UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOSÉ FABRÍCIO MAIA FILHO

A IMPORTÂNCIA DO ENSINO DE ALGUMAS DESIGUALDADES CLÁSSICAS NO ENSINO MÉDIO

FORTALEZA

2021

JOSÉ FABRÍCIO MAIA FILHO

A IMPORTÂNCIA DO ENSINO DE ALGUMAS DESIGUALDADES CLÁSSICAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M186i Maia Filho, José Fabrício.
A importância do ensino de algumas desigualdades clássicas no Ensino Médio / José Fabrício Maia Filho. – 2021.
74 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2021.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Desigualdades entre Médias.. 2. Cauchy-Schwarz.. 3. Bernoulli.. 4. Ensino Médio.. I. Título.

CDD 510

JOSÉ FABRÍCIO MAIA FILHO

A IMPORTÂNCIA DO ENSINO DE ALGUMAS DESIGUALDADES CLÁSSICAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em: 15/01/2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro
Universidade Estadual do Ceará

Dedico esta monografia à minha esposa **Tânia Maia** e aos meus filhos **Lucas Maia** e **Davi Maia** cujas vidas ressignificaram a minha.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a **Deus** a oportunidade de ter nascido em boas condições físicas, emocionais e intelectuais, favorecendo o meu aprendizado.

Ao meu pai (**Fabrício Maia**), por ser uma forte referência em minha vida, e, em especial, à minha mãe (**Raimunda Maia**), que teve uma vida cheia de dificuldades e mesmo assim conseguiu passar, por meio de conversas e uma postura firme, a importância dos estudos para nossas vidas.

Agradeço, também, aos meus professores da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará (PROFMAT), por terem compartilhado, com maestria, vivências, técnicas e conhecimentos indispensáveis a nossa práxis.

“Dar o exemplo não é a melhor maneira de influenciar os outros – é a única." (ALBERT SCHWEITZER)

RESUMO

Neste trabalho, são propostas técnicas de resolução de problemas envolvendo desigualdades matemáticas, as quais incorporei em aulas à medida que o meu amadurecimento profissional foi se consolidando. Por se tratar de técnicas acessíveis e eficientes, que facilitam a resolução de muitos problemas de valores extremos, tornando as aulas de matemática dinâmicas e atraentes, foram materializadas neste estudo. Nesse contexto, evidencia-se que o professor está destinado a estudar continuamente, já que para poder qualificar suas ações, romper barreiras e alavancar vidas, é necessário que tenha um conhecimento amplo do que ensina. Todo o conhecimento desta pesquisa deriva de algumas propriedades dos números reais, sendo demonstrados alguns teoremas e consequências. Em seguida, para firmar o conhecimento, são apresentadas algumas aplicações numéricas, algébricas, geométricas e trigonométricas. Finalmente, a pesquisa é concluída abordando situações cobradas em exames de vestibulares de nosso país. Devido à ausência do tema escolhido em livros didáticos, esta pesquisa será uma ferramenta que promoverá momentos de reflexão, ação e transformação no ensino de matemática. Portanto, enfatiza-se a importância de as ideias supracitadas serem exploradas nas escolas de ensino médio do Brasil.

Palavras-chave: Desigualdades entre Médias. Cauchy-Schwarz. Bernoulli. Ensino Médio.

ABSTRACT

This study reflects on technical proposals for problem solving, and involves mathematical inequalities proposed, which I incorporated in classes as my professional maturation was consolidated. Because these are accessible and efficient techniques, which facilitate the resolution of many problems of extreme values, making mathematics classes dynamic and attractive, they were materialized in this study. In this context, it is evident that the teacher is destined to study continuously, since in order to qualify his actions, break barriers and leverage lives, it is necessary that he has a broad knowledge of what he teaches. All the knowledge of this research derives from some properties of the real numbers, being demonstrated some theorems and consequences. Then, to establish the knowledge, some numerical, algebraic, geometric and trigonometric applications are presented. Finally, the research is concluded by addressing situations charged in entrance exams in our country. Due to the absence of the chosen theme in textbooks, this research will be a tool that will promote moments of reflection, action and transformation in the teaching of mathematics. Therefore, it emphasizes the importance of the aforementioned ideas to be explored in high schools in Brazil.

Keywords: Inequalities between means. Cauchy-Schwarz. Bernoulli. High School.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Com o presente trabalho pretende-se oferecer uma modesta contribuição ao estudo de problemas relacionados às Desigualdades Matemáticas. O conhecimento destas desigualdades facilita o entendimento das resoluções de problemas envolvendo valores extremos, que, frequentemente, quando aprofundados, só são resolvidos usando noções de cálculo diferencial.

No início da docência, muitas vezes, deparei-me com questões de vestibulares que podiam ser resolvidas usando algumas desigualdades matemáticas. No entanto, existem limitações que impedem o professor de ir além do campo de conhecimento dos alunos, tais quais o dever em relação ao cumprimento do programa estabelecido pela instituição de ensino e a notória deficiência dos livros didáticos no âmbito supracitado, visto que, normalmente, as situações propostas relacionadas com valores extremos, em nível de ensino médio, são discutidas a partir de conhecimentos de funções quadráticas ou trigonométricas. Posteriormente, o amadurecimento profissional nos permite ousar e considerar o uso da transversalidade de temas sem comprometer os conteúdos programáticos.

Nesse sentido, pode-se afirmar que os problemas envolvendo desigualdades são de grande relevância para o ensino de Matemática. Contudo, o assunto não é desenvolvido nos livros didáticos de forma satisfatória. Logo, há a necessidade de se ter, no material pedagógico em nível de ensino médio, um capítulo dedicado ao estudo de algumas desigualdades clássicas e suas aplicações, com a finalidade de melhor capacitar os alunos para os futuros exames a que se submeterão.

Para garantir o entendimento e aproveitamento do presente trabalho, não comprometendo o seu alcance, o conteúdo foi dividido em três partes. Na primeira, apresenta-se uma propriedade elementar dos números reais e, a partir desta, demonstra-se a validade de algumas desigualdades clássicas. Na segunda, são apresentadas as desigualdades de Cauchy-Schwarz, Bernoulli e as relações entre as médias: aritmética, geométrica, quadrática e harmônica, por conseguinte, é exposto a resolução de problemas que exigem conhecimentos numéricos, algébricos, geométricos e trigonométricos. Para finalizar, na última, apresenta-se a resolução de alguns problemas relacionados ao objeto de estudo, que têm aparecido em vestibulares de nosso país.

Em síntese, devido à frequente presença dos resultados discutidos nesta pesquisa nos diversos exames de vestibulares de nosso país, justifica-se a iniciativa desse projeto. Por intermédio do Profmat (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), foi possível amadurecer algumas ideias e dada a oportunidade de materializar os conhecimentos adquiridos em vivências pessoais de ensino-aprendizagem no meio acadêmico. Por fim, as questões resolvidas, que serão apresentadas nesta dissertação, resultam de vários ensaios aplicados e comentados por mim ao longo dos anos.

2 DESIGUALDADES

Para sermos eficientes na resolução de problemas relacionados com as desigualdades, é importante o correto manuseio de algumas propriedades que dizem respeito aos números reais.

Dentre estas propriedades, começaremos por um resultado simples e eficaz para validar muitos teoremas.

2.1 Desigualdades clássicas e aplicações

Seja x um número real, então a potência x^2 é um número não negativo, isto é, $x^2 \geq 0, \forall x \in R$. Note que qualquer que seja o real x, a igualdade $x^2 = 0$, só ocorre quando $x = 0$. De um modo geral, se $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são números reais, então $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2 \geq 0$. Da mesma forma, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2 = 0$, só ocorre, quando $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n = 0$.

APLICAÇÃO 1

Demonstre que a igualdade $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2 = 0$ nos reais, só ocorre quando $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n = 0$.

Demonstração:

Supondo que exista um determinado $x_i \neq 0$, teremos $x_i^2 > 0$. Então, a soma torna-se positiva, pois, as outras parcelas são não negativas.

Assim, não podemos ter nenhuma parcela x_i diferente de zero, o que nos leva a concluir que todos os termos da soma devem ser iguais a zero.

APLICAÇÃO 2

Prove que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$, $\forall a, b, c \in R$.

Prova:

Temos que:

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc, \ \forall a, b, c \in R.$

Multiplicando ambos os membros por 2, tem-se:

$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc, \ \forall a, b, c \in R.$

A desigualdade acima pode ser transformada facilmente em:

$a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 \geq 0, \ \forall a, b, c \in R$

Finalmente, temos: $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \geq 0$, o que é verdade, pois todo quadrado nos reais é não negativo. Vale a pena reforçar que a igualdade só ocorrerá quando $(a - b)^2 = (a - c)^2 = (b - c)^2 = 0$, isto é, $a = b = c$.

APLICAÇÃO 3

Se os números reais a, b e c são tais que $a, b \geq 1 \geq c \geq 0$ e $a + b + c = 3$, prove que $2 \leq ab + bc + ac \leq 3$.

Prova:

Sabemos que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$. (vide aplicação 2)

Somando 2.(ab + ac + bc) a ambos os membros, obtemos:

$a^2 + b^2 + c^2 + 2.(ab + ac + bc) \geq ab + ac + bc + 2.(ab + ac + bc)$ (I)

Com isso,

$(a + b + c)^2 \geq 3.(ab + ac + bc) \rightarrow 9 \geq 3.(ab + ac + bc) \rightarrow ab + ac + bc \leq 3$ (I)

Como $a, b \geq 1 \geq c \geq 0$, então:

$(a - 1).(b - 1).(1 - c) \geq 0 \rightarrow ab - abc - a + ac - b + bc + 1 - c \geq 0$

Daí,

$ab + ac + bc \geq abc + \underbrace{a + b + c}_{3} - 1 \geq abc + 2 \geq 2$ (II)

De (I) e (II), concluímos que:

$2 \leq ab + bc + ac \leq 3$

APLICAÇÃO 4

Demonstre a desigualdade $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$, $\forall a,b \in R_+$.

Demonstração:

Desenvolvendo a desigualdade dada, encontramos:

$\frac{a^3+b^3}{2} \geq \frac{a^3+3.a^2.b+3.a.b^2+b^3}{8} \rightarrow 4.a^3 + 4.b^3 \geq a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3$

$a^3 + b^3 - a^2.b - a.b^2 \geq 0 \rightarrow a^2.(a-b) - b^2.(a-b) \geq 0$

$(a-b).(a-b).(a+b) \geq 0 \rightarrow \underbrace{(a-b)^2}_{\geq 0}.\underbrace{(a+b)}_{\geq 0} \geq 0$

Evidentemente, o primeiro fator é não negativo e o segundo também. Portanto, a desigualdade proposta é verdadeira.

APLICAÇÃO 5

Se a e b são números reais, prove que $a^2 + a.b + b^2 \geq 0$.

Prova:

Temos que: $(a + b)^2 \geq 0$, para todo a, b reais.

Assim, $a^2 + 2ab + b^2 \geq 0$, com a, b reais.

Adicionando $a^2 + b^2$ a ambos os membros, tem-se:

$a^2 + b^2 + a^2 + 2ab + b^2 \geq 0 + a^2 + b^2 \rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2ab \geq a^2 + b^2$

$a^2 + b^2 + ab \geq \frac{a^2+b^2}{2} \geq 0$, pois $\frac{a^2+b^2}{2}$ é não negativo.

Portanto, $a^2 + ab + b^2 \geq 0$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, valendo a pena ressaltar que a igualdade

$a^2 + ab + b^2 = 0$, só ocorrerá nos reais quando a = b = 0.

APLICAÇÃO 6

Para quaisquer a, b $\in \mathbb{R}$, prove que se a < b, então $a^3 < b^3$.

Prova:

• Hipótese: a < b implica a – b < 0

• Fato: $a^2 + ab + b^2 \geq 0$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ (vide aplicação 5)

Então, o produto do fator $a - b$ (negativo, $a < b$) pelo fator $a^2 + ab + b^2$ (positivo, pois a e b não são nulos simultaneamente), resultará em um número negativo, isto é, $(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) < 0$. Como $(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$, encontramos $a^3 - b^3 < 0$, o que nos leva a concluir que $a^3 < b^3$.

APLICAÇÃO 7

Se a, b, c e d são números reais tais que $a \geq b$ e $c \geq d$, prove que $ac + bd \geq ad + bc$.

Prova:

Como $a \geq b$ e $c \geq d$, então $a - b \geq 0$ e $c - d \geq 0$.

Obviamente,

$(a - b) \cdot (c - d) \geq 0 \rightarrow ac - ad - bc + bd \geq 0$

Portanto, $ac + bd \geq ad + bc$, para $a \geq b$ e $c \geq d$.

APLICAÇÃO 8

Prove que um número real positivo mais o seu recíproco é sempre maior ou igual a 2.

Prova:

Sabemos que o quadrado de qualquer número real é sempre maior ou igual a zero. Assim, a sentença $(x - 1)^2 \geq 0$ é verdadeira para todo x real.

Desenvolvendo a desigualdade acima, tem-se:

$(x - 1)^2 \geq 0 \rightarrow x^2 - 2.x + 1 \geq 0 \rightarrow x^2 + 1 \geq 2.x$, e como o enunciado se refere a um x positivo, podemos dividir ambos os membros por x obtendo a sentença $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.

APLICAÇÃO 9

Sejam a e b números reais positivos, prove que $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a} \geq a + b$.

Prova:

Sabemos que: $(a - b)^2 \geq 0, \forall a,b \in \mathbb{R}$

Desenvolvendo,

$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \rightarrow a^2 - ab + b^2 \geq ab$

Multiplicando ambos os membros por a + b que é positivo, obtemos:

$(a + b)(a^2 – ab + b^2) \geq (a + b)ab$

Com isso,

$$a^3 + b^3 \geq (a+b)ab \rightarrow \frac{a^3}{ab} + \frac{b^3}{ab} \geq a + b$$

Logo:

$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$, ocorrendo a igualdade quando a = b = c.

APLICAÇÃO 10

Se a, b e c são números reais tais que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, prove que $-\frac{1}{2} \leq ab + ac + bc \leq 1$.

