rho\mu}\partial^{\rho}\right)f^{\mu} = 0$, então ele satisfará a equação 2.44. Ou seja, este o procedimento separa as helicidades do modelo que estavam entrelaçadas em 2.46. As equações de movimento para o campo vetorial f^{μ} é dado por;

$$\left(g^{\nu\alpha} \pm \frac{1}{m}\epsilon^{\nu\beta\alpha}\partial_{\beta}\right)f_{\alpha} = 0. \tag{2.48}$$

A densidade lagragiana, uma para cada helicidade, que geram estas equações de movimentos são conhecidas como auto duais $\mathcal{L}_{AD}$. Introduzido originalmente por [26],

$$\mathcal{L}_{AD} = \frac{m^{2}}{2}f_{\mu}f^{\mu} \pm \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}f_{\mu}\partial_{\nu}f_{\rho}. \tag{2.49}$$

Como esperado, este modelo AD, diferentemente do MCS, não apresenta invariância de calibre. O que reforça a não associação com o modelo invariante. O fato de não apresentar invariância de calibre é desnecessário adicionar um fixador de calibre para obtenção do seu propagador. Por conveniência, a partir de agora adotaremos o sinal negativo para o termo de Chern-Simons do modelo AD. Reescrevendo a equação 2.49 no formato a explicitar o operador de onda vide a equação 2.15, teremos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}f_{\mu}\mathcal{O}^{\mu\nu}f_{\nu} \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2}f_{\mu}\left(m^{2}\eta^{\mu\nu} - m\epsilon^{\mu\alpha\nu}\partial_{\alpha}\right)f_{\nu}. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Onde o termo entre parênteses é operador de onda do modelo AD que devemos inverter. Escrevendo explicitamente o operador termos:

$$\mathcal{O}^{\mu\nu}_{AD} = m^{2}\eta^{\mu\nu} - m\epsilon^{\mu\alpha\nu}\partial_{\alpha}. \tag{2.51}$$

Expandido 2.51 em termos dos operadores vetoriais de projeção $\theta^{\mu\nu}$ e $\omega^{\mu\nu}$;

$$\mathcal{O}^{\mu\nu}_{AD} = \theta^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu} - \frac{1}{m^2} S^{\mu\nu}. \tag{2.52}$$

Executado procedimento semelhante ao realizado na seção anterior para a obtenção do operador inverso $\left(\mathcal{O}^{\mu\nu}_{AD}\right)^{-1}$ e usaremos a mesma formar genérica para o propagador,

$$\left(\mathcal{O}^{\mu\alpha}_{AD}\right)^{-1} = A\theta^{\mu\alpha} + B\omega^{\mu\alpha} + CS^{\mu\alpha} \tag{2.53}$$

Usando a propriedade da identidade encontramos os valores para os coeficiente A, B e C do propagador,

$$\left(\mathcal{O}^{\mu\nu}_{AD}\right)^{-1} = \frac{1}{\Box + m^2}\theta^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\omega^{\mu\nu} - \frac{1}{m^2(\Box + m^2)} S^{\mu\nu}, \tag{2.54}$$

retirando a dependência dos projetores encontramos a seguinte forma para o propagador do modelo AD;

$$\left(\mathcal{O}^{\mu\nu}_{AD}\right)^{-1} = \frac{1}{\Box + m^2}\left[\eta^{\mu\nu} + \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{m^2} - \frac{\epsilon^{\mu\rho\nu}\partial_\rho}{m}\right]. \tag{2.55}$$

O que nos leva ao conhecido propagador do modelo AD escrito explicitamente em termos dos momentos,

$$\Delta^{\mu\nu}_{AD}(\kappa) = -\frac{1}{\kappa^2 - m^2}\left[\eta^{\mu\nu} - \frac{\kappa^\mu \kappa^\nu}{m^2} + \frac{i\epsilon^{\mu\rho\nu}\kappa_\rho}{m}\right]. \tag{2.56}$$

Na equação (2.56), fica evidente que o modelo AD, assim com o modelo MCS apresenta um polo em $\kappa^2 = m^2$. Comparando as equações de movimento dos modelos percebemos mais semelhanças:

$$\left[\begin{array}{l} m^2 F^\mu - m\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu F_\rho = 0, \\ m^2 f^\mu - m\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu f_\rho = 0. \end{array}\right.$$

O comparativo acima fica nítido que fazendo o mapeamento $f_\mu \leftrightarrow F_\mu$, estabelecemos uma equivalência entre os modelos $MCS \leftrightarrow AD$. Esta equivalência pode ser demonstrada diretamente pela as equações de movimento como foi apresentada, ou podemos optar por outras técnicas que iremos expor mais adiante. Em [67] Deser e Jackiw, mostraram a equivalência MCS/AD encontrando um mapeamento entre as álgebras canônicas e identificando os respetivos tensores de energia-momento, demonstraram ainda que ambas as teorias poderiam ser obtidas a partir de uma lagrangiana comum denominada lagrangiana mestra.

2.4 Equivalência MCS/AD acoplada com matéria fermiônica

Nesta seção, vamos estudar como a dualidade MCS/AD se comporta ao acoplarmos matéria fermiônica, uma extensão da dualidade abordada em [27]. No modelo AD adicionaremos além da lagrangiana de Dirac, um termo de acoplamento mínimo, sem derivadas, que mistura o campo vetorial auto dual f_μ com o campo de Dirac ψ. A lagrangiana AD acoplado com férmions é dado por:

$$\mathcal{L}_{AD}^{min} = \mathcal{L}_{AD} - ef_\mu J^\mu + \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi, \tag{2.57}$$

onde o termo $J^\mu \equiv \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ e M é a massa do férmion. Analisando somente a equivalência mostrada na seção anterior, a identificações $f_\mu \leftrightarrow F_\mu$, podemos perceber que o acoplamento mínimo tornará um acoplamento "magnético"no modelo MCS, este tipo de acoplamento é não mínimo porque agora o termo contém derivada,

$$\begin{aligned} -ef_\mu J^\mu &= -\frac{e}{m}\epsilon_{\mu\nu\alpha}\partial^\nu A^\alpha J^\mu &(2.58)\\ &= -\frac{e}{m}\epsilon_{\mu\nu\alpha}A^\mu \partial^\nu J^\alpha &(2.59)\\ &= -eA_\mu G^\mu, &(2.60)\end{aligned}$$

onde $G^\mu \equiv \frac{1}{m}\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu J_\rho$. Desta forma, a lagrangiana que seria equivalente a (2.57) é dada por:

$$\mathcal{L}_{MCS}^{mag} = \mathcal{L}_{MCS} - eA_\mu G^\mu + \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi. \tag{2.61}$$

De posse dessas duas lagrangianas (2.57) e (2.61), podemos seguir a investigação através das equações de movimento dos modelos. As equações de movimento para os campos f^μ e A^μ são respetivamente:

$$\begin{aligned} m^2 f^\mu - m\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu f_\rho &= eJ^\mu, &(2.62)\\ m^2 F^\mu - m\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu F_\rho &= eG^\mu, &(2.63)\end{aligned}$$

afirmando que os modelos (2.57) e (2.61), satisfazem a equações de movimento semelhantes com a seguinte identificação:

$$f^\mu \to F^\mu \Rightarrow J^\mu \to G^\mu. \tag{2.64}$$

Como isto poderíamos, erroneamente, dizer que a equivalência dos modelos MCS/AD não mudaria ao introduzir uma interação com a matéria fermiônica. Para estarmos certos que tal afirmação é verdadeira, uma avaliação no setor fermiônico faz-se necessário. Desta forma,a verificação ou não da equivalência será mais assertiva. As equações de movimento para o setor fermiônico acoplados com os modelos MCS e AD são respectivamente:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi = ef_\mu\gamma^\mu\psi \tag{2.65}$$
$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi = \frac{e}{m}\epsilon_{\mu\nu\rho}\partial^\nu A^\rho\gamma^\mu\psi. \tag{2.66}$$

Estas equações ainda são compatíveis como o mapeamento $f_\mu \to F_\mu$. Por outro lado, podemos reescrevê-las de modo que não sejam mais dependentes dos campos vetoriais. Neste sentido podemos fazer a seguinte avaliação na equação (2.62):

$$\begin{aligned} eJ^\mu &= m^2 f^\mu - m\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu f_\rho \\ eJ^\mu &= \left(m^2\eta^{\mu\rho} - m\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu\right) f_\rho \\ eJ^\mu &= \mathcal{O}^{\mu\rho}_{AD} f_\rho. \end{aligned} \tag{2.67}$$

O termo $\mathcal{O}^{\mu\nu}_{AD}$ é o operador de onda da teoria, na seção anterior vimos como encontrar seu inverso $\left(\mathcal{O}^{\mu\nu}_{AD}\right)^{-1}$, ambos podendo ser escritos nos espaços dos momentos ou em termos dos operadores vetoriais de projeção. Sabendo disso, podemos escrever 2.67 como:

$$f^\rho = e\left(\mathcal{O}^{\rho\mu}_{AD}\right)^{-1} J_\mu. \tag{2.68}$$

Com este resultado, obtemos a equação (2.65) sem nenhuma menção aos campos vetoriais da teoria AD:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi = e^2\left(\mathcal{O}^{\mu\nu}_{AD}\right)^{-1} J_\nu\gamma_\mu\psi. \tag{2.69}$$

Estendendo o estudo feito para a equação (2.65), vamos escrever (2.66) dependente somente dos campos de matéria, iniciando da equação (2.63):

$$\begin{aligned} m^2 F^\mu - m\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu F_\rho &= eG^\mu \\ \left(m^2\eta^{\mu\rho} - m\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu\right) F_\rho &= eG_\mu \\ \mathcal{O}^{\rho\mu}_{AD} F^\rho &= eG_\mu \\ F^\rho &= e\left(\mathcal{O}^{\rho\mu}_{AD}\right)^{-1} G_\mu, \end{aligned} \tag{2.70}$$

desta forma a equação (2.66) torna-se:

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi &= \frac{e}{m}\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho\gamma_\mu\psi \\ &= eF^\mu\gamma_\mu\psi \\ &= e^2\left[\left(\mathcal{O}_{AD}^{\mu\rho}\right)^{-1}G_\rho\right]\gamma_\mu\psi \\ &= \frac{e^2}{m}\left(\mathcal{O}_{AD}^{\mu\rho}\right)^{-1}\epsilon_{\rho\nu\alpha}\partial^\nu J^\alpha\gamma_\mu\psi. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Usaremos a definição do operador de onda (2.70): $\mathcal{O}_{\mu\nu} = m^2\eta_{\mu\nu} - m\epsilon_{\mu\alpha\nu}\partial^\nu$, para reescrever o resultado encontrado anterior:

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi &= \frac{e^2}{m^2}\left(\mathcal{O}_{AD}^{\mu\rho}\right)^{-1}\left(m^2\eta_{\rho\alpha} - \mathcal{O}_{\rho\alpha}\right)J^\alpha\gamma_\mu\psi \\ (i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi &= e^2\left(\mathcal{O}_{AD}^{\mu\rho}\right)^{-1}J_\rho\gamma_\mu\psi - \frac{e^2}{m^2}J^\mu\gamma_\mu\psi. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Comparando este resultado 2.72 com a expressão 2.69 veremos que as equações não são mais semelhantes,

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi &= e^2\left(\mathcal{O}_{AD}^{\mu\nu}\right)^{-1}J_\nu\gamma_\mu\psi \\ (i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi &= e^2\left(\mathcal{O}_{AD}^{\rho\mu}\right)^{-1}J_\mu\gamma_\rho\psi - \frac{e^2}{m^2}J^\mu\gamma_\mu\psi, \end{aligned}$$

porém ao adicionarmos um termo extra na lagrangiana 2.57 ou 2.61, podemos tornar as duas equações acima equivalentes. O termo a ser adicionado deve conter a seguinte forma $\frac{e^2}{2m^2}J_\mu J^\mu$ também conhecido como termo de Thirring. Adicionando este termo na lagrangiana 2.61 temos:

$$\mathcal{L}_{MCS} - eA_\mu G^\mu + \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi - \frac{e^2}{2m^2}J^\mu J_\mu. \tag{2.73}$$

Desta forma reencontramos a equivalência dos modelos, esta adição pode acontecer ocorrer em um modelo ou no outro. Com a escolha de onde vamos adicionar o termo de Thirring, termos que redefinir a equivalência $f^\mu \to F^\mu$ como sendo:

$$F^\mu = f^\mu - \frac{e}{m^2}J^\mu \tag{2.74}$$

Este resultado é muito importante pois mostra que a presença de fontes, mesmo dinâmicas, não modificam o processo de dualização, portanto suas dinâmicas não podem haver alteração. Esta análise de adicionar um acoplamento mínimo ao modelo AD como o caso estudado em [33], que serviu de base para este estudo, não limita a utilização de outros tipos de acoplamentos. Podemos observar em [76] que a ausência de simetria de calibre em AD torna injustificável a utilização de um acoplamento mínimo neste caso. Neste mesmo trabalho o autor relata que é ao usar acoplamentos não mínimos o processo de dualização não modifica a dinâmica dos campos, embora mude a natureza do acoplamento.

Outro importante resultado que esta dualidade nos revela é poder contornar alguma dificuldade operacional de uma teoria, por exemplo o termo de Thirring não é renormalizável perturbativamente. Porém podemos estabelecer a equivalência com uma teoria renormalizável. O que torna esta dificuldade inicial contornável [33].

Apesar de serem bastantes relevantes as duas equivalências discutidas até aqui, podemos fazer questionamentos: Estas dualidades são válidas em nível quântico ou qual seria o comportamento ao ser acoplado com outro tipo de campo, por exemplo o escalar? Para responder tais questionamentos, devemos introduzir algumas técnicas de estabelecer a equivalência. No próximo capítulo vamos analisar alguns métodos, não são todos existentes na literatura, que nos ajudará no modelo tratado futuramente neste trabalho. Os métodos a seguir responderam os dois questionamentos feios anteriormente.

3 MÉTODOS DE DUALIDADES.

Neste capítulo, trataremos de alguns métodos que visam estabelecer a equivalência entre dois modelos tanto a nível clássico como quântico. Também trataremos de um método para encontrar uma teoria dual a partir de uma teoria preexistente. Não demonstrei todas as técnicas encontradas na literatura, porém as discutidas aqui têm diversas aplicabilidades e auxiliou no nosso artigo, trabalho tratado no próximo capítulo.

3.1 Dualidade via Lagrangiana Mestre.

Vamos construir uma densidade lagrangiana capaz de descrever ambos os modelos estudados. Desta forma afirmaremos que tanto o modelo AD, quanto MCS tem uma origem comum. Esta lagrangiana é nomeada como mestre ou interpolante. Ao resolvermos as equações de movimento desta densidade lagrangiana, para os campos f_μ ou A_μ, encontraremos os modelo MCS ou AD respectivamente. A lagrangiana mestre é obtida reduzindo a ordem das derivadas no modelo invariante de calibre MCS e introduziremos um campo auxiliar Π_μ para esta tarefa. Primeiramente, escreveremos o termo $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ em função de produtos dos tensores de Levi-Civita $\epsilon^{\mu\nu\alpha}$, note que estamos trabalhando em $2+1$ dimensões:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{MCS} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu\partial_\nu A_\alpha \\
\mathcal{L}_{MCS} &= -\frac{1}{2}(\epsilon_{\mu\nu\alpha}\partial^\nu A^\alpha)(\epsilon^{\mu\rho\lambda}\partial_\rho A_\lambda) + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu\partial_\nu A_\alpha.
\end{aligned}
$$

Agora podemos introduzir o campo auxiliar. Que irá rebaixar a ordem todos os termos da lagrangiana que contém derivadas de segunda ordem,

$$
\mathcal{L}_{MCS} \rightarrow \mathcal{L}_M = a\Pi_\mu(\epsilon^{\mu\rho\lambda}\partial_\rho A_\lambda) + b\Pi_\mu\Pi^\mu + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu\partial_\nu A_\alpha. \tag{3.1}
$$

Os parâmetros adicionados a, b temos que fixá-los posteriormente. Note que, na lagrangiana mestre foi introduzido um termo quadrático do campo auxiliar. Este termo é essencial para possamos resolver a equação de movimento do campo. Derivando funcionalmente a densidade lagrangiana mestre em relação a Π_μ e igualando a zero encontramos a seguinte expressão:

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta\Pi_\mu} &= a(\epsilon^{\mu\rho\lambda}\partial_\rho A_\lambda) + 2b\Pi^\mu = 0 \\
\Pi^\mu &= -\frac{a}{2b}(\epsilon^{\mu\rho\lambda}\partial_\rho A_\lambda).
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

Substituindo o resultado encontrado 3.2 na lagrangiana mestre 3.1, eliminaremos a dependência do campo auxiliar. Desta forma retornaremos ao modelo inicial MCS, este procedimento nos ajudará a fixar os parâmetros a e b. Realizando a substituição encontraremos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M &= -\frac{a^2}{2b}(\epsilon_{\mu\rho\lambda}\partial^\rho A^\lambda)(\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\nu A_\alpha) + \frac{a^2}{4b}(\epsilon_{\mu\nu\alpha}\partial^\nu A^\alpha)(\epsilon^{\mu\rho\lambda}\partial_\rho A_\lambda) + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu\partial_\nu A_\alpha \\ \mathcal{L}_M &= \mathcal{L}_{MCS} = -\frac{a^2}{4b}(\epsilon_{\mu\nu\alpha}\partial^\nu A^\alpha)(\epsilon^{\mu\rho\lambda}\partial_\rho A_\lambda) + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu\partial_\nu A_\alpha. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Comparando o resultado 3.3 com o modelo MCS, descrito em 2.11. Podemos retirar as seguintes igualdades:

$$-\frac{a^2}{4b} = -\frac{1}{2} \to a^2 = 2b. \tag{3.4}$$

Ainda não somos capazes de fixar completamente os parâmetros a e b. Por outro lado, se calcularmos a equação de movimento para A_μ e substituirmos na lagrangiana mestre, de maneira análoga a que fizemos para o campo $\Pi\mu$, conseguiremos fixar os parâmetros desejados. Neste caso, teremos como resultado a substituição uma densidade lagrangiana não dependente do campo vetorial A_μ. Calculando a equação de movimento:

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta A_\mu} &= a\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\nu\Pi_\alpha + m\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\nu A_\alpha = 0 \\ A_\alpha &= -\frac{a}{m}\Pi_\alpha + \partial_\alpha\phi. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Substituindo este resultado na lagrangiana mestre 3.1, eliminaremos o campo A_μ do modelo. Resultando em uma lagrangiana totalmente dependente de Π_μ:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M &= a\Pi_\mu(\epsilon^{\mu\rho\lambda}\partial_\rho A_\lambda) + b\Pi_\mu\Pi^\mu + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu\partial_\nu A_\alpha \\ \mathcal{L}_M &= a\Pi_\mu\epsilon^{\mu\rho\lambda}\partial_\rho\left(-\frac{a}{m}\Pi_\lambda + \partial_\lambda\phi\right) + b\Pi_\mu\Pi^\mu + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}\left(-\frac{a}{m}\Pi_\mu + \partial_\mu\phi\right)\partial_\nu\left(-\frac{a}{m}\Pi_\alpha + \partial_\alpha\phi\right) \\ \mathcal{L}_M &= b\Pi_\mu\Pi^\mu - \left(\frac{a^2}{2m}\right)\epsilon^{\mu\nu\alpha}\Pi_\mu\partial_\nu\Pi_\alpha. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Observando o resultado anterior 3.6, percebemos que esta equação tem a mesma forma do modelo AD, descrito por 2.49. Desta forma podemos renomear $\Pi_\mu \to f_\mu$. Como 3.6 é de fato o modelo AD os parâmetros a e b, ainda não fixados, podem ser finalmente encontrados por simples comparação com o modelo citado:

$$b = \frac{m^2}{2}; \qquad\qquad -\frac{a^2}{2m} = -\frac{m}{2} \to a = \pm m. \tag{3.7}$$

Sendo assim podemos reescrever a lagrangiana mestre com todos os coeficientes definidos:

$$\mathcal{L}_M = \frac{m^2}{2}\Pi_\mu\Pi^\mu \pm m\epsilon^{\mu\nu\alpha}\Pi_\mu\partial_\nu A_\alpha + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu\partial_\nu A_\alpha. \tag{3.8}$$

Utilizando a definição do tensor dual $F_\mu = \frac{1}{m}\epsilon_{\mu\nu\alpha}\partial^\nu A^\alpha$, além de fixar o sinal no parâmetro $a = -m$, por conveniência, resgatamos o resultado original encontrado em [27];

$$\mathcal{L}_M = \frac{m^2}{2}f_\mu f^\mu - m^2 f_\mu F^\mu + \frac{m}{2}F^\mu A_\mu. \tag{3.9}$$

Com este procedimento em mãos, as dificuldades de um tratamento em modelos mais complicados serão aliviadas. Com a lagrangiana mestre definida, podemos seguir para uma análise a nível quântico. Na próxima seção analisaremos a equivalência quântica por meio das integrais de trajetória, esta abordagem é possível graças a determinação da densidade lagrangiana mestre do modelo.

3.2 Equivalência MCS/AD nível quântico.

Para uma fundamentação no estudo da dualidade a nível quântico, vamos escrever o funcional gerador definido genericamente por:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp\left(i\int d^4x\left[\mathcal{L}(\phi) + J\phi\right]\right). \tag{3.10}$$

Nossa densidade lagrangiana será a mestre definida em 3.9. Nela temos dois campos vetoriais A_μ e f_ν por isso vamos adicionar duas fontes externas, uma para cada campo. Outro ponto adicional do modelo estudado é que ele contém um termo de Chern-Simons, e sabemos que esse tipo de termo é invariante de calibre. Desta forma à adição de um termo fixador de calibre no funcional gerador faz-se necessário,

$$Z[j,g] = \int \mathcal{D}f^\mu\mathcal{D}A^\nu \exp\left(i\int d^3x[\mathcal{L}_M - ef_\mu J^\mu - aA_\mu g^\mu + \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \mathcal{L}(\psi)]\right). \tag{3.11}$$

As duas fontes adicionadas J^μ e g^μ, vamos impor que elas dependam somente dos campos de matéria. Seguindo a predição do artigo [33], fonte g^μ terá sua forma arbitraria enquanto J^μ segue a forma já definida no texto $J^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$. O caráter arbitrário de g^μ tornará importante, pois assim poderemos ajusta-lá com o intuito de estabelecer a equivalência MCS/AD encontrada a nível clássico. O termo $\mathcal{L}(\psi)$ é a densidade lagrangiana do campos de matéria, como estamos seguindo o resultado de [33] este termo é a lagrangiana de Dirac.

Teremos então que integrar funcionalmente o gerador 3.11 duas vezes. Uma em função do campo f_μ, assim eliminaremos toda sua dependência. Como resultado esperamos encontrar uma equação tipo MCS. A segunda integração em 3.11 ocorre em relação ao campo

A_μ. Agora o resultado esperado é o modelo AD. Termos adicionais podem aparecer no processo de integração. Integrando sobre todas as configurações do campo f_μ, teremos:

$$Z[j,g] = \int \mathcal{D}A^\nu e^{i\int d^3x \mathcal{L}(A)} \int \mathcal{D}f^\mu \exp\left(i\int d^3x \frac{m^2}{2} f_\mu f^\mu + f_\mu\left(-eJ^\mu - m^2F^\mu\right)\right), \tag{3.12}$$

onde:

$$\mathcal{L}(A) = \frac{m}{2}F^\mu A_\mu - aA_\mu g^\mu + \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \mathcal{L}(\psi). \tag{3.13}$$

O termo $\mathcal{L}(A)$, pode ser retirado da integral em f_μ devido a sua não dependência. Porém o termo que contém a mistura dos campos f_μ e A_μ, deve ser integrado. Para resolver a integração em f^μ, podemos utilizar o seguinte resultado encontrado em B.12,

$$\int \exp\left(-\left[\frac{1}{2}(x,\mathcal{O}x) + (J,x) + c\right]\right) = \exp\left(\frac{1}{2}(J,\mathcal{O}^{-1}J) - c\right)(\det \mathcal{O})^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.14}$$

Reescrevendo o integrando de 3.12 de forma compatível com o 3.14,

$$-\frac{1}{2}f_\mu\left[-m^2\eta^{\mu\nu}\right]f_\nu + f_\mu\left(-eJ^\mu - m^2F^\mu\right). \tag{3.15}$$

Fazendo o mapeamentos termo a termo encontramos as seguintes igualdades:

$$x = f_\mu; \qquad c = 0; \qquad J = (-ej^\mu - m^2F^\mu); \tag{3.16}$$

$$\mathcal{O} = -m^2\eta^{\mu\nu}; \qquad \mathcal{O}^{-1} = -\frac{\eta^{\mu\nu}}{m^2}. \tag{3.17}$$

A inversão do termo $\mathcal{O}$ se deu de forma quase imediata, o que não aconteceria para formas mais elaboradas. Substituindo os resultados acima na equação 3.14, encontraremos:

$$\begin{aligned}\int \mathcal{D}f^\mu \exp\left(i\int d^3x\left[-\frac{1}{2}f_\mu\left[-m^2\eta^{\mu\nu}\right]f_\nu + f_\mu\left(-eJ^\mu - m^2F^\mu\right)\right]\right)\\ = \exp\left(i\int d^3x\left[-\frac{e^2}{2m^2}J^\mu J_\mu - eA^\mu G_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]\right)(\det A)^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Onde $G_\mu = \frac{1}{m}\epsilon_{\mu\nu\alpha}\partial^\nu J^\alpha$, mesma definição anteriormente comentada. Reafirmando que o processo de estabelecer a equivalência entre os modelos, traduz um acoplamento mínimo no modelo AD para um acoplamento do tipo "magnético"no modelo MCS. Este resultado foi encontrado na análise clássica levando em consideração o mapeamento das teorias. O termo $(\det A)^{-\frac{1}{2}}$ adicional é devido a integração, porém foi omitido na equação por ser independente, ou seja podemos apenas reescalonar a equação. Juntando este resultado com os termos puramente dependentes de A^μ encontramos o gerador funcional para o modelo MCS:

$$Z[j,g] = \int \mathcal{D}A^\mu \exp\left(i\int \mathcal{L}^{(1)}_{eff}\right), \tag{3.19}$$

onde,

$$\mathcal{L}^{(1)}_{eff} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu\partial_\nu A_\alpha - eA_\mu\left(g^\mu + G^\mu\right) - \frac{e^2}{2m^2}J_\mu J^\mu + \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \mathcal{L}(\psi). \tag{3.20}$$

Este resultado nos revela um aspecto curioso no tratamento quântico da dualidade. Adicionando as duas fontes no funcional gerador, J^μ e g^μ onde impomos que devem conter somente campos de matéria, surgem dois termos; um de auto interação e outro tipo rotacional, ambos relacionados com a fonte J^μ. O fato de adicionar as fontes no gerador funcional nos permite prevê os termos adicionais tipo Thirring, este resultado foi obtido no caso clássico.

Para findar o estudo da equivalência quântica, teremos que fazer a integração no gerador funcional sobre as configurações do campo A_μ. Analogamente ao caso anterior, teremos:

$$\begin{aligned} Z[j,g] = &\int \mathcal{D}f^\nu \exp\left(i\int d^3x\mathcal{L}(f^\mu)\right)\times \\ &\int \mathcal{D}A^\mu \exp\left(i\int d^3x\frac{1}{2}F^\mu A_\mu + \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A\mu)^2 + (-eg^\alpha - m\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\mu f_\nu)A_\alpha\right), \end{aligned} \tag{3.21}$$

onde:

$$\mathcal{L}(f) = \frac{m^2}{2}f_\mu f^\mu - ef_\mu J^\mu + \mathcal{L}(\psi). \tag{3.22}$$

Podemos reescrever a integral em relação ao campo A_μ do mesmo molde da 3.14;

$$\begin{aligned} &\int \mathcal{D}A^\mu \exp\left(i\int d^3x\frac{m^2}{2}F^\mu A_\mu + \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 + (-eg^\alpha - m\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\mu f_\nu)A_\alpha\right) \\ &\quad = \int \mathcal{D}A^\mu \exp\left(i\int d^3x - \frac{1}{2}A_\mu\left[-m\epsilon^{\mu\alpha\nu}\partial_\alpha + \lambda\partial^\mu\partial^\nu\right]A_\nu + (-eg^\nu - m\epsilon^{\mu\alpha\nu}\partial_\mu f_\alpha)A_\nu\right). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Neste caso teremos as seguintes identificações com a equação 3.14:

$$\begin{aligned} &x = A_\mu \qquad\qquad c = 0 \qquad\qquad J = (-eg^\nu - m\epsilon^{\mu\alpha\nu}\partial_\mu f_\alpha) \\ &\mathcal{O} = -m\epsilon^{\mu\alpha\nu}\partial_\alpha + \lambda\partial^\mu\partial^\nu \qquad\qquad \mathcal{O}^{-1} = \frac{1}{m\Box}\epsilon^{\mu\alpha\nu}\partial_\alpha + \frac{1}{\lambda\Box^2}\partial^\mu\partial^\nu, \end{aligned} \tag{3.24}$$

o termo $\mathcal{O}$ não tem a estrutura tão simples com o caso anterior. Então para calcularmos o seu inverso, utilizamos o mesmo procedimento descrito na seção 2.3.1, para encontrar o propagador.

