UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ANDRÉ DE ALBUQUERQUE LIMA

TEORIAS CLÁSSICAS DE CAMPOS PARA O ELETROMAGNETISMO

FORTALEZA

2021

ANDRÉ DE ALBUQUERQUE LIMA

TEORIAS CLÁSSICAS DE CAMPOS PARA O ELETROMAGNETISMO

Monografia de Bacharelado apresentada à Coordenação da Graduação do Curso de Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.

FORTALEZA
2021

ANDRÉ DE ALBUQUERQUE LIMA

TEORIAS CLÁSSICAS DE CAMPOS PARA O ELETROMAGNETISMO

Monografia de Bacharelado apresentada à Coordenação da Graduação do Curso de Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Aprovada em 31/03/2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Makarius Oliveira Tahim
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

L696t Lima, André de Albuquerque .

Teorias Clássicas de Campos para o Eletromagnetismo / André de Albuquerque Lima. – Fortaleza, 2021.

53.:il.

Monografia (bacharelado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2021.

.

Orientação: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.

1. Física de Partículas. 2. Teorias de Gauge. 3. Geração de Massa. 4. Campos Topológicos. I. Título.

CDD:530

Dedicado à minha mãe e meus amigos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer à minha mãe, Ana Maria Ricarte de Albuquerque, que foi minha base e minha maior incentivadora, sempre com muito carinho e dedicação.

Gostaria de agradecer também aos diversos professores do departamento de física da UFC. Professores Ricardo Renan Landim de Carvalho e Dr. Geová Maciel de Alencar Filho, pelas orientações na Iniciação Científica e nesta monografia, além das aulas fundamentais na construção do meu conhecimento na área de física teórica. Aos demais professores do departamento, como Prof. Dr. Carlos William de Araújo Paschoal, Prof. Dr. Roberto Maluf, Prof. Dr. Saulo-Davi Soares e Reis e aos demais professores que participaram de forma importantíssima na minha caminhada de graduação através de aulas e conversas sempre construtivas.

Deixo também meus agradecimentos a todos os colegas que participaram da minha caminhada ao longo deste curso. Em especial aos amigos que ingressaram junto comigo no curso e que me ajudaram tanto nos estudos quanto no dia a dia e que espero levar para toda a vida: Diego, Pedro, Ian, Glauber, Caio, Julia, Laisa, Thais e Ribamar. Gostaria de agradecer também a Barbara Sales pelo apoio e parceria em cadeiras e para tirar dúvidas minhas em geral. Junto a ela, também gostaria de agradecer a outros veteranos como Germano e Igor que também me deram apoio em diversos momentos e cadeiras que fizemos juntos.

Ao meu colega de grupo de pesquisa, Pedro Henrique Ferreira de Oliveira, por sua didática e clareza em seu trabalho de dissertação de mestrado, de mesmo tema desta monografia e que serviu de rica fonte de pesquisa.

Também não posso deixar de agradecer pessoas fundamentais por todo apoio desde antes da minha entrada na UFC. Entre elas, Jéssyca Elaine por sua amizade e paciência, Sabrina Ângela por sempre me escutar e dividir tanto momentos bons quanto momentos difíceis comigo e Áurea Fonseca por mesmo distante se fazer presente e me ajudar com conversas e conselhos sempre, inclusive na produção deste trabalho.

Agradecimentos também ao CNPq pelo financiamento da bolsa de Iniciação Científica, fundamental ao meu desenvolvimento ao longo do curso de graduação.

"Os que se encantam com a prática sem a ciência são como os timoneiros que entram no navio sem timão nem bússola, nunca tendo certeza do seu destino."

Leonardo da Vinci

RESUMO

O objetivo do presente trabalho é discutir com certa profundidade teorias de campos para o Eletromagnetismo. Primeiramente, destacamos os motivos de trabalhar com teorias clássicas de campos e fazemos a construção desse formalismo. Posteriormente, introduzimos o formalismo de formas diferenciais com o intuito de estudar teorias em dimensões arbitrárias e sem nos restringir a sistemas de coordenadas. Discutimos e equação de Klein-Gordon e observamos que ao fazer uma comparação da Lagrangiana de Maxwell com a de Klein-Gordon fica claro que o campo de $gauge$ correspondente ao fóton não tem massa na teoria clássica do eletromagnetismo. Baseado nisso, estudamos a teoria de Proca e as teorias topológicas em que o fóton adquire um termo de massa: o modelo de Chern-Simons e o modelo BF.

Palavras-chave: Física de Partículas. Teorias de Gauge. Geração de Massa. Campos Topológicos.

ABSTRACT

The aim of this paper is to discuss theories of fields for Electromagnetism in some depth. First, we highlight the reasons for working with classical field theories and build this formalism. Subsequently, we introduced the differential forms formalism in order to study theories in arbitrary dimensions and without restricting ourselves to coordinate systems. We discussed the Klein-Gordon equation and observed that when making a comparison of Maxwell's Lagrangian with that of Klein-Gordon it is clear that the *gauge* field corresponding to the photon has no mass in the classical theory of electromagnetism. Based on this, we studied the Proca theory and topological theories in which the photon acquires a mass term: the Chern-Simons theory and the BF model.

Keywords: Particle Physics. Gauge Theories. Mass Generation. Topological Fields.

LISTA DE SÍMBOLOS

c	Velocidade da luz no vácuo
$T^{\mu_1 \mu 2 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \nu 2 \cdots \nu_q}$	Tensor misto do tipo (p,q)
$T_{(p)}$	Forma diferencial de ordem p
$\wedge$	Produto exterior
d	Derivada exterior
$d^\dagger$	Co-derivada exterior
$\nabla, \nabla \cdot, \nabla \times, \nabla^2$	Gradiente, divergente, rotacional, laplaciano
δ^i_j	Delta de Kronecker
$\delta(x-y)$	Delta de Dirac
$\mathcal{M}_D$	Variedade de dimensão D
$g^{\mu\nu}$	Tensor Métrico
$\epsilon^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}$	Símbolo de Levi-Civita
ϵ_0	Permissividade elétrica no vácuo
μ_0	Permeabilidade magnética no vácuo
$\mathcal{L}$	Densidade Lagrangiana
$\hbar$	Constante reduzidade de Planck
$\equiv$	Indicador de definição

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO: TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS 11
1.1 A Mecânica Clássica 12
1.2 Princípio Variacional 12
1.3 Transição para Campos 14
1.3.1 Tensores 14
1.3.2 Campos Clássicos 16
2 O ELETROMAGNETISMO 20
2.1 Equações de Maxwell 20
2.1.1 Consequências diretas 21
2.1.2 Invariância de *gauge* 22
2.2 Formulação Covariante 23
2.3 Formulação em formas diferenciais 26
2.3.1 Formas Diferenciais 26
2.3.2 Cálculo Exterior 31
2.3.3 Formulação em Formas Diferenciais do Eletromagnetismo 35
3 EXTENSÕES À TEORIA DE MAXWELL 38
3.1 Leis de Maxwell a partir do formalismo Lagrangiano 38
3.2 Teorias de Fóton Massivo 40
3.2.1 Equação de Klein-Gordon 40
3.2.2 Modelo de Proca 41
3.3 Chern-Simons 43
3.4 Modelo BF 45
3.4.1 Dinâmica da teoria Maxwell-BF 48
3.4.2 Equações de Maxwell-BF 49
4 CONCLUSÃO 52
REFERÊNCIAS 53

1 INTRODUÇÃO: TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS

Um dos objetos de maior interesse da ciência é responder do que é feita a matéria que nos cerca e como ela interage para gerar todos os fenômenos que conhecemos. A física é a parte da ciência responsável por estudar a matéria no seu nível mais fundamental.

Hoje em dia, sabemos que a matéria é constituída basicamente de dois tipos de partículas: férmions e bósons. Os férmions são os constituintes da matéria. Esse tipo de partícula tem spin semi-inteiro e função de onda antissimétrica, obedecendo à chamada estatística de Fermi-Dirac. Como exemplos de férmions temos prótons, elétrons, neutrinos, entre outros. Já os bósons são partículas com funções de onda simétrica e spin inteiro, obedecendo à estatística de Bose-Einstein [1]. Como exemplos de bósons temos o glúon, os mésons, o bóson de Higgs, o fóton, entre outros.

Os bósons são os responsáveis por mediar as interações fundamentais da natureza. As interações físicas são descritas por 4 grandes forças: força nuclear forte, força nuclear fraca, força gravitacional e força eletromagnética [2]. Este trabalho é focado no estudo da teoria eletromagnética e seu bóson mediador, o fóton. Estudaremos primeiro o eletromagnetismo desenvolvido a partir unicamente das equações de Maxwell, que descreve um campo vetorial Abeliano não-massivo e suas interações com fontes. Posteriormente estudaremos o modelo de Proca, no qual é introduzido um termo de fóton massivo que quebra a simetria de $gauge$ da teoria e que afeta diretamente as equações de campo, modificando por exemplo o potencial de Coulomb por um fator exponencial dependente da massa: o chamado potencial de Yukawa. Esse tipo de teoria tem aplicações por exemplo no estudo da supercondutividade, mais especificamente no efeito Meisner que descreve os campos elétricos no interior de um supercondutor.

Além disso, estudaremos dois tipos de teoria chamadas topológicas, por não dependerem da métrica do espaço-tempo em questão. Tais modelos têm importância histórica como alternativa de geração de massa ao mecanismo de Higgs, que por muito tempo seguiu sem comprovação experimental. Além disso, tais teorias também tem aplicações como modelos efetivos do comportamento dos campos fundamentais. O modelo de Chern-Simons é uma tentativa de encontrar um mecanismo de geração de massa para o fóton preservando a invariância de $gauge$. No entanto, essa teoria apresenta uma complicação, uma vez que sua construção limita a dimensionalidade do sistema. Uma alternativa é então o modelo BF, que preserva a invariância de $gauge$ e não restringe a dimensionalidade do sistema.

1.1 A Mecânica Clássica

Uma das teorias científicas mais revolucionárias de todos os tempos é um trabalho de Isaac Newton. Publicado pela primeira vez em 1687, a obra de três volumes *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, usualmente chamada apenas de Principia, estabelece as bases da Mecânica Clássica. Nos livros são formuladas a Lei da Gravitação Universal de Newton, uma derivação para as Leis de Kepler do movimento planetário e as famosas Leis de Newton.

O formalismo utilizado por Newton em sua teoria é a mecânica vetorial. Essa tem como objetivo identificar todas as forças atuando sob uma partícula em um determinado instante e a partir disso determinar o movimento posterior da partícula, sendo a equação que rege o movimento dada pela segunda Lei de Newton[3]

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \tag{1.1}$$

onde $\vec{F}$ representa a força que atua sobre a partícula, $\vec{p}$ representa o momento linear e $\vec{r}$ o vetor posição.

A teoria desenvolvida por Newton tem grande sucesso para tratar de diversos problemas, inclusive fornecendo derivações dos teoremas de conservação do momento linear, conservação do momento angular total e conservação da energia para sistemas de partículas[3].

No entanto, apesar da sua grande utilidade e do seu abrangente limite de validade, o formalismo vetorial utilizado por Newton apresenta dificuldades para lidar com certos tipos de problemas, principalmente em sistemas com muitas partículas ou sistemas com vínculos, onde identificar as forças que agem sobre cada partícula se torna inviável.