Prova:

Sabe-se que:

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. (vide aplicação 2)

Então,

$ab + ac + bc \leq 1$ (I)

Por outro lado,

$(a + b + c)^2 \geq 0$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) \geq 0$

Com isso, $1 + 2.(ab + ac + bc) \geq 0 \rightarrow ab + ac + bc \geq -\frac{1}{2}$ (II)

De (I) e (II), concluímos:

$$-\frac{1}{2} \leq ab + ac + bc \leq 1$$

APLICAÇÃO 11

Seja a função exponencial $f(x) = 10^x$, com x real, prove que

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \ \forall \ x_1 \neq x_2 \in \ R$$

Prova:

Devido a injetividade da função exponencial f(x) = 10^x, podemos escrever:

$$x_1 \neq x_2 \in R \to 10^{\frac{x_1}{2}} \neq 10^{\frac{x_2}{2}} \to \left(10^{\frac{x_1}{2}} - 10^{\frac{x_2}{2}}\right)^2 > 0$$

Desenvolvendo o produto notável, obtemos:

$$\left(10^{\frac{x_1}{2}}\right)^2 - 2 \,.\, 10^{\frac{x_1}{2}} \,.\, 10^{\frac{x_2}{2}} + \left(10^{\frac{x_2}{2}}\right)^2 > 0 \to 10^{x_1} - 2 \,.\, 10^{\frac{x_1}{2}} \,.\, 10^{\frac{x_2}{2}} + 10^{x_2} > 0$$

Daí,

$$10^{x_1} + 10^{x_2} > 2 \,.\, 10^{\frac{x_1}{2}} \,.\, 10^{\frac{x_2}{2}} \to 2 \,.\, 10^{\frac{x_1+x_2}{2}} < 10^{x_1} + 10^{x_2} \to 2 \,.\, f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < f(x_1) + f(x_2)$$

Portanto, $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \ \forall \ x_1 \neq x_2 \in R.$

APLICAÇÃO 12

Seja a função logarítmica f(x) = logx, com x positivo, prove que:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \ \forall \ x_1 \neq x_2 \in R_+^*$$

Prova:

Devido a injetividade de f(x) = logx, tem-se:

$$x_1 \neq x_2 \in R_+^* \to \left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 > 0 \to x_1 - 2\sqrt{x_1} \,.\, \sqrt{x_2} + x_2 > 0 \to \frac{x_1+x_2}{2} > \sqrt{x_1} \,.\, \sqrt{x_2}$$

Como a função f(x) = logx é crescente, podemos escrever:

$$\log\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \log\left(\sqrt{x_1} \,.\, \sqrt{x_2}\right) \to \log\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \log\left(\sqrt{x_1}\right) + \log\left(\sqrt{x_2}\right)$$

Segue que,

$$\log\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \log(x_1)^{\frac{1}{2}} + \log(x_2)^{\frac{1}{2}} \to \log\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}\log(x_1) + \frac{1}{2}\log(x_2)$$

Portanto,

$$\log\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{\log(x_1)+\log(x_2)}{2} \to f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \ \forall \ x_1, x_2 \in R_+^*$$

2.2 Relações entre as médias e aplicações

A seguir, definimos as médias – aritmética, geométrica, quadrática e harmônica - visando o correto entendimento das demonstrações e aplicações que se sucedem.

- **Aritmética:** a média aritmética (A) de n números positivos a_1, a_2, ..., a_n é definida pela seguinte expressão, $A = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$.
- **Geométrica:** a média geométrica (G) de n números positivos a_1, a_2, ..., a_n é definida pela seguinte expressão: $G = \sqrt[n]{a_1 \,.\, a_2 \,.\, ... \,.\, a_n}$.
- **Quadrática:** a média Quadrática (Q) de n números positivos a_1, a_2, ..., a_n é definida pela seguinte expressão: $Q = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}$.
- **Harmônica:** a média harmônica (H) de n números positivos a_1, a_2, ..., a_n é definida pela seguinte expressão: $H = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + ... + \dfrac{1}{a_n}}$.

Assim, se a e b forem valores positivos, podemos garantir:

1ª relação: A média aritmética de dois números reais positivos é maior ou igual a sua média geométrica.

Sabe-se que:

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0,\ \forall a,b \in \mathbb{R}_+^* \rightarrow a - 2\sqrt{a \,.\, b} + b \geq 0$$

Com isso:

$$a + b \geq 2\sqrt{a \,.\, b} \rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \,.\, b} \rightarrow A \geq G.$$

2ª relação: A média quadrática de dois números reais positivos é maior ou igual a sua média aritmética.

Sabe-se que:

$$(a - b)^2 \geq 0,\ \forall a,b \in \mathbb{R}_+^* \rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Com isso:

$$a^2 + b^2 + a^2 + b^2 \geq 2ab + a^2 + b^2$$

Simplificando, teremos:

$$2.(a^2+b^2) \geq (a+b)^2 \rightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4} \rightarrow \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \rightarrow Q \geq A.$$

3ª relação: A média geométrica de dois números reais positivos é maior ou igual a sua média harmônica.

Sabe-se que:

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0, \forall a,b \in \mathbb{R}_+^* \rightarrow a+b \geq 2\sqrt{a\,.\,b} \rightarrow \frac{a+b}{a\,.\,b} \geq \frac{2\sqrt{a\,.\,b}}{a\,.\,b}$$

Com isso:

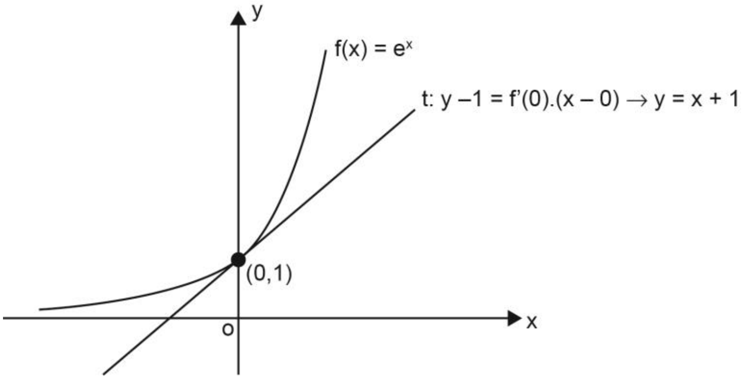
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{a\,.\,b}} \rightarrow \sqrt{a\,.\,b} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \rightarrow G \geq H.$$

Para justificar a generalização da desigualdade entre as médias, aritmética e geométrica, utilizaremos a desigualdade exponencial $e^x \geq 1 + x$, $\forall$ x real, que podemos comprovar a partir de conhecimentos relacionados com a obtenção da reta tangente a uma curva num ponto dado.

Sendo t a reta tangente ao gráfico da função $f(x) = e^x$ no ponto (0,1), então f'(0) representa o coeficiente angular de t. Como $f'(x) = e^x$, segue que $f'(0) = e^0 = 1$.

De posse do coeficiente angular de t, obtemos a reta tangente à curva $f(x) = e^x$ no ponto (0,1).

Figura 1 – Curva exponencial



Fonte: Imagem do autor.

O que nos permite concluir que $e^x \geq 1 + x$, $\forall$ x real, cuja igualdade ocorrerá para x = 0.

Como sabemos, para n números positivos, temos:

• Média Aritmética $\rightarrow$ $A = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$

• Média Geométrica $\rightarrow$ $G = \sqrt[n]{a_1 \,.\, a_2 .\, ... \,.a_n}$

Assim, a partir da desigualdade exponencial, obtemos:

Para $x = \dfrac{a_1}{A} - 1 \rightarrow e^{\frac{a_1}{A} - 1} \geq 1 + \left(\dfrac{a_1}{A} - 1\right) \rightarrow e^{\frac{a_1}{A} - 1} \geq \dfrac{a_1}{A}$

Para $x = \dfrac{a_2}{A} - 1 \rightarrow e^{\frac{a_2}{A} - 1} \geq 1 + \left(\dfrac{a_2}{A} - 1\right) \rightarrow e^{\frac{a_2}{A} - 1} \geq \dfrac{a_2}{A}$

....

Para $x = \dfrac{a_n}{A} - 1 \rightarrow e^{\frac{a_n}{A} - 1} \geq 1 + \left(\dfrac{a_n}{A} - 1\right) \rightarrow e^{\frac{a_n}{A} - 1} \geq \dfrac{a_n}{A}$

Multiplicando as desigualdades membro a membro, obtemos:

$$e^{\frac{a_1}{A} - 1} \cdot e^{\frac{a_2}{A} - 1} \cdot ... \cdot e^{\frac{a_n}{A} - 1} \geq \frac{a_1}{A} \cdot \frac{a_2}{A} \cdot ... \cdot \frac{a_n}{A} \rightarrow e^{\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{A} - n} \geq \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}{A^n} \qquad \text{(I)}$$

Como se sabe $A = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$, então $n = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{A}$ (II)

Substituindo (II) em (I), encontramos:

$$e^{n-n} \geq \frac{a_1 \,.\, a_2 \cdot ... \,.\, a_n}{A^n} \rightarrow A^n \geq a_1 \,.\, a_2 \,.\, ... \,.\, a_n \rightarrow A \geq \sqrt[n]{a_1 \,.\, a_2 \,.\, ... \,.\, a_n} \rightarrow A \geq G.$$

Portanto, podemos garantir que $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{A} \geq \sqrt[n]{a_1 \,.\, a_2 \,.\, ... \,.\, a_n}$, ocorrendo a igualdade para x = 0, isto é, quando $a_1 = a_2 = ... = a_n = A$.

APLICAÇÃO 13

Prove que $2^n > 1 + n.\sqrt{2^{n-1}}$, para todo n > 1 (natural)

Prova:

Sabe-se:

$a^n - b^n = (a - b) \,.\, (a^{n-1} + a^{n-2} b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$, $\forall n \geq 2$ (natural)

Fazendo: a = 2 e b = 1

$$2^n - 1^n = (2-1).\left(\underbrace{2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1}_{\text{n parcelas}}\right)$$

Aplicando a desigualdade das médias, encontramos:

$$M.A. > M.G. \rightarrow \frac{2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1}{n} > \sqrt[n]{2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} \text{ (termos distintos)}$$

Assim,

$$2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 > n.\sqrt[n]{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \rightarrow 2^n - 1 > n.2^{\frac{n-1}{2}}$$

Portanto, $2^n > 1 + n.2^{\frac{(n-1)}{2}}$, para todo n > 1 (natural).

APLICAÇÃO 14

Sejam **x**, **y** e **z** números reais positivos tais que $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$.

Prove que $xyz \leq \frac{1}{8}$.

Prova:

A partir da desigualdade das médias, podemos escrever:

$$\frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right).\left(\frac{c+d}{2}\right)} \geq \sqrt{\sqrt{(ab)}.\sqrt{(cd)}},\ \forall a,b,c \text{ e } d \in R_+^*$$

Daí,

$$\frac{a+b+c+d}{2} \geq \sqrt[4]{abcd},\ \forall a,b,c \text{ e } d \in R_+^* \text{ (desigualdade das médias)}$$

Sendo assim, aplicando a desigualdade das médias, obtemos:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz}{4} \geq \sqrt[4]{x^2.y^2.z^2.2xyz} \rightarrow \frac{1}{4} \geq \sqrt[4]{2x^3.y^3.z^3}$$

Elevando a quatro ambos os membros, encontramos:

$$\frac{1}{4^4} \geq 2x^3.y^3.z^3 \rightarrow \frac{1}{2^9} \geq x^3.y^3.z^3 \rightarrow \frac{1}{2^3} \geq x.y.z$$

Portanto, $x.y.z \leq \frac{1}{8}$.

APLICAÇÃO 15

Mostre que: se a, b e c são números reais não negativos, então $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

Demonstração:

Fazendo $E = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, podemos escrever:

$$E = \underbrace{a^3 + 3a^2.b + 3a.b^2 + b^3}_{\text{P.notável}} + c^3 - 3a^2.b - 3a.b^2 - 3a.b.c$$

$$E = \underbrace{(a+b)^3 + c^3}_{\text{P.notável}} - 3.a.b.(a+b+c) = (a+b+c).\left[(a+b)^2 - (a+b).c + c^2\right] - 3.a.b.(a+b+c)$$

$$E = \underbrace{(a+b+c)}_{\geq 0}.\left(\underbrace{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}_{\geq 0 \text{ (vide aplicação 2)}}\right) \rightarrow E \geq 0 \rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq 3a.b.c.$$

Nota: A desigualdade acima demonstrada, nos permite provar a validade da propriedade entre as médias aritmética e geométrica para três valores não negativos.

Observe que:

Fazendo $a^3 = x$, $b^3 = y$ e $c^3 = z$, obtemos:

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{x}.\sqrt[3]{y}.\sqrt[3]{z} \rightarrow \frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{x.y.z} \rightarrow \text{M.A.} \geq \text{M.G.}$$

APLICAÇÃO 16

Mostre que: se a, b e c são números reais positivos tais $a^3 + b^3 + c^3 = 3.a.b.c$, então $a = b = c$.

Demonstração:

Temos que:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3.a.b.c$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3.a.b.c = 0$$

$$\underbrace{a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3}_{\text{produto notável}} + c^3 - 3.a^2.b - 3.a.b^2 - 3.a.b.c = 0$$

$$\underbrace{(a+b)^3 + c^3}_{\text{produto notável}} - 3.a.b.(a+b+c) = 0$$

$$(a+b+c).\left[(a+b)^2 - (a+b).c + c^2\right] - 3.a.b.(a+b+c) = 0$$

$$\underbrace{(a+b+c)}_{\text{positivo}}.(a^2 + b^2 + c^2 - a.b - a.c - b.c) = 0$$

Então, para que a sentença acima seja verdadeira é necessário ter:

$a^2 + b^2 + c^2 – a.b – a.c – b.c = 0 \rightarrow (a – b)^2 + (a – c)^2 + (b – c)^2 = 0$

O que nos leva a concluir que a = b = c. (vide aplicação 1)

Nota: A propriedade acima demonstrada, comprova que a igualdade entre as médias aritmética e geométrica para três valores positivos, só ocorre quando os termos das médias são iguais.

Veja:

$$(a^3 + b^3 + c^3 = 3.a.b.c,\ \text{então}\ \ a = b = c)\ \leftrightarrow\ (\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{x.y.z},\ \text{então}\ \ x = y = z)$$

APLICAÇÃO 17

Demonstre que $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c,\ \forall a,b,c \in R^*_+$.

Demonstração:

Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos:

$$\text{i)}\ \frac{\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{bc}{a}.\frac{ac}{b}} = c \rightarrow \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq 2c$$

$$\text{ii)}\ \frac{\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}}{2} \geq \sqrt{\frac{ac}{b}.\frac{ab}{c}} = a \rightarrow \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2a$$

$$\text{iii)}\ \frac{\frac{bc}{a} + \frac{ab}{c}}{2} \geq \sqrt{\frac{bc}{a}.\frac{ab}{c}} = b \rightarrow \frac{bc}{a} + \frac{ab}{c} \geq 2b$$

Somando membro a membro, concluímos:

$$\frac{2bc}{a} + \frac{2ac}{b} + \frac{2ab}{c} \geq 2c + 2a + 2b \rightarrow \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq c + a + b.$$

APLICAÇÃO 18

Prove que $\frac{a+b+c}{3}\ \geq\ \sqrt{\frac{ab+ac+bc}{3}} \geq \sqrt[3]{abc},\ \forall a,b,c \in R^*_+$

Prova:

Sabe-se que:

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. (vide aplicação 2)

Somando 2.(ab + ac + bc) a ambos os membros, obtemos:

$a^2 + b^2 + c^2 + 2.(ab + ac + bc) \geq ab + ac + bc + 2.(ab + ac + bc)$ (I)

Com isso,

$(a + b + c)^2 \geq 3.(ab + ac + bc)$

Dividindo ambos os membros por 9, encontramos:

$$\frac{(a+b+c)^2}{9} \geq \frac{ab + ac + bc}{3} \to \frac{(a+b+c)^2}{9} \geq \frac{ab + ac + bc}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

Aplicando raiz quadrada em (II), tem-se:

$$\sqrt{\frac{(a+b+c)^2}{9}} \geq \sqrt{\frac{ab + ac + bc}{3}} \geq \sqrt{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}$$

Portanto, $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{\dfrac{ab+ac+bc}{3}} \geq \sqrt[3]{abc}$.