Substituindo estes resultados em 3.14, encontramos:

$$\int \mathcal{D}A^{\mu} \exp\left(i\int d^3x - \frac{1}{2}A_{\mu}\left[-m\epsilon^{\mu\alpha\nu}\partial_{\alpha} + \lambda\partial^{\mu}\partial^{\nu}\right]A_{\nu} + (-eg^{\nu} - m\epsilon^{\mu\alpha\nu}\partial_{\mu}f_{\alpha})A_{\nu}\right)$$
$$= \exp\left(i\int d^3x\left[\frac{e^2}{2m}g^{\mu}\left(\epsilon_{\mu\beta\nu}\frac{\partial^{\beta}}{\Box} + \frac{m}{\lambda}\frac{\partial_{\mu}\partial_{\nu}}{\Box^2}\right)g^{\nu} - ef^{\mu}\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_{\mu}\partial_{\nu}}{\Box}\right)g^{\nu} - \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}f_{\mu}\partial_{\nu}f_{\alpha}\right]\right), \tag{3.25}$$

note que neste resultado foi omitido, novamente, o termo $(\det\mathcal{O})^{-\frac{1}{2}}$ por esse termo não alterar o comportamento da equação.

Reescrevendo 3.21 com o novos resultados encontrados, termos uma equação dependente somente do campo f_{μ}:

$$Z[j,g] = \int \mathcal{D}f^{\mu} \exp\left(i\int \mathcal{L}^{(2)}_{eff}\right), \tag{3.26}$$

onde;

$$\mathcal{L}^{(2)}_{eff} = \frac{m^2}{2}f^{\mu}f_{\mu} - \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}f_{\mu}\partial_{\nu}f_{\alpha} - ef^{\mu}\left[j_{\mu} + \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_{\mu}\partial_{\nu}}{\Box}\right)g^{\nu}\right]$$
$$+ \frac{e^2}{2m}g^{\mu}\left(\epsilon_{\mu\beta\nu}\frac{\partial^{\beta}}{\Box} + \frac{m}{\lambda}\frac{\partial_{\mu}\partial_{\nu}}{\Box^2}\right)g^{\nu} + \mathcal{L}(\psi). \tag{3.27}$$

Estes resultados foram obtidos sem especificar a forma das fontes, somente que não devem depender dos campos bosônicos [33]. Para estes resultados apresentados coincidirem com os encontrados em [33], teremos que fixar a forma da corrente g_{μ} na lagrangiana mestre.

Os resultados 3.20 e 3.27 mostram mais do que a dualidade em nível clássico abordado na seção 2.4. Dependendo da escolha das correntes de matéria podemos ter outros cenários, podemos ver isso em [33]. Em especial quando $g_{\mu} \equiv 0$ retornaremos à dualidade já discutida anteriormente.

Nesta seção mostrei a escolha de não especificar uma das formas das correntes na ação mestre, pondo somente uma restrição de não dependência. Uma avaliação mais geral poderia ser realizada não especificando nenhuma das fontes, porém mantendo a condição de acoplamentos lineares com campos externos. Por conta do modelo auto dual ser um não invariante de calibre as correntes de matéria são geralmente não conservadas, o que nos permite trabalhar além de acoplamentos mínimos.

Analisando o modelo 2.57 temos uma teoria renormalizável perturbativamente, enquanto em 2.61 é não-renormalizável. Este fato pode ser verificado observando a contagem de potência na dimensão de massa de A_{μ} é 1/2 e do campo de Dirac é 1. O que nos leva a dimensão da interação magnética igual a 7/2 e do termo de Thirring é 4. Entretanto esta dificuldade pode ser superada. Se considerarmos o caso de N férmions a teoria passa ser renormalizável via expansão $1/N$. Desta forma teremos ambas a teorias compatíveis a análise quântica. Conseguir estabelecer a equivalência clássica e quântica entre esses dois modelos nos proporciona um maior conhecimento exploratório em ambos os casos.

3.3 Dualidade via Imersão de Calibre

Até o presente momento foi mostrado como estabelecer a equivalência entre duas teorias. Porém, se pensarmos em fazer pequenas mudanças em um dos modelos não saberemos a repercussão desta mudança no modelo dual. A fim de sanar esse questionamento os autores [35, 74] nos apresentam o método da imersão de calibre.

Neste método, a ideia é adicionar a simetria de calibre na teoria não-invariante, por exemplo o modelo AD, obtendo uma teoria invariante que deve ser MCS. No método de imersão de calibre, não é necessário sabermos a forma do resultado final o que nos proporciona uma maior liberdade em investigar outros modelos mais complexos.

Iniciaremos nosso estudo do método pela a teoria sem interação e posteriormente acrescentaremos matéria fermiônica e bosônica, o que teria uma complicação se fosse utilizados os métodos anteriores.

3.3.1 Dualidade MSC/AD

Vamos iniciar nosso estudo desse método com o modelo AD descrito em 2.49. Impondo a simetria $\delta f_\mu = \partial_\mu \phi$ ao modelo, é óbvio que este modelo não é invariante sob esta transformação, teremos que adicionar contra termos para podermos imbuir esta simetria, resultando ao fim do processo uma densidade lagrangiana invariante. Iniciando por variar funcionalmente o modelo original:

$$\delta \mathcal{L}_{AD} = K_\mu \delta f^\mu \tag{3.28}$$

onde K_μ é o vetor de Euler, definido por:

$$K_\mu \equiv m^2 f_\mu - m\epsilon_{\mu\nu\alpha}\partial^\nu f^\alpha. \tag{3.29}$$

Quando o vetor de Euler for nulo temos a solução na camada de massa, e o campo f_μ satisfaz a equação de movimento. A primeira imposição que faremos é adicionar um termo em função do vetor de Euler, na lagrangiana original, para compensar a variação descrita em 3.28 da seguinte forma:

$$\mathcal{L}^{(1)}_{AD} = \mathcal{L}_{AD} - B^\mu K_\mu, \tag{3.30}$$

o vínculo inserindo contém um campo auxiliar B_μ, esse termo não deve alterar a dinâmica dos campos originais. O índice na equação acima indica as etapas do processo de imersão. Variando $\mathcal{L}^{(1)}_{AD}$ e impondo a simetria $\delta f_\mu = \partial_\mu \phi$, encontraremos:

$$\delta\mathcal{L}^{(1)}_{AD} = K_\mu \partial_\mu \phi - \delta B^\mu K_\mu - B^\mu \delta K_\mu. \tag{3.31}$$

Nossa segunda imposição será no campo auxiliar, ele deve se transformar da mesma forma do campo básico, $\delta B_\mu = \partial_\mu \phi$. Com isto $\delta\mathcal{L}^{(1)}_{AD}$ torna-se somente:

$$\delta\mathcal{L}^{(1)}_{AD} = -B^\mu \delta K_\mu. \tag{3.32}$$

Escrevendo explicitamente os termos da equação acima e utilizando a simetria imposta aos campos f_μ e B_μ:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}^{(1)}_{AD} &= -B^\mu \delta\left(m^2 f_\mu - m\epsilon_{\mu\nu\alpha}\partial^\nu f^\alpha\right) \\
&= -B^\mu \left(m^2 \delta B_\mu - m\epsilon_{\mu\nu\alpha}\partial^\nu \partial^\alpha \phi\right) \\
&= -m^2 B^\mu \delta B_\mu = -\frac{m^2}{2}\delta\left(B^\mu B_\mu\right).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Finalmente encontramos o termo que podemos adicionar a $\mathcal{L}^{(1)}_{AD}$ para tornar sua variação nula. Com isso escreveremos a segunda lagrangiana interativa do processo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(2)}_{AD} &= \mathcal{L}^{(1)}_{AD} + \frac{m^2}{2} B^\mu B_\mu \\
\mathcal{L}^{(2)}_{AD} &= \mathcal{L}_{AD} - B^\mu K_\mu + \frac{m^2}{2} B^\mu B_\mu
\end{aligned} \tag{3.34}$$

De fato, encontramos uma lagrangiana invariante de calibre. Porém temos que finalizar o processo retirando a dependência do campo auxiliar B_μ no resultado final. Vamos explorar a natureza gaussiana do campo B_μ, para eliminá-lo de 3.34. Calculando a equação de movimento do campo auxiliar no modelo invariante,

$$-K_\mu + m^2 B_\mu = 0 \rightarrow B_\mu = \frac{1}{m^2} K_\mu, \tag{3.35}$$

e substituindo em 3.34 temos:

$$\mathcal{L}^{(2)}_{AD} = \mathcal{L}_{AD} - \frac{1}{2m^2} K^\mu K_\mu. \tag{3.36}$$

Claramente quando $K_\mu = 0$, as duas densidades lagrangianas são idênticas. Explicitando o valor da teoria AD, chegamos:

$$\mathcal{L}_{AD}^{(2)} = \frac{m^2}{2} f^\mu f_\mu - \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha} f_\mu \partial_\nu f_\alpha - \frac{1}{2m^2}\left[m^2 f^\mu - m\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\nu f_\alpha\right]^2 \tag{3.37}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\nu f_\alpha\right]^2 + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha} f_\mu \partial_\nu f_\alpha. \tag{3.38}$$

Para evidenciar o novo aspecto do campo, agora invariante de calibre, podemos renomear $f^\mu = A^\mu$. Assim encontraremos o seguinte modelo:

$$\mathcal{L}_{AD}^{(2)} = \mathcal{L}_{MCS} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\nu A_\alpha. \tag{3.39}$$

Com este resultado, constatamos que o método funciona bem. Nas próximas seções vamos utiliza-los para obter as equivalências com a teoria dual acoplada a matéria fermiônica e bosônica.

3.3.2 Dualidade MSC/AD acoplada com matéria fermiônica

Vamos iniciar nossa análise com o modelo 2.57. Podemos neste ponto, adicionar somente uma fonte genérica e posteriormente estender o resultado.

Calculando o vetor de Euler para este modelo:

$$K_\mu = m^2 f_\mu - m\epsilon_{\mu\nu\alpha}\partial^\nu f^\alpha - eJ^\mu. \tag{3.40}$$

Impondo a simetria $\delta f_\mu = \partial_\mu \phi$ e forçando o campo auxiliar se transformar da mesma maneira do campo básico. Chegaremos a lagrangiana dual invariante:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{AD}^{min(2)} &= \mathcal{L}_{AD}^{min} - \frac{1}{2m^2}K^\mu K_\mu \\ &= \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha} f_\mu \partial_\nu f_\alpha - \frac{1}{2}\left[\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\nu f_\alpha\right]^2 - \frac{e}{m}J^\mu \epsilon_{\mu\nu\alpha}\partial^\nu f^\alpha - \frac{e^2}{2m^2}J^\mu J_\mu + \mathcal{L}(\psi).\end{aligned}$$

Fazendo o mesmo processo de renomeação $f^\mu = A^\mu$, a fim de enfatizar o carácter invariante e utilizando a definição de G_μ, obtemos:

$$\mathcal{L}_{AD}^{min(2)} = \mathcal{L}_{MCS}^{mag} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\nu A_\alpha - eA_\mu G^\mu - \frac{e^2}{2m^2}J^{\mu\nu}J_{\mu\nu} + \mathcal{L}(\psi). \tag{3.41}$$

Observamos que o acoplamento mínimo na teoria AD se traduz em um acoplamento magnético para a MCS, adicionado a um termo de interação tipo Thirring, que aparece naturalmente no processo de dualização. Foi observado em [33, 35] que esse termo é necessário para manter a dinâmica da fonte inalterada, pois ela não participa do processo de dualidade.

3.3.3 Dualidade MSC/AD acoplada com matéria bosônica

Estabelecer a equivalência MCS/AD acoplados com o campo bosônico via abordagem da lagrangiana mestre, é uma tarefa não trivial [33]. Por este motivo o método de imersão de calibre mostrou-se mais indicado na abordagem de acoplamento com a material bosônica. O modelo AD minimamente acoplado com a matéria bosônica é dado de lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{min} = \mathcal{L}_{AD} + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{KG}, \tag{3.42}$$

onde $\mathcal{L}_{AD}$ é o modelo AD original 2.49. Os outros dois novos termos adicionais são as lagrangianas de interação e do campo escalar complexo respectivamente. Suas definições são:

$$\mathcal{L}_{int} = -ef_{\mu}J^{\mu} + e^2 f^{\mu} f_{\mu}\phi^*\phi, \tag{3.43}$$

$$\mathcal{L}_{KG} = \partial_{\mu}\phi^*\partial^{\mu}\phi - M^2\phi^*\phi. \tag{3.44}$$

A corrente de Noether global associada a essa transformação é dada por:

$$J_{\mu} = i(\phi^*\partial_{\mu}\phi - \phi\partial_{\mu}\phi^*). \tag{3.45}$$

A dificuldade mencionada em estabelecer a dualidade neste modelo é o fato da corrente de calibre obtida variando funcionalmente a lagrangiana de interação em relação ao campo vetorial é explicitamente dependente do campo f_{μ}.

Utilizando o procedimento para o processo de imersão, vamos calcular o ver de Euler do modelo:

$$K_{\mu} = \mu^2 f_{\mu} - m\epsilon_{\mu\nu\alpha}\partial^{\nu} f^{\alpha} - eJ_{\mu} \tag{3.46}$$

onde $\mu^2 = m^2 + 2e^2\phi^*\phi$. Como procedimento padrão no método de imersão, introduzimos um campo auxiliar e impomos algumas restrições quanto a sua transformação. Desta forma podemos alcançar um modelo invariante de calibre descrito como:

$$\mathcal{L}^{(2)}_{min} = \mathcal{L}_{min} - B^{\mu}K_{\mu} + \frac{\mu^2}{2}B^{\mu}B_{\mu}, \tag{3.47}$$

eliminando a dependência do campo auxiliar utilizando a própria equação de movimento, encontramos o seguinte modelo invariante,

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{KG} - \frac{m^2}{4\mu^2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}A_{\mu}\partial_{\nu}A_{\alpha} - \frac{em^2}{\mu^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}J_{\mu}\partial_{\nu}A_{\alpha} - \frac{e^2}{2\mu^2}J^{\mu}J_{\mu} \tag{3.48}$$

para obter a expressão acima renomeamos $f_{\mu} = A_{\mu}$ como feito anteriormente. A estrutura é igual ao caso com férmions [33]. Onde um acoplamento mínimo na lagrangiana AD é traduzida como um acoplamento não mínimo adicionado ao termo de Thirring. A grande diferença neste modelo, é no modo que o campo escalar se acopla no modelo com o termo de Maxwell. Este tipo de estrutura é conhecida na literatura, aparece no modelo abeliano de Higgs com uma interação magnética anômala, levando a um modelo eficaz com permeabilidade dependente do campo [77–79]. Para este caso o termo tipo Thirring não é suficiente para garantir a invariância no setor da matéria, ao contrário do caso fermiônico, mas termos adicionais de massa dependente do campo escalar (μ) faz-se necessário.

3.3.4 Dualidade MCS/AD com violação de Lorentz

Teorias com quebra da simetria de Lorentz tem atraído grande atenção na teoria quântica de campos nas ultimas décadas. Para aprofundar sobre o assunto recomento a referencia [80]. Trabalhar com o modelo auto dual com quebra de explicita Lorentz, nos deparamos com três possíveis cenários que frequentemente são abordados. Dois desses cenários não teremos necessariamente mudança de dimensão da teoria, ou seja $2+1$ dimensões. Já o terceiro cenário é formulado em quatro dimensões espaço temporais. Nessas três abordagens, a simetria de Lorentz quebrada via a introdução de uma vetor constante que faz a teoria ganhar uma direção privilegiada. Relembrando a lagrangiana auto dual 2.49:

$$\mathcal{L}_{AD} = \frac{m^2}{2} f^\mu f_\mu - \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha} f_\mu \partial_\nu f_\alpha.$$

Na expressão acima, podemos modificar os dois dos termos apresentados. O terceiro cenário, advêm de um termo adicionado a interação do campo auto dual com o escalar, por exemplo. Modificando o primeiro termo e acrescentando um termo de corrente, ficamos com a seguinte teoria abordada em [81]:

$$\mathcal{L}_{AD_{(1)}} = \frac{m^2}{2} f^\mu h_{\mu\nu} f^\mu - \frac{M}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha} f_\mu \partial_\nu f_\alpha + j^\mu f_\mu. \tag{3.49}$$

onde $h_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} + \beta b_\mu b_\nu$, o termo b é uma campo de fundo que seleciona uma direção preferencial e β é um parâmetro da teoria. Seguindo os mesmos passos do procedimento de imersão de calibre sem interação, podemos encontrar a teoria equivalente e invariante de calibre, como sendo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{MCS_{(1)}} =& -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu\partial_\nu A_\alpha - \frac{\alpha}{8}\left[\epsilon^{\mu\nu\alpha}b_\mu\partial_\nu A_\mu\right]^2 \\ &- \frac{1}{2}G^\mu (h^{-1})_{\mu\nu} G^\nu + \epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\nu A_\alpha (h^{-1})_{\mu\beta} G^\beta. \end{aligned}\tag{3.50}$$

No resultado acima foi utilizado as definições $(h^{-1})_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \alpha b_\mu b_\nu$ que é o inverso do termo $h_{\mu\nu}$, foi adicionado outra definição $\alpha = \beta/(1-\beta b^2)$. Com esse resultado, podemos observar que a presença de três novos termos. O primeiro é uma combinação do termo de Maxwell com o fator de quebra da simetria [82, 83]. Os outros dois termos devidos a corrente são semelhantes ao caso sem quebra, acoplamento magnético e um termo tipo Thirring, agora em função do fator de quebra [81].

O outro modelo que modifica a estrutura inicial do modelo AD, essa modificação altera a forma do termo Chern-Simons. Essa alteração modifica a forma do tensor de Levi-Civita, agora sendo escrito em quatro dimensões:

$$\mathcal{L}_{AD_{(2)}} = \frac{m^2}{2} f^\mu f_\mu - \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} b_\mu f_\nu \partial_\alpha f_\beta + f^\mu j_\mu. \tag{3.51}$$

onde b_μ é um vetor constante que quebra a simetria de Lorentz e tem dimensão de massa, j^μ é uma corrente. O modelo dual foi calculado em [84] utilizando o procedimento de imersão de calibre. A replicação deste resultado dar-se de forma simples. Podemos chegar ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{MCS_{(2)}} =& \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} b_\mu A_\nu \partial_\alpha A_\beta + \frac{1}{2m^2} j^\mu j_\mu + \frac{1}{2m^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} b_\mu j_\nu F_{\alpha\beta} + \frac{b^2}{4m^2} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &- \frac{1}{2m^2} b_\mu b^\nu F^{\mu\alpha} F_{\nu\alpha}.\end{aligned} \tag{3.52}$$

Esse resultado expressa um termo novo causado pela introdução do vetor de quebra da simetria de Lorentz, além dos termos de acoplamento não-minimo e o tipo Thirring, presentes em outras versões da dualidade MCS/AD.

Por fim, outro tipo de incluir violação da simetria de Lorentz explicitamente na lagrangiana é inclusão do termo de quebra na interação exemplo tratado em [85]:

$$\mathcal{L}_{AD_{(3)}} = \frac{m^2}{2} f^\mu f_\mu - \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha} f_\mu \partial_\nu f_\alpha + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - 2m\phi v_\mu f^\mu. \tag{3.53}$$

Podemos aplicar o método de imersão de calibre, e chegaremos ao mesmo resultado encontrado pelos os autores:

$$\mathcal{L}_{MCS_{(3)}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\nu A_\alpha + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\phi\epsilon^{\mu\nu\alpha} v_\mu \epsilon_{\nu\alpha\beta}\partial^\alpha A^\beta + 2\phi^2 v_\mu v^\mu. \tag{3.54}$$

Nos trabalhos de dualidade citados acima a equivalência classicamente foi estabelecia via imersão de calibre. No nível quântico todos os três trabalhos oparam por construir a lagrangiana mestra. Essa construção pode não ser algo trivial. Quando a lagrangiana mestre não é encontrada, análise da seção de choque das teorias surge como meio de verificar a equivalência a nível quântico [75].

4 DUALIDADES EM 3+1 DIMENSÕES

Todas as dualidades apresentadas até agora foram baseadas no modelo auto dual [26] definido em 2 + 1 dimensões. Com exceção do modelo 3.51, que viola a simetria de Lorentz, ser definido em num espaço-tempo quadrimensional.

No cenário 3 + 1 dimensões com a simetria de Lorentz não violada, podemos construir um modelo auto dual através de um termo topológico $B \wedge F$. Onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor intensidade do campo A_μ e $B_{\mu\nu}$ é um campo tensorial antissimétrico. As intensidades associadas aos campos A_μ e $B_{\mu\nu}$ são respectivamente; $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e $H_{\mu\nu\alpha} = \partial_\mu B_{\nu\alpha} + \partial_\nu B_{\alpha\mu} + \partial_\alpha B_{\mu\nu}$, também conhecido na literatura como campos de Kalb-Ramond [40, 41].

Neste capítulo, estudaremos a dualidade envolvida em modelos contendo o termo $B \wedge F$ [42, 43, 59]. Para esta tarefa separei o capítulo em três blocos. Na primeira parte vamos estudar a dualidade a nível clássico [59], porém vamos adotar um método alternativo. Na segunda parte, construiremos a lagrangiana mestre da teoria, com e sem interação, reafirmando a equivalência a nível clássico. Por fim, analisaremos a equivalência a nível quântico através das integrais de caminho.

4.1 Descrição do modelo BF.

Vamos considerar um modelo não-invariante de calibre composto pelo campo vetorial A_μ e o tensor antissimétrico $B_{\mu\nu}$, descrito pela a lagrangiana [42, 59]:

$$\mathcal{L}_{AD_{B\wedge F}} = \frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu - \frac{1}{2} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + \frac{\chi\theta}{4} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} B_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}, \tag{4.1}$$

onde m é um parâmetro com dimensão de massa, θ é uma constante de acoplamento adimensional e $\chi \pm 1$ que define a dualidade (+1) ou anti-dualidade (−1). Como temos dois campos envolvidos teremos duas equações de movimento uma para o campo A_μ e a outra para $B_{\mu\nu}$, respectivamente:

$$m^2 A_\beta - \frac{\chi\theta}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\alpha B^{\mu\nu} = 0, \tag{4.2}$$

$$B_{\mu\nu} - \chi\theta \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\alpha A^\beta = 0, \tag{4.3}$$

satisfazendo os vínculos:

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \tag{4.4}$$

$$\partial_\mu B^{\mu\nu} = 0. \tag{4.5}$$

As equações 4.2 e 4.3 constituem um sistema acoplado de equações diferencias de primeira ordem. Podemos desacoplá-las com auxílio dos vínculos 4.4 e 4.5, desta forma teremos a seguinte equação de onda:

$$\left[\Box + \frac{m^2}{\theta^2}\right]\varphi = 0, \tag{4.6}$$

onde φ representa os campos A_μ e $B_{\mu\nu}$. Este resultado nos diz que o modelo 4.1 descreve a dinâmica de um campo vetorial massivo. De fato, podemos usar a equação 4.3 para eliminar a dependência do campos na lagrangiana 4.1, evidenciando o carácter auxiliar de $B_{\mu\nu}$. Realizando tal procedimento encontraremos o seguinte modelo [86]:

$$\mathcal{L} = \frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu - \frac{\theta^2}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{4.7}$$

que descreve um campo vetorial massivo com três graus de liberdade e não invariante de calibre, similar mente ao modelo $\mathcal{L}_{AD_{BF}}$.

4.1.1 Propagador do modelo *BF*

Para finalizar a descrição clássica do modelo, vamos calcular o propagador do modelo. Consideremos inicialmente a equação 4.1,

$$\mathcal{L}_{AD_{B\wedge F}} = \frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu - \frac{1}{2}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + \frac{\chi\theta}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}B_{\mu\nu}F_{\alpha\beta},$$

note que o terceiro termo da lagrangiana acima é um termo de mistura dos campos A_μ e $B_{\mu\nu}$. Vamos reescrever o termo de mistura da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{AD_{B\wedge F}} =& \frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu - \frac{1}{2}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + \frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}B_{\mu\nu}\partial_\alpha A_\beta \\ =& \frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu - \frac{1}{2}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + \frac{1}{2}B_{\mu\nu}\left(-\frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\mu\nu\beta\alpha}\partial_\alpha\right)A_\beta + \frac{1}{2}A_\mu\left(\frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta\nu}\partial_\nu\right)B_{\alpha\beta},\end{aligned} \tag{4.8}$$

esta alteração é interessante para escrever este modelo no formato de um produto com três matrizes. Onde a primeira é uma matriz linha 1×2 compostas somente pelos campos A_μ e $B_{\mu\nu}$. A segunda será uma matriz 2×2 como os operadores e por fim será uma matriz coluna 2×1 contendo somente os campos.

Com estas alterações, podemos escrever a lagrangiana 4.1 no seguinte formato:

$$\mathcal{L}_{AD_{B\wedge F}} = \frac{1}{2}\mathbf{X}^T\hat{\mathcal{O}}_{AD_{B\wedge F}}\mathbf{X} \tag{4.9}$$

onde $\mathbf{X}$ uma matriz coluna contendo os campos do modelo e $\hat{\mathcal{O}}_{AD_{B\wedge F}}$ é o operador que deveremos inverter para encontrar o propagador da teoria.

Explicitando o modelo 4.1 no formado de um produto de matrizes teremos,

$$\mathcal{L}_{AD_{B\wedge F}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A_\mu & B_{\alpha\beta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m^2\eta^{\mu\nu} & \frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\mu\delta\rho\sigma}\partial_\delta \\ -\frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\nu}\partial_\gamma & -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_\nu \\ B_{\rho\sigma} \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

O modelo $AD_{B\wedge F}$ é não invariante de calibre, com isso não requer a adição de termos de fixação de calibre. Para facilitar o trabalho de inversão vamos recorrer as definições dos operadores de projeção em 2.29 e adicionar mais três operadores $\hat{S}_{\mu\nu\alpha}$, $P^{(1)}_{\mu\nu;\alpha\beta}$ e $P^{(2)}_{\mu\nu;\alpha\beta}$. O operador $\hat{\mathcal{O}}_{AD_{B\wedge F}}$ pode ser escrito como:

$$\hat{\mathcal{O}}_{AD_{B\wedge F}} = \begin{pmatrix} m^2(\theta^{\mu\nu}+\omega^{\mu\nu}) & \hat{S}^{\mu\rho\sigma} \\ -\hat{S}^{\alpha\beta\nu} & -\frac{1}{2}(P^{(1)}+P^{(2)})^{\alpha\beta;\rho\sigma} \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

onde as componentes do operador foram escritas de modo a manter a simetria dos índices. Os três novos operadores que têm suas definições como

$$\hat{S}_{\mu\nu\alpha} = \frac{\chi\theta}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\beta, \tag{4.12}$$

$$P^{(1)}_{\mu\nu;\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\alpha}\theta_{\nu\beta} - \theta_{\mu\beta}\theta_{\nu\alpha}), \tag{4.13}$$

$$P^{(2)}_{\mu\nu;\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\alpha}\omega_{\nu\beta} - \theta_{\mu\beta}\omega_{\nu\alpha} + \theta_{\nu\beta}\omega_{\mu\alpha} - \theta_{\nu\alpha}\omega_{\mu\beta}), \tag{4.14}$$

Os produtos entre os operadores definidos acima atendem a uma álgebra fechada e estão resumidos nas tabelas 2 e 3. Somado com os produtos da tabela 1 nos auxiliará com os cálculos futuros.