1.2 Princípio Variacional

Como alternativa ao formalismo vetorial, em que precisamos identificar todas as forças que agem sobre cada partícula a fim de encontrar as equações de movimento, podemos derivar as mesmas equações de movimento a partir de um único princípio. O princípio variacional da mecânica analítica forma uma base capaz de descrever os sistemas mais variados de uma maneira simples e elegante.

Além do fato, de ser derivada de apenas um princípio a mecânica analítica apresenta outras vantagens. Na análise de corpos rígidos, sabemos que a distância entre duas partículas deve permanecer a mesma em todo o movimento. Já no estudo de fluidos, observamos que as partículas do fluido tendem a gerar uma forte reação contra uma variação no volume do fluido. Nos dois casos, o formalismo vetorial apresenta dificuldades em determinar todas as forças que agem sobre as partículas. No entanto, na mecânica analítica, podemos utilizar apenas as condições cinemáticas descritas anteriormente[4].

O princípio de Hamilton, no qual nos basearemos para construir todo o formalismo utilizado a seguir afirma que o movimento do sistema entre os tempos t_1 e t_2 é tal que de todos os caminhos que o sistema poderia percorrer, o que ele realmente percorre é aquele no qual a integral de linha chamada de ação tem um valor estacionário.

Veremos na prática, como isso funciona. A ação é um funcional integral, isto é, diferentemente de uma função $f(x)$ cujo valor depende apenas de x, um funcional depende da forma funcional de uma função, integrada nas suas variáveis. Ela é definida como: [3]

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \tag{1.2}$$

onde L é a função Lagrangiana, que consideraremos a princípio que depende apenas das coordenadas generalizadas q_i e das velocidades generalizadas $\dot{q}_i$. As coordenadas generalizadas são os parâmetros que descrevem os graus de liberdade do sistema e as velocidades generalizadas, são equivalentes as velocidades usuais, apesar de não necessariamente terem dimensão de velocidade.

A seguir, pelo princípio de Hamilton, podemos impor que:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \tag{1.3}$$

Utilizando os princípios do cálculo variacional e o fato de que a Lagrangiana depende apenas de q_i e $\dot{q}_i$, temos:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] dt \tag{1.4}$$

Na equação (1.4) e em todas daqui em diante, a menos que se afirme explicitamente o contrário, é utilizada a notação de soma de Einstein, em que dois índices repetidos indicam uma soma nesses índices, eliminando a necessidade de escrever o símbolo do somatório. O índice i varia de 1 a n, onde n é o número de graus de liberdade do sistema em questão.

Para os propósitos desse trabalho, podemos considerar verdadeira a seguinte relação de comutação entre operadores:

$$\delta \dot{q}_i = \frac{\mathrm{d}\delta q}{\mathrm{d}t} \tag{1.5}$$

Fazendo isso, podemos utilizar uma técnica frequentemente utilizada no cálculo de variações para eliminar determinados termos, a integral por partes:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\mathrm{d}\delta q_i}{\mathrm{d}t} dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \tag{1.6}$$

No entanto, as condições iniciais de contorno do problema fixam o valor das coordenadas nos pontos inicial e final da trajetória, e portanto, $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$. Dessa forma, o primeiro termo do lado direito da equação (1.6) é nulo. Substituindo esse resultado na equação (1.4), ficamos com:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt = 0. \tag{1.7}$$

Como as variações infinitesimais δq_i são arbitrárias, a condição para que a equação (1.7) seja satisfeita é que os coeficientes que multiplicam esses termos sejam nulos. Impondo esse fato, obtemos as chamadas equações de Euler-Lagrange[3]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{1.8}$$

Como o índice i varia de 1 a n, a equação (1.8) na verdade representa um conjunto de n equações. Com esse conjunto, obtemos as equações de movimento do sistema de partículas.

1.3 Transição para Campos

Na seção anterior, um novo formalismo para a mecânica de partículas pontuais foi descrito, o formalismo Lagrangiano, e encontramos n equações de Euler-Lagrange para o sistema, onde n é o número de graus de liberdade do sistema. Esse formalismo pode ser facilmente generalizado para um sistema contínuo, como veremos adiante.

O que faremos nessa seção é descrever sistemas utilizando funções contínuas das variáveis espaço-temporais $x^\mu = (t, x^1, x^2, ...)$. Essas funções são o que chamamos de campos e serão o objeto de estudo deste trabalho daqui em diante.

1.3.1 Tensores

Antes de seguir em diante e mostrar a generalização dos resultados do formalismo lagrangiano para campos, é importante definir alguns conceitos relevantes aos cálculos que faremos. Quando estávamos lidando com partículas, não explicitamos nenhuma diferença entre coordenadas covariantes ou contravariantes, porém para os assuntos que abordaremos a seguir uma diferenciação se faz necessária.

Uma das questões mais importantes da física é estudar como os objetos de uma teoria se comportam sob determinadas transformações. Sob uma transformação de coordenadas $x^\mu \to x'^\mu$, objetos se transformam de duas formas distintas. Primeiramente, temos os chamados objetos contravariantes, que se transformam como[5]:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu. \tag{1.9}$$

Por outro lado, vejamos agora como se transforma um vetor dado pelo gradiente de um campo escalar[5]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu}. \tag{1.10}$$

Observando as equações (1.9) e (1.10) fica clara a diferença na forma como variam os dois tipos de vetores. Objetos que se transformam como (1.9) são ditos vetores contravariantes e são representados com índice em cima. Já os que se transformam como (1.10) são ditos vetores covariantes ou co-vetores e são representados com o índice em baixo. Por esse motivo, adota-se a notação ∂_i para indicar a i-ésima componente do vetor gradiente.

Vale notar que é possível encontrar uma relação de correspondência entre objetos dos dois tipos. Sejam $\mathbb{V}$ o espaço dos vetores e $*\mathbb{V}$ o espaço dual dos co-vetores. Então, existe um mapeamento $g : \mathbb{V} \to^* \mathbb{V}$ que leva um objeto do espaço $\mathbb{V}$ para o espaço $*\mathbb{V}$, chamado de métrica. Em termos de índices, podemos escrever[5]:

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \text{ e } x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \tag{1.11}$$

onde $g^{\mu\nu}x$ é o inverso de $g_{\mu\nu}$, isto é:

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu \tag{1.12}$$

As operações efetuadas na equação (1.11) são chamadas, respectivamente, de 'levantamento' e 'abaixamento' de índices. Um caso particular a ser estudado é o da métrica do espaço de Minkowski. Essa métrica é independente das coordenadas e descreve o espaço das coordenadas da relatividade especial. Ao longo deste trabalho será adotada a convenção para a métrica como $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$.

Por último, podemos definir um tensor de posto r+s, com r índices covariantes e s índices contravariantes como um conjunto de quantidades que se transformam segundo a fórmula[6]

$$T'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_s}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_r}(x) = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\lambda_1}} \frac{\partial x'^{\mu_2}}{\partial x^{\lambda_2}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_s}}{\partial x^{\lambda_s}} \frac{\partial x^{\rho_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \frac{\partial x^{\rho_2}}{\partial x'^{\nu_2}} \cdots \frac{\partial x^{\rho_r}}{\partial x'^{\nu_r}} T^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_s}_{\rho_1\rho_2\cdots\rho_r}(x). \tag{1.13}$$

Observando o modo como os tensores se transformam, é possível construir os chamados escalares ou invariantes de uma teoria através de um mecanismo chamado contração de índices. Como exemplo, temos o produto escalar, que se transforma do seguinte modo[5]:

$$A'^{\mu}B'_{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}}A^{\lambda}B_{\rho}. \tag{1.14}$$

Pela regra da cadeia, sabemos que:

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\lambda}} = \delta^{\rho}_{\lambda}. \tag{1.15}$$

Assim, temos que:

$$A'^{\mu}B'_{\mu} = \delta^{\rho}_{\lambda}A^{\lambda}B_{\rho} = A^{\rho}B_{\rho} = A^{\mu}B_{\mu}, \tag{1.16}$$

onde é utilizado o fato de que δ^{ρ}_{λ} elimina um somatório e na última passagem é possível renomear os índices que estão somando. Assim, fica provado que o produto escalar é invariante por mudança de base. Seguindo o mesmo raciocínio, é possível criar infinitos escalares pra determinada teoria.

Por último, é importante ressaltar uma propriedade importante de tensores de dois índices. Tais tensores podem ser separados em uma parte completamente simétrica e outra completamente assimétrica da seguinte maneira:

$$T_{\mu\nu} = \frac{T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}}{2} + \frac{T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}}{2} = T_{(\mu\nu)} + T_{[\mu\nu]}, \tag{1.17}$$

onde $T_{(\mu\nu)}$ e $T_{[\mu\nu]}$ são a parte simétrica e a parte antissimétrica, respectivamente. Essa característica é importante pois ao contrair um tensor antissimétrico com um tensor simétrico o resultado é nulo, como mostrado a seguir:

$$R_{(\mu\nu)}S_{[\mu\nu]} = R_{(\nu\mu)}S_{[\nu\mu]} = R_{(\mu\nu)}(-S_{[\mu\nu]}) = 0 \tag{1.18}$$

Esse resultado mostra que ao contrair um tensor $T_{\mu\nu}$ qualquer com um tensor antissimétrico (simétrico), resta apenas a parte antissimétrica (antissimétrica) de T.

1.3.2 Campos Clássicos

Agora, com a base matemática necessária é possível seguir adiante e iniciar o estudo do formalismo lagrangiano para campos. Primeiramente, é importante destacar que na teoria de campos é comum trabalharmos com uma densidade Lagrangiana, ao invés da própria

Lagrangiana. A Lagrangiana é simplesmente a integral no espaço da densidade Lagrangiana:

$$L = \int d^3x\mathcal{L} \tag{1.19}$$

Resta agora definir quais os parâmetros de $\mathcal{L}$. Como era de se esperar, os parâmetros são os próprios campos e suas derivadas. Como os campos tratados no presente trabalho são campos relativísticos, a densidade Lagrangiana é uma função de objetos covariantes de Lorentz, mas não de $\dot{\phi}$ e $\partial_i\phi$ separadamente[7]:

$$\mathcal{L}(x^\rho) = \mathcal{L}(\phi^i(x^\rho), \partial_\mu\phi(x^\rho), \partial_\nu\partial_\mu\phi(x^\rho), \cdots). \tag{1.20}$$

Portanto, a ação é da forma:

$$S = \int dtL(t) = \int dtd^3x\mathcal{L}(\phi(x^\rho), \partial_\mu\phi(x^\rho), \cdots) = \int d^4x\mathcal{L}(\phi(x^\rho), \partial_\mu(\phi(x^\rho), ...). \tag{1.21}$$

Para obter as equações de campos, fazemos um procedimento análogo ao da seção 1.2, isto é, uma variação dessa vez nos campos

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta\int dtd^3x\mathcal{L}(\phi(x^\rho), \partial_\mu\phi(x^\rho), \partial_\nu\partial_\mu\phi(x^\rho), ...) \\ &= \int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\partial_\mu\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\phi)}\delta\partial_\mu\partial_\nu\phi + ...\right]. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Novamente utilizando a comutação entre os operadores δ e ∂_μ, isto é, $\delta\partial_\mu = \partial_\mu\delta$ e integrando cada termo por partes, temos:

$$\delta S = \int d^4x\delta\phi\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) + \partial_\nu\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\partial_\mu\phi)}\right) + \cdots\right] + S_{fronteira}, \tag{1.23}$$

onde $S_{fronteira}$ é um termo de fronteira equivalente ao termo que se anula na equação (1.6). Consideramos que esse termo também se anula devido a condições de contorno. Depois disso, ficamos somente com um termo que é coeficiente da variação $\delta\phi$, que é arbitrária e portanto para que δS se anule esse coeficiente deve ser nulo também. Temos assim as equações generalizadas de Euler-Lagrange[7]:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) + \partial_\nu\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\partial_\mu\phi)}\right) + \cdots = 0 \tag{1.24}$$

Apesar de não ser sempre assim, em teorias clássicas de campos geralmente são utilizadas teorias de primeira ordem, isto é, cuja densidade lagrangiana contém apenas termos dos campos e de suas primeiras derivadas. Nesses casos, as equações de Euler-Lagrange são:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \tag{1.25}$$

Uma das propriedades mais interessantes do formalismo Lagrangiano é sua facilidade em tratar das chamadas simetrias do espaço-tempo. Isso pode ser visto através do teorema de Noether que associa uma grandeza conservada à cada simetria contínua do espaço-tempo.