APLICAÇÃO 19

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais positivos, demonstre a desigualdade:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

Demonstração:

Considerando a desigualdade a seguir:

$(x - 1)^2 \geq 0 \to x^2 + 1 \geq 2.x$ e $x_i = \dfrac{a_i}{A}$, onde $A = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

Então: $\dfrac{a_1^2}{A^2} + 1 \geq \dfrac{2.a_1}{A}$

$$\frac{a_2^2}{A^2} + 1 \geq \frac{2.a_2}{A}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{a_n^2}{A^2} + 1 \geq \frac{2.a_n}{A}$$

Somando as n desigualdades acima, teremos:

$$\frac{a_1^2+...+a_n^2}{A^2}+n.1\geq 2.\left(\frac{a_1+...+a_n}{A}\right) \rightarrow \frac{a_1^2+...+a_n^2}{A^2}+n.1\geq 2.n$$

Daí, $\frac{a_1^2+...+a_n^2}{A^2}\geq n \rightarrow \left(\frac{a_1^2+...+a_n^2}{n}\right)\geq A^2 \rightarrow \sqrt{\frac{a_1^2+...+a_n^2}{n}}\geq A$

Portanto, $\sqrt{\frac{a_1^2+...+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+...+a_n}{n}$.

Vale destacar que a igualdade ocorrerá para x = 1, isto é, $a_1 = a_2 = ... = a_n = A$.

APLICAÇÃO 20

Se a, b e c são reais positivos tais que a + b + c = 1, mostre que:

$$P=\left(1+\frac{1}{a}\right).\left(1+\frac{1}{b}\right).\left(1+\frac{1}{c}\right)\geq 64$$

Demonstração:

Efetuando as multiplicações do primeiro membro da desigualdade, obtemos:

$$P=1+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{a.b}+\frac{1}{b.c}+\frac{1}{c.a}\right)+\frac{1}{a.b.c}. \qquad \text{(I)}$$

Usando a desigualdade das médias, M.A. ≥ M.G., temos:

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\dfrac{1}{a.b.c}} \\ \dfrac{\frac{1}{a.b}+\frac{1}{b.c}+\frac{1}{c.a}}{3} \geq \sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2.b^2.c^2}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3.q \ \text{(II)} \\ \frac{1}{a.b}+\frac{1}{b.c}+\frac{1}{c.a} \geq 3.q^2 \ \text{(III)} \end{cases}, \text{ onde } \sqrt[3]{\frac{1}{a.b.c}} = q.$$

Substituindo (II) e (III) em (I), encontramos: $P \geq 1 + 3.q + 3.q^2 + q^3 = (1 + q)^3$ (IV).

Finalmente, sabendo que a + b + c = 1, tem-se: $\frac{1}{3}=\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a.b.c}. \ \therefore \ q \geq 3.$

Logo, em (IV), concluímos que $P \geq (1 + 3)^3 = 64$, como queríamos mostrar.

APLICAÇÃO 21

Suponha que a soma das sextas potências de 6 inteiros menos 1 é igual a seis vezes o produto destes números. Prove que um deles é 1 ou –1 e os demais são 0.

Prova:

Supondo: $a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6 + f^6 - 1 = 6.a.b.c.d.e.f$

Usando $A \geq G$, tem-se:

$$\frac{a^6+b^6+c^6}{3} \geq \sqrt[3]{a^6.b^6.c^6}$$

$$\frac{d^6+e^6+f^6}{3} \geq \sqrt[3]{d^6.e^6.f^6}$$

Somando: $a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6 + f^6 \geq 3.a^2.b^2.c^2 + 3.d^2.e^2.f^2$

$6.a.b.c.d.e.f + 1 \geq 3.a^2.b^2.c^2 + 3.d^2.e^2.f^2$

$1 \geq 3.(a.b.c - d.e.f)^2$

Então, $a.b.c - d.e.f$ tem que ser zero, ou seja, $a.b.c = d.e.f$.

Com raciocínio análogo, encontra-se: $a.b.d = c.e.f$, $a.b.e = c.d.f$, e assim por diante. Logo, o produto de três termos quaisquer é igual ao produto dos outros três.

Supondo todos diferentes de zero, podemos ter:

$$\begin{cases} a < b < c < d < e < f \rightarrow d.e.f > a.b.c \ (\text{absurdo}) \\ a = b < c < d < e < f \rightarrow d.e.f > a.b.c \ (\text{absurdo}) \\ a = b = c < d < e < f \rightarrow d.e.f > a.b.c \ (\text{absurdo}) \\ a = b = c = d < e < f \rightarrow d.e.f > a.b.c \ (\text{absurdo}) \\ a = b = c = d = e < f \rightarrow d.e.f > a.b.c \ (\text{absurdo}) \\ a = b = c = d = e = f \rightarrow a^6 - 1 = a^6 \quad (\text{absurdo}) \end{cases}$$

Assim, só nos resta a possibilidade de ter alguns termos iguais a zero, o que acarretará $a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6 + f^6 = 1$, portanto cinco deles serão iguais a zero e o outro +1 ou –1.

APLICAÇÃO 22

Ache todas as soluções reais da equação a seguir:

$$3^{x^2-x-y} + 3^{y^2-y-z} + 3^{z^2-z-x} = 1$$

Solução:

Sabemos que:

$$M.A \geq M.G. \rightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc},\ \forall a,b,c \in R_+ \text{ (vide aplicação 15)}$$

Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, obtemos:

$$\frac{3^{x^2-x-y}+3^{y^2-y-z}+3^{z^2-z-x}}{3} \ \geq \ \sqrt[3]{3^{x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z}}$$

Assim,

$\frac{1}{3} \geq \sqrt[3]{3^w}$, em que $w = x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z$

Elevando ao cubo ambos os membros, encontramos:

$$\frac{1}{27} \geq 3^w \to 3^{-3} \geq 3^w \to w \leq -3$$

Agora, podemos escrever:

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z \leq -3 \to (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \leq 0$$

Portanto, devemos ter:

$$(x-1)^2=(y-1)^2=(z-1)^2=0 \to x=y=z=1 \to S=\{(1,1,1)\}$$

APLICAÇÃO 23

Prove que a média harmônica de n números positivos $x_1, x_2,...,x_n$ é sempre menor ou igual a sua média geométrica e só é igual quando todos os números são iguais.

Prova:

Aplicando a desigualdade (M.A $\geq$ M.G), nos inversos de $x_i > 0$, i = 1,2,..., n, temos:

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+...+\frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\frac{1}{x_3}\cdot...\cdot\frac{1}{x_n}} \to \frac{1}{H} \geq \frac{1}{G} \to G \geq H$$

Para termos G = H (M.G.= M.H.), devemos ter:

$\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_3}=...=\frac{1}{x_n} \to x_1=x_2=x_3=...=x_n$ (todos os números iguais)

APLICAÇÃO 24

Se a e b são reais não negativos tais que a + b $\geq$ 1. Prove que $a^4+b^4 \geq \frac{1}{8}$.

Prova:

Aplicando a desigualdade que relaciona a média quadrática e a média aritmética, obtemos:

$$\text{M.Q} \geq \text{M.A.} \rightarrow \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \rightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \rightarrow a^2+b^2 \geq 2.\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

Consequentemente,

$$a^4+b^4 \geq 2.\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 \rightarrow a^4+b^4 \geq \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)^2 \geq \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^4$$

Assim,

$$a^4+b^4 \geq \frac{1}{8}\cdot(a+b)^4$$

Como a + b ≥ 1, concluímos que:

$$a^4+b^4 \geq \frac{1}{8}\cdot(a+b)^4 \geq \frac{1}{8} \rightarrow a^4+b^4 \geq \frac{1}{8}\cdot$$

APLICAÇÃO 25

Prove que a sequência de termo geral $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é estritamente crescente, isto é, prove que para todo n inteiro e positivo $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

Prova:

A partir da desigualdade (M.A ≥ M.G), podemos escrever:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+...+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right).\left(1+\frac{1}{n}\right)...\left(1+\frac{1}{n}\right).1},$$ já que não temos todos os termos iguais.

Assim,

$$\frac{n.\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{n+2}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Como $\frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}$, concluímos que: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

APLICAÇÃO 26

Prove que, se a desigualdade da médias (M.A $\geq$ M.G) é válida para n números positivos, n $>$ 2, então, ela é válida também para n – 1 números positivos.

Prova:

Sejam os números positivos a seguir a_1, a_2,..., a_{n-1}, A, em que:

$$A = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}{n-1} \text{ e } G = \sqrt[n-1]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1}}$$

Como a desigualdade das médias é válida para n valores, podemos escrever:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + A}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1} \cdot A} \rightarrow \frac{(n - 1)A + A}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1} \cdot A}$$

Segue que

$$A \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1} \cdot A} \rightarrow A^n \geq a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1} \cdot A \rightarrow A^{n-1} \geq a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1}$$

Portanto, podemos escrever:

$A \geq \sqrt[n-1]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1}} \rightarrow A \geq G$, ocorrendo a igualdade para $a_1 = a_2 = ... = a_{n-1} = A$.

APLICAÇÃO 27

Se a, b e c são números reais positivos, então, prove que

$[(1 + a).(1 + b).(1+c)]^7 > 7^7.a^4b^4c^4$.

Prova:

Inicialmente, temos:

(1 + a).(1 + b).(1 + c) = 1 + a + b + c + ab + ac + bc + abc

(1 + a).(1 + b).(1 + c) – 1 = a + b + c + ab + ac + bc + abc

Aplicando a desigualdade entre as médias, aritmética e geométrica, obtemos:

$$M.A \geq M.G. \rightarrow \frac{a + b + c + ab + ac + bc + abc}{7} \geq \sqrt[7]{a^4b^4c^4}$$

Daí,

$$\frac{(1+a).(1+b).(1+c) - 1}{7} \geq \sqrt[7]{a^4b^4c^4} \rightarrow (1+a).(1+b).(1+c) \geq 7\sqrt[7]{a^4b^4c^4} + 1 > 7\sqrt[7]{a^4b^4c^4}$$

Portanto, podemos escrever:

$$(1+a).(1+b).(1+c) > 7\sqrt[7]{a^4b^4c^4}$$

APLICAÇÃO 28

Determine o máximo valor de $f(x) = x - x^4$, com $0 \le x \le 1$.

Solução:

Inicialmente, tomemos $y = x - x^4 = x.(1 - x^3)$. Obviamente x e $1 - x^3$ são não negativos. Veja:

$y = x.(1 - x^3) \to y^3 = x^3.(1 - x^3) \to 3y^3 = 3x^3.(1 - x^3)^3$

Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos:

$$M.A \ge M.G. \ \to \ \frac{3x^3 + (1-x^3) + (1-x^3) + (1-x^3)}{4} \ \ge \ \sqrt[4]{3x^3.(1-x^3).(1-x^3).(1-x^3)}$$

Daí,

$\frac{3}{4} \ge \sqrt[4]{3y^3} \to \left(\frac{3}{4}\right)^4 \ge 3y^3 \to \frac{3^3}{4^4} \ge y^3 \to y_{máx} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{8}$, ocorrendo quando $3x^3 = 1 - x^3$, que corresponde a $x = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

2.3 A desigualdade de *Cauchy-Schwarz*, *Bernoulli* e aplicações

Cauchy-Schwarz: Se $a_1, a_2, ..., a_n$ e $b_1, b_2, ..., b_n$ são números reais não nulos, com $n \ge 1$, então $\left(a_1.b_1 + a_2.b_2 + \ ... \ + \ a_n.b_n\right)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + ... \ + \ a_n^2\right).\left(b_1^2 + b_2^2 + \ ... \ + \ b_n^2\right)$.

Demonstração:

Considere a seguinte sentença matemática:

$P(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + ... + (a_nx - b_n)^2 \ \ge \ 0$, válida para qualquer x real, pois a soma de quadrados nos reais é sempre maior ou igual a zero. Desenvolvendo os quadrados dos binômios acima teremos:

$$P(x) = \left(a_1^2 + \ a_2^2 + \ ... \ + \ a_n^2\right)x^2 - 2.(a_1b_1 + a_2b_2 + \ ... \ + a_nb_n)x + \left(b_1^2 + \ b_2^2 + \ ... \ + \ b_n^2\right) \ge 0$$

$$\text{Fazendo:}\begin{cases} A = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \\ B = -2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n) \\ C = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 \end{cases}$$

Então, a desigualdade acima será escrita assim:

$P(x) = A.x^2 + B.x + C \geq 0, \forall x \in R.$

Observe que $A.x^2 + B.x + C$, com A positivo, é um polinômio do segundo grau em x, cuja representação gráfica é uma parábola com concavidade para cima. Como P(x) é não negativo, para todo x real, devemos ter $\Delta \leq 0$, isto é, $B^2 \leq 4.A.C$.

Portanto:

$$(a_1.b_1 + a_2.b_2 + \ldots + a_n.b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2).(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

Para ocorrer a igualdade, o discriminante deverá ser nulo. Significa que o polinômio do segundo grau $P(x) = (a_1.x - b_1)^2 + (a_2.x - b_2)^2 + \ldots + (a_n.x - b_n)^2$ tem duas raízes reais e iguais, isto é, apenas um valor real α (raiz dupla) anula o polinômio. Devemos ter:

$$(a_1.\alpha - b_1)^2 + (a_2.\alpha - b_2)^2 + \ldots + (a_n.\alpha - b_n)^2 = 0$$

Dessa forma, todos os parênteses devem ser nulos, isto é, $b_i = \alpha.a_i$, para todo i. Então, a igualdade deve ocorrer quando os a_i forem diretamente proporcionais aos b_i.

Bernoulli: Para quaisquer números reais $x > -1$ e n inteiro positivo, então:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Demonstração:

I. Para $x \geq 0$, utilizaremos a expansão de Newton:

$$(1+x)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.1^{n-p}.x^p$$

Assim,

$$(1+x)^n = \binom{n}{0}.1^{n-0}.x^0 + \binom{n}{1}.1^{n-1}.x^1 + \binom{n}{2}.1^{n-2}.x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}.1^1.x^{n-1} + \binom{n}{n}.1^0.x^n$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \underbrace{\binom{n}{2}.x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}.x^{n-1} + \binom{n}{n}.x^n}_{\text{resultado não negativo}} \geq 1 + nx$$

Portanto, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, para todo $x \geq 0$ e n inteiro positivo.

II. Para $-1 < x < 0$, utilizaremos a identidade:

$a^n - b^n = (a - b).(a^{n-1} + a^{n-2} b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$, $\forall n \geq 1$ (natural)

Fazendo $a = 1 + x$ e $b = 1$, tem-se:

$$(1+x)^n - 1 = x.\left[(1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-2} + ... + (1+x) + 1\right]$$

Observando que:

$-1 < x < 0 \rightarrow 0 < 1 + x < 1 \rightarrow (1 + x)^{n-1}, (1 + x)^{n-2}, ..., (1 + x)$ são potências decrescentes, cujos valores pertencem ao intervalo (0,1).

Assim,

$$(1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-2} + ... + (1+x) + 1 < \underbrace{1+1+...+1+1}_{\text{n parcelas}} < n$$

Multiplicando ambos os membros por x, obtemos:

$$x.\left[(1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-2} + ... + (1+x) + 1\right] > nx$$

Portanto,

$(1+x)^n - 1 > nx \rightarrow (1+x)^n > 1 + nx$ para todo $-1 < x < 0$.