	$\left(P^{(1)}\right)^{\rho\sigma;}{}_{\alpha\beta}$	$\left(P^{(2)}\right)^{\rho\sigma;}{}_{\alpha\beta}$
$P^{(1)}_{\mu\nu;\rho\sigma}$	$P^{(1)}_{\mu\nu;\alpha\beta}$	0
$P^{(2)}_{\mu\nu;\rho\sigma}$	0	$P^{(2)}_{\mu\nu;\alpha\beta}$

Tabela 2: Produtos dos operadores de projeção de spin $P^{(1)}$ e $P^{(2)}$

	$\hat{S}_{\alpha\beta\nu}$	$\theta_{\beta\sigma}$	$\omega_{\beta\sigma}$
$\hat{S}^{\mu\alpha\beta}$	$-\frac{\theta^2}{2}\Box\theta^\mu{}_\nu$	$\hat{S}^{\mu\alpha}{}_\sigma$	0

	$\hat{S}^\lambda{}_{\alpha\beta}$	$\left(P^{(1)}\right)^{\nu\lambda;}{}_{\rho\sigma}$	$\left(P^{(2)}\right)^{\nu\lambda;}{}_{\rho\sigma}$
$\hat{S}_{\mu\nu\lambda}$	$-\frac{\theta^2}{2}\Box P^{(1)}_{\mu\nu;\alpha\beta}$	$\hat{S}_{\mu\rho\sigma}$	0

Tabela 3: Produtos dos operadores de projeção de spin $\hat{S}_{\mu\nu\alpha}$, $\theta_{\mu\nu}$, $\omega_{\mu\nu}$, $P^{(1)}$ e $P^{(2)}$

Os operadores $P^{(1)}_{\mu\nu;\alpha\beta}$ e $P^{(2)}_{\mu\nu;\alpha\beta}$ satisfazem a relação de completude tensorial,

$$P^{(1)}_{\mu\nu;\alpha\beta} + P^{(2)}_{\mu\nu;\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} - \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}) \equiv \mathbb{I}_{\mu\nu;\alpha\beta}, \tag{4.15}$$

onde $\mathbb{I}_{\mu\nu;\alpha\beta}$ é a identidade, de modo que $\mathbb{I}_{\mu\nu;\alpha\beta}(P^{(1)})^{\alpha\beta;}{}_{\rho\sigma} = (P^{(1)})_{\mu\nu\rho\sigma}$ e $\mathbb{I}_{\mu\nu;\alpha\beta}(P^{(2)})^{\alpha\beta;}{}_{\rho\sigma} = (P^{(2)})_{\mu\nu\rho\sigma}$. Sendo os operadores de projeção formados por um projetor transversal e um longitudinal à direção do momento, quando contraído com o momento em uma direção o operador transversal $P^{(1)}$ terá seu resultado nulo, enquanto a contração com operador longitudinal $P^{(2)}$ terá seu resultado igual a identidade $\mathbb{I}_{\mu\nu;\alpha\beta}$.

Prosseguindo para o cálculo do propagador da teoria $AD_{B\wedge F}$ devemos inverter o operador de onda 4.11. Para facilitar este trabalho e criar um algoritmo simples para uso futuros, vamos reescrevê-lo na forma de uma matriz genérica

$$\hat{\mathcal{O}}_{AD_{B\wedge F}} \equiv \mathbf{O} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{O}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

onde $\mathbf{O}^{-1}$ é a matriz inversa, essas matrizes satisfazem a relação $\mathbf{O}\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{I}$ e a matriz identidade tem sua definição como:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

em que I é a identidade correspondente aos projetores $\theta_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$. O termo $\mathbb{I}$ é a identidade correspondente aos projetores $P^{(1)}$ e $P^{(2)}$.

Fazendo o uso da relação,

$$\mathbf{O}\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

podemos resolver o sistema resultante, encontrando as expressões dos operadores A, B, C e D em termos de $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$,

$$\begin{cases} A\mathbb{A} + B\mathbb{C} = I \\ A\mathbb{B} + B\mathbb{D} = 0 \\ C\mathbb{A} + D\mathbb{C} = 0 \\ C\mathbb{B} + D\mathbb{D} = \mathbb{I} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{A} = (A - BD^{-1}C)^{-1} \\ \mathbb{B} = -A^{-1}B\mathbb{D} \\ \mathbb{C} = -D^{-1}C\mathbb{A} \\ \mathbb{D} = (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{cases}. \tag{4.19}$$

Com o auxílio das tabelas 1, 2 e 3 dos produtos dos operadores projeção podemos realizar os cálculos explicitamente,

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^{\mu\nu} =& [A^{\mu\nu} - B^{\mu\rho\sigma}(D^{-1})_{\alpha\beta;\rho\sigma}C^{\alpha\beta\nu}]^{-1} = [m^2(\theta^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}) - 2\hat{S}^{\mu\rho\sigma}\left(P^{(1)} + P^{(2)}\right)_{\alpha\beta;\rho\sigma}\hat{S}^{\alpha\beta\nu}]^{-1} \\ =& \frac{1}{\theta^2\Box + m^2}\theta^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\omega^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^{\alpha\beta;\rho\sigma} =&(D^{\alpha\beta;\rho\sigma} - C^{\alpha\beta\mu}(A^{-1})_{\mu\nu}B^{\nu\rho\sigma})^{-1} = \left[-\frac{1}{2}(P^{(1)} + P^{(2)})^{\alpha\beta;\rho\sigma} + \frac{1}{m^2}\hat{S}^{\alpha\beta\mu}(\theta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu})\hat{S}^{\nu\rho\sigma}\right]^{-1} \\ =& - \frac{2m^2}{\theta^2\Box + m^2}(P^{(1)})^{\alpha\beta;\rho\sigma} - 2(P^{(2)})^{\alpha\beta;\rho\sigma}\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{B}^{\mu\rho\sigma} =& -(A^{\mu\nu})^{-1}B_{\nu\alpha\beta}\mathbb{D}^{\alpha\beta;\rho\sigma} = \left[m^2(\theta^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu})\right]^{-1}(\hat{S}_{\nu\alpha\beta})\left(\frac{2m^2}{\theta^2\Box + m^2}(P^{(1)})^{\alpha\beta;\rho\sigma} + 2(P^{(2)})^{\alpha\beta;\rho\sigma}\right) \\ =& \frac{2}{\theta^2\Box + m^2}\hat{S}^{\mu\rho\sigma}\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^{\alpha\beta\nu} =& -(D^{\alpha\beta;\rho\sigma})^{-1}C_{\rho\sigma\mu}\mathbb{A}^{\mu\nu} = -\left[\frac{1}{2}(P^{(1)} + P^{(2)})^{\alpha\beta;\rho\sigma}\right]^{-1}(\hat{S}_{\rho\sigma\mu})\left(\frac{1}{\theta^2\Box + m^2}\theta^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\omega^{\mu\nu}\right) \\ =& - \frac{2}{\theta^2\Box + m^2}\hat{S}^{\alpha\beta\nu}\end{aligned} \tag{4.23}$$

Logo o propagador do modelo $AD_{B\wedge F}$ é dado por,

$$\left(\hat{\mathcal{O}}^{-1}_{AD_{B\wedge F}}\right)^{\mu,\alpha\beta;\nu,\lambda\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta^2\Box+m^2}\theta^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\omega^{\mu\nu} & \frac{2}{\theta^2\Box+m^2}S^{\mu\lambda\sigma} \\ -\frac{2}{\theta^2\Box+m^2}S^{\alpha\beta\nu} & -\frac{2m^2}{\theta^2\Box+m^2}\left(P^{(1)}\right)^{\alpha\beta,\lambda\sigma} - 2\left(P^{(2)}\right)^{\alpha\beta,\lambda\sigma} \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

Podemos perceber que como o operador de onda do modelo $AD_{B\wedge F}$, os termos fora da diagonal principal do propagador 4.24 também diferem apenas pelo o sinal. Isso decorre das álgebras exposta na tabela 3.

4.2 Descrição do modelo MKR.

Neste trabalho, estamos interessados em estabelecer a equivalência de um modelo auto dual 4.1 com uma teoria de segunda ordem em derivadas e invariante de calibre. Para isso, consideremos um modelo topologicamente massivo com o termo $B \wedge F$ definido como [43, 59]:

$$\mathcal{L}_{MKR} = \frac{\theta^2}{12m^2}H^{\mu\nu\alpha}H_{\mu\nu\alpha} - \frac{\theta^2}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{\chi\theta}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}B_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \tag{4.25}$$

chamaremos este modelo que possui dependência do termo de Maxwell e o campo de Kalb-Ramond de MKR. Os dois primeiros termos do modelo 4.25 são invariantes segundo as seguintes transformações: $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\alpha$ e $B_{\mu\nu} \to B_{\mu\nu} + \partial_\mu\beta_\nu$, onde o parâmetro β_μ possui uma transformação de calibre $\beta_\mu \to \beta_\mu + \partial_\mu\sigma$ que deixa $B_{\mu\nu}$ inalterado. Variando o último termo da lagrangiana 4.25 gera uma divergência total. As equações de movimento para os campos neste modelo são:

$$\frac{\theta^2}{2m^2}\partial^\mu H_{\mu\nu\lambda} + \frac{\chi\theta}{4}\epsilon_{\nu\lambda\alpha\beta} = 0 \tag{4.26}$$

$$\theta^2\partial^\mu F_{\mu\lambda} + \frac{\chi\theta}{6}\epsilon_{\mu\nu\alpha\lambda}H^{\alpha\mu\nu} = 0. \tag{4.27}$$

De modo geral, os campos A_μ e $B_{\mu\nu}$ possuem quatro e seis graus de liberdade receptivamente. Por outro lado, devido à simetria de calibre na teoria *MKR*, alguns deles podem ser eliminados. Para identificar quais se propagam como modos físicos massivos ou quais são espúrios, vamos realizar uma decomposição no espaço-tempo nas equações dos movimentos 4.26 e 4.27. Para este propósito, vamos dividir o campo A_μ nas componentes A_0 e A_i, como também o campo $B_{\mu\nu}$ nas componentes independentes B_{0i} e B_{ij} e introduzir os vetores espaciais $\vec{\mathcal{X}}$ e $\vec{\mathcal{Y}}$ definidos por

$$\mathcal{X}^i \equiv -B_{0i}, \qquad \mathcal{Y}^i \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}B_{jk}. \tag{4.28}$$

Com essas definições podemos escrever a densidade lagrangiana 4.25 em componentes espaço temporais:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{MKR} = & -\frac{\theta^2}{2}\left(\partial_i A_0\partial^i A^0 - 2\partial_i A_0\partial^0 A^i + \partial_0 A_i\partial^0 A^i + \partial_i A_j\partial^i A^j - \partial_i A_j\partial^j A^i\right)\\ & + \frac{\theta^2}{2m^2}\left(-\partial_0\mathcal{Y}^k\partial^0\mathcal{Y}^k - 2\epsilon_{ijk}\mathcal{Y}^k\partial_0\partial^i\mathcal{X}^j - \partial_i\mathcal{Y}^k\partial^k\mathcal{Y}^i - \mathcal{X}_i\nabla^2\mathcal{X}_i + \partial_i\mathcal{X}_j\partial^j\mathcal{X}^i\right)\\ & - \theta\chi\left(\mathcal{Y}^i\partial_0 A_i - \mathcal{Y}^i\partial_i A_0 + \epsilon^{ijk}\mathcal{X}_i\partial_j A_k\right).\end{aligned} \tag{4.29}$$

Calculando as variações funcionais de cada componente A_0, A_i, $\mathcal{X}_i$, e $\mathcal{Y}_j$ geram respectivamente as equações de campo:

$$\nabla^2 A^0 + \partial^0\partial_i A^i + \frac{\chi}{\theta}\partial_i\mathcal{Y}^i = 0, \tag{4.30}$$

$$\Box A^i - \partial^i\left(\partial_0 A^0 + \partial_j A^j\right) + \frac{\chi}{\theta}\left(\epsilon^{ijk}\partial_k\mathcal{X}_j + \partial_0\mathcal{Y}^i\right) = 0, \tag{4.31}$$

$$-\nabla^2\mathcal{X}_i - \partial_i\partial^j\mathcal{X}_j + \epsilon_{ijk}\left(\partial_0\partial^j\mathcal{Y}^k - \frac{\chi m^2}{\theta}\partial^j A^k\right) = 0, \tag{4.32}$$

$$\partial_0^2\mathcal{Y}^k + \partial_i\partial^k\mathcal{Y}^i + \epsilon^{ijk}\partial_0\partial_j\mathcal{X}_i + \frac{\chi m^2}{\theta}\left(\partial^k A^0 - \partial^0 A^k\right) = 0. \tag{4.33}$$

Tomando o termo de mistura dos campos nulo, teremos os modelos Maxwell e Kalb-

Ramond livres. As equações de campos acima tornar-se-iam mais simples;

$$\begin{aligned} \nabla^2 A^0 + \partial^0 \partial_i A^i &= 0, & (4.34)\\ \Box A^i - \partial^i \left(\partial_0 A^0 + \partial_j A^j \right) &= 0, & (4.35)\\ -\nabla^2 \mathcal{X}_i - \partial_i \partial^j \mathcal{X}_j + \epsilon_{ijk} \left(\partial_0 \partial^j \mathcal{Y}^k \right) &= 0, & (4.36)\\ \partial_0^2 \mathcal{Y}^k + \partial_i \partial^k \mathcal{Y}^i + \epsilon^{ijk} \partial_0 \partial_j \mathcal{X}_i &= 0. & (4.37) \end{aligned}$$

Desta forma podemos constatar que, isolando o valor de A_0 em 4.34 e substituindo em 4.35 a componente transversal de $\vec{A}$ é dinâmica,

$$\Box A^i_{(T)} = 0 \tag{4.38}$$

onde os índices (T) e (L) representam a componente transversal e longitudinal de um certo vetor no espaço tridimensional. As definições das componentes (T) e (L) de um vetor $\vec{v}$ são $v^i_{(T)} \equiv \theta^i{}_j v^j$ e $v^i_{(L)} \equiv \omega^i{}_j v^j$, sendo θ_{ij} e ω_{ij} os projetores definidos por

$$\theta^i{}_j \equiv \delta^i{}_j - \omega^i{}_j, \quad \omega^i{}_j \equiv -\frac{\partial^i \partial_j}{\nabla^2}. \tag{4.39}$$

Fazendo um estudo parecido com realizado modelo Kalb-Ramond, vemos em 4.36,

$$\mathcal{X}^{(T)}_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial_0 \partial^j}{\nabla^2} \mathcal{Y}^k \tag{4.40}$$

isto fixa que a componente transversa de $\mathcal{X}$ não se apresenta como grau de liberdade físico, pois é fixada em termos do campo $\mathcal{Y}$. Considerando que $\vec{v} = \vec{v}^{(T)} + \vec{v}^{(L)}$ e aplicando em 4.37 encontramos que a componente longitudinal é que se propaga, deferentemente do modelo de Maxwell,

$$\Box \mathcal{Y}^i_{(L)} = 0. \tag{4.41}$$

Visto que a propagação do campo de Maxwell é transversal e a propagação do campo de Kab-Ramond é longitudinal. Então se faz oportuno expressar a lagrangiana 4.29 em componentes transversais (T) e longitudinais (L) dos campos integrantes. Com isto, a lagrangiana 4.29 assume a forma:

$$\mathcal{X}^i \equiv -B_{0i}, \quad \mathcal{Y}^i \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} B_{jk}. \tag{4.42}$$

Com essas definições podemos escrever a densidade lagrangiana 4.25 em componentes espaço temporais:

$$\mathcal{L}_{MKR} = -\frac{\theta^2}{2}\left(\partial_i A_0 \partial^i A^0 - 2\partial_i A_0 \partial^0 A^i_{(L)} + \partial_0 A^{(L)}_i \partial^0 A^i_{(L)} + \partial_0 A^{(T)}_i \partial^0 A^i_{(T)} + \partial_i A^{(T)}_j \partial^i A^j_{(T)}\right)$$
$$+\frac{\theta^2}{2m^2}\left(-\partial_0 \mathcal{Y}^{(L)}_k \partial^0 \mathcal{Y}^k_{(L)} - \partial_0 \mathcal{Y}^{(T)}_k \partial^0 \mathcal{Y}^k_{(T)} - 2\epsilon_{ijk}\mathcal{Y}^k_{(T)}\partial_0 \partial^i \mathcal{X}^j_{(T)} - \mathcal{X}^{(T)}_i \nabla^2 \mathcal{X}^{(T)}_i + \partial_i \mathcal{Y}^{(L)}_k \partial^k \mathcal{Y}^i_{(L)}\right)$$
$$-\theta\chi\left(-\mathcal{Y}^i_{(L)}\partial_i A_0 + \mathcal{Y}^i_{(L)}\partial_0 A^{(L)}_i + \mathcal{Y}^i_{(T)}\partial_0 A^{(T)}_i + \epsilon^{ijk}\mathcal{X}^{(T)}_i \partial_j A^{(T)}_k\right). \tag{4.43}$$

Variando a lagrangiana acima com respeitos às componentes A_0, $A^{(L)}_i$, $A^{(T)}_j$, $\mathcal{Y}^{(L)}_i$, $\mathcal{Y}^{(T)}_i$ e $\mathcal{X}^{(T)}_i$ geram respectivamente as equações:

$$\nabla^2 A^0 + \partial_i \partial^0 A^i_{(L)} + \frac{\chi}{\theta}\partial_i \mathcal{Y}^i_{(L)} = 0 \tag{4.44}$$

$$-\partial_i \partial^0 A_0 + \partial_0 \partial^0 A^{(L)}_i + \frac{\chi}{\theta}\partial_0 \mathcal{Y}^{(L)}_i = 0 \tag{4.45}$$

$$\Box A^{(T)}_i + \frac{\chi}{\theta}\partial_0 \mathcal{Y}^{(T)}_i - \frac{\chi}{\theta}\epsilon_{ijk}\partial^j \mathcal{X}^k_{(T)} = 0 \tag{4.46}$$

$$\partial_0 \partial^0 \mathcal{Y}^k_{(L)} - \partial_i \partial^k \mathcal{Y}^i_{(L)} + \frac{\chi m^2}{\theta}\left(\partial^k A^0 - \partial^0 A^k_{(L)}\right) = 0 \tag{4.47}$$

$$\partial^0 \partial_0 \mathcal{Y}^k_{(T)} - \epsilon^{ijk}\partial^0 \partial_i \mathcal{X}^{(T)}_j - \frac{\chi m^2}{\theta}\partial_0 A^k_{(T)} = 0 \tag{4.48}$$

$$\epsilon_{jik}\partial_0 \partial^i \mathcal{Y}^k_{(T)} - \nabla^2 \mathcal{X}^{(T)}_j - \frac{\chi m^2}{\theta}\epsilon_{kji}\partial^j A^i_{(T)} = 0 \tag{4.49}$$

Com as equações acima, podemos resolver facilmente o componente temporal A_0, através de 4.44. Como também a componente transversal do vetor tridimensional $\vec{\mathcal{X}}$, por meio de 4.49, em termos de outras componentes,

$$A^0 = -\frac{1}{\nabla^2}\left(\partial^0 \partial_i A^i_{(L)} + \frac{\chi}{\theta}\partial_i \mathcal{Y}^i_{(L)}\right), \tag{4.50}$$

$$\mathcal{X}^{(T)}_i = \frac{1}{\nabla^2}\epsilon_{ijk}\left(\partial_0 \partial^j \mathcal{Y}^k_{(T)} - \frac{\chi m^2}{\theta}\partial^j A^k_{(T)}\right), \tag{4.51}$$

Procedimento semelhante podemos realizar para resolver a componente transversal de $\vec{A}$ e a componente longitudinal de $\vec{\mathcal{Y}}$, de modo a encontrar as seguinte equações:

$$\left[\Box + \frac{m^2}{\theta^2}\right]A^i_{(T)} = 0, \tag{4.52}$$

$$\left[\Box + \frac{m^2}{\theta^2}\right]\mathcal{Y}^i_{(L)} = 0. \tag{4.53}$$

A forma dessas soluções revela que os únicos componentes físicos são $A^i_{(T)}$ e $\mathcal{Y}^i_{(L)}$, enquanto os outros são modos auxiliares ou de calibre. Além disso, como a parte longitudinal de $\vec{\mathcal{Y}}$ se propaga como uma onda livre, podemos compará-la como a propagação de um campo escalar massivo, ou seja, $\vec{\mathcal{Y}} = \nabla \phi$, cuja massa depende da constante de acoplamento θ. Assim, os resultados acima mostram que a teoria *MKR* definida em 4.25, assim como o modelo $AD_{B\wedge F}$, contém três modos de propagação massiva. Para tornar explícita a dualidade oculta entre os modelos descritos acima, é conveniente introduzir os campos duais associados aos tensores de intensidade de campo $F_{\mu\nu}$ e $H_{\mu\nu\alpha}$, respectivamente, por

$$\tilde{H}_\mu \equiv -\frac{\chi\theta}{6m^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}H^{\nu\alpha\beta}, \tag{4.54}$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{\chi\theta}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \tag{4.55}$$

Em termos de campos duais $\tilde{F}_{\mu\nu}$ e $\tilde{H}_\mu$, as equações do movimento 4.26 e 4.27 tornar-se

$$m^2\tilde{H}_\beta - \frac{\theta}{2\chi}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\mu\tilde{F}^{\nu\alpha} = 0, \tag{4.56}$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} - \frac{\theta}{\chi}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha\tilde{H}^\beta = 0. \tag{4.57}$$

Comparando diretamente 4.56 e 4.57 coma as equação de movimento do modelo $AD_{B\wedge F}$ 4.2 e 4.3 observamos que os campos duais $\tilde{F}_{\mu\nu}$ e $\tilde{H}_\mu$, satisfazem exatamente as mesmas equações obtidas para o modelo $AD_{B\wedge F}$ quando realizamos as seguinte identificações $A_\mu \to \tilde{H}_\mu$ e $B_{\mu\nu} \to \tilde{F}_{\mu\nu}$. Portanto, os campos básicos do modelo $AD_{B\wedge F}$ correspondem aos campos duais do modelo *MKRR*. Isso prova a equivalência clássica por meio de equações de movimento no caso de campo livre. No entanto, apesar de ter estabelecido a equivalência dual, o mapeamento $A_\mu \to \tilde{H}_\mu$ e $B_{\mu\nu} \to \tilde{F}_{\mu\nu}$ nos leva a

$$\mathcal{L}_{TM}(\tilde{H},\tilde{F}) = -\frac{m^2}{2}\tilde{H}_\mu\tilde{H}^\mu + \frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}B_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}, \tag{4.58}$$

em que as identidades $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{\theta^2}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ e $H_{\mu\nu\alpha}H^{\mu\nu\alpha} = -\frac{6m^4}{\theta^2}\tilde{H}_\mu\tilde{H}^\mu$ foram usadas. Observe que 4.58 não recupera 2.49 e a equivalência entre os dois modelos não é evidente. Uma origem comum das densidades lagrangianas 2.49 e 4.25 pode ser melhor abordada por meio do método da lagrangiana mestre, que formularemos na seção 4.3.

4.2.1 Propagador do modelo *MKR*.

Considerando o modelo topologicamente massivo *MKR* definido em 4.25,

$$S_{MKR} = \int d^4x\left[-\frac{\theta^2}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{\theta^2}{12m^2}H^{\mu\nu\alpha}H_{\mu\nu\alpha} - \frac{\chi\theta}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}B^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}\right],$$

os dois primeiros termos são da teoria de Maxwell e Kalb-Ramond livres respectivamente, ambas são invariantes de calibre e o terceiro é um termo topológico.

Para a obtenção do propagador dessa teoria, vamos seguir as mesmas etapas expostas na seção 4.1.1. Primeiramente devemos escreve-lo no formato matricial:

$$\mathcal{L}_{MKR} = \frac{1}{2}\mathbf{X}^T \hat{\mathcal{O}}_{MKR}\mathbf{X}, \tag{4.59}$$

onde o termo $\hat{\mathcal{O}}_{MKR}$ é o operador de onda, uma matriz 2×2, o qual deveremos invertê-lo assim obtendo o propagador. O termo X representa uma matriz coluna contendo os campos $A_{\mu\nu}$ e $B_{\mu\nu}$. É conveniente adicionarmos termos de fixação de calibre no modelo 4.25, visto que a teoria é invariante de calibre. Adicionaremos os termos $-\frac{1}{2\lambda}(\partial_\mu A^\mu)^2$ e $\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu B^{\mu\nu})^2$ e escrevendo explicitamente o operador de onda da teoria teremos:

$$\hat{\mathcal{O}}^{\mu,\alpha\beta;\nu,\lambda\sigma}_{MKR+fg} = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{O}}_{M+fg} & -\frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\mu\lambda\sigma\rho}\partial_\rho \\ \frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\alpha\beta\nu\gamma}\partial_\gamma & \hat{\mathcal{O}}_{KR+fg} \end{pmatrix}, \tag{4.60}$$

note que assim como o modelos $AD_{B\wedge F}$ a diagonal secundária do operador contém somente termos de mistura dos campos, aqui foi realizado o mesmo procedimento no termo topológico escrevendo como a soma de duas metades. Na diagonal principal da matriz, temos os propagadores das teoria livre de Maxwell $\hat{\mathcal{O}}_{M+fg}$ e o da teoria de Kalb-Ramond $\hat{\mathcal{O}}_{KR+fg}$, em ambas as teorias foram adicionadas os termos de fixação correspondente. O operador da teoria de Maxwell é dado por,

$$\hat{\mathcal{O}}_{M+fg} = \theta^2(\Box\eta^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\mu) + \frac{1}{\lambda}\partial^\mu\partial^\mu \tag{4.61}$$

e o operador da teoria de Kalb-Ramond e seu fixador são,

$$\hat{\mathcal{O}}_{MKR} = -\frac{\theta^2\Box}{4m^2}\left(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} - \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}\right) - \frac{\theta^2}{4m^2}\left(\eta_{\mu\beta}\partial_\nu\partial_\alpha - \eta_{\mu\alpha}\partial_\nu\partial_\beta + \eta_{\nu\alpha}\partial_\mu\partial_\beta - \eta_{\nu\beta}\partial_\mu\partial_\alpha\right), \tag{4.62}$$

$$\hat{\mathcal{O}}_{fg} = -\frac{\Box}{4\xi}\left(\eta_{\mu\beta}\partial_\nu\partial_\alpha - \eta_{\mu\alpha}\partial_\nu\partial_\beta + \eta_{\nu\alpha}\partial_\mu\partial_\beta - \eta_{\nu\beta}\partial_\mu\partial_\alpha\right). \tag{4.63}$$

As componentes do operador de onda foram escritas desse modo a fim de manter a simetria dos índices. Utilizando das definições dos operadores de projeção de spin $\theta_{\mu\nu}$, $\omega_{\mu\nu}$. $\hat{S}_{\mu\nu\alpha}$, $P^{(1)}$ e $P^{(2)}$ encontraremos

$$\hat{\mathcal{O}}_{M+fg} = \theta^2\Box\theta^{\mu\nu} + \frac{\Box}{\lambda}\omega^{\mu\nu}, \tag{4.64}$$

para o operador da teoria de Maxwell e

$$\hat{\mathcal{O}}_{MKR+fg} = -\frac{\theta^2\Box}{2m^2}\left(P^{(1)}\right)^{\alpha\beta,\lambda\sigma} - \frac{\Box}{2\xi}\left(P^{(2)}\right)^{\alpha\beta,\lambda\sigma}. \tag{4.65}$$

para a teoria de Kalb-Ramond. O operador $\hat{\mathcal{O}}_{MKR+fg}$ em função dos projetores torna-se,

$$\hat{\mathcal{O}}^{\mu,\alpha\beta;\nu,\lambda\sigma}_{MKR+fg} = \begin{pmatrix} \theta^2\Box\theta^{\mu\nu} + \frac{\Box}{\lambda}\omega^{\mu\nu} & -\hat{S}^{\mu\lambda\sigma} \\ \hat{S}^{\alpha\beta\nu} & -\frac{\theta^2\Box}{2m^2}\left(P^{(1)}\right)^{\alpha\beta,\lambda\sigma} - \frac{\Box}{2\xi}\left(P^{(2)}\right)^{\alpha\beta,\lambda\sigma} \end{pmatrix}. \tag{4.66}$$

Seguindo o desenvolvimento da obtenção do propagador $AD_{B\wedge F}$, vamos escrever o operador $\hat{\mathcal{O}}_{MKR+fg}$ de forma genérica, tendo o intuito de encontrar a forma do seu inverso

$$\hat{\mathcal{O}}_{MKR+fg} = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \qquad \mathbf{O}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{pmatrix}, \tag{4.67}$$

Utilizando a relação de identidade $\mathbf{O}\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{I}$, temos

$$\mathbf{O}\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \tag{4.68}$$

que ao resolver encontraremos um conjunto de quatro expressões dos operadores A, B, C e D em termos de $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$,

$$\begin{cases} A\mathbb{A} + B\mathbb{C} = I \\ A\mathbb{B} + B\mathbb{D} = 0 \\ C\mathbb{A} + D\mathbb{C} = 0 \\ C\mathbb{B} + D\mathbb{D} = \mathbb{I} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{A} = (A - BD^{-1}C)^{-1} \\ \mathbb{B} = -A^{-1}B\mathbb{D} \\ \mathbb{C} = -D^{-1}C\mathbb{A} \\ \mathbb{D} = (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{cases}. \tag{4.69}$$