Vamos considerar uma transformação do tipo $\phi \to \phi'$ dada por:

$$\phi(x^\mu) \to \phi'(x^\mu) = \phi(x^\mu + \epsilon^\mu), \tag{1.26}$$

onde ϵ^μ são quatro parâmetros independentes. A Lagrangiana não depende explicitamente das coordenadas do espaço tempo, de forma que $\mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi') = \mathcal{L}(x^\mu + \epsilon^\mu)$. Expandindo a Lagrangiana em termos das variações de primeira ordem, temos:

$$\mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi') = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \partial_\nu \phi \epsilon^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \partial_\mu \phi \epsilon^\nu. \tag{1.27}$$

Além disso, podemos escrever

$$\mathcal{L}(x^\mu + \epsilon^\mu) = \mathcal{L}(x^\mu) + \partial_\nu \mathcal{L} \epsilon^\nu. \tag{1.28}$$

Comparando as duas equações acima, encontramos a seguinte igualdade:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \partial_\mu \phi = \partial_\nu \mathcal{L} \Longrightarrow \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi \right) = \partial_\nu \mathcal{L}. \tag{1.29}$$

Podemos reescrever a equação acima como:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \right) = 0. \tag{1.30}$$

Assim, podemos definir o chamado tensor de energia-momento como:

$$T^\mu_\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}, \tag{1.31}$$

de forma que esse tensor é uma quantidade conservada, uma vez que obedece a uma equação de continuidade da forma $\partial_\mu T^\mu_\nu = 0$.

O tensor (1.31) recebe esse nome pois sua componente $\mu = 0$, $\nu = 0$ representa a energia do sistema e as componentes $\mu = i$, $\nu = 0$ estão relacionadas à i-ésima componente do momento do sistema.

É importante ressaltar que utilizando o tensor energia-momento, podemos construir uma quantidade conservada igual a $\bar{T}^{\mu}_{\nu} = T^{\mu}_{\nu} + \partial_{\lambda}\Omega^{\mu\lambda}_{\nu}$. Esse é um fato importante, uma vez que pode ser utilizado para simetrizar o tensor de energia-momento T^{μ}_{ν}.

Um exemplo de aplicação prática é o cálculo do tensor energia-momento do eletromagnetismo. Como será mostrado posteriormente neste trabalho, a Lagrangiana de Maxwell para o caso sem fontes é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{1.32}$$

Substituindo essa equação na definição (1.31), encontramos:

$$T^{\mu\nu} = F^{\lambda\mu}\partial^{\nu}A_{\lambda} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda}. \tag{1.33}$$

Podemos ver que essa equação não é simétrica na troca dos dois índices. No entanto como vimos é possível criar um tensor semelhante a esse através da adição de uma divergência. Assim, escrevendo $\partial_{\nu}A^{\lambda} \rightarrow \partial^{\lambda}A_{\nu} + F^{\nu}_{\lambda}$, encontramos o tensor energia-momento simétrico, dado por [5]:

$$\bar{T}^{\mu\nu} = -F^{\mu\lambda}F_{\lambda}{}^{\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda}. \tag{1.34}$$

Assim, a densidade energia eletromagnética dada pela componente $\mu = 0$, $\nu = 0$ do tensor energia-momento é positiva definida e igual a:

$$T^{00} = \frac{1}{2}(E^2 + B^2) \tag{1.35}$$

Uma outra forma de se obter o tensor energia momento simétrico de uma teoria é assumindo uma métrica $g^{\mu\nu}$ ligeiramente diferente da métrica de Minkowski $\eta^{\mu\nu}$. Escrevemos então a Lagrangiana da teoria como [8]:

$$S = \int d^4x\sqrt{-|g|}\mathcal{L}(g^{\mu\nu}, \phi, \partial_{\mu}\phi), \tag{1.36}$$

onde $|g|$ é o determinante da métrica. Daí, o tensor simétrico energia-momento é encontrado diferenciando a ação em relação à métrica [8]:

$$\bar{T}_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-|g|}}\frac{\delta(\sqrt{-|g|}\mathcal{L})}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{1.37}$$

Esse método é relevante para calcularmos a energia de teorias topológicas, pois mostra que os termos que não dependem da métrica não contribuem para o tensor energia-momento. Com isso, já temos as ferramentas necessárias para um primeiro estudo de teorias clássicas de campos.

2 O ELETROMAGNETISMO

O eletromagnetismo é um ramo da física que estuda fenômenos envolvendo a relação entre o campo elétrico e o campo magnético, que antes eram considerados objetos separados, mas foram unificados por James Clerk Maxwell. Tais fenômenos são extremamente comuns no dia a dia e constituem a base da tecnologia utilizada atualmente, daí a importância de compreender a teoria e possivelmente a expandir ainda mais.

2.1 Equações de Maxwell

As equações mais famosas e talvez as mais importantes da teoria eletromagnética são as chamadas equações de Maxwell, que determinam a dinâmica dos campos elétrico e magnético e mostram como eles se relacionam. A contribuição de Maxwell não se deve à descoberta das equações, e sim à adição de um termo de correção em uma delas e por ter percebido que essas 4 equações juntas demonstravam que os fenômenos elétricos e magnéticos eram intrinsecamente relacionados. No Sistema Internacional (SI) de medidas, as equações são[9]:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{2.2}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \tag{2.3}$$

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}. \tag{2.4}$$

A equação (2.1) é a chamada Lei de Gauss e descreve como uma densidade de cargas elétricas gera um campo elétrico. A equação (2.2) é a chamada Lei de Gauss para o magnetismo e é análoga ao caso do campo elétrico, porém indica a não existência de monopolos magnéticos. A equação (2.3) é a Lei de Faraday e mostra como uma variação em um campo magnético gera um campo elétrico. Por último, a equação (2.4) mostra que um campo magnético pode ser gerado por um campo elétrico variando no tempo e/ou por uma densidade de corrente elétrica.

Uma vez conhecidos os valores dos campos, é possível identificar as forças que agem em uma partícula a partir da equação para a Força de Lorentz[9]:

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \tag{2.5}$$

No entanto, por hora vamos focar nos resultados que podemos obter utilizando apenas as equações de Maxwell.

2.1.1 Consequências diretas

Primeiramente, derivando a equação (2.1) em relação ao tempo, temos:

$$\nabla \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{2.6}$$

Utilizando a equação (2.4) para isolar o valor da derivada do campo elétrico no tempo, temos:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \vec{j}}{\mu_0 \epsilon_0} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{2.7}$$

Utilizando o fato de que o divergente do rotacional de um campo é nulo e reorganizando os termos, ficamos com:

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{2.8}$$

que é chamada de equação da Continuidade, pois é a partir dessa equação que mostramos a conservação da carga elétrica.

Além disso, podemos utilizar as equações de Maxwell para estudar o comportamento ondulatório dos campos. Para isso, vamos considerar as equações de Maxwell no vácuo, de forma que temos[9]:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \tag{2.9}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{2.10}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \tag{2.11}$$

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0. \tag{2.12}$$

Aplicando um rotacional na equação (2.11), temos:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \frac{\partial \nabla \times \vec{B}}{\partial t} = 0. \tag{2.13}$$

Podemos utilizar uma identidade vetorial para calcular o primeiro termo e utilizar a equação (2.12) para substituir o segundo, de forma que ficamos com:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0. \tag{2.14}$$

Por último, utilizamos a equação (2.9) para eliminar o primeiro termo acima, tendo portanto que[9]:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right). \tag{2.15}$$

Por um procedimento análogo chegamos a mesma equação para o campo magnético[9]:

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right), \tag{2.16}$$

Dessa forma, podemos ver pelas equações acima que tanto o campo elétrico como o campo magnético, no vácuo, se comportam como ondas com velocidade igual a

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 m/s. \tag{2.17}$$

2.1.2 Invariância de *gauge*

Uma das propriedades mais importantes da teoria eletromagnética é a invariância por determinadas transformações. Primeiramente, é importante notar que é possível representar os campos elétrico e magnético a partir de outros campos chamados de potenciais. A vantagem desse mecanismo é trocar as 6 componentes dos campos elétrico e magnético, por um campo ϕ chamado de potencial escalar e um vetor $\vec{A}$ chamado potencial vetorial.

Para isso, devemos observar que o campo vetorial $\vec{B}$ tem divergência nula, podendo portanto ser escrito como o rotacional de um campo vetorial[6]:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \tag{2.18}$$

Substituindo a equação (2.18) na (2.11) e utilizando o fato de que os operadores rotacional e derivada no tempo comutam, temos:

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0, \tag{2.19}$$

de forma que o que está entre parêntesis na equação (2.19) é um campo irrotacional e, portanto, pode ser escrito como o gradiente de um campo escalar[6]:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{2.20}$$

Assim, conseguimos escrever os dois campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ em função apenas de um campo escalar e um campo vetorial. No entanto, podemos observar que ambos os potenciais não são unicamente definidos. Isto é, é possível aplicar transformações nos potenciais sem que isso afete os valores dos campos nem de outras quantidades observáveis da teoria. Considere, portanto o seguinte conjunto de transformações[9]:

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda \\ \phi' = \phi - \partial_t \lambda \end{cases} \tag{2.21}$$

É fácil notar que substituindo os novos valores $\vec{A}'$ e ϕ' nas equações (2.18) e (2.20) não ocorre nenhuma variação nos campos. Esse fato é chamado de invariância de $gauge$ e a escolha de uma função analítica $\lambda(\vec{x}, t)$ é chamada de escolha do $gauge$.

2.2 Formulação Covariante

Na seção anterior foi discutido brevemente o fato de que os campos elétrico e magnético se comportam como ondas que viajam com velocidade c igual à velocidade da luz. A relatividade restrita postula que essa velocidade é a mesma em todos os referenciais. Sendo assim, é esperado que as equações de Maxwell sejam compatíveis com as transformações típicas da relatividade restrita, isto é, as transformações de Lorentz. Para mostrar isso, é interessante escrevê-las em uma formulação covariante, isto é, em termos de quadrivetores e quadritensores.

