



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS AGRÁRIAS**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA AGRÍCOLA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AGRÍCOLA**

**ANTONIO VIANA DA SILVA FILHO**

**PRINCÍPIO DA MÁXIMA ENTROPIA APLICADO À MODELAGEM**  
**HIDRODINÂMICA E À EFICIÊNCIA DE RETENÇÃO DE SEDIMENTOS EM**  
**PEQUENOS RESERVATÓRIOS**

**FORTALEZA**

**2020**

ANTONIO VIANA DA SILVA FILHO

PRINCÍPIO DA MÁXIMA ENTROPIA APLICADO À MODELAGEM  
HIDRODINÂMICA E À EFICIÊNCIA DE RETENÇÃO DE SEDIMENTOS EM  
PEQUENOS RESERVATÓRIOS

Tese apresentada à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Agrícola, da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Agrícola. Área de concentração: Manejo e Conservação de Bacias Hidrográficas no Semiárido.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Araújo.

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

S578p

Silva Filho, Antonio Viana da.

Princípio da máxima entropia aplicado à modelagem hidrodinâmica e à eficiência de retenção de sedimentos em pequenos reservatórios / Antonio Viana da Silva Filho. – 2020.

116 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências Agrárias, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Agrícola, Fortaleza, 2020.

Orientação: Prof. Dr. José Carlos de Araújo .

1. Entropia de Shannon . 2. Hidrodinâmica. 3. Sedimentologia. 4. Assoreamento de reservatórios.. I. Título.

CDD 630

---

ANTONIO VIANA DA SILVA FILHO

PRINCÍPIO DA MÁXIMA ENTROPIA APLICADO À MODELAGEM  
HIDRODINÂMICA E À EFICIÊNCIA DE RETENÇÃO DE SEDIMENTOS EM  
PEQUENOS RESERVATÓRIOS

Tese apresentada à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Agrícola, da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Agrícola. Área de concentração: Manejo e Conservação de Bacias Hidrográficas no Semiárido.

Aprovada em: 18/12/2020.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. José Carlos de Araújo (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Carlos Eduardo Ferraz de Mello  
Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)

---

Prof. Dr. Lucas Melo Vallame  
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB)

---

Prof. Dr. George Leite Mamede  
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

---

Prof. Dr. Jaedson Cláudio Anunciato Mota  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico ao meu pai, Antonio Viana (In Memoriam), que foi um grande exemplo de vida para mim. Ele aprendeu a ler e a escrever somente aos 18 anos de idade, pois viveu sua infância e adolescência em condições humildes com pouquíssimos recursos para estudar. Com muita dedicação, sempre acompanhado do objetivo de vencer na vida, ele concluiu uma faculdade de matemática na UECE (Universidade Estadual do Ceará), prosseguiu batalhando até almejar uma vaga em um órgão público. Além disso, ele não foi apenas um excelente pai, ele foi um grande esposo, um ótimo filho e um amigo admirado por todos a sua volta.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela perfeita e infinita companhia, aos meus pais Antonio Viana (In Memoriam) e Deaselva Viana pelo amor e pelo contínuo estímulo aos estudos, aos meus irmãos Selviana e Roney pelo apoio incondicional, à minha esposa Liliana e às minhas filhas Maria Helena e Maria Lis pelo amor e companheirismo. Agradeço também a todos os meus familiares e amigos pelas orações durante a luta, por mais de seis meses, contra um tumor cancerígeno. Agradeço à minha cunhada Leilane que me auxiliou na formatação do texto segundo as normas da UFC (Universidade Federal do Ceará).

Quero ressaltar o apoio por parte dos colegas do grupo de pesquisa Hidrosed, em especial : Jairo Soares e Alisson Simplício que monitoraram reservatórios de água localizados no município de Gilbués, Piauí, assim obtiveram dados importantes para a validação do meu trabalho de modelagem.

Ao Pedro Alencar, que foi companheiro de estudos e com ele obtive importantes conhecimentos de entropia, e ao Paulilo Palácio que me ensinou Fortran, uma linguagem de programação.

Gostaria de agradecer aos amigos Tony Apolinário (professor - UFRPE), Junio Moreira (professor de matemática), Alexsandro (Professor do DENA - Departamento de engenharia agrícola ) e Neuton Júnior (amigo de longas datas) pelas conversas motivadoras em momentos difíceis vividos no doutorado. Os ensinamentos em estatística do professor Leonardo Mendes (UFRPE) me esclareceram sobre os testes estatísticos que foram úteis na conclusão do trabalho.

O apoio psicológico por parte da terapeuta Katiane Macedo, durante algumas sessões, foi bastante motivador para que eu prosseguisse com minha pesquisa até concluí-la com êxito.

Agradeço à UFRPE (Universidade Federal Rural de Pernambuco) pela concessão de licença para a realização do doutorado, ao CNPq por financiar o projeto entropia e aos professores do PPGEA que são grandes mestres. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

O trabalho e o apoio por parte do meu orientador, o professor José Carlos de Araújo, foi fundamental para a conclusão da tese, bem como sua amizade e companhia me fortaleceram durante toda esta luta.

## RESUMO

Diante da necessidade do desenvolvimento de uma modelagem que leve em conta as incertezas inerentes aos processos físicos que envolvem o fluxo de água e sedimento e que melhore os resultados obtidos por modelos determinísticos tradicionais, este trabalho utilizou o princípio da máxima entropia de Shannon. O conceito de entropia da Teoria das Informações auxiliou na avaliação de modelos hidrodinâmicos e sedimentológicos. Na primeira etapa da pesquisa, foi avaliada uma relevante questão científica, qual seja, qual o ganho de informação com o incremento de restrições e com a robustez da premissa, que são partes integrantes do princípio da entropia máxima. Para isso, o problema tratado foi a distribuição do campo de velocidades em canais abertos, fundamental no estudo do fluxo de água. Examinamos o conflito de escolha entre o número de restrições (uma, duas ou três) e a premissa (ou *formulação primária*: fraca, com uso de coordenadas cartesianas ou forte, com coordenadas curvilíneas). Avaliamos seis modelos hidrodinâmicos de entropia que geram campos de velocidade em canais abertos. Cinco destes modelos foram obtidos da literatura e um foi desenvolvido no âmbito da própria pesquisa. O desempenho dos modelos foi avaliado através do coeficiente de Nash-Sutcliffe e da raiz do erro quadrático médio. Para esse fim foram usados 1730 valores medidos em laboratório por um velocímetro Laser-Doppler. Concluiu-se que os modelos com duas restrições tiveram desempenho melhor do que aqueles com uma restrição, devido ao ganho de informação inserido ao modelo pela segunda restrição. Concluiu-se também que modelos com três restrições obtiveram desempenho inferior aos de duas restrições. Isso porque o ganho de informação pela adição da terceira restrição foi inferior à degradação de informação causada pela necessidade de solução numérica, pois não há solução algébrica com o uso de mais de duas restrições. O uso de coordenadas curvilíneas representa com mais fidelidade o campo de velocidade, principalmente quando se trata de canais estreitos. Observou-se que os modelos que usaram a premissa forte (coordenadas curvilíneas) apresentaram resultados melhores do que os modelos com premissa fraca (coordenadas cartesianas). O modelo hidrodinâmico com melhor desempenho entre os seis avaliados tem duas restrições e premissa forte, ou seja, usa coordenadas curvilíneas (modelo denominado U2□). Concluiu-se, portanto, que houve mais ganho de informação com a premissa forte que com a inserção de uma terceira restrição. Os dois principais resultados da primeira etapa da pesquisa foram úteis na elaboração da segunda etapa, que trata de modelo para avaliar a retenção de sedimentos em pequenos reservatórios: (1) para a aplicação do princípio da entropia máxima, usamos apenas duas restrições aliadas a uma

premissa forte; e (2) para modelo de fluxo de água no reservatório, optamos pelo modelo logarítmico de Prandtl-von Kàrman, que corresponde ao modelo  $U_{2\xi}$  unidimensional. Considerando-se que há dezenas de milhares de pequenos açudes no semiárido nordestino que não dispõem de dado, optamos pelo modelo de Camp como referência para calcular a eficiência de retenção de sedimentos. Apesar de seu mérito, o modelo de Camp é determinístico e não admite ressuspensão dos sedimentos. Nesse sentido, esta tese introduziu no modelo a probabilidade de ressuspensão, calculada pelo princípio da entropia máxima. A probabilidade de ressuspensão de sedimentos foi modelada usando duas restrições e levando em conta o balanço de forças (peso, empuxo, força hidrodinâmica e de coesão) que atuam em uma partícula de sedimento depositada no leito. Esta probabilidade foi inserida na equação de Camp, gerando o modelo denominado *Retsed*, que estima a eficiência de retenção de sedimentos em pequenos reservatórios. As simulações de retenção segundo os dois modelos foram comparadas ao valor medido em campo, através de testes estatísticos, gráficos de dispersão e boxplots. Concluiu-se que o modelo *Retsed* teve desempenho satisfatório (erro inferior a 6%) e que o mesmo corrigiu o erro sistemático do modelo de Camp, qual seja, o de superestimar a retenção de sedimentos, uma vez que não admite a ressuspensão do material assoreado inicialmente.

**Palavras-chave:** Entropia de Shannon. Hidrodinâmica. Sedimentologia. Assoreamento de reservatórios.



## ABSTRACT

Given the need to develop a model that takes into account the uncertainties inherent to the physical processes that involve the flow of water and sediment and that improves the results obtained by traditional deterministic models, this work used the principle of maximum entropy according to Shannon. The entropy concept, derived from the Information Theory, supported our approach in the evaluation of hydrodynamic and sedimentological models. In the first stage of the research, a relevant scientific question was assessed, namely, what gain of information there is with the increase of constraints and the robustness of primary formulation, which are part of the principle of maximum entropy. For that, the selected problem to be tackled was the velocity field in open channels, fundamental in the study of the water flow. We examined the trade-off between the number of constraints (one, two or three) and the premise (or primary formulation: weak, using Cartesian coordinates or strong, using curvilinear coordinates). We evaluated six hydrodynamic entropy models that generate velocity fields in open channels. Five of these models were obtained from the literature and one was developed within the scope of the research. The performance of the models was assessed using the Nash-Sutcliffe coefficient and the root mean square error. For this purpose, we used 1730 accurate velocity measurements made in laboratory by Laser-Doppler velocimetry. We concluded that the models with two restrictions performed better than those with one restriction, due to the gain of information inserted into the model by the second restriction. We also observed that models with three restrictions performed worse than those with two restrictions. The gain of information by adding the third constraint was overcompensated by the degradation of information caused by the numerical solution, since there is no algebraic solution for more than two restrictions. The use of curvilinear coordinates represents the velocity field more accurately. We observed that the models that used the strong premise (curvilinear coordinates) presented better results than the models with weak premise (Cartesian coordinates). The hydrodynamic model with the best performance (denominated  $U2\xi$ ) has two restrictions and the strong premise, that is, it uses curvilinear coordinates. The results show, therefore, that there was more gain of information with the application of a strong premise than with the insertion of a third constraint. The two main results of the first stage were useful in the elaboration of the second stage, whose objective was to improve a model designed to assess the trap efficiency of sediment in small dams: (1) for the application of the principle of maximum entropy, we used two restrictions coupled with a strong premise; and (2) the hydrodynamic routine uses the Prandtl-von K arman logarithmic model, which corresponds to the one-dimensional  $U2\xi$  model. Considering that the Brazilian

north-eastern semiarid region has tens of thousands of ungauged small dams, we chose the Camp model as a reference to calculate the sediment trap efficiency. Despite its merit, the Camp model is deterministic and does not admit the sediment resuspension. Thus, this research introduced the probability of sediment resuspension in the model, calculated by the principle of maximum entropy. The probability of sediment resuspension was modelled using two constraints and taking into account the balance of forces (weight, buoyancy, hydrodynamic and cohesive forces) that act on a sediment particle deposited in the reservoir bed. The resuspension probability was then inserted in the Camp equation, generating the Retsed model, which estimates the efficiency of sediment retention in small reservoirs. The simulations by both models were compared to the measured value in the field, using statistical tests, scatter plots and boxplots. We concluded that the Retsed model has performed satisfactorily (error smaller than 6%) and that it did not mimic the systematic error of the Camp model, that is, it did not overestimate the sediment retention because it assumes the resuspension of sediment.

**Keywords:** Shannon entropy. Hydrodynamics. Sedimentology. Reservoir siltation.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Sistema de coordenada curvilínea baseado em Chiu e Chiou (1986).....	42
Figura 2 -	SRP1: dez perfis verticais: Cada número de 1 a 10, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U1y (uma restrição e formulação fraca).....	50
Figura 3 -	SRP2: 16 perfis verticais: Cada número de 1 a 16, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U1y (uma restrição e formulação fraca).....	50
Figura 4 -	SRP3: 16 perfis verticais: Cada número de 1 a 16, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U1y (uma restrição e formulação fraca).....	51
Figura 5 -	SRP1: dez perfis verticais: Cada número de 1 a 10, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U2y (duas restrições e formulação fraca).....	52
Figura 6 -	SRP2: 16 perfis verticais: Cada número de 1 a 16, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U2y (duas restrições e formulação fraca).....	52
Figura 7 -	SRP3: 16 perfis verticais: Cada número de 1 a 16, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U2y (duas restrições e formulação fraca).....	53
Figura 8 -	SRP1: dez perfis verticais: Cada número de 1 a 10, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U3y (três restrições e formulação fraca).....	54

Figura 9 -	SRP2: 16 perfis verticais: Cada número de 1 a 16, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U3y (três restrições e formulação fraca).....	54
Figura 10 -	SRP3: 16 perfis verticais: Cada número de 1 a 16, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U3y (três restrições e formulação fraca).....	55
Figura 11 -	SRP1: dez perfis verticais: Cada número de 1 a 10, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U1ξ (uma restrição e formulação forte).....	57
Figura 12 -	SRP2: 16 perfis verticais: Cada número de 1 a 16, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U1ξ (uma restrição e formulação forte).....	57
Figura 13 -	SRP3: 16 perfis verticais: Cada número de 1 a 16, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U1ξ (uma restrição e formulação forte).....	58
Figura 14 -	SRP1: dez perfis verticais: Cada número de 1 a 10, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U2ξ (duas restrições e formulação forte).....	59
Figura 15 -	SRP2: 16 perfis verticais: Cada número de 1 a 16, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U2ξ (duas restrições e formulação forte).....	59
Figura 16 -	SRP3: 16 perfis verticais: Cada número de 1 a 16, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U2ξ (duas restrições e formulação forte).....	60

Figura 17 -	SRP1: 10 perfis verticais: Cada número de 1 a 10, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U3 $\xi$ (três restrições e formulação forte).....	61
Figura 18 -	SRP2: 16 perfis verticais: Cada número de 1 a 16, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U3 $\xi$ (três restrições e formulação forte).....	61
Figura 19 -	SRP3: 16 perfis verticais: Cada número de 1 a 16, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U3 $\xi$ (três restrições e formulação forte).....	62
Figura 20 -	Resultado geral para NSE, da esquerda para direita: U1y, U1 $\xi$ , U2y, U2 $\xi$ , U3y e U3 $\xi$ .....	64
Figura 21 -	Resultado apenas para NSE > 0, da esquerda para direita: U2y, U2 $\xi$ , U3y e U3 $\xi$ .....	64
Figura 22 -	Resultado geral para RMSE, da esquerda para direita: U1y, U1 $\xi$ , U2y, U2 $\xi$ , U3y e U3 $\xi$ .....	65
Figura 23 -	Resultado apenas para RMSE < 10%, da esquerda para direita: U2y, U2 $\xi$ , U3y e U3 $\xi$ .....	66
Figura 24 -	Coeficiente de Nash-Sutcliffe (NSE). O boxplot à esquerda une os resultados dos modelos com uma restrição (U1y e U1 $\xi$ ). O boxplot central, os modelos U2y e U2 $\xi$ , enquanto o boxplot à direita, os modelos U3y e U3 $\xi$ .....	67
Figura 25 -	Raiz do erro quadrático médio – RMSE. O boxplot à esquerda une os resultados dos modelos com uma restrição (U1y e U1 $\xi$ ). O boxplot central, os modelos U2y e U2 $\xi$ , enquanto o boxplot à direita, os modelos U3y e U3 $\xi$ .....	67
Figura 26 -	Coeficiente de Nash-Sutcliffe (NSE). O boxplot à esquerda une os resultados dos modelos com formulação fraca (U1y, U2y e U3y), enquanto o boxplot à direita, os modelos com formulação forte (U1 $\xi$ , U2 $\xi$ e U3 $\xi$ ).....	68

Figura 27 -	Raiz do erro quadrático médio – RMSE. O boxplot à esquerda une os resultados dos modelos com formulação fraca ( $U1y$ , $U2y$ e $U3y$ ), enquanto o boxplot à direita, os modelos com formulação forte ( $U1\xi$ , $U2\xi$ e $U3\xi$ ).....	68
Figura 28 -	Todas as 42 verticais. Comparação dos resultados de NSE entre as coordenadas cartesianas e curvilíneas.....	69
Figura 29 -	Pontos com NSE positivo. Comparação dos resultados de NSE entre as coordenadas cartesianas e curvilíneas.....	69
Figura 30 -	Coefficiente de Nash-Sutcliffe (NSE). Resultados referentes à distância horizontal para a parede do canal.....	70
Figura 31 -	Raiz do erro quadrático médio – RMSE. Resultados referentes à distância horizontal para a parede do canal.....	71
Figura 32 -	Corte longitudinal de um reservatório e representação da dinâmica de partículas de sedimento no processo de ressuspensão.....	75
Figura 33 -	Eficiência de retenção de sedimentos para o experimento de Pereira (2020): aplicação dos modelos Camp (1946) e <i>Retsed</i> .....	85
Figura 34 -	Relação entre a eficiência de retenção de sedimentos dos modelos Camp (1946) e <i>Retsed</i> para o experimento de Pereira (2020).....	86
Figura 35 -	Relação empírica entre a probabilidade de ressuspensão e a vazão normalizada para 1330 intervalos horários do experimento de Pereira (2020).....	86
Figura 36 -	Probabilidade de ressuspensão e vazão normalizada para 1330 intervalos de 1h com dados medidos no experimento de Pereira (2020).....	87
Figura 37 -	Gráficos de dispersão que relaciona as eficiências da retenção de sedimentos simuladas pelos modelos de Camp (1946) e <i>Retsed</i> com dados medidos de vazões durante o experimento de Pereira (2020).....	88

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 -	Parâmetros dos experimentos SRP1, SRP2 e SRP3 de Steffler <i>et al.</i> (1983) com dados medidos de velocidade. Os parâmetros são: vazão, profundidade do fluxo, largura da calha, velocidade máxima medida.....	42
Tabela 2 -	Resultados das simulações de campo de velocidades: desempenho das seis sub-rotinas aplicadas aos experimentos SRP1, SRP2, SRP3 com um total de 42 perfis verticais.....	49
Tabela 3 -	Classificação do sedimento desagregado em função do intervalo diametral, com base em ISSS (International Society for the System Sciences).....	73
Tabela 4 -	Estatística descritiva referente às simulações dos modelos: Camp (1946) e Retsed para 1330 intervalos com medidas horárias de vazões líquida e sólida do experimento de Pereira (2020).....	82
Tabela 5 -	Frequências relativas dos valores simulados de eficiência da retenção de sedimentos para os modelos de Camp (1946) e Retsed aplicados ao experimento de Pereira (2020).....	83
Tabela 6 -	Teste t de Student comparativo das médias entre as simulações dos modeloCamp (1946) e Retsed aplicados ao experimento de Pereira (2020).....	83
Tabela 7 -	Teste z para a média medida e média das simulações do modelo de Camp (1946) aplicado ao experimento de Pereira (2020).....	83
Tabela 8 -	Teste z para a média medida e média das simulações do modelo de Retsed aplicado ao experimento de Pereira (2020).....	84
Tabela 9 -	Teste t de Student para a média entre valores de probabilidade de ressuspensão $Pr$ e de vazão normalizada $Qn$ que equivale ao quociente ( $Q$ ). $Q$ é a vazão medida e $Q_{max}$ é o valor máximo da vazão medida em campo.....	88

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	16
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA</b> .....	19
<b>2.1</b>	<b>Princípio da Entropia Máxima</b> .....	19
<b>2.2</b>	<b>Modelagem hidrodinâmica de escoamento livre</b> .....	23
<b>2.3</b>	<b>Hidrossedimentologia do semiárido brasileiro</b> .....	27
<b>2.4</b>	<b>Modelagem do asseioamento de reservatórios</b> .....	32
<b>2.5</b>	<b>Ressuspensão de sedimentos</b> .....	37
<b>3</b>	<b>DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADE EM CANAIS ABERTOS</b> .....	40
<b>3.1</b>	<b>Introdução</b> .....	40
<b>3.2</b>	<b>Metodologia</b> .....	41
<b>3.2.1</b>	<i>Modelos com a formulação primária fraca</i> .....	43
<b>3.2.2</b>	<i>Modelos com formulação primária forte</i> .....	45
<b>3.3</b>	<b>Resultados e discussão</b> .....	47
<b>3.3.1</b>	<i>Modelos com formulação fraca: isotáquias representadas por coordenadas cartesianas</i> .....	49
<b>3.3.2</b>	<i>Modelos com formulação forte: isotáquias representadas por coordenadas curvilíneas</i> .....	56
<b>3.3.3</b>	<i>Análise comparativa</i> .....	63
<b>3.4</b>	<b>Conclusões</b> .....	71
<b>4</b>	<b>EFICIÊNCIA DA RETENÇÃO DE SEDIMENTOS</b> .....	73
<b>4.1</b>	<b>Modelagem dos processos</b> .....	73
<b>4.1.1</b>	<i>Modelo de Camp</i> .....	73
<b>4.1.2</b>	<i>Modelo de entropia para a probabilidade de ressuspensão</i> .....	74
<b>4.1.3</b>	<i>Modelo Retsed</i> .....	79
<b>4.2</b>	<b>Experimento de campo</b> .....	80
<b>4.3</b>	<b>Resultados e discussão</b> .....	81
<b>4.4</b>	<b>Conclusões</b> .....	89
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	90
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	92
	<b>ANEXO A - PUBLICAÇÃO DERIVADA DA TESE</b> .....	103



## 1 INTRODUÇÃO

A qualidade da convivência com a escassez hídrica no semiárido depende de tomadas de decisões por parte de órgãos gestores dos recursos hídricos, pois decisões equivocadas, principalmente envolvendo o uso racional da água, podem gerar impactos sociais, econômicos e ambientais, entre os quais a erosão (LIMA; OLIVEIRA, 2016).

A erosão do solo, sobretudo do tipo hídrica, tem potencial para gerar vários problemas ao ser humano, um deles é o deslizamento de terra em regiões habitadas, provocando, possivelmente o soterramento de casas e morte de pessoas. Os prejuízos econômicos também são significativos, pois além deste tipo de erosão provocar fechamento de rodovias e de outras vias de transporte, promove também a quebra da estrutura do solo e o transporte de partículas com consequente carreamento de nutrientes, matéria orgânica e microrganismos gerando o empobrecimento das áreas agrícolas e poluindo as fontes hídricas (CUNHA; XAVIER, 2007). Um dos impactos mais severos é a desertificação, que vem crescendo no Nordeste Brasileiro, como atestam Simplício *et al.* (2020).

Há, basicamente, dois tipos de erosão hídrica, as quais são: a laminar, caracterizada pelo escoamento difuso das águas da chuva, retirando uma camada superficial do solo quase de forma homogênea; e a linear, causada pelo escoamento superficial concentrado que gera incisões lineares denominadas de sulcos, ravinas ou voçorocas (ALENCAR *et al.*, 2020; COSTA *et al.*, 2020). Em qualquer um destes casos, o escoamento conduz sedimentos que podem alcançar rios, ou até mesmo reservatórios de água.

Caso o fluxo de água não tenha energia suficiente para transportar toda a massa de sedimentos, uma parte dela irá se depositar no leito, causando assoreamento, e este por sua vez reduz o volume útil (MAIA, 2006) e consequentemente compromete a segurança da obra e a garantia da oferta de água, além de soterrar a fauna e flora nas calhas, causando assim, a perda das condições de habitat para peixes e outros animais, dificultando até mesmo a sua reprodução.

A deposição de sedimentos é o principal problema que afeta a vida útil dos reservatórios, sobretudo pela redução da qualidade e da quantidade de água disponível. Segundo Morris e Fan (2010), é necessário o conhecimento da taxa de deposição deste processo sedimentológico em um reservatório para prever e tentar reduzir o prejuízo causado por este fenômeno através de estratégias corretivas. De acordo com os mesmos autores, os padrões de deposição também refletem os processos de transporte no reservatório e podem fornecer informações sobre a distribuição de sedimentos que não podem ser avaliados por outros dados.

Por outro lado, a retenção de sedimentos nos milhares de pequenos açudes do semiárido (MAMEDE *et al.*, 2012; 2018) pode ser benéfica, pois, à medida que ocorre neles ou em lagoas de sedimentação, o assoreamento torna-se reduzido nos grandes reservatórios, que são estratégicos para a oferta de água. Esta deposição pode ser avaliada pela eficiência da retenção, que é a razão entre o volume de sedimentos depositado no leito e o volume afluente de sedimentos. Quando não há transbordamento nem retirada no reservatório, a eficiência de retenção é igual a 1, pois todo o sedimento que entra no reservatório fica retido, seja suspenso ou depositado no leito.

Alguns fatores contribuem para o reservatório reter sedimentos (GARG; JOTHIPRAKASH, 2010). Quanto maior for o seu comprimento, menores serão as chances de as partículas permanecerem suspensas no fluxo, contribuindo assim com a deposição. Partículas maiores e, portanto, mais pesadas tendem a ficar retidas, devido à sua elevada velocidade de sedimentação. Por outro lado, quanto maior for a vazão afluente ao reservatório, mais rapidamente as partículas se deslocarão em direção a saída do reservatório, reduzindo as chances de o sedimento se depositar, diminuindo assim a eficiência da retenção de sedimentos.

Além destes fatores, deve-se levar em conta que o sedimento pode ser ressuspenso após sua deposição (MAZUQUI; RAMOS, 1999), possibilitando assim uma redução na eficiência da retenção. A ocorrência deste processo de ressuspensão depende do peso e da força de coesão das partículas, como também de uma força de elevação aplicada sobre a partícula, relacionada com a intensidade do escoamento da água.

Portanto, a estimativa da eficiência da retenção de sedimentos depende de um confiável modelo hidrodinâmico. No entanto, muitas vezes, dados que seriam suficientes para o desenvolvimento de uma modelagem hidrodinâmica não estão disponíveis ou são escassos, sobretudo para pequenos reservatórios.

Quando há limitação de informação, os modelos probabilísticos, apesar de considerarem as incertezas, geram distribuições de probabilidades tendenciosas ao tentar descrever fenômenos naturais complexos como, por exemplo, a ressuspensão de sedimentos.

Este problema pode ser atenuado pelo princípio da máxima entropia de Shannon, aqui denominado PME (SHANNON, 1948; JAYNES, 1957a, 1957b). O princípio da máxima entropia permite a obtenção de uma função de densidade de probabilidade não tendenciosa, mediante restrições. Portanto, o PME leva em conta a mínima informação e a máxima incerteza, além de evitar hipóteses não comprovadas. Em situações onde a escassez de dados é ampla, como é o caso dos pequenos reservatórios que são pouco monitorados (MAMEDE *et al.*, 2012), a teoria da entropia é bastante atraente.

As incertezas podem ser oriundas de diversas fontes, como erros de medições, aleatoriedade inerente aos fenômenos naturais, erros na estimativa de parâmetros e na concepção do modelo. Devido a estas incertezas e aos conceitos físicos associados à hidrodinâmica, uma abordagem físico-probabilística torna-se ferramenta adequada para o uso em modelagem hidrossedimentológica. Diversos modelos de distribuição de velocidade de fluxo em canais abertos ou em rios, baseados no PME, foram desenvolvidos e aplicados, apresentando bons resultados (CHIU, 1987,1988,1989 e 1991; CHIU; MURRAY, 1992; CHIU; SAID, 1995; CHIU; TUNG, 2002; CHEN; CHIU, 2002; CHIU *et al.*, 2005; CHIU; HSU, 2006). Estes modelos também foram avaliados pela comparação entre resultados de simulações e dados medidos em laboratório (SILVA FILHO *et al.*, 2020).

O objetivo geral desta tese é, portanto, desenvolver e aplicar modelos hidrossedimentológicos baseados no princípio da máxima entropia de Shannon. Os objetivos específicos são:

- i) Avaliar o conflito, gerado no âmbito da entropia de Shannon, entre o número de restrições e a robustez da formulação primária para seis modelos hidrodinâmicos que descrevem campos de velocidade em canais abertos.
- ii) Avaliar a melhor formulação hidrodinâmica, entre os seis modelos, para que seja aplicada ao problema da ressuspensão de sedimentos em pequenos reservatórios.
- iii) Modelar, com base no princípio da entropia máxima, a probabilidade de ressuspensão de sedimentos afluentes a pequenos reservatórios.
- iv) Acoplar a probabilidade de ressuspensão ao modelo de Camp (1946) e aplicar o modelo resultante, comparando-o à abordagem original determinística, que não admite ressuspensão.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

### 2.1 Princípio da entropia máxima

Shannon (1948), ao estudar Teoria da Informação, incluiu o efeito do ruído (ou carência de informação) em um sistema de comunicação para relacionar incerteza (entropia) de uma variável com a quantidade de conhecimento (ou informação) sobre um sistema, e dessa forma formulou uma função logarítmica denominada entropia de Shannon que calcula, por meio de uma função densidade de probabilidade o ganho médio de informação no recebimento de mensagens. Este ganho está diretamente relacionado à entropia de uma variável aleatória na realização de um experimento. O autor considerou conveniente o uso do logaritmo, pois vários parâmetros de engenharia tendem a variar linearmente com o logaritmo do número de possibilidades. A Entropia pode ser descrita como uma medida de incerteza que é diretamente proporcional à carência de informação sobre um sistema. Se a informação completa está disponível, a entropia será nula, caso contrário, ela será positiva. A partir da teoria da informação, pode-se estabelecer uma função densidade de probabilidade baseada no mínimo conhecimento sobre o sistema estudado o que conduz a uma máxima incerteza (ou entropia), dessa forma, esta função densidade é a estimativa menos tendenciosa ou não comprometida com relação à informação dada.

Jaynes (1957a, 1957b) formulou o princípio da máxima entropia (PME), que envolve a maximização da entropia de Shannon, usando o método dos multiplicadores de Lagrange. Um relato completo sobre o PME é apresentado em Levine e Tribus (1978). De acordo com este princípio, quando há inferências baseadas em informações incompletas, a função densidade de probabilidade a ser aplicada em um modelo deve ser aquela cuja entropia é máxima de acordo com a informação disponível expressa sob a forma de restrições, que são escritas na forma de integral.

Uma derivação axiomática foi formulada por Shore e Johnson (1980). Estes autores provaram que o PME é um método de inferência eficiente quando é dada uma nova informação em termos de valores esperados. Esta abordagem não se baseou em argumentos intuitivos. Em vez disso, foram consideradas as consequências de se exigir que os métodos de inferência sejam auto consistentes. Os problemas que envolvem o PME podem ser resolvidos de forma analítica (ou algébrica), se estiverem disponíveis no máximo duas restrições (informações), caso contrário a solução deve ser numérica. Quando há apenas uma restrição, o princípio gera uma distribuição de probabilidade uniforme. A medida que restrições são introduzidas ao modelo,

a distribuição terá um gráfico com a forma cada vez mais aguda. Desta forma, a entropia reduz de um valor máximo, quando a distribuição é uniforme, a um valor nulo, quando o modelo for completamente determinístico.

O PME tem sido aplicado com sucesso em modelagem hidrodinâmica. Chiu (1987) introduziu o conceito de entropia e de probabilidade em hidráulica de canais abertos e modelou o cálculo da distribuição de velocidade de fluxo de água com duas restrições, obtendo dessa forma uma melhor simulação quando comparada à equação de Prandtl von Kàrmàn. Chiu (1988) formulou equações de entropia para a distribuição de velocidade em seções transversais de canais que descrevem a variação em ambas as direções: vertical e transversal, introduziu um parâmetro ( $M$ ) para caracterizar e comparar padrões de distribuição de velocidade, e utilizou a transformação de coordenadas cartesianas em curvilíneas; Chiu (1989) apresentou, através das leis de conservação de momento e de energia, duas restrições à função densidade de probabilidade que maximiza a entropia. Chiu (1991) relacionou entropia com: os parâmetros de modelos de distribuição de velocidade, com os coeficientes de energia e momento, com a velocidade média dada pela equação de Manning e com os pontos onde ocorrem as velocidades média e máxima em uma seção transversal do canal;

Barbé *et al.* (1991) formularam equações baseadas nas conservações de massa e de momento para simular a velocidade de fluxo em um perfil de canal aberto. Neste modelo foi utilizado o coeficiente de Boussinesq que relaciona velocidade média com a média do quadrado da velocidade. Para a solução numérica, os autores usaram séries de MacLaurin para representar funções exponenciais. Este modelo apresentou-se mais preciso quando comparado a outros métodos, especialmente em pontos próximos ao leito (ARAÚJO; CHAUDHRY, 1998).

Chiu e Murray (1992) descreveram vários padrões possíveis de distribuição de velocidade ao longo de fluxos não uniformes e desenvolveram métodos para estimar parâmetros para aplicações no estudo de processos de transporte em canais abertos, naturais ou artificiais. Chiu e Said (1995) desenvolveram uma técnica para calcular a vazão a partir do perfil de velocidade em uma seção transversal do canal. A técnica é considerada eficiente para córregos e rios e pode ser usada tanto para atualizar continuamente a resistência do fluxo no caso de fluxos instáveis, como para reduzir as incertezas na previsão de vazão.

De Araújo e Chaudhry (1998) investigaram a aplicabilidade do princípio da máxima entropia em hidrodinâmica, particularmente em distribuição de velocidade em canais abertos, através da comparação de simulações de modelos bidimensionais com dados medidos. Enquanto o primeiro usou lei logarítmica, o segundo foi gerado pelo princípio da máxima entropia. Os resultados mostraram que o modelo de entropia obteve desempenho melhor do que

o da lei logarítmica, não apenas em termos gerais (erro médio absoluto de 12.8% para o primeiro e 19.1 % para o segundo modelo), mas em praticamente todas as regiões de fluxo, especialmente próximo ao leito do canal (erro absoluto de 23.8% para o primeiro e 55.3% para o segundo modelo). Como os modelos desconsideram o fluxo secundário, as simulações de velocidade na região superior, próxima às paredes foram relativamente pobres.

Chen e Chiu (2002) desenvolveram um método para estimar a velocidade máxima baseado em algumas medidas de velocidade em um único perfil vertical e na regularidade do fluxo de água, esta regularidade é referente ao parâmetro de entropia apresentado por Chiu (1988). Os autores observaram também que a localização do perfil vertical no qual a velocidade máxima ocorre tende a ser invariante com o tempo. O método desenvolvido reduz o tempo e o custo na medição da vazão em canais abertos. Os dados do rio Tanshui são usados para garantir a precisão e a confiabilidade do método. Os resultados mostraram que o método apesar de simples é capaz de estimar a vazão.

Chiu *et al.* (2005) estudou regularidades em escoamentos de fluidos que podem ser representadas por um conjunto de parâmetros. Estes parâmetros exibem resiliência e estabilidade sob várias condições de fluxo. Juntas, essas regularidades formam uma rede e interagem entre si, de modo que, se uma delas é conhecida, as outras podem ser estimadas em função dela. As regularidades e sua rede explicam os vários fenômenos do fluxo e podem ser usadas em análise de rios e córregos. Por exemplo, eles podem ser usados como base para desenvolver métodos simples e eficientes das medições de descarga que requerem apenas amostragem de velocidade em um único ponto na superfície da água ou em alguns pontos em uma única vertical. Devido à sua simplicidade e ao pouco tempo exigido, esses métodos podem ser facilmente automatizados para coletar dados de descarga em fluxos altos e instáveis, extremamente necessários para a previsão de fluxo em tempo real e para o projeto de estruturas de controle de inundações e para o avanço do conhecimento científico fundamental em hidrologia.

O PME tem sido aplicado, com sucesso, em outros campos do conhecimento, como, por exemplo, a sedimentologia. Araújo (2007) propôs uma equação, a partir do PME, que avalia a produção de sedimentos em encostas, levando em conta variáveis físicas como: distância média percorrida por uma partícula, potência do fluxo, velocidade de sedimentação e erosão bruta. A equação foi aplicada para duas bacias experimentais, mostrando boa previsibilidade, sobretudo para eventos de alta erosividade, com erro médio inferior a 21%.

Moramarco *et al.* (2013) desenvolveram uma metodologia para determinar a batimetria de seções transversais de rios durante inundações através da amostragem de velocidades de fluxo superficial e outros dados hidráulicos. A distribuição de profundidade

depende de um parâmetro, cuja estimativa é direta, e da profundidade máxima do fluxo. Aplicando a um conjunto de dados de velocidade de cinco locais de medição de rios, o método modelou a área de fluxo observada durante medições de vazão e avaliou com precisão a descarga correspondente acoplando a distribuição de profundidade de fluxo com uma relação entrópica entre velocidade média e velocidade máxima.

Mishra *et al.* (2015) validaram perfis de umidade do solo, usando dados de campo para guiar um ciclo de irrigação. Um modelo de entropia com duas restrições, baseado na premissa da existência de uma distribuição inicial uniforme da umidade do solo, pôde simular a maioria dos perfis que ocorrem no regime particular de solo e clima. O modelo produziu uma estratégia de irrigação muito eficiente com perdas mínimas, inferior a 2% da água aplicada. No entanto, os resultados para solos com argila siltosa foram problemáticos, pois o estresse das plantas se desenvolveu devido à insuficiência de água aplicada. No geral, a abordagem mostrou-se promissora como estratégia geral para orientar a irrigação em ambientes úmidos, como o sudeste dos Estados Unidos.

Jiang *et al.* (2016) investigaram o campo de velocidade de fluxo em um cano de seção circular, parcialmente preenchido. Este campo foi derivado a partir do PME e diferentes entropias foram comparadas de acordo com o nível de conhecimento. Uma nova função de probabilidade acumulada relativa à velocidade do tubo circular em termos de vazão e profundidade foi hipotetizada. Os resultados experimentais mostraram que os valores estimados de velocidade baseados no princípio de máxima entropia de Tsallis (PLASTINO; PLASTINO, 1993) estão em boa concordância com os valores medidos.

Martins e Poletto (2017) calcularam a concentração de sedimentos em canais de rios com vários níveis de concentrações e diversos tamanhos de partículas. Para tanto, foi proposto uma relação entre os parâmetros da teoria de entropia a fim de reduzir o esforço computacional. Os resultados foram satisfatórios para concentrações acima de 10 gramas por litro, com  $R^2$  superior a 0,88. Os erros quadráticos calculados nesta pesquisa foram inferiores aqueles encontrados quando se utilizou a teoria da entropia de Tsallis juntamente com a equação de Rouse que se trata de um modelo clássico para determinação do perfil de concentração de sedimentos.

Mirauda e Russo (2019) modelaram matematicamente, usando a teoria da entropia, a posição de máxima velocidade do fluxo tanto para canais largos como para canais estreitos. Vários conjuntos de medidas de fluxos uniformes e não uniformes foram extraídas da literatura para testar a validade do modelo e este mostrou resultados similares aos dos experimentos. Dessa forma o modelo fornece uma estimativa precisa da posição da velocidade máxima para

os casos em que ela ocorre abaixo da superfície da água.

Weí e Song (2019) construíram um intervalo de confiança para quantis de precipitação e calcularam as variações assintóticas através do PME. Algumas distribuições como a gama, a Pearson tipo III (P3) e o valor extremo tipo 1 foram usadas para ajustar a observação. Simulações de Monte Carlo foram realizadas para avaliar o desempenho do método e comparar tanto com os métodos de momentos amplamente utilizados como o método de máxima verossimilhança. Finalmente, os intervalos de confiança das precipitações do projeto foram calculados usando o PME para as três distribuições e comparados com os do MOM e ML. Nesta pesquisa o PME apresentou maior redução da incerteza comparado aos outros dois métodos utilizados.

## 2.2 Modelagem hidrodinâmica de escoamento livre

Hidrodinâmica é o estudo do comportamento dos líquidos em movimento. A sua modelagem nos ajuda a compreender como se distribui a velocidade do fluxo de água em uma seção transversal de um canal, rio ou reservatório, e este campo de velocidade pode ser aplicado em modelos que descrevem a erosão, o transporte e a deposição de sedimentos. Ghosh e Roy (1970) obtiveram distribuição de tensão de cisalhamento em canais abertos lisos e rugosos com seções trapezoidais e retangulares, utilizando a técnica do sistema de suspensão de três pontos sugerido por Bagnold. Comparou-se a distribuição medida com estimativas indiretas a partir de isotáquias (curvas que unem pontos de mesma velocidade) e medições de tubo de Preston, com base na lei de resistência de Keulegan. A estimativa indireta mais confiável foi a técnica do tubo de Pitot. A influência do fluxo secundário sobre a distribuição de tensão na borda não poderia ser definida com precisão na ausência de uma teoria confiável sobre este tipo de fluxo.

Chiu *et al.* (1976) utilizaram duas abordagens, uma delas determinística com um sistema de coordenadas curvilíneas para análise hidrodinâmica e uma outra estocástica para lidar com as incertezas nos processos hidráulicos causadas pela irregularidade geométrica do canal. As técnicas podem ser usadas para simular a distribuição de velocidade tridimensional do fluxo primário, transporte de sedimentos e fluxo secundário. Na modelagem de fluxos instáveis, concluiu-se que no uso de seções transversais médias, sem a irregularidade geométrica do canal, surgiram erros na parte de pico e recessão dos hidrogramas computados, embora tenham vantagens por serem simples e insensíveis a incertezas.

Chiu *et al.* (1978) modelaram fluxo secundário e, conseqüentemente a estrutura



tridimensional irregular do fluxo de canal aberto. Os autores usaram equações analíticas juntamente com dados medidos da geometria do canal e distribuição da velocidade primária do fluxo para descrever a variabilidade da direção e magnitude do fluxo secundário em relação ao tempo, ao espaço e a vazão.

A distribuição da tensão de cisalhamento depende do padrão de fluxo secundário, tornando-se mais uniforme à medida que a vazão cresce e para altos valores de vazão, esta distribuição depende principalmente do fluxo primário. Bathurst *et al.* (1979) mostraram padrões de fluxo secundário em curvas de rios, o efeito da circulação sobre a tensão de cisalhamento nas bordas e a forma na qual este efeito se altera com a vazão. Os autores concluíram que o fluxo secundário foi menos intenso em baixas e altas vazões e mais forte, com seu maior efeito na distribuição de tensão de cisalhamento, em vazões médias.