Podemos calcular explicitamente cada componente da matriz inversa

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^{\mu\nu} =& [A^{\mu\nu} - B^{\mu\rho\sigma}(D^{-1})_{\alpha\beta;\rho\sigma}C^{\alpha\beta\nu}]^{-1} \\ =& \left[\left(\theta^2\Box\theta^{\mu\nu} + \frac{\Box}{\lambda}\omega^{\mu\nu}\right) - \hat{S}^{\mu\rho\sigma}\left(\frac{2m^2}{\theta^2\Box}P^{(1)}_{\alpha\beta,\rho\sigma} + \frac{2\xi}{\Box}P^{(2)}_{\alpha\beta,\rho\sigma}\right)\hat{S}^{\alpha\beta\nu}\right]^{-1} \\ =& \frac{1}{\theta^2\Box + m^2}\theta^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{\Box}\omega^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{4.70}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}^{\alpha\beta;\rho\sigma} =& (D^{\alpha\beta;\rho\sigma} - C^{\alpha\beta\mu}(A^{-1})_{\mu\nu}B^{\nu\rho\sigma})^{-1} \\
=& \left[-\frac{\theta^2\Box}{2m^2}\left(P^{(1)}\right)^{\alpha\beta,\rho\sigma} - \frac{\Box}{2\xi}\left(P^{(2)}\right)^{\alpha\beta,\rho\sigma} + \hat{S}^{\alpha\beta\mu}\left(\frac{1}{\theta^2\Box}\theta_{\mu\nu} + \frac{\lambda}{\Box}\omega_{\mu\nu}\right)\hat{S}^{\nu\rho\sigma}\right]^{-1} \\
=& -\frac{2m^2}{\theta^2\Box + m^2}\left(P^{(1)}\right)^{\alpha\beta,\rho\sigma} - \frac{2\xi}{\Box}\left(P^{(2)}\right)^{\alpha\beta,\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{4.71}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{B}^{\mu\rho\sigma} =& -(A^{\mu\nu})^{-1}B_{\nu\alpha\beta}\mathbb{D}^{\alpha\beta;\rho\sigma} \\
=& -\left[\frac{1}{\theta^2\Box}\theta^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{\Box}\omega^{\mu\nu}]\right](-\hat{S}_{\nu\alpha\beta})\left[-\frac{2m^2}{\theta^2\Box + m^2}\left(P^{(1)}\right)^{\alpha\beta,\rho\sigma} - \frac{2\xi}{\Box}\left(P^{(2)}\right)^{\alpha\beta,\rho\sigma}\right] \\
=& -\frac{2m^2}{\theta^2\Box\left(\theta^2\Box + m^2\right)}\hat{S}^{\mu\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{4.72}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}^{\alpha\beta\nu} =& -(D^{\alpha\beta;\rho\sigma})^{-1}C_{\rho\sigma\mu}\mathbb{A}^{\mu\nu} \\
=& -\left[-\frac{\theta^2\Box}{2m^2}\left(P^{(1)}\right)^{\alpha\beta;\rho\sigma} - \frac{\Box}{2\xi}\left(P^{(2)}\right)^{\alpha\beta;\rho\sigma}\right]^{-1}(\hat{S}_{\rho\sigma\mu})\left(\frac{1}{\theta^2\Box + m^2}\theta^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{\Box}\omega^{\mu\nu}\right) \\
=& \frac{2m^2}{\theta^2\Box\left(\theta^2\Box + m^2\right)}\hat{S}^{\alpha\beta\nu}
\end{aligned} \tag{4.73}
$$

Logo o propagador do modelo MKR é dado pela matriz,

$$
\left(\hat{\mathcal{O}}^{-1}_{MKR}\right)^{\mu,\alpha\beta;\nu,\lambda\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta^2\Box + m^2}\theta^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{\Box}\omega^{\mu\nu} & -\frac{2m^2}{\theta^2\Box\left(\theta^2\Box + m^2\right)}S^{\mu\lambda\sigma} \\ \frac{2m^2}{\theta^2\Box\left(\theta^2\Box + m^2\right)}S^{\alpha\beta\nu} & -\frac{2m^2}{\theta^2\Box + m^2}\left(P^{(1)}\right)^{\alpha\beta,\lambda\sigma} - \frac{2\xi}{\Box}\left(P^{(2)}\right)^{\alpha\beta,\lambda\sigma} \end{pmatrix}. \tag{4.74}
$$

Comparando este resultado 4.74 com o 4.24, podemos observar que os polos físicos dos dois propagadores são iguais, ou seja, $\theta^2\Box + m^2$, e confirmamos que o espectro de partículas de ambas as teorias são equivalentes.

4.3 Dualidade via lagrangiana mestre.

O estudo da equivalência entre modelos quadrimensionais contendo um termo topológico $B \wedge F$ foi realizado pela primeira vez em [59], neste artigo os autores usaram o formalismo de imersão de calibre, procedimento de mostrado na seção 3.3, para estabelecer a dualidade clássica entre 4.1 e 4.25. Neste seção empregamos o método da lagrangiana mestre [27, 33], que estende e interpola esses dois modelos estudados $AD_{B\wedge F}$ e MKR. Além disso, este método permite uma maior praticidade ao estender a equivalência ao nível quântico.

4.3.1 Dualidade clássica.

Vamos iniciar pela densidade lagrangiana 4.25 escrita explicitamente em termos dos campos fundamentais A_μ e $B_{\mu\nu}$. Seguiremos os passos expostos na seção 3.1 e introduziremos dois campos auxiliares Π_μ e $\Lambda_{\mu\nu}$ para reduzir a ordem das derivadas do modelo, desta forma buscamos obter uma teoria de primeira ordem nas derivadas:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{MKR} =& \frac{\theta^2}{12m^2}H^{\mu\nu\alpha}H_{\mu\nu\alpha} - \frac{\theta^2}{4}F^\mu F_\mu - \frac{\chi\theta}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}B_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \\ \mathcal{L}_{MKR} \to \mathcal{L}_M =& a\Pi_\mu\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu B_{\alpha\beta} + b\Pi_\mu\Pi_\mu \\ &+ c\Lambda_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta + d\Lambda^{\mu\nu}\Lambda_{\mu\nu} - \frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}B_{\mu\nu}\partial_\alpha A_\beta, \end{aligned} \tag{4.75}$$

onde a, b, c e d são coeficientes constantes a serem determinados. Um fato novo neste modelo é que devido conter dois campos dinâmicos, devemos introduzir dois campos auxiliares para reduzir a ordem das derivadas nos termos cinéticos do modelo. Devido a presença de termos com os campos auxiliares Π_μ e $\Lambda_{\mu\nu}$ ao quadrado, podemos calcular as equações de movimento desses novos campos:

$$\Pi_\mu = -\frac{a}{2b}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu B^{\alpha\beta}, \tag{4.76}$$

$$\Lambda_{\mu\nu} = -\frac{c}{2d}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha A^\beta. \tag{4.77}$$

Podemos substituir as equações de movimento dos campos auxiliares na lagrangiana mestre 4.75, desta forma eliminaremos a dependência dos campos Π_μ e $\Lambda_{\mu\nu}$. No final deste procedimento, a lagrangiana mestre torna-se a lagrangiana do modelo MKR. O que nos possibilita fixar algumas os coeficientes adicionados:

$$\frac{a^2}{b} = \frac{\theta^2}{2m^2}, \qquad \frac{c^2}{d} = -\theta^2. \tag{4.78}$$

Ainda não conseguimos solucionar completamente os quatro coeficientes. Entretanto, o mesmo procedimento pode ser realizado para os campos A_μ e $B_{\mu\nu}$. E desta forma solucionar a fixação dos coeficientes. Calculando as equações de movimento dos campos básicos A_μ e $B_{\mu\nu}$ encontramos respectivamente:

$$-c\epsilon^{\alpha\mu\nu\beta}\partial_\alpha\Lambda_{\mu\nu} + \frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\alpha\mu\nu\beta}\partial_\alpha B_{\mu\nu} = 0, \tag{4.79}$$

$$a\epsilon^{\nu\mu\alpha\beta}\partial_\nu\Pi_\mu - \frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta = 0, \tag{4.80}$$

resolvendo estas equações,

$$A_\mu = \frac{2a}{\chi\theta}\Pi_\mu + \partial_\mu\phi, \tag{4.81}$$

$$B_{\mu\nu} = \frac{2c}{\chi\theta}\Lambda_{\mu\nu} + \partial_\mu\Sigma_\nu - \partial_\nu\Sigma_\mu \tag{4.82}$$

onde ϕ e Σ_μ são campos arbitrários. Substituindo as soluções 4.81 e 4.82 na lagrangiana mestre devemos encontrar um modelo independente dos campos básicos. Impondo este modelo ser o $\mathcal{L}_{AD_{B\wedge F}}$, podemos fixar:

$$a = \frac{\chi\theta}{2}, \qquad b = \frac{m^2}{2}, \tag{4.83}$$

$$c = \frac{\chi\theta}{2}, \qquad d = -\frac{1}{4}. \tag{4.84}$$

Agora podemos escrever a lagrangiana mestres completa da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M =& \frac{\chi\theta}{2}\Pi_\mu\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu B_{\alpha\beta} + \frac{m^2}{2}\Pi_\mu\Pi_\mu \\ &+ \frac{\chi\theta}{2}\Lambda_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta - \frac{1}{4}\Lambda^{\mu\nu}\Lambda_{\mu\nu} - \frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}B_{\mu\nu}\partial_\alpha A_\beta.\end{aligned} \tag{4.85}$$

A lagrangiana 4.85 interpola os modelos 4.1 e 4.25 com o esperado. Esse mecanismo transforma modelos sem invariância em modelos com simetria de calibre, adicionando termos que não aparecem em suas versões originais. A invariância de calibre de 4.85 sob as transformações $\delta A_\mu = \partial_\mu\lambda$ e $\delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu\beta_\nu - \partial_\mu\beta_\nu$ com $\delta\Pi_\mu = \delta\Lambda_{\mu\nu} = 0$ agora é evidente. Com o método da lagrangiana mestre, fomos capazes de estabelecer a relação de equivalência quando o acoplamento a outros campos dinâmicos são considerados e temos um formalismo simples para a investigação da teoria no nível quântico.

4.3.2 Dualidade clássica com acoplamento linear com a matéria.

Na seção anterior desenvolvemos a dualidade $AD_{B\wedge F}/MKR$ ambas sem interação com matéria. No entanto, é fundamental garantir que essa equivalência também seja válida na presença de fontes externas acopladas aos campos. Nesta seção assumiremos apenas acoplamentos lineares com campos externos, cujas correntes associadas são compostas apenas por campos de matéria. Os casos que envolvem acoplamentos não lineares ou quando as correntes dependem explicitamente do calibre ou dos campos auto duais não serão contemplados neste trabalho.

Vamos considerar a lagrangiana mestre 4.85, adicionaremos três novos termos. Um termo descreve dinâmica dos campos de matéria $\mathcal{L}(\psi)$ e os outros dois termos são acoplamentos com setor dual da lagrangiana:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M^{\psi} =&\frac{\chi\theta}{2}\Pi_\mu\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu B_{\alpha\beta}+\frac{m^2}{2}\Pi_\mu\Pi_\mu+\frac{\chi\theta}{2}\Lambda_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta\\ &-\frac{1}{4}\Lambda^{\mu\nu}\Lambda_{\mu\nu}-\frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}B_{\mu\nu}\partial_\alpha A_\beta+\Pi_\mu J^\mu+\Lambda_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}+\mathcal{L}(\psi),\end{aligned} \tag{4.86}$$

Note que devido à falta de simetria de calibre no setor auto dual, as correntes de matéria J^μ e $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ geralmente não são conservadas. Para tornar nossa análise o mais geral possível, não assumiremos nenhuma forma específica para o setor de matéria por enquanto, somente a imposição que as correntes de matéria não devem depender do calibre e nem dos campos Π_μ e $\Lambda_{\mu\nu}$.

Vamos separar esta avaliação em duas etapas. Primeiramente, removeremos a dependência dos campos de calibre em 4.86. Variando funcionalmente a ação $\int d^4x\mathcal{L}_M^{\psi}$ em relação aos campos A_μ e $B_{\mu\nu}$, obtemos suas equações de movimento correspondentes cujas soluções são dadas por;

$$A_\mu =\Pi_\mu+\partial_\mu\phi \tag{4.87}$$

$$B_{\mu\nu} =\Lambda_{\mu\nu}+\partial_\mu\Sigma_\nu-\partial_\nu\Sigma_\mu, \tag{4.88}$$

este resultado é semelhante as soluções 4.81 e 4.82. Fato devido aos campos de calibre não serem acoplados aos campos de matéria. Substituindo as soluções 4.87 e 4.88 em 4.86, encontraremos o modelo auto dual acoplado da matéria que chamaremos de $\mathcal{L}_{AD_{BF}}^{\psi}$:

$$\mathcal{L}_{AD_{BF}}^{\psi}=\frac{m^2}{2}\Pi_\mu\Pi^\mu-\frac{1}{4}\Lambda_{\mu\nu}\Lambda^{\mu\nu}+\frac{\chi\theta}{2}\Pi_\mu\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu\Lambda_{\alpha\beta}+\Pi_\mu J^\mu+\Lambda_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}+\mathcal{L}(\psi). \tag{4.89}$$

A próxima etapa, vamos eliminar os campos Π_μ e $\Lambda_{\mu\nu}$ da lagrangiana mestre. As equações de movimento para os campos duais são:

$$\Pi_\mu=-\frac{\chi\theta}{2m^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu B^{\alpha\beta}-\frac{1}{m^2}J_\mu \tag{4.90}$$

$$\Lambda_{\mu\nu}=\chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha A^\beta+2\mathcal{J}_{\mu\nu}. \tag{4.91}$$

Analogamente o que foi feito na equação 4.89, substituindo 4.90 e 4.91 na lagrangiana mestre $\mathcal{L}_M^{\psi}$ devemos encontrar o modelo MKR com interação:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{MKR}^{\psi}=&\frac{\theta^2}{12m^2}H_{\mu\nu\alpha}H^{\mu\nu\alpha}-\frac{\theta^2}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}-\frac{\chi\theta}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}B^{\mu\nu}\partial^\alpha A^\beta-\frac{\chi\theta}{2m^2}B_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha J_\beta\\ &-\frac{1}{2m^2}J^\mu J_\mu+\chi\theta A_\mu\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu\mathcal{J}_{\alpha\beta}+\mathcal{J}^{\mu\nu}\mathcal{J}_{\mu\nu}+\mathcal{L}(\psi).\end{aligned} \tag{4.92}$$

Com o resultado acima, fica claro que a densidade lagrangiana $\mathcal{L}_{MKR}^{\psi}$ corresponde ao modelo 4.25 interagindo com a matéria por meio de correntes "magnéticas" mais termos tipo Thirring envolvendo apenas os campos de matéria. Uma densidade lagrangiana semelhante a $\mathcal{L}^{\psi}_{MKR}$ apareceu anteriormente em [59]. No entanto, a abordagem utilizada foi baseada no método de imersão de calibre, o que difere do desenvolvido nesta seção. Também podemos observar que as equações de movimento para os campos Π_μ e $\Lambda_{\mu\nu}$ no modelo 4.89 e para os campos de calibre A_μ e $B_{\mu\nu}$ no modelo 4.92 podem ser modeladas da mesma maneira, por meio da identificação:

$$\Pi_\mu \to \tilde{H}_\mu - \frac{1}{m^2} J_\mu, \tag{4.93}$$

$$\Lambda_{\mu\nu} \to \tilde{F}_{\mu\nu} + 2\mathcal{J}_{\mu\nu}. \tag{4.94}$$

Vale ressaltar que a dualidade entre os modelos $AD_{B\wedge F}/MKR$ as teorias trocam acoplamentos lineares $\Pi_\mu J^\mu$ e $\Lambda_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}$, envolvendo correntes não necessariamente conservadas no setor auto dual em acoplamentos não mínimos $A_\mu \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta \mathcal{J}_{\alpha\beta}$ e $B_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha J_\beta$ no setor de calibre, cujas correntes associadas são conservadas. Além disso, os termos da matéria de auto interação são gerados naturalmente, o que desempenhará um papel decisivo para garantir a dualidade no setor da matéria, como veremos a seguir.

4.3.2.1 Setor de matéria.

A equivalência em nível clássico foi estabelecido nas equações 4.93, 4.94 garantindo que as densidades lagrangianas 4.89 e 4.92 sejam compatíveis, uma vez que ambos os modelos obedecem às mesmas equações de movimento na presença de fontes externas. Porém, para que essa equivalência seja concluída, é necessário também verificar o que acontece no setor de matéria, quando essas fontes são dinâmicas.

Para esse estudo, vamos considerar as equações de movimento do campo de matéria ψ. Iniciaremos nossa investigação pelo o modelo $\mathcal{L}^{\psi}_{AD}$ descrito em 4.89, então:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\psi}\int d^4x \mathcal{L}^{(1)}_{SD} = 0 \Rightarrow & \frac{\delta \mathcal{L}(\psi)}{\delta\psi} + \Pi_\mu \frac{\delta J^\mu}{\delta\psi} + \Lambda_{\mu\nu}\frac{\delta \mathcal{J}^{\mu\nu}}{\delta\psi} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{\delta \mathcal{L}(\psi)}{\delta\psi} = -\Pi_\mu \frac{\delta J^\mu}{\delta\psi} - \Lambda_{\mu\nu}\frac{\delta \mathcal{J}^{\mu\nu}}{\delta\psi}. \end{aligned} \tag{4.95}$$

Por outro lado, podemos reescrever as equações de movimento dos campos Π_μ e $\Lambda_{\mu\nu}$ da seguinte forma:

$$m^2\Pi^\mu + \frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu \Lambda_{\alpha\beta} = -J^\mu, \tag{4.96}$$

$$\frac{1}{2}\Lambda^{\mu\nu} - \frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha \Pi_\beta = \mathcal{J}^{\mu\nu}, \tag{4.97}$$

que podemos retirar diretamente os seguintes vínculos

$$m^2\partial_\mu\Pi^\mu = -\partial_\mu J^\mu, \tag{4.98}$$

$$\partial_\mu\Lambda^{\mu\nu} = 2\partial_\mu\mathcal{J}^{\mu\nu}. \tag{4.99}$$

Substituindo a equação 4.97 em 4.96, eliminamos a dependência do campo $\Lambda_{\mu\nu}$ dessa equação. Resultando uma equação em função do campo Π_μ e dos campos de matéria,

$$\left(\theta^2\Box + m^2\right)\Pi^\mu = -J^\mu - \frac{\theta^2}{m^2}\partial^\mu\partial_\nu J^\nu - \chi\theta\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu\mathcal{J}_{\alpha\beta}, \tag{4.100}$$

para a obtenção do resultado acima foi utilizado a igualdade $m^2\partial_\mu\Pi^\mu = -\partial_\mu J^\mu$. Adicionando a definição do operador de onda $\hat{R}^{-1} = \left(\Box + \frac{m^2}{\theta^2}\right)$, podemos reescrever a equação acima como:

$$\Pi_\mu = -\frac{\hat{R}}{\theta^2}\left(J_\mu + \frac{\theta^2}{m^2}\partial_\mu\partial^\nu J_\nu + \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu\mathcal{J}^{\alpha\beta}\right). \tag{4.101}$$

Fazendo um processo análogo do descrito acima, agora buscando uma equação contendo somente o campo Λ_μ e os campos de matéria, encontramos:

$$\Lambda_{\mu\nu} = -\frac{\hat{R}}{\theta^2}\left(-2m^2\mathcal{J}_{\mu\nu} + 2\theta^2\partial^\alpha\left[\partial_\mu\mathcal{J}_{\nu\alpha} - \partial_\nu\mathcal{J}_{\mu\alpha}\right] + \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha J^\beta\right). \tag{4.102}$$

Finalmente podemos escrever a equação 4.95 livre da dependência dos campos duais Π_μ e $\Lambda_{\mu\nu}$, substituindo 4.101 e 4.102 em 4.95 temos:

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}(\psi)}{\delta\psi} &= \frac{\hat{R}}{\theta^2}\left[J_\mu + \frac{\theta^2}{m^2}\partial_\mu\left(\partial^\nu J_\nu\right) + \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu\mathcal{J}^{\alpha\beta}\right]\frac{\delta J^\mu}{\delta\psi} \\ &+ \frac{\hat{R}}{\theta^2}\left[-2m^2\mathcal{J}_{\mu\nu} + 2\theta^2\partial^\alpha\left(\partial_\mu\mathcal{J}_{\nu\alpha} - \partial_\nu\mathcal{J}_{\mu\alpha}\right) + \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha J^\beta\right]\frac{\delta\mathcal{J}^{\mu\nu}}{\delta\psi}.\end{aligned} \tag{4.103}$$

esta é uma equação diferencial não local, expressa apenas em termos dos campos de matéria.

Podemos fazer a análise acima, tendo o ponto de partida o modelo $\mathcal{L}^\psi_{MKR}$. As equações de movimento para os campos de matéria neste cenário são:

$$\frac{\delta}{\delta\psi}\int d^4x\mathcal{L}^\psi_{MKR} = 0 \Rightarrow \frac{\delta\mathcal{L}(\psi)}{\delta\psi} - \left(\frac{1}{m^2}J_\mu - \tilde{H}_\mu\right)\frac{\delta J^\mu}{\delta\psi} - \left(-2\mathcal{J}_{\mu\nu} - \tilde{F}_{\mu\nu}\right)\frac{\delta\mathcal{J}^{\mu\nu}}{\delta\psi} = 0 \tag{4.104}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta\mathcal{L}(\psi)}{\delta\psi} = \left(\frac{1}{m^2}J_\mu - \tilde{H}_\mu\right)\frac{\delta J^\mu}{\delta\psi} + \left(-2\mathcal{J}_{\mu\nu} - \tilde{F}_{\mu\nu}\right)\frac{\delta\mathcal{J}^{\mu\nu}}{\delta\psi}, \tag{4.105}$$

onde foi utilizada das definições 4.54 e 4.55 para os campos duais.

Para eliminar a dependência dos campos duais $\tilde{F}_{\mu\nu}$ e $\tilde{H}_\mu$ em 4.105, vamos calcular as equações de movimento para os campos, iremos usar as definições de $\tilde{H}_\mu$ e $\tilde{F}_{\mu\nu}$ estabelecidas anteriormente;

$$m^2\tilde{H}_\mu + \frac{\theta}{2\chi}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu\tilde{F}^{\alpha\beta} = -\chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu\mathcal{J}^{\alpha\beta}, \tag{4.106}$$

$$-\tilde{F}_{\mu\nu} + \frac{\theta}{\chi}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha\tilde{H}^\beta = \frac{\chi\theta}{m^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha J^\beta, \tag{4.107}$$

reescrevendo 4.107

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{\theta}{\chi}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha\tilde{H}^\beta - \frac{\chi\theta}{m^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha J^\beta. \tag{4.108}$$

Substituindo este resultado em 4.106 teremos uma equação que relaciona o campo dual $\tilde{H}_\mu$ com os campos de matéria somente,

$$\tilde{H}_\mu = \frac{\hat{R}}{\theta^2}\left[\frac{\theta^2}{m^2}\left(\Box J_\mu - \partial_\mu\partial^\nu J_\nu\right) - \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu\mathcal{J}^{\alpha\beta}\right]. \tag{4.109}$$

Utilizando o resultado acima e inserindo na equação 4.107 teremos,

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = -2R\Box\mathcal{J}_{\mu\nu} - \frac{\hat{R}}{\theta^2}\left[2\theta^2\partial^\alpha\left(\partial_\mu\mathcal{J}_{\nu\alpha} - \partial_\nu\mathcal{J}_{\mu\alpha}\right) + \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha J^\beta\right]. \tag{4.110}$$

Conhecendo as equações 4.109 e 4.110, podemos prosseguir com a investigação da equação de movimento do setor de matéria do modelo MKR,

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}(\psi)}{\delta\psi} &= \left[\frac{1}{m^2}\left(1-\hat{R}\Box\right)J_\mu + \frac{\hat{R}}{\theta^2}\left(\frac{\theta^2}{m^2}\partial_\mu\partial^\nu J_\nu + \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu\mathcal{J}^{\alpha\beta}\right)\right]\frac{\delta J^\mu}{\delta\psi} \\ &+ \left[2\left(\hat{R}\Box - 1\right)\mathcal{J}_{\mu\nu} + \frac{\hat{R}}{\theta^2}\left(2\theta^2\partial^\alpha\left(\partial_\mu\mathcal{J}_{\nu\alpha} - \partial_\nu\mathcal{J}_{\mu\alpha}\right) + \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha J^\beta\right)\right]\frac{\delta\mathcal{J}^{\mu\nu}}{\delta\psi}.\end{aligned} \tag{4.111}$$

Lembrando da definição $\hat{R}^{-1} = \left(\Box + \frac{m^2}{\theta^2}\right)$ para escrever $\Box = \hat{R}^{-1} - \frac{m^2}{\theta^2}$, podemos reagrupar os termos em 4.111 da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}(\psi)}{\delta\psi} &= \frac{\hat{R}}{\theta^2}\left[J_\mu + \frac{\theta^2}{m^2}\partial_\mu\left(\partial^\nu J_\nu\right) + \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu\mathcal{J}^{\alpha\beta}\right]\frac{\delta J^\mu}{\delta\psi} \\ &+ \frac{\hat{R}}{\theta^2}\left[-2m^2\mathcal{J}_{\mu\nu} + 2\theta^2\partial^\alpha\left(\partial_\mu\mathcal{J}_{\nu\alpha} - \partial_\nu\mathcal{J}_{\mu\alpha}\right) + \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha J^\beta\right]\frac{\delta\mathcal{J}^{\mu\nu}}{\delta\psi}.\end{aligned} \tag{4.112}$$

Comparando 4.103 com 4.112, concluímos que os setores de matéria dos dois modelos originam às mesmas equações de movimento. Desta forma, mostramos que os modelo 4.89 e 4.92 são equivalentes e estabeleceram a dualidade clássica entre as teorias quando são considerados acoplamentos com campos de matéria dinâmica.

Considerando, como um caso particular, um campo de matéria fermiônica minimamente acoplado ao campo auto dual Π_μ e assumindo as seguintes identificações:

$$\mathcal{L}(\psi) \to \mathcal{L}_{Dirac} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi, \tag{4.113}$$

onde M é a massa do campos de Dirac,

$$J_\mu \to -eJ_\mu = -e\bar{\psi}\gamma_\mu \psi, \tag{4.114}$$
$$\mathcal{J}_{\mu\nu} \to 0, \tag{4.115}$$

são as correntes fermiônicas com e sendo uma constante de acoplamento adimensional. A equação encontrada em 4.112 torna-se simplesmente:

$$\frac{\delta \mathcal{L}(\psi)}{\delta \psi} = \frac{\hat{R}}{\theta^2}\left[J_\mu + \frac{\theta^2}{m^2}\partial_\mu\left(\partial^\nu J_\nu\right)\right]\frac{\delta J^\mu}{\delta \psi} \tag{4.116}$$
$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi = \frac{e^2}{\theta^2}\hat{R}J_\mu \gamma^\mu \psi, \tag{4.117}$$

relembrando da relação $\partial_\mu J^\mu = -m^2 \partial_\mu \Pi^\mu$ e do vínculo de Lorentz $\partial_\mu \Pi^\mu = 0$ que o campo Π_μ obedece. Este resultado que concorda com o resultado obtido anteriormente na literatura [59].

4.3.3 Dualidade Quântica.

A verificação da equivalência quântica da dualidade $AD_{B\wedge F}/MKR$ via ação mestre ainda se encontrava pendente na literatura. A discussão escrita nesta seção conjuntamente com toda análise estabelecida ao longo do capítulo 4 nos proporcionou a publicação de [61]. Para a abordagem da dualidade em regime quântico vamos utilizar os formalismos das integrais de caminho. O funcional gerador é definido como:

$$Z(\psi) = \mathcal{N}\int \mathcal{D}A^\mu \mathcal{D}B^{\mu\nu}\mathcal{D}\Pi^\mu \mathcal{D}\Lambda^{\mu\nu} \exp\left\{i\int d^4x\left[\mathcal{L}_M^\psi\right]\right\}, \tag{4.118}$$

onde $\mathcal{N}$ é uma constante de normalização e a lagrangiana $\mathcal{L}_M^\psi$ definida em 4.86. Nosso objetivo é avaliar a lagrangiana efetiva resultante da integração sobre as configurações dos campos.