Por uma questão de simplicidade das equações, o sistema de unidades utilizado daqui em diante não será mais o Sistema Internacional (SI) e sim o Sistema Gaussiano (SG), no qual as equações de Maxwell são dadas por[9]:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \tag{2.22}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{2.23}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \tag{2.24}$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \tag{2.25}$$

Para descrever o eletromagnetismo na formulação covariante, precisamos primeiro definir alguns quadrivetores e quadritensores que servirão de base para todo o estudo. Primeiramente, vamos definir um quadrivetor potencial em função dos potenciais citados anteriormente:

$$A^{\mu} \equiv (\phi, \frac{\vec{A}}{c}). \tag{2.26}$$

A partir disso, podemos definir um tensor antissimétrico de rank 2, chamado de tensor de campo Eletromagnético:

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}, \tag{2.27}$$

de forma que os campos elétrico e magnético podem ser expressos em função desse tensor da seguinte forma:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

É possível observar de forma quase imediata que, devido à antissimetria do tensor de campo $F^{\mu\nu}$ podemos obter uma relação chamada de identidade de Bianchi[8]:

$$\partial^{\lambda} F^{\mu\nu} + \partial^{\nu} F^{\lambda\mu} + \partial^{\mu} F^{\nu\lambda} = 0, \tag{2.29}$$

que também pode ser escrita como[8]

$$\partial_{\mu}({}^{*}F^{\mu\nu}) = 0, \tag{2.30}$$

onde

$${}^{*}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \tag{2.31}$$

é o chamado dual do tensor de campo $F^{\mu\nu}$. A partir da equação (2.30) é possível obter as equações homogêneas de Maxwell, isto é, as equações (2.23) e (2.24). No entanto, ainda é preciso derivar as duas equações não-homogêneas. Essas equações podem ser obtidas a partir de [8]

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu, \tag{2.32}$$

onde

$$j^\nu \equiv (c\rho, \vec{j}) \tag{2.33}$$

é a quadricorrente. Essa quadricorrente é uma quantidade conservada da teoria. Isso pode ser percebido aplicando uma derivada parcial ∂_ν à equação (2.32):

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \partial_\nu j^\nu \Rightarrow \partial_\nu j^\nu = 0 \tag{2.34}$$

Assim, conseguimos reduzir as 4 equações de Maxwell para uma representação com apenas 2 equações envolvendo o tensor de campo e seu dual, (2.32) e (2.30). Além disso, conseguimos obter novamente a equação da continuidade, (2.34), de forma que recuperamos a propriedade da conservação da carga elétrica.

Dessa forma, só resta mostrar o princípio da invariância de $gauge$ nessa formulação. Isso pode ser feito realizando uma transformação do tipo

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \lambda. \tag{2.35}$$

Substituindo a equação acima na definição do tensor de campo (2.27), vemos que o mesmo permanece inalterado pela transformação. Assim fica definida a transformação de $gauge$ no formalismo covariante do eletromagnetismo. Por último, vale citar as duas escolhas mais comuns para a fixação de $gauge$ [8]:

$$\partial_i A^i = 0 \tag{2.36}$$

e

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \tag{2.37}$$

que são chamados, respectivamente, de $gauge$ de Coulomb e $gauge$ de Lorentz.

Por último, podemos utilizar a expressão (2.32) para encontrar uma equação que descreva a dinâmica do campo A^μ. Para isso, basta utilizar a definição de $F^{\mu\nu}$ dada em (2.27):

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} j^\nu \Rightarrow \partial_\alpha \partial^\alpha A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\nu. \tag{2.38}$$

Fixando o $gauge$ de Lorentz, (2.37), e considerando o caso no vácuo ($j^\nu = 0$), ficamos com:

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\nu = 0. \tag{2.39}$$

Assim, o fóton que é a partícula mediadora da interação eletromagnética, é representado por um campo A^ν que obedece a uma equação de onda homogênea.

2.3 Formulação em formas diferenciais

Uma característica interessante a ser observada é a que um dos objetos centrais de estudo da teoria eletromagnética, o tensor de campo $F^{\mu\nu}$ (e por consequência seu dual, ${}^*F^{\mu\nu}$), é antissimétrico nos dois índices. Uma consequência imediata da antissimetria nos índices de um objeto é a grande redução do número de componentes independentes do mesmo. De fato, um objeto com dois índices, digamos T^{ij}, com índices variando de 1 a N, tem N^2 componentes. Se T^{ij} for antissimétrico nos índices, então a quantidade de componentes independentes cai para[6]

$$\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}. \tag{2.40}$$

Isso pode ser visto para o tensor $F^{\mu\nu}$, cujos índices variam de 0 a 3. Dessa forma, fazendo N = 4 na equação (2.40) vemos que esse tensor deve ter 6 componentes independentes, que são exatamente as 3 componentes do campo elétrico e as 3 componentes do campo magnético.

Como veremos mais adiante neste trabalho, essa característica de antissimetria está presente em grande parte dos objetos matemáticos em questão. Assim, é interessante adotar um formalismo que tire proveito da antissimetria dos tensores e que simplifique os cálculos. Dessa forma, daqui em diante será adotado o uso de formas diferenciais nas teorias de campo.

2.3.1 Formas Diferenciais

Para definirmos as formas diferenciais, primeiro precisamos escolher uma base adequada. Uma base adequada devido a sua característica contravariante é o conjunto de elementos infinitesimais de comprimento $\{dx^i\}$. A partir desse conjunto base, podemos definir uma 1-forma como[10]

$$T_{(1)} = T_i dx^i. \tag{2.41}$$

Com isso em mente podemos partir para a definição geral de uma forma diferencial de dimensão qualquer.

Primeiramente, seja $\mathcal{M}$ uma variedade. Uma variedade, em geral, é um espaço topológico que é homeomórfico localmente ao $\mathbb{R}^p$, apesar de poder ser diferente globalmente. Dessa forma, a cada ponto da variedade são atribuídas p coordenadas locais. Por exemplo, no $\mathbb{R}^3$ uma superfície é parametrizada por 2 números, digamos u e v, como (x(u,v), y(u,v), z(u,v)). Assim, uma superfície no $\mathbb{R}^3$ é homeomórfica localmente ao $\mathbb{R}^2$ e cada ponto tem como coordenadas o par (u,v). [11]

Uma forma diferencial de ordem p (que denotaremos por p-forma) é um tensor totalmente antissimétrico do tipo (0,p). Para definirmos uma expressão matemática geral de uma p-forma, é preciso primeiro definir uma base para o espaço $\Omega^p(\mathcal{M}_D, g)$ das p-formas. Queremos construir essa base em termos das 1-formas de base dx^i e vamos impor que um elemento da base seja completamente antissimétrico na permutação de dois índices quaisquer.

O produto exterior (cujo símbolo é $\wedge$) é definido como a parte totalmente antissimétrica do produto tensorial[11]:

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} = \sum_{P \in S_p} sgn(P) dx^{\mu_{P(1)}} \wedge dx^{\mu_{P(2)}} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_{P(p)}}, \tag{2.42}$$

onde S_p é o grupo totalmente simétrico de ordem p e $sgn(P) = +1$ para permutações pares e -1 para permutações ímpares. Dessa forma, podemos construir elementos de base para dimensões quaisquer. Por exemplo, a 2-forma de base é definida como:

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu. \tag{2.43}$$

A 3-forma de base é definida como:

$$\begin{aligned} dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu =& dx^\lambda \otimes dx^\mu \otimes dx^\nu + dx^\nu \otimes dx^\lambda \otimes dx^\mu + dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes dx^\lambda \\ &- dx^\lambda \otimes dx^\nu \otimes dx^\mu - dx^\nu \otimes dx^\mu \otimes dx^\lambda - dx^\mu \otimes dx^\lambda \otimes dx^\nu. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Seguindo o mesmo procedimento é possível construir uma p-forma de base para qualquer ordem p. Com isso, definimos uma forma diferencial de ordem p, $T_{(p)} \in \Omega^p(\mathcal{M}_D, g)$, como[11]

$$T_{(p)} = \frac{1}{p!} T_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} = \frac{1}{p!} T_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_p} \bigwedge_p, \tag{2.45}$$

onde

$$\bigwedge_p \equiv dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}. \tag{2.46}$$

Como por definição os índices são antissimétricos por qualquer permutação entre 2 índices, em D dimensões uma p-forma de um número de componentes igual a[12]

$$\binom{D}{p} = \frac{D!}{p!(D-p)!}. \tag{2.47}$$

Observando a equação (2.46), observamos que (D-p) deve ser maior ou igual a 0 pela definição de fatorial. Assim, em D dimensões só podemos ter p-formas com $p \leq D$ e uma r-forma, com $r \geq D$, é necessariamente nula. Se $p = D$, vemos que a forma diferencial só tem uma componente independente e é portanto um escalar.

Assim como definimos o produto exterior entre elementos infinitesimais de base, podemos definir o produto exterior entre formas diferenciais como[12]

$$T_{(p)} \wedge W_{(q)} = \frac{1}{p!q!} T_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p} W_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_q} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_q}, \tag{2.48}$$

formando portanto uma (p+q)-forma, desde que $p + q \leq D$. Como exemplo, tome o produto exterior de duas 1-formas diferenciais em um espaço com dimensão D = 3. Sejam $u = u_i dx^i$ e $v = v_j dx^j$, o produto exterior é dado por

$$\omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j, \tag{2.49}$$

onde ω_{ij} é a parte totalmente antissimétrica do produto $u_i v_j$ e portanto vale:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_i v_j - u_j v_i), \tag{2.50}$$

onde os índices i e j variam de 1 a 3. Desse modo, podemos notar que as componentes da 2-forma ω, são diretamente proporcionais às componentes do produto vetorial entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Tomemos por exemplo a componente $\omega_{12} = u_1 v_2 - u_2 v_1$, que é a componente 3 do produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$. Assim, temos um primeiro indício de que é possível utilizar as formas diferenciais para generalizar o conceito de produto vetorial em 3 dimensões. Isso será feito adiante com a introdução do conceito de dual de uma p-forma.

Algumas outras propriedades interessantes do produto exterior são citadas a seguir. Sejam $T_{(p)}$, $W_{(q)}$ e $S_{(r)}$ formas diferenciais de ordem p,q e r, respectivamente. Utilizando as definições citadas anteriormente, temos[12]:

$$T_{(p)} \wedge W_{(q)} = (-1)^{pq} W_{(q)} \wedge T_{(p)}, \tag{2.51}$$

que mostra que a comutatividade do produto externo está condicionada à ordem das formas diferenciais envolvidas. Como consequência direta da propriedade acima, temos que o produto entre duas formas idênticas de ordem impar é nulo[11]:

$$T_{(p)} \wedge T_{(p)} = 0. \tag{2.52}$$

Por último, temos que o produto externo apresenta como propriedade a associatividade[11]:

$$(T_{(p)} \wedge W_{(q)}) \wedge S_{(r)} = T_{(p)} \wedge (W_{(q)} \wedge S_{(r)}). \tag{2.53}$$

Antes de partir para as definições do cálculo com formas diferenciais, é necessário definir o conceito de dualidade. Para isso, observe que uma p-forma em uma variedade de dimensão D tem, como já citado anteriormente em (2.47) uma quantidade de componentes igual a

$$\binom{D}{p} = \frac{D!}{p!(D-p)!}. \tag{2.54}$$

No entanto, pela definição do binômio, temos que:

$$\binom{D}{p} = \binom{D}{D-p}. \tag{2.55}$$

Assim, podemos facilmente observar que uma (D-p) forma tem exatamente o mesmo número de componentes de uma p-forma. Esse fato induz a ideia de que podemos definir uma operação $^* : \Omega^p(\mathcal{M}_D, g) \rightarrow \Omega^{D-p}(\mathcal{M}_D, g)$ chamada de dualidade que faz o mapeamento de uma p-forma em uma (D-p)-forma. O dual de uma p-forma $T_{(p)}$, denotado por $^*T_{(p)}$, é dado por[11]

$$^*T_{(p)} = \frac{1}{p!} T_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p} \frac{1}{(D-p)!} \epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}{}_{\nu_{p+1}\cdots\nu_D} \sqrt{|g|} dx^{\nu_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_D}. \tag{2.56}$$

Com essa definição, é natural surgir uma questão quanto à aplicação sucessiva de operações de dualidade. Mais especificamente, ao aplicar duas vezes a operação de dualidade a uma p-forma, o objeto encontrado é idêntico à p-forma original ? Isso vai depender primeiramente do tipo de variedade em que se define a forma diferencial.