De (I) e (II), concluímos que:

$(1 + x)^n \geq 1 + nx$, para todos $x > -1$ e n inteiro positivo, valendo ressaltar que a igualdade ocorrerá para $x = 0$.

Para o enriquecimento desse trabalho, a seguir, apresento uma demonstração para a desigualdade das médias, aritmética e geométrica, a partir de *Bernoulli*.

Definindo $A_n = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \dfrac{S_n}{n}$, em que $a_i > 0$.

Fazendo $x + 1 = \dfrac{A_n}{A_{n-1}}$ na desigualdade de *Bernoulli*, obtemos:

$(1+x)^n \geq 1 + nx, \forall\ x > -1$ e $n \in N^*$

Daí,

$$\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{A_n}{A_{n-1}} - 1\right) \rightarrow \left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n \geq \frac{A_{n-1} + n.A_n - n.A_{n-1}}{A_{n-1}}$$

Perceba que:

$A_{n-1} = \dfrac{S_{n-1}}{n-1} \;\rightarrow\; n.A_{n-1} - A_{n-1} = S_{n-1}$

Com isso, podemos escrever:

$$\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n \geq \frac{n.A_n - (n.A_{n-1} - A_{n-1})}{A_{n-1}} \rightarrow \left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n \geq \frac{S_n - S_{n-1}}{A_{n-1}}$$

Simplificando o segundo membro da desigualdade, encontramos:

$$\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n \geq \frac{a_n}{A_{n-1}} \;\rightarrow\; a_n \leq A_{n-1}.\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n$$

A partir de $a_n \leq A_{n-1}.\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n$, justificaremos a generalização da desigualdade das médias, aritmética e geométrica.

Fazendo:

$n = 2 \rightarrow a_2 \leq A_1.\left(\dfrac{A_2}{A_1}\right)^2$

$n = 3 \rightarrow a_3 \leq A_2.\left(\dfrac{A_3}{A_2}\right)^3$

$n = 4 \rightarrow a_4 \leq A_3.\left(\dfrac{A_4}{A_3}\right)^4$

.

.

.

$n = k \rightarrow a_k \leq A_{k-1}.\left(\dfrac{A_k}{A_{k-1}}\right)^k$

Multiplicando membro a membro, tem-se:

$$a_2.a_3.a_4...a_k \leq \frac{(A_2)^2}{A_1} \cdot \frac{(A_3)^3}{(A_2)^2} \cdot \frac{(A_4)^4}{(A_3)^3} \cdot ... \cdot \frac{(A_k)^k}{(A_{k-1})^{k-1}}, \text{ com } A_1 = a_1$$

Assim,

$$a_2.a_3.a_4...a_k \le \frac{(A_k)^k}{a_1} \to (A_k)^k \ge a_1.a_2.a_3....a_k \to A_k \ge \sqrt[k]{a_1.a_2.a_3....a_k}$$

Portanto, $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3....a_n}$, ocorrendo a igualdade para x = 0, isto é, $A_n = A_{n-1}$, o que nos dá, $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$.

APLICAÇÃO 29

Se a e b são reais tais que $a^2 + b^2 = 1$, determine o valor máximo de a + b.

Solução:

Usando a desigualdade de *Cauchy-Schwarz*, temos:

$(1.a + 1.b)^2 \le (1^2 + 1^2).(a^2 + b^2) \to (a + b)^2 \le 2.1 \to a + b \le \sqrt{2}$

Concluímos que o valor máximo de a + b é $\sqrt{2}$, e ocorrerá quando $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

APLICAÇÃO 30

Sejam x e y dois números reais positivos cuja soma é 8.

Demonstre que $\left(x + \frac{1}{y}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{x}\right)^2 \ge \frac{289}{8}$.

Demonstração:

Chamando o primeiro membro de n, vem:

$$n = \left(\frac{x.y + 1}{y}\right)^2 + \left(\frac{x.y + 1}{x}\right)^2 = \frac{(x.y+1)^2}{y^2} + \frac{(x.y + 1)^2}{x^2} = \frac{(x.y+1)^2\ (x^2+y^2)}{x^2.y^2}$$

$$n = \left(\frac{x.y + 1}{x.y}\right)^2 .\ (x^2+y^2) = \left(1 + \frac{1}{x.y}\right)^2 .\ (x^2 + y^2)$$

Aplicando a desigualdade de *Cauchy-Schwarz* e a das médias aritmética e geométrica, encontramos:

I. Cauchy $\to (1.x + 1.y)^2 \le (1^2 + 1^2).(x^2 + y^2) \to x^2 + y^2 \ge 32$

II. $M.A \ge M.G. \to \frac{x+y}{2} \ge \sqrt{x.y} \to x.y \le 16 \to \frac{1}{x.y} \ge \frac{1}{16} \to 1 + \frac{1}{x.y} \ge \frac{17}{16}$

De (I) e (II), concluímos:

$$n = \left(1 + \frac{1}{x.y}\right)^2.(x^2 + y^2) \geq \left(\frac{17}{16}\right)^2.32 = \frac{289}{8}$$

APLICAÇÃO 31

Quem é o maior, 7^{92} ou 8^{91}?

Solução:

Por *Bernoulli*, temos que:

$(1 + x)^n \geq 1 + nx$, com $x > -1$ e n natural.

Fazendo $x = \frac{1}{7}$ e n = 91, encontramos:

$$\left(1 + \frac{1}{7}\right)^{91} > 1 + 91.\frac{1}{7} \rightarrow \left(\frac{8}{7}\right)^{91} > 14 \rightarrow 8^{91} > 14.7^{91}$$

Daí,

$8^{91} > 2.7.7^{91} \rightarrow 8^{91} > 2.7^{92} > 7^{92}$

Portanto, $8^{91} > 7^{92}$.

APLICAÇÃO 32

Se a, b e c são números reais tais que a + b + c = 1, determine o valor mínimo de $a^2 + b^2 + c^2$.

Solução:

Usando a desigualdade de *Cauchy-Schwarz*, temos:

$(1.a + 1.b + 1.c)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2).(a^2 + b^2 + c^2)$

Daí,

$1 \leq 3.(a^2 + b^2 + c^2) \rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.

Portanto, o menor valor para a expressão $a^2 + b^2 + c^2$ é $\frac{1}{3}$ e, ocorrendo para $a = b = c = \frac{1}{3}$.

APLICAÇÃO 33

Determine os valores extremos da função f(x) = 12.sen x – 5.cos x.

Solução:

Usando a desigualdade de *Cauchy-Schwarz*, encontramos:

$(12.\text{sen } x - 5.\cos x)^2 \leq [12^2 + (-5)^2].(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)$

Daí,

$[f(x)]^2 \leq 169.1 \rightarrow -13 \leq f(x) \leq 13.$

Portanto:

• A função f assumirá o valor máximo 13, para $\cos x = -\frac{5}{13}$ e $\text{sen} x = \frac{12}{13}$.

• A função f assumirá o valor mínimo -13, para $\cos x = \frac{5}{13}$ e $\text{sen} x = -\frac{12}{13}$.

APLICAÇÃO 34

Se os números reais x e y satisfazem a equação $(x + 5)^2 + (y - 12)^2 = 14^2$, determine o valor mínimo para $x^2 + y^2$.

Solução:

Trigonometricamente, podemos ter:

$x + 5 = 14\cos\alpha$ e $y - 12 = 14\text{sen}\alpha$, com $\alpha \in [0,2\pi)$

Então,

$$x^2 + y^2 = (14\cos\alpha - 5)^2 + (14\text{sen}\alpha + 12) = 365 + 28.(12\text{sen}\alpha - 5\cos\alpha)$$

Como o mínimo de $12\text{sen}\alpha - 5\cos\alpha$ é –13 (vide aplicação 33), concluímos:

$(x^2 + y^2)_{\text{mín.}} = 365 + 28.(-13) = 1.$

APLICAÇÃO 35:

Existe apenas um número real x $\in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ satisfazendo a equação:

$$\left(\text{tg}^2 \frac{x}{2}\right).\left(\cot g^4 x + 1\right).\left(\cos\sec^2 x + \text{tg}^2 x\right) = 1$$

Ache o inteiro positivo k de modo que $\cos^{2019} x = \text{sen}^K x$.

Solução:

Por *Cauchy-Schwarz*, temos que:

$$\left(1.\operatorname{cossec} x+\operatorname{cotg}^2 x.\operatorname{tg}x\right)^2 \leq \left(1+\operatorname{cotg}^4 x\right).\left(\operatorname{cossec}^2 x+\operatorname{tg}^2 x\right)$$

Daí,

$$\left(\frac{1}{\operatorname{sen}x}+\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\right)^2 \leq \frac{1}{\left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)} \rightarrow \left(\frac{1+\cos x}{\operatorname{sen}x}\right)^2 \leq \operatorname{cotg}^2 \frac{x}{2}$$

Como a igualdade é uma identidade trigonométrica, significa que ocorre a proporção a seguir:

$$\frac{1}{\operatorname{cossec} x}=\frac{\operatorname{cotg}^2 x}{\operatorname{tg}x} \rightarrow \operatorname{sen}x=\frac{\operatorname{cotg}^2 x}{\operatorname{tg}x} \rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}=\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} \rightarrow \cos^3 x=\operatorname{sen}^4 x$$

Elevando a 673 ambos os membros, encontramos:

$$\left(\cos^3 x\right)^{673}=\left(\operatorname{sen}^4 x\right)^{673} \rightarrow \cos^{2019} x=\operatorname{sen}^{2692} x \rightarrow k=2692.$$

São muitos os problemas relacionados direta ou indiretamente com desigualdades. O capítulo seguinte é dedicado à resolução de algumas aplicações numéricas, algébricas, geométricas e trigonométricas.

3 PROBLEMAS RELACIONADOS

Neste capítulo apresento uma visão geral de aplicações numéricas, algébricas, geométricas e trigonométricas, compatíveis com ensino fundamental e médio. As situações exigirão, além de conceitos simples já abordados, habilidades nas manipulações para resolvê-las.

3.1 Problemas numéricos e algébricos

APLICAÇÃO 36

Quem é maior, e^{π} ou π^{e}?

Solução:

Fazendo $x = \frac{\pi}{e} - 1$ na desigualdade exponencial $e^{x} \geq 1 + x$, obtemos:

$e^{\frac{\pi}{e}-1} > 1 + \frac{\pi}{e} - 1$, pois a igualdade só ocorre para x = 0.

Com isso,

$$e^{\frac{\pi}{e}-1} > \frac{\pi}{e} \rightarrow e.e^{\frac{\pi}{e}-1} > \pi \rightarrow e^{\frac{\pi}{e}} > \pi \rightarrow \left(e^{\frac{\pi}{e}}\right)^{e} > (\pi)^{e} \rightarrow e^{\pi} > \pi^{e}$$

Logo, e^{π} é o maior.

APLICAÇÃO 37

Demonstrar que para todo x e y reais diferentes de zero se verifica:

$$2.\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 3.\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 6 > 0$$

Demonstração:

Tomando: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = k \rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = k^2 - 2$ (I)

Veja: 1º membro da desigualdade $= 2.\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 3.\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 6$ (II)

Substituindo (I) em (II), vem:

1º membro da desigualdade = $2.(k^2 - 2) - 3.k + 6 = 2.k^2 - 3.k + 2$

1º membro da desigualdade $= 2.(k^2 - \frac{3}{2}.k + \frac{9}{16} + \frac{7}{16}) = 2.\left[\underbrace{\left(k - \frac{3}{4}\right)^2}_{\geq 0} + \frac{7}{16}\right] > 0.$

APLICAÇÃO 38

Demonstrar se c + b = a, com c > 0 e b > 0, então $\sqrt[3]{c^2} + \sqrt[3]{b^2} > \sqrt[3]{a^2}$.

Demonstração:

Temos que:

$c > 0, b > 0$ e $a = c + b \rightarrow a > c$ e $a > b \rightarrow \sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{c}$ e $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$

Invertendo $\rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{a}} < \frac{1}{\sqrt[3]{c}}$ e $\frac{1}{\sqrt[3]{a}} < \frac{1}{\sqrt[3]{b}} \rightarrow a^{\frac{-1}{3}} < c^{\frac{-1}{3}}$ e $a^{\frac{-1}{3}} < b^{\frac{-1}{3}}$.

Por outro lado, tem-se:

$a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{-1}{3}}.a = a^{\frac{-1}{3}}.(c+b) = a^{\frac{-1}{3}}.c + a^{\frac{-1}{3}}.b \rightarrow a^{\frac{2}{3}} < c^{\frac{-1}{3}}.c + b^{\frac{-1}{3}}.b$

Portanto:

$a^{\frac{2}{3}} < c^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \rightarrow \sqrt[3]{a^2} < \sqrt[3]{c^2} + \sqrt[3]{b^2}$.

APLICAÇÃO 39

Determine o valor máximo da função $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2.x+2}$, $x > -1$.

Solução:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+2.x+2} \rightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{x^2+2.x+2}{x+1} = \frac{(x+1)^2+1}{x+1} = x+1+\frac{1}{x+1}.$$

Daí,

$\frac{1}{f(x)} \geq 2$ (vide aplicação 8) $\rightarrow 0 < f(x) \leq \frac{1}{2}$.

Portanto, o valor máximo de f(x) é $\frac{1}{2}$, ocorrendo para x = 0.

APLICAÇÃO 40

Se $0 < x < 1$, encontre o valor máximo de $x.\sqrt{1-x^2}$.

Solução:

Inicialmente, tomemos $y = x.\sqrt{1-x^2}$. Claramente x é positivo e $1 - x^2$ também.

Veja:

$y = x.\sqrt{1-x^2} \rightarrow y^2 = x^2.(1-x^2)$

Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos:

$$M.A. \geq M.G. \rightarrow \frac{x^2 + (1-x^2)}{2} \geq \sqrt{x^2.(1-x^2)} \rightarrow \frac{1}{2} \geq y \rightarrow y_{máx} = \frac{1}{2}$$

Portanto, o valor máximo y é $\frac{1}{2}$, que corresponde a $x^2 = 1 - x^2$, isto é, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

APLICAÇÃO 41

Demonstre que $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2.(a + b + c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Transformando numa desigualdade equivalente:

$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2.a + 2.b + 2.c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

A desigualdade acima pode ser transformada facilmente em:

$a^2 - 2.a + 1 + b^2 - 2.b + 1 + c^2 - 2.c + 1 \geq 0$.

Finalmente, temos: $(a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 \geq 0$, o que é verdade, pois todo quadrado nos reais é não negativo. E ainda mais, concluímos que a igualdade só ocorrerá quando $a = b = c = 1$.

APLICAÇÃO 42

Se x e y são positivos tais que $x > y$, determine o menor valor de $x + \frac{8}{y.(x-y)}$.

Solução:

Inicialmente, tomemos $E = x + \frac{8}{y.(x-y)} = (x-y) + y + \frac{8}{y.(x-y)}$. De acordo com o enunciado, temos x, y e x – y números reais positivos.

Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos:

$$M.A. \geq M.G. \rightarrow \frac{(x-y)+y+\frac{8}{y.(x-y)}}{3} \geq \sqrt[3]{(x-y).y.\frac{8}{y.(x-y)}} \rightarrow \frac{E}{3} \geq 2 \rightarrow E_{mín.} = 6$$

Portanto, o valor mínimo de E é 6, que corresponde a $x - y = y = \frac{8}{y.(x-y)}$, isto é, y = 2 e x = 4.