Para realizar a integração sobre as configurações dos campos A_μ e $B_{\mu\nu}$ vamos primeiramente adicionar dois termos a lagrangiana mestre da seguinte maneira;

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M^\psi =& \frac{m^2}{2}\Pi_\mu \Pi^\mu - \frac{1}{4}\Lambda_{\mu\nu}\Lambda^{\mu\nu} - \frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}B_{\mu\nu}\partial_\alpha A_\beta + \Pi_\mu J^\mu + \Lambda_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu} + \frac{\chi\theta}{2}\Lambda_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta + \mathcal{L}(\psi)\\ &+ \frac{\chi\theta}{2}\Pi_\mu \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu B_{\alpha\beta} + \mathcal{L}(\psi) + \left(\frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\Pi^\mu \partial^\nu \Lambda^{\alpha\beta} - \frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\Pi^\mu \partial^\nu \Lambda^{\alpha\beta}\right)\end{aligned} \tag{4.119}$$

os dois últimos termos foram adicionados de maneira que podemos reescreve-los como,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M =&\mathcal{L}^{\psi}_{BF} - \frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}B_{\mu\nu}\partial_\alpha A_\beta + \frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}B_{\mu\nu}\partial_\alpha \Pi_\beta + \frac{\chi\theta}{2}\Lambda_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta - \frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\Lambda^{\mu\nu}\partial^\alpha\Pi^\beta \\ =&\mathcal{L}^{\psi}_{BF} - \frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}B_{\mu\nu}\partial_\alpha(A_\beta - \Pi_\beta) + \frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\Lambda_{\mu\nu}\partial_\alpha(A_\beta - \Pi_\beta) \\ =&\mathcal{L}^{\psi}_{BF} + \frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left(\Lambda_{\mu\nu} - B_{\mu\nu}\right)\partial_\alpha\left(A_\beta - \Pi_\beta\right). \end{aligned} \tag{4.120}$$

Note que restringimos a contribuição dos campos A_μ e $B_{\mu\nu}$ somente do segundo termo. Dessa forma, podemos fazer uma mudança nos campos de calibre através das relações $A_\beta \to A_\beta + \Pi_\beta$ e $B_{\mu\nu} \to B_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu\nu}$, o que nos permite reescrever a equação 4.120 desacoplando os campos de calibre,

$$\mathcal{L}^{\psi}_M = \mathcal{L}^{\psi}_{AD} - \frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}B_{\mu\nu}\partial_\alpha A_\beta. \tag{4.121}$$

Substituindo este resultado no funcional gerador obtemos,

$$Z(\psi) = \mathcal{N}\int \mathcal{D}A^\mu \mathcal{D}B^{\mu\nu}\mathcal{D}\Pi^\mu\mathcal{D}\Lambda^{\mu\nu}\exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}^{\psi}_{AD}\right]\exp\left[i\int d^4x - \frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}B_{\mu\nu}\partial_\alpha A_\beta\right] \tag{4.122}$$

Toda a dependência dos campos de calibre da equação acima, está centrada no termo puramente topológico, não adicionando conteúdo físico a teoria. Isto nos permite escrever o funcional gerador da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} Z(\psi) =&\mathcal{N}\int \mathcal{D}\Pi^\mu\mathcal{D}\Lambda^{\mu\nu}\exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}^{(2)}_{eff}(\Pi,\Lambda,\psi)\right] \\ =&Z_{AD_{B\wedge F}}(\psi), \end{aligned} \tag{4.123}$$

onde,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(2)}_{eff}(\Pi,\Lambda,\psi) = &\frac{m^2}{2}\Pi_\mu\Pi^\mu - \frac{1}{4}\Lambda_{\mu\nu}\Lambda^{\mu\nu} + \frac{\chi\theta}{2}\Pi_\mu\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu\Lambda_{\alpha\beta} \\ &+ \Pi_\mu J^\mu + \Lambda_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu} + \mathcal{L}(\psi), \end{aligned} \tag{4.124}$$

este resultado corresponde ao encontrado anteriormente em 4.89. Podemos calcular as funções de correlação através de 4.123. As funções de dois pontos em relação as fontes J_μ e $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ deste modelo são,

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\frac{\delta Z(\psi)}{\delta J_\alpha(x)} =&\frac{1}{i}\frac{\delta Z_{AD_{B\wedge F}}(\psi)}{\delta J_\alpha(x)} = \Pi^\mu(x_1)\frac{\delta J_\mu(x_1)}{\delta J_\alpha(x)}Z_{AD_{B\wedge F}}(\psi) = \Pi^\mu(x_1)\delta_{\mu\alpha}\delta(x_1 - x)Z_{AD_{B\wedge F}}(\psi) \\ =&\Pi_\alpha(x)Z_{AD_{B\wedge F}}(\psi)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 Z(\psi)}{\delta J_\alpha(x)\delta J_\beta(y)} =& \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_\beta(y)}\right)\frac{1}{i}\frac{\delta Z_{AD_{B\wedge F}}(\psi)}{\delta J_\alpha(x)} = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_\beta(y)}\Pi_\alpha(x) Z_{AD_{B\wedge F}}(\psi) \\
=&\Pi_\alpha(x)\Pi^\mu(x_1)\frac{\delta J_\mu(x_1)}{\delta J_\beta(y)} Z_{AD_{B\wedge F}}(\psi) = \Pi_\alpha(x)\Pi^\mu(x_1)\delta_{\mu\beta}(y)\delta(x_1-y) Z_{AD_{B\wedge F}}(\psi) \\
=&\Pi_\alpha(x)\Pi_\beta(y) Z_{AD_{B\wedge F}}(\psi). \qquad (4.125)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{i}\frac{\delta Z(\psi)}{\delta \mathcal{J}_{\alpha\beta}(x)} =& \frac{1}{i}\frac{\delta Z_{AD_{B\wedge F}}(\psi)}{\delta \mathcal{J}_{\alpha\beta}(x)} = \Lambda^{\mu\nu}(x_1)\frac{\delta \mathcal{J}_{\mu\nu}(x_1)}{\delta \mathcal{J}_{\alpha\beta}(x)} Z_{AD_{B\wedge F}}(\psi) = \Lambda^{\mu\nu}(x_1)\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}\delta(x_1-x) Z_{AD_{B\wedge F}}(\psi) \\
=&\Lambda_{\alpha\beta}(x) Z_{AD_{B\wedge F}}(\psi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 Z(\psi)}{\delta \mathcal{J}_{\rho\sigma}(x)\delta \mathcal{J}_{\alpha\beta}(y)} =& \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta \mathcal{J}_{\rho\sigma}(y)}\right)\frac{1}{i}\frac{\delta Z_{AD_{B\wedge F}}(\psi)}{\delta \mathcal{J}_{\alpha\beta}(x)} = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta \mathcal{J}_{\rho\sigma}(y)}\Lambda_{\alpha\beta}(x) Z_{AD_{B\wedge F}}(\psi) \\
=&\Lambda_{\alpha\beta}(x)\Lambda^{\mu\nu}(x_1)\frac{\delta \mathcal{J}_{\mu\nu}(x_1)}{\delta \mathcal{J}_{\rho\sigma}(y)} Z_{AD_{B\wedge F}}(\psi) \\
=&\Lambda_{\alpha\beta}(x)\Lambda^{\mu\nu}(x_1)\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}\delta(x_1-y) Z_{AD_{B\wedge F}}(\psi) \\
=&\Lambda_{\alpha\beta}(x)\Lambda_{\rho\sigma}(y) Z_{AD_{B\wedge F}}(\psi). \qquad (4.126)
\end{aligned}
$$

Assumindo $J_\mu = \mathcal{J}_{\mu\nu} = 0$ podemos escrever as relações acima como:

$$
\left\langle \Pi_\mu(x)\Pi_\nu(y)\right\rangle_M = \left\langle \Pi_\mu(x)\Pi_\nu(y)\right\rangle_{AD_{B\wedge F}}, \qquad (4.127)
$$

$$
\left\langle \Pi_{\mu_1}(x_1)\ldots\Pi_{\mu_N}(x_N)\right\rangle_M = \left\langle \Pi_{\mu_1}(x_1)\ldots\Pi_{\mu_N}(x_N)\right\rangle_{AD_{B\wedge F}}. \qquad (4.128)
$$

Expandido estes resultados, teremos as seguintes relações de correlação do modelo,

$$
\left\langle \Lambda_{\mu\nu}(x)\Lambda_{\rho\sigma}(y)\right\rangle_M = \left\langle \Lambda_{\mu\nu}(x)\Lambda_{\rho\sigma}(y)\right\rangle_{AD_{B\wedge F}}, \qquad (4.129)
$$

$$
\left\langle \Lambda_{\mu_1\nu_1}(x_1)\ldots\Lambda_{\mu_N\nu_N}(x_N)\right\rangle_M = \left\langle \Lambda_{\mu_1\nu_1}(x_1)\ldots\Lambda_{\mu_N\nu_N}(x_N)\right\rangle_{AD_{B\wedge F}}. \qquad (4.130)
$$

Explorando um pouco mais da dualidade a nível quântico. Vamos encontrar a lagrangiana efetiva para os campos de matéria. Este trabalho torna-se mais simples se escrevermos 4.123 na forma de matrizes, semelhante ao trabalho realizado em 4.9,

$$
\mathcal{L}^{(1)}_{eff} = \frac{1}{2}\mathbf{X}^T\hat{\mathcal{O}}_{MKR}\mathbf{X} + \mathbf{X}^T\mathbf{J} + \mathcal{L}(\psi) \qquad (4.131)
$$

onde os termos X e J são matrizes contendo os campos vetoriais e as correntes respectivamente,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \Pi_\mu \\ \Lambda_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_\mu \\ \mathcal{J}_{\mu\nu} \end{pmatrix}. \tag{4.132}$$

Para realizar a integração funcional, vamos utilizar a fórmula a integração de caminho gaussiana sobre um campo bosônico x

$$\int \exp\left[-\left(\frac{1}{2}(x, Ax) + (b, x) + c\right)\right] dx = \exp\left[\frac{1}{2}(b, A^{-1}b) - c\right] (\text{Det}\, A)^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.133}$$

Aplicando a fórmula acima do modelo $\mathcal{L}^{(1)}_{eff}$, obtemos,

$$\begin{aligned} Z_{AD_{B\wedge F}}(\psi) =& \mathcal{N} \int \mathcal{D}\mathbf{X} \exp\left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2}\mathbf{X}^T \hat{\mathcal{O}}_{AD_{B\wedge F}} \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{J} + \mathcal{L}(\psi)\right)\right] \\ =& \mathcal{N} \exp\left[-i \int d^4x \left(\frac{1}{2}\mathbf{J}^T \hat{\mathcal{O}}^{-1}_{AD_{B\wedge F}} \mathbf{J} - \mathcal{L}(\psi)\right)\right] \left(-i\, \text{Det}\, \hat{\mathcal{O}}_{AD_{B\wedge F}}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ =& \mathcal{N} \exp\left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\mathbf{J}^T \hat{\mathcal{O}}^{-1}_{AD_{B\wedge F}} \mathbf{J} + \mathcal{L}(\psi)\right)\right] \end{aligned} \tag{4.134}$$

o determinante $-i\, \text{Det}\, \hat{\mathcal{O}}_{AD_{B\wedge F}}$ é independente dos campos e pode ser absorvido pela constante de normalização. A expressão entre os parênteses em 4.134 nomearemos de $\mathcal{L}^{(2)}_{eff}(\psi)$, escrevendo explicitamente teremos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)}_{eff}(\psi) =& \mathcal{L}(\psi) \\ & -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} J_\mu & \mathcal{J}_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta^2\Box + m^2}\theta^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\omega^{\mu\nu} & \frac{2}{\theta^2\Box + m^2} S^{\mu\lambda\sigma} \\ -\frac{2}{\theta^2\Box + m^2} S^{\alpha\beta\nu} & -\frac{2m^2}{\theta^2\Box + m^2}\left(P^{(1)}\right)^{\alpha\beta,\rho\sigma} - 2\left(P^{(2)}\right)^{\alpha\beta,\rho\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_\nu \\ \mathcal{J}_{\rho\lambda} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.135}$$

Realizando o produto matricial acima e utilizando as definições dos operadores de projeções encontraremos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)}_{eff}(\psi) =& \mathcal{L}(\psi) - \frac{1}{\theta^2\Box + m^2}\left[\frac{1}{2} J_\mu J^\nu + \frac{\theta^2}{2m^2} J_\mu \partial^\mu \partial^\nu J_\nu + \chi\theta\epsilon^{\mu\rho\sigma\gamma} J_\mu \partial_\gamma \mathcal{J}_{\rho\sigma} - \chi\theta\epsilon^{\alpha\beta\nu\lambda} \mathcal{J}_{\alpha\beta}\partial_\lambda J_\nu \right. \\ & \left. - m^2 \mathcal{J}^{\alpha\beta}\mathcal{J}_{\alpha\beta} - \theta^2 \mathcal{J}_{\alpha\beta}\partial_\rho\left(\partial^\alpha \mathcal{J}^{\rho\beta} - \partial^\beta \mathcal{J}^{\rho\alpha}\right)\right], \end{aligned} \tag{4.136}$$

podemos ainda fazer uso da definição de $\hat{R}^{-1} = \left(\Box + \frac{m^2}{\theta^2}\right)$, para escrever a expressão do seguinte formato,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)}_{eff}(\psi) =& \mathcal{L}(\psi) - \frac{\hat{R}}{\theta^2}\left[\frac{1}{2} J_\mu J^\nu + \frac{\theta^2\Box}{2m^2} J_\mu \partial^\mu \partial^\nu J_\nu + \chi\theta\epsilon^{\mu\rho\sigma\gamma} J_\mu \partial_\gamma \mathcal{J}_{\rho\sigma} - \chi\theta\epsilon^{\alpha\beta\nu\lambda} \mathcal{J}_{\alpha\beta}\partial_\lambda J_\nu \right. \\ & \left. - m^2 \mathcal{J}^{\alpha\beta}\mathcal{J}_{\alpha\beta} - \theta^2 \mathcal{J}_{\alpha\beta}\partial_\rho\left(\partial^\alpha \mathcal{J}^{\rho\beta} - \partial^\beta \mathcal{J}^{\rho\alpha}\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.137}$$

Este resultado é a lagrangiana efetiva para campo de matéria. Podemos verificar facilmente que a equação de movimento da densidade lagrangiana 4.137 é igual ao resultado 4.103 e 4.112 encontrado na seção anterior. Com isso a equivalência quântica no setor de matéria fica estabelecida.

Agora, por completude, realizaremos a integração funcional sobre as contribuições dos campos Π_μ e $\Lambda_{\mu\nu}$. Deveremos encontrar um resultado somente em função dos campos de calibre A_μ e $B_{\mu\nu}$. Deslocando os campo $\Pi_\mu \to \Pi_\mu + \tilde{H}_\mu - \frac{1}{m^2}J_\mu$ e $\Lambda_{\mu\nu} \to \Lambda_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu} + 2\mathcal{J}_{\mu\nu}$ na lagrangiana $\mathcal{L}_M^\psi$ encontraremos,

$$\mathcal{L}_M^\psi = \mathcal{L}(\Pi, \Lambda) + \mathcal{L}_{eff}^{(3)}(A, B, \psi) \tag{4.138}$$

o reescalonamento proporciona o desacoplamento dos campos na lagrangiana mestre. O primeiro termo do lado direito da igualdade tem dependência somente dos campos Π_μ e $\Lambda_{\mu\nu}$,

$$\mathcal{L}(\Pi, \Lambda) = \frac{m^2}{2}\Pi^\mu\Pi_\mu - \frac{1}{4}\Lambda^{\mu\nu}\Lambda_{\mu\nu}. \tag{4.139}$$

Substituindo 4.138 a lagrangiana mestre

$$Z(\psi) = \mathcal{N}\int \mathcal{D}A^\mu\mathcal{D}B^{\mu\nu}\mathcal{D}\Pi^\mu\mathcal{D}\Lambda^{\mu\nu}\exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}(\Pi, \Lambda)\right]\exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}_{eff}^{(3)}(A, B, \psi)\right]. \tag{4.140}$$

A integração sobre o campos Π_μ e $\Lambda_{\mu\nu}$ torna-se fácil pelo carácter gaussiano de 4.139 resultando efetivamente em um número que podemos incorporar na constante de normalização. Desta forma, o gerador funcional 4.118 resulta em,

$$Z(\psi) = \mathcal{N}\int \mathcal{D}A^\mu\mathcal{D}B^{\mu\nu}\exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}_{eff}^{(1)}(A, B, \psi)\right] \tag{4.141}$$

$$= Z_{MKR}(\psi) \tag{4.142}$$

onde,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{eff}^{(3)}(A, B, \psi) = {} & \frac{\theta^2}{12m^2}H_{\mu\nu\alpha}H^{\mu\nu\alpha} - \frac{\theta^2}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\chi\theta}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}B^{\mu\nu}\partial^\alpha A^\beta \\ & - \frac{\chi\theta}{2m^2}B_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha J_\beta - \frac{1}{2m^2}J_\mu J^\mu \\ & + \chi\theta A_\mu\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu\mathcal{J}_{\alpha\beta} + \mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu} + \mathcal{L}(\psi),\end{aligned} \tag{4.143}$$

que é o mesmo resultado encontrado em 4.92.

Podemos calcular as funções de correlação deste modelo através de 4.140 e comparar com o resultado obtido em 4.129 e 4.130. As funções de dois pontos de 4.140,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i}\frac{\delta Z(\psi)}{\delta J_\alpha(x)} &= \frac{1}{i}\frac{\delta Z_{MKR}(\psi)}{\delta J_\alpha(x)} = \left[\tilde{H}_\alpha(x) - \frac{1}{m^2}J_\alpha(x)\right]Z_{MKR}(\psi),\\
\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 Z(\psi)}{\delta J_\alpha(x)\delta J_\beta(y)} &= \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_\beta(y)}\right)\frac{1}{i}\frac{\delta Z_{AD_{B\wedge F}}(\psi)}{\delta J_\alpha(x)} = \frac{i}{m^2}\delta_{\alpha\beta}\delta(x-y)Z_{MKR}(\psi)\\
&+ \left[\tilde{H}_\alpha(x) - \frac{1}{m^2}J_\alpha(x)\right]\left[\tilde{H}_\beta(y) - \frac{1}{m^2}J_\beta(y)\right]Z_{MKR}(\psi),\\
\left.\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 Z(\psi)}{\delta J_\alpha(x)\delta J_\beta(y)}\right|_{J=\mathcal{J}=0} &= \left[\tilde{H}_\alpha(x)\tilde{H}_\beta(y) + \frac{i}{m^2}\delta_{\alpha\beta}\delta(x-y)\right]Z_{MKR}. \qquad (4.144)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i}\frac{\delta Z(\psi)}{\delta \mathcal{J}_{\alpha\beta}(x)} &= \frac{1}{i}\frac{\delta Z_{MKR}(\psi)}{\delta \mathcal{J}_{\alpha\beta}(x)} = \left[\tilde{F}_{\alpha\beta}(x) + 2\mathcal{J}_{\alpha\beta}(x)\right]Z_{MKR}\psi\\
\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 Z(\psi)}{\delta \mathcal{J}_{\rho\sigma}(x)\delta \mathcal{J}_{\alpha\beta}(y)} &= \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta \mathcal{J}_{\rho\sigma}(y)}\right)\frac{1}{i}\frac{\delta Z_{MKR}(\psi)}{\delta \mathcal{J}_{\alpha\beta}(x)} = -2i\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\sigma}\delta(x-y)Z_{MKR}(\psi)\\
&+ \left[\tilde{F}_{\rho\sigma}(y) + 2\mathcal{J}_{\rho\sigma}(y)\right]Z_{MKR}\psi\\
\left.\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 Z(\psi)}{\delta \mathcal{J}_{\rho\sigma}(x)\delta \mathcal{J}_{\alpha\beta}(y)}\right|_{J=\mathcal{J}=0} &= \left[\tilde{F}_{\alpha\beta}(x)\tilde{F}_{\rho\sigma}(y) - 2i\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\sigma}\delta(x-y)\right]Z_{MKR}(\psi) \qquad (4.145)
\end{aligned}$$

Podemos escrever as relações acima como:

$$\left\langle \Pi_\mu(x)\Pi_\nu(y)\right\rangle_M = \left\langle \tilde{H}_\mu(x)\tilde{H}_\nu(y)\right\rangle_{MKR} + \text{termo de contato}, \qquad (4.146)$$

$$\left\langle \Lambda_{\mu\nu}(x)\Lambda_{\rho\sigma}(y)\right\rangle_M = \left\langle \tilde{F}_{\mu\nu}(x)\tilde{F}_{\rho\sigma}(y)\right\rangle_{MKR} + \text{termo de contato}, \qquad (4.147)$$

Estendendo estes resultados para N campos, teremos as seguintes relações de correlação do modelo,

$$\left\langle \Pi_{\mu_1}(x_1)\ldots\Pi_{\mu_N}(x_N)\right\rangle_M = \left\langle \tilde{H}_{\mu_1}(x_1)\ldots\tilde{H}_{\mu_N}(x_N)\right\rangle_{MKR} + \text{termos de contato}. \qquad (4.148)$$

$$\left\langle \Lambda_{\mu_1\nu_1}(x_1)\ldots\Lambda_{\mu_N\nu_N}(x_N)\right\rangle_M = \left\langle \tilde{F}_{\mu_1\nu_1}(x_1)\ldots\tilde{F}_{\mu_N\nu_N}(x_N)\right\rangle_{MKR} + \text{termos de contato}. \qquad (4.149)$$

Comparando este último resultado com os 4.129 e 4.130, encontramos

$$\left\langle \Pi_{\mu_1}(x_1)\cdots\Pi_{\mu_N}(x_N)\right\rangle_{AD_{B\wedge F}} = \left\langle \tilde{H}_{\mu_1}[B(x_1)]\cdots\tilde{H}_{\mu_N}[B(x_N)]\right\rangle_{MKR} + \text{termos de contato}, \qquad (4.150)$$

$$\left\langle \Lambda_{\mu_1\nu_1}(x_1)\cdots\Lambda_{\mu_N\nu_N}(x_N)\right\rangle_{AD_{B\wedge F}} = \left\langle \tilde{F}_{\mu_1\nu_1}[A(x_1)]\cdots\tilde{F}_{\mu_N\nu_N}[A(x_N)]\right\rangle_{MKR} + \text{termos de contato}. \qquad (4.151)$$

Os termos de contato ocorrem sempre que o expoente no funcional gerador possui dependência quadrática na fonte J. A derivada funcional aplicada na exponencial, quando atua sobre termos da ordem de J^2, resulta em termos do tipo $\delta_{\mu\nu}\delta(x-y)$, que são nulos somente em um ponto $x=y$ e $\mu=\nu$. Da relação acima, temos então os mapeamentos duais obtidos naturalmente via ação mestra:

$$\Pi_\mu \rightarrow \tilde{H}_\mu = \frac{\chi\theta}{2m^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu B^{\alpha\beta} \tag{4.152}$$

$$\Lambda_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}_{\mu\nu} = \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha A^\beta \tag{4.153}$$

estabelecendo a equivalência quântica entre as teorias.

Podemos nos aprofundar um pouco mais no estudo da equivalência a nível quântico, semelhantemente a análise realizada no caso $AD_{B\wedge F}$, vamos calcular agora a ação efetiva para o campos de matéria. Com este intuito, vamos reescrever $\mathcal{L}^{(3)}_{eff}$ em função do produtos de matrizes,

$$\mathcal{L}^{(3)}_{eff}(A,B,\psi) = \mathbf{X}^T\hat{\mathcal{O}}_{MKR}\mathbf{X} + \mathbf{X}^T\tilde{\mathbf{J}} + G(J,\mathcal{J},\psi) \tag{4.154}$$

onde $G(J,\mathcal{J},\psi) = -\frac{1}{2m^2}J^\mu J_\mu + \mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu} + \mathcal{L}(\psi)$, não depende dos campos vetoriais A_μ e $B_{\mu\nu}$. A matriz envolvendo as fontes foi levemente modificada,

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{J}}_\mu \\ \tilde{J}_{\mu\nu} \end{pmatrix} \tag{4.155}$$

onde $\tilde{\mathcal{J}}_\mu = \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu\mathcal{J}^{\alpha\beta}$ e $\tilde{J}_{\mu\nu} = \frac{\chi\theta}{2m^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha J^\beta$, a definição da matriz $\mathbf{X}$ é a mesma já utilizada anteriormente, uma matriz coluna contendo os campos A_μ e $B_{\mu\nu}$.

Feito isso, podemos resolver a integração funcional 4.141 através da fórmula 4.133, ficamos com a seguinte expressão

$$\begin{aligned} Z_{MKR}(\psi) &= \mathcal{N}\int\mathcal{D}\mathbf{X}\,\exp\left[i\int d^4x\left(\frac{1}{2}\mathbf{X}^T\hat{\mathcal{O}}_{MKR}\mathbf{X} + \mathbf{X}^T\tilde{\mathbf{J}} + G(j,\mathcal{J},\psi)\right)\right] \\ &= \mathcal{N}\exp\left[-i\int d^4x\left(\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{J}}^T\hat{\mathcal{O}}^{-1}_{MKR}\tilde{\mathbf{J}} - G(J,\mathcal{J},\psi)\right)\right]\left(-i\,\mathrm{Det}\,\hat{\mathcal{O}}_{MKR}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \mathcal{N}\exp\left[i\int d^4x\left(-\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{J}}^T\hat{\mathcal{O}}^{-1}_{MKR}\tilde{\mathbf{J}} + G(J\mathcal{J},\psi)\right)\right] \end{aligned} \tag{4.156}$$

como o caso anterior, o termo $\left(-i\,\mathrm{Det}\,\hat{\mathcal{O}}_{MKR}\right)$ é independente dos campos podendo ser absorvido pela a constante de normalização.

Escrevendo explicitamente o termo entre parenteses da expressão 4.156 temos

$$\mathcal{L}^{(4)}_{eff}(\psi) = \mathcal{L}(\psi) - \frac{1}{2m^2} J_\mu J^\mu + \mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu} \\ -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\tilde{\mathcal{J}}_\mu & \tilde{J}_{\alpha\beta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\theta^2\Box+m^2}\Theta^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{\Box}\omega^{\mu\nu} & -\frac{2m^2}{\theta^2\Box\left(\theta^2\Box+m^2\right)}S^{\mu\rho\sigma} \\ \frac{2m^2}{\theta^2\Box\left(\theta^2\Box+m^2\right)}S^{\alpha\beta\nu} & -\frac{2m^2}{\theta^2\Box+m^2}\left(P^{(1)}\right)^{\alpha\beta,\rho\sigma} - \frac{2\xi}{\Box}\left(P^{(2)}\right)^{\alpha\beta,\rho\sigma}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\mathcal{J}}_\nu \\ \tilde{J}_{\rho\sigma}\end{pmatrix}. \tag{4.157}$$

Após algumas manipulações algébricas e utilizando as definições dos operadores de projeções, podemos reescrever produto matricial acima como

$$\mathcal{L}^{(4)}_{eff}(\psi) = \mathcal{L}(\psi) - \frac{1}{2m^2} J_\mu J^\mu + \mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu} - \frac{1}{\theta^2\Box + m^2}\Big[\theta^2\Box\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu} - \theta^2\mathcal{J}_{\mu\nu}\partial_\alpha(\partial^\mu\mathcal{J}^{\alpha\nu} - \partial^\nu\mathcal{J}^{\alpha\mu}) \\ + \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}J^\mu\partial^\nu\mathcal{J}^{\alpha\beta} - \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathcal{J}^{\mu\nu}\partial^\alpha J^\beta - \frac{\theta^2\Box}{2m^2}J_\mu J^\mu + \frac{\theta^2}{2m^2}J_\mu\partial^\mu\partial^\nu J_\nu\Big] \tag{4.158}$$

organizando os termos da expressão acima, e usando a definição de $\hat{R}^{-1}$ podemos escreve-la como

$$\mathcal{L}^{(4)}_{eff}(\psi) = \mathcal{L}(\psi) - \frac{\hat{R}}{\theta^2}\Big[\frac{1}{2}J_\mu J^\mu + \frac{\theta^2}{2m^2}J_\mu\partial^\mu\partial^\nu J_\nu + \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}J^\mu\partial^\nu\mathcal{J}^{\alpha\beta} - \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathcal{J}^{\mu\nu}\partial^\alpha J^\beta \\ + \theta^2\Box\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu} - \theta^2\mathcal{J}_{\mu\nu}\partial_\alpha(\partial^\mu\mathcal{J}^{\alpha\nu} - \partial^\nu\mathcal{J}^{\alpha\mu})\Big], \tag{4.159}$$

este resultado é o mesmo encontrado no modelo $AD_{B\wedge F}$ na expressão 4.137. Neste modelo, como no anterior, a ação efetiva para o campo de matéria nos fornece como equação de movimento um resultado já mencionado anteriormente 4.103 e 4.112. Desta forma, mostramos que a dualidade quântica é estabelecida no setor de matéria nos dois modelos da dualidade.