O tipo de uma variedade se refere ao tipo de métrica associada a ela. Como já foi dito anteriormente na seção 1.3.1, uma métrica é um mapeamento que leva um objeto do espaço dos vetores $\mathbb{V}$ ao espaço dos covetores $^*\mathbb{V}$. Uma forma equivalente de definir a métrica é como um mapeamento que associa um escalar a dois vetores do espaço tangente à variedade, $T_p\mathcal{M}$. É daí que surge a definição de produto escalar em variedades.

Assim, podemos definir o tipo de métrica baseado nas propriedades associadas ao produto escalar na variedade.

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores e $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável. Uma métrica g é dita Riemanniana se for uma forma bilinear positiva definida e simétrica. Ou seja, se $g(\vec{u},\vec{u}) \geq 0$, com igualdade no caso que $\vec{u} = 0$, e $g(\vec{u},\vec{v}) = g(\vec{v},\vec{u})$. Por outro lado, podemos excluir a exigência que o tensor métrico seja positivo definido e adicionar a condição de que se $g(\vec{u},\vec{v}) = 0$ para todo $\vec{u}$, então necessariamente devemos ter $\vec{v} = 0$. Nesse caso, temos uma métrica pseudo-Riemanniana.

Em ambos os casos, as métricas são simétricas e portanto têm autovalores reais. Se g é Riemanniana, todos os autovalores são necessariamente positivos, enquanto no caso de g pseudo-Riemanniana alguns autovalores podem ser negativos. No caso em que exatamente 1 autovalor é negativo, temos uma métrica de Lorentz. Assim, uma variedade dotada de uma métrica Riemanniana é dita uma variedade Riemanniana e uma variedade com uma métrica de Lorentz é dita uma variedade Lorentziana[11].

Para uma variedade Riemanniana, a aplicação consecutiva do operador de dualidade leva a

$$^{**}T_{(p)} = (-1)^{p(D-p)}T_{(p)}, \tag{2.57}$$

enquanto que em uma variedade Lorentziana temos

$$^{**}T_{(p)} = (-1)^{1+p(D-p)}T_{(p)}, \tag{2.58}$$

de forma que a auto-dualidade fica dependente da dimensão do espaço e da ordem da forma diferencial. A operação inversa do dual é então definida como

$$^{*-1} \equiv (-1)^{p(D-p)}\ ^*, \tag{2.59}$$

para uma variedade Riemanniana e

$$^{*-1} \equiv (-1)^{1+p(D-p)}\ ^* \tag{2.60}$$

para uma variedade Lorentziana. Assim, encerramos as definições básicas da álgebra de formas diferenciais. Resta agora definir operadores diferenciais e integrais a serem utilizados na teoria.

2.3.2 Cálculo Exterior

Seguindo com o estudo das formas diferenciais, vamos definir operações com essas formas tais como diferenciação e integração, a fim de generalizar esses conceitos do cálculo vetorial e tensorial.

A primeira noção importante é a de derivada exterior. Essa derivada é um mapeamento d: $\Omega^p(\mathcal{M}_D, g) \to \Omega^{p+1}(\mathcal{M}_D, g)$, ou seja, transforma uma p-forma em uma (p+1)-forma. O operador da derivada exterior é dado por[11]:

$$d \equiv dx^i \partial_i, \tag{2.61}$$

de forma que ao atuar sobre uma p-forma, temos:

$$dT_{(p)} = \frac{1}{p!}(\partial_\rho T_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p})dx^\rho \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}. \tag{2.62}$$

Por exemplo, ao atuar o operador d sobre um escalar ϕ temos:

$$d\phi = \partial_i \phi dx^i, \tag{2.63}$$

de forma que as componentes de $d\phi$ são idênticas às do gradiente $\nabla\phi$.

Além disso, é possível encontrar uma expressão para o rotacional utilizando a derivada do vetor dual como se segue:

$${}^*(d\vec{u}) = \nabla \times \vec{u}. \tag{2.64}$$

Da equação (2.62) podemos extrair uma propriedade análoga à regra de Leibniz, só que para o produto de formas diferenciais[11]:

$$d(T_{(p)} \wedge W_{(q)}) = (dT_{(p)}) \wedge W_{(q)} + (-1)^p T_{(p)} \wedge (dW_{(q)}) \tag{2.65}$$

Outra propriedade fundamental, conhecida como o Lema de Poincaré, diz que a aplicação sucessiva do operador diferencial resulta necessariamente 0, isto é[11]:

$$d^2 T_{(p)} \equiv ddT_{(p)} = 0. \tag{2.66}$$

Utilizando a derivada exterior definida anteriormente, podemos definir também uma derivada exterior adjunta ou coderivada, dada por

$$d^\dagger T_{(p)} \equiv (-1)^{Dp+D+1}\, {}^*d\, {}^*, \tag{2.67}$$

para variedades Riemannianas. Já para variedades Lorentzianas a co-derivada é definida como

$$d^\dagger T_{(p)} \equiv (-1)^{D(p+1)}\, {}^*d\, {}^*. \tag{2.68}$$

Pode-se demonstrar que a co-derivada reduz a ordem da forma diferencial em uma unidade, isto é, transforma uma p-forma em uma (p-1) forma. Além disso, vale ressaltar que o Lema de Poincaré também é válido aqui e que a co-derivada de um escalar é nula. Como exemplo da atuação da co-derivada, vejamos o caso da co-derivada agindo sobre uma 1-forma $v = v_i dx^i$:

$$d^\dagger v = -\nabla \cdot \vec{v}. \tag{2.69}$$

Por último, podemos definir um último operador diferencial que envolve a derivada exterior e a co-derivada, o operador de Laplace-Beltrani dado por

$$\Delta \equiv (d + d^\dagger)^2 = d^\dagger d + dd^\dagger. \tag{2.70}$$

Esse operador, ao atuar em um escalar ϕ resulta no laplaciano de ϕ, como mostrado a seguir:

$$\Delta\phi = (d^\dagger d + dd^\dagger)\phi. \tag{2.71}$$

Porém, como já citado antes, a co-derivada de um escalar ϕ é nula. Assim, ficamos com

$$\Delta\phi = \nabla^2\phi, \tag{2.72}$$

isto é, o laplaciano de ϕ. De maneira semelhante, para uma 1-forma, temos:

$$\Delta v = (d^\dagger d + dd^\dagger) v_i dx^i = -\nabla^2 \vec{v}. \tag{2.73}$$

Se uma p-forma é fechada ($dT = 0$) e co-fechada ($d^\dagger T = 0$), então segue-se que ($\Delta T = 0$) e dizemos que a forma diferencial é harmônica.

Com os operadores diferenciais definidos, podemos também definir integrações de formas diferenciais para que possamos passar para o cálculo de variações utilizando p-formas. Para isso, o primeiro passo a ser realizado é definir um elemento de volume invariante. Isso é feito adicionando um fator multiplicativo do determinante da métrica [11]

$$\Omega_{\mathcal{M}} \equiv \sqrt{|g|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^p. \tag{2.74}$$

Como explicitado anteriormente através da equação (2.47), em uma variedade D-dimensional, uma D-forma tem exatamente uma componente independente e portanto é um escalar. Além disso, como mostrado na equação (2.48), o produto exterior entre uma p-forma e uma q-forma resulta em uma (p+q)-forma, desde que $p+q \leq D$. Usando esses dois resultados, podemos construir um produto entre duas formas diferenciais para obter um escalar. Para isso, basta que $p+q = D$, de forma que o produto exterior entre os dois objetos resulte em uma D-forma, isto é, um escalar.

Assim, podemos definir um produto tal que

$$T_{(p)} * W_{(p)} = T_{(p)} \wedge {}^{*}W_{(p)} = \frac{1}{p!} T_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p} W^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p} \Omega_{\mathcal{M}}. \tag{2.75}$$

O resultado da equação (2.75), como desejado é uma D-forma e por consequência, um escalar. Desse modo, podemos utilizá-lo junto ao elemento de volume definido em (2.74) para criar um produto interno entre formas diferenciais. O produto interno é, então, definido como[11]]

$$(T, W) = \int_{\mathcal{M}} T_{(p)} * W_{(p)} = \frac{1}{p!} \int_{\mathcal{M}} T_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p} W^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p} \Omega_{\mathcal{M}}. \tag{2.76}$$

Além disso, pode-se facilmente notar que a equação (2.75) trata-se de um produto comutativo, ou seja, $T_{(p)} * W_{(p)} = W_{(p)} * T_{(p)}$. Assim, por consequência direta, o produto interno também tem essa propriedade:

$$(T, W) = (W, T) \tag{2.77}$$

Uma propriedade não tão direta como a comutatividade do produto interno, mas de suma importância é que o operador derivada exterior atuando sobre um dos elementos do produto interno é equivalente a um operador co-derivada atuando no outro elemento do produto, ou seja:

$$(dT, W) = (T, d^{\dagger} W) \tag{2.78}$$

A propriedade da equação (2.78) é válida tanto para variedades Riemannianas quanto para variedades Lorentzianas. Porém, em variedades Riemannianas ela resulta no fato de que o operador de Laplace-Beltrani é positivo definido e portanto temos

$$\begin{aligned} (T, \Delta T) &= (T, d^{\dagger} dT) + (T, dd^{\dagger} T) \\ &= (dT, dT) + (d^{\dagger} T, d^{\dagger} T) \\ &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.79}$$

Agora, com a noção de produto interno e de integração de formas diferenciais bem definidas, podemos partir para o cálculo funcional em p-formas, que é simplesmente uma extensão do cálculo funcional estudado anteriormente.

Em uma variedade plana, o produto interno entre duas formas diferenciais de ordem p é dado por [11]

$$(A, B) = \int_{\mathcal{M}} A_{(p)}(x) * B_{(p)}(x) = \frac{1}{p!} \int_{\mathcal{M}} A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}(x) B^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}(x) d^D x. \tag{2.80}$$

A derivada funcional desse produto com relação a $A_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_p}(y)$ é dada por [13]

$$\frac{\delta}{\delta A_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_p}(y)}(A, B) = B^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_p}(y). \tag{2.81}$$

Assim, podemos definir uma derivada funcional para o produto interno, o que será fundamental para obter as equações de movimento das teorias de campo tratadas posteriormente no trabalho. A derivada funcional então é definida como

$$\frac{\delta}{\delta A(y)}(A, B) = B(y). \tag{2.82}$$

Um objeto fundamental nas teorias de campo com certeza é a distribuição delta de Dirac. Observando a equação (2.82) podemos definir uma p-forma equivalente à distribuição delta de Dirac utilizando a seguinte equação:

$$(\delta_p^D(x - y), B(x)) = B(y) \tag{2.83}$$

e, portanto, podemos dizer que

$$\frac{\delta A(x)}{\delta A(y)} = \delta_p^D(x - y). \tag{2.84}$$

Utilizando a equação (2.83) podemos obter uma relação entre a p-forma delta de Dirac e a distribuição usual delta de Dirac, dada por[13]

$$\delta_p^D(x - y) = \frac{1}{p!} \delta^D(x - y) g_{\mu_1 \nu_1} \cdots g_{\mu_p \nu_p} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \otimes dy^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dy^{\nu_p}. \tag{2.85}$$

Podemos obter a delta de Dirac usual fazendo p = 0, o que era esperado uma vez que a delta de Dirac é um escalar:

$$\delta_0^D(x - y) = \delta^D(x - y). \tag{2.86}$$

2.3.3 Formulação em Formas Diferenciais do Eletromagnetismo

Uma vez construída a base necessária para o entendimento dos tipos de variedades, das definições formas diferenciais e seus operadores diferenciais e integrais e de algumas propriedades algébricas desses objetos, é natural a formulação da teoria eletromagnética utilizando essas ferramentas.