Chiu e Hsiung (1981) apresentaram uma modelagem matemática e uma técnica computacional capazes de tratar e lidar com interações entre variáveis hidráulicas como distribuição de velocidade de fluxo primário, seção transversal de canal, vazão, fluxo secundário, tensão de cisalhamento e concentração de sedimentos. O efeito do fluxo secundário é incluído numa fórmula para tensão de cisalhamento. A fórmula fornece valores de pico de corte de limite que ocorrem no fundo do canal perto dos cantos e das paredes laterais. Tais valores de pico de cisalhamento de fronteira são devidos à transferência de momento para a região pelo fluxo secundário. A técnica de simulação pode ser usada como uma ferramenta de tomada de decisão na seleção de projetos de engenharia e controles para proteções do canal. O principal papel do escoamento secundário no transporte de sedimentos parece ser o transporte de sedimentos na direção transversal, enquanto a gravidade leva os sedimentos para baixo e a difusão leva as partículas de sedimento para cima. O componente vertical do fluxo secundário parece ajudar a gravidade a reduzir o sedimento na maior parte da área em uma seção transversal de um canal.

Chiu e Lin (1983) apresentaram três categorias que classificam padrões de distribuição de velocidade de fluxo primário em um canal aberto de acordo com a distância vertical do ponto de velocidade máxima até a superfície da água. Os autores utilizaram a mudança de coordenadas cartesianas para curvilíneas e aplicaram as curvas de mesma velocidade de fluxo primário na análise hidrodinâmica para desenvolver equações que calculam distribuições correspondentes de fluxo secundário e tensão de cisalhamento. A partir dos modelos desenvolvidos nesta pesquisa pode-se interagir a velocidade do fluxo, tanto primário como secundário com a tensão de cisalhamento. Esta interação portanto, facilita aplicações práticas no estudo de vários processos em canais abertos, tais como difusão e dispersão de

sedimentos, erosão, alterações na geometria do canal e degradação do leito, os quais requerem modelagens tridimensionais. Uma aplicação em um canal de laboratório mostrou que os resultados da simulação estão de acordo com os dados medidos. Grandes discrepâncias ocorreram apenas na comparação entre as velocidades medidas e calculadas no caso de fluxo secundário. No entanto, ainda é incerto se estas discrepâncias são inteiramente devidas a erros de modelagem e computacionais, já que o nível de precisão dos dados medidos é desconhecido.

Chiu e Chiou (1986) utilizaram o conceito de isotáquia de fluxo primário para investigar a interação entre a distribuição de tensão de cisalhamento, as características do canal e as intensidades de fluxo primário e secundário e dessa forma estimar parâmetros em um modelo matemático tridimensional, ampliando a eficácia do modelo, sem a necessidade de dados de velocidade de fluxo primário. O método foi aplicado a um estudo da estrutura tridimensional do fluxo em canais abertos retangulares. A interação entre os fluxos primário e secundário e a distribuição da tensão de cisalhamento foi investigada sob vários valores do número de Manning, relação entre largura e profundidade e inclinação de canais. O resultado respondeu a muitas questões que surgiram em hidráulica de canais abertos.

Chiu (1987) introduziu o conceito de entropia e probabilidade em modelagem de distribuição de velocidade, tensão de cisalhamento e concentração de sedimentos suspensos em fluxos de canais abertos. Uma equação de distribuição de velocidade gerada pelo princípio da máxima entropia apresentou vantagens sobre a equação universal de Prandtl-von Kàrmàn que não leva em conta as incertezas inerentes aos processos hidráulicos. As funções de entropia geradas para a distribuição de velocidade e transporte de sedimentos são eficazes ao refletir os efeitos do tamanho do sedimento em suspensão, da textura do material do leito e da concentração de sedimentos. Portanto, elas podem ser usadas como variáveis para caracterizar e comparar vários fluxos de canais abertos. Através de suas sensibilidades aos vários parâmetros necessários para descrever as características de transporte de fluxo e sedimentos, as funções de entropia também podem ser usadas para obter novas equações muito necessárias para a estimativa de parâmetros difíceis de determinar devido ao número insuficiente de equações disponíveis.

Chiu (1988) utilizou um parâmetro, denominado  $M$ , para caracterizar padrões de distribuição de velocidade de fluxo em canais abertos. A definição deste parâmetro indica a importância da informação dada pela localização e magnitude da velocidade máxima em uma seção transversal, e sugere a necessidade por estudos analíticos e experimentais a respeito da velocidade máxima. O autor também desenvolveu equações a partir do PME para descrever a variação de velocidade em ambas as direções, vertical e transversal, podendo a velocidade

máxima ocorrer abaixo da superfície da água, como também para localizar o ponto que corresponde a velocidade média. A homogeneidade da distribuição de velocidade em uma seção transversal do canal foi estimada pela entropia.

Chiu (1989) aplicou o PME, a transformação de coordenadas cartesianas em curvilíneas e as taxas de transporte de massa, momento e energia cinética através do fluxo de uma seção transversal em um canal aberto para gerar equações que simulam velocidades de fluxo de água em canais abertos, mesmo para os casos em que o ponto de velocidade máxima ocorre abaixo da superfície. Além disso, Chiu (1991) utilizou o parâmetro denominado  $M$  para expressar a velocidade máxima e média dada pela equação de Manning. O conhecimento das velocidades máxima e média equivalem a conhecer a faixa de velocidade do fluxo e ajudam a descrever a função densidade de probabilidade que maximiza a entropia e, portanto, outras propriedades do fluxo que estão relacionadas.

Várias técnicas foram desenvolvidas por Chiu e Murray (1992) para modelar a distribuição de velocidade, os coeficientes de momento e energia ao longo de um fluxo não uniforme de canal aberto sem ter que tratar com a forma geométrica das seções, as quais tendem ser extremamente complexas em canais naturais. A análise da distribuição de velocidade no domínio da probabilidade possibilitou calcular a velocidade média na seção transversal e os coeficientes de momento e energia. A função densidade de probabilidade que maximiza a entropia foi utilizada para estimar a área média da seção transversal. Métodos gráficos simples para estimar parâmetros do modelo também foram desenvolvidos para aplicações práticas no estudo de processos de transporte em canais abertos, sejam estes naturais ou artificiais, e que estão relacionados a distribuição de velocidade.

Chiu e Chairil (1995) desenvolveram uma técnica para estimar a vazão a partir do teor de informação composto pela velocidade máxima em uma seção transversal e sua relação com a velocidade média através do parâmetro de entropia  $M$ . Esta técnica foi considerada eficiente para estimar a vazão em rios e córregos, além disso os autores concluíram que o uso de um valor predeterminado e constante do parâmetro de entropia pode simplificar a estimativa da vazão.

A conclusão central desta pesquisa foi que uma seção pode estabelecer um estado de equilíbrio que corresponda ao parâmetro  $M$  que pode ser obtido de uma relação com as velocidades máxima e média.

Chiu e Tung (2002) concluíram, baseados em dados de campo, que a razão entre as velocidades média e máxima em uma seção transversal de um canal é estável e invariante com o tempo e a vazão, apresentando assim regularidades em canais que facilitam a medição de vazões e a execução de outras tarefas na engenharia hidráulica. Sob os conceitos de

probabilidade e de entropia, a razão entre as velocidades média e máxima sendo constante significa que a distribuição de probabilidade subjacente ao campo de velocidade é resiliente e que a mesma distribuição de probabilidade está governando vários fenômenos observáveis em uma seção de canal, explicando assim as regularidades nos fluxos de canal aberto. Os autores também formularam uma equação empírica que relaciona a localização do ponto de velocidade máxima com um parâmetro de entropia.

Oliveira *et al.* (2016) desenvolveram um método para determinar vazões em canais abertos utilizando algoritmos evolucionários multi-objetivos e medições de nível da superfície livre associadas a um modelo hidrodinâmico. O algoritmo apresentou excelentes resultados, obtendo coeficientes de Nash-Sutcliffe superiores a 0,99 tanto para a calibração como para validação do modelo. As vazões calculadas pelo modelo hidrodinâmico apresentaram uma variação de até 150% para um mesmo nível quando comparadas às vazões estimadas pela curva-chave, o que demonstrou que o uso da curva-chave para medição de vazão em regime variável apresenta erros elevados.

### **2.3 Hidrossedimentologia do Semiárido Brasileiro**

Hidrossedimentologia é o estudo dos processos dinâmicos relativos à água e aos sedimentos associados entre si na fase terrestre do ciclo hidrológico. Os principais focos deste estudo são: a perda de solos em regiões agrícolas, a produção de sedimentos em bacias hidrográficas e a retenção de sedimentos em reservatórios. Este último limita tanto a quantidade como a qualidade da água disponível para diversos usos, tornando relevantes as pesquisas que modelam os processos que envolvem água e sedimento (SANTOS, 2011)

O impacto das gotas de chuva sobre o solo desagrega partículas sólidas, empobrecendo o solo com a perda de nutrientes. Uma parte desta carga sólida é carregada pelo escoamento superficial, podendo alcançar os corpos d'água, como rios e açudes, reduzindo a disponibilidade hídrica. Portanto a compreensão da hidrossedimentologia é de fundamental importância para a gestão em recursos hídricos, sobretudo em regiões semiáridas, onde ocorrem frequentemente escassez hídrica. Vários estudos foram desenvolvidos para estimar tanto a perda de solo em lotes agrícolas (MACHADO *et al.*, 2017) e em bacias (COSTA *et al.*, 2020), assim como o assoreamento em reservatórios.

Santos *et al.* (2007) descreveram as perdas de água e solo em bacias experimentais localizadas nos municípios de Sumé e de São João do Cariri, ambas em região semi-árida no estado da Paraíba, Nordeste brasileiro. Os dados de lâmina escoada e produção de sedimentos

foram obtidos em parcelas com área de 100 m<sup>2</sup>. Os experimentos em Sumé constituíram-se de uma parcela com solo revolvido, duas desmatadas, uma com caatinga nativa, duas com cobertura morta, uma com palma cultivada morro abaixo e uma com palma cultivada em nível; já os experimentos em São João do Cariri constituíram-se de duas parcelas, das quais uma desmatada e outra com cobertura de vegetação rasteira num período de três anos e depois mantida desmatada.

Silva e Santos (2008) usaram um modelo hidrossedimentológico denominado Kinos, para estimar a produção de sedimentos na bacia do rio Pirapama, localizada no estado de Pernambuco. Os resultados foram acoplados a um SIG para a identificação dos principais locais em que o processo de erosão foi mais atuante. Com o uso do SIG, foi possível também identificar as principais áreas susceptíveis a processos erosivos. Concluiu-se com esta pesquisa que grande parte da bacia (área um pouco superior a 67 km<sup>2</sup>, mais de 11% da superfície total da bacia) é realmente susceptível à erosão, pois a taxa de produção de sedimentos alcançou o valor de 200 t.ha<sup>-1</sup>.ano<sup>-1</sup>, perfazendo o total de 653.079 toneladas. Os autores também observaram que o modelo é viável para bacias com área superior a 100 km<sup>2</sup>.

Medeiros (2009) avaliou com precisão o fluxo de sedimentos ao longo de trajetórias entre áreas potencialmente erosivas e em locais onde predominam processos de deposição na bacia hidrográfica do Benguê (área de 933km<sup>2</sup>) e na sub-bacia de Aiuaba (área de 12 km<sup>2</sup>). De forma a se avaliar o efeito da conectividade, que é o potencial de movimento de uma partícula no sistema, realizou-se uma simulação hidrossedimentológica utilizando-se o modelo WASA-SED. Na escala de bacia, o padrão espacial de conectividade mostrou-se fortemente relacionado a características hidráulicas do solo, enquanto que na escala de vertentes, características topográficas locais desempenharam um papel mais importante no transporte de sedimentos. Um teste mais rigoroso foi realizado com o uso da técnica de Césio-137 como traçador de erosão e deposição de sedimentos. A comparação entre valores medidos e simulados com o Césio em uma vertente representativa demonstrou boa correlação entre os valores.

Melo *et al.* (2009) avaliaram a produção de sedimentos em uma bacia hidrográfica no semi-árido do estado de Pernambuco. A microbacia estudada foi a do riacho Jacu, a qual apresenta uma área total de 61,9 hectares, localizada no município de Serra Talhada-PE e que apresenta características típicas das propriedades do semiárido brasileiro, sob caatinga e condições ambientais e tipo de manejo empregado na exploração agrícola. A produção de sedimentos na microbacia do riacho Jacu foi 4,319 t ha<sup>-1</sup> ano<sup>-1</sup>. Essa produção de sedimentos é reflexo das práticas agrícolas na área da bacia na forma da agricultura de sequeiro com a utilização das queimadas, sob a ação de chuvas concentradas, que provocam altos picos de

escoamento superficial (MOTA *et al.*, 2018).

Silva e Santos (2009) descreveram as perdas de água e solo na bacia experimental de São João do Cariri, localizada no semiárido da Paraíba, Brasil. Os dados de lâmina escoada e produção de sedimentos foram obtidos em duas parcelas de erosão de 100 m<sup>2</sup> com cobertura superficial diferenciada, sendo uma desmatada e outra com cobertura de vegetação rasteira num período de três anos e depois mantida desmatada, no período de 1999 a 2006. Os resultados obtidos mostraram que a erosão média na primeira parcela foi 3,4 t/ha, enquanto que na segunda foi 0,4 t/ha, mostrando a influência da cobertura vegetal sobre o processo erosivo no semiárido. Os resultados de erosão obtidos em São João do Cariri, mostram que a erosão média na primeira parcela foi 3,4 t/ha, enquanto que na segunda parcela foi 0,4 t/ha, mostrando a influência da cobertura vegetal sobre o processo erosivo no semiárido.

Lopes *et al.* (2011) estimaram a perda de solos em uma microbacia no semiárido do estado do Ceará, combinando as ferramentas do SIG (Sistemas de Informações Geográficas) com um modelo quantitativo baseado na USLE (Equação Universal de Perdas de Solos). Delimitou-se a microbacia e estimou-se a rede de drenagem com o Software ArcMap 9. Concluiu-se nesta pesquisa que em 74% da microbacia, a perda de solo apresentou valor inferior a 11 t.ha<sup>-1</sup>.ano<sup>-1</sup> em áreas mais planas e vegetadas e ainda que em mais de 90 % da área apresentou perda de solo inferior a 37 t.ha<sup>-1</sup>.ano<sup>-1</sup>. O relevo foi bastante influente nestes resultados, pois a microbacia apresenta relevo suave-ondulado em mais de 83% do total e além disso, a região apresenta baixa susceptibilidade à erosão (< 10 t.ha<sup>-1</sup>.ano<sup>-1</sup>). A utilização integrada de SIG e USLE permitiu a realização de uma análise rápida e dinâmica da área em estudo, além de apontar as áreas de maior vulnerabilidade ao processo de perda de solo dentro da Bacia.

Palácio *et al.* (2012) analisaram a influência da ação antrópica sobre as respostas hidrossedimentológicas em microbacia experimental de escoamento efêmero no semiárido cearense durante os anos de 2009 e 2010. A área de drenagem da microbacia estudada é de 2,8 hectares. No primeiro ano de estudo, a área foi mantida inalterada com vegetação de caatinga nativa e no ano seguinte foi aplicado um tratamento de uso do solo comum na região, que consta de supressão da vegetação, seguida de queimada e cultivo de gramínea *Andropogon gayanus* Kunt para a produção de pastagem. A estação chuvosa de 2009 apresentou um total precipitado de 1.063 mm, sendo que 23,1% da lâmina total precipitada foi convertido em escoamento superficial, resultando em uma produção de sedimentos de 730 kg por hectare. Em 2010, devido ao menor volume de precipitação (809 mm) a lâmina total escoada correspondeu a 13,9%, mas a produção de sedimentos foi maximizada, com valor total de 2.832 kg por hectare, sendo 72%

maior que a do ano anterior, demonstrando o efeito negativo do manejo aplicado.

Silva e Medeiros (2014) analisaram a variabilidade espacial e temporal do escoamento superficial e da produção de sedimentos usando o modelo hidrossedimentológico *Soil and Water Assessment Tool* (SWAT) em ambiente SIG. O estudo foi realizado na Bacia Experimental de São João do Cariri, localizada na porção semiárida do Estado da Paraíba, Brasil. Para a realização do trabalho foram utilizados dados climatológicos, chuva, escoamento superficial e produção de sedimentos diários para o período de 2004 a 2006, mapa de uso e ocupação do solo obtido a partir de imagens do satélite IKONOS, mapa digital de elevação com resolução espacial de 30 m e mapa dos tipos de solo da bacia. Os resultados obtidos demonstraram a eficácia do modelo para a análise da produção de sedimentos e vazão, obtendo-se valores de Coeficiente de Correlação Linear de Pearson ( $R^2$ ) de 0,84 e 0,88 e Coeficiente de Nash-Sutcliffe (COE) de -0,32 e 0,77 para produção de sedimentos e escoamento superficial, respectivamente. Conclui-se que o modelo SWAT acoplado ao SIG é uma ferramenta poderosa na análise do comportamento temporal e espacial dos processos hidrossedimentológicos.

Lopes *et al.* (2015) propuseram uma aplicação do modelo USLE associado ao SIG para estimar a distribuição espacial da erosão, bem como, quantificar o assoreamento no açude Marengo, localizado no município de Madalena, Ceará. A bacia hidrográfica possui uma área de 74,6 km<sup>2</sup>, sendo a capacidade de armazenamento do reservatório de 18,5 hm<sup>3</sup>. A distribuição da perda de solo em quase 70% da bacia do reservatório apresentou um valor moderado, sendo menor do que 50 t ha<sup>-1</sup> ano<sup>-1</sup>. A produção de sedimento média foi de 5,22 t ha<sup>-1</sup> ano<sup>-1</sup> e o volume assoreado médio anual foi da ordem de 0,028 hm<sup>3</sup> ano<sup>-1</sup>, resultando em uma taxa moderada de assoreamento da ordem de 0,15% ao ano. Verificou-se também que a curva cota- volume, medida a partir da batimetria, está próxima à curva estimada pelo modelo no mesmo período de tempo, mostrando a robustez conjunta da USLE com SIG na estimativa do assoreamento.

O uso e ocupação do solo associado a variabilidade climática em regiões semiáridas influenciam diretamente o regime hidrossedimentológico de pequenas bacias hidrográficas estritamente rurais. Para caracterizar uma situação climática futura, Siqueira *et al.* (2017) utilizaram anomalias médias de precipitação para o período de 2040-2069 projetadas por seis modelos climáticos do IPCC. Este trabalho visou diagnosticar o impacto de mudanças climáticas sobre a lâmina escoada e a produção de sedimentos em uma pequena bacia hidrográfica, utilizando ferramentas computacionais como a plataforma SegHidro e o modelo SWAT (*Soil and Water Assessment Tool*). Foi possível dessa forma identificar que haverá uma redução na precipitação e uma consequente redução na produção de sedimentos e escoamento superficial na área da bacia.

Gomes (2016) monitorou e modelou processos hidrossedimentológicos na Bacia Experimental do Vale do Curu, com área de 284,50 hectares, situada na zona rural do município de Pentecoste, região semiárida do estado de Ceará, na Fazenda Experimental da Universidade Federal do Ceará. Vertedores regulares, pluviômetros, um pluviógrafo, um tanque classe A e sensores de nível automáticos foram utilizados para monitorar os eventos de escoamentos na bacia. Para caracterização da cobertura vegetal e estimativa do Fator de Uso de Ocupação do Solo (Fator C) foram instaladas duas parcelas de Wischmeier na MEVC com cobertura de Caatinga, sendo uma com 40 anos de pousio (preservada) e outra com 8 anos de pousio (rala), compreendendo estes usos conjuntamente 93,30% da área da bacia experimental. Os valores do fator C estimados com base nas medições das demais variáveis da RUSLE foram 0,0061 para caatinga preservada e de 0,0126 para caatinga raleada, respectivamente. O modelo RUSLE, com suporte de ferramentas do SIG, foi usado para estimar a erosão da bacia, aplicando-se para as bacias aninhadas em um total de seis eventos de escoamento. As taxas médias de erosão foram de 0,95 ton.ha<sup>-1</sup> Na bacia experimental do Vale do Curú (BEVC) e de 0,11 ton.ha<sup>-1</sup> na microbacia experimental do Vale do Curú (MEVC), sendo estas medias em torno de 8 vezes maior de uma bacia pra outra. A produção de sedimento medida nas seções de controle das duas bacias revela que a MEVC possui uma maior razão de aporte de sedimento correspondendo a 26%, enquanto que a BEVC apenas 3,15%.

Nascimento *et al.* (2018) analisaram o escoamento superficial na bacia do alto do rio do peixe, situada no semiárido do estado da Paraíba, Brasil. Os autores deste trabalho usaram o modelo *Soil and Water Assessment Tool* (SWAT) para a simulação hidrológica, para isso, foram utilizados dados diários de temperatura, umidade, velocidade do vento da estação meteorológica de São Gonçalo e precipitação no período de 2002 a 2014. O período de calibração analisado foi de 2002 a 2010 e a validação de 2011 a 2014, usando dados mensais de vazão da estação fluviométrica de Antenor Navarro. Os resultados obtidos mostraram que as vazões observadas e calculadas foram de 4,7 m<sup>3</sup>/s e 5,8 m<sup>3</sup>/s, respectivamente. Os índices de desempenho da calibração foram considerados muito bons ( $R^2 = 0,82$  e  $NSE = 0,81$ ) demonstrando um bom ajuste entre os dados observados e os estimados, enquanto para a validação os resultados de  $R^2$  e  $NSE$  foram de 0,23 e 0,70, respectivamente.

Santos (2018) investigou a dinâmica hidrológica da umidade do solo, vegetação, balanço climatológico e índices climáticos em uma sub-bacia hidrográfica do Açude da Ingazeira, localizada na região semiárida de Pernambuco. A autora do trabalho calibrou um modelo hidrológico e analisou o balanço hídrico e a vazão da bacia hidrográfica do rio Ipanema com o modelo SWAT. Foram encontradas na pesquisa, diferenças entre as umidades em função



da cobertura vegetal e uma diminuição acentuada nos totais de precipitação registrados na bacia, no período de 2011 a 2017 juntamente com uma tendência de aumento das temperaturas e crescente aumento do índice de aridez, resultando na diminuição da umidade e aumento na evapotranspiração na área da bacia apresentando deficiência hídrica para a região. Assim, verificou-se que o monitoramento e o levantamento hidrológico forneceram uma ordem de grandeza da umidade do solo e suas correlações com os dados hidroclimáticos, contribuindo para melhor gestão de recursos hídricos na bacia hidrográfica do Rio Ipanema-PE. Mesmo verificando grandes limitações de medições experimentais na bacia do Ipanema, o modelo SWAT apresentou um ajuste aceitável para dados mensais, evidenciado por um NASH de 0,85 e um  $R_2$  de 0,88 na calibração. Embora os valores encontrados para o NASH e  $R_2$  sejam considerados aceitáveis, espera-se que com a continuidade das medições de campo, obtenha-se aprimoramento da ferramenta aqui disponibilizada.

#### **2.4 Modelagem do assoreamento de reservatórios**

Araújo (2003) propôs uma metodologia para estimar assoreamento em reservatórios do semiárido através de parâmetros topográficos, pluviométricos, pedológicos e de cobertura vegetal de bacias hidrográficas, gerando um modelo denominado HIDROSED. Nele estimou-se o transporte difuso de sedimentos pelos métodos de Maner, Roehl e Williams & Berndt. Para validar o modelo, foram analisadas sete bacias hidrográficas (seis rurais e uma urbana), todas localizadas no estado do Ceará e controladas por um reservatório. Após a aplicação do modelo, realizou-se campanha para medir tanto a redução do volume do reservatório que ocorreu no período entre a sua conclusão e a data de medição do controle, como a massa específica aparente do material assoreado, o que permitiu calcular a massa assoreada num período de 68 anos. A comparação dos valores medidos e simulados demonstrou que o modelo errou, em média, apenas 29%, quando a formulação de Maner (1958) foi utilizada. Ficou comprovada a pouca aplicabilidade das equações de Roehl (1962) e Williams e Berndt (1972) para as bacias estudadas. De acordo com os dados de campo, a taxa de assoreamento característica é de aproximadamente  $2,7 \text{ t.ha}^{-1}$ , o que corresponde à perda média de volume de 1,5% a cada década. Para o estado do Ceará isso significa uma perda aproximada de  $22 \text{ hm}^3$  por ano.

Mamede (2008; ver também Mamede *et al.*, 2018) desenvolveu um modelo de sedimentação de reservatório e o acoplou ao modelo WASA-SED, o qual simula processos de chuva-deflúvio e de transporte de sedimentos. O tal modelo consiste de duas abordagens, um

modelo detalhado pode ser aplicado para reservatórios com informações conhecidas como topografia, curvas cota-área-volume e propriedades físicas do sedimento depositado e um modelo simplificado para outros reservatórios que não contenha tais informações. O modelo detalhado avalia o padrão de deposição de sedimentos em reservatórios e a eficiência das técnicas de remoção de sedimento, além de simular o transporte de sedimentos ao longo do perfil longitudinal do reservatório, através de uma abordagem de transporte de sedimento não uniforme baseada no conceito de capacidade de transporte de sedimento. O modelo simplificado é adequado para simular a transferência de água e sedimento em redes densas de reservatório. Nesta abordagem, os reservatórios são classificados em pequenos e estratégicos de acordo com sua localização e tamanho. Os estratégicos são reservatórios médios ou grandes localizados em rios principais ou reservatórios de interesse particular. Os pequenos são localizados em rios tributários e representados no modelo em um modo que os agrega em grupos de acordo com sua capacidade de armazenamento.

Venâncio (2009) usou dados batimétricos, de vazão e de sedimentos, além de um programa computacional denominado Mike 21c para simular o assoreamento no reservatório represa velha, situado na bacia hidrográfica do Mogi Guaçu. A solução das equações hidrodinâmicas teve como condição de contorno a vazão constante em cada período da medição, na entrada do reservatório, e o nível constante da água, para cada dado de vazão, no canal de saída. A calibração do modelo numérico foi feita para os dados temporais de vazão, concentração de sedimentos e batimetrias do reservatório. Foram comparados dados medidos em campo com dados simulados pelo modelo. Concluiu-se que o modelo usado apresentou robustez, gerando resultados semelhantes aos observados em campo, porém as medidas reais de vazões produziram valores baixos de velocidade. Nesta condição, o modelo apresentou divergências devido à elevada deposição de sedimentos na entrada da malha do reservatório, o que não foi verificado nos dados de campo.

Vilela (2011) analisou a ocorrência de processos estuarinos sobre a plataforma e sua possível conexão com a localização das zonas de alta turbidez e de formação dos depósitos de lama fluida, através de dados medidos em campo, bem como de resultados de modelagem matemática hidrodinâmica. Entre os processos incluem-se a circulação gravitacional, devida ao gradiente horizontal de densidades; a diminuição da turbulência e mistura durante a vazante da maré; e fluxos residuais convergentes. A circulação gravitacional parece ser efetiva apenas durante as menores quadraturas do mês, com a baixa energia da maré favorecendo a estratificação vertical e o aparecimento de correntes residuais de enchente próximas ao fundo. Observa-se uma diminuição da turbulência durante a vazante, o que pode contribuir para a

retenção de sedimentos junto à foz. Porém, as análises realizadas sugerem que o principal mecanismo para a acumulação de sedimentos em suspensão está associado a fluxos residuais laterais, oriundos das zonas de recirculação geradas na presença dos bancos e de regiões rasas adjacentes aos canais mais profundos. Quanto à ação do vento, este atua intensificando esses fluxos residuais laterais e zonas de recirculação junto ao fundo

Costa (2012) analisou parâmetros utilizados para estimar taxas de assoreamento e identificou os impactos que exercem nos tempos de assoreamento dos reservatórios. Para tal, foram utilizados dados dos estudos realizados para os aproveitamentos hidrelétricos Itaocara, Teles Pires, Batalha e Ferreira Gomes. Os resultados obtidos mostraram que a escolha do método de obtenção dos parâmetros para eficiência de retenção e descarga sólida total foram os que mais afetaram os resultados finais. O peso específico não teve grande influência nos resultados. Concluiu-se que é fundamental, na fase de previsão, a realização de medições conjuntas e periódicas de vazão e descarga de sedimentos, para que os estudos sedimentológicos possam representar de forma satisfatória o que de fato irá acontecer nos reservatórios, antecipando possíveis problemas. Uma informação precisa nesta fase pode resultar em grande economia futura.

Ferreira (2012) avaliou o nível de sedimentação no Açude Saco I, localizado no município de Serra Talhada, Pernambuco, para estimar sua vida útil e servir de subsídio para medidas de prevenção. Os mapas de uso e cobertura do solo e de drenagem da bacia de contribuição foram elaborados com base no *Enhanced Vegetation Index* (EVI) das imagens produto do sensor Mapeador Temático do satélite Landsat-5, obtidas no site do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), de órbita 216 e ponto 66, processadas no software Erdas Imagine 9.1, validados em campo com a ajuda de pontos de GPS. A taxa de sedimentação e a datação do açude foram obtidas através da atividade do  $^{210}\text{Pb}$  pelo método de contagem  $\beta$  total, utilizando-se os modelos *Constant Initial Concentration* (CIC) e *Constant Rate of Supply* (CRS). O  $^{210}\text{Pb}$  estava presente em todas as amostras, em concentrações de atividade similares quando calculados pelos modelos CIC e CRS, no entanto, considerando que este açude recebe contribuições de alguns cursos d'água, o modelo CRS apresentou-se como o mais adequado. Para a determinação da taxa de sedimentação e das idades dos sedimentos foi observado que a taxa de sedimentação cresceu com o aumento da profundidade e houve um declínio da taxa de sedimentação e do fluxo dos sedimentos no decorrer do tempo. Para determinar a vida útil do reservatório foram estimadas as cotas dentro do canal, com curvas de nível a cada 1m, geradas a partir da imagem do SRTM, adquirida junto ao site da Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuárias - EMBRAPA (2005). A partir do ponto zero dentro do

canal no reservatório, com curva de nível na cota 473m até a curva de nível, localizada junto à linha d'água do açude, com cota 489m, obteve-se uma diferença máxima de nível em 16m. Levando-se em conta que a taxa de sedimentação no açude variou de 0,01cm/a a 0,23 cm/a, determinou-se a vida útil para o reservatório entre 160.000 a 7.000 anos, respectivamente, dependendo da taxa de sedimentação considerada.

Cortez (2013) avaliou o desempenho de metodologias empíricas ou semiempíricas e verificou a viabilidade de aplicação de modelos matemáticos face à má qualidade e reduzida quantidade de dados de entrada, comparando modelagens matemáticas mais finas e o método empírico, simplificado, de redução de área de Borland e Miller. Para tanto, foram empregadas degradações dos dados de entrada na criação de cenários objetivando a verificação dos desempenhos dos modelos empregados face aos dados medidos em campo. A análise de sensibilidade dos resultados obtidos a partir da degradação dos dados de entrada e a influência de cada parâmetro foi realizada a partir da comparação dos cenários empreendidos nos estudos e os volumes medidos a partir das campanhas batimétricas. Para cada cenário foram calculados os volumes de sedimentos retidos pelo reservatório a partir do emprego dos modelos matemáticos disponíveis no software HEC-RAS e do método de redução de área de Borland e Miller. Os resultados obtidos através da aplicação dos modelos matemáticos mostram que a modelagem unidimensional do transporte de sedimentos é menos sensível aos dados de granulometria que o método de redução de área de Borland e Miller para a determinação dos volumes retidos pelo reservatório. Por outro lado, a elaboração de uma curva-chave de sedimentos consistente demonstra-se imprescindível para a determinação dos volumes depositados por ambas as metodologias empregadas.

Estigoni (2016) identificou os mecanismos de como a variabilidade hidrológica influencia a previsão do assoreamento de reservatórios por meio de casos idealizados e validação das hipóteses em estudo de caso, um fluxograma de atividades foi proposto para a prever o assoreamento e que seja capaz de reduzir incertezas inerentes a estes estudos, pautado na modelagem hidrodinâmica de transporte de sedimentos, ferramentas de hidrologia estatística e uso de múltiplos cenários, o procedimento metodológico para redução de incertezas na previsão do assoreamento de Reservatórios (PRIPAR – NH). Identificou-se que: séries de vazões com maior variabilidade resultam em um aporte de sedimento maior quando comparado à somatório de seu valor médio, e quanto maior a variabilidade maior o aporte resultante; séries com mesmo aporte de sedimentos e maior parte nos primeiros anos do reservatório resultam em assoreamento mais rápido devido a relativa alta Eficiência de Retenção de sedimentos nos primeiros anos e sua redução com a evolução do assoreamento; e, comprovou-se que modelos

estocásticos para geração de séries sintéticas produzirão séries ligeiramente diferentes caso aplicados mais de uma vez, mesmo quando utilizando parâmetros de calibração iguais, causando significativa diferença na previsão do assoreamento. O PRIPAR – NH foi aplicado no estudo de caso da Pequena Central Hidrelétrica (PCH) Mogi-Guaçu. Os 50 cenários analisados suportam a hipótese, apresentando amplitude de 12,4 % do volume assoreado calculado, com média de 48,1 % de seu volume em 50 anos.

Ribeiro (2017) simulou o transporte de sedimentos e assoreamento no reservatório da usina hidrelétrica Eliezer Batista, localizado no estado de Minas Gerais, através de um modelo numérico unidimensional. Para a simulação foi utilizado o *software* HEC-RAS versão 4.1.0 do *U.S. Corps of Engineers* (EUA). O *software* apresenta uma estrutura simples, porém existe uma carência de insumos nacionais que auxiliam sua aplicação em transporte de sedimentos. Os resultados gerados a partir do HEC-RAS foram comparados com os valores de batimetria realizados nos anos de 2008 e 2011, chegando-se a resultados relativamente próximos entre eles, com ocorrência de assoreamento nas seções localizadas a montante do reservatório, porém para uma análise mais sofisticada pode-se fazer um refinamento melhor dos dados, além de estudos comparativos entre as variáveis que envolvem o transporte e a deposição de sedimentos.

Teixeira (2019) desenvolveu um método estocástico e avaliou o seu desempenho na estimativa do assoreamento em reservatórios através de dados hidrossedimentológicos e topográficos da PCH Salto do Paraopeba, que foi construída em 1956, sendo que o reservatório se encontrava intensamente assoreado, o que o tornou inoperante. Na Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) há um modelo reduzido do reservatório dessa PCH, sendo que o resultado de assoreamento observado nesse modelo foi utilizado para validar o método estocástico. Obtiveram-se os dados de vazões e concentrações de sedimentos em suspensão da PCH, os quais foram convertidos para a realidade do modelo reduzido, de acordo com as escalas de semelhanças hidráulicas. A partir desses dados, foram geradas estocasticamente milhares de séries sintéticas, utilizando o *software* estatístico R e o modelo AR(1). Os dados gerados foram introduzidos no HEC-RAS para estimar o assoreamento no modelo reduzido da PCH. Para isso, foi desenvolvido um código computacional que permite o acoplamento automático do modelo estocástico com o determinístico. O resultado obtido via simulação estocástica foi comparado com o assoreamento medido no modelo físico, observando-se que o assoreamento real, para os dois períodos analisados (2008-2012 e 2013-2017), sempre esteve entre o 1º e 3º quartil de probabilidade do resultado estocástico, ou seja, ao se ordenar de forma crescente os resultados gerados estocasticamente, tem-se que o assoreamento real sempre foi maior que 25%

dos assoreamentos gerados e menor que 75% deles. Assim, tem-se que o método estocástico pode auxiliar em projetos futuros de estimativa de assoreamento em reservatórios, visto que ele permite a obtenção das probabilidades de alturas assoreadas em seções de interesse.

## 2.5 Ressuspensão de sedimentos

Mazuqui e Ramos (1999) consideraram efeitos de adensamento para estudar a ressuspensão de sedimentos na faixa granulométrica dos siltes. Os pesquisadores levaram em conta quatro situações: transporte em suspensão horizontal, suspensão horizontalmente estacionária com alta densidade, leito fracamente consolidado e leito fortemente consolidado. Para avaliar a ressuspensão de sedimentos coesivos, os autores usaram o conceito de razão de erosão, ou seja, a massa de sedimento erodido por unidade de tempo e de área. Esta razão depende, inclusive, do excesso da tensão em relação à de início de erosão. As conclusões deste trabalho foram: a equação proposta na pesquisa e que relaciona a taxa de erosão com a tensão de cisalhamento, adequou melhor aos dados experimentais do que a equação de Parchure e Mehta retirada da literatura; Não houve diferença significativa nos resultados nos ensaios com os leitos fracamente e fortemente consolidados; Notou-se que a taxa de ressuspensão foi reduzida pelo aumento da coesão interna, pelo menos nos primeiros ensaios, quando o leito foi secado previamente; e por fim a partir de estudos do reservatório de Pirapora, inferiu-se que afloramentos de sedimentos reuzem processos de ressuspensão.

Lee *et al.* (2007) desenvolveram e aplicaram um modelo bidimensional de transporte de sedimentos capaz de simular a suspensão de sedimentos mistos (coesivo e não coesivo), para simular quantitativamente os eventos de ressuspensão ocorridos em março de 1998 no sul do Lago Michigan. Algumas características do modelo são: a capacidade de incorporar várias classes de tamanho de flocos, uma fórmula de velocidade de sedimentação com base física, blindagem do leito e limitação da disponibilidade de sedimentos. Parâmetros importantes de ressuspensão foram estimados a partir de dados de medição de campo e laboratório. O modelo reproduziu a ressuspensão (observada pelos instrumentos de campo e satélite SeaWiFS) e mediu a distribuição da taxa de sedimentação (usando técnicas de rádio-traçador). Os resultados do modelo foram verificados com medidas de campo da concentração de sedimentos em suspensão e do fluxo de sedimentação. Tanto as condições de onda quanto as propriedades do sedimento (tensão crítica de cisalhamento, fração fina do sedimento e disponibilidade ou fonte limitada de sedimentos) são os fatores críticos que determinam a distribuição da concentração e a largura da pluma de ressuspensão. O padrão de sedimentação

modelado mostra um acúmulo preferencial de sedimentos no lado leste do lago, o que concorda com o padrão de sedimentação observado, apesar da predominância de fontes de partículas na costa oeste. Os principais mecanismos físicos que determinam o padrão de sedimentação são: os dois giros de circulação em rotação contrária que produzem o transporte de mastro marítimo ao longo da costa sudeste durante o vento norte e a velocidade de sedimentação dos flocos de sedimentos que controlam o local de deposição.

Souza (2010) abordou a importância, o estado da arte e aplicações de estudos sobre o movimento incipiente de sedimentos não-coesivos em escoamentos com superfície livre. Dois tipos de aplicações são considerados: (i) análise num trecho limitado do rio Ivaí, Estado do Paraná, durante um ciclo hidrológico, e (ii) análise num período de tempo limitado, ao longo do rio Iguaçu, Estado do Rio de Janeiro; do comportamento dos sedimentos de seus leitos móveis. Com esses exemplos, comparam-se, de forma original, a dinâmica dos sedimentos de leitos naturais não-homogêneos de rios, com a dinâmica dos sedimentos de leitos homogêneos sujeitos às mesmas condições hidrodinâmicas. Foram adotados critérios tradicionais como de Shields, e critérios contemporâneos como de Van Rijn, Paphitis, e de Beheshti e Ataie-Ashtiani, que utilizaram novos parâmetros adimensionais para descrever o início do movimento dos sedimentos. Além da tensão normalizada de atrito utilizada por Shields, foram considerados o número de mobilidade e o diâmetro adimensional do grão. Da análise original dos dados, concluiu-se que a metodologia desenvolvida é adequada para o estudo do movimento incipiente de sedimentos não-coesivos em escoamentos com superfície livre. Ela permitiu descrever o comportamento temporal do leito móvel do Rio Ivaí, e longitudinal de um trecho do Rio Iguaçu, considerando-se as interferências naturais e antrópicas vigentes em suas bacias hidrográficas.

Son e Hsu (2011) investigaram como os modelos de floculação com diferentes graus de complexidade e de erodibilidade do leito podem afetar a ressuspensão coesa resultante de sedimentos impulsionada por fluxos de maré. Um modelo numérico vertical unidimensional para transporte de sedimentos foi revisado nesta pesquisa para incorporar módulos para floculação e erodibilidade do leito. Os resultados do modelo são comparados com os dados medidos no estuário de Ems / Dollard. O estudo do modelo sugere que é importante incorporar uma variável tensão de cisalhamento crítica, a fim de modelar adequadamente o suprimento de sedimentos do leito. Quando a floculação é negligenciada ou incorporada de maneira incompleta, o modelo numérico prediz uma concentração de sedimentos quase nula durante um fluxo lento e um gradiente de concentração muito íngreme, que são inconsistentes com os dados observados. Quando a dimensão da fratura e a resistência ao escoamento do floco são consideradas variáveis, o modelo numérico prevê uma velocidade de sedimentação muito menor

e, portanto, captura a condição mais bem misturada consistente com as observações de campo.

Zahraeifard e Deng (2012) desenvolveram um modelo, denominado VART-DOS, para simular o transporte de oxigênio dissolvido, as trocas de oxigênio nas interfaces entre água e sedimento e entre ar e água e a variação dos níveis de oxigênio dissolvido em resposta à ressuspensão de sedimentos. O efeito da ressuspensão é descrito pela introdução de um termo como produto da concentração de oxigênio dissolvido por uma taxa de ressuspensão de sedimentos. Baseado em uma análise de sensibilidade, efeitos das demandas bioquímica de oxigênio e de oxigênio pelo sedimento sobre o consumo de oxigênio dissolvido não são tão importantes quando comparado à ressuspensão de sedimentos, a qual pode causar uma redução de até 83% no nível de oxigênio dissolvido durante intensos fluxos. O modelo VART-DOS foi aplicado ao rio *Lower Amite* no estado da Louisiana, Estados Unidos, para simular flutuações dos níveis de oxigênio dissolvido no período de inverno (janeiro) e no período de verão (julho) envolvendo vários eventos de ressuspensão de sedimentos. Os resultados da simulação indicaram que o modelo foi capaz de identificar tendências na variação de concentração de oxigênio dissolvido. A raiz do erro quadrático médio entre os valores simulados e observados foi de 42% para janeiro e 23% para julho, demonstrando a eficiência do modelo VART-DOS.

Brito Júnior (2015) avaliou o comportamento da concentração de sólidos em suspensão na lagoa Mangueira, localizada no estado do Rio Grande do Sul, através do uso de modelo matemático que representa os fluxos de ressuspensão desses sedimentos em diferentes episódios de ventos medidos na lagoa. Uma formulação de ressuspensão que considera as tensões cisalhantes aplicadas e as características físicas dos sedimentos foi implementada no modelo ecológico IPH-ECO. A dinâmica dos sólidos em suspensão da lagoa foi bem representada pelos resultados simulados. Na comparação das concentrações medidas com os resultados simulados, as medianas foram bem representadas. Na análise das distribuições espaciais, os fluxos de ressuspensão foram predominantemente mais intensos na porção oeste da lagoa, devido à predominância de ventos que incidem nesta região.



### 3 DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADE EM CANAIS ABERTOS

#### 3.1 Introdução

Um sistema físico pode ser caracterizado por um grande número de elementos os quais são influenciados por leis específicas responsáveis não apenas por governá-los, mas também por suas interações. Modelos probabilísticos são desenvolvidos para explicar estes processos físicos, para os quais pode-se atribuir probabilidade de ocorrência de eventos, considerando que cada estado do sistema tem um nível de incerteza. Uma modelagem probabilística bem executada tende a elevar sua capacidade de representar a realidade por considerar as incertezas intrínsecas aos processos, as quais surgem de diversas fontes tais como aleatoriedade natural, imprecisão nas medições de dados, parametrização imperfeita da estrutura do modelo, entre outras (GUPTA; GOVINDARAJU, 2019). Muitos problemas relacionados à água demandam uma abordagem probabilística devido à quantidade considerável de incerteza envolvida (MISHRA, 2009), por exemplo, ocorrência de chuvas (MÉLÈSE; BLANCHET; MOLINIÉ, 2018); fluxo de sedimento em bacias (SHRESTHA *et al.*, 2016), e hidráulica (TAPOGLU *et al.*, 2019).