5 CONCLUSÃO E RESPECTIVAS.

Neste trabalho, revisitamos a dualidade entre os modelos auto dual e Maxwell-Chern-Simons em dimensões de espaço-tempo $2+1$. No estudo dessa dualidade algumas formas de estabelecer a dualidade entre duas teorias, ou até mesmo encontrar uma teoria equivalente invariante de calibre forma mostradas. Ao incluir matéria aos modelos da dualidade, observamos que um acoplamento mínimo é traduzido ao outro modelo como um acoplamento magnético.

Nos capítulos 2 e 3 todo o arcabouço teórico é realizado para finalmente encararmos um desafio ainda maior.

No capítulo 4, revisitamos a dualidade entre os modelos auto dual e o topologicamente massivo envolvendo o termo $B \wedge F$, agora em 3+1 dimensões espaço temporais. O estudo dessa dualidade ao incluir acoplamentos com matéria fermiônica foi realizado pela primeira em [59] utilizando o procedimento de imersão de calibre. Este procedimento está descrito no capítulo 3, que consiste em adicionar contra termos, com a finalidade de embutir a simetria de invariância de calibre a uma teoria não invariante.

Em nosso trabalho, optamos em considerar outra abordagem, o método de ação mestre, pelo qual obtivemos uma densidade lagrangiana fundamental que interpola entre os dois modelos e fornece uma prova direta da equivalência dual, tanto no nível clássico quanto no quântico. A ação mestre nos permitiu relacionar as equações de movimento desses modelos por meio de um mapeamento duplo entre campos e correntes de ambas as teorias, o que garante que elas sejam equivalentes no nível clássico. Além disso, demonstramos a dualidade em nível quântico através das integrais de caminho. Definimos um gerador funcional mestre em que a integração nos diferentes campos forneceu lagrangianas efetivas iguais aos obtidos na análise classicamente. Além disso, após uma última integração funcional sobre os campos bosônicos, obtivemos uma lagrangiana não local eficaz para os campos de matéria, o que comprova a equivalência entre os setores de matéria dos modelos analisados.

Assumimos, em nossos estudo, que as correntes externas estão linearmente acopladas aos campos auto duais $(\Pi_{\mu}, \Lambda_{\mu\nu})$ e são constituídas exclusivamente pelos campos da matéria. Mostramos que essas interações induzem acoplamentos "magnéticos"envolvendo os campos de calibre, além de interações correntes-correntes do tipo Thirring. Esses tipos de acoplamentos são, em geral, não renormalizáveis pela contagem direta de potência [33, 37]. No entanto, como no caso dimensional 2 + 1 envolvendo o modelo Maxwell-Chern-Simons, podemos esperar que esse obstáculo possa ser contornado por uma expansão perturbativa de $1/N$, quando o campo da matéria envolvido é um campo fermiônico de componente N, de modo que a teoria se torna renormalizável [33]. Uma verificação explícita dessa questão podemos verificar em [38, 50] , bem como uma possível extensão de nossos resultados.

Além de uma possível extensão para o caso supersimétrico, no corpo do trabalho, trouxemos ferramentas que nos proporcionam investigar diversos cenários. Por exemplo, a dualidade no contexto da simetria de Lorentz violada. Neste cenário a equivalência quântica nem sempre pode ser estabelecida via ação mestre [75]. Outras extensões podem ser viáveis como trabalhar em espaços não comutativos [87] e no cenário não abeliano [74].

REFERÊNCIAS

[1] NOVAES, S. Standard model: An Introduction. In: *10th Jorge Andre Swieca Summer School: Particle and Fields*. [S.l.: s.n.], 1999. p. 5–102.

[2] SALAM, A.; WARD, J. C. On a gauge theory of elementary interactions. *Nuovo Cim.*, v. 19, p. 165–170, 1961.

[3] GLASHOW, S. Partial Symmetries of Weak Interactions. *Nucl. Phys.*, v. 22, p. 579–588, 1961.

[4] SALAM, A.; WARD, J. C. Electromagnetic and weak interactions. *Phys. Lett.*, v. 13, p. 168–171, 1964.

[5] WEINBERG, S. A Model of Leptons. *Phys. Rev. Lett.*, v. 19, p. 1264–1266, 1967.

[6] ARNISON, G. et al. Experimental Observation of Isolated Large Transverse Energy Electrons with Associated Missing Energy at s**(1/2) = 540-GeV. *Phys. Lett. B*, v. 122, p. 103–116, 1983.

[7] BANNER, M. et al. Observation of Single Isolated Electrons of High Transverse Momentum in Events with Missing Transverse Energy at the CERN anti-p p Collider. *Phys. Lett. B*, v. 122, p. 476–485, 1983.

[8] ARNISON, G. et al. Experimental Observation of Lepton Pairs of Invariant Mass Around 95-GeV/c**2 at the CERN SPS Collider. *Phys. Lett. B*, v. 126, p. 398–410, 1983.

[9] BAGNAIA, P. et al. Evidence for $Z^0 \to e^+e^-$ at the CERN $\bar{p}p$ Collider. *Phys. Lett. B*, v. 129, p. 130–140, 1983.

[10] AAD, G. et al. Observation of a new particle in the search for the standard model higgs boson with the atlas detector at the lhc. *Physics Letters B*, v. 716, n. 1, p. 1 – 29, 2012. ISSN 0370-2693. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026931200857X>.

[11] GIANOTTI, F.; VIRDEE, T. S. The discovery and measurements of a higgs boson. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 373, n. 2032, p. 20140384, 2015. Disponível em: <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rsta.2014.0384>.

[12] HIGGS, P. W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 13, p. 508–509, Oct 1964. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.508>.

[13] HIGGS, P. W. Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 145, p. 1156–1163, May 1966. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.145.1156>.

[14] KOSTELECKY, V. The Status of CPT. In: *5th International WEIN Symposium: A Conference on Physics Beyond the Standard Model (WEIN 98)*. [S.l.: s.n.], 1998. p. 588–600.

[15] BELICH, H. et al. Violação da simetria de Lorentz. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, scielo, v. 29, p. 57 – 64, 00 2007. ISSN 1806-1117. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172007000100011&nrm=iso>.

[16] STROMINGER, A.; YAU, S.-T.; ZASLOW, E. Mirror symmetry is T duality. *Nucl. Phys. B*, v. 479, p. 243–259, 1996.

[17] POLCHINSKI, J. Dualities of Fields and Strings. *Stud. Hist. Phil. Sci. B*, v. 59, p. 6–20, 2017.

[18] MALDACENA, J. M. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Int. J. Theor. Phys.*, v. 38, p. 1113–1133, 1999.

[19] BURGESS, C.; QUEVEDO, F. Bosonization as duality. *Nucl. Phys. B*, v. 421, p. 373–390, 1994.

[20] MANDELSTAM, S. Soliton Operators for the Quantized Sine-Gordon Equation. *Phys. Rev. D*, v. 11, p. 3026, 1975.

[21] WITTEN, E. Nonabelian Bosonization in Two-Dimensions. *Commun. Math. Phys.*, v. 92, p. 455–472, 1984.

[22] MARINO, E. C. Complete bosonization of the Dirac fermion field in (2+1)-dimensions. *Phys. Lett.*, B263, p. 63–68, 1991.

[23] BURGESS, C.; LUTKEN, C.; QUEVEDO, F. Bosonization in higher dimensions. *Phys. Lett. B*, v. 336, p. 18–24, 1994.

[24] HERNASKI, C. A.; GOMES, P. R. Duality between 3D Massive Thirring and Maxwell Chern-Simons models from 2D bosonization. *Phys. Rev. Lett.*, v. 121, n. 4, p. 041601, 2018.

[25] SANTOS, R. C. B.; GOMES, P. R.; HERNASKI, C. A. Bosonization of the Thirring Model in 2+1 Dimensions. *Phys. Rev. D*, v. 101, n. 7, p. 076010, 2020.

[26] TOWNSEND, P.; PILCH, K.; NIEUWENHUIZEN, P. V. Self-duality in odd dimensions. *Physics Letters B*, v. 136, n. 1, p. 38 – 42, 1984. ISSN 0370-2693. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269384920513>.

[27] DESER, S.; JACKIW, R. 'Self-duality' of topologically massive gauge theories. *Phys. Lett.*, B139, p. 371–373, 1984.

[28] KARLHEDE, A. et al. On 3-D nonlinear vector-vector duality. *Phys. Lett. B*, v. 186, p. 96–98, 1987.

[29] FRADKIN, E. H.; SCHAPOSNIK, F. A. The Fermion - boson mapping in three-dimensional quantum field theory. *Phys. Lett. B*, v. 338, p. 253–258, 1994.

[30] BANERJEE, N.; BANERJEE, R.; GHOSH, S. NonAbelian bosonization in three-dimensional field theory. *Nucl. Phys. B*, v. 481, p. 421–432, 1996.

[31] BANERJEE, R.; ROTHE, H.; ROTHE, K. Equivalence of the maxwell-chern-simons theory and a self-dual model. *Physical review D: Particles and fields*, v. 52, p. 3750–3752, 10 1995.

[32] BANERJEE, R.; ROTHE, H. J.; ROTHE, K. D. Hamiltonian embedding of the self-dual model and equivalence with maxwell-chern-simons theory. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 55, p. 6339–6343, May 1997. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.55.6339>.

[33] GOMES, M.; MALACARNE, L. C.; SILVA, A. J. da. On the equivalence of the selfdual and Maxwell-Chern-Simons models coupled to fermions. *Phys. Lett.*, B439, p. 137–141, 1998.

[34] MINCES, P.; RIVELLES, V. O. Chern-Simons theories in the AdS / CFT correspondence. *Phys. Lett. B*, v. 455, p. 147–154, 1999.

[35] ANACLETO, M. A. et al. Dual equivalence between selfdual and Maxwell-Chern-Simons models coupled to dynamical U(1) charged matter. *Phys. Lett.*, B504, p. 268–274, 2001.

[36] KARLHEDE, A. et al. Supersymmetric vector-vector duality. *Class. Quant. Grav.*, v. 4, p. 549, 1987.

[37] FERRARI, A. et al. On the duality of three-dimensional superfield theories. *Phys. Rev. D*, v. 73, p. 105010, 2006.

[38] FERRARI, A. et al. Equivalence between supersymmetric self-dual and Maxwell-Chern-Simons models coupled to a matter spinor superfield. *Phys. Lett. B*, v. 678, p. 233–239, 2009.

[39] GOMES, M. et al. On duality of the noncommutative supersymmetric maxwell–chern–simons theory. *Physics Letters B*, v. 666, n. 1, p. 91 – 94, 2008. ISSN 0370-2693. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269308007740>.

[40] KALB, M.; RAMOND, P. Classical direct interstring action. *Phys. Rev. D*, v. 9, p. 2273–2284, 1974.

[41] GREEN, M. B.; SCHWARZ, J. H.; WITTEN, E. *Superstring Theory: 25th Anniversary Edition*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2012. v. 1. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics, v. 1).

[42] ALLEN, T. J.; BOWICK, M. J.; LAHIRI, A. Topological mass generation in (3+1)-dimensions. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 6, p. 559–572, 1991.

[43] CREMMER, E.; SCHERK, J. Spontaneous dynamical breaking of gauge symmetry in dual models. *Nucl. Phys. B*, v. 72, p. 117–124, 1974.

[44] ODA, I.; YAHIKOZAWA, S. Topologically Massive Nonabelian Gauge Theories in Higher Dimensions. *Phys. Lett. B*, v. 234, p. 69–71, 1990.

[45] LAHIRI, A. Renormalizability of the dynamical two form. *Phys. Rev. D*, v. 63, p. 105002, 2001.

[46] KIM, T.; KOUWN, S.; OH, P. Hamiltonian Formalism of Topologically Massive Electrodynamics. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 34, n. 10, p. 1950067, 2019.

[47] REY, S.-J. The Confining Phase of Superstrings and Axionic Strings. *Phys. Rev. D*, v. 43, p. 526–538, 1991.

[48] DEGUCHI, S.; MUKAI, T.; NAKAJIMA, T. Anomalous gauge theories with antisymmetric tensor fields. *Physical Review D*, v. 59, 04 1998.

[49] DASS, N. D. H.; SHAJESH, K. V. Vacuum polarization induced coupling between maxwell and kalb-ramond fields. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 65, p. 085010, Mar 2002. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.65.085010>.

[50] ALMEIDA, C. et al. Superfield effective potential for the two-form field. *Phys. Rev. D*, v. 92, n. 8, p. 085003, 2015.

[51] ALTSCHUL, B.; BAILEY, Q. G.; KOSTELECKY, V. Lorentz violation with an antisymmetric tensor. *Phys. Rev. D*, v. 81, p. 065028, 2010.

[52] HERNASKI, C. A. Spontaneous breaking of lorentz symmetry with an antisymmetric tensor. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 94, p. 105004, Nov 2016. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.105004>.

[53] MALUF, R. et al. Antisymmetric tensor propagator with spontaneous Lorentz violation. *EPL*, v. 124, n. 6, p. 61001, 2018.

[54] ASSUNçãO, J. et al. Dynamical Lorentz symmetry breaking in a tensor bumblebee model. *Phys. Rev. D*, v. 100, n. 8, p. 085009, 2019.

[55] LESSA, L. et al. Modified black hole solution with a background Kalb–Ramond field. *Eur. Phys. J. C*, v. 80, n. 4, p. 335, 2020.

[56] GREZIA, E. D.; ESPOSITO, S. Minimal coupling of the Kalb-Ramond field to a scalar field. *Int. J. Theor. Phys.*, v. 43, p. 445–456, 2004.

[57] CRUZ, W.; TAHIM, M.; ALMEIDA, C. Results in Kalb-Ramond field localization and resonances on deformed branes. *EPL*, v. 88, n. 4, p. 41001, 2009.

[58] CRUZ, W.; MALUF, R.; ALMEIDA, C. Kalb-Ramond field localization on the Bloch brane. *Eur. Phys. J. C*, v. 73, p. 2523, 2013.

[59] MENEZES, R. et al. On the dual equivalence of the selfdual and topologically massive $B \wedge F$ models coupled to dynamical fermionic matter. *Phys. Lett.*, B537, p. 321–328, 2002.

[60] DALMAZI, D.; MENDONCA, E. L. Dual descriptions of spin two massive particles in D=2+1 via master actions. *Phys. Rev. D*, v. 79, p. 045025, 2009.

[61] MALUF, R. et al. Dual equivalence between self-dual and topologically massive $B \wedge F$ models coupled to matter in $3+1$ dimensions. *Phys. Rev. D*, v. 102, n. 2, p. 025006, 2020.

[62] DUNNE, G. V. Aspects of Chern-Simons theory. In: *Topological Aspects of Low-dimensional Systems: Proceedings, Les Houches Summer School of Theoretical Physics, Session 69: Les Houches, France, July 7-31 1998*. [s.n.], 1998. Disponível em: <http://alice.cern.ch/format/showfull?sysnb=0305111>.

[63] COLEMAN, S. R. The Quantum Sine-Gordon Equation as the Massive Thirring Model. *Phys. Rev.*, D11, p. 2088, 1975.

[64] MANDELSTAM, S. Soliton Operators for the Quantized Sine-Gordon Equation. *Phys. Rev.*, D11, p. 3026, 1975.

[65] BANERJEE, R. Bosonization in three-dimensional quantum field theory. *Phys. Lett.*, B358, p. 297–302, 1995.

[66] BANERJEE, R.; MARINO, E. C. A new approach for bosonization of massive thirring model in three dimensions. In: . [S.l.: s.n.], 1997.

[67] DESER, S.; JACKIW, R.; TEMPLETON, S. Topologically Massive Gauge Theories. *Annals Phys.*, v. 140, p. 372–411, 1982. [Annals Phys.281,409(2000)].

[68] DALMAZI, D.; MENDONCA, E. L. Quantum equivalence between the self-dual and the Maxwell-Chern-Simons models nonlinearly coupled to U(1) scalar fields. *J. Phys.*, A39, p. 9355–9363, 2006.

[69] ABREU, E. M. C.; WOTZASEK, C. Interference phenomenon for different chiral bosonization schemes. *Phys. Rev.*, D58, p. 101701, 1998.

[70] WOTZASEK, C. On the dimensional dependence of the electromagnetic duality groups. *Phys. Rev.*, D58, p. 125026, 1998.

[71] AMORIM, R.; DAS, A. K.; WOTZASEK, C. On soldering chiralities. *Phys. Rev.*, D53, p. 5810–5814, 1996.

[72] ABREU, E. M. C.; BANERJEE, R.; WOTZASEK, C. Bose symmetry and chiral decomposition of 2-D fermionic determinants. *Nucl. Phys.*, B509, p. 519–528, 1998.

[73] WOTZASEK, C. Soldering formalism: Theory and applications. In: . [S.l.: s.n.], 1998.

[74] ILHA, A.; WOTZASEK, C. Duality equivalence between selfdual and topologically massive nonAbelian models. *Nucl. Phys. B*, v. 604, p. 426–440, 2001.

[75] TONIOLO, G. R. et al. Tree-level equivalence between a lorentz-violating extension of qed and its dual model in electron–electron scattering. *The European Physical Journal C*, v. 77, n. 2, p. 108, 2017. ISSN 1434-6052. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-4674-3>.

[76] DALMAZI, D. On the coupling of the selfdual field to dynamical U(1) matter and its dual theory. *J. Phys.*, A37, p. 2487–2496, 2004.

[77] LEE, J.; NAM, S. Bogomol'nyi equations of chern-simons higgs theory from a generalized abelian higgs model. *Physics Letters B*, v. 261, n. 4, p. 437 – 442, 1991. ISSN 0370-2693. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939190453W>.

[78] BAZEIA, D. Vortices in a generalized higgs model. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 46, p. 1879–1881, Aug 1992. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.46.1879>.

[79] TORRES, M. Bogomol'nyi limit for nontopological solitons in a chern-simons model with anomalous magnetic moment. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 46, p. R2295–R2298, Sep 1992. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.46.R2295>.

[80] KOSTELECKY, V. Gravity, Lorentz violation, and the standard model. *Phys. Rev. D*, v. 69, p. 105009, 2004.

[81] SCARPELLI, A. B. et al. On the duality in CPT-even Lorentz-breaking theories. *Eur. Phys. J. C*, v. 75, n. 7, p. 314, 2015.

[82] GOMES, M. et al. On the aether-like Lorentz-breaking actions. *Phys. Rev. D*, v. 81, p. 045018, 2010.

[83] CARROLL, S. M.; TAM, H. Aether Compactification. *Phys. Rev. D*, v. 78, p. 044047, 2008.

[84] GUIMARAES, M. et al. On the duality in four-dimensional Lorentz-breaking field theories. *EPL*, v. 95, n. 5, p. 51002, 2011.

[85] FURTADO, C. et al. On the dual equivalence between self-dual and Maxwell-Chern-Simons models with Lorentz symmetry breaking. *Phys. Rev. D*, v. 78, p. 065014, 2008.

[86] DASS, N. H.; SHAJESH, K. Vacuum polarization induced coupling between Maxwell and Kalb-Ramond fields. *Phys. Rev. D*, v. 65, p. 085010, 2002.

[87] ABREU, E. M. et al. Duality and gauge invariance of non-commutative spacetime Podolsky electromagnetic theory. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 32, n. 03, p. 1750019, 2016.

[88] RYDER, L. H. *Quantum Field Theory*. 2nd ed. ed. Cambridge University Press, 1996. ISBN 9780521478144,0-521-47814-6,0521472423. Disponível em: <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=add10bf7119b233f37659832deed4803>.

APÊNDICE A – RELAÇÕES IMPORTANTES

- A métrica de Minkowsky é dada por $\eta_{\mu\nu} = (+1,-1,-1,-1)$.
- A regra de antisimetrização é definida como:

$$A_{[\mu}B_{\nu]} \equiv A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned} A_{[\mu}B_\nu C_{\alpha]} &\equiv A_\mu B_{[\nu}C_{\alpha]} - A_\nu B_{[\mu}C_{\alpha]} + A_\alpha B_{[\mu}C_{\nu]} \\ &= A_\mu B_\nu C_\alpha - A_\mu B_\alpha C_\nu - A_\nu B_\mu C_\alpha + A_\nu B_\alpha C_\mu + A_\alpha B_\mu C_\nu - A_\alpha B_\nu C_\mu \end{aligned} \tag{A.2}$$

- O tensor de Levi-Civita somado com um tensor simétrico em pelo menos dois o resultado é nulo:

$$\epsilon^{\mu_1,\mu_2,\dots\mu_N} T_{\mu_1,\mu_2,\dots\mu_N} \tag{A.3}$$

Quando temos a contração de dois tensores de Levi-Cevita obedecem as seguintes relações:

- 2+1 dimensões.

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha}\epsilon_{\mu\nu\alpha} = 3! \tag{A.4}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha}\epsilon_{\mu\nu\beta} = 2\delta^\alpha_\beta \tag{A.5}$$

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta}\epsilon_{\mu\lambda\rho} = \delta^\alpha_{[\lambda}\delta^\beta_{\rho]} \tag{A.6}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha}\epsilon_{\beta\lambda\rho} = \delta^\mu_{[\beta}\delta^\nu_\lambda\delta^\alpha_{\rho]} \tag{A.7}$$

- 3+1 dimensões.

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -4! \tag{A.8}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\mu\nu\alpha\rho} = -3!\delta^\beta_\rho \tag{A.9}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = -2!\delta^\alpha_{[\lambda}\delta^\beta_{\rho]} \tag{A.10}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\mu\gamma\lambda\rho} = -\delta^\nu_{[\gamma}\delta^\alpha_\lambda\delta^\beta_{\rho]} \tag{A.11}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\sigma\gamma\lambda\rho} = -\delta^\mu_{[\sigma}\delta^\nu_\gamma\delta^\alpha_\lambda\delta^\beta_{\rho]} \tag{A.12}$$

APÊNDICE B – INTEGRAÇÃO FUNCIONAL

Iniciando pela a fórmula:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp^{-\alpha x^2} dx = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} ; (\alpha > 0) \tag{B.1}$$

Passando as integrações gaussianas para a das formas quadráticas,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp^{-\alpha x^2+\beta x+\gamma} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{p(x)} dx \tag{B.2}$$

Sendo $\overline{x}$ o valor do vértice x_v da equação $p(x)$, temos

$$\overline{x} = \frac{\beta}{2\alpha}, \qquad p(\overline{x}) = \frac{\beta^2}{4\alpha} + \gamma \tag{B.3}$$

Isto nos permite reescrever $p(x)$ da seguinte forma,

$$p(x) = p(\overline{x}) - \alpha(x - \overline{x})^2. \tag{B.4}$$

Assim temos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \exp^{-\alpha x^2+\beta x+\gamma} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{p(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{\left[p(\overline{x})\right]} dx \\
&= \exp^{p(\overline{x})} \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{-\alpha(x-\overline{x})^2} dx = \exp^{p(\overline{x})} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} \\
&= \exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha} + \gamma\right)\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Agora tomando o produto de n produtos da equação B.1, com todos $\alpha_i > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_n \alpha_n x_n^2\right) dx_1 \ldots dx_n = (2\pi)^{n/2} \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{-1/2} \tag{B.6}$$

Se coletarmos todos os elementos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ é organizar em uma matriz diagonal Λ e x sendo um n–vetor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Podemos reescrever o expoente acima como,

$$\sum_n \alpha_n x_n^2 = (x, \Lambda x). \tag{B.7}$$

Como A é uma matriz diagonal se determinante é

$$\det \Lambda = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = \prod_{i=1}^{n} \alpha_1 \tag{B.8}$$

o que nos permite B.6 da seguinte forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp^{-(x,Ax)/2} dx = (\det \Lambda)^{-1/2} \tag{B.9}$$

definido $dx = d^n x (2\pi)^{-n/2}$.

Com este resultado podemos expandi-lo para formas quadráticas, semelhante ao caso B.2

$$P(x) = \frac{1}{2}(x, \Lambda x) + (\beta, x) + \gamma. \tag{B.10}$$

O valor mínimo de $P(x)$ ocorre em $\overline{x} = -\Lambda^{-1}\beta$, desta forma podemos reescreve $P(x)$

$$P(x) = P(\overline{x}) + \frac{1}{2}(x - \overline{x}, \Lambda(x - \overline{x})) \tag{B.11}$$

o que nos leva ao resultado

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left\{\frac{1}{2}[x, \Lambda x] + \left[\beta, x\right] + \gamma\right\}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\left[\beta, \Lambda^{-1}\beta\right] - \gamma\right) (\det \Lambda)^{-1/2} \tag{B.12}$$

estes resultados são validos para qualquer matriz diagonal, assim também vale para qualquer matriz real simétrica, positiva e não singular [88].

ANEXO A – TRABALHO PUBLICADO.

Dual equivalence between self-dual and topologically massive $B \wedge F$ models coupled to matter in $3+1$ dimensions

R. V. Maluf,[1,*] F. A. G. Silveira,[1,†] J. E. G. Silva,[2,‡] and C. A. S. Almeida[1,§]

[1]*Universidade Federal do Ceará (UFC), Departamento de Física, Campus do Pici, Fortaleza, CE, C.P. 6030, 60455-760, Brazil*

[2]*Universidade Federal do Cariri (UFCA), Av. Tenente Raimundo Rocha, Cidade Universitária, Juazeiro do Norte, Ceará, CEP 63048-080, Brazil*

(Received 4 June 2020; accepted 26 June 2020; published 10 July 2020)

In this work, we revisit the duality between a self-dual nongauge invariant theory and a topological massive theory in $3+1$ dimensions. The self-dual Lagrangian is composed by a vector field and an antisymmetric field tensor whereas the topological massive Lagrangian is built using a $B \wedge F$ term. Though the Lagrangians are quite different, they yield to equations of motion that are connected by a simple dual mapping among the fields. We discuss this duality by analyzing the degrees of freedom in both theories and comparing their propagating modes at the classical level. Moreover, we employ the master action method to obtain a fundamental Lagrangian that interpolates between these two theories and makes evident the role of the topological $B \wedge F$ term in the duality relation. By coupling these theories with matter fields, we show that the duality holds provided a Thirring-like term is included. In addition, we use the master action in order to probe the duality upon the quantized fields. We carried out a functional integration of the fields and compared the resulting effective Lagrangians.

DOI: 10.1103/PhysRevD.102.025006

I. INTRODUCTION

Dualities are a main theme in present-day physics. By connecting different theories or opposite regimes of a same model, dualities are powerful tools to seek and understand new effects. Notably, string theories are connected by T and S dualities [1,2] and the AdS/CFT correspondence links low-energy gravitational theory in AdS spacetime with a strong coupling regime of a conformal field theory at the boundary [3]. Among the duality processes, the so-called bosonization is of special importance and widely used to investigate nonperturbative properties in quantum field theory and condensed matter systems in low dimensions [4]. In $1+1$ dimension, it is possible to establish a fermion-boson correspondence based on the properties of the Fermi surfaces [5]. This duality can be further generalized for non-Abelian fields [6] and even for higher dimensions [7,8]. Recently, the bosonization lead to new $2+1$ relations called a web of dualities [9,10].

Another example of duality involves topologically massive gauge theories. A well-known duality occurs between the self-dual (SD) [11] and the Maxwell-Chern-Simons (MCS) [12] models. These two theories describe a single massive particle of spin-1 in $2+1$ dimensional Minkowski spacetime. Nevertheless, only the MCS model is gauge invariant. The equivalence between the SD and MCS models was initially proved by Deser and Jackiw [12], and over the years, several studies of this equivalence have been carried out in the literature [13–20]. Particularly, by considering couplings with fermionic fields, it was shown in [18] that the models are equivalent provided that a Thirring-like interaction is included. In addition, supersymmetric [21–23] and noncommutative [24,25] extensions to the duality involving the SD and MCS models have been studied in different contexts.