A vantagem desse formalismo é a que ele tira proveito da característica antissimétrica de grande parte dos objetos matemáticos da teoria eletromagnética. Sendo assim, vamos começar a expressar as grandezas da teoria em termos de formas diferenciais. O primeiro passo para isso é definir o equivalente ao quadripotencial A_μ, que logicamente deve ser dado por uma 1-forma, uma vez que o A_μ é um quadrivetor. Desse modo, temos

$$A \equiv A_\mu dx^\mu. \tag{2.87}$$

É natural então utilizar essa definição para formar em seguida equivalente ao tensor de campo eletromagnético, $F_{\mu\nu}$. Para isso, lembremos que $F_{\mu\nu}$ é um tensor antissimétrico do tipo (0,2) e que é definido em termos de derivadas do quadrivetor A_μ. Dessa forma, é intuitivo definir uma 2-forma F, tal que

$$F = dA = \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu. \tag{2.88}$$

A 2-forma de base $dx^\mu \wedge dx^\nu$ é um objeto antissimétrico nos índices, de modo que a contração com $\partial_\mu A_\nu$ anula o termo simétrico, como já era esperado a fim de que a forma diferencial seja definida em termos de um tensor antissimétrico. Desse modo, ficamos com

$$F = \partial_{[\mu} A_{\nu]} dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu. \tag{2.89}$$

Assim, fica claro que a forma diferencial F tem como componentes, a menos de uma constante multiplicativa, o tensor de campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$.Podemos então fazer uma transformação na forma diferencial A, equivalente à transformação de $gauge$ e usar as propriedades do cálculo exterior para procurar por simetrias. Para isso, fazemos

$$A' = A + d\lambda, \tag{2.90}$$

onde lambda é um escalar qualquer. Por consequência, teremos também uma variação na forma diferencial F:

$$F' = dA' = dA + d^2\lambda. \tag{2.91}$$

No entanto, pelo Lema de Poincaré, $d^2\lambda = 0$. Assim, ficamos portanto com

$$F' = dA' = dA = F, \tag{2.92}$$

mostrando portanto a invariância de $gauge$ para a forma diferencial F. No entanto, lembrando que F também é uma forma exata, isto é, $F = dA$, podemos utilizar o mesmo argumento acima. Assim, pelo Lema de Poincaré a forma F deve ser fechada, ou seja, devemos ter

$$dF = 0. \tag{2.93}$$

Utilizando a definição de derivada exterior (2.61) para abrir a equação (2.93) em termos de suas componentes, temos:

$$dF = \partial_\rho F_{\mu\nu} dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{2.94}$$

onde novamente utilizaremos o fato de a 3-forma de base ser um objeto antissimétrico em todos os índices, de modo que a parte simétrica de $\partial_\rho F_{\mu\nu}$ quando contraída com a 3-forma de base se anula. Assim ficamos apenas com a parte antissimétrica de $\partial_\rho F_{\mu\nu}$, dada por

$$\partial_{[\rho} F_{\mu\nu]} = \frac{1}{3!}(\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} - \partial_\rho F_{\nu\mu} - \partial_\nu F_{\mu\rho} - \partial_\mu F_{\rho\nu}). \tag{2.95}$$

Utilizando a antissimetria do tensor $F_{\mu\nu}$ para agrupar os termos dois a dois, temos ao final

$$\partial_{[\rho} F_{\mu\nu]} = \frac{1}{3}(\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho}). \tag{2.96}$$

Portanto, a forma diferencial F é dada por

$$dF = \frac{1}{6}(\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho}) dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu. \tag{2.97}$$

Comparando a equação (2.93) com a equação (2.97), encontramos finalmente

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0, \tag{2.98}$$

isto é, recuperamos portanto as identidades de Bianchi definidas em (2.29). No entanto, na equação (2.30) escrevemos essas identidades em função do tensor dual ao tensor de campo eletromagnético. Também é possível fazer isso utilizando o dual da forma diferencial F, de forma que a equação (2.93) é equivalente a

$$d^\dagger\, {}^*F = 0. \tag{2.99}$$

Assim, já escrevemos uma das 2 equações de Maxwell na forma covariante em termos de formas diferenciais. Resta agora escrever o equivalente à equação (2.32), isto é, as equações não-homogêneas. Para isso, definimos uma 1-forma J para a quadricorrente

$$J = j_\nu dx^\nu. \tag{2.100}$$

A partir daí podemos construir a equação em formas diferenciais como

$$d^\dagger F = \frac{4\pi}{c} J \tag{2.101}$$

Dessa forma, conseguimos recuperar ambas as equações de Maxwell em termos de formas diferenciais, para uma dimensão qualquer e sem envolver o uso de um sistema específico de coordenadas. Com isso, encerramos o capítulo de revisão do eletromagnetismo tendo passado pelos formalismos vetorial, covariante e em formas diferenciais e tendo introduzido um conceito fundamental para a teoria, o da invariância de $gauge$ no eletromagnetismo.

3 EXTENSÕES À TEORIA DE MAXWELL

Nos capítulos anteriores foram discutidas definições e propriedades matemáticas relevantes ao estudo da teoria eletromagnética, tais como cálculo tensorial, cálculo variacional e cálculo exterior. Utilizando essas ferramentas fomos capazes de ter uma boa compreensão do eletromagnetismo de Maxwell e de algumas de suas consequências.

Neste capítulo, iremos discutir possíveis extensões à essa teoria. Isso será feito utilizando o formalismo Lagrangiano através da adição ou modificações de termos à densidade Lagrangiana que leva às equações de Maxwell. Os principais modelos estudados serão o de Proca, o de Chern-Simons e o modelo B-F.

3.1 Leis de Maxwell a partir do formalismo Lagrangiano

O primeiro passo para fazer extensões à teoria de Maxwell do eletromagnetismo é encontrar uma Lagrangiana que leve às equações covariantes (2.32). Para isso buscaremos termos que preservem as simetrias de Lorentz (pois estamos tratando de teorias relativísticas) e a simetria de $gauge$ (que é uma propriedade fundamental do eletromagnetismo, como mostrado anteriormente). Pensando nisso, o termo mais simples possível deve envolver o tensor de campo $F^{\mu\nu}$. Assim, uma primeira tentativa de gerar uma Lagrangiana invariante que obedeça às simetrias exigidas é do tipo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{3.1}$$

onde a constante multiplicativa está relacionada ao sistema de unidades de Heaviside-Lorentz, que será utilizado nesse capítulo. Podemos escrever a equação (3.1) em termos do campo A_μ do seguinte modo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \tag{3.2}$$

de forma que a variação dessa Lagrangiana é dada por

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)\delta(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &= -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}(\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) \\ &= \partial_\mu F^{\mu\nu}\delta A_\nu.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Assim, utilizando o princípio de que a ação deve ser estacionária e por consequência a variação em primeira ordem da Lagrangiana deve ser nula, isto é, $\delta\mathcal{L} = 0$, temos:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \tag{3.4}$$

recuperando assim a equação (2.32) para o caso sem fontes.

Para encontrar a versão do caso com fontes devemos adicionar um termo linear no campo A_μ e que realize o acoplamento do campo com uma densidade de corrente. Dessa forma, a Lagrangiana mais simples que gera a equação desejada é[14]

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{c}A_\mu J^\mu. \tag{3.5}$$

Para obter a equação de movimento faremos novamente um processo semelhante ao feito na equação (3.3). No entanto, podemos aproveitar o fato de que a variação do termo cinético, isto é, o termo que contém o tensor de campo $F^{\mu\nu}$, já foi encontrada. Sendo assim, resta apenas somar a variação do termo de acoplamento. Assim, temos:

$$\delta\mathcal{L}_M = (\partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}J^\nu)\delta A_\nu, \tag{3.6}$$

de modo que, mais uma vez utilizando o princípio variacional, encontramos como era de se esperar que

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c}J^\nu. \tag{3.7}$$

Como mostrado anteriormente na equação (2.39), quando consideramos o caso no vácuo e fixamos o $gauge$ de Lorentz, essa equação resulta em

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\nu = 0, \tag{3.8}$$

isto é, uma equação de onde para o fóton não-massivo.

Podemos também escrever uma ação para o eletromagnetismo em termos de formas diferenciais e utilizar a teoria discutida no capítulo 2 deste trabalho para encontrar as equações de campo. Assim, para uma Lagrangiana da forma (3.5) a ação em formas diferenciais é dada por:

$$S_M = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} F \wedge {}^*F - \frac{1}{c}\int_{\mathcal{M}} A \wedge {}^*J, \tag{3.9}$$

ou, utilizando o produto interno:

$$S_M = \frac{1}{2}(dA, dA) - \frac{1}{c}(A, J). \tag{3.10}$$

Utilizando a equação (2.82) para a derivada funcional do produto interno de p-formas e a propriedade (2.78) do produto interno, temos

$$\frac{\delta S_{\mathcal{M}}}{\delta A(y)} = 0 \Rightarrow d^{\dagger}F = \frac{1}{c}J, \tag{3.11}$$

que é exatamente a equação (2.101) (mudando apenas o sistema de unidades). Portanto, já encontramos as Lagrangianas mais simples que levam às equações de Maxwell para o eletromagnetismo.

3.2 Teorias de Fóton Massivo

Como mostrado anteriormente, o eletromagnetismo de Maxwell em nenhum momento atribui uma massa à sua partícula intermediadora, o fóton. No entanto, é possível estudar modelos em que essa característica é modificada ao atribuir uma massa ao fóton e em seguida observar quais as consequências dessa modificação na teoria.

3.2.1 Equação de Klein-Gordon

Antes de partir propriamente para as teorias modificadas, é importante fazer uma breve contextualização a respeito da equação de Klein-Gordon, que será de suma importância para as discussões posteriores. Essa equação é uma primeira tentativa de formular uma teoria quântica consistente com a relatividade especial.