APLICAÇÃO 43

Se x > 0, qual o menor valor da expressão $y = x^2 + \frac{1}{x}$?

Solução:

Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos:

$$M.A. \geq M.G. \rightarrow \frac{x^2 + \frac{1}{2.x} + \frac{1}{2.x}}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 . \frac{1}{2.x} . \frac{1}{2.x}}$$

Como $y = x^2 + \frac{1}{x}$, encontramos:

$$\frac{y}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \rightarrow y \geq \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}.$$

Portanto, $y_{mín.} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$, que corresponde a $x^2 = \frac{1}{2.x}$, isto é, $x = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

APLICAÇÃO 44

Se a e b são reais positivos tais que a + b = 1, prove que $a.b^2 \leq \frac{4}{27}$ e determine quando ocorre a igualdade.

Prova:

Usando a desigualdade das médias, tem-se:

$$\text{M.A.} \geq \text{M.G.} \rightarrow \frac{a+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2}} \rightarrow \frac{1}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a.b^2}{4}} \rightarrow a.b^2 \leq \frac{4}{27}.$$

Nestas condições, a igualdade ocorrerá quando $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{2}{3}$.

APLICAÇÃO 45

Sejam $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ números reais positivos tais que $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Encontre o menor valor de $P = (1 + a_1).(1 + a_2).(1 + a_3). \ldots .(1 + a_n)$.

Solução:

Usando a desigualdade das médias (M.A. ≥ M.G.), temos:

$$\frac{1+a_1}{2} \geq \sqrt{1.\,a_1} \rightarrow 1 + a_1 \geq 2.\sqrt{a_1}$$

$$\frac{1+a_2}{2} \geq \sqrt{1.\,a_2} \rightarrow 1 + a_2 \geq 2.\sqrt{a_2}$$

....

$$\frac{1+a_n}{2} \geq \sqrt{1.\,a_n} \rightarrow 1 + a_n \geq 2.\sqrt{a_n}$$

Multiplicando membro a membro as desigualdades acima, obtemos:

$$(1 + a_1)\cdot(1 + a_2)\cdot(1 + a_3)\cdot \ldots \cdot(1 + a_n) \geq 2^n.\sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

$$(1 + a_1)\cdot(1 + a_2)\cdot(1 + a_3)\cdot \ldots \cdot(1 + a_n) \geq 2^n.\sqrt{1}$$

Logo, o valor mínimo de P é 2^n, ocorrendo para $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 1$.

APLICAÇÃO 46

Determine todas as soluções inteiras e positivas da equação $x^2z + xy^2 + yz^2 = 2xyz$.

Solução:

Como estamos atrás de x, y e z positivos, podemos dividir ambos os membros da igualdade por x.y.z.

Assim, temos: $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=2$

Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, vem:

$$M.A. \geq M.G. \rightarrow \frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}} \rightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geq 3$$

Portanto, a equação $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=2$ não admite soluções nos inteiros positivos.

APLICAÇÃO 47

Prove que se a, x, y, z são números reais maiores que 1, então:

$(\log_a x + \log_a y + \log_a z).(\log_x a + \log_y a + \log_z a) \geq 9$

Prova:

Sabemos que:

I. Como a, x, y e z são maiores que 1, os logaritmos: $\log_a x, \log_a y, \log_a z$, $\log_x a, \log_y a, \log_z a$, são todos positivos.

II. $\log_n m$ é o inverso de $\log_m n$.

Tomando: $\log_a x = p; \log_a y = q; \log_a z = r$

Aplicando as desigualdades das médias (A ≥ G), encontramos:

$$\begin{cases} \frac{p+q+r}{3} \geq \sqrt[3]{p.q.r} \\ \frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{p.q.r}} \end{cases} \rightarrow (p+q+r).\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right) \geq 9$$

Portanto, $(\log_a x + \log_a y + \log_a z).(\log_x a + \log_y a + \log_z a) \geq 9$.

APLICAÇÃO 48

Demonstre que se a, b e c são reais positivos, então:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Demonstração:

Adicionando uma unidade a cada uma das frações do primeiro membro, temos:

$$\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}\geq\frac{3}{2}+3\rightarrow(a\ +\ b\ +\ c).\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq\frac{9}{2}$$

Fazendo $\begin{cases} b+c=x \\ c+a=y \\ a+b=z \end{cases}$, teremos: $(x\ +\ y\ +\ z).\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ \geq\ 9$, o que é verdade, pois aplicando a desigualdade das médias, encontramos:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{x.y.z} \\ \dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{3}\geq\sqrt[3]{\dfrac{1}{x.y.z}} \end{cases}\qquad\rightarrow\qquad(x+y+z).\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9.$$

APLICAÇÃO 49

Determine o menor valor da expressão $\frac{x+y}{x}+\frac{x+y}{y},\forall\, x,y\in R_+^*$.

Solução:

Temos que:

$$n=\frac{x+y}{x}+\frac{x+y}{y}=1+\underbrace{\frac{y}{x}+\frac{x}{y}}_{\geq 2}+1\ \geq\ 1+2+1\ \text{(vide aplicação 8)}$$

Portanto, $n_{mín.}=4$, que corresponde a x = y.

APLICAÇÃO 50

Prove que: se x, y e z são reais positivos vale a relação:

$(x + y).(x + z).(y + z) \geq 8.x.y.z$

Prova:

Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica ($A \geq G$), temos:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}\geq\sqrt{x.y} \\ \dfrac{x+z}{2}\geq\sqrt{x.z} \\ \dfrac{y+z}{2}\geq\sqrt{y.z} \end{cases}\rightarrow(x\ +\ y).(x\ +\ z).(y\ +\ z)\geq\sqrt{x.y}.\sqrt{x.z}\sqrt{y.z}$$

Portanto, $(x + y).(x + z).(y + z) \geq 8.x.y.z$, para todo x, y e z positivos.

3.2 Problemas geométricos e trigonométricos

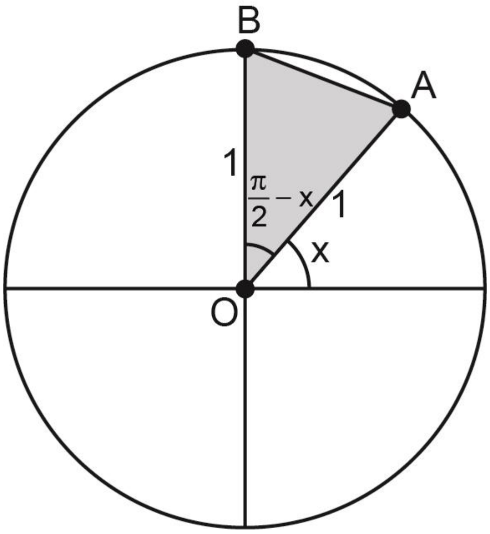
APLICAÇÃO 51

Prove que para todo x real, com $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, ocorre $x.\cos x < \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$.

Prova:

Para facilitar o entendimento, veja a figura a seguir:

Figura 2 – Setor circular



Fonte: Imagem do autor.

Comparando as áreas, tem-se:

[setor OBA] $>$ [ABC]

$$\frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right).1}{2} > \frac{1.1.\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} - x > \cos x \rightarrow \frac{\pi}{2} > x + \cos x$$

Aplicando a desigualdade das médias, obtemos:

$$\frac{\pi}{2} > x + \cos x \rightarrow \frac{\pi}{4} > \frac{x + \cos x}{2} \geq \sqrt{x.\cos x} \rightarrow \frac{\pi}{4} > \sqrt{x.\cos x}$$

Portanto, $x.\cos x < \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$.

APLICAÇÃO 52

Demonstre:

a) se a, b e c são reais positivos, então $a.b.c \geq (b + c - a).(a + c - b).(a + b - c)$.

b) usando o resultado anterior, demonstre que: $R \geq 2.r$, onde R é o raio da circunferência circunscrita e r é o raio da circunferência inscrita.

Demonstração:

a) Se x, y e z são reais positivos, então $(x + y).(x + z).(y + z) \geq 8.x.y.z$. (vide aplicação 50)

$$\text{Tomemos:}\begin{cases} x+y = c \\ x+z = b \\ y+z = a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{b+c-a}{2} \\ y = \dfrac{a+c-b}{2} \\ z = \dfrac{a+b-c}{2} \end{cases}$$

Substituindo os valores de x, y e z na sentença inicial, encontramos:

$a.b.c \geq (b + c - a).(a + c - b).(a + b - c)$

b) Sejam a, b e c lados de um triângulo circunscrito e inscrito a uma circunferência de raio r e R, respectivamente.

Sabemos que:

Área de um triângulo qualquer: $A = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$, onde: $2p = a + b + c$.

Daí,

i) $A = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)} \rightarrow \dfrac{A^2}{p} = (p-a).(p-b).(p-c)$

ii) $a+b = 2.p-c;\ a+c = 2.p-b;\ b+c = 2.p-a$

- Área de um triângulo circunscrito numa circunferência de raio r : $A = p \,.\, r$
- Área de um triângulo inscrito a uma circunferência de raio $R: A = \dfrac{a.b.c}{4.R}$

Então, $a.b.c = 4.A.R$

Encontramos anteriormente que: $a.b.c \geq (b + c - a).(a + c - b).(a + b - c)$

Fazendo algumas substituições, encontramos:

$4.R.A \geq (2.p - 2.c).(2.p - 2.b).(2.p - 2.a)$

$4.R.A \geq 8.(p - a).(p - b).(p - c)$

$A.R \geq 2.(p - a).(p - b).(p - c)$

$A.\ R \ \geq \ 2.\frac{A^2}{p}$

$p.R \ \geq \ 2.p.r$

Portanto: $R \geq 2.r$ (Relação de Euler)

APLICAÇÃO 53

Se em um triângulo vale a relação $a^2 + b^2 + c^2 = 9R^2$, onde <u>R</u> é o raio da circunferência circunscrita, prove que a = b = c.

Prova:

Sabemos que: num triângulo qualquer vale:

Lei dos senos: $\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2.R$, onde:

$a = 2RsenA$; $b = 2RsenB$; $c = 2RsenC$.

Lei dos cossenos: $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A \rightarrow \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2.b.c} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos B \rightarrow \cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2.a.c} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C \rightarrow \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2.a.b} \end{cases}$

Substituindo os valores de a, b e c da lei dos senos em $a^2 + b^2 + c^2 = 9.R^2$, encontramos: $(senA)^2 + (senB)^2 + (senC)^2 = \frac{9}{4}$ (I)

Evidentemente: senA = sen (B + C) = senB.cosC + senC.cosB (II)

Substituindo (II) em (I), vem:

$(senB.cosC + senC.cosB)^2 + (senB)^2 + (senC)^2 = \frac{9}{4}$

$sen^2B.\cos^2 C + 2.senB.cosC.senC.cosB + sen^2C.\cos^2 B + (senB)^2 + (senC)^2 = \frac{9}{4}$

$sen^2B.(1 + \cos^2 C) + sen^2C.(1 + \cos^2 B) + 2.senB.cosC.senC.cosB = \frac{9}{4}$

$$(1-\cos^2 B).(1+\cos^2 C)+(1-\cos^2 C).(1+\cos^2 B)+2.\text{senB}.\cos C.\text{senC}.\cos B = \frac{9}{4}$$

$$-2.\cos^2 B.\cos^2 C + 2.\text{senB}.\cos C.\text{senC}.\cos B = \frac{1}{4}$$

$$\cos B.\cos C.(\cos B.\cos C - \text{senB}.\cos C) = -\frac{1}{8}$$

$$\cos B.\cos C.\cos(B+C) = -\frac{1}{8}$$

Encontramos: $\cos B.\cos C.\cos A = \frac{1}{8}$ (III)

Substituindo os valores de $\cos A, \cos B$ e $\cos C$ da lei dos cossenos em (III), encontramos: $(b^2 + c^2 - a^2).(a^2 + c^2 - b^2).(a^2 + b^2 - c^2) = a^2.b^2.c^2$ (IV).

Fazendo: $\begin{cases} x = b^2 + c^2 - a^2 \\ y = a^2 + c^2 - b^2 \\ z = a^2 + b^2 - c^2 \end{cases}$

Substituindo os valores de x, y e z em (IV), tem-se:

(y + z).(x + z).(x + y) = 8.x.y.z equivale a $\underbrace{\left(\frac{y+z}{2}\right).\left(\frac{x+z}{2}\right).\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{y.z}.\sqrt{x.z}.\sqrt{x.y}}_{\text{igualdade das médias}}$,

ocorrendo somente quando x = y = z. Portanto, teremos a = b = c.

APLICAÇÃO 54

Em um triângulo ABC temos BC = a, CA = b e AB = c que satisfaz a + b – c = 2 e $2ab - c^2 = 4$. Prove que o triângulo ABC é equilátero.

Prova:

A partir das sentenças apresentadas, temos o sistema a seguir:

$$\begin{cases} a+b-c=2 \rightarrow a+b-2=c \text{ (I)} \\ 2ab-c^2=4 \rightarrow 2ab-4=c^2 \text{ (II)} \end{cases}$$

De (I) e (II), tem-se:

$2ab - 4 = (a + b - 2)^2 \rightarrow 2ab - 4 = a^2 + b^2 + 4 + 2ab - 4a - 4b$

Simplificando,

$$0 = \underbrace{a^2-4a+4}_{\text{quadrado perfeito}} + \underbrace{b^2-4b+4}_{\text{quadrado perfeito}} \rightarrow (a-2)^2+(b-2)^2=0$$

Com isso,

a – 2 = b – 2 = 0 (vide aplicação 1) $\rightarrow$ a = b = c = 2.

Portanto, o triângulo ABC é equilátero.

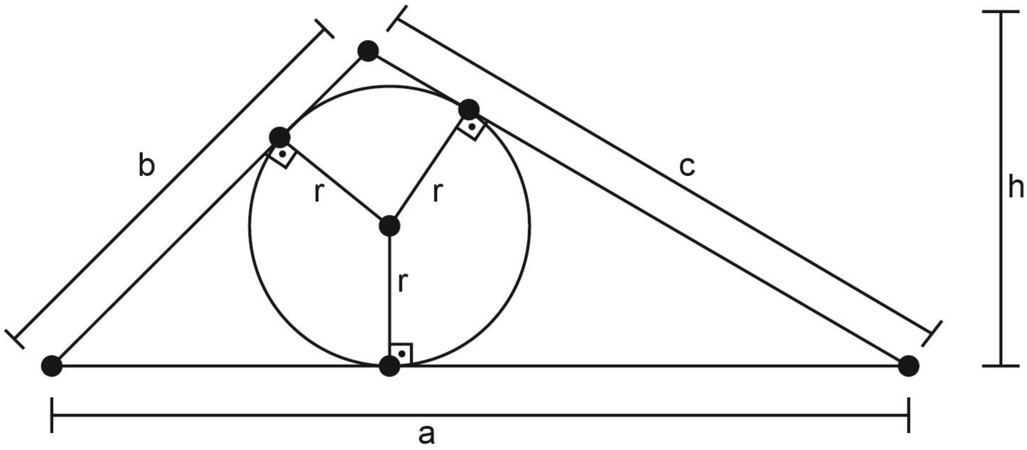
APLICAÇÃO 55:

Demonstre a desigualdade $h_a + h_b + h_c \geq 9r$, em que h_a, h_b e h_c são as alturas de um triângulo qualquer e r é o raio da circunferência inscrita neste triângulo.