At the heart of this duality, the Chern-Simons term plays a key role. An alternative topological term in $3+1$ dimensions can be formed from a $U(1)$ vector gauge field A_μ and a rank-2 antisymmetric tensor field $B_{\mu\nu}$, also known as the Kalb-Ramond field [26,27]. Such a massive topological term is commonly called the $B \wedge F$ term [28–33]. Therefore, a natural generalization of the MCS model in four dimensions consists of the Maxwell and Kalb-Ramon fields coupled by a $B \wedge F$ term [34]. This topologically massive gauge-invariant $B \wedge F$ theory ($TM_{B\wedge F}$) is unitary and renormalizable when minimally coupled to fermions, and represents a massive particle of spin-1 [28]. Models

*r.v.maluf@fisica.ufc.br
†adevaldo.goncalves@fisica.ufc.br
‡euclides.silva@ufca.edu.br
§carlos@fisica.ufc.br

involving the Kalb-Ramond field have been extensively studied in the literature, specially in connection with string theories [35], quantum field theory [36,37], supersymmetry [38], Lorentz symmetry violation [39–42], black hole solutions [43], cosmology [44], and brane world scenarios [45,46].

A self-dual version of the $TM_{B\wedge F}$ model was studied in Ref. [47]. It involves the $B\wedge F$ term in a nongauge-invariant, first-order model ($SD_{B\wedge F}$). Such work showed the classic equivalence between the models, i.e., at the level of the equations of motion, through the gauge embedding procedure [20]. In addition, when interactions with fermionic fields are considered, the duality mapping only is preserved if Thirring-like terms are taken into account, analogously to the SD/MCS case in $2+1$ dimensions. Yet, the issues regarding the generalization for arbitrary nonconserved matter currents and the proof of quantum duality have not yet been fully elucidated.

The main goal of this work is to provide an alternative method, via master action [48], to prove the duality between the $SD_{B\wedge F}$ and $TM_{B\wedge F}$ theories, when the fields of the SD sector couple linearly with nonconserved currents, composed by arbitrary dynamic fields of matter. The master action approach has the advantage of providing a fundamental theory that interpolates between the two models and allows a more direct demonstration of duality at the quantum level. Besides, the master action method is a natural trail for the supersymmetric generalization of the duality studied here [23].

The present work is organized as follows. In Sec. II, we present the $SD_{B\wedge F}$ and $TM_{B\wedge F}$ theories in the free case, review their main physical characteristics, and check the classic duality by comparing their equations of motion. Moreover, we built a master Lagrangian density from the $TM_{B\wedge F}$ model, introducing auxiliary fields in order to obtain a first-order derivative theory. In Sec. III, we include matter couplings in the SD sector and verify whether the equivalence is still compatible. We apply our results to the case of minimal coupling with fermionic matter and compare it with those found in the literature. In Sec. IV, we investigate the equivalence at the quantum level within the path-integral framework. Finally in Sec. V we provide our conclusions and perspectives concerning further investigations.

II. THE DUALITY AT THE CLASSICAL LEVEL.

In a $2+1$ flat spacetime Townsend, Pilch, and Nieuwenhuizen proposed a first-order derivative theory self-dual to the topological Chern-Simons theory [11]. In four dimensions, this kind of duality can be built through a topological $B\wedge F$ term. In fact, consider a gauge non-invariant $SD_{B\wedge F}$ model composed by a vector field A_μ and an antisymmetric 2-tensor field $B_{\mu\nu}$ governed by the Lagrangian density [28,47]

$$\mathcal{L}_{SD} = \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \frac{\chi\theta}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}B^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}, \quad (1)$$

where m is a parameter with dimension of mass, θ is a dimensionless coupling constant, and $\chi=\pm1$ defines either the self-duality ($+$) or the anti-self-duality ($-$) to the theory. The field strengths associated with the vector and tensor fields are defined respectively by $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ and $H_{\mu\nu\alpha}=\partial_\mu B_{\nu\alpha}+\partial_\nu B_{\alpha\mu}+\partial_\alpha B_{\mu\nu}$. The equations of motion for the A_μ and $B_{\mu\nu}$ fields are, respectively,

$$m^2 A_\beta - \frac{\chi\theta}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha B^{\mu\nu} = 0, \quad (2)$$

$$B_{\mu\nu} - \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha A^\beta = 0, \quad (3)$$

and satisfy the constraint relations

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (4)$$

$$\partial^\mu B_{\mu\nu} = 0. \quad (5)$$

Equations (2) and (3) form a set of coupled first-order differential equations that can be rewritten, with the help of relations (4) and (5), in the form of a wave equation given by

$$\left[\Box + \frac{m^2}{\theta^2}\right]\varphi = 0, \quad (6)$$

where φ denotes A_μ or $B_{\mu\nu}$ fields. This implies that the first-order Lagrangian density $\mathcal{L}_{SD}$ describes the dynamics of a massive vector field. In fact, the field $B_{\mu\nu}$ is auxiliary and can be removed from the action leading to [39]

$$\mathcal{L}_{SD} = \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu - \frac{\theta^2}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (7)$$

which is the Lagrangian density for a massive vector field with three propagating degrees of freedom.

In the context of the present work, we are interested in investigating the equivalence between the self-dual model (1) and a second-order gauge-invariant theory. For this purpose, let us consider a topologically massive $B\wedge F$ model defined as [29,47]

$$\mathcal{L}_{TM} = \frac{\theta^2}{12m^2}H_{\mu\nu\alpha}H^{\mu\nu\alpha} - \frac{\theta^2}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\chi\theta}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}B^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}. \quad (8)$$

Note that the first two terms of $\mathcal{L}_{TM}$ are invariant under the gauge transformations $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\lambda$ and $B_{\mu\nu} \to B_{\mu\nu} + \partial_\mu\beta_\nu - \partial_\nu\beta_\mu$, whereas the variation of the last term yields to a total divergence. The gauge parameter β_μ still has a subsidiary gauge transformation $\beta_\mu \to \beta_\mu + \partial_\mu\alpha$ that leaves

$B_{\mu\nu}$ unchanged. The equations of motions derived from this Lagrangian density are

$$\frac{\theta^2}{2m^2}\partial^\mu H_{\mu\nu\lambda} + \frac{\chi\theta}{4}\epsilon_{\nu\lambda\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 0, \tag{9}$$

$$\theta^2\partial^\mu F_{\mu\lambda} + \frac{\chi\theta}{6}\epsilon_{\mu\nu\alpha\lambda}H^{\alpha\mu\nu} = 0. \tag{10}$$

In general, the two fields A_μ and $B_{\mu\nu}$ have four and six independent degrees of freedom, respectively. However, due to the gauge symmetry in the theory described by $\mathcal{L}_{TM}$, some of them can be eliminated. In order to identify which ones propagate as massive physical modes or which are spurious (gauge-dependent) modes, it is instructive to perform a decomposition in time-space on the equations of motions (9) and (10). For this purpose, let us split $B_{\mu\nu}$ into the independent components B_{0i} and B_{ij} and to introduce spatial vectors $\vec{\mathcal{X}}$ and $\vec{\mathcal{Y}}$ defined by

$$\mathcal{X}^i \equiv -B_{0i}, \qquad \mathcal{Y}^i \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}B_{jk}, \tag{11}$$

where $\epsilon^{0ijk} = \epsilon^{ijk}$. With these definitions, we obtain a set of coupled second-order differential equations in the form

$$\nabla^2 A^0 + \partial^0\partial_i A^i + \frac{\chi}{\theta}\partial_i\mathcal{Y}^i = 0, \tag{12}$$

$$\Box A^i - \partial^i(\partial_0 A^0 + \partial_j A^j) + \frac{\chi}{\theta}(\epsilon^{ijk}\partial_k\mathcal{X}_j + \partial_0\mathcal{Y}^i) = 0, \tag{13}$$

$$-\nabla^2\mathcal{X}_i - \partial_i\partial^j\mathcal{X}_j + \epsilon_{ijk}\left(\partial_0\partial^j\mathcal{Y}^k - \frac{\chi m^2}{\theta}\partial^j A^k\right) = 0, \tag{14}$$

$$\partial_0^2\mathcal{Y}^k + \partial_i\partial^k\mathcal{Y}^i + \epsilon^{ijk}\partial_0\partial_j\mathcal{X}_i + \frac{\chi m^2}{\theta}(\partial^k A^0 - \partial^0 A^k) = 0. \tag{15}$$

After some manipulation of these equations, we can formally solve the temporal component A^0 and the 3-vector $\vec{\mathcal{X}}$ in terms of the other components according to

$$A^0 = -\frac{1}{\nabla^2}\left(\partial^0\partial_i A^i_{(L)} + \frac{\chi}{\theta}\partial_i\mathcal{Y}^i_{(L)}\right), \tag{16}$$

$$\mathcal{X}_i^{(T)} = \frac{1}{\nabla^2}\epsilon_{ijk}\left(\partial_0\partial^j\mathcal{Y}^k_{(T)} - \frac{\chi m^2}{\theta}\partial^j A^k_{(T)}\right), \tag{17}$$

where $v^i_{(T)} \equiv \theta^i_j v^j$ and $v^i_{(L)} \equiv \omega^i_j v^j$ are the transversal (T) and longitudinal (L) components of a 3-vector $\vec{v}$, respectively, with the projectors θ^i_j and ω^i_j defined by

$$\theta^i_j \equiv \delta^i_j - \omega^i_j, \qquad \omega^i_j \equiv -\frac{\partial_j\partial^i}{\nabla^2}. \tag{18}$$

Similar procedures can be applied to the components of the $\vec{A}$ and $\vec{\mathcal{Y}}$, such that

$$\left[\Box + \frac{m^2}{\theta^2}\right]A^i_{(T)} = 0, \tag{19}$$

$$\left[\Box + \frac{m^2}{\theta^2}\right]\mathcal{Y}^i_{(L)} = 0. \tag{20}$$

The form of these solutions reveals that the only physical components are $A^i_{(T)}$ and $\mathcal{Y}^i_{(L)}$, while the others are auxiliary or gauge modes. Furthermore, as the longitudinal part of $\vec{\mathcal{Y}}$ is curl-free, it propagates as a massive scalar field, i.e., $\vec{\mathcal{Y}} = \nabla\phi$, whose mass depends on the coupling constant θ. Thus, the results above show that the $TM_{B\wedge F}$ theory defined in (8), like the $SD_{B\wedge F}$ model, contains three massive propagating modes.

To make explicit the hidden duality between the models described above, it is convenient to introduce the dual fields associated with the field strength tensors $H^{\mu\nu\alpha}$ and $F^{\mu\nu}$, respectively, by

$$\tilde{H}_\mu \equiv -\frac{\chi\theta}{6m^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}H^{\nu\alpha\beta}, \tag{21}$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{\chi\theta}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \tag{22}$$

In terms of $\tilde{H}_\mu$ and $\tilde{F}_{\mu\nu}$, the equations of motion (9) and (10) become

$$m^2\tilde{H}_\beta - \frac{\theta}{2\chi}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\mu\tilde{F}^{\nu\alpha} = 0, \tag{23}$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} - \frac{\theta}{\chi}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha\tilde{H}^\beta = 0. \tag{24}$$

A direct comparison between the pairs of equations (2), (3) and (23), (24) shows that the dual fields $\tilde{H}_\beta$ and $\tilde{F}_{\mu\nu}$ satisfy exactly the same equations obtained for the $SD_{B\wedge F}$ model when we identify $A_\mu \to \tilde{H}_\mu$ and $B_{\mu\nu} \to \tilde{F}_{\mu\nu}$. Therefore, the basic fields of the $SD_{B\wedge F}$ model correspond to the dual fields of the $TM_{B\wedge F}$ model. This proves the classical equivalence via equations of motion in the free field case.

However, despite having established the dual connection, the mapping $A_\mu \to \tilde{H}_\mu$ and $B_{\mu\nu} \to \tilde{F}_{\mu\nu}$ leads to

$$\mathcal{L}_{TM}(\tilde{H},\tilde{F}) = -\frac{m^2}{2}\tilde{H}_\mu\tilde{H}^\mu + \frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}B_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}, \tag{25}$$

wherein the identities $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -1/\theta^2\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ and $H_{\mu\nu\alpha}H^{\mu\nu\alpha} = -6m^4/\theta^2\tilde{H}_\mu\tilde{H}^\mu$ were used. Note that (25) does not recover (1) and the equivalence between the two models is not evident. The common origin of these

Lagrangian densities can be better addressed by means of the *master Lagrangian* method, which we will formulate in the sequel.

A. Classic duality via master Lagrangian

The study of dual equivalence among four-dimensional models containing a topological $B \wedge F$ term was carried out for the first time in Ref. [47], whereby the authors used the dynamical gauge embedding formalism to show the classic duality between (1) and (8). Here, we employ the master Lagrangian method [12,18] that extends and interpolates those two studied models. Moreover, this method allows us to study the duality at the quantum level more directly.

Let us start from Lagrangian density $\mathcal{L}_{TM}$ in the form (25) written explicitly in terms of the fundamental fields A_μ and $B_{\mu\nu}$. Following [12], we will introduce auxiliary fields Π_μ and $\Lambda_{\mu\nu}$ in order to obtain a first-order derivative theory such that

$$\mathcal{L}_M = a\Pi_\mu \epsilon^{\mu\rho\sigma\delta}\partial_\rho B_{\sigma\delta} + b\Pi_\mu\Pi^\mu + c\Lambda_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma + d\Lambda_{\mu\nu}\Lambda^{\mu\nu} - \frac{\chi\theta}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}B^{\mu\nu}\partial^\alpha A^\beta, \tag{26}$$

where a, b, c, and d are constant coefficients to be determined. Note that the presence of mass terms for Π_μ and $\Lambda_{\mu\nu}$ ensures the auxiliary character of these fields.

The functional variation of $\mathcal{L}_M$ with respect to the auxiliary fields Π_μ and $\Lambda_{\mu\nu}$ allows us to write

$$\Pi_\mu = -\frac{a}{2b}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu B^{\alpha\beta}, \tag{27}$$

$$\Lambda_{\mu\nu} = -\frac{c}{2d}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha A^\beta. \tag{28}$$

Substituting (27) and (28) in (26) and imposing $\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_{TM}$, we obtain the relations

$$\frac{a^2}{b} = \frac{\theta^2}{2m^2}, \tag{29}$$

$$\frac{c^2}{d} = -\theta^2. \tag{30}$$

The same procedure can be performed for the fields A_μ and $B_{\mu\nu}$, and we can immediately solve their equations of motion, obtaining the following solutions:

$$A_\mu = \frac{2a}{\chi\theta}\Pi_\mu + \partial_\mu\phi, \tag{31}$$

$$B_{\mu\nu} = \frac{2c}{\chi\theta}\Lambda_{\mu\nu} + \partial_\mu\Sigma_\nu - \partial_\nu\Sigma_\mu, \tag{32}$$

being ϕ and Σ_μ arbitrary fields. Now, replacing (31) and (32) in (26) and imposing $\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_{SD}$, we obtain

$$b = \frac{m^2}{2}, \tag{33}$$

$$d = -\frac{1}{4}, \tag{34}$$

such that we can immediately fix $a = c = \chi\theta/2$ so that our master Lagrangian takes the final form

$$\mathcal{L}_M = \frac{\chi\theta}{2}\Pi_\mu\epsilon^{\mu\rho\sigma\delta}\partial_\rho B_{\sigma\delta} + \frac{m^2}{2}\Pi_\mu\Pi^\mu + \frac{\chi\theta}{2}\Lambda_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma - \frac{1}{4}\Lambda_{\mu\nu}\Lambda^{\mu\nu} - \frac{\chi\theta}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}B^{\mu\nu}\partial^\alpha A^\beta. \tag{35}$$

Accordingly, the Lagrangian density (35) describes both (1) and (8). This mechanism transforms models without gauge invariance into models with this symmetry by adding terms which do not appear on shell. Note that the gauge invariance of $\mathcal{L}_M$ under $\delta A_\mu = \partial_\mu\lambda$ and $\delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu\beta_\nu - \partial_\nu\beta_\mu$ with $\delta\Pi_\mu = \delta\Lambda_{\mu\nu} = 0$ is now evident, while it was a hidden symmetry in the self-dual formulation. With the master method, we were able to establish the relation of equivalence when the coupling to other dynamical fields is considered and we have a simple formalism which accounts for the investigation of the theory at the quantum level.

III. DUALITY MAPPING WITH A LINEAR MATTER COUPLING

The discussion on the duality developed in the previous section deals only with free theories. However, it is fundamental to ensure that this dual equivalence is also valid in the presence of external sources coupled to the fields in $\mathcal{L}_M$. Here and throughout the paper, we will assume only linear couplings with external fields, whose associated currents are composed only of matter fields, represented generically by ψ. The cases involving nonlinear couplings or when the currents depend explicitly on the gauge or self-dual fields are beyond our present scope.

Let us consider the master Lagrangian (35) added by dynamical matter fields ψ linearly coupled to the self-dual sector:

$$\mathcal{L}_M^{(1)} = \frac{\chi\theta}{2}\Pi_\mu\epsilon^{\mu\rho\sigma\delta}\partial_\rho B_{\sigma\delta} + \frac{m^2}{2}\Pi_\mu\Pi^\mu + \frac{\chi\theta}{2}\Lambda_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma - \frac{1}{4}\Lambda_{\mu\nu}\Lambda^{\mu\nu} - \frac{\chi\theta}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}B^{\mu\nu}\partial^\alpha A^\beta + \Pi_\mu J^\mu + \Lambda_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu} + \mathcal{L}(\psi), \tag{36}$$

where $\mathcal{L}(\psi)$ represents a generic Lagrangian density responsible for the dynamics of the matter fields, with the corresponding currents being denoted by J_μ and $\mathcal{J}_{\mu\nu}$. Note that due to the lack of gauge symmetry in the self-dual sector, the matter currents J_μ and $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ are generally not conserved. Also, to make our analysis as general as possible, we will not assume any specific form to the matter sector for now.

First, we will remove the dependency on the gauge fields in Eq. (36). Varying the action $\int d^4x\mathcal{L}_M^{(1)}$ with respect to the fields A_μ and $B_{\mu\nu}$, we obtain their corresponding equations of motion whose solutions are given by

$$A_\mu = \Pi_\mu + \partial_\mu\phi, \tag{37}$$

$$B_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu\nu} + \partial_\mu\Sigma_\nu - \partial_\nu\Sigma_\mu, \tag{38}$$

and substituting these solutions into Eq. (36) we find $\mathcal{L}_M^{(1)} = \mathcal{L}_{SD}^{(1)}$, with

$$\mathcal{L}_{SD}^{(1)} = \frac{m^2}{2}\Pi_\mu\Pi^\mu - \frac{1}{4}\Lambda_{\mu\nu}\Lambda^{\mu\nu} + \frac{\chi\theta}{2}\Pi_\mu\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu\Lambda_{\alpha\beta} + \Pi_\mu J^\mu + \Lambda_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu} + \mathcal{L}(\psi). \tag{39}$$

Then, $\mathcal{L}_{SD}^{(1)}$ is equivalent to the self-dual theory (1) linearly coupled to the matter, as expected.

Next, we will eliminate the fields Π_μ and $\Lambda_{\mu\nu}$ from the master Lagrangian $\mathcal{L}_M^{(1)}$. The equations of motion for these fields are

$$\Pi_\mu = -\frac{\chi\theta}{2m^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu B^{\alpha\beta} - \frac{1}{m^2}J_\mu, \tag{40}$$

$$\Lambda_{\mu\nu} = \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha A^\beta + 2\mathcal{J}_{\mu\nu}. \tag{41}$$

Replacing Eqs. (40) and (41) into the master Lagrangian then implies $\mathcal{L}_M^{(1)} = \mathcal{L}_{TM}^{(1)}$, with

$$\mathcal{L}_{TM}^{(1)} = \frac{\theta^2}{12m^2}H_{\mu\nu\alpha}H^{\mu\nu\alpha} - \frac{\theta^2}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\chi\theta}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}B^{\mu\nu}\partial^\alpha A^\beta - \frac{\chi\theta}{2m^2}B_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha J_\beta - \frac{1}{2m^2}J_\mu J^\mu + \chi\theta A_\mu\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu\mathcal{J}_{\alpha\beta} + \mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu} + \mathcal{L}(\psi). \tag{42}$$

From the above result, it is clear that the Lagrangian density $\mathcal{L}_{TM}^{(1)}$ represents the $TM_{B\wedge F}$ theory (8) interacting with the matter through "magnetic" currents plus Thirring-like terms involving only the matter fields. A similar Lagrangian density to the $\mathcal{L}_{TM}^{(1)}$ has appeared before in [47]. However, the approach used in [47] was based on the gauge embedding method, different from the one developed here. Also, one may verify that the equations of motion for the fields Π_μ and $\Lambda_{\mu\nu}$ in the $SD_{B\wedge F}$ model (39) and for the gauge fields A_μ and $B_{\mu\nu}$ in the $TM_{B\wedge F}$ model (42) can be cast in the same form by means of the identification

$$\Pi_\mu \to \tilde{H}_\mu - \frac{1}{m^2}J_\mu, \tag{43}$$

$$\Lambda_{\mu\nu} \to \tilde{F}_{\mu\nu} + 2\mathcal{J}_{\mu\nu}. \tag{44}$$

It is worth noting that the duality symmetry between $SD_{B\wedge F}/TM_{B\wedge F}$ theories exchanges linear couplings $\Pi_\mu J^\mu$ and $\Lambda_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}$, involving currents not necessarily conserved in the self-dual sector into derivative dual couplings $A_\mu\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu\mathcal{J}_{\alpha\beta}$ and $B_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha J_\beta$ in the gauge sector, whose associated currents are automatically conserved. Moreover, self-interaction matter terms are naturally generated, which will play a decisive role in ensuring the duality in the matter sector, as we shall see in what follows.

A. The matter sector

Classically, the duality mapping established in Eqs. (43) and (44) ensures that the Lagrangian densities (39) and (42) are equivalent since the $SD_{B\wedge F}$ and $TM_{B\wedge F}$ fields obey the same equations of motion in the presence of external sources. However, for this equivalence between the models to be complete, it is also necessary to verify what happens in the matter sector, when these sources are dynamics.

To this end, we now consider the equation of motion for the matter field ψ. First, let us focus our attention on the $SD_{B\wedge F}$ model described by (39), so

$$\frac{\delta}{\delta\psi}\int d^4x\mathcal{L}_{SD}^{(1)} = 0 \Rightarrow \frac{\delta\mathcal{L}(\psi)}{\delta\psi} = -\Pi_\mu\frac{\delta J^\mu}{\delta\psi} - \Lambda_{\mu\nu}\frac{\delta\mathcal{J}^{\mu\nu}}{\delta\psi}, \tag{45}$$

where $\frac{\delta\mathcal{L}(\psi)}{\delta\psi}$ is the Lagrangian derivative.

On the other hand, the equations of motion for the fields Π_μ and $\Lambda_{\mu\nu}$ are

$$m^2\Pi^\mu + \frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu\Lambda_{\alpha\beta} = -J^\mu, \tag{46}$$

$$\frac{1}{2}\Lambda^{\mu\nu} - \frac{\chi\theta}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha\Pi_\beta = \mathcal{J}^{\mu\nu}, \tag{47}$$

and obey the constraints

$$m^2\partial_\mu\Pi^\mu = -\partial_\mu J^\mu, \tag{48}$$

$$\partial_\mu\Lambda^{\mu\nu} = 2\partial_\mu\mathcal{J}^{\mu\nu}. \tag{49}$$

Inserting (47) into (46), we can eliminate $\Lambda_{\mu\nu}$ in favor of Π_μ and obtain a second-order differential equation as

$$(\theta^2\Box + m^2)\Pi^\mu = -J^\mu - \frac{\theta^2}{m^2}\partial^\mu\partial_\nu J^\nu - \chi\theta\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu\mathcal{J}_{\alpha\beta}, \tag{50}$$

where we used the constraint $m^2\partial_\mu\Pi^\mu = -\partial_\mu J^\mu$. Defining the wave operator as $\hat{R}^{-1} = \Box + \frac{m^2}{\theta^2}$, we can write

$$\Pi_\mu = -\frac{\hat{R}}{\theta^2}\left(J_\mu + \frac{\theta^2}{m^2}\partial_\mu\partial^\nu J_\nu + \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu\mathcal{J}^{\alpha\beta}\right). \tag{51}$$

A similar procedure for the field $\Lambda_{\mu\nu}$ results in

$$\Lambda_{\mu\nu} = -\frac{\hat{R}}{\theta^2}[-2m^2\mathcal{J}_{\mu\nu} + 2\theta^2\partial^\alpha(\partial_\mu\mathcal{J}_{\nu\alpha} - \partial_\nu\mathcal{J}_{\mu\alpha}) + \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha J^\beta]. \quad (52)$$

Replacing the solutions (51) and (52) back in the matter equation (45), we come to the result

$$\frac{\delta\mathcal{L}(\psi)}{\delta\psi} = \frac{\hat{R}}{\theta^2}\left[J_\mu + \frac{\theta^2}{m^2}\partial_\mu(\partial^\nu J_\nu) + \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu\mathcal{J}^{\alpha\beta}\right]\frac{\delta J^\mu}{\delta\psi} + \frac{\hat{R}}{\theta^2}[-2m^2\mathcal{J}_{\mu\nu} + 2\theta^2\partial^\alpha(\partial_\mu\mathcal{J}_{\nu\alpha} - \partial_\nu\mathcal{J}_{\mu\alpha}) + \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha J^\beta]\frac{\delta\mathcal{J}^{\mu\nu}}{\delta\psi}. \quad (53)$$

This is a nonlocal differential equation, expressed only in terms of the matter fields.

Now, if we start from $\mathcal{L}^{(1)}_{TM}$, the equation of motion for the matter field takes the form

$$\frac{\delta}{\delta\psi}\int d^4x\mathcal{L}^{(1)}_{TM} = 0 \Rightarrow \frac{\delta\mathcal{L}(\psi)}{\delta\psi} = \left(\frac{1}{m^2}J_\mu - \hat{H}_\mu\right)\frac{\delta J^\mu}{\delta\psi} + (-2\mathcal{J}_{\mu\nu} - \hat{F}_{\mu\nu})\frac{\delta\mathcal{J}^{\mu\nu}}{\delta\psi}, \quad (54)$$

where we have used the definitions (21) and (22) for the dual fields.

To eliminate the dual fields in (54), we write the equations of motion for A_μ and $B_{\mu\nu}$, obtained from $\mathcal{L}^{(1)}_{TM}$, as

$$m^2\tilde{H}_\mu + \frac{\theta}{2\chi}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu\tilde{F}^{\alpha\beta} = -\chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu\mathcal{J}^{\alpha\beta}, \quad (55)$$

$$-\tilde{F}_{\mu\nu} + \frac{\theta}{\chi}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha\tilde{H}^\beta = \frac{\chi\theta}{m^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha J^\beta. \quad (56)$$

These equations can be decoupled, and after some algebraic manipulations we get the following results:

$$\tilde{H}_\mu = \frac{\hat{R}}{\theta^2}\left[\frac{\theta^2}{m^2}(\Box J_\mu - \partial_\mu\partial^\nu J_\nu) - \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu\mathcal{J}^{\alpha\beta}\right], \quad (57)$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = -2R\Box\mathcal{J}_{\mu\nu} - \frac{\hat{R}}{\theta^2}[2\theta^2\partial^\alpha(\partial_\mu\mathcal{J}_{\nu\alpha} - \partial_\nu\mathcal{J}_{\mu\alpha}) + \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha J^\beta]. \quad (58)$$

Substituting these solutions in Eq. (54) we obtain

$$\frac{\delta\mathcal{L}(\psi)}{\delta\psi} = \left[\frac{1}{m^2}(1 - \hat{R}\Box)J_\mu + \frac{\hat{R}}{\theta^2}\left(\frac{\theta^2}{m^2}\partial_\mu\partial^\nu J_\nu + \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu\mathcal{J}^{\alpha\beta}\right)\right]\frac{\delta J^\mu}{\delta\psi} + \left[2(\hat{R}\Box - 1)\mathcal{J}_{\mu\nu} + \frac{\hat{R}}{\theta^2}(2\theta^2\partial^\alpha(\partial_\mu\mathcal{J}_{\nu\alpha} - \partial_\nu\mathcal{J}_{\mu\alpha}) + \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha J^\beta)\right]\frac{\delta\mathcal{J}^{\mu\nu}}{\delta\psi}. \quad (59)$$

Using the definition $\hat{R}^{-1} = \Box + \frac{m^2}{\theta^2}$, we can write $\Box = R^{-1} - \frac{m^2}{\theta^2}$ which implies

$$\frac{\delta\mathcal{L}(\psi)}{\delta\psi} = \frac{\hat{R}}{\theta^2}\left[J_\mu + \frac{\theta^2}{m^2}\partial_\mu(\partial^\nu J_\nu) + \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu\mathcal{J}^{\alpha\beta}\right]\frac{\delta J^\mu}{\delta\psi} + \frac{\hat{R}}{\theta^2}[-2m^2\mathcal{J}_{\mu\nu} + 2\theta^2\partial^\alpha(\partial_\mu\mathcal{J}_{\nu\alpha} - \partial_\nu\mathcal{J}_{\mu\alpha}) + \chi\theta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha J^\beta]\frac{\delta\mathcal{J}^{\mu\nu}}{\delta\psi}. \quad (60)$$

By comparing Eqs. (53) and (60), we conclude that the matter sectors of the two models give rise to the same equations of motion. Thus, we have shown that the Lagrangians $\mathcal{L}^{(1)}_{SD}$ and $\mathcal{L}^{(1)}_{TM}$ are equivalent and have established the classical duality between the $SD_{B\wedge F}$ and $TM_{B\wedge F}$ theories when couplings with dynamical matter fields are considered.