Começaremos estudando a relação entre energia e momento não relativística, dada por

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x), \tag{3.12}$$

onde E é a energia total, p é o momento da partícula e V é a energia potencial. Em mecânica quântica, esses objetos são transformados em operadores atuando sobre uma função de onda no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ da seguinte forma:

$$\hat{E} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x), \tag{3.13}$$

onde os operadores $\hat{E}$ e $\hat{p}$ são dados respectivamente por[15]:

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{3.14}$$

e

$$\hat{p}_j = -i\hbar\partial_j, \tag{3.15}$$

de modo que ao aplicarmos a uma função de onda Ψ temos[16]:

$$-i\hbar\nabla^2\Psi(\vec{r},t) + V\Psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t}, \tag{3.16}$$

isto é, a equação de Schrodinger. Essa equação descreve fenômenos quânticos não-relativísticos. Logo, uma tentativa de unir isso à relatividade é partir de uma versão relativística da equação (3.12). A relação relativística entre energia e momento é dada por[17]

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4, \tag{3.17}$$

fazendo uma mudança das variáveis para operadores semelhante à (3.14) e (3.15), temos[15]:

$$(\partial_\mu\partial^\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2})\phi = 0. \tag{3.18}$$

Essa equação pode ser obtida a partir de uma Lagrangiana do tipo[18]:

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2, \tag{3.19}$$

onde

$$\mu^2 \equiv \frac{m^2c^2}{\hbar^2}. \tag{3.20}$$

Assim, dizemos que o primeiro termo da equação (3.19) é um termo cinético e que o segundo termo é um termo de massa, pois é a partir dele que encontramos um termo de massa na equação de movimento e em (3.17). É importante notar essas relações, uma vez que daqui em diante surgirão termos análogos a esses em outras teorias, isto é, termos quadráticos nas derivadas dos campos, que também serão chamados de termos cinéticos e termos quadráticos nos próprios campos, que serão chamados de termos de massa.

Com isso podemos observar o motivo da teoria eletromagnética não atribuir uma massa ao fóton. Lembrando que a Lagrangiana para o eletromagnetismo é:

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{c}A_\mu J^\mu. \tag{3.21}$$

isto é, apresenta um termo cinético, porém não apresenta um termo quadrático no campo e portanto não tem um termo massivo.

3.2.2 Modelo de Proca

Uma vez explicada a equação de Klein-Gordon podemos partir para as teorias que modificam o eletromagnetismo. Proca foi o primeiro a tentar adicionar um termo massivo à

Lagrangiana do eletromagnetismo, de forma que a nova Lagrangiana é dada por[19]

$$\mathcal{L}_{MP} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{c}A_\mu J^\mu + \frac{\kappa^2}{2}A_\mu A^\mu. \tag{3.22}$$

Para utilizar o princípio variacional na equação (3.22) basta encontrar a variação do termo massivo e somar à equação (3.6) para encontrar a variação total da Lagrangiana de Maxwell-Proca. A variação no termo massivo é dada por

$$\kappa^2 A^\nu \delta A_\nu, \tag{3.23}$$

de modo que a variação da Lagrangiana (3.22) é dada por:

$$\delta\mathcal{L}_{MP} = (\partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}J^\nu + \kappa^2 A^\nu)\delta A_\nu, \tag{3.24}$$

e, por consequência, a equação de movimento se torna

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \kappa^2 A^\nu = \frac{1}{c}J^\nu. \tag{3.25}$$

Observações experimentais exigem que uma teoria consistente com o eletromagnetismo tenha como característica a conservação local das cargas elétricas, isto é, uma equação da continuidade da forma (2.34). Para que isso aconteça, devemos ter necessariamente que

$$\partial_\nu A^\nu = 0, \tag{3.26}$$

ou seja, o campo é restrito ao $gauge$ de Lorentz. Isso pode parecer estranho, uma vez que eram esperadas teorias que respeitassem a simetria de $gauge$. No entanto, a adição do termo de massa em (3.22) faz com que seja adicionado um termo linear no campo de $gauge$ A^ν, que faz com que a equação não seja invariante por esse tipo de simetria.

Assim, considerando o $gauge$ de Lorentz, e escrevendo a equação (3.25) em termos do campo A^ν, temos:

$$(\partial_\alpha \partial^\alpha + \kappa^2)A^\nu = \frac{1}{c}J^\nu. \tag{3.27}$$

Para o caso sem fontes, a equação acima se resume a

$$(\partial_\alpha \partial^\alpha + \kappa^2)A^\nu = 0, \tag{3.28}$$

isto é, uma equação do tipo de Klein-Gordon para o campo de $gauge$ A^ν, de forma que nesse caso temos um fóton com massa $\kappa\hbar/c$.

Um exemplo simples de aplicação dessa teoria é para o caso de uma carga pontual em repouso na origem do sistema de coordenadas. Nesse caso, a densidade de corrente J^ν é dada por $(cq\delta(r), 0, 0, 0)$. Como estamos estudando o caso estático, o operador d'Alambertiano se resume à parte espacial $\partial_\alpha \partial^\alpha = -\nabla^2$ e o campo de gauge A^ν tem apenas o potencial escalar, ou seja, $A^\nu = (V, 0, 0, 0)$. Dessa forma, temos:

$$(\nabla^2 - \kappa^2)V(r) = -q\delta(r). \tag{3.29}$$

É fácil verificar que a solução para essa equação é o potencial de Yukawa, dado por
:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi}\frac{e^{-\kappa r}}{r}. \tag{3.30}$$

Assim, vemos que a imposição de um fator de massa para o fóton gera alterações sensíveis à teoria eletromagnética. Na equação (3.30), o potencial de uma carga pontual em repouso é alterado do potencial de Coulomb para um potencial que decai mais rapidamente com a distância, em razão de um fator exponencial dependente da massa. Quanto maior o valor da massa atribuída ao fóton, mais rápido esse potencial decai com a distância.

3.3 Chern-Simons

A teoria de Chern-Simons é uma alternativa à teoria de Proca para a geração de massa do fóton. No entanto, os termos de Chern-Simons são restritos a espaços de dimensões determinadas. As razões para isso serão discutidas posteriormente.

Uma das principais aplicações da teoria de Chern-Simons é na eletrodinâmica planar. Esse termo se refere ao estudo de situações físicas em duas dimensões espaciais. Nessas condições o comportamento de elétrons e fótons difere sensivelmente do comportamento usual na teoria clássica de Maxwell. Uma aplicação prática desse tipo de fenômenos é o efeito Hall quântico fracionário.

Em 2 dimensões espaciais e 1 dimensão temporal, a Lagrangiana de Chern-Simons é dada por[14]

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu \partial_\nu A_\rho. \tag{3.31}$$

Assim como no termo de massa da Lagrangiana de Maxwell-Proca na equação (3.22), o termo de Chern-Simons contém explicitamente o campo de *gauge* A_μ e portanto não é evidente a sua invariância de *gauge*. Fazendo a variação do termo de Chern-Simons em uma transformação do tipo $\delta A_\mu = \partial_\mu \lambda$, temos:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_{CS} &= \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}\delta(A_\mu\partial_\nu A_\rho) \\ &= \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}\delta A_\mu\partial_\nu A_\rho + \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu\delta A_\rho \\ &= \kappa\epsilon^{\mu\nu\rho}\delta A_\mu\partial_\nu A_\rho \\ &= \partial_\mu\left(\frac{\kappa}{2}\lambda\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho\right).\end{aligned} \tag{3.32}$$

Assim, vemos que a variação do termo de Chern-Simons é um divergente e portanto, com as condições de contorno adequadas, a Lagrangiana pós transformação de $gauge$ é equivalente à Lagrangiana pré transformação. Dessa forma, diferentemente do termo de Proca, a Lagrangiana de Chern-Simons é invariante de $gauge$.

Considerando isso, é interessante acoplar esse termo de Chern-Simons ao termo de Maxwell do eletromagnetismo usual. A Lagrangiana de Maxwell-Chern-Simons é dada por[7]

$$\mathcal{L}_{MCS} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{c}A_\mu J^\mu + \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho. \tag{3.33}$$

Somando as variações dos termos já calculados previamente e utilizando o princípio variacional, encontramos as seguintes equações de movimento:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\nu\mu\rho}F_{\mu\rho} = \frac{1}{c}J^\nu. \tag{3.34}$$

Para entender de onde surge a massa no modelo de Chern-Simons, podemos analisar o caso sem fontes e reescrever a equação (3.34) como[14]

$$[\partial_\mu\partial^\mu + \kappa^2]\widetilde{F}^\nu = 0, \tag{3.35}$$

onde $\widetilde{F}$ é o pseudo-vetor dual definido como

$$\widetilde{F}^\alpha \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\nu\rho}F_{\nu\rho}, \tag{3.36}$$

que é evidentemente invariante de $gauge$ e por definição satisfaz $\partial_\mu\widetilde{F}^\mu = 0$. Assim, chegamos uma equação do tipo Klein-Gordon, evidenciando o surgimento de massa na teoria.

Fazendo $\nu = 0$ na equação (3.34), vemos que surge uma densidade efetiva de carga relacionada com o campo magnético B dada por:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho + \kappa B = \rho_{eff}. \tag{3.37}$$

Assim como a densidade de carga, a densidade de corrente também tem o acréscimo de um termo proporcional a constante da teoria de Chern-Simons e a componentes do campo elétrico:

$$\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{1}{c}(j_x + c\kappa E_y) + \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} \tag{3.38}$$

e

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{1}{c}(j_y - c\kappa E_x) + \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t}. \tag{3.39}$$

A única equação que permanece inalterada na teoria de Maxwell-Chern-Simons em 2+1 dimensões é a Lei de Faraday, dada por:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{3.40}$$

Para passar essa teoria para o formalismo do cálculo exterior e das formas diferenciais, é necessário encontrar o termo de Chern-Simons em função do produto interno de p-formas e adicionar à equação (3.9). Assim, a Lagrangiana de Maxwell-Chern-Simons em 2+1 dimensões é dada por:

$$S_{MCS} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} F \wedge {}^*F + \frac{\kappa}{2}\int A \wedge dA - \frac{1}{c}\int_{\mathcal{M}} A \wedge {}^*J, \tag{3.41}$$

ou, utilizando o produto interno:

$$S_{MCS} = \frac{1}{2}(dA, dA) + \frac{\kappa}{2}(A, {}^* dA) - \frac{1}{c}(A, J). \tag{3.42}$$

Assim, conseguimos construir mais uma proposta de teoria de fóton massivo, que diferentemente da teoria de Proca, é invariante de $gauge$. No entanto, como dito anteriormente, esse tipo de teoria tem restrições quanto à dimensionalidade do sistema.

É possível observar na Lagrangiana (3.33) que o termo de Chern-Simons é a contração de um símbolo de Levi-Civita com um termo relacionado ao campo e a suas derivadas. Isso implica necessariamente que, para construir invariantes do tipo Chern-Simons, a variedade deve ter uma dimensão ímpar.

3.4 Modelo BF

A fim de generalizar teorias do tipo Chern-Simons para variedades de dimensão quaisquer, iremos estudar o modelo topologicamente massivo BF abeliano, onde F é a 2-forma usual correspondente ao tensor de campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$ e B é uma (D-2)-forma chamada de campo de Kalb-Ramond.

Como queremos que o modelo BF seja uma generalização do modelo de Chern-Simons, iremos discutir um termo BF (3+1)-dimensional na Lagrangiana e posteriormente fazer uma redução dimensional, esperando que ao realizar esse procedimento o resultado seja equivalente aos da teoria de Chern-Simons em 2+1 dimensões. Assim, seja a ação do modelo BF dada por[20]:

$$S_{BF} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{12}H^{\mu\nu\rho}H_{\mu\nu\rho} + \frac{m}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}B_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \right], \tag{3.43}$$

onde H é o $fieldstrength$ de $B_{\mu\nu}$.