Shannon (1948) investigou a relação entre conteúdo de informação e medidas de incerteza, propondo uma quantificação da incerteza, a tão conhecida entropia informacional de Shannon, ou simplesmente entropia de Shannon. Jaynes (1957a,b) formulou fisicamente o princípio da máxima entropia (PME) usando a entropia de Shannon, a qual maximiza incerteza sob dadas restrições e, assim, evita o uso de hipóteses não comprovadas. Como um resultado, a função densidade de probabilidade associada a um processo natural pode ser obtida pela maximização da função entropia restrita através do cálculo variacional e do método dos multiplicadores de Lagrange.

A função densidade obtida pelo PME pode ser resolvida analiticamente quando um máximo de duas restrições são usadas. No entanto quando há três ou mais restrições, surge uma integral que tem apenas solução numérica, gerando um relativo alto esforço computacional. Portanto, o princípio da máxima entropia (SHANNON, 1948; JAYNES, 1957a, b; SHORE; JOHNSON, 1980) fornece uma abordagem adequada para introdução de probabilidade em problemas hidrodinâmicos complexos tais como modelagem de campo de velocidade em canais abertos. Este princípio tem sido aplicado com sucesso em vários campos de hidráulica e engenharia ambiental (HARMANCIOGLU; SINGH, 1998; SINGH, 2013, 2014; ARDICLIOGLU *et al.*, 2005). Outras pesquisas baseadas no PME produziu resultados encorajadores em áreas tais como recursos hídricos (CHENG *et al.*, 2019); avaliação de vazões em rios (CHIU *et al.*, 2005; ALVISI

*et al.*, 2014); produção de sedimentos (CHIU; HSIUNG, 1981; ARAÚJO, 2007); umidade do solo (AL-HAMDAN; CRUISE, 2010); morfologia de rios (MORAMARCO *et al.*, 2013); e hidrodinâmica de canais abertos (CHIU, 1987, 1988, 1989 e 1991, CHIU; TUNG, 2005, BARBÉ *et al.* 1991; CHIU; MURRAY, 1992; CHIU; SAID, 1995; ARAÚJO; CHAUDHRY, 1998; LUO; SINGH, 2011; SINGH *et al.*, 2013; JIANG *et al.*, 2016; GRECO; MARTINO, 2018; MIRAUDA; RUSSO, 2019), para citar apenas alguns exemplos.

O objetivo deste capítulo foi, então, avaliar o conflito da escolha entre o número de restrições e a força da formulação primária sobre o desempenho de modelos hidrodinâmicos baseados na entropia usando dados de laboratório para validação. Para este propósito, as seguintes questões foram analisadas:

- (i) o desempenho do modelo melhora quando duas restrições são usadas ao invés de uma?
- (ii) há uma melhora no desempenho do modelo quando uma terceira restrição é introduzida? Considerando que sua solução é numérica, ou seja, não analítica.
- (iii) é melhor usar um modelo com duas restrições e formulação forte ou um modelo com três restrições e formulação fraca?

### 3.2 Metodologia

Nós investigamos o desempenho de seis modelos de entropia projetados para simular campo de velocidade em canal aberto. As velocidades simuladas foram comparadas com dados medidos com precisão no laboratório Thomas Blench, na Universidade de Alberta, Canadá. As velocidades foram medidas usando um anemômetro Laser-Doppler 3D. No nosso caso, três dos modelos investigados tem uma formulação primária fraca, ou seja, elas assumem que as isotáquias podem ser bem representadas por coordenadas cartesianas; enquanto os três modelos restantes têm uma formulação forte, de acordo com a qual as isotáquias são melhor representadas por coordenadas curvilíneas. Neste trabalho, os dados foram extraídos de três experimentos realizados por Steffler *et al.* (1983): Experimento 1 (aqui denominado SRP1), experimento 2 (SRP2), e experimento 3 (SRP3). As características principais destes experimentos estão apresentadas na Tabela 1. O desempenho dos modelos foi avaliado usando o coeficiente Nash-Sutcliffe (NSE: NASH; SUTCLIFFE, 1970) e a raiz do erro quadrático médio (RMSE).

A tabela 1 exhibe dados que são utilizados como informações para o cálculo dos multiplicadores de Lagrange, que são essenciais para as equações que simulam as velocidades de

fluxo em canais abertos. Cada linha refere-se a um experimento que serviu como base de dados para validação do modelo.

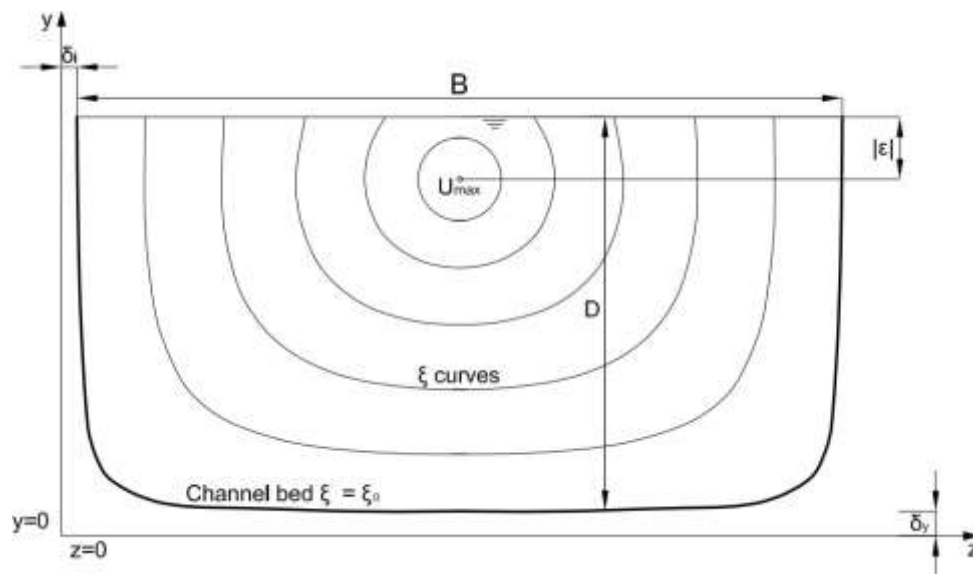
Tabela 1 - Parâmetros dos experimentos (Exper.), denominados SRP1, SRP2 e SRP3 de Steffler *et al.* (1983). Símbolos:  $n$  = número de pontos medidos;  $n$  vert = número de perfis verticais medidos;  $Q$  = vazão;  $D$  = profundidade do fluxo;  $B$  = largura da calha;  $A$  = área molhada;  $U_m$  = velocidade média;  $U_{m\acute{a}x}$  = Velocidade máxima entre todas as medidas;  $\epsilon$  = profundidade da velocidade máxima.

Exper.	$n$	$n$ .vert	$Q$ (m <sup>3</sup> /s)	$D$ (m)	$B$ (m)	$B/D$	$A$ (m <sup>2</sup> )	$U_m$ (m/s)	$U_{m\acute{a}x}$ (m/s)	$\epsilon$ (m)
SRP1	526	10	0,126	0,146	1,143	7,8	0,167	0,755	0,844	0,000
SRP2	663	16	0,126	0,225	1,143	5,1	0,257	0,490	0,530	0,000
SRP3	541	16	0,032	0,093	1,143	12,3	0,106	0,301	0,372	0,000
Total	1730	42								

Fonte: Steffler *et al* (1983).

A Figura 1 ilustra uma seção transversal de um canal aberto e curvas denominadas isotáquias. O ponto onde ocorre a velocidade máxima é indicado na ilustração, além dos eixos ortogonais e as dimensões do canal.

Figura 1 - Sistema de coordenada curvilínea baseado em Chiu e Chiou (1986)



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Os seis modelos de entropia são divididos em dois grupos: Três modelos admitem o sistema de coordenadas cartesianas (formulação primária fraca), enquanto as outras três admitem o sistema de coordenadas curvilíneas, como descrito em Chiu e Chiou (1986) (Figura 1). Para cada formulação, nós usamos um modelo com uma, duas ou três restrições para maximizar a função entropia  $H$  (Equação 1), na qual  $u$  representa a velocidade longitudinal;  $p(u)$  é a função densidade de probabilidade; e  $U_{m\acute{a}x}$  é a velocidade máxima na seção transversal.

$$H(u) = \int_0^{u_{max}} p(u) \cdot \ln[p(u)] du \quad (1)$$

### 3.2.1 Modelos com a formulação primária fraca

#### Modelo Uly - Uma restrição e coordenadas cartesianas

O Modelo Uly é baseado em Chiu (1987), que propôs a formulação primária (Equação 2), de acordo com a qual  $F(u)$  é a probabilidade da velocidade longitudinal ser menor do que ou igual a  $u$  no ponto localizado a uma distância  $y$  do leito do canal. Na Equação 2,  $D$  é a profundidade do fluxo no canal. A formulação é baseada na hipótese de que a velocidade longitudinal cresce de zero no leito a um valor máximo na superfície da água, isto é, a imersão do ponto de velocidade máxima na água é nula em todo domínio., em desacordo com a literatura (Ardiclioglu *et al.*, 2005; Mirauda e Russo, 2019). Além disso, também se assume que as isotáquias são horizontais, contrastando com dados de laboratório (STEFFLERR *et al.*, 1983; ARAÚJO; CHAUDHRY, 1998) e medições de campo.

$$F(u) = \frac{y}{D} \quad (2)$$

–Ao aplicar a regra da cadeia para derivar a função  $F$  em (2), em relação a  $u$ , obtemos uma função densidade de probabilidade  $p(u)$  (Equação 3):

$$p(u) = F'(u) = \frac{dF}{dy} \frac{dy}{du} = \frac{1}{D} \frac{dy}{du} \quad (3)$$

A primeira restrição (propriedade fundamental da probabilidade) é apresentada na Equação 4, onde  $U_{max}$  é a velocidade máxima. Ela significa que a integral da função densidade de probabilidade  $p(u)$  sobre todo o domínio é igual a um.

Nós maximizamos a função entropia  $H$ , Equação 1, sujeita a uma restrição (Equação 4) e aplicamos o resultado em conjunto com a Equação 3, gerando a distribuição de velocidade (Equação 5), em que  $\lambda_1$  é o parâmetro de Lagrange, calculado através Equação 6.

$$\int_0^{u_{max}} p(u) du = 1 \quad (4)$$

$$u(y) = e^{\lambda_1 - 1} \frac{y}{D} = u_{max} \frac{y}{D} \quad (5)$$

$$\lambda_1 = 1 + \text{Ln}\left(\frac{1}{u_{max}}\right) \quad (6)$$

### **Modelo U2y - duas restrições e coordenadas cartesianas**

O modelo U2y usa a mesma premissa fraca do modelo U1y (Equação 2). A função entropia (Equação 1) foi maximizada por Chiu (1987), usando duas restrições: Equações 4 e 7. A última representa o princípio da conservação de massa e indica que o lado esquerdo da integral é igual a velocidade média  $\bar{u}$ . Como um resultado, o método produz a distribuição de velocidade Equação 8, cujos parâmetros  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  e M podem ser estimados usando as velocidades máxima e média (Equações 9 e 10: Chiu, 1987).

$$\int_0^{u_{max}} u \cdot p(u) du = \bar{u} \quad (7)$$

$$u(y) = \frac{1}{\lambda_3} \text{Ln}\left(1 + \frac{\lambda_3}{e^{\lambda_2 - 1} D} y\right) \quad (8)$$

$$\bar{u} = \frac{u_{max} \cdot e^M - \frac{e^M}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_3}}{e^M - 1} \quad (9)$$

$$M = \lambda_3 \cdot U_{max} \quad (10)$$

### **Modelo U3y - três restrições e coordenadas cartesianas**

O modelo U3y, gerado de Barbé *et al.* (1991), admite a mesma premissa dos modelos anteriores (Equação 2) e três restrições: Equações 4, 7 e 11. A terceira restrição representa o princípio da conservação do momento (Equação 11), na qual  $\beta$  é o coeficiente de Boussinesq (Equação 12) e  $\rho$  é a massa específica da água. O sistema gerado pela maximização da função entropia (Equação 1) para três restrições não pode ser resolvido por métodos analíticos; portanto, os autores usam uma abordagem numérica, a qual produz o campo de velocidade aproximado (Equações 14 e 15). Os parâmetros  $\lambda_4$ ,  $\lambda_5$  e  $\lambda_6$  podem ser obtidos usando o coeficiente de Boussinesq, a velocidade máxima e a velocidade média do fluxo, como mostrado em Barbé *et al.* (1991).

$$\int_0^{U_{max}} u^2 \cdot p(u) \cdot du = \beta \cdot \bar{u} \quad (11)$$

$$\beta(u_{av})^2 = \frac{M}{\rho D} \quad (12)$$

$$M = \lambda_5 \cdot U_{\max} \quad (13)$$

$$e^{\lambda_4 - 1} \{ e^{u \cdot \lambda_5} + \lambda_6 [G(u)] \} = \lambda_5 \left[ \frac{y}{D} + e^{\lambda_4 - 1} \left( \frac{1}{\lambda_5} + \frac{2\lambda_6}{\lambda_5^3} \right) \right] \quad (14)$$

$$G(u) = e^{u \lambda_5} \left( u^2 - \frac{2u}{\lambda_5} + \frac{2}{\lambda_5^2} \right) \quad (15)$$

### 3.2.2 Modelos com formulação primária forte

A formulação forte admite que a velocidade longitudinal está diretamente associada com as coordenadas curvilíneas, mais do que com as cartesianas (CHIU; CHIOU, 1986); e que as isotáquias podem ser representadas pelas coordenadas  $\xi$  (Equações 16, 17 e 18), como proposto por Chiu (1986; CHIU; CHIOU, 1986). A isotáquia ( $\xi$ ), os parâmetros de forma ( $\delta y$ ,  $\epsilon$ ) e as variáveis ( $y, z$ ) são definidos na Figura 1. O parâmetro  $\beta_i$  caracteriza a distribuição de velocidade do fluxo primário.

$$\xi = Y \cdot (1 - Z)^{\beta_i} \cdot e^{(\beta_i \cdot Z - Y + 1)} \quad (16)$$

$$Y = \frac{y + \delta y}{D + \delta y + \epsilon} \quad (17)$$

$$Z = \frac{|z|}{\frac{B}{2} + \delta_i} \quad (18)$$

#### **Modelo U1 $\xi$ - Uma restrição e coordenadas curvilíneas**

O modelo U1 $\xi$  é baseado em Chiu (1988), que propôs a premissa primária forte (Equação 19), de acordo com a qual  $F(u)$  está diretamente associada com a distribuição espacial, a isotáquia ( $\xi$ ), cujos parâmetros chave são  $\xi_{\max}$  e  $\xi_0$ , respectivamente, os valores máximo e mínimo de  $\xi$  do fluxo de canal aberto. Nós maximizamos a função entropia  $H$  (Equação 1) sujeita a uma restrição (Equação 4), a mesma do modelo U1 $y$ . O resultado é aplicado em conjunto com a Equação 19, produzindo a distribuição de velocidade (Equação 20), em que  $\lambda_7$

é o parâmetro de Lagrange, calculado pela Equação 21.

$$F(u) = \frac{\xi - \xi_0}{\xi_{max} - \xi_0} \quad (19)$$

$$u(\xi) = e^{1-\lambda_7} \frac{\xi - \xi_0}{\xi_{max} - \xi_0} \quad (20)$$

$$\lambda_7 = 1 - \text{Ln}(u_{max}) \quad (21)$$

### **Modelo U2ξ – duas restrições e coordenadas curvilíneas.**

O modelo U2 ξ, desenvolvido por Chiu (1988), usa coordenadas curvilíneas (Equações 16,17 e 18), a Equação 19 como formulação primária, e duas restrições: Equações 4 e 7, as mesmas do modelo U2y, resultando na Equação 22. Os parâmetros λ<sub>8</sub> e λ<sub>9</sub> são calculados de uma forma análoga ao do modelo U2y (CHIU, 1988).

$$u(\xi) = \frac{1}{\lambda_8} \text{Ln}\left[1 + \frac{\lambda_9}{e^{\lambda_8-1}} \frac{\xi - \xi_0}{\xi_{max} - \xi_0}\right] \quad (22)$$

### **Modelo U3ξ – três restrições e coordenadas curvilíneas.**

Nós propusemos o modelo U3ξ usando coordenadas curvilíneas (Equações 16, 17 e 18), a formulação forte (Equação 19), e três restrições, (Equações 4,7 e 11) como no modelo U3y: Barbé *et al* (1991), mas substituindo a razão  $\frac{y}{D}$  por  $\frac{\xi - \xi_0}{\xi_{max} - \xi_0}$ .

O modelo u3ξ para campo de velocidade em canais abertos consiste em resolver as Equações 23 e 24. Os parâmetros λ<sub>10</sub>, λ<sub>11</sub>, e λ<sub>12</sub> são calculados analogamente ao modelo U3y, usando o coeficiente de Boussinesq, a velocidade máxima e a velocidade média do fluxo, como demonstrado em Barbé *et al.* (1991).

$$e^{\lambda_{10}-1} \{e^{u\lambda_{11}} + \lambda_{12}[W(u)]\} = \lambda_{11} \left[ \left( \frac{\xi - \xi_0}{\xi_{max} - \xi_0} \right) + e^{\lambda_{10}-1} \left( \frac{1}{\lambda_{11}} + \frac{2\lambda_{12}}{\lambda_{11}^3} \right) \right] \quad (23)$$

$$W(u) = e^{u\lambda_{11}} \left( u^2 - \frac{2u}{\lambda_{11}} + \frac{2}{\lambda_{11}^2} \right) \quad (24)$$

### 3.3 Resultados e discussão

A Tabela 2 e as Figuras 2 a 7 apresentam o desempenho dos seis modelos de entropia aplicados aos três conjuntos de dados experimentais de laboratório com laser Doppler. A formulação primária fraca (Equação 2) é baseada na hipótese de que a velocidade longitudinal cresce monotonicamente de zero no leito para um valor máximo na superfície da água, ou seja, a distância entre o ponto de velocidade máxima e a superfície d'água é nula em todo o domínio, em desacordo com a literatura. (ARDICLIOGLU *et al.*, 2005; MIRAUDA; RUSSO, 2019).

Além disso, também é assumido que as isotáquias são horizontais, contrastando com as medições de laboratório (STEFFLE *et al.*, 1983; ARAÚJO; CHAUDHRY, 1998) e de campo (AHMADI; MAGHREBI, 2019). Com relação às formulações de entropia com coordenadas cartesianas, pode-se dizer que o modelo U1y teve um desempenho ruim, com coeficientes de Nash-Sutcliffe (NSE) negativos para todos os perfis verticais e com erros (RMSE) de até 46%.

A fim de investigar se é melhor usar um modelo com três restrições com uma formulação primária fraca, ou um modelo com duas restrições (equações 4 e 7) e formulação primária forte, a melhoria marginal do modelo U2y foi comparado com os modelos U3y e U2ξ, respectivamente. Os resultados mostram que a terceira restrição (equação 11) tem a desvantagem de exigir uma solução numérica, a qual aumenta o esforço computacional e piora a precisão dos resultados; enquanto a combinação de um sistema de solução analítica (duas restrições) com uma formulação forte produz um modelo de alto desempenho.

De fato, o modelo U2ξ tem um valor mediano de NSE de +0,77 contra +0,32 do modelo U3y, enquanto a mediana do erro do modelo U3y (9%) é mais do que o dobro do modelo U2ξ (4%). Quando se usa o teste estatístico t-Student (5% significância) para comparar os coeficientes NSE de U2y e U3y, ele mostra que ambos os modelos são estatisticamente iguais, ou seja, a simples adição da terceira restrição, no caso a equação 11, não aprimorou o modelo.

Em contraste, quando nós aplicamos o teste t para comparar U2y e U2ξ, os resultados indicam que eles são estatisticamente diferentes, com clara superioridade do último: mediana de NSE melhora de +0,51 para +0,77 e a média do NSE cresce de -2,31 para +0,66. As Figuras 8 e 9 fornecem uma síntese do desempenho dos modelos, considerando apenas o número de restrições. Modelos com apenas uma restrição tiveram desempenho abaixo daqueles com duas ou três restrições (NSE negativos e elevados RMSE). É notório que, apesar da similaridade dos resultados dos modelos U2 e U3, o desempenho dos modelos U2 é maior. Além



disso, se compararmos o coeficiente NSE dos modelos U2 $\xi$  e U3 $\xi$ , usando o teste t-Student com significância de 5%, mostra-se que os modelos são estatisticamente diferentes e que U2 $\xi$  é claramente superior.

A comparação dos resultados de U1y e U2y (Figuras 2 e 3, respectivamente) mostram que a adição da segunda restrição melhora a capacidade de simulação do modelo. No entanto, embora o modelo U3y (Figura 4) desempenhe melhor que o modelo U1y, ele é pior que o modelo U2y: a mediana de NSE decresce para +0,32 e o erro (RMSE) cresce para 9%. Isto mostra que a adição de duas informações (duas restrições) melhora o modelo (U3y com três restrições teve desempenho melhor que o modelo U1y com apenas uma restrição). O uso da solução numérica (BARBÉ *et al.*, 1991), contudo, influencia negativamente esta melhora e até mesmo limita seu desempenho, ou seja, o modelo U3y tem pior desempenho que U2y. O mesmo padrão pode ser observado para os modelos de entropia com coordenadas curvilíneas. O modelo U1 $\xi$  com uma restrição obteve coeficientes Nash- Sutcliffe negativos para todos os perfis verticais e erros que variaram de 11 a 51%. De acordo com os resultados, este é o pior modelo (Figura 5) entre todos os pesquisados, com valor mediano de NSE inferior a -8. A inclusão da segunda restrição (equação 7) melhorou a capacidade do modelo: A mediana de NSE foi positiva para todos os experimentos (maior do que +0,76) e o erro mediano foi abaixo de 4%.

Tabela 2 - Resultados das simulações de campo de velocidades: desempenho das seis sub-rotinas aplicadas aos experimentos SRP1, SRP2, SRP3 com um total de 42 perfis verticais.

Experimentos	Coeficiente de Nash-Sutcliffe (NSE)				Raiz do erro quadrático médio (RMSE)			
	Mínimo	Media	Mediana	Máximo	Mínimo	Media	Mediana	Máximo
<b>Modelo U1y</b>								
SRP1	-14,96	-9,59	-8,68	-6,85	25%	35%	36%	46%
SRP2	-9,68	-6,43	-6,28	-2,84	17%	25%	26%	31%
SRP3	-7,50	-4,13	-3,80	-2,34	10%	15%	14%	19%
Todos	-14,96	-6,31	-5,99	-2,34	10%	23%	22%	46%
<b>Modelo U1ξ</b>								
SRP1	-29,14	-15,93	-15,80	-6,99	34%	43%	45%	51%
SRP2	-14,62	-8,41	-8,59	-3,53	15%	27%	28%	32%
SRP3	-13,45	-6,43	-6,46	-2,79	11%	17%	18%	21%
Todos	-29,14	-9,45	-8,41	-2,79	11%	27%	26%	51%
<b>Modelo U2y</b>								
SRP1	-18,37	-3,76	-0,17	0,98	2%	14%	13%	32%
SRP2	-17,37	-1,13	0,82	0,96	2%	7%	4%	22%
SRP3	-24,16	-2,57	0,48	0,97	1%	7%	5%	18%
Todos	-24,16	-2,31	0,51	0,98	1%	9%	6%	32%
<b>Modelo U2ξ</b>								
SRP1	-0,86	0,48	0,85	0,95	3%	6%	5%	10%
SRP2	-0,34	0,68	0,83	0,97	2%	4%	4%	6%
SRP3	0,48	0,75	0,76	0,90	2%	3%	3%	5%
Todos	-0,86	<b>0,66</b>	<b>0,77</b>	0,97	2%	<b>4%</b>	<b>4%</b>	10%
<b>Modelo U3y</b>								
SRP1	-21,72	-4,88	-0,73	0,90	4%	17%	15%	34%
SRP2	-29,12	-3,20	0,05	0,68	6%	12%	10%	28%
SRP3	-16,76	-1,29	0,79	0,94	2%	6%	3%	15%
Todos	-29,12	-2,87	0,32	0,94	4%	11%	9%	34%
<b>Modelo U3ξ</b>								
SRP1	-1,70	0,14	0,55	0,76	6%	9%	9%	12%
SRP2	-11,51	-1,02	0,18	0,44	7%	10%	9%	18%
SRP3	-0,01	0,65	0,79	0,94	2%	3%	3%	4%
Todos	-11,51	-0,11	0,42	0,94	2%	7%	8%	18%

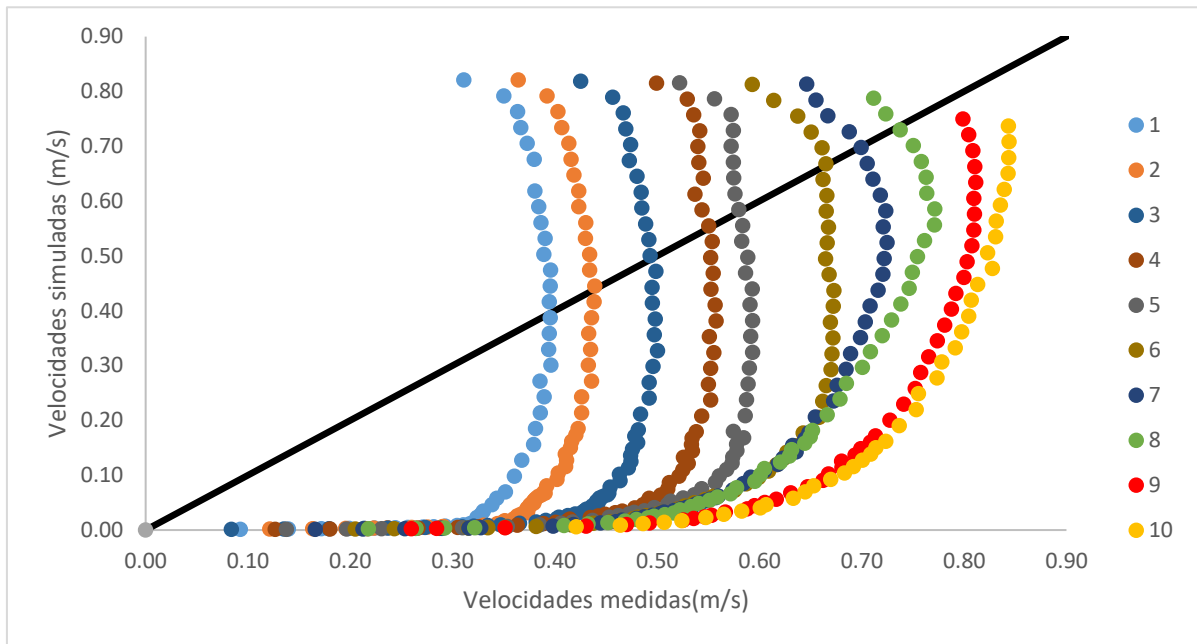
Fonte: Dados da pesquisa (2020).

### 3.3.1 Modelos com formulação fraca: isotáquias representadas por coordenadas cartesianas

Estes modelos foram desenvolvidos a partir de uma formulação fraca, ou seja, as isotáquias são representadas por coordenadas cartesianas, admitem que a velocidade cresce monotonicamente de zero no leito, até um valor máximo na superfície da água e além disso, estes modelos também admitem que dois pontos do fluido com a mesma distância vertical do leito, possuem a mesma velocidade, independentemente das suas distâncias horizontais da parede do canal. Esta última hipótese não contém consistência física, pois não leva em conta a influência que as paredes e o leito exercem sobre a velocidade do fluido.

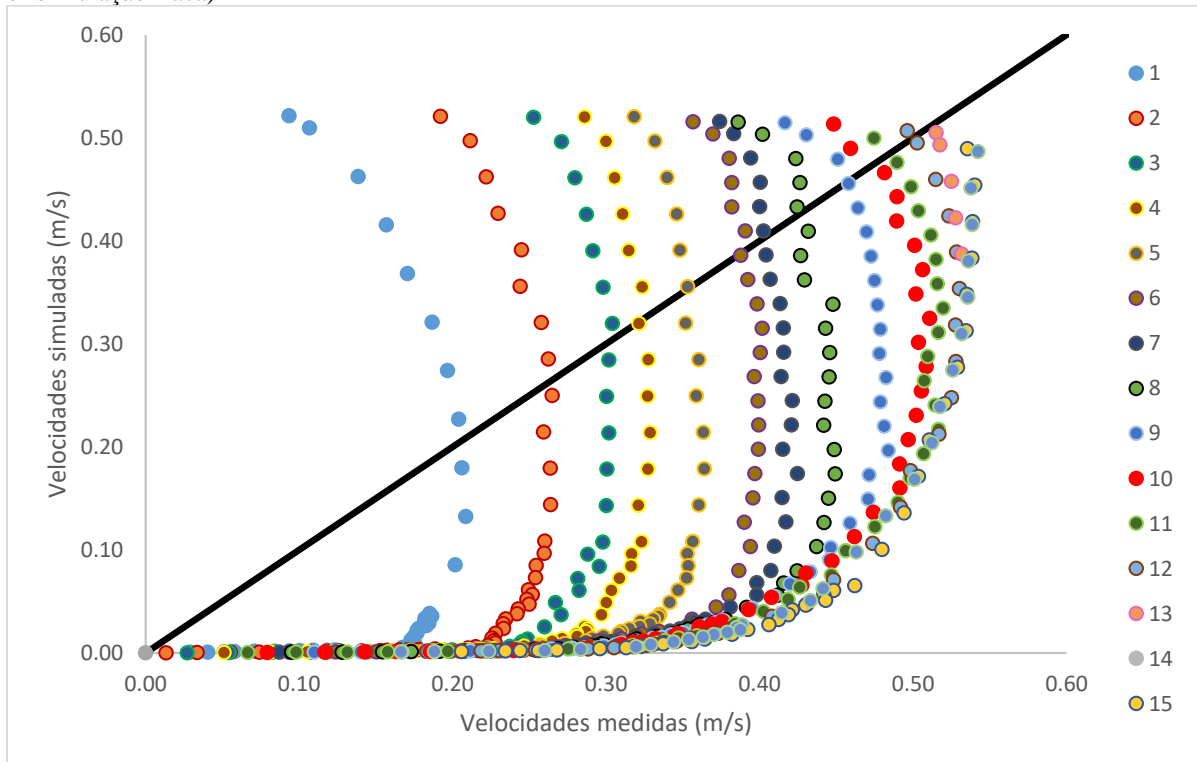
A seguir estão apresentadas as figuras 2 a 10 que mostram gráficos de dispersão relacionando os valores de velocidades medida e simulada para os três experimentos (SRP1, SRP2 e SRP3) referentes aos modelos U1y, U2y e U3y (modelos com formulação primária fraca).

Figura 2 – SRP1: dez perfis verticais: Cada número de 1 a 10, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U1y (uma restrição e formulação fraca)



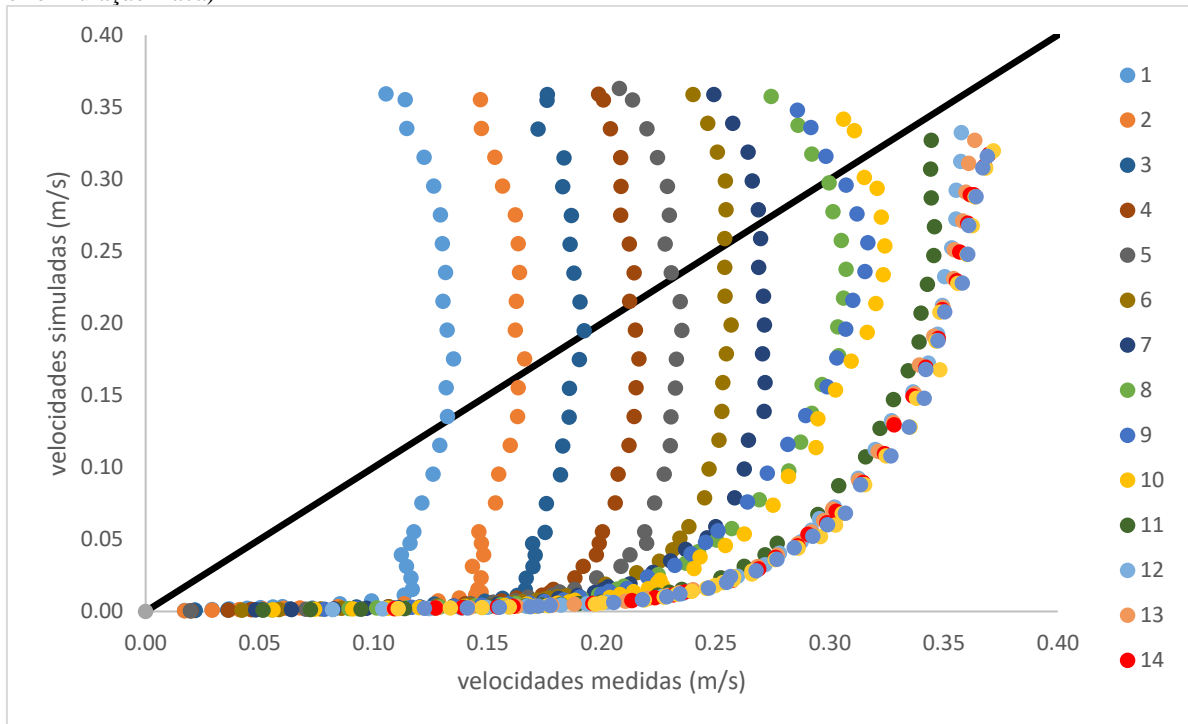
Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Figura 3 – SRP2: 16 perfis verticais: Cada número de 1 a 16, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U1y (uma restrição e formulação fraca)



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Figura 4 – SRP3: 16 perfis verticais: Cada número de 1 a 16, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U1y (uma restrição e formulação fraca)

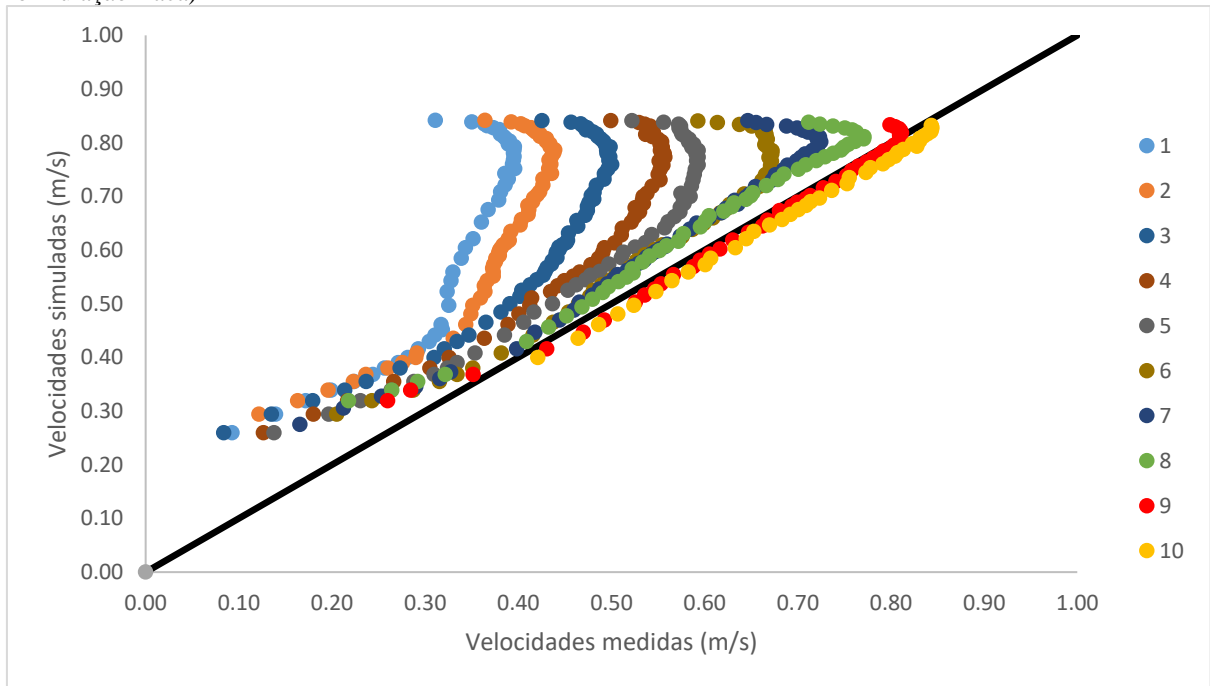


Fonte: Dados da pesquisa (2020).

A relação entre velocidades medidas e simuladas pelo modelo **U1y** (com uma restrição e coordenadas cartesianas) para três experimentos estão apresentadas na: Figura 2 - SRP1: dez perfis verticais; Figura 3 - SRP2: 16 perfis verticais; e Figura 4 - SRP3: 16 perfis verticais. As legendas, no lado direito dos gráficos, referem-se à identidade das verticais (ver Tabela 2). Os números referentes às cores indicam a posição relativa das verticais: quanto maior o número, mais distante a vertical está da parede lateral.

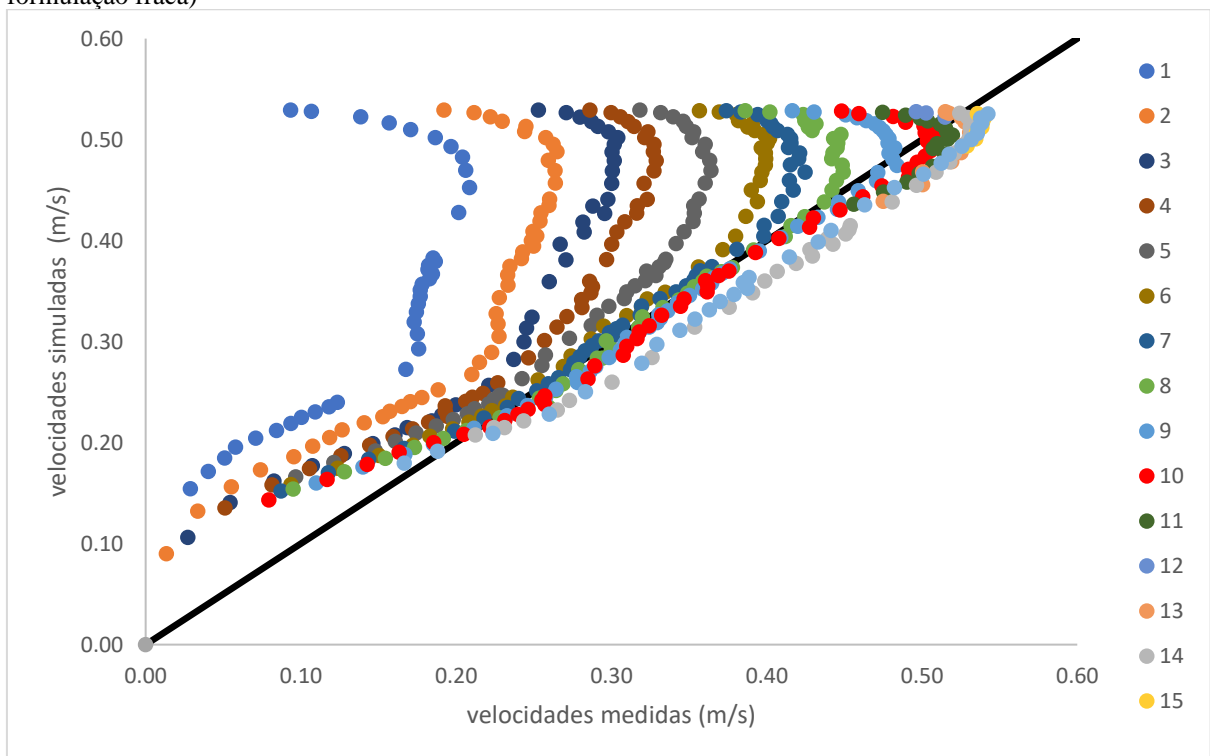
As simulações de velocidade obtidas a partir do modelo U1y exibiram, nos três experimentos pesquisados, um relativo baixo desempenho devido à pouca informação inserida e à formulação primária fraca.