Demonstração:

Para facilitar o entendimento, veja a figura a seguir:

Figura 3 – Inscrição do círculo



Fonte: Imagem do autor.

$$\text{Área}(ABC) = S = \frac{a.h_a}{2} = \frac{b.h_b}{2} = \frac{c.h_c}{c} = \frac{a.r}{2} + \frac{b.r}{2} + \frac{c.r}{2} = \frac{(a+b+c).r}{2}$$

Então:

$$(a+b+c).r = 2S \rightarrow \left(\frac{2S}{h_a} + \frac{2S}{h_b} + \frac{2S}{h_c}\right).r = 2S \rightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

Aplicando a desigualdade das médias, encontramos:

$$\text{M.A.} \geq \text{M.G.} \rightarrow \left(\frac{h_a + h_b + h_c}{3}\right)\left(\frac{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}}{3}\right) \geq \sqrt[3]{h_a \cdot h_b \cdot h_c} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{h_a} \cdot \frac{1}{h_b} \cdot \frac{1}{h_c}} \geq 1$$

Assim,

$$(h_a + h_b + h_c).\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \geq 9 \rightarrow (h_a + h_b + h_c).\left(\frac{1}{r}\right) \geq 9$$

Portanto, $h_a + h_b + h_c \geq 9r$.

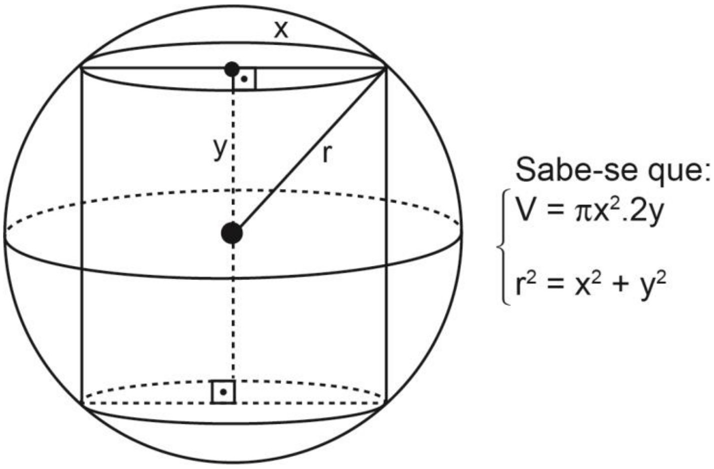
APLICAÇÃO 56

Determinar o cilindro circular reto de volume máximo que pode ser inscrito numa esfera de raio r.

Solução:

Para facilitar o entendimento, veja a figura a seguir:

Figura 4 – Inscrição do cilindro



Fonte: Imagem do autor.

Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos:

$$M.A. \geq M.G. \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + y^2}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot y^2}$$

$$\frac{r^2}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{(x^2.y)^2}{4}} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{r^2}{3}\right)^3 \geq \frac{\left(\frac{V}{2.\pi}\right)^2}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{V^2}{16\pi^2} \leq \frac{r^6}{27} \quad \rightarrow \quad V \leq \frac{16\pi^2 r^6}{27}$$

Então,

$$V_{máx} = \frac{4.\pi.r^3}{3.\sqrt{3}}, \text{ ocorrendo quando: } \frac{x^2}{2} = y^2 \rightarrow x^2 = 2.y^2 \rightarrow \; y = \frac{r.\sqrt{3}}{3} \text{ e } x = \frac{r.\sqrt{6}}{3}.$$

Portanto, o raio do cilindro é $\frac{r.\sqrt{6}}{3}$ e a altura do cilindro $\frac{2.r.\sqrt{3}}{3}$.

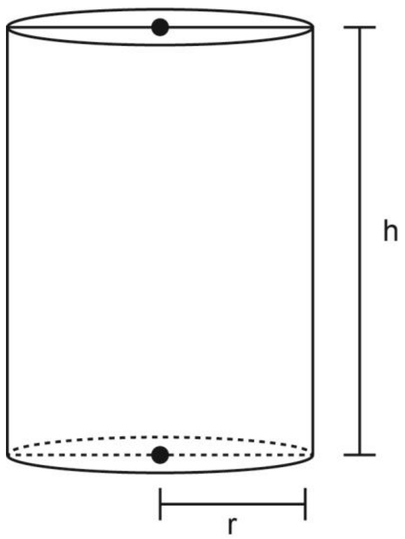
APLICAÇÃO 57

Um refrigerante é vendido em latas cilíndricas de volume 400ml. Calcular o raio da base de modo que o material gasto na embalagem seja o mínimo possível (isto é, de modo que a área total do cilindro seja mínima).

Solução:

Para facilitar o entendimento, veja a figura a seguir:

Figura 5 – Cilindro



Fonte: Imagem do autor.

I. $V = 400 = \pi.r^2.h$ (volume do cilindro)

II. $A = 2.\pi.r^2 + 2.\pi.r.h$ (área total do cilindro)

Usando a desigualdade das médias, tem-se:

$$M.A. \geq M.G. \rightarrow \frac{2.\pi.r^2 + \pi.r.h + \pi.r.h}{3} \geq \sqrt[3]{2.\pi^3.r^4.h^2}$$

$$\left(\frac{A}{3}\right)^3 \geq 2\pi^3.\left(r^2h\right)^2 \rightarrow \frac{A^3}{27} \geq 2.\pi^3.\left(\frac{400}{h}\right)^2 \rightarrow A \geq 60.\sqrt[3]{40\pi}$$

Então,

$A_{máx} = 60.\sqrt[3]{40.\pi}$, ocorrendo quando os termos das médias forem iguais, isto é, $2.\pi.r^2 = \pi.r.h$, o que nos dá $h = 2.r$. Portanto, $r = \sqrt[3]{\frac{400}{2\pi}}$ cm.

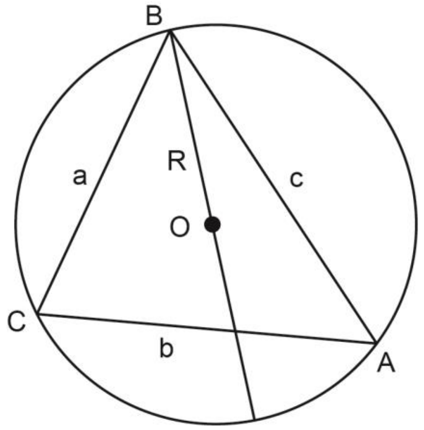
APLICAÇÃO 58

Seja λ uma circunferência de raio $R = \frac{4.\sqrt{3}}{3}$. Análise se é possível inscrever em λ um triângulo que tenha sua área numericamente igual ao seu perímetro.

Solução:

Sabemos que: área de um triângulo inscrito em uma circunferência de raio R é dada por: $A = \frac{a.b.c}{4.R}$. (resultado associado a figura a seguir)

Figura 6 – Inscrição do triângulo



Fonte: Imagem do autor.

Condições do problema:

$$\frac{a.b.c}{4.R} = a+b+c \text{ e } R = \frac{4.\sqrt{3}}{3} = 2{,}3...$$

Usando a desigualdade das médias (M.A. ≥ M.G.), temos:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a.b.c} \rightarrow \left(\frac{a.b.c}{12.R}\right)^3 \geq a.b.c \rightarrow (a.b.c)^2 \geq (12.R)^3 \quad \text{(I)}$$

Claramente, temos a relação:

$$2.R + 2.R + 2.R > a + b + c \rightarrow \frac{2.R + 2.R + 2.R}{3} > \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a.b.c} \rightarrow$$

$$\rightarrow (2.R)^3 > \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq a.b.c \rightarrow \left[(2.R)^3\right]^2 > (a.b.c)^2$$

Assim, comparando (I) e (II), encontramos:

$$\left[(2.R)^3\right]^2 > (a.b.c)^2 \geq (12.R)^3 \rightarrow (2.R)^2 > 12.R \rightarrow R > 3 \text{ (absurdo).}$$

Portanto, não é possível inscrever numa circunferência, um triângulo cuja área seja numericamente igual ao valor de seu perímetro.

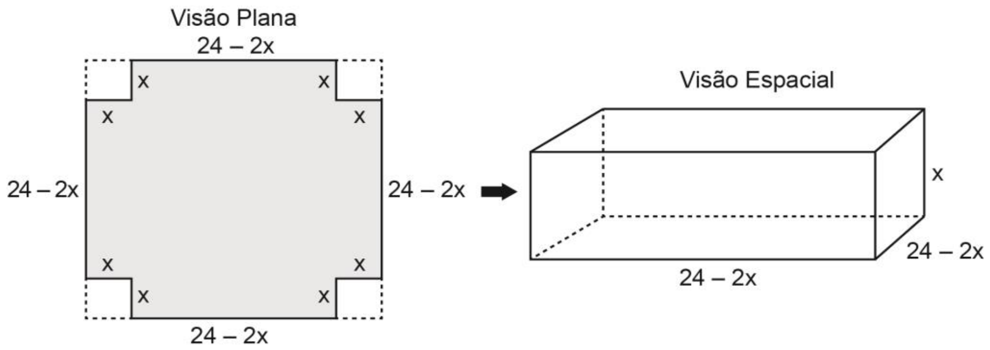
APLICAÇÃO 59

Retira-se de cada vértice de uma de cartolina quadrada de lado 24 cm, um quadrado de lado x cm, de modo que o volume da caixa sem tampa seja máxima. Determine o valor de x, em cm.

Solução:

Para facilitar o entendimento, veja a figura a seguir:

Figura 7 – Planificação da caixa



Fonte: Imagem do autor.

Assim,

Volume(caixa) = V = (24 - 2x).(24 – 2x).x, então 4V = (24 – 2x).(24 – 2x).4x.

Usando a desigualdade das médias, tem-se:

$$M.A. \geq M.G. \rightarrow \frac{(24-2x)+(24-2x)+4x}{3} \geq \sqrt[3]{(24-2x).(24-2x).4x} \rightarrow 16 \geq \sqrt[3]{4V}$$

Daí,

$$16^3 \geq 4V \rightarrow V \leq \frac{16^3}{4} \rightarrow V_{máx.} = 1024 \text{ cm}^3$$

Sabendo que a igualdade das médias só ocorre quando seus termos forem iguais, encontramos:

24 – 2x = 4x, portanto, x = 4 cm.

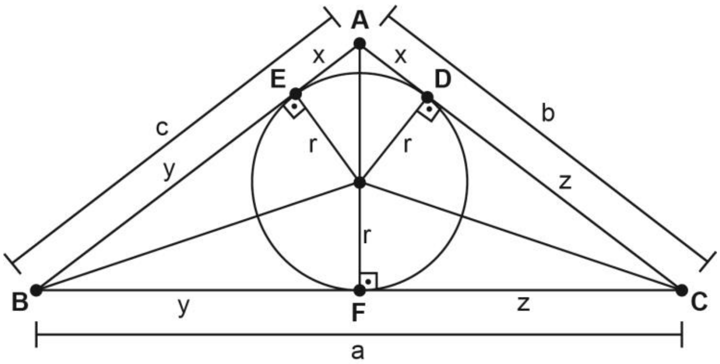
APLICAÇÃO 60

Prove que a relação $\frac{p}{r} \geq 3\sqrt{3}$ é válida para qualquer triângulo, em que p é o semiperímetro e r é o inraio.

Prova:

Para facilitar o entendimento, veja a figura a seguir.

Figura 8 – Circunscrição do triângulo



Fonte: Imagem do autor.

Assim a área do triângulo ABC é dada por:

$$S = [ABC] = \frac{a.r}{2} + \frac{b.r}{2} + \frac{c.r}{2} = \frac{r.(a+b+c)}{2} = \frac{r.(2p)}{2} = p.r$$

Veja que:

2p = a + b + c = 2.(x + y + z) $\rightarrow$ x + y + z = p $\rightarrow$ x = p – a,y = p – c e z = p – b

A partir da desigualdade das médias, obtemos:

$$M.A \geq M.G. \rightarrow \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a).(p-b).(p-c)}$$

Daí, $\frac{p}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a).(p-b).(p-c)}$

Elevando ao cubo ambos os membros, vem:

$$\frac{p^3}{27} \geq (p-a).(p-b).(p-c) \rightarrow \frac{p^4}{27} \geq p.(p-a).(p-b).(p-c)$$

Lembrando que a área do triângulo ABC pode ser calculada por:

- S =[ABC]=$\sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$(Heron)

Finalmente, podemos escrever:

$$\frac{p^2}{3\sqrt{3}} \geq \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)} = pr \ \rightarrow \ \frac{p^2}{3\sqrt{3}} \geq pr \ \rightarrow \ \frac{p}{r} \geq 3\sqrt{3}$$

Vale ressaltar que a igualdade ocorrerá quando a = b = c, isto é, o triângulo for equilátero.

APLICAÇÃO 61

Em um triângulo ABC, a área S e o ângulo C são conhecidos. Determine as medidas dos lados a e b para que o lado c seja o menor possível.

Solução:

Sabe-se que em um ΔABC qualquer, vale as relações:

I. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ (lei dos cossenos)

II. $S = \frac{a.b.\text{sen}C}{2}$ (Fórmula trigonométrica da área do triângulo)

Em (II), temos:

$$a.b = \frac{2S}{\text{sen}C}$$

Em (I), temos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = \underbrace{a^2 + b^2 - 2ab}_{\text{quadrado perfeito}} + 2ab - 2ab\cos C$$

Daí,

$$c^2 = (a-b)^2 + 2ab(1-\cos C) \rightarrow c^2 = (a-b)^2 + \frac{4S(1-\cos C)}{\operatorname{sen} C}$$

Como S e C são conhecidos, a expressão $\frac{4S(1-\cos C)}{\operatorname{sen} C}$ é constante.

Portanto, c será mínimo quando $(a - b)^2$ for zero, isto é, $a = b = \sqrt{\frac{2S}{\operatorname{sen} C}}$.

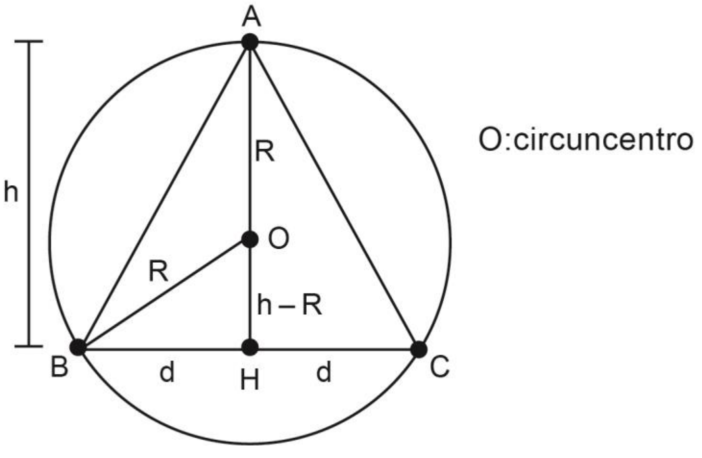
APLICAÇÃO 62

Entre todos os triângulos isósceles, inscritos em um círculo de raio R, determinar o de área máxima.