In order to liken our results with the literature, let us consider, as a particular case, a fermionic matter field minimally coupled to the self-dual field Π_μ. Assuming the following identifications:

$$\mathcal{L}(\psi) \to \mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi, \quad (61)$$

where M is the Dirac field mass, and the fermionic currents are

$$J_\mu \to -eJ_\mu = -e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \quad (62)$$

$$\mathcal{J}_{\mu\nu} \to 0, \quad (63)$$

with e being a dimensionless coupling constant. The equation of motion for ψ (60) takes the simple form

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi = \frac{e^2}{\theta^2}\hat{R}J_\mu\gamma^\mu\psi, \quad (64)$$

which agrees with the result obtained in [47].

IV. THE DUALITY AT THE QUANTUM LEVEL

Once we proved the duality between $SD_{B\wedge F}$ and $TM_{B\wedge F}$ models at the level of equations of motion, we now check whether this duality is preserved at the quantum level. For this purpose, we adopt the path-integral framework and define the master generating functional as

$$Z(\psi) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A^\mu \mathcal{D}B^{\mu\nu} \mathcal{D}\Pi^\mu \mathcal{D}\Lambda^{\mu\nu} \exp \times \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}_M + J_\mu \Pi^\mu + \mathcal{J}_{\mu\nu}\Lambda^{\mu\nu} + \mathcal{L}(\psi)] \right\}, \tag{65}$$

where $\mathcal{N}$ is an overall normalization constant. Our aim is to evaluate the effective Lagrangian resulting from the integration over the fields. First, let us integrate out the contribution of the $SD_{B\wedge F}$ fields.

After the shifts, $\Pi_\mu \to \Pi_\mu + \tilde{H}_\mu - \frac{1}{m^2}J_\mu$ and $\Lambda_{\mu\nu} \to \Lambda_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu} + 2\mathcal{J}_{\mu\nu}$, we perform the functional integration in Eq. (65) over the fields Π_μ and $\Lambda_{\mu\nu}$, thereby producing

$$Z(\psi) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A^\mu \mathcal{D}B^{\mu\nu} \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}^{(1)}_{\text{eff}}(A, B, \psi) \right], \tag{66}$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)}_{\text{eff}}(A, B, \psi) = {}& \frac{\theta^2}{12m^2} H_{\mu\nu\alpha}H^{\mu\nu\alpha} - \frac{\theta^2}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ & - \frac{\chi\theta}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} B^{\mu\nu} \partial^\alpha A^\beta - \frac{\chi\theta}{2m^2} B_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha J_\beta \\ & - \frac{1}{2m^2} J_\mu J^\mu + \chi\theta A_\mu \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \mathcal{J}_{\alpha\beta} \\ & + \mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu} + \mathcal{L}(\psi) \end{aligned} \tag{67}$$

is the same Lagrangian density found in Eq. (42).

To integrate over the fields configurations A_μ and $B_{\mu\nu}$, let us first note that the master Lagrangian $\mathcal{L}_M$ can be rewritten, up to surface terms, as

$$\mathcal{L}_M = \frac{\chi\theta}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\Lambda_{\mu\nu} - B_{\mu\nu}) \partial_\alpha (A_\beta - \Pi_\beta) + \mathcal{L}_{SD}. \tag{68}$$

In this way, we can make a shift in the gauge fields through $B_{\mu\nu} \to B_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu\nu}$ and $A_\beta \to A_\beta + \Pi_\beta$, which allows us to rewrite the generating function (65) as

$$Z(\psi) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A^\mu \mathcal{D}B^{\mu\nu} \mathcal{D}\Pi^\mu \mathcal{D}\Lambda^{\mu\nu} \exp \left\{ i \int d^4x \left[-\frac{\chi\theta}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} B_{\mu\nu} \partial_\alpha A_\beta + \mathcal{L}_{SD} + J_\mu \Pi^\mu + \mathcal{J}_{\mu\nu}\Lambda^{\mu\nu} + \mathcal{L}(\psi) \right] \right\}, \tag{69}$$

such that the A_μ and $B_{\mu\nu}$ fields decouple. Then, performing the function integration yields to the following generating functional

$$Z(\psi) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\Pi^\mu \mathcal{D}\Lambda^{\mu\nu} \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}^{(2)}_{\text{eff}}(\Pi, \Lambda, \psi) \right], \tag{70}$$

with

$$\mathcal{L}^{(2)}_{\text{eff}}(\Pi, \Lambda, \psi) = \frac{m^2}{2} \Pi_\mu \Pi^\mu - \frac{1}{4} \Lambda_{\mu\nu}\Lambda^{\mu\nu} + \frac{\chi\theta}{2} \Pi_\mu \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \Lambda_{\alpha\beta} + \Pi_\mu J^\mu + \Lambda_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu} + \mathcal{L}(\psi), \tag{71}$$

corresponding to the same Lagrangian density (39) previously obtained. It is worth highlighting the physical implications contained in (68). We clearly see that the master Lagrangian $\mathcal{L}_M$ obtained in (35) is equivalent to self-dual Lagrangian $\mathcal{L}_{SD}$ added by a purely topological $B \wedge F$ term, which makes evident the role of the master Lagrangian on the duality symmetry.

The implications of the above results at the quantum level can be explored by considering the functional derivatives of (66) and (70) with respect to the sources. Setting $J_\mu = \mathcal{J}_{\mu\nu} = 0$, we can establish the following identities to the correlation functions:

$$\langle \Pi_{\mu_1}(x_1) \cdots \Pi_{\mu_N}(x_N) \rangle_{SD} = \langle \tilde{H}_{\mu_1}[B(x_1)] \cdots \tilde{H}_{\mu_N}[B(x_N)] \rangle_{TM} + \text{contact terms}, \tag{72}$$

$$\langle \Lambda_{\mu_1\nu_1}(x_1) \cdots \Lambda_{\mu_N\nu_N}(x_N) \rangle_{SD} = \langle \tilde{F}_{\mu_1\nu_1}[A(x_1)] \cdots \tilde{F}_{\mu_N\nu_N}[A(x_N)] \rangle_{TM} + \text{contact terms}. \tag{73}$$

These relations show that the classical dual map (43) and (44) is satisfied by all quantum correlation functions of those fields, up to contact terms.

Finally, we now complete the proof of quantum duality between the $SD_{B\wedge F}/TM_{B\wedge F}$ models by performing the path integration over A_μ and $B_{\mu\nu}$ gauge fields in Eq. (66), and over Π_μ and $\Lambda_{\mu\nu}$ self-dual fields in Eq. (70). For this goal, it is convenient to organize the effective Lagrangians (67) and (71) in a matrix form according to the

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\boldsymbol{X}^T\hat{\mathcal{O}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{J}, \tag{74}$$

where the wave operator, $\hat{\mathcal{O}}$, forms a 2×2 matrix, $\boldsymbol{X}$, and $\boldsymbol{J}$ represent vector-tensor duplet of type

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} A_\mu \\ B_{\mu\nu} \end{pmatrix}. \tag{75}$$

To accomplish the functional integration, we use the Gaussian path integral formula over a bosonic field $\boldsymbol{X}$,

$$\int \mathcal{D}\boldsymbol{X}\exp\left[i\int d^4x\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{X}^T\hat{\mathcal{O}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{J}\right)\right] = [\mathrm{Det}(-i\hat{\mathcal{O}})]^{-\frac{1}{2}} \times \exp\left[-i\int d^4x\frac{1}{2}\boldsymbol{J}^T\hat{\mathcal{O}}^{-1}\boldsymbol{J}\right]. \tag{76}$$

In our case, the determinant $\mathrm{Det}(-i\hat{\mathcal{O}})$ is field independent and can be absorbed by the normalization constant. The calculation of propagators $\hat{\mathcal{O}}^{-1}$ is rather lengthy, and the details are in the Appendix. Here we just write the results

$$(\hat{\mathcal{O}}_{SD}^{-1})^{\mu,\alpha\beta;\nu,\lambda\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta^2\Box+m^2}\Theta^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\omega^{\mu\nu} & \frac{2}{\theta^2\Box+m^2}S^{\mu\lambda\sigma} \\ -\frac{2}{\theta^2\Box+m^2}S^{\alpha\beta\nu} & -\frac{2m^2}{\theta^2\Box+m^2}(P^{(1)})^{\alpha\beta,\lambda\sigma} - 2(P^{(2)})^{\alpha\beta,\lambda\sigma} \end{pmatrix}, \tag{77}$$

and

$$(\hat{\mathcal{O}}_{TM}^{-1})^{\mu,\alpha\beta;\nu,\lambda\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta^2\Box+m^2}\Theta^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{\Box}\omega^{\mu\nu} & -\frac{2m^2}{\theta^2\Box(\theta^2\Box+m^2)}S^{\mu\lambda\sigma} \\ \frac{2m^2}{\theta^2\Box(\theta^2\Box+m^2)}S^{\alpha\beta\nu} & -\frac{2m^2}{\theta^2\Box+m^2}(P^{(1)})^{\alpha\beta,\lambda\sigma} - \frac{2\xi}{\Box}(P^{(2)})^{\alpha\beta,\lambda\sigma} \end{pmatrix}, \tag{78}$$

where $\Theta_{\mu\nu}$, $\omega_{\mu\nu}$, $S_{\mu\nu\alpha}$, $P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta}$, and $P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta}$ are projection operators whose definitions and closed algebras are shown in the Appendix. Also, λ and ξ are convenient gauge-fixing parameters. Note that the physical poles of the two propagators are equal, i.e., $\theta^2\Box + m^2 = 0$, and confirm that the particle spectrum of both theories are equivalent, so that we may consider the self-dual theory equivalent to $TM_{B\wedge F}$ theory with the fixed gauge.

The above propagators, together with formula (76), enable us to perform the functional integration in (66) and (70). After completing all tensorial contractions, we obtain the same effective Lagrangian for the matter field

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eff}}^{(3)}(\psi) = \mathcal{L}(\psi) + \frac{1}{2}(J_\mu \quad \mathcal{J}_{\alpha\beta})\begin{pmatrix} -\frac{1}{\theta^2\Box+m^2}\eta^{\mu\nu} - \frac{\theta^2}{m^2}\frac{1}{\theta^2\Box+m^2}\partial^\mu\partial^\nu & -\frac{\chi\theta}{\theta^2\Box+m^2}\epsilon^{\mu\lambda\sigma\delta}\partial_\delta \\ \frac{\chi\theta}{\theta^2\Box+m^2}\epsilon^{\alpha\beta\nu\delta}\partial_\delta & \frac{2}{\theta^2\Box+m^2}(\theta^2\Box P^{(2)} + m^2\mathcal{I})^{\alpha\beta,\lambda\sigma} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_\nu \\ \mathcal{J}_{\lambda\sigma} \end{pmatrix}. \tag{79}$$

It is easy to verify that the equation of motion for the matter field obtained from $\mathcal{L}_{\mathrm{eff}}^{(3)}$ (79) is precisely that found in the previous section [see Eqs. (53) or (60)]. Thus, we prove the quantum equivalence between the matter sector of the $SD_{B\wedge F}/TM_{B\wedge F}$ models. It is worth mentioning that the dynamics of the matter fields is preserved in the functional integration in (66) only if the Thirring-like interactions are added to the diagonal elements of the $\hat{\mathcal{O}}_{TM}^{-1}$ matrix. Besides, the gauge-dependent parts involving the gauge-fixing parameters are canceled, as it should be.

V. CONCLUSION

In this work, we revisited the duality between the self-dual and topologically massive models involving the $B\wedge F$ term in $3+1$ spacetime dimensions. The study of this duality when couplings with fermionic matter are included was first carried out in [47], through the gauge embedding formalism. Here, we considered another approach, namely the master action method, whereby we obtained a fundamental Lagrangian density that interpolates between the two models and provides direct proof of dual equivalence at both the classical and quantum levels. The master action enabled us to relate the equations of motion of these models via a dual map among fields and currents of both theories, which ensures that they are equivalent at the classical level. In addition, we demonstrated the duality at the quantum level through the path-integral framework. We defined a master generating functional wherein the integration over the different fields provided effective Lagrangians that are the same as those obtained classically. Moreover, after a last functional integration over the bosonic fields, we obtained an effective nonlocal Lagrangian for the matter fields, which proves the equivalence between the matter sectors of the analyzed models.

We assumed that the external currents are linearly coupled with the self-dual fields and are constituted exclusively of the matter fields. We show that these interactions induce "magnetic" couplings involving the gauge fields, in addition to current-current Thirring-like interactions. These types of couplings are, in general, nonrenormalizable by direct power counting [18,22]. However, as in the $2+1$ dimensional case involving the Maxwell-Chern-Simons model, we may expect that this weakness can be overcome by a $1/N$ perturbative expansion when the matter field is an N-component fermionic field, such that the theory becomes renormalizable. An explicit verification of this issue, as well as a possible extension of our results to the supersymmetric case [23,38], are themes for forthcoming works.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors thank the Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP), the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), and the Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Grants No. 312356/2017-0 (J. E. G. S.), No. 305678/2015-9 (R. V. M.) and No. 308638/2015-8 (C. A. S. A.) for financial support.

APPENDIX: FEYNMAN PROPAGATOR FOR THE $TM_{B\wedge F}$ THEORY

Consider the topologically massive $B\wedge F$ model defined as

$$S_{TM}=\int d^4x\left[-\frac{\theta^2}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{\theta^2}{12m^2}H^{\mu\nu\alpha}H_{\mu\nu\alpha}-\frac{\chi\theta}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}B^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}\right], \tag{A1}$$

where the first two terms represent a gauge-invariant Maxwell-Kalb-Ramond theory, while the last is a topological $B\wedge F$ term. The calculation of the Feynman propagator for the theory (A1) can be performed as follows.

First, let us rewrite the integrand in Eq. (A1) on the matrix form

$$\mathcal{L}_{TM}=\frac{1}{2}X^T\hat{\mathcal{O}}_{TM}X, \tag{A2}$$

with the wave operator, $\hat{\mathcal{O}}_{TM}$, being a 2×2 matrix, and X represents a column vector-tensor as

$$X=\begin{pmatrix}A_\mu\\ B_{\mu\nu}\end{pmatrix}. \tag{A3}$$

Adding convenient gauge-fixing terms in (A2), namely, $-\frac{1}{2\lambda}(\partial_\mu A^\mu)^2$ and $\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu B^{\mu\nu})^2$, we can explicitly write the operator $\hat{\mathcal{O}}_{TM+gf}$, in the form

TABLE I. Algebra of the spin-projection operators.

	$\Theta^{\alpha}{}_{\nu}$	$\omega^{\nu}{}_{\nu}$
$\Theta_{\mu\alpha}$	$\Theta_{\mu\nu}$	0
$\omega_{\mu\alpha}$	0	$\omega_{\mu\nu}$

	$(P^{(1)})^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta}$	$(P^{(2)})^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta}$
$P^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma}$	$P^{(1)}_{\mu\nu\alpha\beta}$	0
$P^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma}$	0	$P^{(2)}_{\mu\nu\alpha\beta}$

$$\hat{\mathcal{O}}^{\mu,\alpha\beta;\nu,\lambda\sigma}_{TM+gf}=\begin{pmatrix}\theta^2\Box\Theta^{\mu\nu}+\frac{\Box}{\lambda}\omega^{\mu\nu} & -S^{\mu\lambda\sigma}\\ S^{\alpha\beta\nu} & -\frac{\theta^2\Box}{2m^2}(P^{(1)})^{\alpha\beta,\lambda\sigma}-\frac{\Box}{2\xi}(P^{(2)})^{\alpha\beta,\lambda\sigma}\end{pmatrix}, \tag{A4}$$

where we have introduced the set of spin-projection operators as

$$\Theta_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}-\omega_{\mu\nu},\qquad \omega_{\mu\nu}=\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box}, \tag{A5}$$

$$S_{\mu\nu\alpha}=\frac{\chi\theta}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\beta, \tag{A6}$$

$$P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\Theta_{\mu\alpha}\Theta_{\nu\beta}-\Theta_{\mu\beta}\Theta_{\nu\alpha}), \tag{A7}$$

$$P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\Theta_{\mu\alpha}\omega_{\nu\beta}-\Theta_{\mu\beta}\omega_{\nu\alpha}+\Theta_{\nu\beta}\omega_{\mu\alpha}-\Theta_{\nu\alpha}\omega_{\mu\beta}), \tag{A8}$$

with $\Box\equiv\partial_\mu\partial^\mu$, and $\eta_{\mu\nu}$ is the Minkowski metric with signature $(+,-,-,-)$. Note that $P^{(1)}$ and $P^{(2)}$ satisfy the tensorial completeness relation:

$$(P^{(1)}+P^{(1)})_{\mu\nu,\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}-\eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha})\equiv\mathcal{I}_{\mu\nu,\alpha\beta}. \tag{A9}$$

The products between the operators defined above satisfy a closed algebra and are summarized in Tables I and II.

The Feynman propagator is defined as $\hat{\mathcal{O}}^{-1}_{TM+gf}$. In order to invert the wave operator, we will write it and its inverse generically by

TABLE II. Algebra of the spin-projection operators.

	$S_{\alpha\beta\nu}$	$\Theta_{\beta\sigma}$	$\omega_{\beta\sigma}$
$S^{\mu\alpha\beta}$	$-\frac{\theta^2}{2}\Box\Theta^{\mu}{}_{\nu}$	$S^{\mu\alpha}{}_{\sigma}$	0

	$S^{\lambda}{}_{\alpha\beta}$	$(P^{(1)})^{\nu\lambda}{}_{\rho\sigma}$	$(P^{(2)})^{\nu\lambda}{}_{\rho\sigma}$
$S_{\mu\nu\lambda}$	$-\frac{\theta^2}{2}\Box P^{(1)}_{\mu\nu\alpha\beta}$	$S_{\mu\rho\sigma}$	0

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{O}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{pmatrix}, \tag{A10}$$

which fulfills the relation $\mathbf{O}\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{I}$, where the general identity matrix $\mathbf{I}$ is defined by

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix}, \tag{A11}$$

where I and $\mathcal{I}$ are the identities to the projectors $(\theta^{\mu\nu}, \omega^{\mu\nu})$ and $(P^{(1)}, P^{(2)})$, respectively. From these preliminary definitions, we obtain a system of four equations, whose solutions can be written as we get

$$\begin{cases} A\mathbb{A} + B\mathbb{C} = I \\ A\mathbb{B} + B\mathbb{D} = 0 \\ C\mathbb{A} + D\mathbb{C} = 0 \\ C\mathbb{B} + D\mathbb{D} = \mathcal{I} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{A} = (A - BD^{-1}C)^{-1} \\ \mathbb{B} = -A^{-1}B\mathbb{D} \\ \mathbb{C} = -D^{-1}C\mathbb{A} \\ \mathbb{D} = (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{cases}. \tag{A12}$$

After some algebraic manipulations with the set of the operators presented above, the $TM_{B\wedge F}$ gauge propagator is properly written as

$$(\hat{\mathcal{O}}_{TM}^{-1})^{\mu,\alpha\beta;\nu,\lambda\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta^2\Box + m^2}\Theta^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{\Box}\omega^{\mu\nu} & -\frac{2m^2}{\theta^2\Box(\theta^2\Box + m^2)}S^{\mu\lambda\sigma} \\ \frac{2m^2}{\theta^2\Box(\theta^2\Box + m^2)}S^{\alpha\beta\nu} & -\frac{2m^2}{\theta^2\Box + m^2}(P^{(1)})^{\alpha\beta,\lambda\sigma} - \frac{2\xi}{\Box}(P^{(2)})^{\alpha\beta,\lambda\sigma} \end{pmatrix}. \tag{A13}$$

[1] A. Strominger, S.-T. Yau, and E. Zaslow, Mirror symmetry is T-duality, Nucl. Phys. B479, 243 (1996).
[2] J. Polchinski, Dualities of fields and strings, Stud. Hist. Phil. Mod. Phys. 59, 6 (2017).
[3] J. Maldacena, The large-N limit of superconformal field theories and supergravity, Int. J. Theor. Phys. 38, 1113 (1999); Adv. Theor. Math. Phys. 2, 231 (1998).
[4] C. P. Burgess and F. Quevedo, Bosonization as duality, Nucl. Phys. B421, 373 (1994).
[5] S. Mandelstam, Soliton operators for the quantized sine-Gordon equation, Phys. Rev. D 11, 3026 (1975).
[6] E. Witten, Non-Abelian bosonization in two dimensions, Commun. Math. Phys. 92, 455 (1984).
[7] E. C. Marino, Complete bosonization of the Dirac fermion field in $(2+1)$ dimensions, Phys. Lett. B 263, 63 (1991).
[8] C. P. Burgess, C. A. Lutken, and F. Quevedo, Bosonization in higher dimensions, Phys. Lett. B 336, 18 (1994).
[9] C. A. Hernaski and P. R. Gomes, Duality between 3D Massive Thirring and Maxwell Chern-Simons Models from 2D Bosonization, Phys. Rev. Lett. 121, 041601 (2018).
[10] R. C. B. Santos, P. R. Gomes, and C. A. Hernaski, Bosonization of the thirring model in $2+1$ dimensions, Phys. Rev. D 101, 076010 (2020).
[11] P. K. Townsend, K. Pilch, and P. van Nieuwenhuizen, Self-duality in odd dimensions, Phys. Lett. 136B, 38 (1984); Erratum, Phys. Lett. 137B, 443 (1984).
[12] S. Deser and R. Jackiw, Self-duality of topologically massive gauge theories, Phys. Lett. B 139B, 371 (1984).
[13] A. Karlhede, U. Lindström, M. Roček, and P. van Nieuwenhuizen, On 3D non-linear vector-vector duality, Phys. Lett. B 186, 96 (1987).
[14] E. H. Fradkin and F. A. Schaposnik, The fermion-boson mapping in three-dimensional quantum field theory, Phys. Lett. B 338, 253 (1994).
[15] N. Bralić, E. Fradkin, V. Manias, and F. A. Schaposnik, Bosonization of three-dimensional non-Abelian fermion field theories, Nucl. Phys. B446, 144 (1995).
[16] R. Banerjee, H. J. Rothe, and K. D. Rothe, Equivalence of the Maxwell-Chern-Simons theory and a self-dual model, Phys. Rev. D 52, 3750 (1995).
[17] R. Banerjee, H. J. Rothe, and K. D. Rothe, Hamiltonian embedding of the self-dual model and equivalence with Maxwell-Chern-Simons theory, Phys. Rev. D 55, 6339 (1997).
[18] M. Gomes, L. C. Malacarne, and A. J. da Silva, On the equivalence of the self-dual and Maxwell-Chern-Simons models coupled to fermions, Phys. Lett. B 439, 137 (1998).
[19] P. Minces and V. O. Rivelles, Chern-Simons theories in the AdS/CFT correspondence, Phys. Lett. B 455, 147 (1999).
[20] M. A. Anacleto, A. Ilha, J. R. S. Nascimento, R. F. Ribeiro, and C. Wotzasek, Dual equivalence between self-dual and Maxwell-Chern-Simons models coupled to dynamical $U(1)$ charged matter, Phys. Lett. B 504, 268 (2001).
[21] A. Karlhede, U. Lindström, M. Roček, and P. van Nieuwenhuizen, Supersymmetric vector-vector duality, Classical Quantum Gravity 4, 549 (1987).
[22] A. F. Ferrari, M. Gomes, J. R. S. Nascimento, A. Yu. Petrov, and A. J. da Silva, Duality of three-dimensional superfield theories, Phys. Rev. D 73, 105010 (2006).
[23] A. F. Ferrari, M. Gomes, A. C. Lehum, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, and A. J. da Silva, Equivalence between supersymmetric self-dual and Maxwell-Chern-Simons models coupled to a matter spinor superfield, Phys. Lett. B 678, 233 (2009).
[24] M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, A. J. da Silva, and E. O. Silva, On duality of the noncommutative supersymmetric Maxwell–Chern–Simons theory, Phys. Lett. B 666, 91 (2008).

[25] E. Harikumar and V. Rivelles, Non-commutative Maxwell–Chern–Simons theory in three dimensions and its dual, Phys. Lett. B **625**, 156 (2005).
[26] M. Kalb and P. Ramond, Classical direct interstring action, Phys. Rev. D **9**, 2273 (1974).
[27] M. Green, J. Schwarz, and E. Witten, *Superstring Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1987), Vols. I and II.
[28] T. J. Allen, M. J. Bowick, and A. Lahiri, Topological mass generation in $(3+1)$ dimensions, Mod. Phys. Lett. A **06**, 559 (1991).
[29] E. Cremmer and J. Scherk, Spontaneous dynamical breaking of gauge symmetry in dual models, Nucl. Phys. **B72**, 117 (1974).
[30] N. Banerjee and R. Banerjee, Generalized Hamiltonian embedding of the Proca model, Mod. Phys. Lett. A **11**, 1919 (1996).
[31] I. Oda and S. Yahikozawa, Topologically massive non-Abelian gauge theories in higher dimensions, Phys. Lett. B **234**, 69 (1990).
[32] A. Lahiri, Renormalizability of the dynamical two form, Phys. Rev. D **63**, 105002 (2001).
[33] E. Harikumar and M. Sivakumar, Duality and massive gauge-invariant theories, Phys. Rev. D **57**, 3794 (1998).
[34] T. Kim, S. Kouwn, and P. Oh, Hamiltonian formalism of topologically massive electrodynamics, Mod. Phys. Lett. A **34**, 1950067 (2019).
[35] S.-J. Rey, Confining phase of superstrings and axionic strings, Phys. Rev. D **43**, 526 (1991).
[36] S. Deguchi, T. Mukai, and T. Nakajima, Anomalous gauge theories with antisymmetric tensor fields, Phys. Rev. D **59**, 065003 (1999).
[37] N. D. H. Dass and K. V. Shajesh, Vacuum polarization induced coupling between Maxwell and Kalb-Ramond fields, Phys. Rev. D **65**, 085010 (2002).
[38] C. A. S. Almeida, F. S. Gama, R. V. Maluf, J. R. Nascimento, and A. Yu. Petrov, Superfield effective potential for the two-form field, Phys. Rev. D **92**, 085003 (2015).
[39] B. Altschul, Q. G. Bailey, and V. Alan Kostelecký, Lorentz violation with an antisymmetric tensor, Phys. Rev. D **81**, 065028 (2010).
[40] C. A. Hernaski, Spontaneous breaking of Lorentz symmetry with an antisymmetric tensor, Phys. Rev. D **94**, 105004 (2016).
[41] R. V. Maluf, A. A. A. Filho, W. T. Cruz, and C. A. S. Almeida, Antisymmetric tensor propagator with spontaneous Lorentz violation, Europhys. Lett. **124**, 61001 (2018).
[42] J. F. Assunção, T. Mariz, J. R. Nascimento, and A. Yu. Petrov, Dynamical Lorentz symmetry breaking in a tensor bumblebee model, Phys. Rev. D **100**, 085009 (2019).
[43] L. A. Lessa, J. E. G Silva, R. V. Maluf, and C. A. S. Almeida, Modified black hole solution with a background Kalb-Ramond field, Eur. Phys. J. C **80**, 335 (2020).
[44] E. Di Grezia and S. Esposito, Minimal coupling of the Kalb-Ramond field to a scalar field, Int. J. Theor. Phys. **43**, 445 (2004).
[45] W. T. Cruz, M. O. Tahim, and C. A. S. Almeida, Results in Kalb-Ramond field localization and resonances on deformed branes, Europhys. Lett. **88**, 41001 (2009).
[46] W. T. Cruz, R. V. Maluf, and C. A. S. Almeida, Kalb–Ramond field localization on the Bloch brane, Eur. Phys. J. C **73**, 2523 (2013).
[47] R. Menezes, J. R. S. Nascimento, R. F. Ribeiro, and C. Wotzasek, On the dual equivalence of the self-dual and topologically massive $B \wedge F$ models coupled to dynamical fermionic matter, Phys. Lett. B **537**, 321 (2002).
[48] D. Dalmazi and E. L. Mendonça, Dual descriptions of spin-two massive particles in $D = 2 + 1$ via master actions, Phys. Rev. D **79**, 045025 (2009).