Figura 5 – SRP1: dez perfis verticais: Cada número de 1 a 10, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U2y (duas restrições e formulação fraca)



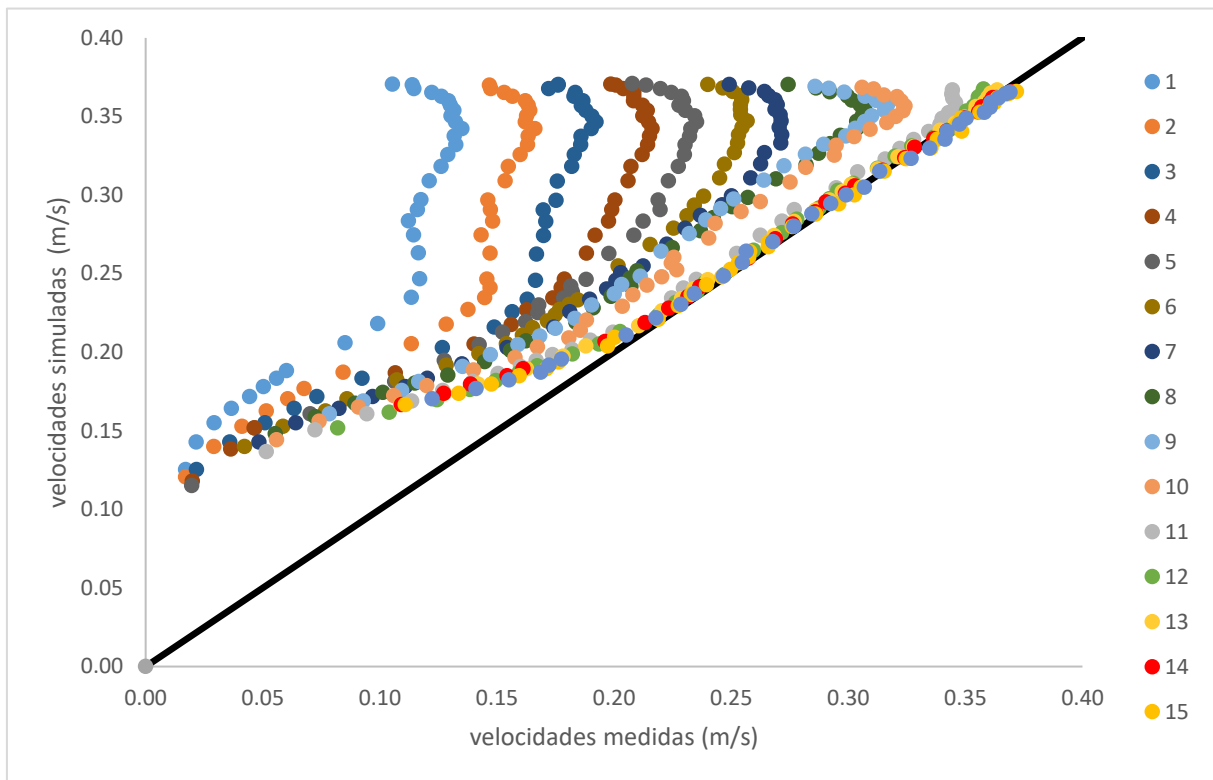
Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Figura 6 – SRP2: 16 perfis verticais: Cada número de 1 a 16, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U2y (duas restrições e formulação fraca)



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Figura 7 – SRP3: 16 perfis verticais: Cada número de 1 a 16, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U2y (duas restrições e formulação fraca)

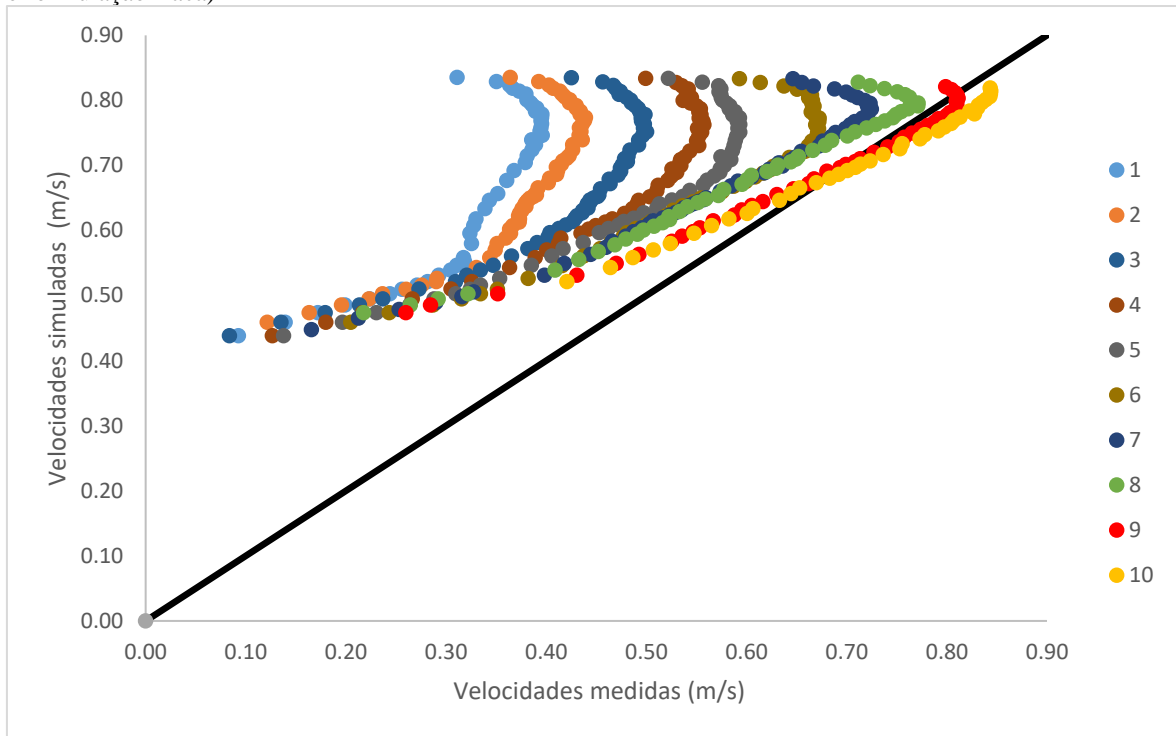


Fonte: Dados da pesquisa (2020).

A relação entre velocidades medidas e simuladas pelo modelo U2y (com duas restrições e coordenadas cartesianas) para três experimentos estão apresentadas na: Figura 5 - SRP1: dez perfis verticais; Figura 6 SRP2: 16 perfis verticais; e Figura 7 SRP3: 16 perfis verticais. As legendas, no lado direito dos gráficos, referem-se à identidade das verticais (ver Tabela 2). Os números referentes às cores indicam a posição relativa das verticais: quanto maior o número, mais distante a vertical está da parede lateral.

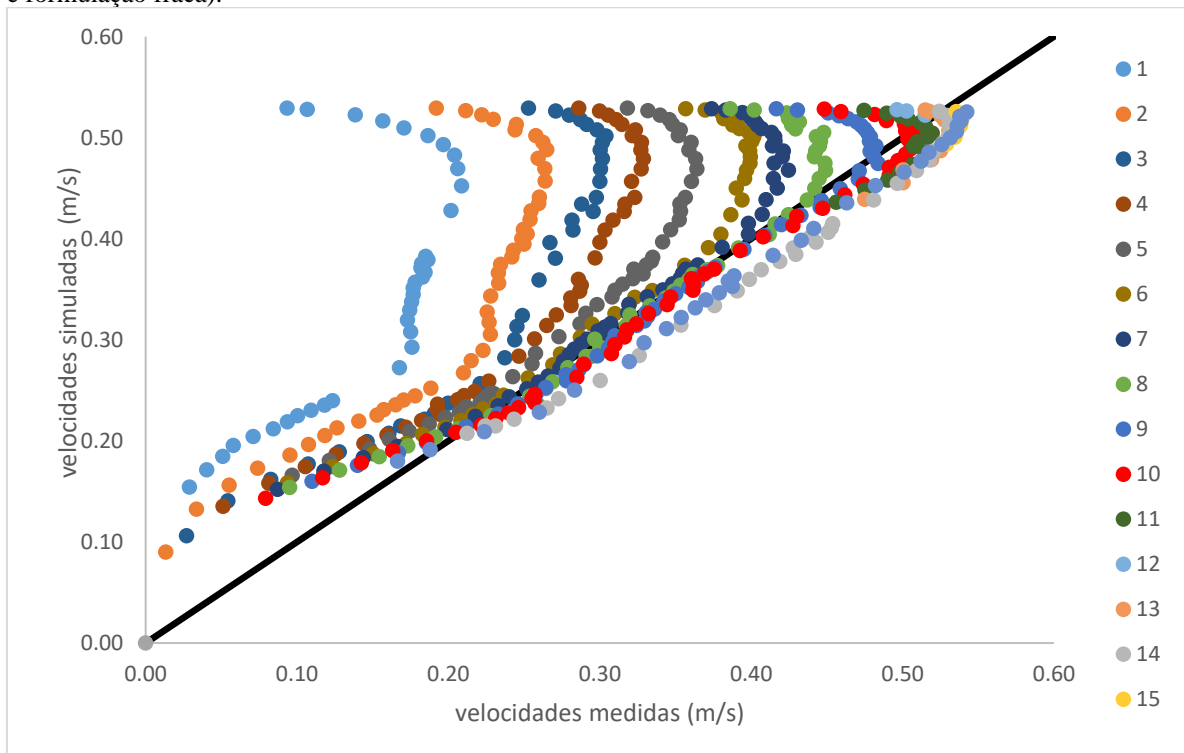
As simulações de velocidade obtidas a partir do modelo U2y exibiram, nos três experimentos pesquisados, um desempenho superior comparado ao modelo anterior (U1y), devido ao acréscimo de informação ao modelo U1y e à sua possível solução analítica.

Figura 8 – SRP1: dez perfis verticais: Cada número de 1 a 10, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U3y (três restrições e formulação fraca)



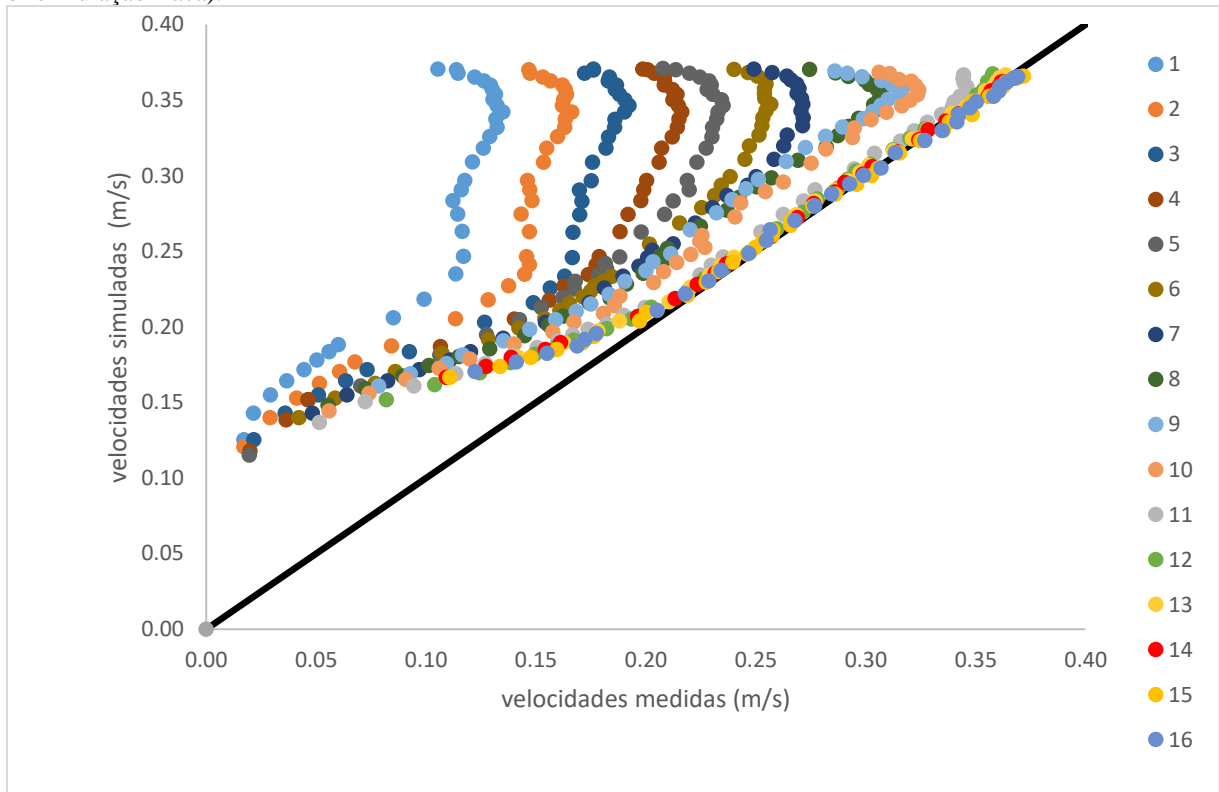
Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Figura 9 – SRP2: 16 perfis verticais: Cada número de 1 a 16, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U3y (três restrições e formulação fraca).



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Figura 10 – SRP3: 16 perfis verticais: Cada número de 1 a 16, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U3y (três restrições e formulação fraca).



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

A relação entre velocidades medidas e simuladas pela rotina **U3y** (modelo com três restrições e coordenadas cartesianas) para três experimentos estão apresentadas na: Figura 8 - SRP1: dez perfis verticais; Figura 9 - SRP2: 16 perfis verticais; e Figura 10 - SRP3: 16 perfis verticais. As legendas, no lado direito dos gráficos, referem-se à identidade das verticais (ver Tabela 2). Os números referentes às cores indicam a posição relativa das verticais: quanto maior o número, mais distante a vertical está da parede lateral.

As simulações de velocidade obtidas pelo modelo U3y exibiram, nos três experimentos pesquisados, um desempenho inferior comparado ao modelo anterior (U2y), devido à sua solução ser numérica, apesar do acréscimo de informação inserida ao modelo U2y. Na presente pesquisa, foram usadas as equações desenvolvidas por Barbé *et al.* (1991) para a rotina U3y, em que funções exponenciais foram representadas pelos dois primeiros termos de uma série de MacLaurin para a obtenção de uma solução numérica. Caso se utilize séries de potências com um número maior de termos, a precisão do modelo possivelmente melhoraria, porém, a instabilidade no cálculo dos multiplicadores de Lagrange do modo como foi apresentado pelos autores é de difícil controle. Isto foi observado nos três experimentos (SRP1, SRP2 e SRP3).



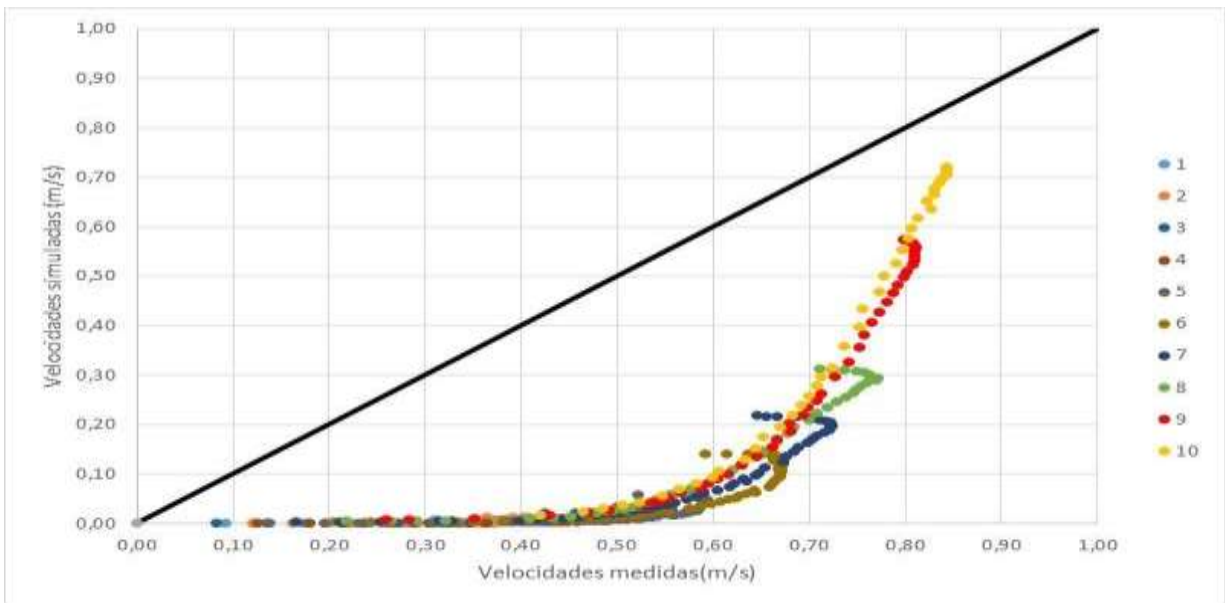
### ***3.3.2 Modelos com formulação forte: isotáquias representadas por coordenadas curvilíneas***

A comparação entre as figuras 11 a 19 mostra uma melhora do modelo quando apenas duas restrições são consideradas. A combinação destas duas restrições com o sistema de coordenadas curvilíneas gerou o melhor modelo de entropia entre todos os modelos investigados. Como nos modelos de formulação primária fraca, a inclusão de uma terceira restrição produz um modelo (U3 $\xi$ ) com um desempenho superior aquele com uma restrição (U1 $\xi$ ), aumentando a mediana do NSE de -8,41 para +0,42; enquanto a mediana do erro decresceu de 26% para 8%.

De fato, U3 $\xi$  é o segundo melhor modelo de entropia entre os seis modelos testados. A comparação das figuras 14 a 19 revela, contudo, que o modelo U3 $\xi$  não representa tão bem os dados do campo de velocidade quanto o modelo U2 $\xi$ : no balanço entre a vantagem de ter mais informação (terceira restrição) e a desvantagem de usar uma solução numérica, o aspecto negativo prevalece. Além disso, a solução numérica dos modelos com três restrições gerou instabilidade durante o processo de parametrização (quando se calcularam os multiplicadores de Lagrange) o que aumentou o esforço computacional. Isto foi observado em todos os experimentos.

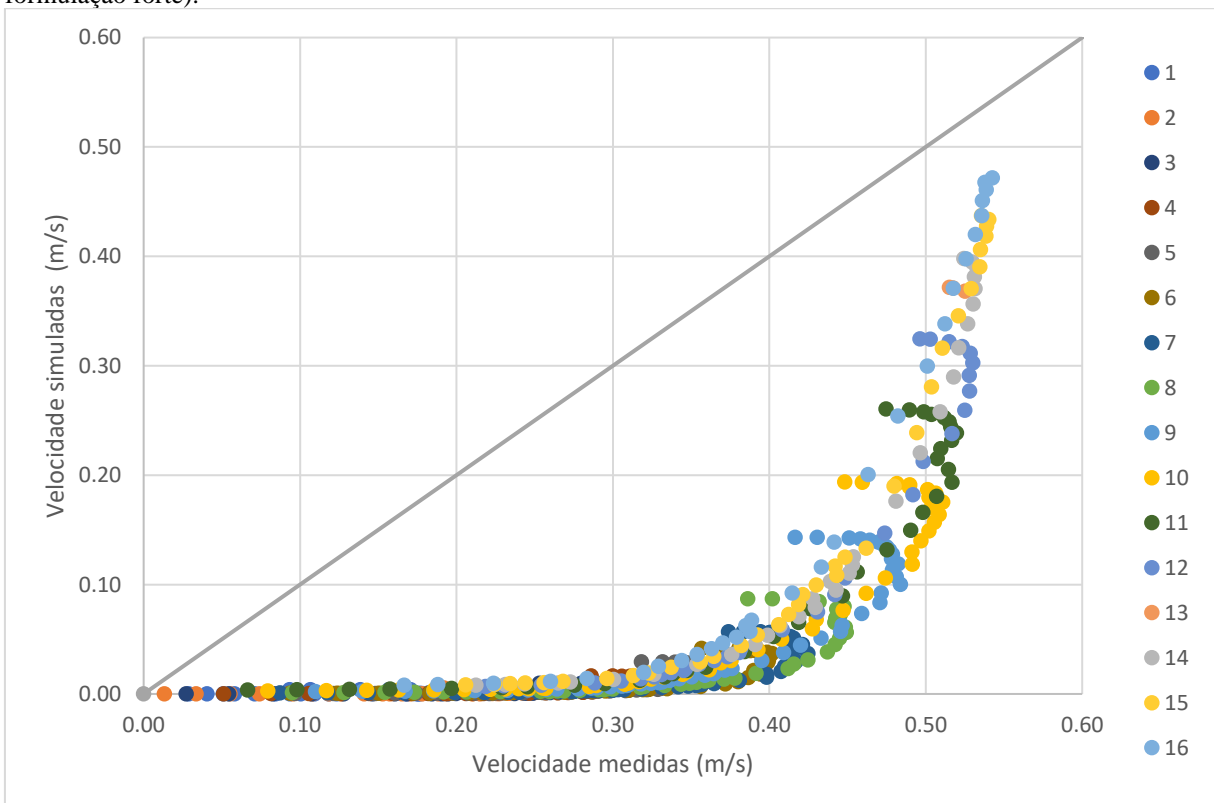
As figuras 11, 12 e 13 apresentam os resultados concernentes ao modelo U1 $\xi$ , as figuras 14, 15 e 16 ao modelo U2 $\xi$  e as figuras 17, 18 e 19 ao modelo U3 $\xi$ , que utilizam coordenadas curvilíneas, respectivamente, com uma, duas e três restrições. Apesar da aplicação de uma formulação primária forte, o modelo U1 $\xi$  apresenta relativo baixo desempenho, sobretudo devido à pouca informação contida no modelo.

Figura 11 – SRP1: dez perfis verticais: Cada número de 1 a 10, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U1 $\xi$  (uma restrição e formulação forte).



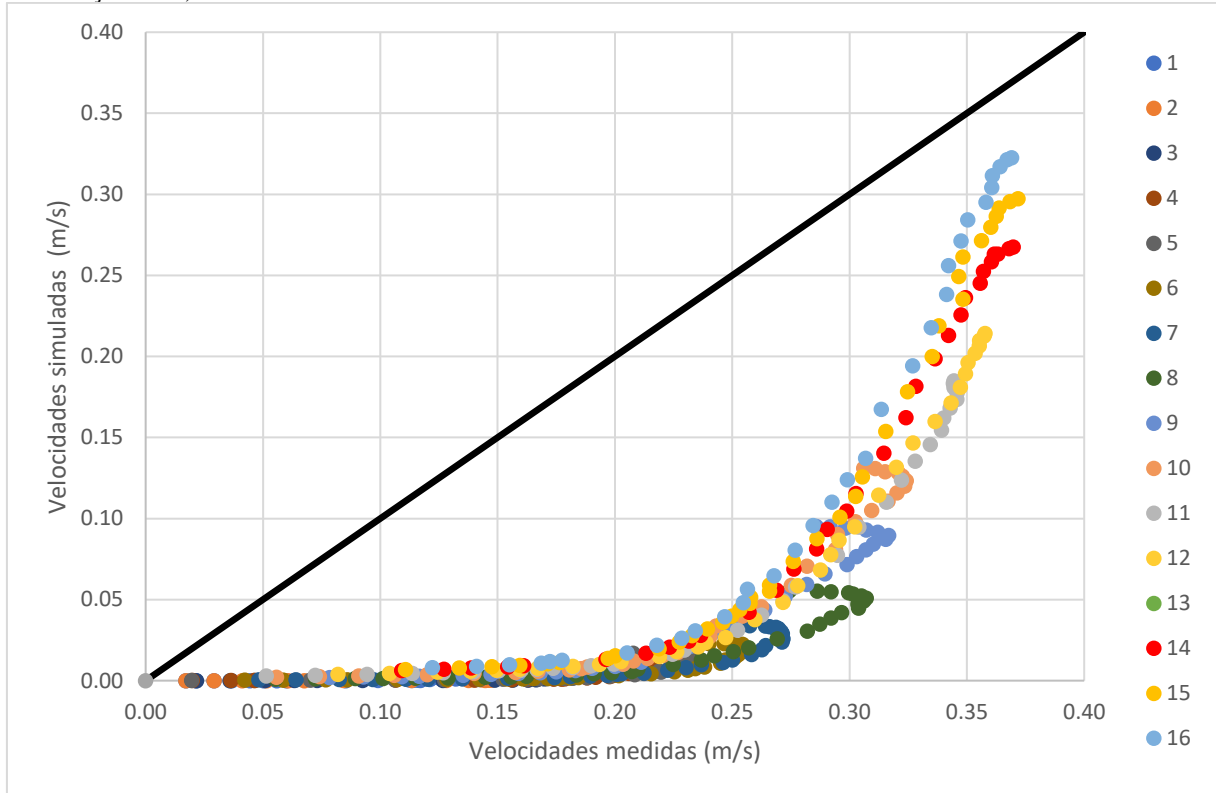
Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Figura 12 – SRP2: 16 perfis verticais: Cada número de 1 a 16, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U1 $\xi$  (uma restrição e formulação forte).



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

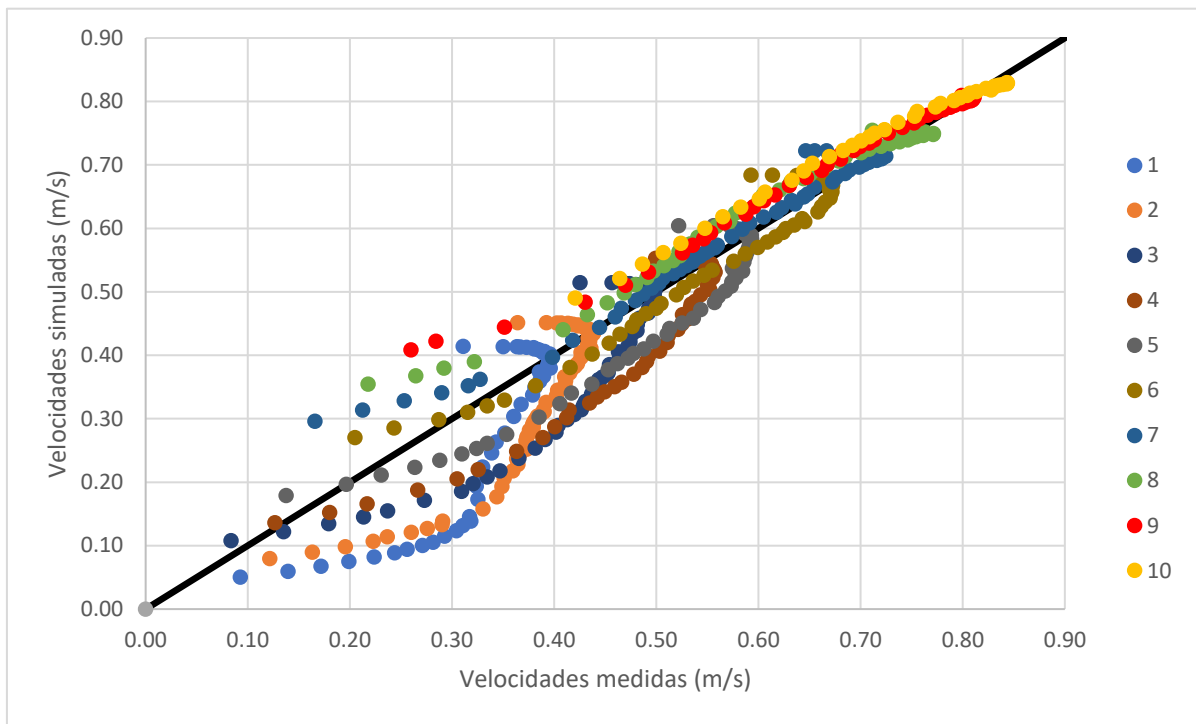
Figura 13 – SRP3: 16 perfis verticais: Cada número de 1 a 16, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U1ξ (uma restrição e formulação forte)



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

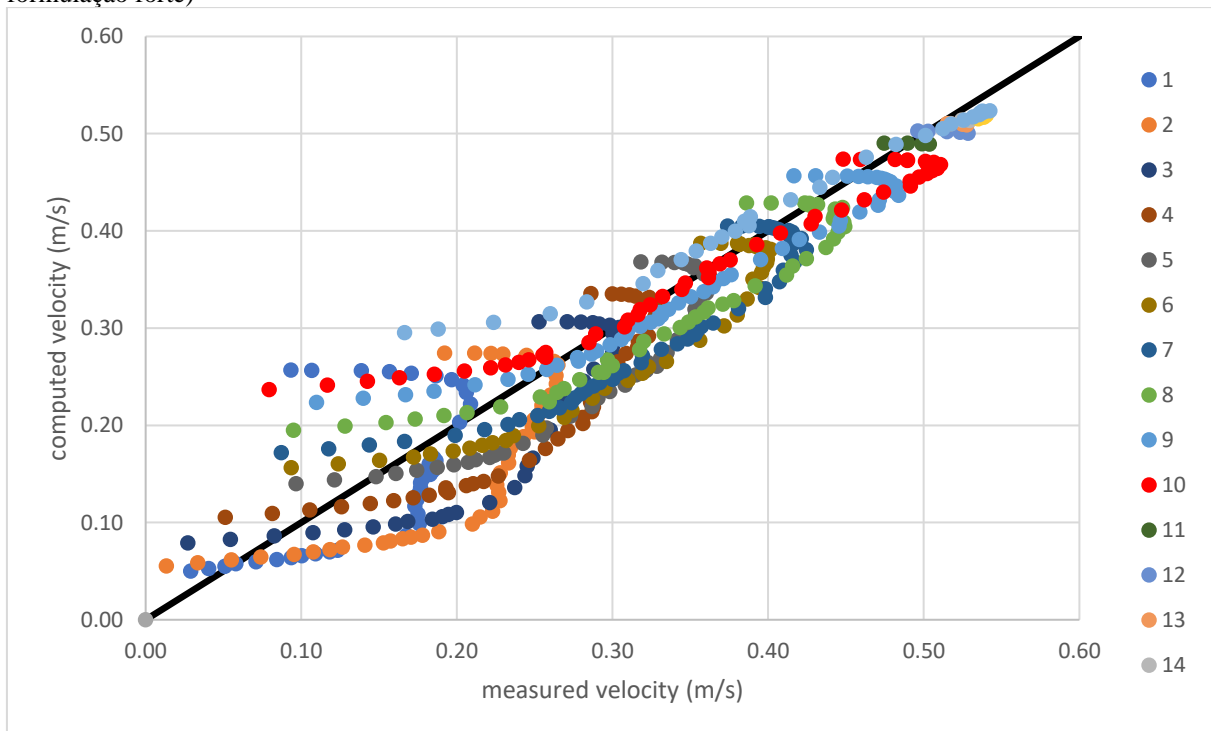
A relação entre velocidades medidas e simuladas pela rotina U1ξ (modelo com uma restrição e coordenadas curvilíneas) para três experimentos estão apresentadas na: Figura 11 - SRP1: dez perfis verticais; Figura 12 - SRP2: 16 perfis verticais; e Figura 13 - SRP3: 16 perfis verticais. As legendas, no lado direito dos gráficos, referem-se à identidade das verticais (ver Tabela 2). Os números referentes às cores indicam a posição relativa das verticais: quanto maior o número, mais distante a vertical está da parede lateral.

Figura 14 – SRP1: dez perfis verticais: Cada número de 1 a 10, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U2 $\xi$  (duas restrições e formulação forte)



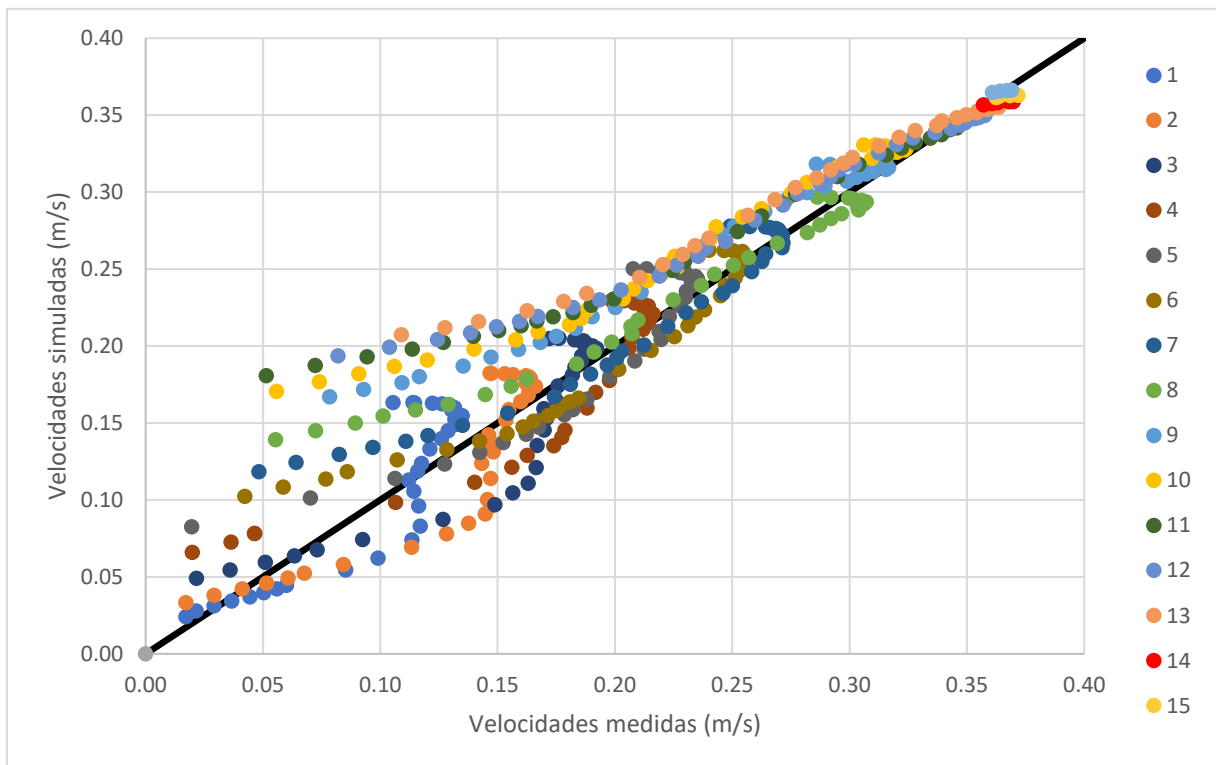
Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Figura 15 – SRP2: 16 perfis verticais: Cada número de 1 a 16, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U2 $\xi$  (duas restrições e formulação forte)



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

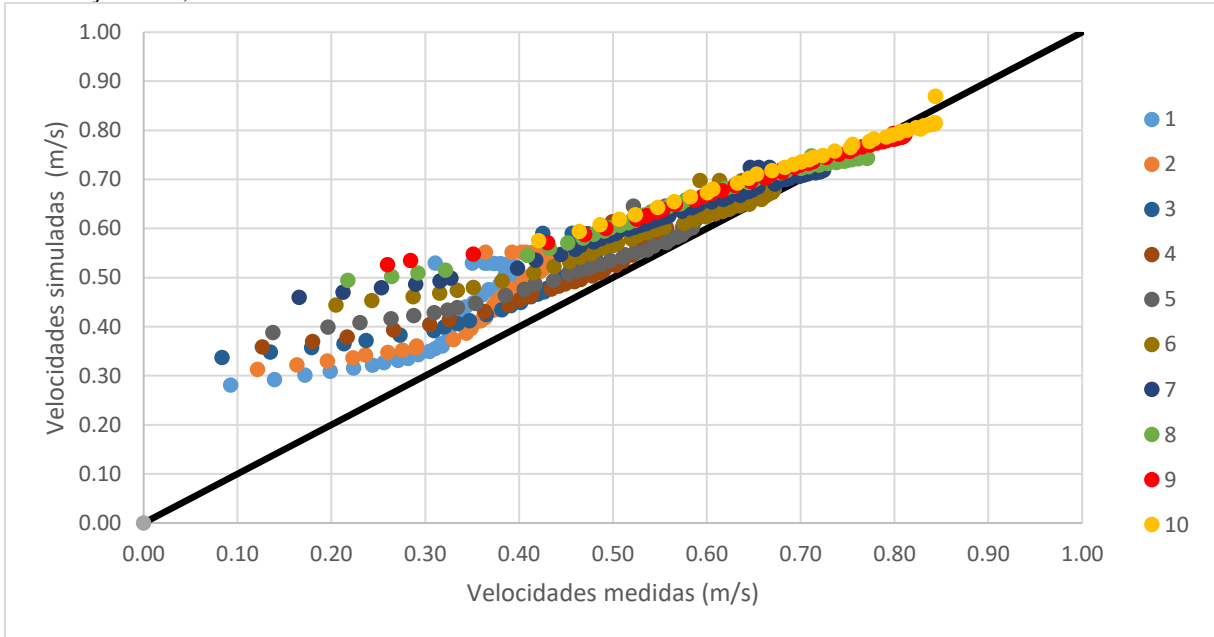
Figura 16 – SRP3: 16 perfis verticais: Cada número de 1 a 16, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U2 $\xi$  (duas restrições e formulação forte)



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

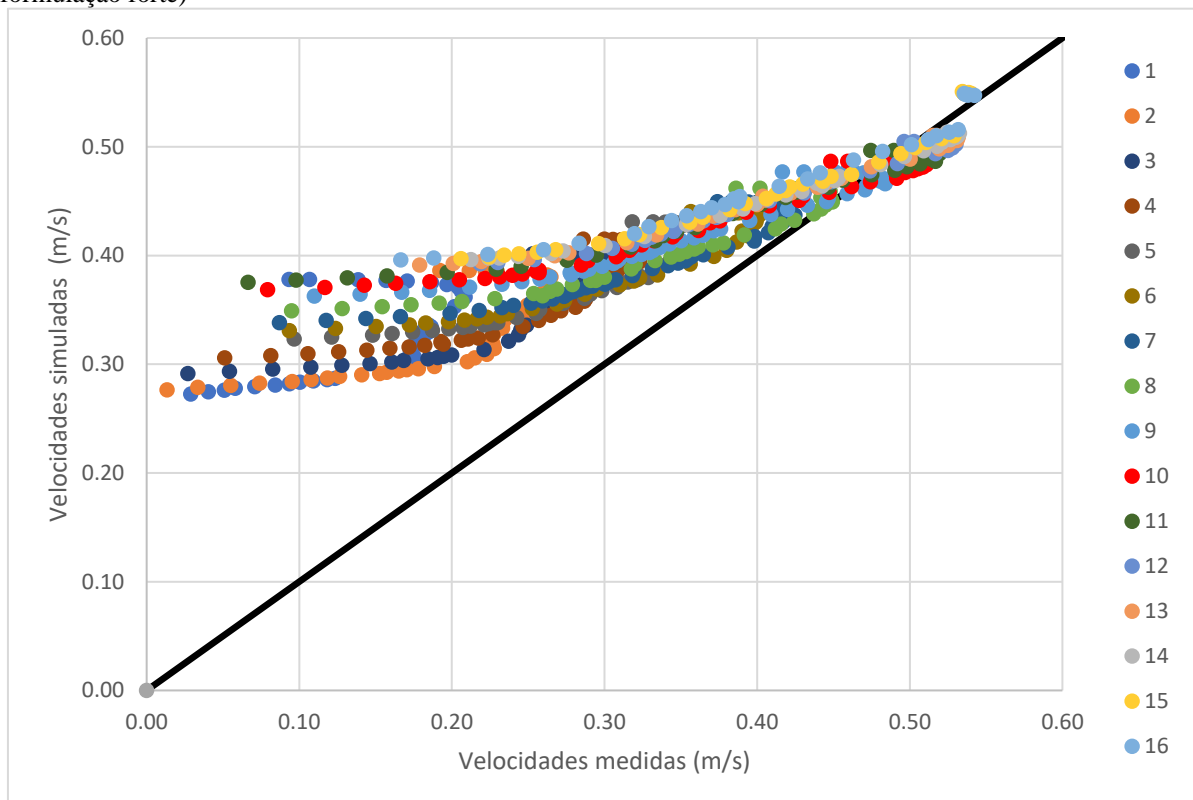
A relação entre velocidades medidas e simuladas pela rotina U2 $\xi$  (modelo com duas restrições e coordenadas curvilíneas) para três experimentos estão apresentadas na: Figura 14 - SRP1: dez perfis verticais; Figura 15 - SRP2: 16 perfis verticais; e Figura 16 - SRP3: 16 perfis verticais. As legendas, no lado direito dos gráficos, referem-se à identidade das verticais (ver Tabela 2). Os números referentes às cores indicam a posição relativa das verticais: quanto maior o número, mais distante a vertical está da parede lateral.

Figura 17 – SRP1: 10 perfis verticais: Cada número de 1 a 10, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U3 $\xi$  (três restrições e formulação forte)



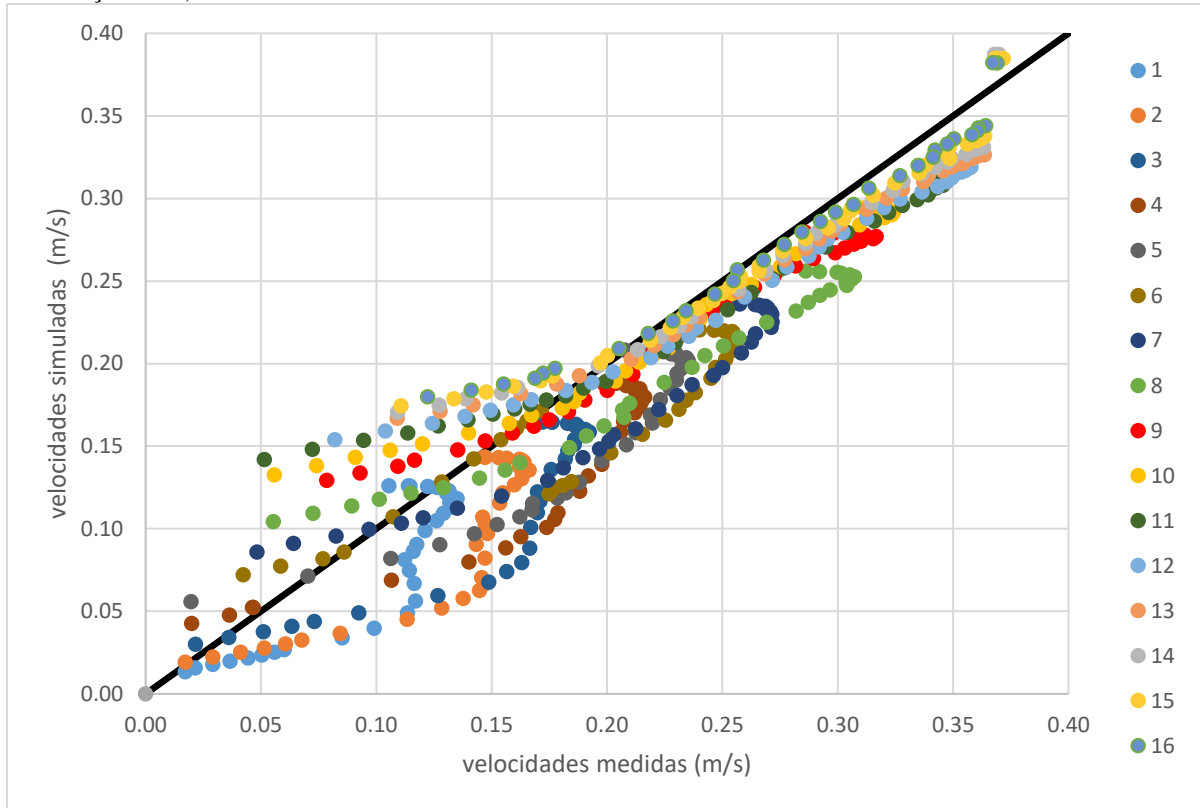
Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Figura 18 – SRP2: 16 perfis verticais: Cada número de 1 a 16, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U3 $\xi$  (três restrições e formulação forte)



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Figura 19 – SRP3: 16 perfis verticais: Cada número de 1 a 16, na legenda, representa um perfil vertical onde foram realizadas medições de velocidade. As velocidades simuladas referem-se ao modelo U3 $\xi$  (três restrições e formulação forte)



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

A relação entre velocidades medidas e simuladas pela rotina U3 $\xi$  (modelo com três restrições e coordenadas curvilíneas) para três experimentos estão apresentadas na: Figura 17 - SRP1: dez perfis verticais; Figura 18 - SRP2: 18 perfis verticais; e Figura 19 - SRP3: 16 perfis verticais. As legendas, no lado direito dos gráficos, referem-se à identidade das verticais (ver Tabela 2). Os números referentes às cores indicam a posição relativa das verticais: quanto maior o número, mais distante a vertical está da parede lateral.

A rotina com duas restrições e coordenadas curvilíneas, denominada U2 $\xi$ , obteve o melhor desempenho entre todas as rotinas, tanto pelo coeficiente de Nash-Sutcliffe (média igual a 0,66 e mediana; 0,77), como pela raiz do erro quadrático médio (média e mediana, ambas iguais a 4%). Isto demonstra que não é verdadeiro que quanto mais informação inserida em um modelo, melhor será o seu desempenho. A rotina U2 $y$  também apresentou, relativamente, bons resultados (Tabela 2). Uma das explicações para os ótimos resultados obtidos por U2 $\xi$  é que ela contém mais informação do que as rotinas com apenas uma restrição, além do que as coordenadas curvilíneas descrevem um padrão de campo de velocidade mais realista, do ponto de vista físico, quando comparado com aquele gerado pelas coordenadas cartesianas.

As rotinas U3y e U3 $\xi$ , apesar de terem mais restrições, obtiveram desempenhos inferiores àqueles obtidos pelas rotinas U2y e U2 $\xi$ , ou seja, a terceira restrição adiciona informação, mas a sua solução que depende do truncamento de séries de potências, torna-se imprecisa e assim, tanto o valor do coeficiente Nash-Sutcliffe foi reduzido, como a raiz do erro quadrático médio foi aumentada, ou seja, o desempenho do modelo tornou-se reduzido comparado com aqueles de duas restrições. Em síntese, a exigência de solução numérica nesta pesquisa causou um impacto negativo superior ao impacto positivo da terceira informação. Os números referentes a tais rotinas para o coeficiente de Nash-Sutcliffe foram: média igual a -2,87 para coordenadas cartesianas e -0,11 para as coordenadas curvilíneas; mediana igual a 0,32 com coordenadas cartesianas e 0,42 com coordenadas curvilíneas e para a raiz do erro quadrático médio: médias iguais a 11% para as coordenadas cartesianas e 7% para as curvilíneas; medianas iguais a 9 e 8% para as coordenadas cartesianas e curvilíneas, respectivamente.