Solução:

Seja ABC um triângulo isósceles de altura h inscrito no círculo de raio R, conforme a figura a seguir:

Figura 9 – Inscrição do isósceles



Fonte: Imagem do autor.

Pitágoras no $\Delta BHO \rightarrow R^2 = (h - R)^2 + d^2 \rightarrow d^2 = h.(2R - h)$

Então a área S do ΔABC é cada por:

$$[ABC] = S = \frac{2d.h}{2} = d.h$$

Podemos escrever:

$S^2 = d^2.h^2 \rightarrow S^2 = (2R - h).h^3$

Usando a desigualdade das médias, obtemos:

$$\text{M.A.} \geq \text{M.G.} \rightarrow \frac{(2R-h)+\frac{h}{3}+\frac{h}{3}+\frac{h}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{(2R-h).\frac{h}{3}.\frac{h}{3}.\frac{h}{3}} \rightarrow \frac{R}{2} \geq \sqrt[4]{(2R-h).\frac{h^3}{27}}$$

Segue que,

$$\frac{R^4}{16} \geq \frac{S^2}{27} \rightarrow S \leq \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} \rightarrow S_{\text{máx.}} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}, \text{ocorrendo quando } h = \frac{3R}{2}.$$

Portanto, a área do triângulo isósceles de área máxima tem altura $h = \frac{3R}{2}$ e área $S_{\text{máx.}} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.

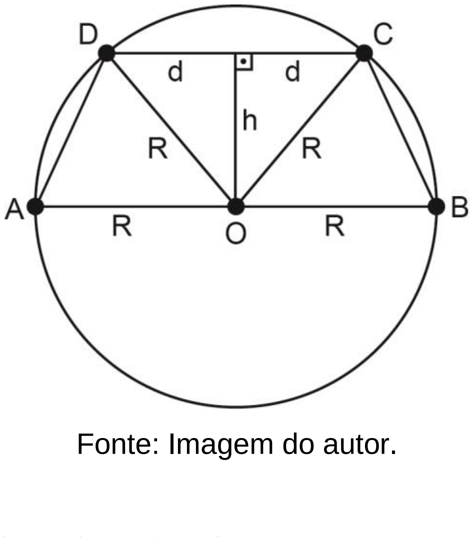
APLICAÇÃO 63

Achar o trapézio isósceles, inscrito em um semicírculo dado, de área máxima e tendo o diâmetro como base maior.

Solução:

Para facilitar o entendimento, veja a figura a seguir:

Figura 10 – Inscrição do trapézio



Fonte: Imagem do autor.

I. Pitágoras $\rightarrow d^2 + h^2 = R^2 \rightarrow h^2 = R^2 - d^2$

II. Então, a área S do trapézio ABCD é dada por:

$$[ABCD] = S = \frac{(2R+2d).h}{2} = (R+d).h$$

Podemos escrever:

$$S^2 = (R+d)^2.h^2 \rightarrow S^2 = (R+d)^2.\left(R^2 - d^2\right) \rightarrow S^2 = (R+d)^3.(R-d)$$

Usando a desigualdade das médias, obtemos:

$$M.A. \geq M.G. \rightarrow \frac{\left(\frac{R+d}{3}\right)+\left(\frac{R+d}{3}\right)+\left(\frac{R+d}{3}\right)+R-d}{4} \geq \sqrt[4]{\left(\frac{R+d}{3}\right)^3.(R-d)} \rightarrow \left(\frac{R}{2}\right)^4 \geq \frac{S^2}{27}$$

Segue que,

$$\frac{R^4}{16} \geq \frac{S^2}{27} \rightarrow S \leq \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} \rightarrow S_{máx.} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}, \text{ocorrendo quando } d = \frac{R}{2} \text{ e } h = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, o trapézio tem bases medindo R e 2R, e altura $h = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

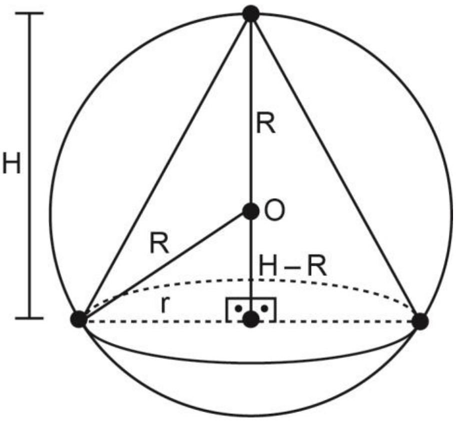
APLICAÇÃO 64

Determinar a altura H do cone de revolução de volume máximo, inscrito em uma esfera de raio R.

Solução:

Para facilitar o entendimento, veja a figura a seguir:

Figura 11 – Inscrição do cone



Fonte: Imagem do autor.

I. Volume do cone = $V = \frac{\pi r^2.H}{3}$

II. Pitágoras $\rightarrow R^2 = (H - R)^2 + r^2 \rightarrow r^2 = 2HR - H^2$

Então, o volume V é dado por:

$$V=\frac{\pi H}{3}.\left(2HR-H^2\right)\rightarrow V=\frac{\pi}{3}.\left(2R-H\right).H^2$$

Usando a desigualdade das médias, obtemos:

$$M.A.\geq M.G.\rightarrow \frac{\left(2R-H\right)+\frac{H}{2}+\frac{H}{2}}{4}\geq \sqrt[3]{\left(2R-H\right).\frac{H}{2}.\frac{H}{2}}\rightarrow \frac{2R}{3}\geq \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

Segue que,

$$\frac{8R^3}{27}\geq \frac{3V}{4\pi}\rightarrow V\leq \frac{32\pi R^3}{81}\rightarrow V_{máx}=\frac{32\pi R^3}{81},\text{ ocorrendo quando } H=\frac{4R}{3}.$$

4 DESIGUALDADES NOS VESTIBULARES

Para finalizar, com base nas ideias apresentadas nesta pesquisa, resolveremos a seguir uma sequência de diversos problemas de vestibulares.

4.1 Problemas numéricos e algébricos

APLICAÇÃO 65

Seja $f : R_+^* \to R$ definida por $f(x) = x + \frac{4}{x}$. Determine o valor mínimo da função.

Solução:

Aplicando a desigualdade das médias, temos:

$$M.A. \geq M.G. \to \frac{x + \frac{4}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} \to f(x) \geq 4 \to f_{mín.} = 4$$, ocorrendo quando x = 2.

APLICAÇÃO 66

Sejam a um número real e f a função sobrejetiva de $\mathbb{R}$ em [a, +∞) definida por $f(x) = 5^{-x} + 5^x + 2$. Determine o valor de a.

Solução:

Do exposto, temos:

f é sobrejetiva, então $C.D_f = Im_f = [a, +\infty)$

Por outro lado, podemos garantir que:

$5^{-x} + 5^x \geq 2$ (vide aplicação 8) $\to 5^{-x} + 5^x + 2 \geq 4 \to f(x) \geq 4 \to Im_f = [4, +\infty)$.

Logo, o valor de **a** é 4, ocorrendo quando x = 0.

APLICAÇÃO 67

Determine o valor máximo da função f(x) = 2.sen x + cos 2x, com $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solução:

A partir da fórmula do arco duplo, temos:

$$y = 2.\text{sen } x + \cos 2x \to y = 2.\text{sen } x + 1 - 2.\text{sen}^2 x \to \frac{y-1}{2} = \text{sen } x.(1 - \text{sen } x).$$

Como a soma dos fatores do produto sen x.(1 – sen x) é constante, o valor máximo para o produto ocorrerá quando os fatores forem iguais, isto é, senx = $\frac{1}{2}$.

Portanto, $y_{máx.} = \frac{3}{2}$, ocorrendo quando $x = \frac{\pi}{6}rd$.

APLICAÇÃO 68

Determine o menor valor de $\frac{(x+10).(x+2)}{x+1}$, sendo x > 0.

Solução:

Inicialmente, tomemos $y = \frac{(x+10).(x+2)}{x+1}$. Logicamente y é positivo, pois, x > 0.

Desenvolvendo a igualdade anterior, encontramos:

$x^2 + (12-y).x + 20 - y = 0$ (Equação do 2º grau, em x).

Como a variável x é real, devemos ter $\Delta \geq 0$ (discriminante).

$(12 - y)^2 - 4.1.(20 - y) \geq 0 \rightarrow y^2 - 20y + 64 \geq 0 \rightarrow y^2 - 20y + 100 \geq 36 \rightarrow (y - 10)^2 \geq 6^2$

Assim, tem-se:

$y - 10 \leq -6 \rightarrow y \leq 4 \rightarrow x = -4$ (absurdo, pois x > 0)

ou

$y - 10 \geq 6 \rightarrow y \geq 16 \rightarrow y_{mín.} = 16$

Portanto, o valor mínimo de y é 16. A este mínimo corresponde x = 2.

APLICAÇÃO 69

Sabendo que três números reais e positivos a, b e c satisfazem

$\frac{1}{a}\cdot(b+c) + \frac{1}{b}\cdot(c+a) + \frac{1}{c}\cdot(a+b) = 6$. Determine o valor da fração $F = \frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+abc}$.

Solução:

Inicialmente, podemos escrever a sentença anterior da seguinte maneira:

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} = 6 \rightarrow \underbrace{\left(\frac{b}{a} - 2 + \frac{a}{b}\right)}_{\text{quadrado perfeito}} + \underbrace{\left(\frac{c}{a} - 2 + \frac{a}{c}\right)}_{\text{quadrado perfeito}} + \underbrace{\left(\frac{c}{b} - 2 + \frac{b}{c}\right)}_{\text{quadrado perfeito}} = 0$$

Por fim, observamos que,

$$\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{a}}-\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{b}}-\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2=0$$

Com isso,

$$\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{c}{a}}-\sqrt{\frac{a}{c}}=\sqrt{\frac{c}{b}}-\sqrt{\frac{b}{c}}=0 \text{ (vide aplicação 1)} \rightarrow a=b=c$$

Portanto, o valor da fração é dado por:

$$F=\frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+abc}=\frac{(a+a+a)^3}{a^3+a^3+aaa}=\frac{27a^3}{3a^3}=9$$

APLICAÇÃO 70

Seja a função exponencial $f(x) = e^x$, como x real, prove que:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n},\ \forall\ x_i\in R$$

Prova:

Sabemos que:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_n},\forall a_i>0\ \ (M.A\ge M.G.)$$

Como $e^x > 0$, para x real, podemos escrever:

$$\frac{e^{x_1}+e^{x_2}+...+e^{x_n}}{n}\ge\sqrt[n]{e^{x_1}\cdot e^{x_2}\cdot ...\cdot e^{x_n}}$$

Daí,

$$\frac{e^{x_1}+e^{x_2}+...+e^{x_n}}{n}\ge\sqrt[n]{e^{x_1+x_2+...+x_n}}\rightarrow\frac{e^{x_1}+e^{x_2}+...+e^{x_n}}{n}\ge e^{\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}}$$

Equivale a,

$$e^{\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}}\le\frac{e^{x_1}+e^{x_2}+e^{x_3}+...+e^{x_n}}{n}$$

Portanto,

$$f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n},\ \forall\ x_i\in R$$

APLICAÇÃO 71

Seja a função logarítmica $f(x) = \log_e x$, com x positivo, prove que:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n}, \ \forall \ x_i \in R_+^*$$

Prova:

Sabemos que:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \ ,\forall x_i > 0 \ (M.A \geq M.G.)$$

Devido a função f(x) = $\log_e x$ ser crescente, base maior do que 1, podemos escrever:

$$\log_e\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \geq \log_e\left(\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}\right)$$

Segue que,

$$\log_e\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \geq \log_e\left(x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n\right)^{\frac{1}{n}}$$

Equivale a,

$$\log_e\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n}\log_e\left(x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n\right) = \frac{\log_e x_1 + \log_e x_2 + ... + \log_e x_n}{n}$$

Portanto,

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n}, \ \forall x_i > 0$$

4.2 Problemas geométricos e trigonométricos

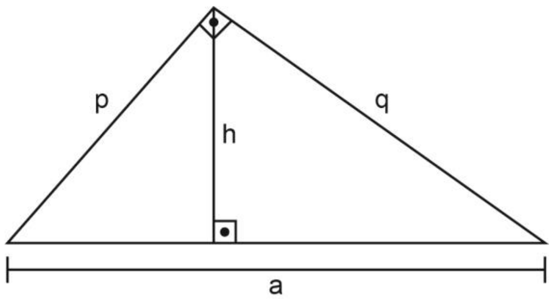
APLICAÇÃO 72

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Sejam p e q os catetos de um triângulo retângulo cuja altura relativa a hipotenusa é h. Mostre que $f(x) = \dfrac{2.x^2}{p} - \dfrac{2.x}{h} + \dfrac{1}{q}$ tem sempre raízes reais.

Demonstração:

Para facilitar o entendimento, veja a figura a seguir:

Figura 12 – Triângulo retângulo



Fonte: Imagem do autor.

Sabemos que a função f, do segundo grau, admitirá raízes reais se, e somente se, o seu discriminante for maior ou igual a zero.

Temos que: $\Delta = \left(-\frac{2}{h}\right)^2 - 4.\frac{2}{p}.\frac{1}{q} \rightarrow \Delta = \frac{4}{h^2} - \frac{8}{pq}$ (discriminante)

No triângulo acima temos duas relações métricas notáveis, a saber:

$$\begin{cases} a^2 = p^2 + q^2 \\ p.q = a.h \end{cases} \rightarrow h = \frac{p.q}{a} \rightarrow h^2 = \frac{p^2.q^2}{p^2 + q^2}$$

Substituindo o valor de h^2 na expressão do discriminante, concluímos:

$$\Delta = \frac{4}{\frac{p^2.q^2}{p^2+q^2}} - \frac{8}{p.q} \rightarrow \Delta = \frac{4.(p-q)^2}{p^2.q^2} \rightarrow \Delta = \left[\frac{2.(p-q)}{p.q}\right]^2$$

Como o discriminante é uma potência de ordem par, então $\Delta \geq 0$, o que nos leva a concluir que a equação admite sempre raízes reais.

APLICAÇÃO 73

Mostrar que, se a, b e c são os lados de um triângulo, o trinômio do segundo grau $a^2.x^2 + (b^2 - a^2 - c^2).x + c^2$ é positivo para todos os valores de x real.

Demonstração:

I. Primeiramente observe que o coeficiente de x^2 é positivo. Significa que o trinômio do segundo grau em x tem como representação gráfica uma parábola com concavidade para cima.

II. Agora vamos achar o valor do discriminante.

$\Delta = (b^2 - a^2 - c^2)^2 - 4a^2.c^2$

$\Delta = (b^2 – a^2 – c^2)^2 – (2.a.c)^2$

$\Delta = (b^2 – a^2 – c^2 – 2.a.c).(b^2 – a^2 – c^2 + 2.a.c)$

$\Delta = [b^2 – (a + c)^2].[b^2 – (a – c)^2]$

$\Delta = (b + a + c).(b – a – c).(b + a – c).(b – a + c)$

$\Delta = (b + a + c).(– 1).(a + c – b).(b + a – c).(b + c – a)$

$– \Delta = (b + a + c).(a + c – b).(b + a – c).(b + c – a)$

Devido a menor distância entre dois pontos distintos no plano ser dada pelo segmento de reta que os liga, para que exista um triângulo é necessário que a soma de dois lados quaisquer seja maior que o terceiro lado.