A rotina U3 $\xi$  foi proposta neste trabalho, ao substituir o termo  $\frac{y}{D}$  nas equações da rotina U3y pela variável  $\xi$ . Esta troca de variáveis também foi realizada nas rotinas U2y e U1y. As rotinas U3y e U3 $\xi$  obtiveram desempenhos muito superiores aos das rotinas denominadas U1y e U1 $\xi$ , ou seja, a adição de duas restrições supera a deficiência causada pela solução numérica. Outro fato importante que foi observado é que o uso de coordenadas curvilíneas, como proposto por Chiu, melhora o desempenho das rotinas para duas ou três restrições, particularmente na proximidade das paredes. Isto se destaca com mais ênfase, quando foi aplicada a rotina U2 $\xi$ , aquela de melhor desempenho nesta pesquisa.

### 3.3.3 *Análise comparativa*

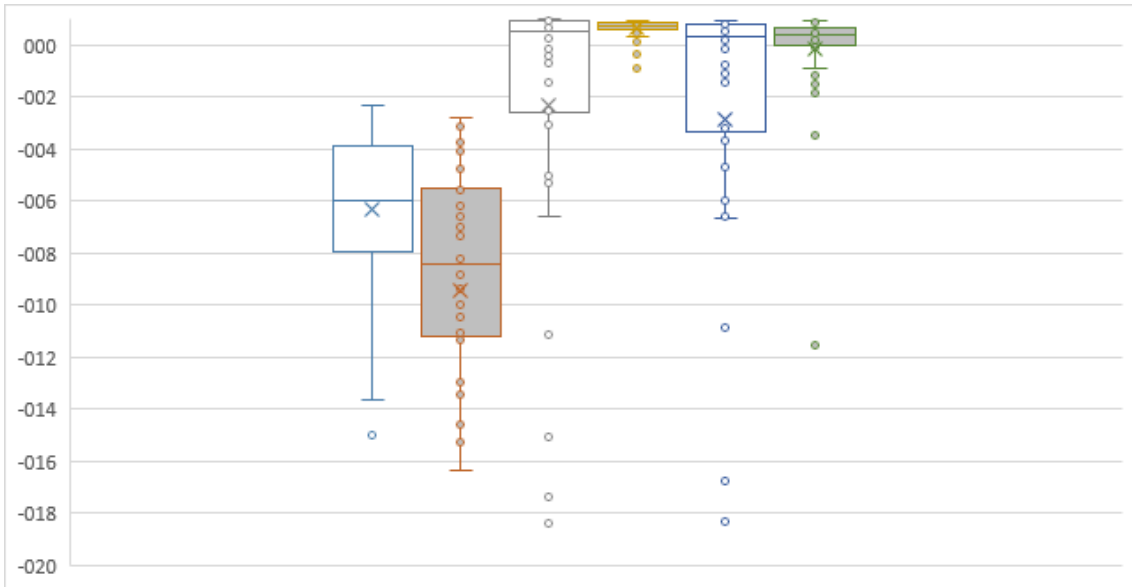
Das figuras 2 a 19, observa-se que todos os modelos têm falhas na representação nos perfis próximos à parede do canal. Esta falha ocorre até mesmo quando os melhores modelos (U2 $\xi$ , U3 $\xi$  e U2y) são aplicados. Para os perfis próximos a parede, por exemplo, o modelo U2y exhibe um coeficiente NSE abaixo de -24 e um erro correspondente RMSE maior que 32%. Este mesmo modelo simula com boa precisão os dados medidos em verticais mais centralizadas com um NSE máximo de 0,98 e erro mínimo de 1% (Ver Tabela 2)

Esse fato está diretamente conectado com a proximidade da parede (de Araújo e Chaudhry, 1998; Greco e Martino, 2018). Os modelos de entropia analisados tiveram bom desempenho para perfis com distância da parede superior a 3% da largura do canal. Além disso, o uso de coordenadas curvilíneas melhorou o desempenho dos modelos com uma, duas e três



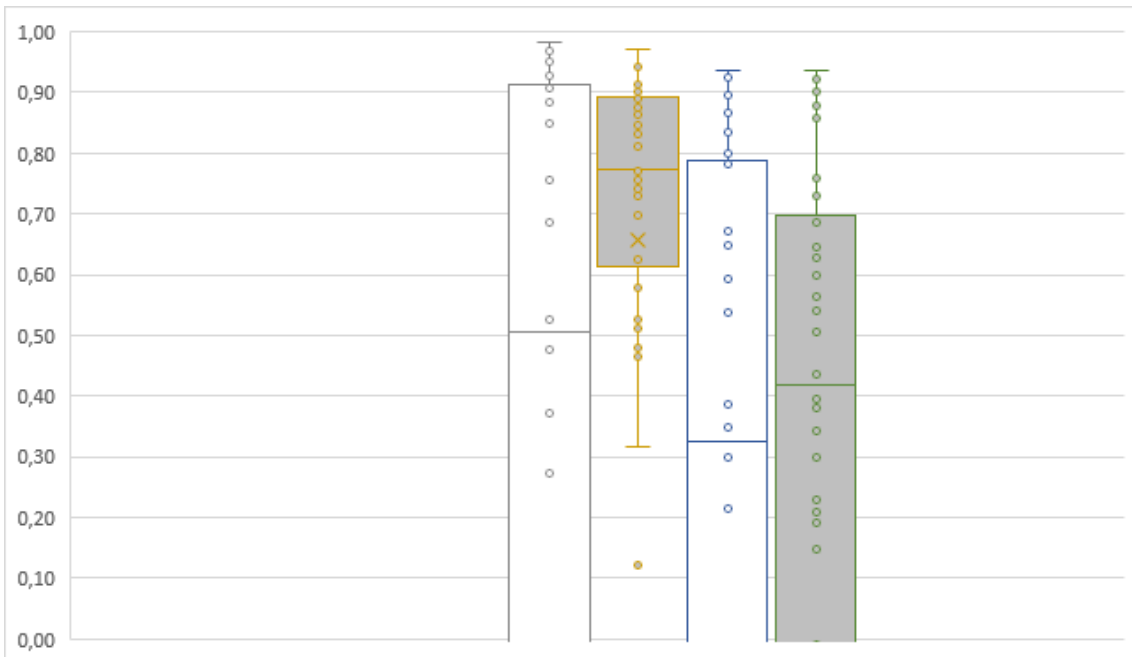
restrições, particularmente na vizinhança das paredes. Isto é melhor enfatizado no modelo  $U2\xi$ , o modelo de melhor desempenho no contexto desta pesquisa.

Figura 20 – Resultado geral para NSE, da esquerda para direita:  $U1y$ ,  $U1\xi$ ,  $U2y$ ,  $U2\xi$ ,  $U3y$  e  $U3\xi$



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

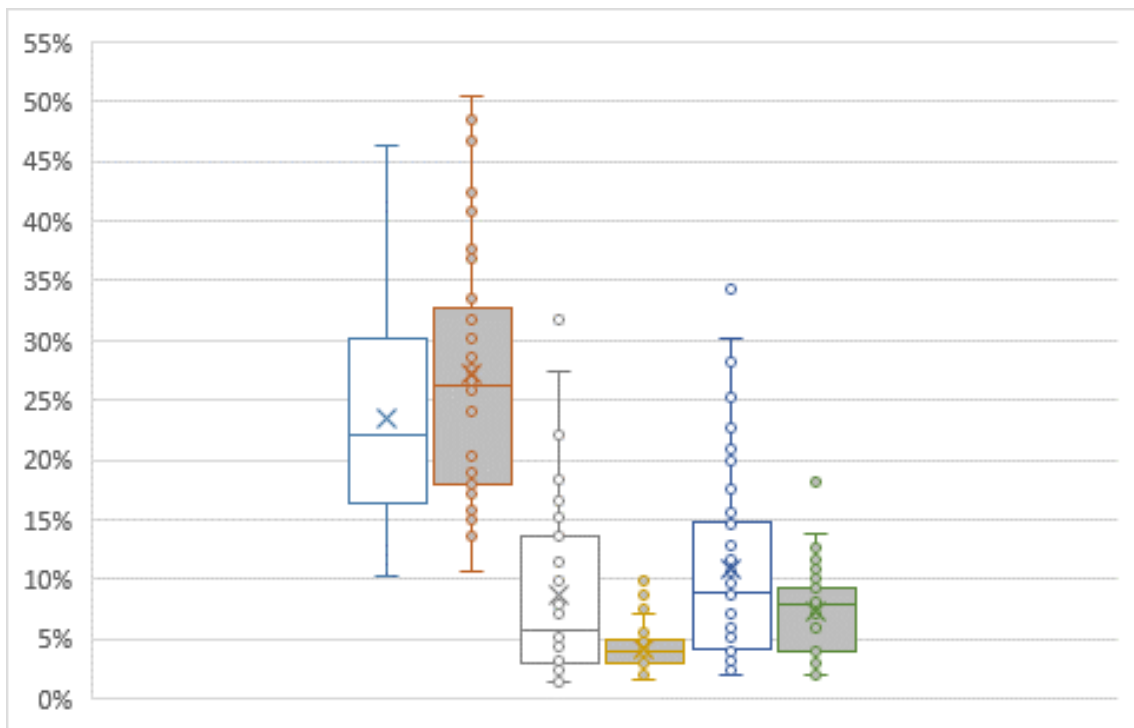
Figura 21 – Resultado apenas para  $NSE > 0$ , da esquerda para direita:  $U2y$ ,  $U2\xi$ ,  $U3y$  e  $U3\xi$



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

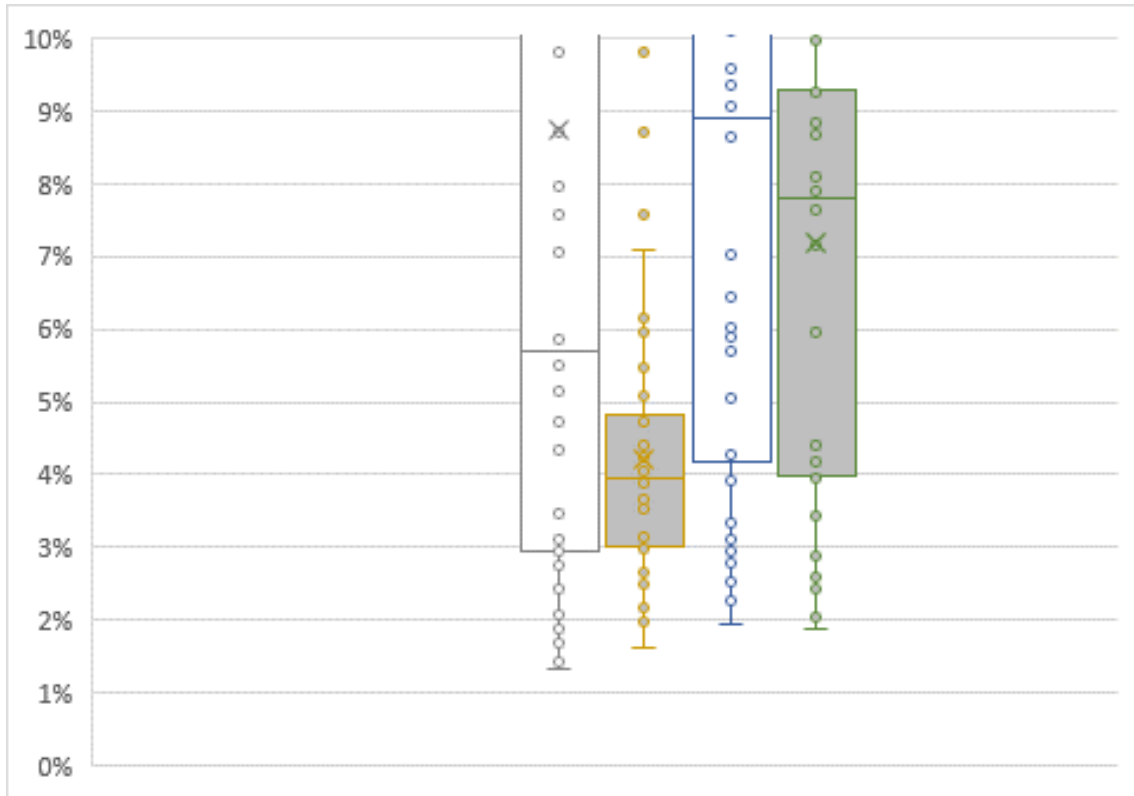
O coeficiente de Nash-Sutcliffe correspondente aos valores de velocidade simulados pelas sub-rotinas  $U_{1y}$ ,  $U_{1\xi}$ ,  $U_{2y}$ ,  $U_{2\xi}$ ,  $U_{3y}$  e  $U_{3\xi}$  para todos os valores medidos em todos os experimentos (SRP1, SRP2, SRP3). Figura 20- Resultado geral, da esquerda para direita:  $U_{1y}$ ,  $U_{1\xi}$ ,  $U_{2y}$ ,  $U_{2\xi}$ ,  $U_{3y}$  e  $U_{3\xi}$ . Figura 21 - Resultado apenas para  $NSE > 0$ , da esquerda para direita:  $U_{2y}$ ,  $U_{2\xi}$ ,  $U_{3y}$  e  $U_{3\xi}$ . Nas figuras, cada ponto corresponde ao NSE de uma vertical

Figura 22 – Resultado geral para RMSE, da esquerda para direita:  $U_{1y}$ ,  $U_{1\xi}$ ,  $U_{2y}$ ,  $U_{2\xi}$ ,  $U_{3y}$  e  $U_{3\xi}$



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

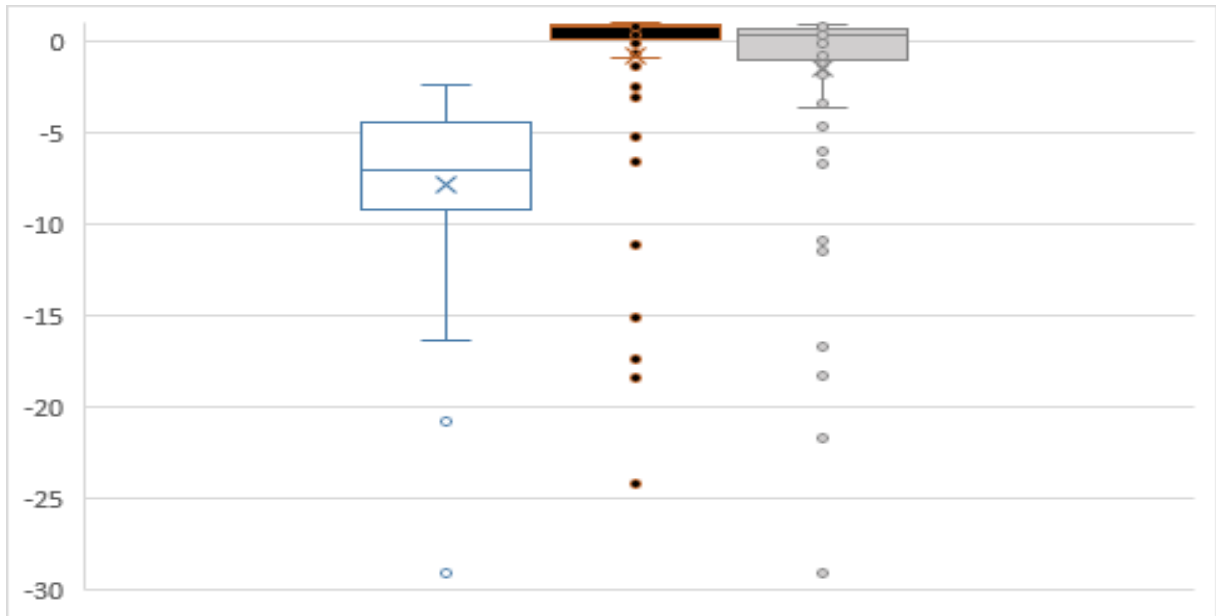
Figura 23 – Resultado apenas para RMSE < 10%, da esquerda para direita: U2y, U2ξ, U3y e U3ξ



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

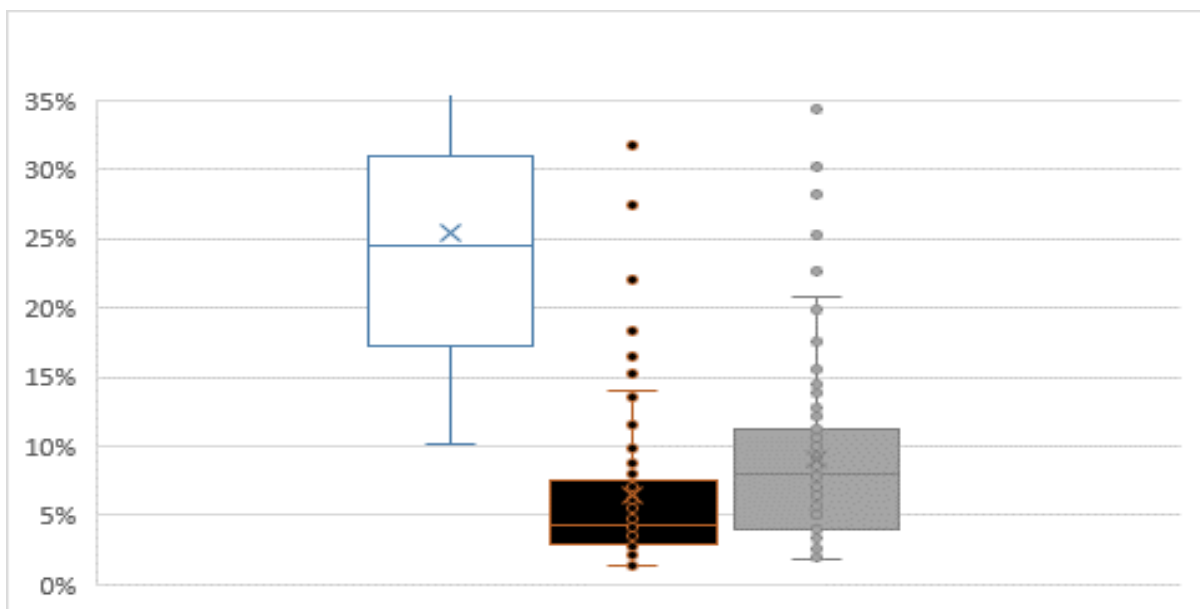
A raiz do erro quadrático médio correspondente aos valores de velocidade simulados pelas sub-rotinas U1y, U1ξ, U2y, U2ξ, U3y e U3ξ para todos os valores medidos em todos os experimentos (SRP1, SRP2, SRP3). Figura 22 - Resultado geral, da esquerda para direita: U1y, U1ξ, U2y, U2ξ, U3y e U3ξ. Figura 23 - Resultado apenas para RMSE < 10%, da esquerda para direita: U2y, U2ξ, U3y e U3ξ. Nas figuras, cada ponto corresponde ao RMSE de uma vertical.

Figura 24 – Coeficiente de Nash-Sutcliffe (NSE). O boxplot à esquerda une os resultados dos modelos com uma restrição (U1y e U1ξ). O boxplot central, os modelos U2y e U2ξ, enquanto o boxplot à direita, os modelos U3y e U3ξ.



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

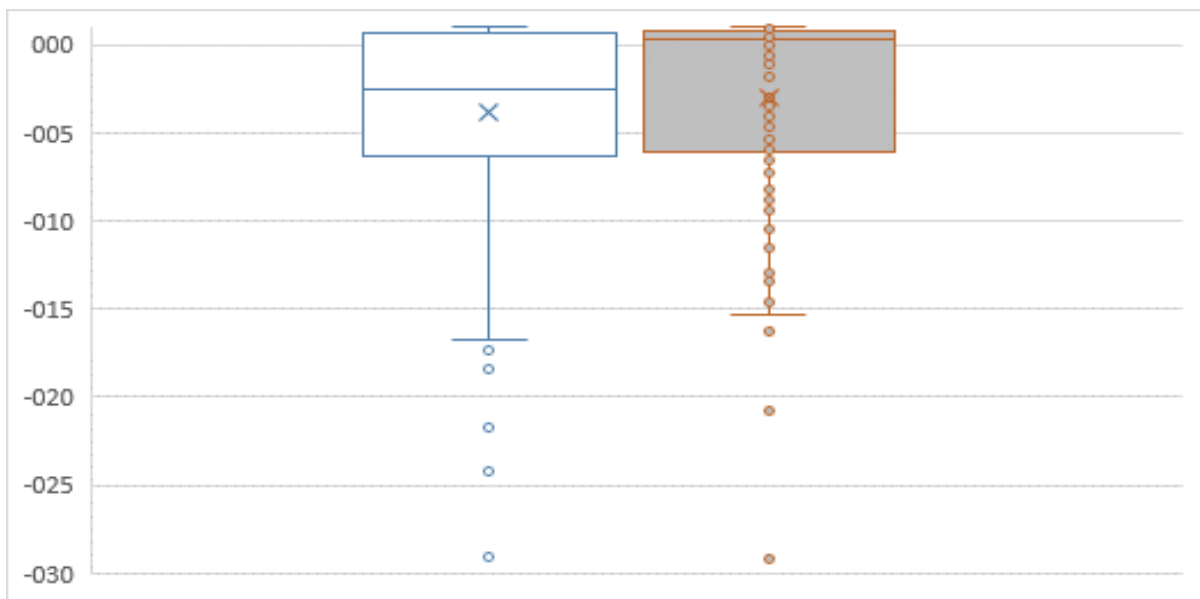
Figura 25 – Raiz do erro quadrático médio – RMSE. O boxplot à esquerda une os resultados dos modelos com uma restrição (U1y e U1ξ). O boxplot central, os modelos U2y e U2ξ, enquanto o boxplot à direita, os modelos U3y e U3ξ.



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

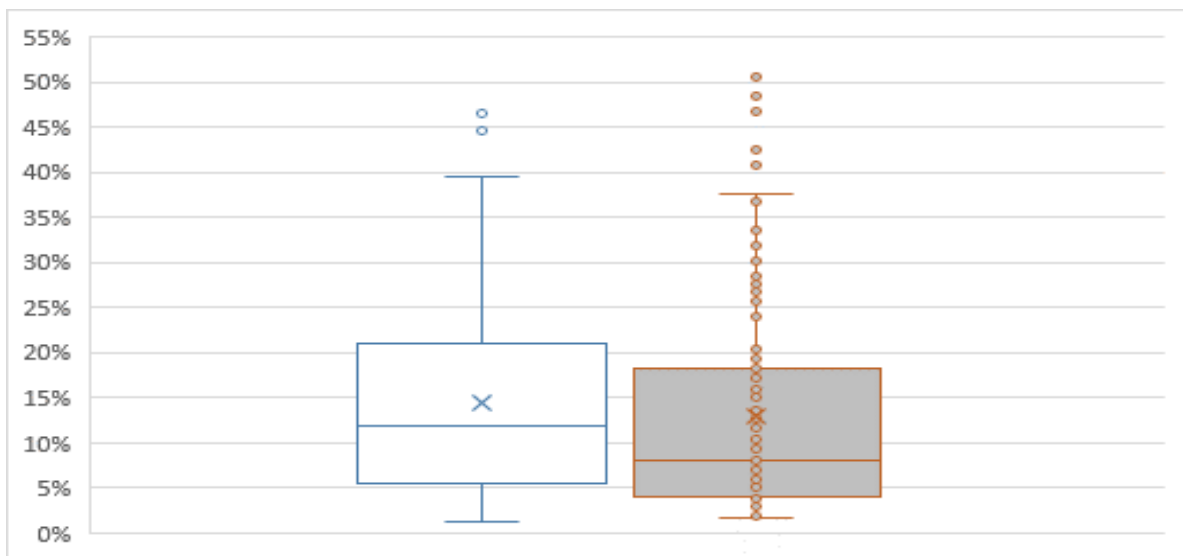
O desempenho das sub-rotinas. Cada boxplot corresponde a um número de restrições, da esquerda para a direita (1, 2 ou 3). Figura 24 - Coeficiente de Nash-Sutcliffe (NSE). Figura 25 - Raiz do erro quadrático médio – RMSE.

Figura 26 – Coeficiente de Nash-Sutcliffe (NSE). O boxplot à esquerda une os resultados dos modelos com formulação fraca ( $U1y$ ,  $U2y$  e  $U3y$ ), enquanto o boxplot à direita, os modelos com formulação forte ( $U1\xi$ ,  $U2\xi$  e  $U3\xi$ ).



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

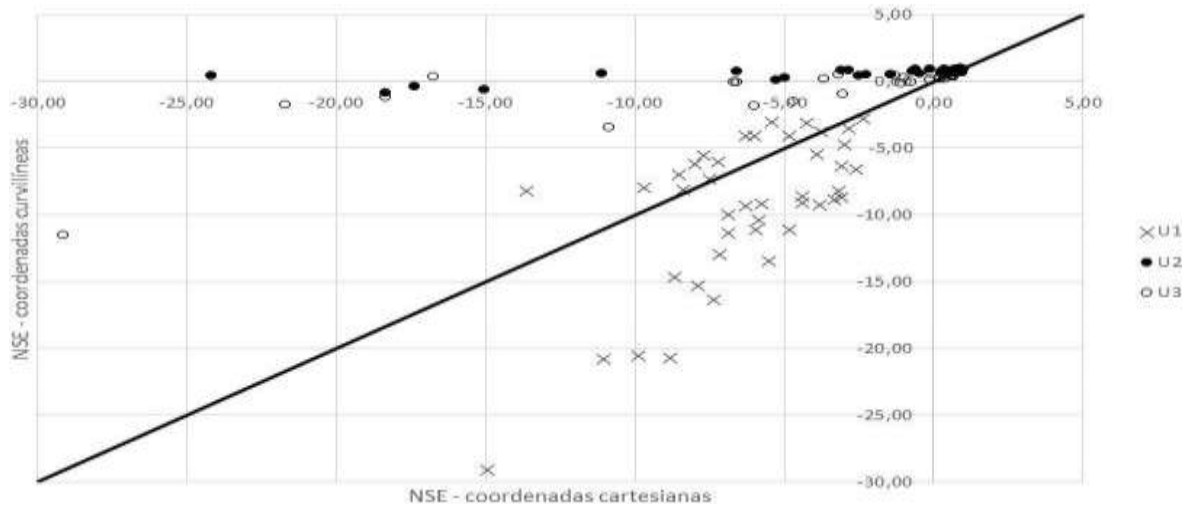
Figura 27 – Raiz do erro quadrático médio – RMSE. O boxplot à esquerda une os resultados dos modelos com formulação fraca ( $U1y$ ,  $U2y$  e  $U3y$ ), enquanto o boxplot à direita, os modelos com formulação forte ( $U1\xi$ ,  $U2\xi$  e  $U3\xi$ ).



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

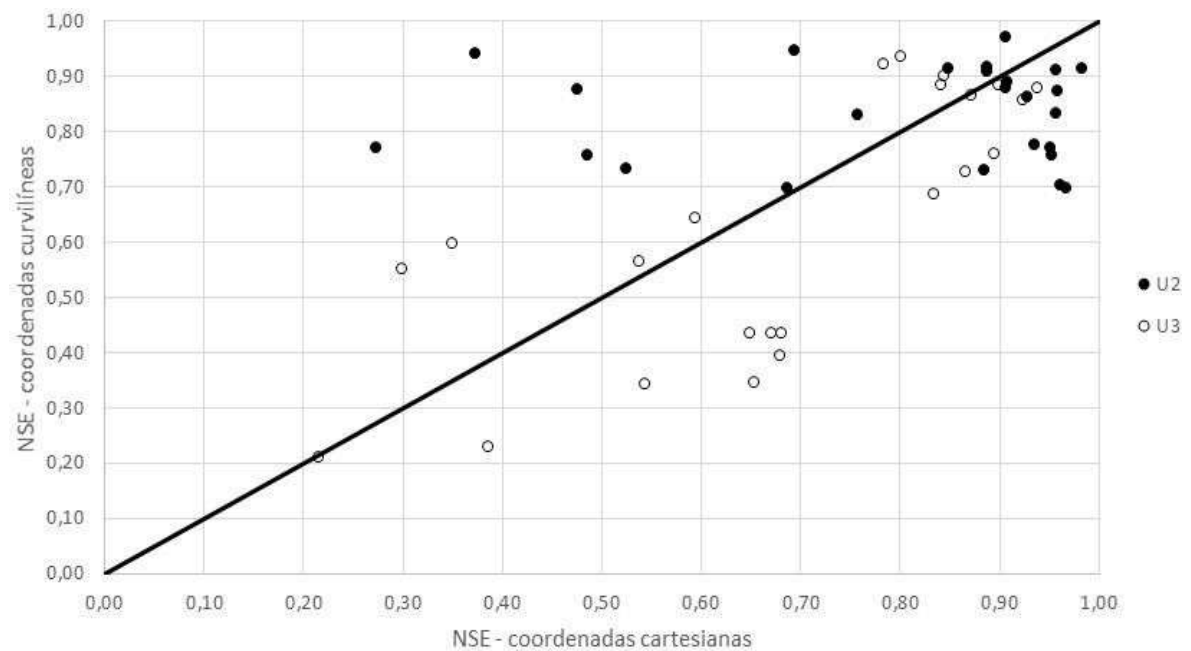
O desempenho das sub-rotinas. Cada boxplot corresponde ao mesmo tipo de coordenadas: da esquerda para a direita:  $Uy$  refere-se às coordenadas cartesianas; e  $U\xi$  refere-se a coordenadas curvilíneas. Figura 26 - Coeficiente de Nash-Sutcliffe (NSE). Figura 27 - Raiz do erro quadrático médio – RMSE.

Figura 28 – Todas as 42 verticais. Comparação dos resultados de NSE entre as coordenadas cartesianas e curvilíneas.



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Figura 29 – Pontos com NSE positivo. Comparação dos resultados de NSE entre as coordenadas cartesianas e curvilíneas



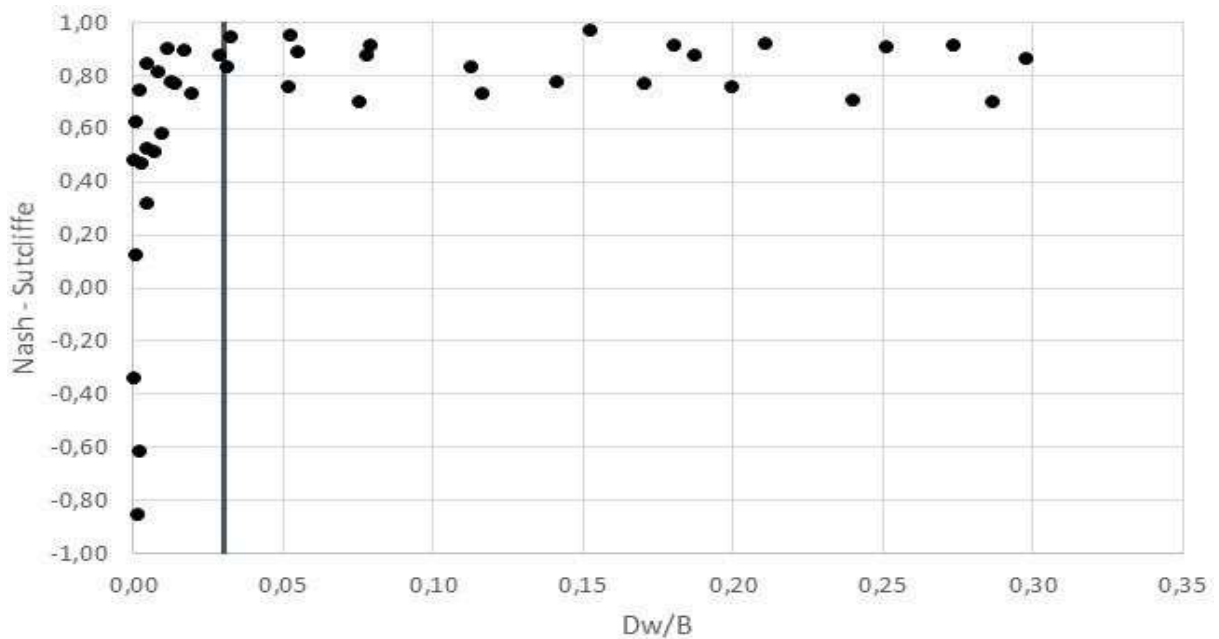
Fonte: Dados da pesquisa (2020).

A relação entre valores do coeficiente de Nash-Sutcliffe obtidos de duas formulações físicas (coordenadas cartesianas versus coordenadas curvilíneas). Figura 28 - Todas as 42 verticais. Figura 29 - Pontos com NSE positivo.

Para a rotina U2 $\xi$ , aquela de melhor desempenho e levando em conta os três

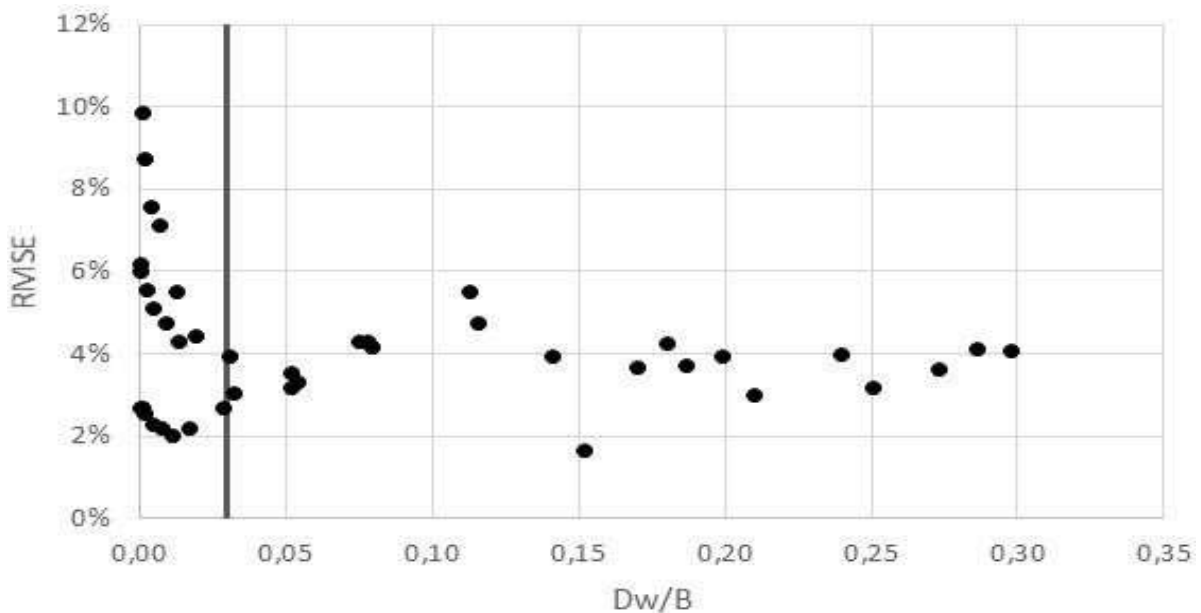
experimentos, observou-se que há 19 pontos cuja relação  $\frac{D_w}{B}$  é inferior a 0,03, em que  $D_w$  representa a distância horizontal entre um ponto do fluido e a parede mais próxima, e que dez deles possuem valores de NSE inferior a 0,6 e RMSE maior do que 4%. Enquanto que todos os 22 pontos com  $\frac{D_w}{B}$  superior a 0,03 possuem NSE superior a 0,60 e entre estes, há 14 pontos com RMSE menor do que 4%. Isto significa que o modelo prevê muito bem os valores de velocidade em regiões relativamente distantes de uma das paredes laterais do canal. Possivelmente a principal causa para que o modelo tenha apresentado desempenho inferior em regiões distantes do centro do canal é que nelas há uma forte influência da tensão de cisalhamento tanto na parede como no leito, gerando fortes turbulências e elevados gradientes de velocidade.

Figura 30 – Coeficiente de Nash-Sutcliffe (NSE). Resultados referentes à distância horizontal para a parede do canal



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Figura 31 – Raiz do erro quadrático médio – RMSE. Resultados referentes à distância horizontal para a parede do canal



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Desempenho das sub-rotinas. Cada ponto refere-se a uma vertical de um dos experimentos (SRP1, SRP2 ou SRP3). A variável  $D_w$  refere-se à distância da vertical à parede mais próxima; e  $B$  é a largura do canal. As linhas cinzas verticais indicam a zona de influência direta das paredes sobre o modelo ( $D_w/B < 0,03$ ). Figura 30 - Coeficiente de Nash-Sutcliffe (NSE). Figura 31 - Raiz do erro quadrático médio – RMSE.

### 3.4 Conclusões

Pode-se concluir que os modelos hidrodinâmicos de entropia com duas restrições tiveram melhor desempenho que aqueles com uma restrição, e que a segunda restrição inclui relevante informação para o sistema. Em contraste, modelos com três restrições apresentaram desempenhos piores que aqueles com duas restrições, mostrando que a perda de informação devido ao uso de soluções numéricas pode superar o ganho de informação devido a terceira restrição. O modelo de entropia de melhor desempenho (com duas restrições e coordenadas curvilíneas,  $U2\xi$ ) conseguiu simular bem os dados laboratoriais medidos com precisão para perfis verticais com distâncias a parede do canal superiores a 3% da largura do canal. Para perfis verticais com distâncias menores do que 3% da largura do canal, os modelos estudados não desempenharam bem pois as informações específicas sobre os processos predominantes não foram fornecidas nem na formulação primária nem nas restrições. Concluiu-se também que, no



presente estudo de caso, a substituição de uma formulação primária fraca (baseada em coordenadas cartesianas, Equação 2) por uma formulação primária forte (baseada em coordenadas curvilíneas, Equação 19) conduziu mais informação ao sistema que a inclusão da terceira restrição.

## 4 EFICIÊNCIA DA RETENÇÃO DE SEDIMENTOS EM PEQUENOS RESERVATÓRIOS

### 4.1 Modelagem dos processos

#### 4.1.1 Modelo de Camp

O modelo de Camp (1946) tem como base a Equação 25 para calcular a eficiência da retenção de sedimentos em reservatórios ( $\eta$ ).

$$\eta = 1 - X_c + \sum_0^{X_c} \frac{V_s}{V_c} \Delta X \quad (25)$$

Em que  $V_s$  é a velocidade de sedimentação (Equação 26, HAAN *et al.*, 1994),  $V_c$  é a velocidade crítica de sedimentação (Equação 27, HAAN *et al.*, 1994),  $X_c$  é a fração mássica do sedimento cujas partículas possuem  $V_s < V_c$ . Nesta pesquisa utilizou-se a classificação do sedimento desagregado, de acordo com a dimensão da partícula, com base no ISSS (*International Society for the Systems Sciences*). Segue a Tabela 3, com a referida classificação:

Tabela 3 - Classificação do sedimento desagregado em função do intervalo diametral, com base em ISSS (*International Society for the System Sciences*).

Sedimento	Diâmetro $\phi$ (mm)
Areia	0,05 < $\phi$ < 0,20
Silte	0,002 < $\phi$ < 0,05
Argila	$\phi$ < 0,002

Fonte: Lal e Shukla (2004).

$$V_s = \frac{g}{18\nu} \left( \frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) \phi^2 \quad (26)$$

$$V_c = \frac{Q}{A_r} \quad (27)$$

Nas Equações 26 e 27,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\nu$  é a viscosidade cinemática da água,  $\phi$  é o diâmetro da partícula,  $Q$  é a vazão afluyente,  $A_r$  é a área do espelho d'água do reservatório,  $\rho_s$  e  $\rho$  são, respectivamente, as massas específicas do sedimento e da água.

$$X_c = \sum_1^n \Delta X_i \quad (28)$$

Na Equação 28,  $\Delta X_i$  é a fração mássica, da massa afluyente de sedimentos, referente a uma faixa granulométrica  $i$ , cujas partículas possuem velocidade de sedimentação inferior à velocidade crítica,  $n$  é a quantidade de faixas granulométricas com esta característica

e o índice  $i$  pode assumir valores inteiros de 1 a  $n$ .

O modelo referente à Equação 25 tem como base a premissa de que a deposição ocorre da seguinte forma: as partículas que possuem velocidade de sedimentação  $V_s$  maior que a velocidade crítica  $V_c$  ficarão retidas no leito, enquanto que as partículas remanescentes (aquelas com  $V_s < V_c$ ) são transportadas pelo fluxo de água. Algumas delas podem ficar retidas no fundo do reservatório ou acabam saindo do reservatório no caso de eventual transbordamento. A outra hipótese do modelo é que a fração das partículas com  $V_s < V_c$  e que ficam retidas é proporcional à razão  $V_s / V_c$ .

A Equação 25 tende a superestimar a eficiência da retenção de sedimentos, pois em sua formulação não é levada em conta a probabilidade de uma partícula de sedimento ressuspender do leito. Este processo de ressuspensão é estocástico, dadas as incertezas inerentes à granulometria e à força hidrodinâmica, que depende da velocidade longitudinal da água e de seu gradiente na região próxima ao leito.