Então, os fatores (b + a + c), (a + c – b), (b + a – c) e (b + c – a) são positivos, o que nos leva a consumar que: $– \Delta > 0 \rightarrow \Delta < 0$.

De (I) e (II), concluímos que o polinômio $a^2.x^2 + (b^2 – a^2 – c^2).x + c^2$ é sempre positivo, pois a representação gráfica é uma parábola totalmente acima do eixo x, devido seu discriminante ser negativo e o coeficiente de x^2 ser positivo.

APLICAÇÃO 74

A área de um triângulo é dada pela fórmula $A = \dfrac{a^2 + b^2}{4}$, onde a e b são dois de seus lados. Determine (em graus) a medida do maior dos ângulos do triângulo.

Solução:

Sabemos que a área de um triângulo qualquer é dada por:

Área(triângulo) $= A = \dfrac{a.b.\text{sen}\theta}{2}$, onde θ é o ângulo formado pelos lados a e b.

Então, temos: $\dfrac{a.b.\text{sen}\theta}{2} = \dfrac{a^2 + b^2}{4} \rightarrow \text{sen}\,\theta = \dfrac{a^2 + b^2}{2.a.b}$.

Por outro lado, como a e b são reais positivos, podemos escrever:

$$(a - b)^2 \geq 0 \rightarrow a^2 + b^2 \geq 2.a.b \rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2.a.b} \geq 1 \rightarrow \text{sen}\theta \geq 1.$$

Donde se tira, que sen θ = 1, portanto o maior ângulo do triângulo é 90º.

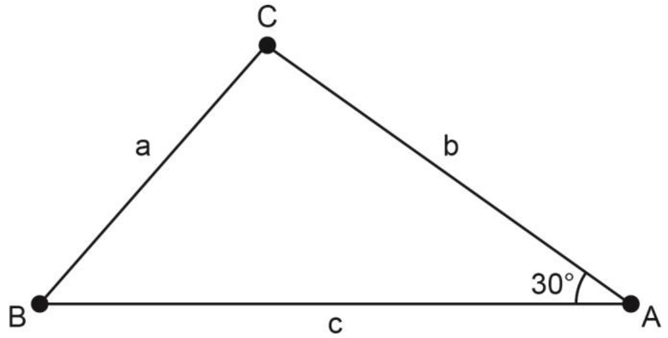
APLICAÇÃO 75

A área de um ΔABC é igual $4m^2$. Se o ângulo Â mede 30º, determine os comprimentos dos lados AB e AC de modo que o comprimento do lado BC seja o menor possível.

Solução:

Para facilitar o entendimento, veja a figura a seguir:

Figura 13 -Triângulo qualquer



Fonte: Imagem do autor.

Área (ΔABC) = $\dfrac{b.c.\,sen30°}{2} = \dfrac{b.c}{4} \rightarrow b.c = 16$

Lei dos cossenos

$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos 30°$

$a^2 = b^2 + c^2 - b.c.\sqrt{3}$

$a^2 = \underbrace{(b-c)^2}_{\geq 0} + \underbrace{b.c.(2-\sqrt{3})}_{\text{positivo}}$

a^2 será mínimo quando $b - c = 0 \rightarrow b = c = 4$.

Portanto, os lados AB e AC são iguais a 4m.

APLICAÇÃO 76

Quais são os comprimentos dos lados do retângulo de área máxima, com lados paralelos aos eixos coordenados, inscritos na elipse de equação $2x^2 + y^2 = 1$?

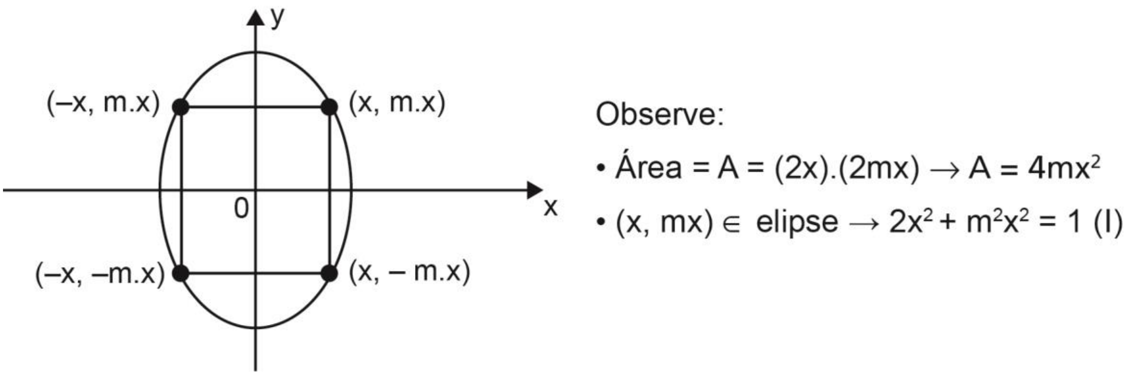
Solução:

Escrevendo a equação na forma reduzida, obtemos:

$$2x^2+y^2=1 \rightarrow \frac{(x-0)^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}+\frac{(y-0)^2}{(1)^2}=1,$$ centro (0,0) e com eixo maior vertical.

Para facilitar o entendimento, veja a figura a seguir:

Figura 14 – Elipse circunscrita



Fonte: Imagem do autor.

Usando a desigualdade das médias, teremos:

$$M.A \geq M.G \rightarrow \frac{2x^2+m^2x^2}{2} \geq \sqrt{2x^2.m^2x^2} \rightarrow \frac{1}{2} \geq mx^2\sqrt{2} \rightarrow 4mx^2 \leq \sqrt{2} \rightarrow$$

$$A \leq \sqrt{2} \rightarrow A_{máx.}=\sqrt{2}\,u.a.$$

Como a igualdade das médias só ocorre quando os termos das médias são iguais, então: $2x^2 = m^2x^2 \rightarrow m^2 = 2$ (II)

Substituindo (II) em (I), vem: $2.x^2 + 2.x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{2}$.

Logo, as dimensões são 1 e $\sqrt{2}$ unidades de comprimento.

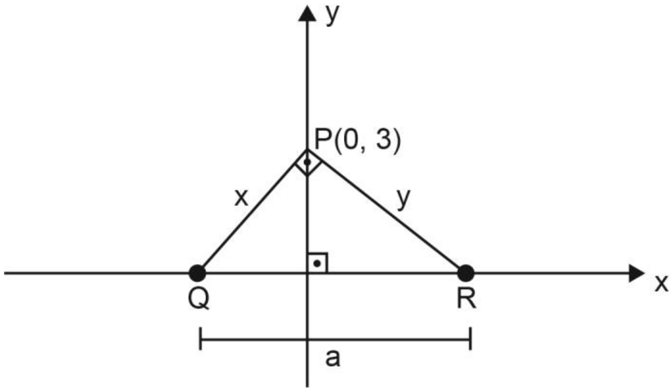
APLICAÇÃO 77

O vértice P do triângulo retângulo PQR é o ponto (0, 3) e a hipotenusa está sobre o eixo x. Determine a medida da hipotenusa para que o triângulo PQR tenha área mínima.

Solução:

Para facilitar o entendimento, veja a figura a seguir:

Figura 15 – Triângulo no plano



Fonte: Imagem do autor.

Temos que: A área do triângulo anterior, PQR é dada por $[PQR] = \dfrac{a \,.\, 3}{2}$.

Perceba:

I. A área será mínima quando o fator a (base do ΔPQR) for mínimo.

II. a.3 = x.y (relação métrica no ΔPQR)

Usando a desigualdade das médias aritmética e geométrica, tem-se:

$$M.A. \geq M.G. \rightarrow \frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 \,.\, y^2} \rightarrow \frac{a^2}{2} \geq x.y \rightarrow a^2 \geq 6.a \rightarrow a \geq 6 \rightarrow a_{mín.} = 6$$

Logo, o valor da hipotenusa para que a área seja mínima será igual a 6, ocorrendo quando $x = y = 3.\sqrt{2}$.

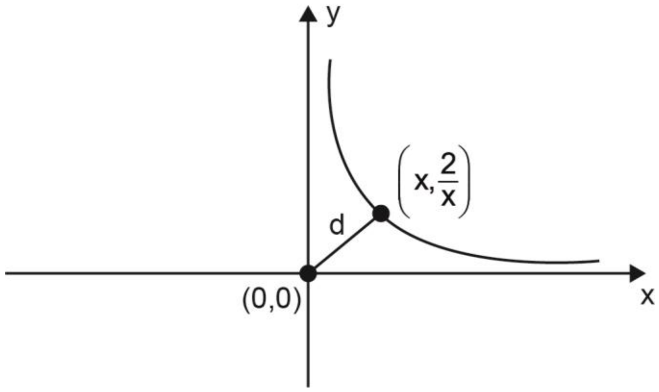
APLICAÇÃO 78

Determine o ponto de abscissa positiva da curva $y = \dfrac{2}{x}$ que está mais próximo da origem.

Solução:

Para facilitar o entendimento, veja a figura a seguir:

Figura 16 - Hipérbole



Fonte: Imagem do autor.

Seja d distância do ponto $\left(x, \frac{2}{x}\right)$ pertencente a curva à origem (0, 0).

Então, $d = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}}$.

Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, encontramos:

$$M.A. \geq M.G. \rightarrow \frac{x^2 + \frac{4}{x^2}}{2} \geq \sqrt{x^2 \cdot \frac{4}{x^2}} \rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} \geq 4 \rightarrow \left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right)_{mín.} = 4$$

Assim, o valor mínimo de d é 2 unidades de comprimento e ocorrerá quando os termos das médias forem iguais, isto é, $x^2 = \frac{4}{x^2} \rightarrow x^4 = 4 \rightarrow x = \sqrt{2}$.

Portanto, o ponto pedido é $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

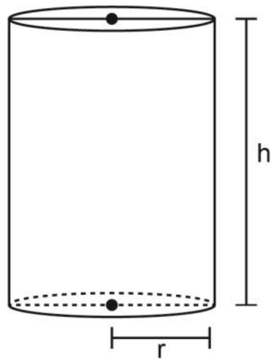
APLICAÇÃO 79

Uma lata de forma cilíndrica, com tampa, deve ser construída com 60 cm^2 de folha de alumínio. Se r é o raio da base, e h é a altura da lata que proporcionam o volume máximo, determine o valor de $\frac{r}{h}$.

Solução:

Para facilitar o entendimento, veja a figura a seguir:

Figura 17 – Lata cilíndrica



Fonte: Imagem do autor.

I. Volume do cilindro = V = $\pi.r^2.h$

II. Área total do cilindro = $2.\pi.r^2 + 2.\pi.r.h = 60$

Usando a desigualdade das médias, tem-se:

$$M.A. \geq M.G. \rightarrow \frac{2.\pi.r^2 + \pi.r.h + \pi.r.h}{3} \geq \sqrt[3]{2.\pi^3.r^4.h^2} \rightarrow \frac{60}{3} \geq \sqrt[3]{2.\pi^3.r^4.h^2}$$

Daí,

$$8000 \geq 2.\pi.V^2 \rightarrow V_{máx.} = \sqrt{\frac{4000}{\pi}}\ cm^3.$$

Sabendo que a igualdade das médias só ocorre quando seus termos forem iguais, encontramos:

$$2.\pi.r^2 = \pi.r.h \rightarrow h = 2.r, \text{ portanto, } \frac{r}{h} = \frac{1}{2}.$$

APLICAÇÃO 80

Prove que (1 + senx)(1 + cosx) $\leq \frac{3}{2} + \sqrt{2}$, para todo número real x.

Prova:

Sabemos que:

$(a - b)^2 \geq 0$, para todo $a,b \in \mathbb{R}$.

Daí,

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \rightarrow ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

Fazendo: a = 1 + senx e b = 1 + cosx

Com isso, encontramos:

$$ab \leq \frac{(1 + \text{senx})^2 + (1 + \text{cosx})^2}{2} \rightarrow ab \leq \frac{\left(1 + 2\text{senx} + \text{sen}^2\text{x}\right) + \left(1 + 2\text{cosx} + \text{cos}^2\text{x}\right)}{2}$$

Equivale a:

$$ab \leq \frac{2 + 2(\text{senx}+\text{cosx}) + \left(\text{sen}^2\text{x} + \text{cos}^2\text{x}\right)}{2} \rightarrow ab \leq \frac{3}{2} + (\text{senx}+\text{cosx})$$

Por *Cauchy-Schwarz* $\rightarrow$ $(1.\text{senx} + 1.\text{cosx})^2 \leq (1^2 + 1^2).(\text{sen}^2\text{x} + \text{cos}^2\text{x})$, o que nos leva a concluir que a soma (senx + cosx) $\in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$.

Assim,

$$ab \leq \frac{3}{2} + (\text{senx}+\text{cosx}) \rightarrow ab \leq \frac{3}{2} + \sqrt{2}$$

Portanto,

$(1 + \text{senx})(1 + \cos x) \leq \frac{3}{2} + \sqrt{2}$, para todo número real x.

As questões abordadas neste último capítulo foram inteligentemente elaboradas, exigindo do vestibulando, além de uma bagagem razoável de conhecimento, uma argúcia de que apenas os candidatos bem preparados são dotados.

5 CONCLUSÃO

Comumente, nos vestibulares das escolas militares, nos deparamos com problemas avançados, relacionados com máximos e mínimos. Na maioria das vezes, são situações que exigem conhecimentos de cálculo diferencial, o que é um problema para aqueles que não tiveram a oportunidade de estudar.

Evidentemente, para os alunos do ensino médio, devido a fácil transversalidade com outros temas, é mais adequado resolver tais problemas usando algumas desigualdades clássicas, como a de *Cauchy-Schwarz, Bernoulli* e a das médias, aritmética e geométrica. Contudo, os livros didáticos adotados nas escolas não exploram devidamente o tema em discussão, o que acarreta uma total ineficiência em nossos alunos na hora de resolvê-los.

Considerando isso, a partir de uma exposição teórica acessível e um significativo número de aplicações não triviais, de problemas numéricos, algébricos, geométricos e trigonométricos, concluo que este trabalho cria uma possibilidade de minimização das dificuldades relacionadas com a resolução de problemas ligados ao tema explorado nesta pesquisa.

REFERÊNCIAS

ANDREESCU, T., ANDRICA, D. **360 problems for mathematical contests.** Zalau: Gil Publishing House, 2003.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher: Edusp, 1974.

COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1993. 14 v.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 12. ed. São Paulo: Ática, 1997.

IEZZI, Gelson *et al*. **Fundamentos da matemática elementar**. São Paulo: Atual, 1977. v. 1.

LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014. (Coleção PROFMAT).

MACHADO, Antônio dos Santos. **Matemática**: temas e metas. Local: Editora, 1948. v. 1.

MACHADO, Antônio dos Santos. **Matemática**: temas e metas. Local: Editora, 1948. v. 6.

MORGADO, A.C.; CARVALHO, P.C.P. **Matemática discreta**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. (Coleção PROFMAT).

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1986.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. São Paulo, SP: Sociedade Brasileira de Matemática,1982- . ISSN 0102-4981. Quadrimestral.

.