#### **4.1.2 Modelo de entropia para a probabilidade de ressuspensão**

A probabilidade de ressuspensão de sedimentos depende da magnitude das forças atuantes em uma partícula do sedimento. As forças de resistência ao movimento de ressuspensão são o peso  $W$  e a força de coesão  $F_c$ , calculadas pelas Equações 29 e 30:

$$W = \frac{\pi}{6} \rho_s \phi^3 \quad (29)$$

$$F_c = CA_\phi \quad (30)$$

Em que  $A_\phi$  é a área de projeção da partícula e  $C$  é a tensão de coesão do sedimento. A força hidrodinâmica que favorece a ressuspensão é deduzida a partir da equação de Bernoulli (Equação 31). Isola-se, no lado esquerdo da Equação 31, a diferença  $P_0 - P_1$  e multiplicando o termo por  $A_\phi$ , obtém-se a Equação 32 para a soma das forças hidrodinâmica (força de elevação)  $L$  e força hidrostática (empuxo)  $E$ :

$$\frac{P_0}{\gamma} + \frac{u_0^2}{2g} + y_0 = \frac{P_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} + y_1 \quad (31)$$

Na Equação 31,  $P$  é a pressão,  $u$  é a velocidade longitudinal do fluido,  $y$  é a distância

entre um ponto do fluido e o leito. Os índices 0 e 1 indicam, respectivamente, o ponto inferior e o ponto superior na superfície da partícula.

$$L + E = (P_0 - P_1)A_\phi = \rho A_\phi \Delta y \left( u \frac{\Delta u}{\Delta y} + g \right) \quad (32)$$

Na equação 32, usou-se as substituições  $u = \frac{u_0 + u_1}{2}$ ,  $\Delta u = u_0 - u_1$  e  $\Delta y = y_0 - y_1$ . Considerando que  $\Delta y = \phi$ ,  $E = \rho g A_\phi \Delta y$  e  $\Delta u \cong du$ , a força L é dada pela equação 33:

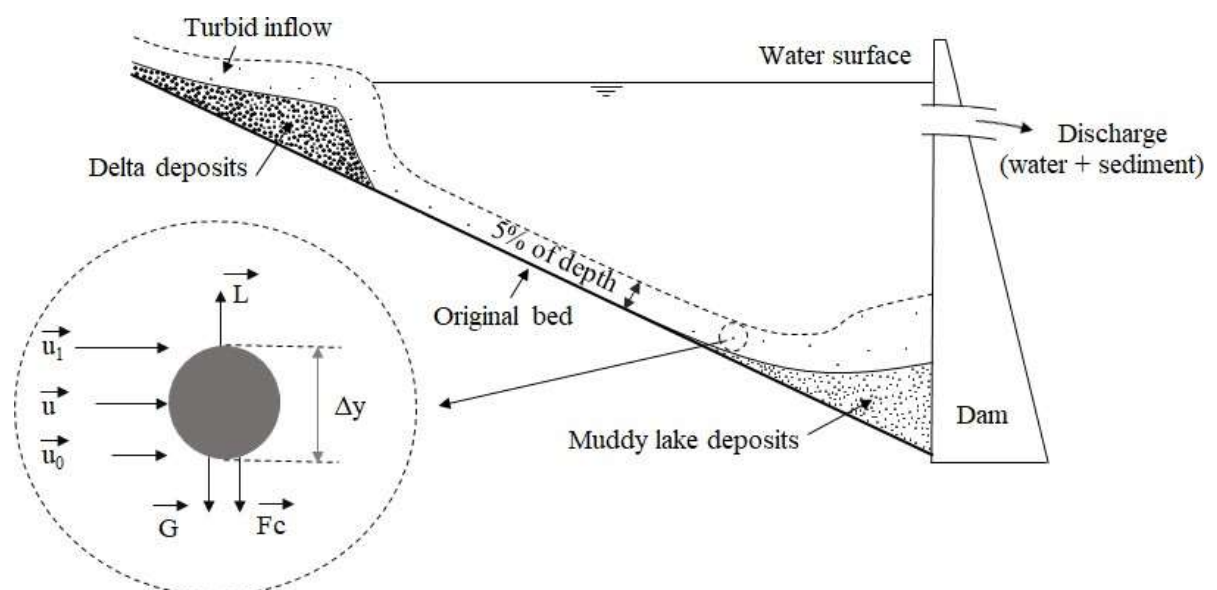
$$L = \rho A_\phi (\Delta y) \omega \quad (33)$$

Na Equação 33,  $\omega$  é o produto da velocidade pelo seu gradiente, ou seja:

$$\omega = u \frac{du}{dy} \quad (34)$$

A figura 32 exibe um corte longitudinal de um reservatório, além dos vetores que representam as forças que atuam em uma partícula de sedimento e as velocidades do fluido em torno dela.

Figura 32 – Corte longitudinal de um reservatório e representação da dinâmica de partículas de sedimento no processo de ressuspensão



Fonte: Desenho elaborado pelo Autor (2020).

No limiar da ressuspensão, a soma da força hidrodinâmica L com o empuxo E, que

favorecem a ressuspensão, é igual a soma das forças de resistência, peso  $W$  e força de coesão  $F_c$  da partícula. Portanto a probabilidade de uma partícula ressuspender equivale a probabilidade de  $L > G + F_c$ . Em que  $G$  é o peso efetivo da partícula dada pela Equação 35:

$$G = W - E \quad (35)$$

Como a força hidrodinâmica  $L$  depende tanto da velocidade  $u$  como de seu gradiente  $\frac{du}{dy}$  (ver as Equações 33 e 34), o cálculo da probabilidade de ressuspensão depende de um modelo hidrodinâmico confiável.

Silva Filho *et al.* (2020) avaliaram seis modelos hidrodinâmicos baseados no PME e que simulam um campo de velocidade em canal aberto. Os autores concluíram que um modelo, denominado U2 $\xi$  (duas restrições e coordenadas curvilíneas) ao utilizar uma função logarítmica, obteve o melhor desempenho entre todos os modelos avaliados, o que reforça o uso de funções deste tipo para o cálculo da força hidrodinâmica  $L$ .

Nesta pesquisa foi utilizada a equação de Prandtl-von Kàrman (Equação 36) (Prandtl, 1904), que descreve a velocidade por uma função logarítmica. As justificativas para a aplicação desta equação, neste trabalho, são a relativa facilidade para obtenção de seus parâmetros, além de apresentar bom desempenho na simulação de velocidade tanto em regiões próximas ao leito como naquelas distantes da parede (ARAÚJO; CHAUDHRY, 1998); e além disso, como o reservatório, objeto desta pesquisa, possui razão de aspecto (largura dividido pela profundidade) maior do que cinco, as paredes pouco influenciam na simulação da velocidade do fluido.

$$u = \frac{u_*}{k} \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) \quad (36)$$

Na Equação 36,  $u$  é a velocidade longitudinal em um ponto do fluido,  $u_*$  é a velocidade de cisalhamento, que é uma forma pela qual a tensão de cisalhamento é representada em unidades de velocidade,  $k = 0,40$  é a constante de Prandtl-von Kàrman,  $y$  é a distância de um ponto do fluido até o leito e  $y_0$  é a espessura do leito onde a ressuspensão não ocorre pois nesta faixa a velocidade é considerada nula. O gradiente de velocidade (Equação 37) é calculado através da derivada da função  $u(y)$  (Equação 37), em relação a  $y$  :

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_*}{k} \frac{1}{y} \quad (37)$$

Com as Equações 36 e 37, a variável  $\omega$  pode ser calculada pela Equação 38.

$$\omega = u \frac{du}{dy} = \frac{u_*^2}{k^2 y} \text{Ln}\left(\frac{y}{y_0}\right) \quad (38)$$

Considerando que a partícula ressuspende quando a força hidrodinâmica  $L$  possui um valor superior à soma as forças de resistência: peso efetivo  $G$  (peso  $W$  subtraído do empuxo  $E$ ) e força de coesão  $F_c$ , e inferior ou igual ao valor máximo de  $L$ ,  $L_{max}$ , o qual pode ser obtido da Equação 39 que é solução de  $dL/dy = 0$ , a probabilidade de ressuspensão é calculada pelas Equações 40a e 40b.

$$L_{max} = \rho A_\phi D \omega_{ma} \quad (39)$$

$$P_r = \int_{G+F_c}^{L_{max}} f(L) dL, \text{ se } L_{max} \geq G + F_c \quad (40a)$$

$$Pr = 0, \text{ se } L_{max} < G + F_c \quad (40b)$$

Em que o valor máximo de  $\omega$ ,  $\omega_{max}$ , é obtido pela Equação 41, através da solução da equação  $d\omega/dy = 0$  e pela substituição de  $y_{max}$  por  $0,05D$ . O leito e a distância equivalente a cinco por cento da profundidade do reservatório foram considerados, nesta pesquisa, como limites da região onde ocorrem com maior relevância os processos de ressuspensão (ITAKURA; KISHI, 1980; CELIK; RODI, 1984; AKIYAMA; FUKUSHIMA, 1986; GARCÍA; PARKER, 1991).

$$\omega_{max} = \frac{u_* u_{max}}{k D} \quad (41)$$

A função densidade de probabilidade  $f(L)$  dada pela Equação 42 é obtida a partir da maximização da função entropia (Equação 43), através do método dos multiplicadores de Lagrange e sujeita às duas restrições (Equações 44 e 45). Silva Filho *et al.* (2020) concluíram que modelos de entropia para campo de velocidade em canais abertos, com duas restrições, desempenharam melhor do que outros modelos com três restrições, devido principalmente ao fato de que a inserção de uma terceira restrição à modelagem, demanda uma solução numérica de relativo alto esforço computacional e de menor precisão na simulação.

$$f(L) = e^{\lambda_1 - 1} e^{\lambda_2 L} \quad (42)$$

$$H(L) = - \int f(L) \ln f(L) dL \quad (43)$$

$$\int_0^{L_{max}} f(L) dL = 1 \quad (44)$$

$$\int_0^{L_{max}} L f(L) dL = \bar{L} \quad (45)$$

Os multiplicadores de Lagrange  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  dependem da solução do sistema formado pelas Equações 44 e 45, e que resulta nas Equações 46, 47 e 48.

$$\lambda_2 = R \cdot L_{max} \quad (46)$$

$$\frac{L_{max}}{\bar{L}} = \frac{R(e^R - 1)}{e^R (R - 1) + 1} \quad (47)$$

$$\lambda_1 = 1 + \ln\left(\frac{\lambda_2}{e^{R-1}}\right) \quad (48)$$

A partir dos valores de  $L_{max}$  e  $\bar{L}$  obtidos, respectivamente, das Equações 39 e 49, calcula-se o valor do parâmetro R.

$$\bar{L} = \frac{\int_{y_0}^{y_{max}} L(y) dy}{\int_{y_0}^{y_{max}} dy} \quad (49)$$

Considerando  $y_{max} = 0,05 \cdot D$ , em que D é a profundidade média do reservatório, e considerando que  $y_{max}$  é muito maior que  $y_0$ , podemos estimar o valor de  $\bar{L}$  pela Equação 50.

$$\bar{L} = \frac{\gamma A_\phi D}{2} \quad (50)$$

A partir das Equações 51 e 52 obtemos a Equação 53 que relaciona a velocidade de cisalhamento  $u^*$  com as velocidades média  $\bar{u}$  e máxima  $u_{max}$ .

$$\bar{u} = \frac{\int_{y_0}^{0,05D} u(y) dy}{\int_{y_0}^{0,05D} dy} \quad (51)$$

$$u_{max} = \frac{u_*}{k} \text{Ln}\left(\frac{0,05D}{y_0}\right) \quad (52)$$

$$u_* = k(u_{max} - \bar{u}) \quad (53)$$

O valor da velocidade máxima,  $u_{max}$  pode ser estimado pela velocidade na saída do reservatório que é calculada pelo quociente entre a vazão e a área da seção de saída do reservatório.

#### 4.1.3 Modelo Retsed

O modelo proposto nesta tese para avaliação da eficiência de retenção de sedimentos utiliza a Equação 54 que acopla a probabilidade de ressuspensão à Equação 25.

$$\eta = (1 - X_c)(1 - \bar{P}_r) + \sum_0^{X_c} \frac{V_{si}}{V_c} (1 - P_{ri}) \quad (54)$$

Na Equação 54,  $\bar{P}_r$  é a probabilidade média de uma partícula com  $V_s > V_c$  ressuspender e  $P_{ri}$  é a probabilidade de uma partícula da faixa granulométrica  $i$  (com  $V_s < V_c$ ) ressuspender. Considerando a possibilidade de uma partícula do sedimento ressuspender e não ficar retida, o modelo *Retsed* tende a reduzir a eficiência da retenção de sedimentos superestimada pela Equação 25.

As simulações das Equações 25 e 54 foram então comparadas entre si e seus respectivos valores médios foram também comparados ao valor médio de eficiência de retenção de sedimentos medido em campo.

– Cada simulação foi realizada da seguinte forma: para cada intervalo de tempo de uma hora com a vazão afluyente líquida  $Q$ , medida em campo, calculou-se a velocidade média  $\bar{u}$  em m/s, através do quociente  $\frac{Q}{A}$ ; em que  $A$  é a área média da seção transversal do reservatório. O valor da velocidade máxima  $u_{max}$  equivale à velocidade na saída do reservatório que é igual ao quociente entre a vazão e a área da seção de saída do reservatório. Da Equação 53 calculou-se a velocidade de cisalhamento  $u_*$  e então obtem-se o valor de  $\omega_{max}$  da Equação 41.

Em seguida vem a etapa de parametrização que consiste nos cálculos dos multiplicadores de Lagrange pelas Equações 46 e 48. Para isso os valores máximo e médio da



força de elevação  $L$ ,  $L_{\max}$  e  $\bar{L}$  são obtidos das Equações 39 e 50, e então o parâmetro de entropia  $R$  é calculado numericamente pela Equação 47. Para o cálculo das forças  $G$  (Peso efetivo) e  $F_c$  (força de coesão) das partículas depositadas no delta com  $V_s > V_c$ , calculou-se previamente o diâmetro crítico  $\phi_c$  pela Equação 55.

$$\phi_c = \left[ \frac{18\nu V_c}{g} \left( \frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right)^{-1} \right]^{0,5} \quad (55)$$

Na Equação 55, foram usados os valores  $\nu = 1.10^{-6} \text{m}^2\text{s}^{-1}$ ,  $g = 9,81 \text{ms}^{-2}$ ,  $\rho_s = 2650 \text{Kgm}^{-3}$ ,  $\rho = 997 \text{Kgm}^{-3}$  e a velocidade crítica foi calculada pela Equação 27. Para cada faixa granulométrica, com  $V_s > V_c$ , calcula-se o valor de  $X_c$  pela Equação 28. Como a eficiência de retenção de sedimentos não depende apenas da granulometria, mas também da vazão, que influencia no valor da força hidrodinâmica de elevação, a eficiência ponderada  $\eta_w$  pela vazão também foi calculada para cada modelo (Camp e *Retsed*), pela Equação 56.

$$\eta_w = \frac{\sum \eta Q}{\sum Q} \quad (56)$$

Em que  $\sum \eta \cdot Q$  é a soma de todos os produtos da eficiência de retenção pela vazão medida e  $\sum Q$  é a soma de todas as vazões medidas. A eficiência ponderada  $\eta$ , em relação à vazão de sólidos suspensos, foi calculada pela Equação 57.

$$\eta_{w(ss)} = \frac{\sum \eta Q_{ss}}{\sum Q_{ss}} \quad (57)$$

Em que  $\sum \eta \cdot Q_{ss}$  é o somatório de cada eficiência de retenção pela vazão de sólidos suspensos que foi medida em campo e  $\sum Q_{ss}$  é a soma de todas as vazões de sólidos suspensos.

## 4.2 Experimento de campo

O experimento de campo, destinado a validar o modelo *Retsed* e comparar seu desempenho ao modelo de Camp (1946), foi desenhado e aplicado por Pereira (2020). As condições e os métodos do experimento serão sinteticamente apresentados. A microbacia experimental possui uma área de aproximadamente 15 ha e está inserida no Núcleo de Desertificação de Gilbués, Piauí, sendo controlada por uma barragem de retenção e controle de sedimentos (*check dam*) e reservatório de água com uma área aproximadamente igual a 265 m<sup>2</sup> com profundidade média de 0,87m e uma área média de seção transversal igual a

3,39 m<sup>2</sup>. O clima da região é, de acordo com a classificação de Köppen, do tipo Aw. A área experimental insere-se na maior área em desertificação do Brasil (Simplício *et al.*, 2020). As coordenadas da barragem experimental são Longitude: 462183 Oeste e Latitude 8908168 Sul (Datum UTM SIRGAS2000 23S), havendo 89 barragens a montante. A área de contribuição direta é inferior a um hectare. O monitoramento, realizado entre julho de 2018 e julho de 2019, foi realizado com base nos seguintes equipamentos: estação meteorológica automática completa, incluindo pluviômetro de báscula medindo a cada 5 minutos. Na saída da barragem experimental foi instalada uma estação hidrossedimentológica com calha Parshall, à qual estava acoplado sensor automático de pressão (modelo HOB0 U20-001-01) e sensor automático de turbidez (modelo DTS - 12) com resolução de 0,01 NTU, o que permitiu avaliar a vazão líquida e sólida que deixou a barragem. O assoreamento da barragem experimental foi avaliado por meio de modelo digital de elevação com pixels a cada 2 cm, gerado por meio de veículo aéreo não tripulado (VANT – Phantom 4). Para o processamento das imagens usaram-se os softwares SAGA GIS versão 2.1.2 e QGIS versão 2.8. Foram feitos ensaios em laboratório de três amostras indeformadas para avaliar a massa específica aparente seca do material depositado.

### 4.3 Resultados e discussão

Avaliamos os desempenhos dos modelos de Camp (1946) e *Retsed* baseados em suas simulações e em medidas de vazões líquida e de sólidos suspensos para 1330 intervalos de 1h, através de análise estatística descritiva, gráficos de dispersão, boxplots e testes estatísticos. O teste t de Student comparou as médias e os desvios padrão dos conjuntos de valores simulados por ambos os modelos e o teste z comparou a eficiência média de cada modelo com o valor médio medido em campo.

A Tabela 4 mostra o valor do coeficiente de correlação entre os dois modelos pesquisados, os valores máximo e mínimo simulados para cada modelo, além da estatística descritiva que consta dos valores de medida central (média, mediana e moda) e de medidas de dispersão (variância, desvio- padrão e coeficiente de variação).

Observa-se na Tabela 4 que o modelo de Camp obteve média (0,89) e mediana (0,90) superiores ao valor médio medido em campo (0,86). Estes resultados indicam que o modelo de Camp superestimou os dados medidos. O modelo *Retsed* apresentou média (0,81) inferior a 0,86 e mediana 0,90, ou seja, maior que 0,86, o que evidencia a subestimação em

relação às medidas de campo.

Tabela 4 – Estatística descritiva referente às simulações dos modelos: Camp (1946) e *Retsed* para 1330 intervalos com medidas horárias de vazões líquida e sólida do experimento de Pereira (2020)

<b>Análise estatística da Eficiência de retenção de sedimentos</b>	<b>Camp (1946)</b>	<b><i>Retsed</i></b>
Média	0,89	0,81
Mediana	0,90	0,90
Moda	0,90	0,90
Variância	0,001	0,028
Desvio padrão	0,03	0,17
Coeficiente de variação	3,40%	20,80%
Mínimo valor simulado	0,71	0,14
Máximo valor simulado	0,93	0,93
Coeficiente de correlação	0,95	0,95

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

A Tabela 5 apresenta os dados de frequência relativa referentes aos valores de eficiência de retenção de sedimentos simulados por ambos modelos: Camp e *Retsed*. Os valores são inferiores a 0,81 (Média das simulações do modelo *Retsed*), superiores a 0,90 (valor mediano de ambos os modelos), além de valores compreendidos entre 0,81 e 0,90.

Pode ser observado, pela tabela 5, que o modelo de Camp tende a superestimar os valores medidos em campo, pois ele possui 87,4% de suas simulações com valores superiores a 0,86 (valor médio medido), frequência relativa de 75,0% com valores iguais ou acima do seu valor médio simulado (0,89), e além disso, 69,7% de seus dados simulados possuem valores iguais ou superiores a 0,90 (valor mediano).

Apesar de o modelo *Retsed* apresentar uma frequência relativa de 55,9% para o valor de eficiência igual a 0,90 (em torno de 11% superior à média das simulações do próprio modelo), ele subestima o valor médio medido em campo, ao apresentar 36,1% de dados simulados com valores inferiores ao valor médio medido, além de conter 32% de seus dados simulados no intervalo de  $\eta < 0,81$  (valor médio obtido pelo próprio modelo).

Tabela 5 - Frequências relativas dos valores simulados de eficiência da retenção de sedimentos para os modelos de Camp (1946) e Retsed aplicados ao experimento de Pereira (2020)

<b>Eficiência de retenção de sedimentos (<math>\eta</math>)</b>	<b>Camp(1946)</b>	<b>Retsed</b>
Inferior a 0,81	3,7 %	32,0 %
0,81	1,5 %	1,1 %
0,82	2,4 %	0,5 %
0,83	2,1 %	1,0 %
0,84	2,3 %	1,2 %
0,85	0,3 %	0,3 %
0,86	1,8 %	1,2 %
0,87	5,3 %	1,1 %
0,88	7,1 %	0,8 %
0,89	5,3 %	0,4 %
0,90	61,0 %	55,9 %
Superior a 0,90	8,7 %	4,6 %

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Os relatórios de testes estatísticos (t de Student e o teste z) são apresentados pelas tabelas 6, 7 e 8. O primeiro comparou as médias das simulações de ambos os modelos: Camp e Retsed, enquanto o segundo comparou a média de cada modelo com o valor médio medido em campo. Ambos os testes foram aplicados com um nível de significância de 5% e confiança de 95%.

Observa-se, através da Tabela 6, que o teste t de Student mostra; com confiança de 95%, nível de significância de 5% e baseado nas simulações realizadas neste trabalho; que os modelos de Camp e Retsed são estatisticamente diferentes, pois em média, a diferença entre as médias das simulações apresentadas pelos dois modelos foi de 0,082, com diferença mínima de 0,074. Como o valor-p é inferior a 0,001, a hipótese alternativa ( $H_1: \eta_c > \eta_r$ ) foi aceita, ou seja a média do modelo de Camp é maior que a média do modelo Retsed.

Tabela 6 – Teste t de Student comparativo das médias entre as simulações dos modelos Camp (1946) e Retsed aplicados ao experimento de Pereira (2020).

<b>Teste t (Diferença entre amostras)</b>	<b>Camp e Retsed</b>
Diferença média	0,082
Diferença mínima	0,074
Valor-p	< 0,001
Hipótese nula rejeitada	$H_0: \eta_c = \eta_r$
Hipótese alternativa aceita	$H_1: \eta_c > \eta_r$
Nível de significância	0,050

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

O teste z tem relevância nesta pesquisa, pois ele compara a média medida em campo com cada média simulada pelos modelos de *Camp* e *Retsed*, com confiança de 95% e nível de significância de 5%. Ambas as Tabelas 7 e 8 apresentam valores-p nulos, rejeitando assim as hipótese nula em que ambos os modelos seriam estatisticamente iguais.

Tabela 7 – Teste z para a média medida e média das simulações do modelo de *Camp* (1946) aplicado ao experimento de Pereira (2020)

<b>Teste z</b>	<b>Camp</b>
Intervalo de confiança (95%)	0,886 – 0,889
Valor-p	0,000
Média dos valores medidos	0,860

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Tabela 8 – Teste z para a média medida e média das simulações do modelo de *Retsed* aplicado ao experimento de Pereira (2020)

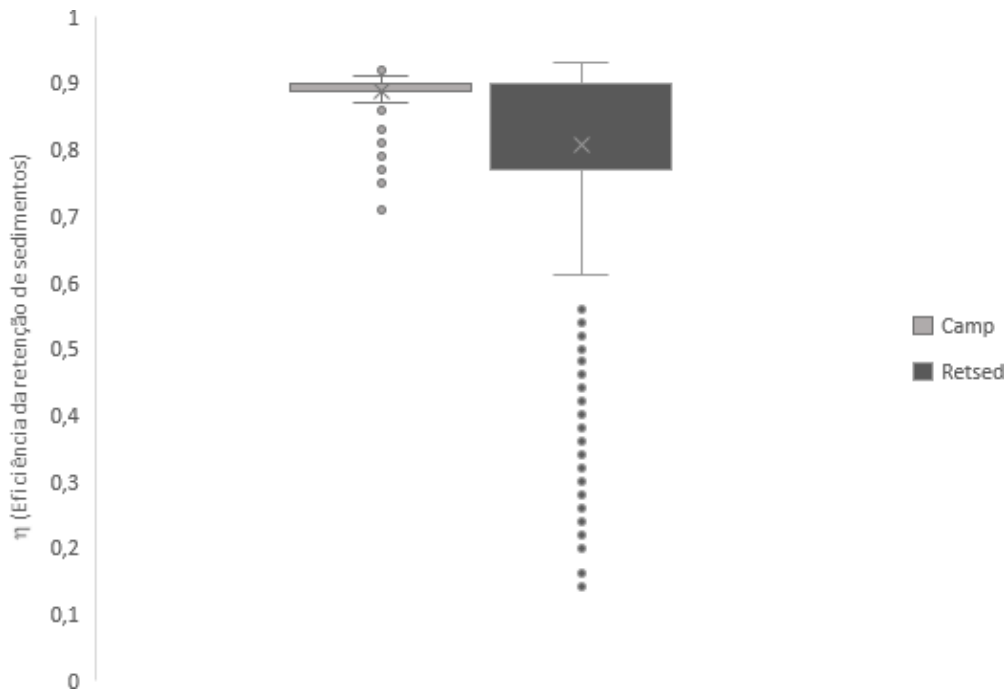
<b>Teste z</b>	<b>Retsed</b>
Intervalo de confiança (95%)	0,797 – 0,815
Valor-p	0,000
Média dos valores medidos	0,860

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

O teste z (Tabela 8) foi aplicado para comparar a média das simulações de cada modelo (*Camp* e *Retsed*) com o valor médio de eficiência de retenção de sedimentos medido em campo igual a 0,860. Com um intervalo de confiança igual a 95%, a média máxima do modelo *Retsed* foi igual a 0,815 e a média mínima do modelo de *Camp* foi de 0,886. Os valores-p foram iguais a zero para os dois modelos. Isto nos leva a rejeitar as hipóteses nulas, em que cada modelo possuiria média igual a 0,860, aceitando as hipóteses alternativas, em que ambos os modelos possuiriam médias diferentes de 0,860.

A figura 33 mostra os valores das simulações de *Camp* e *Retsed*. As simulações feitas pelo modelo *Retsed* apresentaram uma maior dispersão comparada ao do modelo de *Camp*. A variância e o desvio-padrão, 0.028 e 0.17, respectivamente foram muito superiores aos respectivos valores do modelo de *Camp* (0.001 e 0.03). Além disso, o modelo de *Camp* apresentou amplitude igual a 0,22; valor bem inferior ao do modelo *Retsed* (0,79). Isto demonstra que o modelo de *Retsed* simulou as probabilidades de ressuspensão de acordo com a granulometria apresentada pelo material encontrado durante o experimento e que possui a seguinte distribuição: argila, em torno de 30%; silte, 48% e areia, 22%. Estas porcentagens são referentes a todo o material encontrado tanto no delta como no fundo do reservatório.

Figura 33 – Eficiência de retenção de sedimentos para o experimento de Pereira (2020): aplicação dos modelos Camp (1946) e *Retsed*.

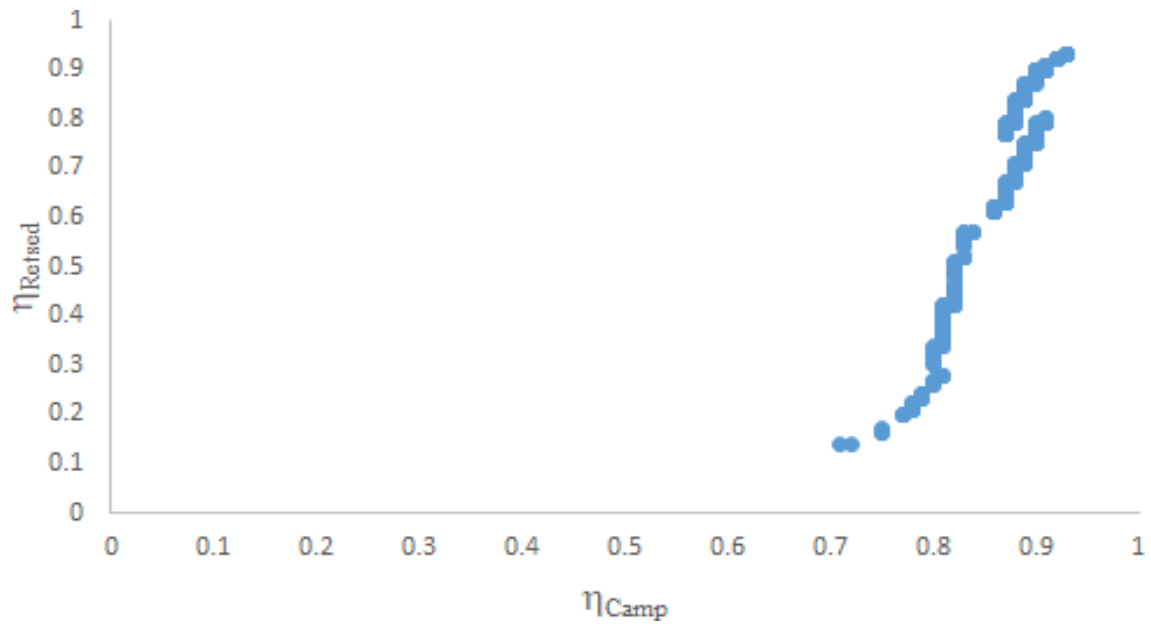


Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

A figura 34 apresenta um gráfico de dispersão para as simulações das eficiências de retenção pelos dois modelos: Camp e *Retsed*. A disposição dos pontos evidencia mais ainda o fato dos dois modelos serem distintos, no que diz respeito à estimação da eficiência de retenção de sedimentos. Observa-se que todos os valores simulados por Camp são maiores que 0,70, enquanto o modelo *Retsed* apresenta diversos valores abaixo deste mesmo valor.

O modelo *retsed* apresentou vários resultados de eficiência de retenção de sedimentos inferiores a eficiência de retenção média medida em campo (0,86), incluindo valores em torno de 0,14. Enquanto o modelo de Camp (1946) apresentou uma pequena dispersão dos dados, cujos valores de simulação estão compreendidos entre os valores de 0,71 e 0,93 o que evidencia que o modelo não simulou a eficiência de retenção de sedimentos de acordo com a distribuição granulométrica do sedimento encontrado no leito durante o experimento.

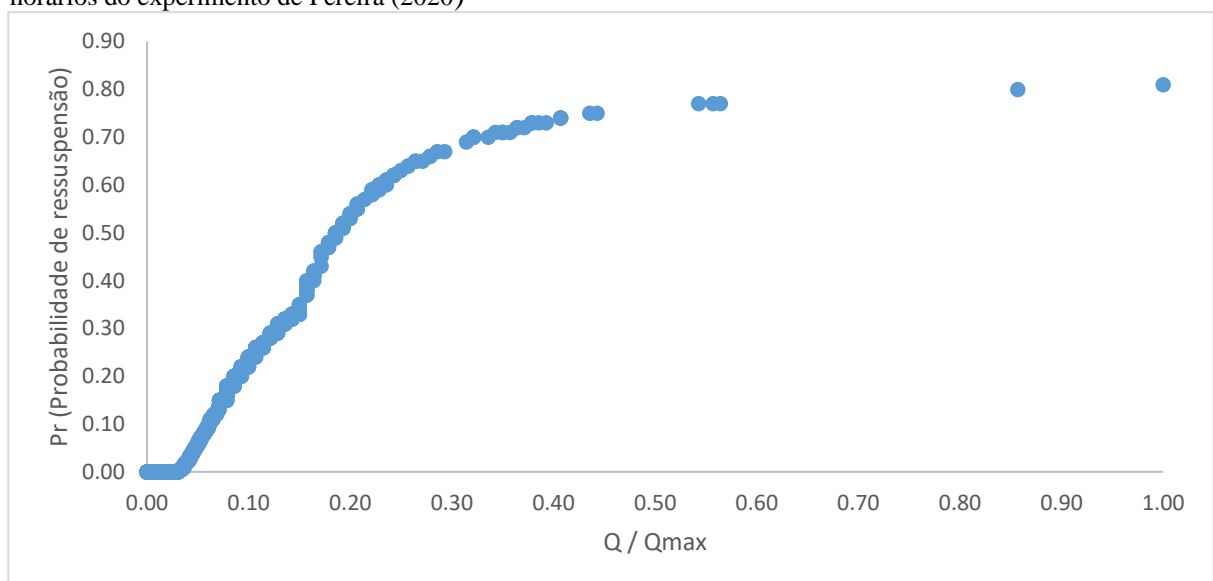
Figura 34 – Relação entre a eficiência de retenção de sedimentos dos modelos Camp (1946) e *Retsed* para o experimento de Pereira (2020)



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

A figura 35 apresenta uma curva empírica que relaciona a probabilidade de ressuspensão de sedimentos  $P_r$  com a vazão normalizada pelo valor máximo de vazão,  $Q / Q_{max}$ . A formulação desta função é uma alternativa para modelar a probabilidade  $P_r$ , necessitando apenas dos valores de vazões medidas para o seu cálculo.

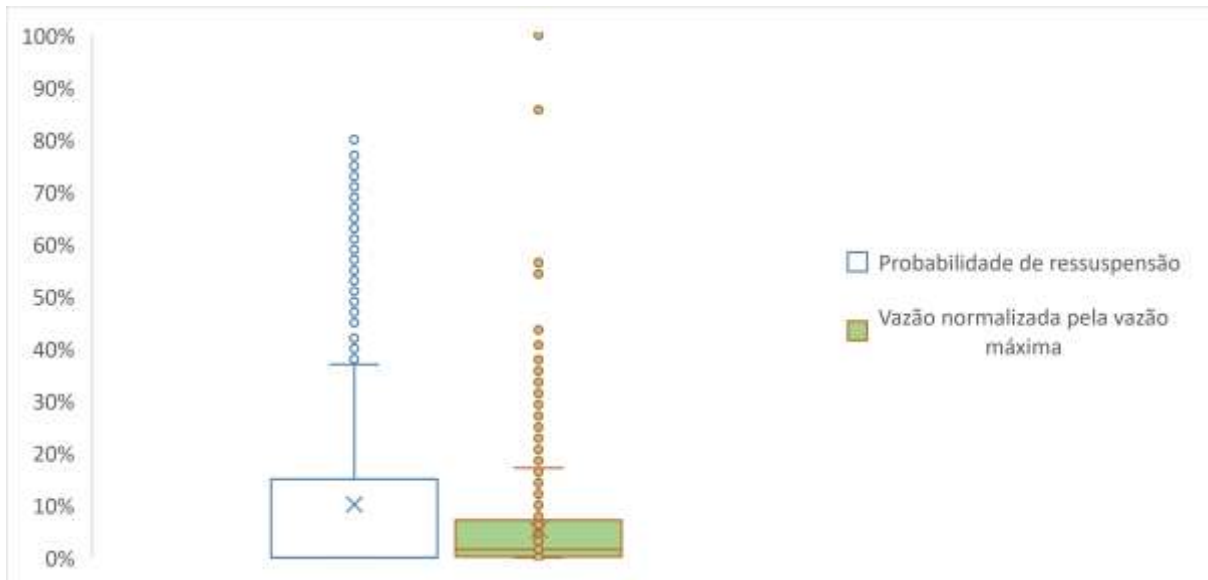
Figura 35 – Relação empírica entre a probabilidade de ressuspensão e a vazão normalizada para 1330 intervalos horários do experimento de Pereira (2020)



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

A figura 36 exibe gráficos com os valores de probabilidade de ressuspensão e de valor de vazão normalizada.

Figura 36 – Probabilidade de ressuspensão e vazão normalizada para 1330 intervalos de 1h com dados medidos no experimento de Pereira (2020)

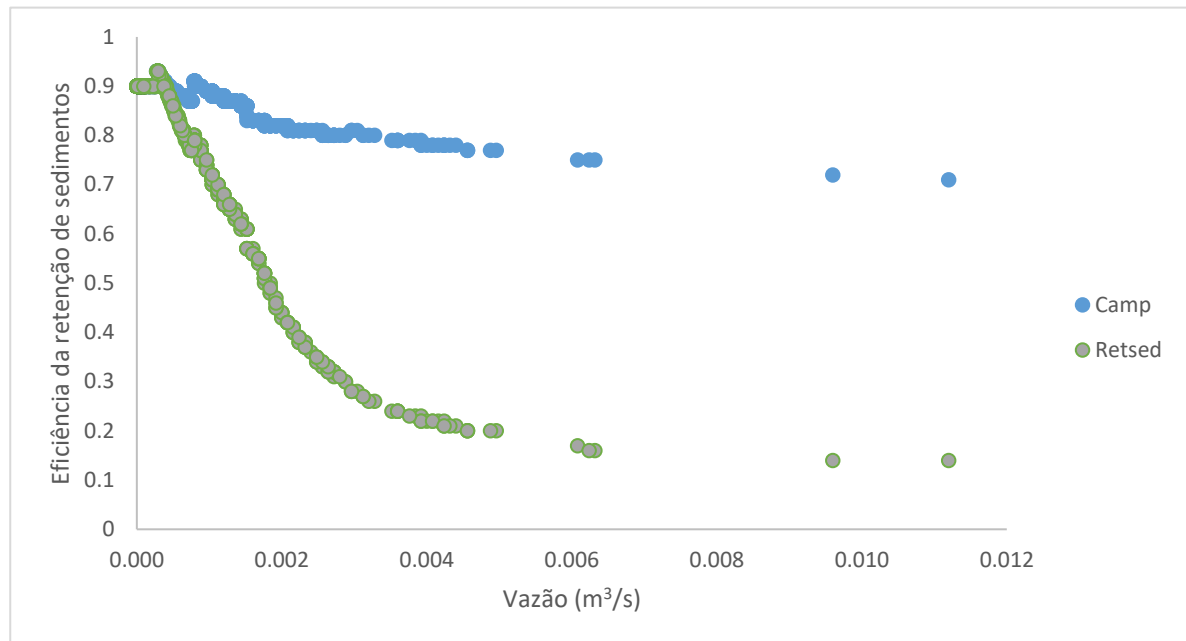


Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

A figura 37 mostra dois gráficos de dispersão que mostram as sensibilidades de ambos modelos Camp (1946) e *Retsed*, referentes às variações de vazões medidas por Pereira (2020). O modelo *Retsed* apresentou alta sensibilidade comparada a do modelo de Camp(1946), pois os seus valores simulados de eficiência de retenção decrescem rapidamente com o aumento nos valores de vazão. Para uma variação de  $0,011 \text{ m}^3$  por segundo nos valores de vazão, o modelo *Retsed* apresentou variação em torno de 0,76, enquanto o modelo de Camp apresentou variação inferior a 0,20 nos valores de eficiência de retenção de sedimentos. Portanto, o modelo *Retsed* levou em conta a força hidrodinâmica causada pela vazão e isto significa consistência física na avaliação da retenção de sedimentos.



Figura 37- Gráficos de dispersão que relaciona as eficiências da retenção de sedimentos simuladas pelos modelos de Camp (1946) e *Retsed* com dados medidos de vazões durante o experimento de Pereira (2020).



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

A Tabela 9 apresenta um resumo do relatório do teste t que compara as médias da probabilidade de ressuspensão e da vazão normalizada. As Figuras 17 e 18, assim como a Tabela 9, que relacionam a probabilidade de ressuspensão  $P_r$  calculada pelo método aqui proposto com a vazão normalizada  $\frac{Q}{Q_{max}}$  indica que não houve relação linear entre as variáveis. Portanto, o cálculo da probabilidade  $P_r$  por meio da vazão normalizada não demonstrou viabilidade.

Tabela 9 – Teste t de Student para a média entre valores de probabilidade de ressuspensão  $P_r$  e de vazão normalizada  $Q_n$  que equivale ao quociente  $Q/Q_{max}$ .  $Q$  é a vazão medida e  $Q_{max}$  é o valor máximo da vazão medida em campo.

Teste t (diferença entre amostras)	$P_r - Q_n$
Diferença média	0,049
Diferença mínima	0,040
Valor-p	< 0,001
Hipótese nula rejeitada	$H_0: P_r = Q_n$
Hipótese alternativa aceita	$H_1: P_r > Q_n$
Nível de significância	0,050

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

#### 4.4 Conclusões

Formulou-se, com base no princípio da entropia máxima de Shannon, um modelo para cálculo da probabilidade de ressuspensão de sedimentos em pequenos reservatórios. O processo de ressuspensão foi, então, inserido no modelo determinístico de Camp (1946), que calcula a eficiência de retenção de sedimentos em pequenos reservatórios, gerando-se o modelo *Retsed* (ou modelo de Camp modificado). Tomou-se um experimento de campo para avaliar o desempenho de ambos modelos. O modelo de Camp apresentou, em suas simulações, eficiência média de retenção de sedimentos ( $\eta$ ) de 0,89; cerca de 3,5% superior ao valor médio da eficiência medida em campo (0,86). Daí se conclui que o modelo de Camp conseguiu excelente desempenho para o experimento. Conclui-se também que o modelo de Camp superestimou a retenção. As simulações do modelo *Retsed* indicam que a probabilidade média de ressuspensão de sedimentos no experimento foi de 10,15%. Daí resultou que o modelo *Retsed* calculou a eficiência média do experimento como sendo 0,81, valor 5,8% inferior à eficiência medida. O modelo *Retsed* teve também desempenho muito elevado, embora tenha cometido erro superior ao observado no modelo de Camp. O modelo *Retsed* subestimou as medições realizadas em campo, o que indica que a inserção da probabilidade de ressuspensão na modelagem pode corrigir o erro sistemático do modelo de Camp. A análise da eficiência de retenção de sedimentos pelos modelos de Camp e *Retsed* para as 1330 horas de extravasamento do experimento *in situ* mostram claramente que o modelo de Camp tende a superestimar a eficiência. De fato, o teste t de Student comparou estatisticamente as médias das simulações horárias de ambos os modelos e concluiu que o modelo de Camp possuiu média significativamente maior que a média do modelo *Retsed*. Conforme mostrado na Figura 37, os valores de  $\eta$  obtidos por Camp foram todos superiores a 70%, enquanto que o modelo *Retsed* apresenta valores de  $\eta$  até da ordem de 10% devido à ressuspensão. O cálculo da probabilidade de ressuspensão ( $Pr$ ) por meio da vazão normalizada ( $\frac{Q}{Q_{max}}$ ) não demonstrou viabilidade. Conclui-se, portanto, que o cálculo da probabilidade de ressuspensão pelo princípio da entropia máxima de Shannon foi exitoso, assim como foi exitosa a inserção dessa probabilidade na formulação determinística de Camp (1946).

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando-se que o primeiro objetivo da pesquisa é “Avaliar o conflito, gerado no âmbito da entropia de Shannon, entre o número de restrições e a robustez da formulação primária para seis modelos hidrodinâmicos que descrevem campos de velocidade em canais abertos”, temos o seguinte a concluir. Da análise sobre a inserção de informação em modelos baseados no princípio da entropia máxima de Shannon, concluiu-se que os modelos hidrodinâmicos com duas restrições tiveram melhor desempenho que aqueles com uma restrição, portanto, a segunda restrição inclui relevante informação. Em contraste, modelos com três restrições apresentaram desempenhos piores que aqueles com duas restrições, mostrando que a perda de informação devido ao uso de soluções numéricas pode superar o ganho de informação devido a terceira restrição. Portanto, não é verdadeiro que quanto mais restrições inseridas em um modelo, melhor será o seu desempenho. Concluiu-se também que, no presente estudo de caso, a substituição de uma formulação primária fraca (baseada em coordenadas cartesianas) por uma formulação primária forte (baseada em coordenadas curvilíneas) conduziu mais informação ao sistema que a inclusão da terceira restrição. Em síntese, conclui-se que a análise dos seis modelos hidrodinâmicos de entropia indicou que o número ótimo de restrições são duas e que mais informação pode ser introduzida pelo aumento da robustez da formulação primária.

O segundo objetivo é “Avaliar a melhor formulação hidrodinâmica, entre os seis modelos, para que seja aplicada ao problema da ressuspensão de sedimentos em pequenos reservatórios”. Sobre isso, os resultados da presente pesquisa permitem concluir que o modelo de entropia de melhor desempenho (com duas restrições e coordenadas curvilíneas, do qual derivou-se equação logarítmica denominado  $U2\xi$ ) conseguiu simular bem os dados laboratoriais medidos com precisão para perfis verticais com distâncias a parede do canal superiores a 3% da largura do canal. Para perfis verticais com distâncias menores do que 3% da largura do canal, os modelos estudados não desempenharam bem, pois as informações específicas sobre os processos predominantes não foram fornecidas nem na formulação primária nem nas restrições. Portanto, o princípio da entropia máxima de Shannon foi exitoso para modelar o campo de velocidades em canais abertos.

“Modelar, com base no princípio da entropia máxima, a probabilidade de ressuspensão de sedimentos afluentes a pequenos reservatórios” é o terceiro objetivo desta investigação. Conclui-se que foi possível formular, com base no princípio da entropia máxima de Shannon, um modelo para cálculo da probabilidade de ressuspensão de sedimentos em

pequenos reservatórios. Para o experimento de campo, dadas as condições hidrodinâmicas e as propriedades físicas do sedimento (densidade, coesão e granulometria), a probabilidade média de ressuspensão foi de 10,15%. Portanto, a entropia de Shannon permitiu modelar adequadamente a probabilidade de ressuspensão de sedimentos afluentes a um pequeno reservatório.

Por fim, a pesquisa visou também “Acoplar a probabilidade de ressuspensão ao modelo de Camp (1946) e aplicar o modelo resultante, comparando-o à abordagem original determinística, que não admite ressuspensão”. O processo de ressuspensão foi, com êxito, inserido no modelo determinístico de Camp (1946), que calcula a eficiência de retenção de sedimentos em pequenos reservatórios, gerando-se o modelo Retsed (ou modelo de Camp modificado). Tomou-se um experimento de campo para avaliar o desempenho de ambos modelos. O modelo de Camp apresentou, em suas simulações, eficiência média de retenção de sedimentos ( $\eta$ ) de 0,89; cerca de 3,5% superior ao valor médio da eficiência medida em campo (0,86). Daí se conclui que o modelo de Camp conseguiu excelente desempenho para o experimento. Conclui-se também que o modelo de Camp superestimou a retenção. As simulações do modelo Retsed indicam que a probabilidade média de ressuspensão de sedimentos no experimento foi de 10%. Daí resultou que o modelo Retsed calculou a eficiência média do experimento como sendo 0,81, valor 5,8% inferior à eficiência medida. O modelo Retsed teve também desempenho muito elevado, embora tenha cometido erro superior ao observado no modelo de Camp. O modelo Retsed subestimou as medições realizadas em campo, o que indica que a inserção da probabilidade de ressuspensão na modelagem pode corrigir o erro sistemático do modelo de Camp. A análise da eficiência de retenção de sedimentos pelos modelos de Camp e Retsed para as 1330 horas de extravasamento do experimento *in situ* mostram claramente que o modelo de Camp tende a superestimar a eficiência. De fato, o teste t de Student comparou estatisticamente as médias das simulações horárias de ambos os modelos e concluiu que o modelo de Camp possuiu média significativamente maior que a média do modelo Retsed.

Conforme mostrado, o valor de  $\eta$  segundo modelo de Camp nunca foi inferior a 70%, enquanto que o modelo Retsed apresenta valores de  $\eta$  até da ordem de 10% devido à ressuspensão. O cálculo da probabilidade de ressuspensão ( $Pr$ ) por meio da vazão normalizada não demonstrou viabilidade.

Em vista dos resultados aqui apresentados, entre os próximos desafios pode ser ressaltada a necessidade de método capaz de aplicar o modelo Retsed para as dezenas de milhares de pequenos açudes não monitorados no Semiárido Brasileiro.

## REFERÊNCIAS

- AHMADI, A.; MAGHREBI, M. F. A robust approach for rating curves estimation in open channels using isovel contours. **International Journal of River Basin Management**, [s.l.], 2019. DOI: 10.1080/15715124.2019.1687486. Disponível em: <https://iahr.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/15715124.2019.1687486?journalCode=trbm20#.YFt5Ka9Kjgw>. Acesso em: 03 jun. 2020.
- AKIYAMA, J.; FUKUSHIMA, Y. **Entrainment of noncohesive bed sediment into suspension**. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON RIVER SEDIMENTATION, 3., 1986, Missisipi. **Anais [...]**, Missisipi: [s. n.], 1986.
- ALENCAR, P. H. L. ; ARAÚJO, J. C. de; TEIXEIRA, A. dos Santos. Physically based model for gully simulation: application to the Brazilian semiarid region. **Hydrology and Earth System Sciences**. [s.l.], v. 24, n. 8, p. 4239- 4255, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.5194/hess-24-4239-2020>. Acesso em: 08 out. 2020.
- AL-HAMDANI, O. Z.; CRUISE, J. F. Soil moisture profile development from surface observations by principle of maximum entropy. **Journal of Hydrologic Engineering**. [s.l.] v. 15, n. 5, p. 327-337, 2010. Disponível em: <https://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%29HE.1943-5584.0000196>. Acesso em: 03 nov. 2019.
- ALVISI, S.; BARBETTA, S.; FRANCHINI, M.; MELONE, F.; MORAMARCO, T. Comparing grey formulations of the velocity-area method and entropy method for discharge estimation with uncertainty. **Journal of Hydroinformatics**, v. 16, n. 4, p. 797-811, 2014. DOI:10.2166/hydro.2013.160. Disponível em: <https://iwaponline.com/jh/article/16/4/797/3366/Comparing-grey-formulations-of-the-velocity-area>. Acesso em: 10 abr. 2018.
- AMOROCHO, J.; ESPILDORA, B. Entropy in the assessment of uncertainty in hydrologic systems and models. **Water Resources Research**, v. 9, n. 6, p. 1511-22, 1973.
- ARAÚJO, J.C. de. Entropy-based equation to assess hillslope sediment production. **Earth Surface Processes and Landforms**, v. 32, n. 4, p. 2005-2018, 2007.
- ARAÚJO, J. C. de; CHAUDHRY, F. H. Experimental evaluation of a 2D entropy model in open channels. **Journal of Hydraulic Engineering**, v. 124, n. 10, p. 1064–1068, 1998.
- ARAÚJO, J. C. de. Assoreamento em reservatórios do semi-árido: modelagem e validação. **Revista Brasileira de Recursos Hídricos**, v. 8, n. 2, p. 39–56, 2003.
- ARAÚJO, J. C. de; FERNANDES, L; MACHADO JR, J.C.; OLIVEIRA, M. R. L.; SOUSA, T. C. Sedimentation of reservoirs in semiarid Brazil. In: GAISER, T; KROL, M.; FRISCHKORN, H.; ARAÚJO, J. C. de (ed). **Global Change and Regional Impacts**. Berlin: Springer, p. 205-216, 2003..
- ARDICLIOGLU, M.; ARAÚJO, J. C. de, Senturk, A.I. Applicability of velocity distribution equations in rough-bed open-channel flow. **Houille Blanche**, v. 4, n. 4, p. 73-79, 2005.

ASH, R. B. **Information theory**. New York: Dover publications, 1965.

BANAVAR, J. R.; MARITAN, A.; VOLKOV, I. Applications of the Principle of Maximum Entropy from Physics to Ecology. **Journal of Physics Condensed Matter**, v. 22, n. 6, p. 1-13, 2010. DOI: 10.1088/0953-8984/22/6/063101. Disponível em: [https://iopscience-iop.ez11.periodicos.capes.gov.br/article/10.1088/0953-8984/22/6/063101](https://iopscience.iop.ez11.periodicos.capes.gov.br/article/10.1088/0953-8984/22/6/063101). Acesso em: 12 jun. 2018.

BARBÉ, D. E.; CRUISE, J. F.; SINGH V. P. Solution of three-constraint entropy-based velocity distribution. **Journal of Hydraulic Engineering**, v. 117, n. 10, p. 1389-1396, 1991.

BARZDAIN, B. Maximum entropy distribution under moments and quantiles constraints. **Measurement**, v. 57, p. 102-107, 2014. DOI: 10.1016/j.measurement.2014.07.012. Disponível em: <https://www-sciencedirect.ez11.periodicos.capes.gov.br/science/article/pii/S026322411400308X?via%3Di> hub. Acesso em: 08 set. 2019

BATHURST, J. C.; THOME, C. R.; HEY, R. D. Secondary flow and shear stress at river bends. **Journal of the Hydraulic Division**, v. 105, n. 11, p. 1277-1295, 1979.

BORWEIN, J. M.; ZHU, Q. J. A variational approach to Lagrange multipliers. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 171, n. 3, p. 727-756, 2016

BRITO JÚNIOR, A. N. de. **Modelagem dos fluxos de ressuspensão de sedimentos de um lago raso subtropical**. 2015. Dissertação (Mestrado em Recursos Hídricos e Saneamento) – Centro de Tecnologia, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2015.

CAMP, T. R. Sedimentation and the design of settling tanks. **Transactions of the American Society of Civil Engineers**, v. 111, n. 1, p. 895-936, 1946.

CELIK, I.; Rodi, W. A Deposition-entrainment model for suspended sediment transport. **Report SFB 210/T/6**, University of Karlsruhe, Germany. 1984.

CHAPMAN, T.G. Entropy as a measure of hydrological data uncertainty and model performance. **Journal of Hydrology**, v. 85, n. 1-2, p. 111-126, 1986.

CHEN, Y. C.; CHIU, C. L. An efficient method of discharge measurement in tidal streams. **Journal of Hydrology**, v. 265, n. 5, p. 212-224, 2002.

CHENG, K.; WEI, S.; FU, Q.; PEI, W.; LI, T. Adaptive management of water resources based on an advanced entropy method to quantify agent information. **Journal of Hydroinformatics**, v. 21, n. 3, p.381-396, 2019. Disponível em: <https://iwaponline.com/jh/article-pdf/566491/jh0210381.pdf>. Acesso em: 1 jul. 2020.

CHIU, C. L.; LIN, G. F. Computation of 3-D flow and shear in open channels. **Journal of Hydraulics Engineering**, v. 109, n. 11, p. 1424-1440, 1983.

CHIU, C. L.; MIZUMURA, K., LIN, H. C. Simulation of hydraulic process in open channels. **Journal of the Hydraulics Division**, v. 102, n. 2, p. 185-206, 1976.

- CHIU, C. L.; MURRAY, D. W. Variation of Velocity Distribution Along Nonuniform Open-Channel Flow. **Journal of Hydraulics Engineering**. v. 118, n. 7, p. 989-1001, 1992.
- CHIU, C. L.; SAID, C. A. A. Maximum and mean velocities and entropy in open-channel flow. **Journal of Hydraulics Engineering**. v. 121, n. 1, p. 26-35, 1995.
- CHIU, C. L.; TUNG, N. C. Maximum velocity and regularities in open-channel flow. **Journal of Hydraulics Engineering**. v. 128, n. 4, p. 390-398, 2002.
- CHIU, C. L. Application of entropy concept in open-channel flow study. **Journal of Hydraulic Engineering**, v. 117, n.5, p. 615-628, 1991.
- CHIU, C. L. Entropy and 2-D velocity distribution in open channels. **Journal of Hydraulic Engineering**, v. 114, n.7, p. 738-756, 1988.
- CHIU, C. L. Entropy and probability concepts in hydraulics. **Journal of Hydraulics Engineering**, v. 113, n. 5, p. 583-599, 1987.
- CHIU, C. L. Velocity distribution in open channels flow. **Journal of Hydraulic Engineering**, v. 115, n. 5, p. 576-594, 1989.
- CHIU, C. L.; HSIUNG, D. E., Secondary flow shear stress and sediment transport. **Journal of Hydraulics Division**, v. 107, n. 7, p. 879-898, 1981.
- CHIU, C. L., CHAIRIL, A. S. Maximum and mean velocities and entropy in open channels flow. **Journal of Hydraulics Engineering**, v. 121, n. 1, p. 26-35, 1995.
- CHIU, C. L.; CHIOU, J. D. Structure of 3-D flow in rectangular open channels. **Journal of Hydraulics Engineering**, v. 112, n.11, p. 1050-1067, 1986.
- CHIU, C. L.; HSIUNG, D. E., LIN, H. C. Three-dimensional open channel flow. **Journal of Hydraulics Division**. v.104, n.8, p. 1119-1136, 1978.
- CHIU, C.-L.; HSU, S. M. Probabilistic approach to modelling of velocity distributions in fluid flows. **Journal of Hydrology**. v. 316, n. 4, p. 28-42, 2006.
- CHIU, C.-L.; HSU, S. M.; TUNG, N. C. Efficient methods of discharge measurements in rivers and streams based on the probability concept. **Hydrological Processes**, v. 19, n. 20, p. 3935-3946, 2005.
- COBO, J. L. M; MENDIZÁBAL, R.; MIQUEL, A.; BERNA, C.; ESCRIVÁ, A. Use of the principles of maximum entropy and maximum relative entropy for the determination of uncertain parameter distributions in engineering applications, **Entropy**, v. 19, n. 9, p. 486, 2017.
- CORATO, G.; AMMARI, A.; MORAMARCO, T. Conventional point-velocity records and surface velocity observations for estimating high flow discharge. **Entropy**, v. 16, n.10, p. 5546-5559, 2014.

CORTEZ, J. R. **Desempenho de modelos numéricos em estudos de assoreamento de reservatórios: caso UHE Aimorés**. 2013. Dissertação (Mestrado em Saneamento, Meio Ambiente e Recursos Hídricos) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013.

COSTA, L. F. da. **Análise de sensibilidade dos parâmetros utilizados na determinação de taxas de assoreamento de reservatórios**. 2012. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

CUNHA, K. L.; XAVIER, F. V. **Diagnóstico das áreas suscetíveis à erosão na bacia hidrográfica do Ribeirão São Bartolomeu (Viçosa – MG) como subsídio à conservação do solo e da água**. In: XVII SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS, 17., 2007. **Anais [...]**, São Paulo. 2007.

DENBIGH, K. G. Note on entropy, disorder and disorganization. **British Journal of Philosophical Science**, v. 40, n.3, p.323-332, 1989.

DENBIGH, K. G.; DENBIGH, J. S. **Entropy in relation to incomplete knowledge**. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. E-book. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=JjxiQgAACAAJ>. Acesso em: 11 jun. 2018.

ESTIGONI, M. V. **Uso de modelagem de transporte de sedimentos e técnicas de hidrologia estatística para redução de incertezas nos estudos de assoreamento de reservatórios: estudo de caso do reservatório da PCH Mogi-Guaçu – SP**. 2016. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2016.

EVANS, R.A. The principle of minimum information. **IEEE Transactions on Reliability**, v.18, n.3, p. 87- 90, 1969.

FARINA, G.; ALVISI, S.; FRANCHINI, M.; MORAMARCO, T. Three methods for estimating the entropy parameter M based on a decreasing number of velocity measurements in a river cross-section. **Entropy Journal**, v. 16, n.5, p. 2512-2529, 2014.

FERREIRA, C.W.S. **Sedimentação em um reservatório de água no semiárido de Pernambuco**. 2012. Tese (Doutorado em Geografia Física) - Centro de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Federal de Pernambuco, 2012.

FLORES, C. A. O uso da terra e a necessidade de mudanças. **Embrapa**. Artigo em Hypertexto. 2008 Disponível em: [http://www.infobibos.com/Artigos/2008\\_3/usoterra/index.htm](http://www.infobibos.com/Artigos/2008_3/usoterra/index.htm). Acesso em: 1 mar. 2017.

FONTANA, N; MARINI, G.; PAOLA, F. de. Experimental assessment of a 2-D entropy-based model for velocity distribution in open channel flow. **Entropy**, v.15, n. 3, p. 988-998, 2013.

FURBISH, D. J; HAFF, P. K; ROSEBERRY, J. C.; SCHEMEECKLE, M. W. A probabilistic description of the bed load sediment flux: 1. Theory. **Journal of Geophysical Research: Earth Surface**, v. 117, n. 3, p. 1-21. 2012.

FURBISH, D. J; HAFF, P. K; SCHEMEECKLE, M. W; SCHUMER, R; FATHEL, S. L.



Probability distributions of bed load particle velocities, accelerations, hop distances and travel times informed by Jaynes's principle of maximum entropy. **Journal Geophysical Research Earth Surface**, v.121, p. 1373-1390, 2016. DOI: 10.1002/2016JF003833. Disponível em: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/2016JF003833> Acesso em: 08 jul. 2018.

GARCÍA, M. H.; PARKER, G.: Entrainment of bed sediment into suspension. **Journal of Hydraulic Engineering, ASCE**, v. 117, n.4, p. 414-435, 1991.

GARG, V.; JOTHIPRAKASH, V. Modeling the time variation of reservoir trap efficiency. **Journal of Hydrologic Engineering**, v. 15, n. 12, p. 1001-1015, 2010.

GHOSH, S. N.; ROY, N. Boundary shear distribution in open channel flow. **Journal of the Hydraulics Division**. v. 96, n.4, 1970. DOI: 10.1061/JYCEAJ.0002477. Disponível em : <https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/JYCEAJ.0002477> Acesso em: 10 out. 2017.

GRECO, M.; MARTINO, G. 1-D versus 2-D entropy velocity law for water discharge assessment in a rough ditch. **Entropy**, v.20, n. 9, p. 638, 2018.

GUPTA, A.; GOVINDARAJU, R. S. Propagation of structural uncertainty in watershed hydrologic models. **Journal of Hydrology**, v. 575, p. 66-81, 2019. DOI: 10.1016/j.jhydrol.2019.05.026 Disponível em : <https://www-sciencedirect.ez11.periodicos.capes.gov.br/science/article/pii/S0022169419304718?via%3Dihub>. Acesso em : 05 mai. 2020.

HAAN, C. T.; BARFIELD, B. J.; HAYES, J. C. **Design Hydrology and Sedimentology for Small Catchments**. 2.ed. San Diego: Academic Press, 1994.

HARMANCIOGLU, N. B; SINGH, V. P. **Entropy in Environmental and Water Resources**. Boston: Springer, 1998.

HARTLEY, R. V. L. Transmission of information. **The Bell System Technical Journal**, v. 7, n. 3, p. 535-563, 1928.

HENRIQUES, I. G. N. **Mudança na cobertura da terra e avaliação dos processos hidrossedimentológicos da bacia representativa de Sumé-PB**. 2017. Monografia (Graduação em Geografia) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2017.

ITAKURA, T.; Kishi, T. (1980): Open channel flow with suspended sediments. **Journal of Hydraulics Division, ASCE**, v. 106, n. 8, p.1325-1343, 1980.

JAYNES, E. T. Information theory and statistical mechanics, I. **Physical Review**, v. 106, n. 4, p. 620-630, 1957a.

JAYNES, E. T. Information theory and statistical mechanics, II. **Physical Review**, v.108, n. 2, p. 171-190, 1957b.

JAYNES, E. T. **Probability theory in science and engineering**. 1. ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1961.

JIANG, Y.; LI, B; CHEN, J. Analysis of the velocity distribution in partially-filled circular pipe employing the principle of maximum entropy, **Plos one**, v.11, n. 3, 2016. Doi:10.1371/journal.pone.0151578. Disponível em: <https://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0151578>. Acesso em: 02 mai. 2017.

KAPUR, J. N., KESAVAN, H. K. **Entropy maximization principles with applications**. New York: Academic Press. Inc, 1992.

KAPUR, J.N. **Maximum entropy models in science and engineering**. New Delhi: Wiley Eastern Ltd., 1990.

KLIR, G. J. **Uncertainty and information: foundations of generalized information theory**. New York: John Wiley & Sons, 2006. DOI: 10.1002/0471755575. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/0471755575>. Acesso em: 08 mai. 2017.

KULLBACK, S. **Information Theory and Statistics**. New York: Dover publications, 1968.

LAL, R.; SHUKLA, M. K. **Principles of soil physics**. New York: Marcel Dekker, 2004. Disponível em: <https://dewagumay.files.wordpress.com/2011/12/principles-of-soil-physics.pdf>. Acesso em: 8 jun. 2020.

LEE, C.; SCHWAB, D. J.; BELETSKY, D.; STROUD, J.; LESHT, B. Numerical modelling of mixed sediment resuspension, transport, and deposition during the March 1998 episodic events in southern Lake Michigan. **Journal of Geophysical Research**, v. 112, 2018. DOI: 10.1029/2005JC003419. Disponível em: [https://agupubs-onlinelibrary-wiley.ez11.periodicos.capes.gov.br/doi/epdf/10.1029/2005JC003419](https://agupubs.onlinelibrary-wiley.ez11.periodicos.capes.gov.br/doi/epdf/10.1029/2005JC003419). Acesso em: 10 abr. 2019.

LEVINE, R. D; TRIBUS, M. **The Maximum Entropy Formalism**. 2.ed. Cambridge: The MIT Press, 1978.

LIMA, M. N.; OLIVEIRA, F. M. **Degradação ambiental: processo de erosão dos solos no Sítio Marcação**. In: ENCONTRO NACIONAL DE GEÓGRAFOS, 18., São José do Campestre (RN). **Anais [...]**, São José do Campestre (RN), 2016.

LIMA, N. I. E.; WIEGAND, M.C.; ARAÚJO, J. C. de. Sediment redistribution due to a dense reservoir network in a large semi-arid Brazilian basin. **Hydrological Sciences Journal**, v. 56, p.319-333, 2011. DOI: 10.1080/02626667.2011.553616 Disponível em: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/02626667.2011.553616>. Acesso em: 04 mar. 2019.

LINDLEY, D. V. On a measure of information provided by an experiment. **The Annals of Mathematical Statistics**, v.27, n. 4, p. 986-1005, 1956.

LOPES, F. B.; ANDRADE, E. M. de; TEIXEIRA, A. S.; CAITANO, R. F.; CHAVES, L. C. G. Uso de geoprocessamento na estimativa da perda de solo em microbacia hidrográfica do semiárido brasileiro. **Revista Agroambiente Online**, v. 5, n. 2, p. 88-96, 2011.

LOPES, J. W. B.; ARAÚJO NETO, J. R. de; PINHEIRO, E. A. R. Produção de sedimentos e

assoreamento em reservatório no semiárido: o caso do Açude Marengo, Ceará. **Revista Eletrônica do Curso de Geografia**, n. 24, 2015. DOI: 10.5216/revgeoamb.v0i24.33954. Disponível em: <https://www.revistas.ufg.br/geoambiente/article/view/33954>. Acesso em: 15 jan. 2019.

LUO, H; SINGH, V. P. Entropy theory for two-dimensional velocity distribution. **Journal of Hydrologic Engineering**. v. 16, n. 4, p. 303-315, 2011.

MAIA, A. G. **As consequências do assoreamento na operação de reservatórios formados por barragens**. 2006. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2006.

MAMEDE, G. L. **Reservoir sedimentation in dryland catchments: modelling and management**. 2008. Tese (Doutorado em Hidrologia) - Universidade de Potsdam, Alemanha, 2008.

MAMEDE, G. L.; ARAÚJO, N. A. M; SCHNEIDER, C. M.; ARAÚJO, J. C. de; HERRMANN, H.J. Overspill avalanching in a dense reservoir network. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, v. 109, n. 19, p. 7191-7195, 2012.

MAMEDE, G. L.; GUENTNER, A.; MEDEIROS, P. H. A.; ARAÚJO, J. C. de; BRONSTERT, A. Modeling the effect of multiple reservoirs on water and sediment dynamics in a semiarid catchment in Brazil. **Journal of Hydrologic Engineering**, v. 23, n.12, p. 1-13, 2018.

MARTINS, P. D.; POLETO, C. Principle of maximum entropy in the estimation of suspended sediment concentration. **Revista Brasileira de Recursos Hídricos**, Porto Alegre, v. 22, p. 22-23, 2017. DOI: 10.1590/2318-0331.011716058. Disponível em: [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S2318-03312017000100221&lng=en&tlng=en](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2318-03312017000100221&lng=en&tlng=en). Acesso em: 10 mar. 2018.

MAZUQUI, L. M. B.; RAMOS, C. L. **Estudo de Ressuspensão de Sedimentos Coesivos**. [s.l: s.n.], 1999.

MEDEIROS, P. H. A. **Processos hidrossedimentológicos e conectividade em bacia semiárida: modelagem distribuída e validação em diferentes escalas**. 2009. Tese (Doutorado em Engenharia Civil: Recursos Hídricos) - Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2009.

MÉLÈSE, V.; BIANCHET, J.; MOLINIÉ, G. Uncertainty estimation of intensity-duration-frequency relationships: a regional analysis. **Journal of Hydrology**, v. 558, p. 579-591, 2018. DOI: 10.1016/j.jhydrol.2017.07.054 Disponível em: <https://www-sciencedirect.ez11.periodicos.capes.gov.br/science/article/pii/S002216941730519X?via%3Di> hub. Acesso em: 09 jan. 2019.

MELO, R. O.; CANTALICE, J. R. B.; ARAÚJO, A. M.; CUNHA FILHO, M. Produção de sedimento suspenso de uma típica bacia hidrográfica semiárida. *In: ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE SEDIMENTOS*, 8., 2008, Campo Grande. **Anais [...]**. Campo Grande, 2008.

MIRAUDA, D.; RUSSO, M. G. Information entropy theory applied to the dip-phenomenon analysis in open channel flows. **Entropy**, v.21, n.6, p. 554, 2019.

MISHRA, S. Uncertainty and sensitivity analysis techniques for hydrologic modeling. **Journal of Hydroinformatics**, v. 11, n. 3-4, p. 282-296, 2009.

MISHRA, V; ELLENBURG, W. L.; AL-HANDAMI, O. Z.; BRUCE, J.; CRUISE, J. F. Modeling soil moisture profiles in irrigated fields by the principle of maximum entropy. **Entropy**, v. 17, n. 6, p. 4454-4484, 2015.

MORAMARCO, T.; ORATO, G; MELONE F.; SINGH, V. P. An entropy-based method for determining the flow depth distribution in natural channels. **Journal of Hydrology**, v. 497, p. 176-188, 2013. DOI: 10.1016/j.jhydrol.201306.002 Disponível em: <https://www-sciencedirect.ez11.periodicos.capes.gov.br/science/article/pii/S002216941300437X?via%3Dihub>. Acesso em: 10 mai. 2018.

MORRIS, G. L.; FAN, J. **Reservoir Sedimentation Handbook**. New York: McGraw-Hill, 2010.

MOTA, J. C. A.; LIBARDI, P. L.; ASSIS JÚNIOR, R. N.; BRITO, A. S.; LOBATO, M. G. R.; ALENCAR, T. L.; FREIRE, A. G.; LIMA JÚNIOR, J. C. Climatic and soil water balances for the melon crop. **Journal of Agricultural Science**, v. 10, n.2, p. 116-129, 2018.

NASCIMENTO, J. M. do; FRADE, T. G.; SILVA, R. M da. Modelagem da resposta do escoamento em ma bacia do semiárido da Paraíba utilizando o modelo SWAT. **Revista Brasileira de Geografia Física**, v. 11, n. 3, p. 1137-1150, 2018.

NASSAR, M. A. One-dimensional hydrodynamic model simulating water stage in open channels (ws-1). **International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing**, v. 1, n. 2, p.303-316, 2010.

OLIVEIRA, F. A.. de; PEREIRA, T. S. R; SOARES, A. K.; FORMIGA, K. T. M. Uso de modelo hidrodinâmico para determinação da vazão a partir de medições de nível. **Revista Brasileira de Recursos Hídricos**, v. 21, n. 4, p. 707-718, 2016.

PAIVA, F. M. de L. **Estudo comparativo entre três modelos de base física na modelagem hidrossedimentológica em microbacias na região semiárida paraibana**. 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil e Ambiental) - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2008.

PALÁCIO, H. A. de Q.; SILVA FILHO, J. A. da; ANDRADE, E. M. de; SANTOS, J. C. N. Dos; BRASIL, P. P. Uso da terra e resposta hidrossedimentológica de microbacia no semiárido. **Revista Agroambiente Online**, v. 6, n. 3, p. 187-194, 2012.

PEREIRA, F. J. S. **Assoreamento em pequenos reservatórios: processos, medidas e modelagem**. Documento do exame de qualificação de doutorado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Agrícola da Universidade Federal do Ceará. 2020.

PEREIRA, J. S. **Avaliação das perdas de solos por erosão laminar na área de influência**

da **UHE Amador Aguiar I**. 2014. Dissertação (Mestrado em Ciências Humanas) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2014.

PLASTINO, A. R.; PLASTINO, A. Stellar polytropes and Tsallis' entropy. **Physics Letters A**, v. 174, n. 5- 6, p. 384-386, 1993.

RIBEIRO, L. C. **Apresentação do uso de um modelo numérico para simulação de assoreamento para simulação de assoreamento em reservatório**. 2017. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) - Universidade Federal de São João Del-Rei, Ouro Branco (MG), 2017.

SANTOS, C. A. G.; Silva, R. M.; Srinivasan, V. S. Análise das perdas de água e solo em diferentes coberturas superficiais no semi-árido da Paraíba. **Revista OKARA: geografia em debate**, v. 1, n. 1, p. 1-152, 2007.

SANTOS, D. P. dos. **Monitoramento e modelagem de processos hidrológicos como base para a gestão de recursos hídricos em região semiárida**. 2018. Tese (Doutorado em Engenharia Agrícola) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

SANTOS, J. Y. G. dos. **Avaliação das perdas de água e solo no semiárido paraibano mediante chuva simulada e modelagem hidrossedimentológica**. 2011. Dissertação (Mestrado em Engenharia Urbana) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2011.

SANTOS, M. A.C. M.; VELLAME, L. M.; ARAÚJO, J. C. de; SILVA, A. J. P. Hydrological characterization of rainfall and its potential erosivity in the middle course of Salitre River Basin in the Brazilian Semi- Arid. **Revista Brasileira de Climatologia**, v. 27, p. 326-348. 2020. DOI: 10.5380/abclima.v27i0.72823. Disponível em: <https://revistas.ufpr.br/revistaabclima/article/view/72823>. Acesso em: 18 nov 2020.

SANTOS, T. E. M.; MONTENEGRO, A. A. A.; SILVA, E. F. F.; LIMA NETO, J. A. Perdas de carbono orgânico, potássio e solo em Neossolo Flúvico sob diferentes sistemas de manejo no semiárido. **Revista Brasileira de Ciências Agrárias**, v. 2, n. 2, p. 143-149, 2007.

SHANNON, C. E, Weaver, W. **The Mathematical Theory of Communications**. Illinois: University of Illinois Press, 1949.

SHANNON, C. E. A. Mathematical theory of communications, I and II. **Bell System Technical Journal**, v. 27, n. 3, p. 379-443, 1948.

SHORE, J. E.; JOHNSON, R. W. Properties of cross-entropy minimization. **IEEE Transactions on Information Theory**, v.27, n.4, p. 472-82. 1980.

SHRESTHA, B; COCHRANE, T. A.; Caruso, B. S., Arias, M. E., Piman, T. Uncertainty in flow and sediment projections due to future climate scenarios for the 3S rivers in the Mekong Basin. **Journal of Hydrology**, v. 540, p. 1088-1104. 2016. DOI: 10.1016/j.jhydrol.2016.07.019. Disponível em: <https://www-sciencedirect.ez11.periodicos.capes.gov.br/science/article/pii/S0022169416304498?via%3Dihub>. Acesso em: 10 mar. 2018.

SILVA FILHO, A. V.; ARAÚJO, J. C. de; RAABE, A. Trade-off between number of

constraints and primary-statement robustness in entropy models: the case of the open-channel velocity field. **Anais da Academia Brasileira de Ciências**, v. 92, n. 3, 2020.

SILVA, R. M. da; SANTOS, C. A. G. Influência da cobertura vegetal nos processos hidrossedimentológicos no semiárido do Nordeste, Brasil. **Unioeste Geografia**, v. 5, n. 8, p. 113-125, 2009.

SILVA, R. M.; MEDEIROS, I. C. Análise hidrossedimentológica em ambiente SIG usando o modelo SWAT. **Revista Internacional de Ciencia y Tecnología de la Información Geográfica**, v. 14, p. 211-231. 2014.

SILVA, R. M.; SANTOS, C. A. G. Estimativa da produção de sedimentos mediante uso de um modelo hidrossedimentológico acoplado a um SIG. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, v. 12, n. 5, p. 520-526. 2008.

SIMPLÍCIO, A. A. F.; COSTA, C. A. G.; NAVARRO-HEVIA, J., ARAÚJO, J. C. de. Erosion at hillslope and micro-basin scales in the Gilbués Desertification Region, North-eastern Brazil. **Land Degradation & Development**, v. 32, n. 3, p. 1487-1499. 2020.

SINGH, V. P.; MARINI, G.; FONTANA, N. Derivation of 2D power-law velocity distribution using entropy theory. **Entropy Journal**, v. 15, n.4, p. 1221-1231, 2013.

SIQUEIRA, M. S. De; ALCÂNTARA, H. M. De; RIBEIRO, G. do N.; MEDEIROS, P. da C.; AFONSO, J. P. S. D.; MEDEIROS, A. C. de; MARACAJÁ, P. B. Impactos das alterações de uso e ocupação do solo considerando a variabilidade climática e hidrológica na região do semiárido. **Revista Brasileira de Gestão Ambiental**, v.11, n.1, 2017. DOI: <https://doi.org/10.18378/rbga.v11i1.5272>. Acesso em: 10 jun. 2018.

SON, M.; HSU, T. The effects of flocculation and bed erodibility on modeling cohesive sediment resuspension. **Journal of Geophysical Research**, v. 116, C03021, 2011. Doi:10.1029/2010JC006352. Disponível em: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1029/2010JC00635>. Acesso em: 15 jun. 2019.

SOUZA, A. L. R. de. **Estudo do movimento incipiente de sedimentos não-coesivos em escoamentos com superfície livre**. 2010. Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica) – COPPE (Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

STEFFLER, P. M.; RAJARATNAM, N.; PETERSON, A. W. L. da. **Measurements of mean velocity and turbulence distribution in a smooth rectangular open channel**. Department of Civil Engineering, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canadá. Water Resources Engineering Report WRE 83- 4. 1983.

TAPAGLOU, E.; VAROUCHAKIS, E. A.; TRICHAKIS, I. C.; KARATZAS, G. P. Hydraulic head uncertainty estimations of a complex artificial intelligence model using multiple methodologies. **Journal of Hydroinformatics**, v.22, n.1, p.205-218. 2020. DOI: 10.2166/hydro.2019.137. Disponível em: <https://iwaponline.com/jh/article-pdf/566981/jh2019137.pdf>. Acesso em : 20 mai. 2020.

TEIXEIRA, E., K., da C. **Simulação estocástica na estimativa de assoreamento em reservatórios**. 2019. Tese (Doutorado em Saneamento, Meio Ambiente e Recursos Hídricos) – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2019.

VENÂNCIO, S. de S. **Simulação Numérica Aplicada ao Assoreamento do Reservatório Represa Velha**. 2009. Tese (Doutorado em Ciências da Engenharia Ambiental) - Universidade de São Paulo., São Carlos, 2009.

VILELA, C. de P. X. **Influência da Hidrodinâmica Sobre os Processos de Acumulação de Sedimentos Finos no Estuário do Rio Amazonas**. 2011. Tese (Doutorado em Engenharia Oceânica) - COPPE (Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

WALDRIP, S. H.; NIVEN, R. K.; ABEL, M.; SCHLEGEL, M. Maximum Entropy Analysis of Hydraulic Pipe Flow Networks. **Journal of Hydraulic Engineering**, v. 142, n. 9, 2016. DOI: 10.1061/%28ASCE%29HY.1943-7900.0001126. Disponível em: <https://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%29HY.1943-7900.0001126>. Acesso em: 29 out. 2017.

WEI, T.; SONG, S. Confidence Interval Estimation for Precipitation Quantiles Based on Principle of Maximum Entropy. **Entropy Journal**, v. 21, n. 3, p. 315, 2019. Doi: 10.3390/e21030315. Disponível em: <https://doaj.org/article/1b189764f13f444c96fd94f3cd2663c5?frbrVersion=3>. Acesso em: 11 ago. 2020.

WILLIAMS, J. R.; BERNDT, H. D. Sediment yield computed with universal equation. **Journal of Hydrology Division**, v. 98, n. 12, p. 2087-2098, 1972.

ZUO, D.; HOU, W.; HU, J. An entropy-based investigation into bivariate drought analysis in China. **Water**, v. 9, n. 9, p. 1-17. 2017. DOI: 10.3390/w9090632. Disponível em: <https://www.mdpi.com/journal/water>. Acesso em: 02 dez. 2019.

## ANEXO A – PUBLICAÇÃO DERIVADA DA TESE



An Acad Bras Cienc (2020) 92(3) e202000594 DOI 10.1590/0001-2756-202000594  
 Anais da Academia Brasileira de Ciências | Annals of the Brazilian Academy of Sciences  
 Printed ISSN 0001-2756 | Online ISSN 1678-2689  
 www.scielo.br/aabc | www.abcs.com.br/anojournal

ENGINEERING SCIENCES

### Trade-off between number of constraints and primary-statement robustness in entropy models: the case of the open-channel velocity field

ANTÔNIO VIANA DA SILVA FILHO, KISÉ CARLOS DE ARAÚJO & ARMIN RAABE

**Abstract:** In this research, the trade-off between the number of restrictions and the robustness of the primary formulation of entropy models was evaluated. The performance of six hydrodynamic models in open channels was assessed based on LIDAR Laser-Doppler anemometry data. It was investigated whether it is better to use an entropy-based model with more restrictions and a weak primary formulation or a model with fewer restrictions, but with a strong formulation. In addition, it was also investigated whether the model performance improves with the increase of restrictions. Three of the investigated models have a weak formulation (open-channel velocity field represented by Cartesian coordinates); while the other three models have a strong formulation, according to which models are represented by curvilinear coordinates. The results indicated that models with two restrictions performed better than those with one restriction, since the additional restriction includes information relevant to the system. Models with three restrictions perform worse than those with two restrictions, because the information lost due to the use of a numerical solution was more substantial than the information gained by the third restriction. In conclusion, a strong primary formulation brought more information to the system than the inclusion of a third constraint.

**Key words:** Hydrodynamic model; Information theory; Laser-Doppler anemometry; Shannon entropy

#### INTRODUCTION

Models are designed to explain physical processes, to which one may assign a probability of event occurrence, considering that each system state has a level of uncertainty. Well-designed probabilistic models tend to enhance their capacity of representing reality because they consider the intrinsic uncertainties of the processes, which arise from several sources such as natural randomness, inaccuracy in data measurement, model structure imperfect parameterization, and others Gupta & Govindaraju (2019). Many water-related problems demand a probabilistic approach due to the

considerable amount of uncertainty involved Mishra (2009), Cobo et al. (2017), e.g. rainfall occurrence, magnitude and intensity Mélése et al. (2018), basin flow and sediment Shrestha et al. (2016), and hydraulics Tapoglou et al. (2019). Shannon (1948) investigated the information content and its relation to uncertainty measures while proposing uncertainty quantification, the so-called Shannon informational entropy, or simply Shannon entropy. Jaynes (1957a, b) physically formulated the informational principle of maximum entropy (PME) using Shannon entropy, which maximizes uncertainty under the given constraints and, thus, avoids



the use of unproven assumptions. As a result, the probability density function associated to a researched process can be obtained by maximizing the constrained entropy function and using the variational calculus and the Lagrange multipliers method.

Therefore, the informational principle of maximum entropy Shannon (1948), Jaynes (1957a, b), Shore & Johnson (1980) provides an adequate approach for introducing probability into complex hydrodynamic problems such as modeling the velocity field in open channels. It has been successfully applied to several fields of Hydraulic and Environmental Engineering Harmancioglu & Singh (1998), Singh (2013), (2014), Ardiciloglu et al (2005). Other researches based on PME yielded encouraging results in areas such as water resources Cheng et al. (2019), drought assessment Zuo et al. (2017), climate change Jin et al. (2016), ecology Banavar et al. (2010), assessment of river discharges Chiu et al. (2005), Alvisi et al. (2014), Farina et al. (2014), sediment yield Chiu & Hsiung (1981), de Araújo (2007), Furbish et al. (2016), pipe-network hydraulic Waldrip et al. (2016) soil moisture Al-Hamdan & Cruise (2010), river morphology Moramarco et al. (2013), and open-channel hydrodynamics Chiu (1987), (1988), (1989), (1991), Chiu et al. (2005), Barbé et al. (1991), de Araújo & Chaudhry (1998), Luo & Singh (2011), Fontana et al. (2013), Singh et al. (2013), Jiang & Chen (2016), Greco & Martino (2018), Mirauda & Russo (2019), to name but a few.

Literature presents several robust, physically-based hydrodynamic models, such as Shiono-Knight Shiono & Knight (1991), Knight (2013), MIKE-11 DHI (1992), (2017), River2D Steffler & Blackburn (2002), Beakes et al. (2014), CE-QUAL-W2 Cole & Wells (2006), and Environmental Fluid Dynamics Code Tetra Tech (2007), among others. These models use complex spatially-distributed systems of equations that

encompass the principles of mass, energy, and momentum conservation; as well as the effects of turbulence. Hydrodynamic models, such as the aforementioned ones, are able to solve complex problems Beakes et al. (2014), Knight (2013), Torres-Bejarano et al. (2015), Thanh et al. (2020), but demand a large number of parameters, which are often unavailable. When not based on measured data, the parameterization process may introduce uncertainty to such an extent that simple few-parameter models yield better results than the complex ones, especially in ungauged basins. Despite the fact that entropy equations tend to demand few parameters, they often out-perform equations based on different approaches, due to the robustness of the principle Chiu (1987), (1988), (1991), de Araújo & Chaudhry (1998), Ardiciloglu et al. (2005), Fontana et al. (2013), Singh (2014), Alvisi et al. (2014), Mirauda & Russo (2019).

The entropy-equation optimization is subject to the given constraints, which represent information about the problem to be solved. Therefore, the greater the number of constraints, the more information there is about the system Jaynes (1957a). More information implies less uncertainty and more accurate models. Nevertheless, the density functions obtained by PME can be solved analytically only if a maximum of two constraints are used. If the optimization uses three or more constraints, it demands a numerical solution, which simultaneously lowers the model accuracy and increases the computational effort. This ambiguity – more than two constraints generate more information, but also weaken the computational solution – yields a non-trivial non-linear problem, which has not (to our best knowledge) been straightforward tackled in the Literature, especially by researches based on an accurate robust datasets. Therefore, the objective of this work was to assess the trade-off between number of constraints and

strength of the primary statement on the performance of hydrodynamic entropy-based models using accurate laboratory data for validation. For this purpose, the following quests were analyzed: (i) is there an improvement in model performance when two constraints are used instead of one? (ii) is there an improvement in model performance when a third constraint is introduced, considering that its solution is not analytical? (iii) is it better to use a three-constraint model with a weak primary statement, or a two-constraint model with a strong primary statement?

#### Abbreviations

$D$  : Flow depth at the channel  
 $F(u)$  : Probability of the longitudinal velocity being less or equal to  $u$   
 $H$  : Entropy function  
 $M$  : Entropy parameter  
 $NSE$  : Nash & Sutcliffe  
 $p(u)$  : Probability density function  
 $PME$  : Principle of maximum entropy  
 $RMSE$  : Root mean square error  
 $SRP$  : Steffler, Rajaratnam and Peterson (1985)  
 $u$  : Longitudinal velocity  
 $u_{av}$  : average velocity  
 $u_{max}$  : Maximum velocity in the cross section  
 $U1y$  : Model with one constraint and Cartesian coordinates.  
 $U2y$  : Model with two constraints and Cartesian coordinates.  
 $U3y$  : Model with three constraint and Cartesian coordinates.  
 $U1\xi$  : Model with one constraint and curvilinear coordinates.  
 $U2\xi$  : Model with two constraints and curvilinear coordinates.  
 $U3\xi$  : Model with three constraints and curvilinear coordinates.  
 $y$  : The vertical distance of a any point located in the flow from the channel bed

$z$  : The horizontal distance of a any point located in the flow from the nearest wall.

$\beta$  : Boussinesq coefficient.

$\lambda_i$  : Lagrange parameters,  $i = 1, 2, \dots, 12$ .

$\xi$  : isovel

$\delta y, \delta i, \beta, \epsilon$  : shape parameters

#### MATERIALS AND METHODS

We investigated the performance of six entropy models designed to simulate open-channel velocity fields. The simulated velocities were compared with accurately-measured laboratory data. Three of the investigated models have a weak primary statement, i.e., they assume that isovels could be well represented by Cartesian coordinates, whereas the remaining three models have a strong statement according to which isovels are better represented by curvilinear coordinates. In this work, data were extracted from the experiments made by Steffler et al. (1985): run 1 (hereafter called SRP1), run 2 (SRP2), and run 3 (SRP3). The experiments (see the main characteristics in Table 1) were performed at the Thomas Blench Laboratory flume located at the University of Alberta, Canada. The velocities were accurately measured using a Laser-Doppler anemometer. The models performance was assessed with the Nash-Sutcliffe coefficient (NSE) and the root mean square error (RMSE).

#### Models with weak primary statement

Two primary statements were assumed and models with one, two or three constraints used, respectively, in order to maximize the entropy function  $H$  (Equation 1), in which  $u$  means the longitudinal velocity;  $p(u)$  the respective probability density function; and  $u_{max}$  the maximum velocity in the cross section. The six entropy models are divided into two groups: three models admit the Cartesian coordinate

**Table 1.** Parameters of the experiments: run 1 (SRP1), run 2 (SRP2), and run 3 (SRP3).

Experiment	n	n.vert	Q (m <sup>3</sup> /s)	D (m)	B (m)	B/D (-)	A (m <sup>2</sup> )	u <sub>av</sub> (m/s)	U <sub>max</sub> (m/s)	ξ (m)
SRP1	525	10	0.126	0.345	1.143	7.83	0.967	0.755	0.844	0.00
SRP2	663	16	0.126	0.225	1.143	5.08	0.257	0.490	0.530	0.00
SRP3	541	16	0.032	0.093	1.143	12.29	0.106	0.301	0.370	0.00
AE	1730	42	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)

The symbols mean: n = number of measured points; n.vert = number of measured vertical profiles; Q = discharge; D = flow depth; B = flume width; A = wetted area; u<sub>av</sub> = average velocity, given by Q/A; U<sub>max</sub> = maximum measured velocity; ξ = maximum-velocity dip. Data source: Steffler et al. (1983).

system (weak primary statement, Equation 2), whereas the three others admit the curvilinear coordinate system, as described in (Chiu 1988) (Figure 1).

$$H(u) = \int_0^{U_{\max}} p(u) \cdot \text{Ln}[p(u)] du \quad (1)$$

Model U1y (one constraint and Cartesian coordinates) is based on Chiu (1987), who proposes the primary statement (Equation 2), according to which  $F(u)$  is the probability of the longitudinal velocity being less or equal to  $u$  at a point located at distance  $y$  from the channel bed. In Equation 2,  $D$  is the flow depth at the channel.

$$F(u) = y/D \quad (2)$$

The first constraint is presented in Equation 3. It means that the integral of the probability density function  $p(u)$  over the whole dominium equals unity. We maximize the entropy function (H, Equation 1) subjected to one constraint (Equation 3) and further apply the result at Equation 2, yielding the velocity-distribution Equation 4, where  $\lambda_1$  is the Lagrange parameter, calculated by Equation 5.

$$\int_0^{U_{\max}} p(u) du = 1 \quad (3)$$

$$u(y) = e^{(y-\lambda_1)} \cdot \left(\frac{y}{D}\right) = U_{\max} \cdot \left(\frac{y}{D}\right) \quad (4)$$

$$\lambda_1 = 1 + \text{Ln}\left(\frac{1}{U_{\max}}\right) \quad (5)$$

Model U2y (two constraints and Cartesian coordinates) uses the same weak premise as model U1y (Equation 2). The entropy function (Equation 1) was maximized by Chiu (1987), using two constraints: Equations 3 and 6. The latter represents the mass conservation principle and indicates that the left-hand integral equals average velocity ( $u_{av}$ ). As a result, the method yields the velocity-distribution Equation 7 with parameters  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  and  $M$  that can be estimated using the maximum and average velocities by equations 8 and 9: Chiu (1987).

$$\int_0^{U_{\max}} u \cdot p(u) du = u_{av} \quad (6)$$

$$u(y) = \frac{1}{\lambda_2} \cdot \text{Ln}\left(1 + \frac{\lambda_2}{e^{\lambda_1 - y}} \cdot \frac{y}{D}\right) \quad (7)$$

$$u_{av} = \frac{(U_{\max} \cdot e^{\lambda_2}) - (e^{\lambda_2 / \lambda_2}) + (1 / \lambda_2)}{e^{\lambda_2} - 1} \quad (8)$$

$$M = \lambda_2 \cdot U_{\max} \quad (9)$$

Model U3y (three constraints and Cartesian coordinates), derived by Barbé et al. (1991), assumes the same premise as in the previous

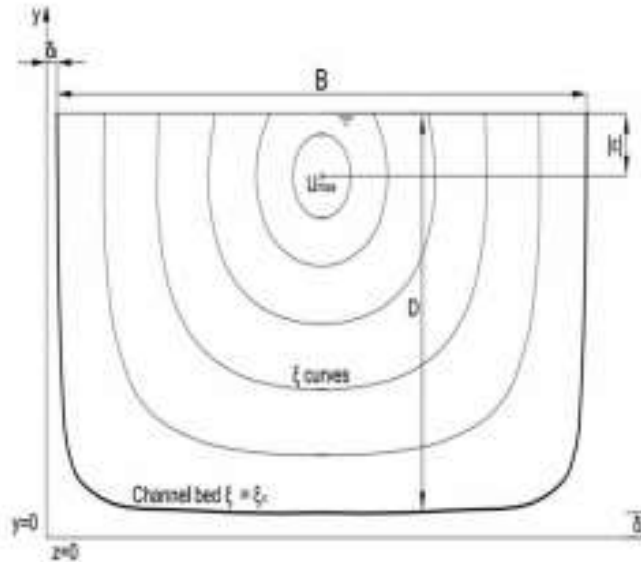


Figure 1. Curvilinear coordinate system based on Chiu and Chiou (1986).

models (Equation 2) and three constraints: Equations 3, 6, and 10. The third constraint represents the momentum conservation principle (Equation 10), in which  $\beta$  is the Boussinesq coefficient (Equation 11) and  $\rho$  is water density. The system generated by maximizing the entropy function (Equation 1) for the three constraints was solved using a numerical approach (Maclaurin series with the first two terms), which yields the approximate velocity field (Equations 13 and 14). The parameters  $\lambda_v$ ,  $\lambda_p$ , and  $\lambda_s$  can be obtained using the Boussinesq coefficient, maximum velocity and average flow velocity, as stated in Barbó et al. (1991).

$$\int_0^{U_{\max}} u^2 \cdot \rho(u) \, du = \beta u_{\max}^2 \quad (10)$$

$$\beta = \frac{M}{\rho \cdot D u_{\max}^2} \quad (11)$$

$$M = \lambda_v U_{\max} \quad (12)$$

$$e^{\lambda_v u} \{ e^{\lambda_p u} + \lambda_s [G(u)] \} = \lambda_v \left[ \frac{y}{D} + e^{\lambda_s u} \left( \frac{1}{\lambda_v} + \frac{2\lambda_s}{\lambda_v^2} \right) \right] \quad (13)$$

$$G(u) = e^{\lambda_s u} \left( u^2 - \frac{2M}{\lambda_s} + \frac{2}{\lambda_s^2} \right) \quad (14)$$

#### Models with a strong primary statement

The strong statement admits that the longitudinal velocity is directly associated with the curvilinear, rather than with Cartesian coordinates Chiu & Chiou (1986); and that isovels can be represented by  $\xi$  coordinates (Equations 15-17), as proposed by Chiu (1986). The isovel ( $\xi$ ) shape parameters ( $\delta_y$ ,  $z$ ) and variables ( $y$ ,  $z$ ) are defined in Figure 1. Parameter  $\beta$  characterizes the velocity distribution of the primary flow

$$\xi = Y \cdot (1 - Z)^\beta \cdot e^{(\beta \cdot Z - Y + 1)} \quad (15)$$

$$Y = \frac{y + \delta_y}{D + \delta_y + \epsilon} \quad (16)$$

$$Z = \frac{|z|}{(B/2) + \delta} \quad (17)$$

Model U1 $\xi$  (one constraint and curvilinear coordinates) is based on Chiu (1988), who proposes the strong primary premise (Equation 18), according to which  $F(u)$  is directly associated with the isovel ( $\xi$ ) spatial distribution, with the key parameters  $\xi_{\max}$  and  $\xi_0$ , respectively, the maximum and minimum  $\xi$  values of the open-channel flow. The entropy function  $H$  (Equation 1) was maximized and subjected to one constraint (Equation 3), the same as in model U1 $\gamma$ . The result was applied to Equation 18, yielding the velocity-distribution (Equation 19), where  $\lambda_1$  is the Lagrange parameter, estimated by Equation 20.

$$F(u) = \frac{\xi - \xi_0}{\xi_{\max} - \xi_0} \quad (18)$$

$$u(\xi) = e^{(1-\lambda_1)} \cdot \left( \frac{\xi - \xi_0}{\xi_{\max} - \xi_0} \right) \quad (19)$$

$$\lambda_1 = 1 - \text{Ln}(U_{\max}) \quad (20)$$

Model U2 $\xi$  (two constraints and curvilinear coordinates), developed by Chiu (1988), uses curvilinear coordinates (Equation 15), Equation 18 as primary statement, and two constraints: Equations 3 and 6, the same of model U2 $\gamma$ , resulting in Equation 21. The parameters  $\lambda_2$  and  $\lambda_3$  are estimated in an analogous way as in model U2 $\gamma$ , as shown in Chiu (1988).

$$u(\xi) = \frac{1}{\lambda_2} \text{Ln} \left[ 1 + \frac{\lambda_3}{e^{\lambda_2} - 1} \cdot \left( \frac{\xi - \xi_0}{\xi_{\max} - \xi_0} \right) \right] \quad (21)$$

In the present study, Model U3 $\xi$  (three constraints and curvilinear coordinates) used curvilinear coordinates (Equation 15), the strong statement (Equation 18) and three constraints,

(Equations 3, 6 and 10) as in model U3 $\gamma$ ; Barbé et al. (1991), but substituting ratio  $y/D$  by  $\left( \frac{\xi - \xi_0}{\xi_{\max} - \xi_0} \right)$ . The U3 $\xi$  model for the velocity field in open channels consists in solving Equations 22 and 23. The system parameters  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  and  $\lambda_4$  are estimated analogously as in model U3 $\gamma$ , using the Boussinesq coefficient, maximum velocity and average flow velocity, as demonstrated by Barbé et al. (1991).

$$e^{\lambda_2} \cdot [e^{\lambda_3} + \lambda_4 \cdot (W(u))] = \lambda_2 \cdot \left[ \left( \frac{\xi - \xi_0}{\xi_{\max} - \xi_0} \right) + e^{\lambda_3} \cdot \left( \frac{1}{\lambda_2} + \frac{2u}{\lambda_4} \right) \right] \quad (22)$$

$$W(u) = e^{\lambda_4} \cdot \left( u^2 - \frac{2u}{\lambda_4} + \frac{2}{\lambda_4^2} \right) \quad (23)$$

## RESULTS AND DISCUSSION

Table II and Figures 2 and 3 present the performance of the six entropy models applied to the three laboratory laser-Doppler experimental datasets. The weak primary statement (Equation 2) is based on the hypothesis that longitudinal velocity grows monotonically from zero at the bed to a maximum value at the water surface, i.e., the velocity dip is assumed as zero in the whole dominium, in disagreement with Literature Ardiciloglu et al. (2005), Mirauda & Russo (2019). Besides, it is also assumed that isovels are horizontal, contrasting with laboratory Steffler et al. (1985), de Araújo & Chaudhry (1998) and field Ahmadi & Maghrebi (2019) measurements. With regards to the Cartesian-coordinate entropy formulations, it can be said that model U1 $\gamma$  performed poorly, with negative Nash-Sutcliffe coefficients (NSE) for all vertical profiles and with errors (RMSE) up to 46%. When the second constraint is added, the model (U2 $\gamma$ ) performs much better, with median NSE of +0.51 and RMSE of only 6%. The comparative results of U1 $\gamma$  and U2 $\gamma$  (Figures 2a and 2b, respectively) show that the addition of the second constraint definitely improves the model predictability capacity.

**Table II.** Model performance of the velocity-field simulations for the 42 vertical profiles of three experiments: SRP1, SRP2, and SRP3.

Experiment (n.vert)	Nash-Sutcliffe coefficient (NSE)				Root mean square error (RMSE)			
	Min	Average	Median	Max	Min	Average	Median	Max
<b>Model U1c: one constraint and Cartesian coordinates</b>								
SRP1 (10)	-14.9E	-8.59	-8.68	-6.85	25%	35%	36%	46%
SRP2 (16)	-9.68	-6.43	-6.20	-2.84	17%	25%	26%	31%
SRP3 (16)	-7.50	-4.13	-3.80	-2.34	10%	15%	14%	19%
All (42)	-14.9E	-6.31	-5.00	-2.34	10%	23%	22%	46%
<b>Model U2c: two constraints and Cartesian coordinates</b>								
SRP1 (10)	-18.37	-3.76	-0.17	0.98	2%	14%	12%	32%
SRP2 (16)	-17.37	-1.13	0.83	0.96	2%	7%	4%	23%
SRP3 (16)	-24.16	-2.57	0.48	0.97	1%	7%	5%	18%
All (42)	-24.16	-2.31	0.51	0.98	1%	9%	6%	32%
<b>Model U3c: three constraints and Cartesian coordinates</b>								
SRP1 (10)	-21.72	-4.88	-0.73	0.90	4%	17%	15%	34%
SRP2 (16)	-29.12	-3.20	0.05	0.68	6%	12%	10%	26%
SRP3 (16)	-16.76	-1.29	0.79	0.94	2%	6%	3%	15%
All (42)	-29.12	-2.87	0.32	0.94	4%	11%	9%	34%
<b>Model U1c: one constraint and curvilinear coordinates</b>								
SRP1 (10)	-29.14	-15.93	-15.80	-6.99	34%	43%	43%	51%
SRP2 (16)	-14.62	-8.41	-8.59	-3.53	15%	27%	28%	32%
SRP3 (16)	-13.45	-6.43	-6.46	-2.79	11%	17%	18%	21%
All (42)	-29.14	-6.45	-6.41	-2.79	11%	27%	26%	51%
<b>Model U2c: two constraints and curvilinear coordinates</b>								
SRP1 (10)	-0.86	0.48	0.65	0.95	3%	6%	5%	10%
SRP2 (16)	-0.34	0.68	0.83	0.97	2%	4%	4%	6%
SRP3 (16)	0.48	0.75	0.76	0.90	2%	3%	3%	5%
All (42)	-0.86	0.65	0.77	0.97	2%	4%	4%	10%
<b>Model U3c: three constraints and curvilinear coordinates</b>								
SRP1 (10)	-1.70	0.14	0.55	0.76	6%	9%	9%	12%
SRP2 (16)	-11.51	-1.02	0.18	0.44	7%	10%	9%	18%
SRP3 (16)	-0.01	0.65	0.79	0.94	2%	3%	3%	4%
All (42)	-11.51	-0.11	0.42	0.94	2%	7%	6%	18%

The term "n.vert" means the number of vertical profiles. Data source: Steffler et al. (1983).

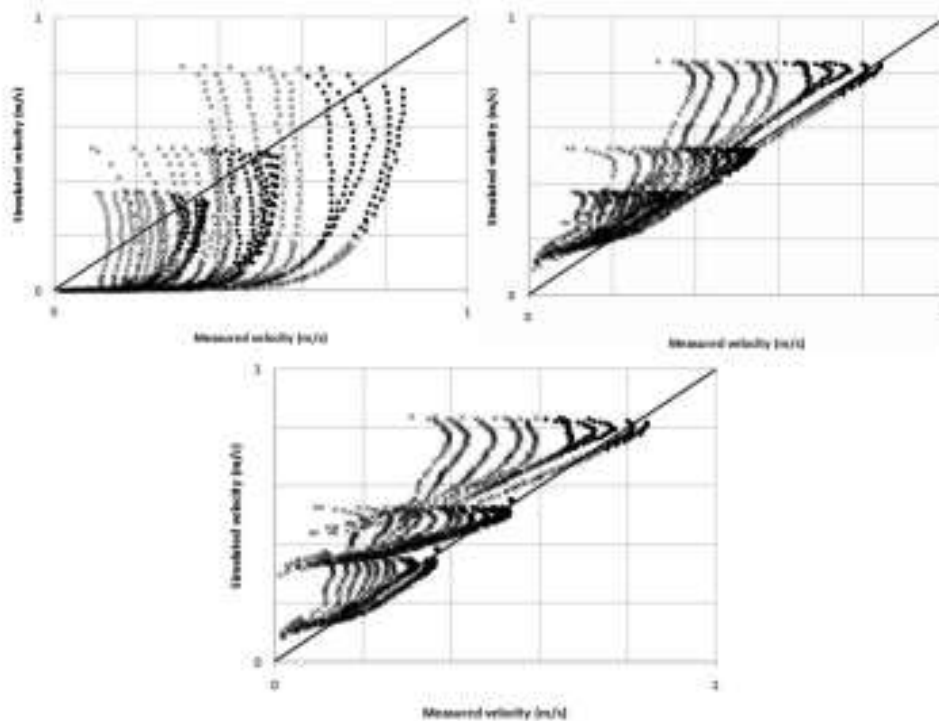


Figure 2. Correlation between measured (experiments SRP1, SRP2, and SRP3; Steffler et al. 1985) and simulated velocities using the weak statement (Cartesian coordinates): (a) model  $U1\gamma$ ; (b) model  $U2\gamma$ ; and (c) model  $U3\gamma$ . The black dots represent points located further than 3% of the channel width from the sidewalls and from the channel bed, whereas the plus (+) signs refer to the points located elsewhere (near wall and/or channel bed).

However, although the three-constraint  $U3\gamma$  model (Figure 2c) performs better than  $U1\gamma$ , it is worse than  $U2\gamma$ : the median NSE decreases to +0.32 and RMSE raises to 9%. This shows that the addition of extra information (third constraint) improves the model, i.e.,  $U3\gamma$  performs better than the one-constraint model  $U1\gamma$ . The use of the numerical solution, as in Barbé et al. (1991), however, influences negatively this improvement and even limits its performance ( $U3\gamma$  is worse than  $U2\gamma$ ).

The same pattern can be observed for the three curvilinear-coordinate entropy models.

The one-constraint model  $U1\xi$  has negative Nash-Sutcliffe coefficients for all vertical profiles and errors ranging from 11% to 51%. According to the results, this is the worst model (Figure 3a) among the researched ones, with median NSE below -8. The inclusion of the second constraint notably improves model capacity: the median NSE is positive for all experiments (greater than +0.76) and the median error is as low as 4%. Comparison of Figures 3a and 3b also shows an improvement of the model when the second constraint is considered. The combination of two constraints and the curvilinear-coordinate

system generates the best entropy model (U2 $\xi$ ) among the investigated options. As in the weak primary-statement models, the inclusion of a third constraint yields a model (U3 $\xi$ ) with a performance surpassing that of the one-constraint model (U1 $\xi$ ) and raising the median Nash-Sutcliffe coefficient from -8.41 to +0.42; median error decreases from 26% to 8%, at the same time. In fact, U3 $\xi$  is the second best entropy model among the six tested formulations. Comparing Figures 3b and 3c reveals, however, that the U3 $\xi$  model does not represent the velocity-field data as well as the U2 $\xi$  model: in the balance between the advantage of having more information (third constraint) and the disadvantage of using a numerical solution, the negative aspect prevails. Besides, the numerical solution of the three-constraint models generated instability during the parameterization process (when calculating the Lagrange multipliers) which augmented the computational effort. This was observed in all experiments.

In order to investigate whether it is better to use a three-constraint model with a weak primary statement, or a two-constraint model with a strong statement, the marginal improvement of model U2 $\gamma$  was compared with models U3 $\gamma$  and U2 $\xi$ , respectively. The results show that the third constraint has the drawback of demanding a numerical solution, which increases computer time demand and worsens result accuracy; whereas the combination of an analytical-solution system (two constraints) with a strong statement yields a high-performance model. In fact, model U2 $\xi$  has a median NSE of +0.77 against +0.32 of U3 $\gamma$ , whereas the median error of U3 $\gamma$  (9%) is more than twice that of U2 $\xi$  (4%). When using the Student t-test (5% significance) to compare the NSE between U2 $\gamma$  and U3 $\gamma$ , it shows that both models are statistically equal, i.e., the simple addition of the third constraint does not

upgrade the model capability because the three-constraint model demands a numerical solution of its equations. Contrastingly, when we apply the t-test to compare U2 $\gamma$  and U2 $\xi$ , the results indicate that they are statistically different, with clear superiority of the latter: NSE improves from +0.51 to +0.77 and the average NSE raises from -2.31 to +0.66.

Figure 4 provides a synthesis of the performance of the models, considering only the number of constraints. It is clear that models with only one constraint perform much worse than those with two or three constraints (negative NSE and high RMSE). It is also visible that, despite the similarity of the results of the U2 and U3 models, the performance of U2 models is higher. Besides, if one compares the Nash-Sutcliffe coefficient for the best-fit U2 model (U2 $\xi$ ) with that for the best-fit U3 model (U3 $\xi$ ) using the Student t-test with a 5% significance, it shows that the models are statistically different and that U2 $\xi$  is clearly superior.

From Figures 2, 3, and 4 it is noteworthy that all models have flaws in representing some vertical profiles. Figure 5 indicates that mal-represented profiles are those near the sidewall, which can be confirmed by Figures 2 and 3. This flaw occurs even when the best models (U2 $\xi$ , U3 $\xi$ , and U2 $\gamma$ ) are used. For the near-wall verticals, for example, model U2 $\gamma$  exhibits an NSE coefficient as low as -24 and a corresponding error RMSE as high as 32%. It still mimics accurately the measured data for more centralized verticals with a maximum NSE of 0.98 and minimum RMSE of 7% (Table II). This fact is directly connected to sidewall proximity, as shown in de Araújo & Chaudhry (1998) and in Greco (2015). The analyzed entropy models perform well for profiles further than 3% of the channel width, however, as can be depicted from Figure 5. Nonetheless, the use of curvilinear coordinates improves model performance for



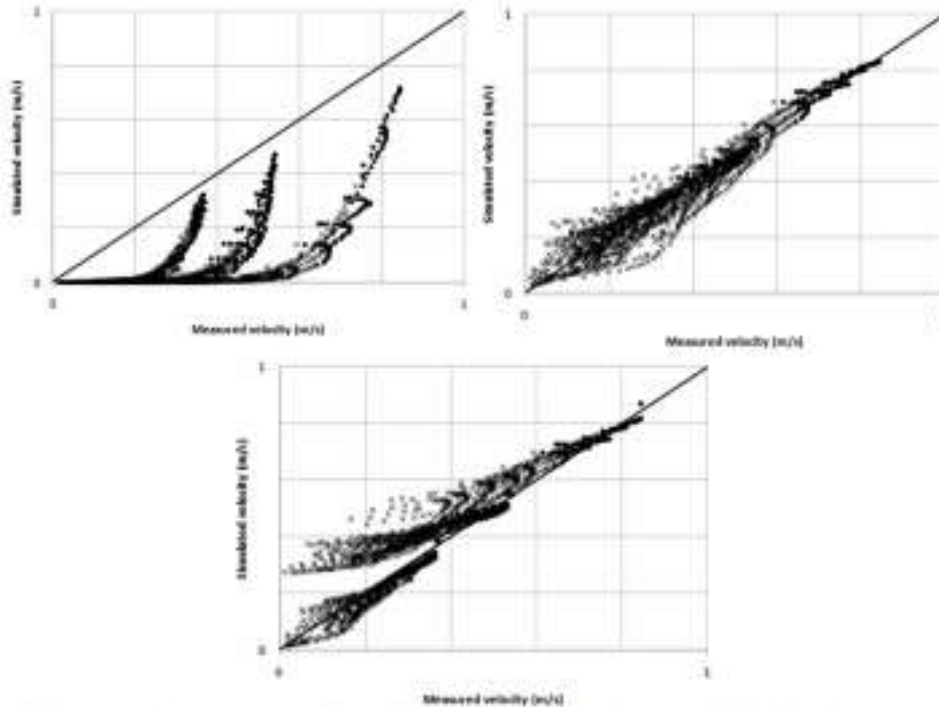


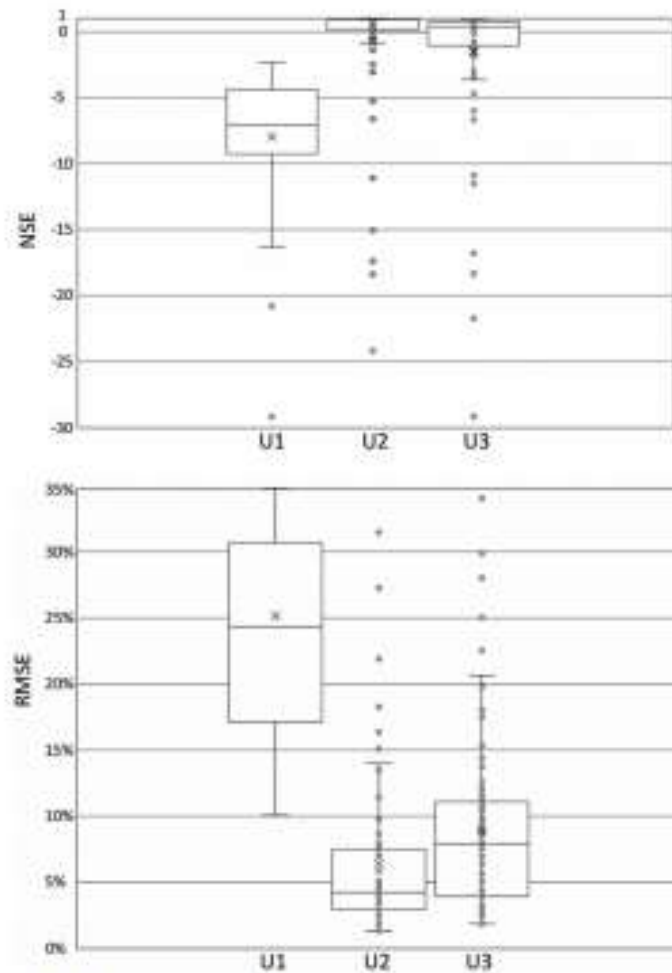
Figure 3. Correlation between measured (experiments SRP1, SRP2, and SRP3: Steffler et al., 1985) and simulated velocities using the strong statement (curvilinear coordinates): (a) model U1 $\xi$ ; (b) model U2 $\xi$ ; and (c) model U3 $\xi$ . The black dots represent points located further than 3% of the channel width from the sidewalls and from the channel bed, whereas the plus (+) signs refer to the points located elsewhere (near wall and/or channel bed).

one, two, or three constraints, particularly in the vicinity of walls. This is most emphasized in the routine U2 $\xi$ , the best-performance model in the context of this research. In fact, Chen & Chiew (2004) experimentally observed the significant velocity gradient near the channel bed; Patel et al. (2016) showed that near-wall gradients influence turbulence and quasi-streamwise vortices in channel flow; whereas Ninto & Garcia (2006) emphasized the influence of the near-wall flow on sediment re-suspension, which was confirmed by Mohan et al. (2019). These features have been experimentally observed, among others, by Steffler et al. (1985), de Araújo

& Chauthry (1998), Chen & Chiew (2004), Ninto & Garcia (2006), Birch & Morrison (2010), Howes & Sanders (2011), and Patei et al. (2016). The curvilinear coordinates, as proposed by Chiu (1988), succeed in simultaneously representing the effect of both sidewalls and of channel bed, which explains why the  $\xi$  models out-perform the Cartesian-coordinate ( $y$ ) ones.

## CONCLUSIONS

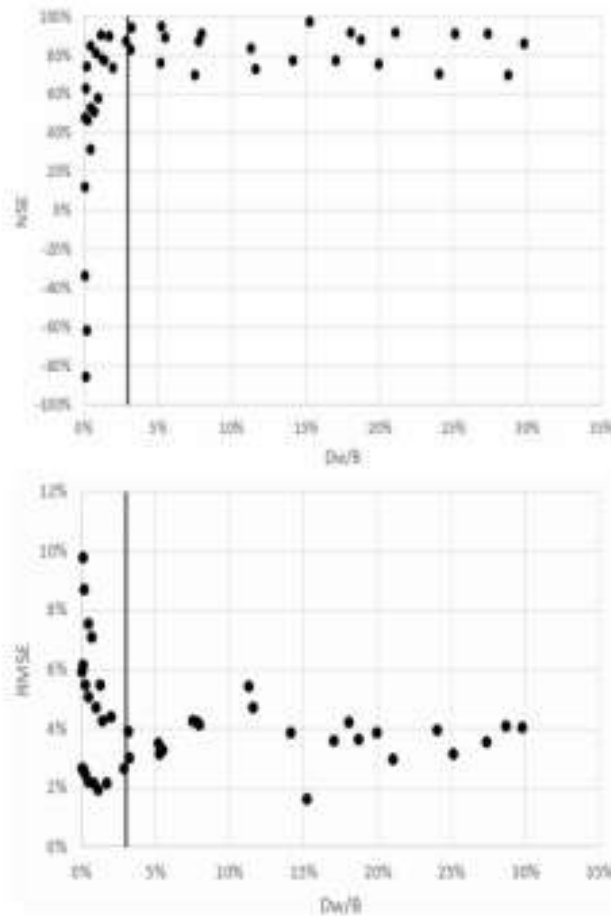
From the results, it can be concluded that entropy hydrodynamic models with two



**Figure 4.** Performance of the entropy models according to the number of constraints. (a) Nash-Sutcliffe coefficient (NSE). (b) Root mean square error (RMSE). U1 encompasses the joint results for both U1y and U1f models. The same applies to U2 and U3.

constraints performs better than those with one constraint, and that the second constraint includes relevant information for the system. Contrastingly, models with three constraints perform worse than those with two constraints,

showing that the loss of information due to the use of numerical solutions may surpass the gain of information due to the third constraint. The best-performance entropy model (that with two constraints and curvilinear coordinates – U2f)



**Figure 5.** Performance of the entropy models as a function of the distance to the vertical wall. Each point refers to a measured vertical profile. The variable  $D_v$  is the horizontal distance to the nearest wall and  $B$  is channel width. Vertical grey lines indicate the threshold of the model applicability ( $D_v/B > 0.03$ ). (a) Nash-Sutcliffe coefficient (NSE). (b) Root mean square error (RMSE).

was able to mimic well the accurately-measured laboratory data for vertical profiles further than 3% of channel width. For vertical profiles closer than 3% of the width, the studied models do not perform well because the specific information concerning the prevailing processes is neither provided in the primary statement, nor in the constraints. In the present case study, the replacement of a weak primary-statement (use of Cartesian coordinates, Equation 2) by a strong

one (use of curvilinear coordinates, Equation 18) brings more information to the system than the inclusion of a third constraint.

#### Acknowledgments

This research was supported by Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES, PRINT Grant 88881.311770/2018-01), and by the Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq, Grant 407999/2016-7). The authors also acknowledge the Federal Rural University of Pernambuco UFRPE for the support to the first author.

## REFERENCES

- AHMADI A & MACHSEBI MC. 2019. A robust approach for rating curves estimation in open channels using wavel contours. *Int J River Basin Manag* 11: 2014-2060.
- AL-HAMSIAN OJ & CRUICK J. 2010. Soil moisture profile development from surface observations by principle of maximum entropy. *J Hydrol Eng* 15: 327-338.
- ALVIO S, BARRETTA S, FRANZONI M, BELZINI F & BORGARICI T. 2014. Comparing grey formulations of the velocity-area method and entropy method for discharge estimation with uncertainty. *J Hydroinform* 16(4): 797-811.
- ARDICIOGLU M, DE ARAUJO JC & SERTURU AC. 2005. Applicability of velocity distribution equations in rough-bed open-channel flow. *Hyd* 4: 71-79.
- BARNAKAR JL, MARIKAN A & YOLKOV I. 2010. Applications of the principle of maximum entropy from physics to ecology. *J Phys Conf Ser* 220(1): 13.
- BARSE DL, CRUICK J & SINGH VP. 1991. Solution of three-dimensional entropy-based velocity distribution. *J Hydrol Eng* 1(10): 1389-1394.
- BEARDS HE, MOORE JR, WESTON N, BROWN S, MERTZ B & SOGARD SM. 2014. Evaluating statistical approaches to quantifying juvenile Chinook salmon habitat in a regulated California river. *River Res Applic* 30: 180-191.
- BIRCH DM & MORRISON JT. 2000. Similarity of the streamwise velocity component in very rough-wall channel flow. *J Fluid Mech* 388: 174-207.
- CHEN X & CHEW Y-H. 2004. Velocity distribution of turbulent open-channel flow with bed suction. *J Hydrol Eng* 10(2): 140-148.
- CHENG W, SUN J, HU W & LI T. 2012. Adaptive management of water resources based on an advanced entropy method to quantify agent information. *J Hydroinform* 21(3): 385-398.
- CHU CL. 1987. Entropy and probability concepts in hydraulics. *J Hydrol Eng* 12(5): 583-590.
- CHU CL. 1988. Entropy and 3-D velocity distribution in open channels. *J Hydrol Eng* 13(6): 738-750.
- CHU CL. 1989. Velocity distribution in open channels flow. *J Hydraul Eng* 115(5): 575-594.
- CHU CL. 1991. Application of entropy concept in open-channel flow study. *J Hydraul Eng* 117(5): 815-828.
- CHU CL & CHOU D. 1988. Structure of 3-D flow in rectangular open channels. *J Hydraul Eng* 114(11): 1050-1057.
- CHU CL & HSING DC. 1983. Secondary flow, shear stress and sediment transport. *J Hydraul Eng* 109(7): 879-888.
- CHU CL, Hsu DM & TUNG HC. 2005. Efficient methods of discharge measurements in rivers and streams based on the probability concept. *Hydrol Process* 19(20): 3935-3948.
- COBO JM, MENDIZÁBAL E, WIESEL A, BIRBA T & ESCOBAR A. 2017. Use of the principles of maximum entropy and maximum relative entropy for the determination of uncertain parameter distributions in engineering applications. *Entropy* 19(9): 486-522.
- COLE TM & WELLS SA. 2000. CE-QUAL-W2: A two-dimensional, laterally averaged, hydrodynamic and water quality model, version 3.5. Instruction Report EL-08-1. US Army Engineering and Research Development Center, Vicksburg USA.
- DE ARAUJO JC & CHAUDHRY H. 1998. Experimental evaluation of a 2D entropy model in open channels. *J Hydraul Eng* 124(10): 1064-1068.
- DE ARAUJO JC. 2007. Entropy-based equation to assess hillslope sediment production. *Earth Surf Proc Land* 32: 2025-2038.
- DH. 1982. HIKETT User Manual. Danish Hydraulic Institute, Hørsholm.
- DH. 2017. NIKE-11: A Modelling System for Rivers and Channels. User Guide. Danish Hydraulic Institute, Hørsholm, 100 p.
- GARRA L, ALVIO S, FRANZONI M & MORABIANCO T. 2014. Three methods for estimating the entropy parameter  $H$  based on a decreasing number of velocity measurements in a river cross-section. *Entropy* 16: 2510-2520.
- KONTAMA N, MARINI G & PAOLA F. 2015. Experimental assessment of a 2-D entropy-based model for velocity distribution in open channel flow. *Entropy* 17(1): 988-998.
- KURUCU O, HAYT PA, SCHMEDDLE MW, SCHUMER R & BATHG S. 2016. Probability distributions of bed load particle velocities, accelerations, hop distances and travel times informed by Jaynes's principle of maximum entropy. *J Geophys Res Earth Surf* 121: 1373-60.
- GRECO M. Effect of bed roughness on 1-D entropy velocity distribution in open channel flow 2015. *Hydrol Res* 48(7): 1-10.
- GRECO M & MARTINO G. 2018. 1-D versus 2-D entropy velocity law for water discharge assessment in a rough ditch. *Entropy* 20: 838.
- GURPA A & GOVINDARAJU BS. 2019. Propagation of structural uncertainty in watershed hydrologic models. *J Hydrol* 579: 66-81.

- HARRANCIÖZÜLU NB & SINGH VP. 1998. Entropy in environmental and water resources. *Encyclopedia of Earth Science*. Springer, Dordrecht, Boston, p. 225-241.
- HOWES DJ & SANDERS BT. 2011. Velocity contour weighting method. I: algorithm development and laboratory testing. *J Hydraul Eng* 137(11): 1359-1367.
- JAYNES ET. 1957a. Information theory and statistical mechanics, I. *Phys Rev* 106: 620-630.
- JAYNES ET. 1957b. Information theory and statistical mechanics, II. *Phys Rev* 108: 171-190.
- JIANG Y, LI B & CHEN J. 2016. Analysis of the velocity distribution in partially-filled circular pipe employing the principle of maximum entropy. *PLoS One* 11 (3): 1-17.
- JIN H, HE W, LIU Q, WANG J & FENG C. 2016. The applicability of research on moving cut data-approximate entropy on abrupt climate change detection. *Theor Appl Climatol* 124: 475-486.
- KWART D. 2013. Hydraulic problems in flooding: from data to theory and from theory to practice. In: Rowinski P (Ed), *Experimental and Computational Solutions of Hydraulic Problems*. Geoplanet: Earth and Planetary Sciences. Springer, Berlin, Heidelberg, 425 p.
- LUO Y & SINGH VP. 2011. Entropy theory for two-dimensional velocity distribution. *J Hydraul Eng* 137(4): 303-315.
- MÉLISZ V, BLANCHET J & MOLINE C. 2018. Uncertainty estimation of intensity-duration-frequency relationships: a regional analysis. *J Hydrol* 558: 579-591.
- MIRANDA O & RIZZO MG. 2019. Information entropy theory applied to the dip-phenomenon analysis in open channel flows. *Entropy* 21(6): 554.
- MISHRA S. 2009. Uncertainty and sensitivity analysis techniques for hydrologic modelling. *J Hydroinform* 11(3-4): 282-296.
- MOHAN T, KUMBHAKAR M, GHOSHAL K & KUMAR J. 2019. Semianalytical solution for simultaneous distribution of fluid velocity and sediment concentration in open-channel flow. *J Eng Mech* 145(11).
- MORABARCO T, CORATO G, MELLORE F & SINGH VP. 2013. An entropy-based method for determining the flow depth distribution in natural channels. *J Hydrol* 407: 176-188.
- NIRTO Y & GARCIA MH. 1996. Experiments on particle-turbulence interactions in the near-wall region of an open channel flow: implications for sediment transport. *J Fluid Mechanics* 326: 285-319.
- PAHEL A, SCHEERMA BJ & PIERRE R. 2016. The influence of near-wall density and viscosity gradients on turbulence in channel flows. 2016. *J Fluid Mech* 809: 793-820.
- SHANNON CT. 1948. Mathematical theory of communications, I and II. *Bell Syst J* 27: 379-443.
- SHORT JT & JOHNSON RW. 1980. Properties of cross-entropy minimization. *IEEE Inform Theory* 27: 472-482.
- SHONO K & KNIGHT DW. 1991. Turbulent open channel flows with variable depth across the channel. *J Fluid Mech* 222: 617-646.
- SIRESTHA B, COCHRANE TA, CARUSO BS, ARMS WE & PIMAN T. 2016. Uncertainty in flow and sediment projections due to future climate scenarios for the 35 Rivers in the Mekong Basin. *J Hydrol* 540: 1088-1104.
- SINGH VP. 2013. *Entropy theory and its application in environmental and water engineering*. ASCE Press, New York, 662 p.
- SINGH VP. 2014. *Entropy theory in hydraulic engineering: an introduction*. ASCE Press, New York, 656 p.
- SINGH VP, MARIH C & YONITANI N. 2013. Derivation of 2D power-law velocity distribution using entropy theory. *Entropy* 15: 1221-1231.
- STEFFLER PH, RAJANATHAN R & PETERSON AW. 1985. LDA measurements in open channel. *J Hydraul Eng* 111(1): 119-130.
- STEFFLER P & BLACKBURN J. 2002. *River2D: Two-dimensional depth averaged model of river hydrodynamics and fish habitat: introduction to depth averaged modeling and user's manual*. Technical Report, Edmonton, Canada: University of Alberta, 119 p. <http://www.river2d.ualberta.ca/download.htm>
- TETRA TECH. 2007. *The Environmental Fluid Dynamics Code User Manual USEPA version 1.01*.
- THANH VQ, BOELVINKO, VAN DER WEGEN M, BEYNS J, KERNKAMP H, VAN VRIJF C & URRUTIA VTR. 2020. Flooding in the Mekong Delta: the impact of dyke systems on downstream hydrodynamics. *Hydrol Earth Syst Sci* 24: 189-210.
- TAPOLCZU E, VARDOLICHAKIS SA, TRICHAKIS IC & KARATZAS OR. 2019. Hydraulic head uncertainty estimations of a complex artificial intelligence model using multiple methodologies. *J Hydroinform* 22(1): 205-218.
- TORRES-BEJARANO P, PADILLA J, RODRIGUEZ-CUENAS C & CANTERO R. 2015. Hydrodynamics modelling utilizing the EFDC Explorer model for the sustainable management of Canal del Dique-Guajaro hydrosystem, Colombia. *WT Transactions on The Built Environment*, 168. doi:10.2495/150450371.

WALDISPIR, RIVER BR, ARB, M & SCHLEDEL, M. 2016. Maximum entropy analysis of hydraulic pipe flow networks. *J Hydraul Eng* 142(9): 04016028.

ZOU Q, HOU W & HU J. 2017. An entropy-based investigation into bivariate drought analysis in China. *Entropy* 19(1): 1-17.

#### How to cite

SILVA FILHO AV, DE ARAÚJO JC & RAABE A. 2020. Trade-off between number of constraints and primary-statement robustness in entropy models: the case of the open-channel velocity field. *An Acad Bras Cienc* 42: e20200594. DOI 10.1590/1669-5928202005940594.

Manuscript received on April 21, 2020;  
accepted for publication on July 24, 2020.

#### ANTONIO VIANA DA SILVA FILHO<sup>1</sup>

<https://orcid.org/1000-0002-7026-3629>

#### JOSÉ CARLOS DE ARAÚJO<sup>2</sup>

<https://orcid.org/1000-0002-3949-8103>

#### ARMIN RAABE<sup>3</sup>

<https://orcid.org/1000-0002-6819-1214>

<sup>1</sup>Federal Rural University of Pernambuco (UFPE),  
Av. Gregório Farias Nequena, Caixa Postal 050,  
50601-510 Serra Talhada, PE, Brazil

<sup>2</sup>Federal University of Ceará, Department of  
Agricultural Engineering, Campus do Pici, Bloco  
80A, Pici, 60455-760 Fortaleza, CE, Brazil

<sup>3</sup>Leipzig University, Leipzig Institute of Meteorology,  
Stephanstr. 1, 04103, Leipzig, Saxonia, Germany

Correspondence to: **Antonio Viana da Silva Filho**

E-mail: [viana.filho.ajr@ufpe.br](mailto:viana.filho.ajr@ufpe.br)

#### Author contributions

Antonio Viana da Silva Filho codified the models, developed the model with three restrictions and curvilinear coordinates (L3); parameterized and simulated the models; co-wrote and formatted the text. José Carlos de Araújo designed the research project, reviewed the models, their parameterization and their results, and co-wrote the text. Armin Raabe reviewed the models and their results, and co-wrote the text.