A partir dessa ação, podemos observar que o modelo BF é invariante de $gauge$. De fato, a equação (3.43) é invariante por dois conjuntos de transformações de $gauge$[21]:

$$\begin{cases} \delta_1 A_\mu = \partial_\mu \Lambda,\ \delta_1 B_{\mu\nu} = 0\ \ e \\ \delta_2 A_\mu = 0, \delta_2 B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Sigma_\nu - \partial_\nu \Sigma_\mu \end{cases} \tag{3.44}$$

Em termos de formas diferenciais, a ação do modelo Maxwell BF é dada por:

$$S_{BF} = \int_{\mathcal{M}_4} \left[\frac{1}{2}H \wedge^* H + mB \wedge F + \frac{1}{2}F \wedge^* F \right], \tag{3.45}$$

onde $H \equiv dB$.

A fim de fazer a redução de dimensionalidade, iremos considerar que os campos independem da coordenada x^3, de forma que os tensores dos campos da teoria são dados por

$$\begin{cases} A_{\bar{\mu}} \equiv (A_\mu, A_3) \equiv (A_\mu, \varphi) \\ B_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \equiv (B_{\mu\nu}, B_{\mu 3}) \equiv (B_{\mu\nu}, b_\mu) \\ d \equiv dx^{\bar{\mu}}\partial_{\bar{\mu}} = dx^\mu \partial_\mu + dx^3 \partial_3 = dx^\mu \partial_\mu, \end{cases} \tag{3.46}$$

onde φ e b_μ são campos constantes relacionados a coordenada da qual o sistema é independente e μ, $\nu = 0, 1$ e 2. Dessa forma, podemos escrever em formas diferenciais:

$$\begin{cases} A \equiv A_{\bar{\mu}}dx^{\bar{\mu}} = A_\mu dx^\mu + \varphi dx^3 \equiv \bar{A} + \varphi \\ B \equiv \frac{1}{2}B_{\bar{\mu}\bar{\nu}}dx^{\bar{\mu}} \wedge dx^{\bar{\nu}} = \frac{1}{2}B_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu + b_\mu dx^\mu \wedge dx^3 \equiv \bar{B} + b. \end{cases} \tag{3.47}$$

Nas equações (3.47) fica clara a separação das formas diferenciais em uma parte reduzida em 1 dimensão e uma parte constante relacionada à dimensão que não será estudada. Assim substituindo a equação (3.47) na ação (3.45) e integrando em x^3, temos:

$$(S_{BF})_{eff} = \int_{\mathcal{M}_3} \frac{1}{2}(\bar{H} + db) \wedge^* (\bar{H} + db) + m(\bar{B} + b) \wedge (\bar{F} + d\varphi) + \frac{1}{2}(\bar{F} + d\varphi) \wedge^* (\bar{F} + d\varphi).$$

Distribuindo os produtos, temos:

$$(S_{BF})_{eff} = \int_{\mathcal{M}_3} \left[\frac{1}{2}\bar{H} \wedge^* \bar{H} + \frac{1}{2}\bar{H} \wedge^* db + \frac{1}{2}db \wedge^* \bar{H} + \frac{1}{2}db \wedge^* db + \frac{1}{2}\bar{F} \wedge^* \bar{F} + \frac{1}{2}\bar{F} \wedge^* d\varphi \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}d\varphi \wedge^* \bar{F} + \frac{1}{2}d\varphi \wedge^* d\varphi + m\bar{B} \wedge \bar{F} + m\bar{B} \wedge d\varphi + mb \wedge \bar{F} + mb \wedge d\varphi \right].$$

Utilizando as propriedades das formas diferenciais podemos ver que vários desses termos irão se anular. Definindo $G = db$, a equação acima em componentes é igual a

$$(S_{BF})_{eff} = \int d^3x \left[-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{mu\nu}b_\rho + \frac{1}{12}H^{\mu\nu\rho}H_{\mu\nu\rho} \right.$$
$$\left. -\frac{m}{3!}\epsilon^{\mu\nu\rho}H_{\mu\nu\rho}\varphi + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + \frac{m}{2}\partial_\mu(\epsilon^{\mu\nu\rho}B_{\nu\rho}\varphi)\right]. \tag{3.48}$$

O último termo é um gradiente, logo pode ser eliminado através das condições de contorno. Além disso, podemos definir um escalar

$$h = \frac{1}{3!}\epsilon^{\mu\nu\rho}H_{\mu\nu\rho}, \tag{3.49}$$

de forma que

$$H_{\mu\nu\rho} = \epsilon_{\mu\nu\rho}h. \tag{3.50}$$

Substituindo isso na ação efetiva, temos

$$(S_{BF})_{eff} = \int d^3x \left[-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{mu\nu}b_\rho + \frac{1}{2}h^2 - mh\varphi + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi\right]. \tag{3.51}$$

Fazendo a variação da ação em relação ao escalar h, temos:

$$\frac{\delta(S_{BF})_{eff}}{\delta h} = 0 \Rightarrow h - m\varphi = 0, \tag{3.52}$$

e portanto a ação efetiva é

$$(S_{BF})_{eff} = \int d^3x \left[-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\mu\nu}b_\rho + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2\right]. \tag{3.53}$$

Também é possível verificar que a ação efetiva (3.53) mantém a invariância de $gauge$ para transformações com dimensão reduzida. Ou seja, se reduzirmos a dimensão das transformações 1 e 2 em (3.44) respectivamente para

$$\begin{cases} \delta_1 A_\mu = \partial_\mu \Lambda,\ \delta_1 \varphi = \partial_3 \Lambda, \\ \delta_1 B_{\mu\nu} = 0,\ \delta_1 b_\mu = 0 \end{cases} \tag{3.54}$$

e

$$\begin{cases} \delta_2 A_\mu = 0,\ \delta_2 \varphi = 0, \\ \delta_2 B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Sigma_\nu - \partial_\nu \Sigma_\mu,\ \delta_2 b_\mu = \partial_\mu \Sigma_3 \end{cases}, \tag{3.55}$$

a ação efetiva do modelo BF (3.53) se manterá invariante, preservando a simetria de $gauge$ como era desejado.

3.4.1 Dinâmica da teoria Maxwell-BF

A Lagrangiana (3.45) na notação de produto interno pode ser escrita como

$$S_{BF} = \frac{1}{2}(H,H) + \frac{1}{2}(F,F) - m(B,^* F). \tag{3.56}$$

Para obter as equações de campo, faremos o cálculo da derivada funcional de S_{BF} em função dos campos da teoria. Para o campo A, temos:

$$\frac{\delta S_{BF}}{\delta A} = d^\dagger F - m d^{\dagger *} B = 0, \tag{3.57}$$

de forma que a equação de movimento para A é dada por[22]

$$d^* F = -mH. \tag{3.58}$$

Fazendo o mesmo procedimento para B:

$$\frac{\delta S_{BF}}{\delta B} = d^\dagger H - m^* F = 0, \tag{3.59}$$

que leva a[22]

$$d^* H = mF. \tag{3.60}$$

Dessa forma, obtivemos as duas equações de movimento para os campos H e F. Aplicando d^* nos dois lados da equação (3.58) e usando a equação (3.60), temos:

$$(dd^\dagger + m^2)F = 0 \tag{3.61}$$

Como $F = dA$, pelo Lema de Poincaré temos que dF = 0, de modo que$\Delta = \partial_\mu \partial^\mu$.

Portanto[22]:

$$(\partial_\alpha \partial^\alpha + m^2)F = 0. \tag{3.62}$$

Fazendo um procedimento análogo ao feito acima, podemos obter[22]:

$$(\partial_\alpha \partial^\alpha + m^2)H = 0. \tag{3.63}$$

Assim, observamos que tanto F quanto H obedecem individualmente à equação de Klein-Gordon, com massa m. Além disso, é possível mostrar que o campo A também obedece à uma equação do tipo Klein-Gordon.

Pelo Lema de Poincaré, sabemos que $d^2\varphi = 0$. Podemos utilizar esse fato para encontrar uma solução de (3.60) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &d^*H - mF = 0, \\ &d(^*H - mdA) = 0,. \\ &^*H - mdA = d\varphi. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Substituindo essa solução chegamos em:

$$(\partial_\alpha \partial^\alpha + m^2)A = d(^*d^*A - m\varphi) \tag{3.65}$$

Fixando o $gauge$ do campo como $d^\dagger A = m\varphi$, temos então que a equação para o campo A é dada por:

$$(\partial_\alpha \partial^\alpha + m^2)A = 0, \tag{3.66}$$

assim, fica claro que o campo A obedece a uma equação de Klein-Gordon e o campo eletromagnético adquire uma massa m.

3.4.2 Equações de Maxwell-BF

Vamos agora tentar encontrar equações semelhantes às equações de Maxwell para o caso com fontes, como em (2.22), (2.23),(2.24) e (2.25). Para isso, primeiro vamos considerar as equações (3.58) e (3.60), só que na presença de fontes[22]:

$$d^*F = -mH + \frac{1}{c}J, \tag{3.67}$$

e

$$d^*H = mF. \tag{3.68}$$

Em teorias físicas é esperado que resultados de extensões a teorias bem estabelecidas recuperem fatos conhecidos. Podemos ver que a teoria de Maxwell-BF facilmente recupera a teoria de Maxwell, bastando para isso fazer m $\rightarrow 0$ nas equações acima.

Além disso, usando a mesma solução dada por (3.64) na equação (3.67) e a mesma condição de gauge utilizada para chegar em (3.66), ficamos com:[22]

$$d^{\dagger}F = \frac{1}{c}J - m^2 A_m, \tag{3.69}$$

onde

$$A_m \equiv A + \frac{d\varphi}{m} \tag{3.70}$$

é o quadripotencial vetor efetivo da teoria. Em termos desse potencial efetivo também podemos escrever um tensor de campo F_m efetivo, dado que:

$$F_m \equiv dA_m = dA = F, \tag{3.71}$$

assim, é conveniente escrever (3.69) como

$$d^{\dagger}F_m = \frac{1}{c}J - m^2 A_m. \tag{3.72}$$

Abrindo essa equação em componentes tensoriais, temos:

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c}\vec{j} - m^2 \vec{A}_m \tag{3.73}$$

e

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho - m^2 V_m. \tag{3.74}$$

Além disso, como mostrado em (3.71), o tensor de Faraday efetivo F_m é igual ao tensor F, de modo que as identidades de Bianchi continuam válidas e portanto as equações homogêneas não se alteram. Portanto, na teoria de Maxwell-BF, temos:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{3.75}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \tag{3.76}$$

Uma última observação a ser feita na teoria de Maxwell-BF é a respeito da equação de continuidade. Como explicado anteriormente, uma teoria física que deseja ser uma extensão de um modelo bem sucedido deve recuperar os sucessos do mesmo. Um fato conhecido do eletromagnetismo é a conservação da carga, expressada através da equação da continuidade para a densidade de corrente. Dessa forma, na teoria BF espera-se essa conservação se mantenha. Considerando isso, podemos supor que

$$d^{\dagger}J = 0. \tag{3.77}$$

Substituindo isso na equação (3.72), chegamos a

$$d^{\dagger}A + \frac{1}{m}d^{\dagger}d\varphi = 0. \tag{3.78}$$

Mais uma vez utilizando a fixação de *gauge* $d^{\dagger}A = m\varphi$ e o fato de que, por ser um escalar, $d^{\dagger}\varphi = 0$, temos:

$$(\partial_{\alpha}\partial^{\alpha} + m^2)\varphi = 0, \tag{3.79}$$

Assim, por consequência da exigência de conservação da carga (que é uma exigência completamente razoável dados os conhecimentos experimentais da teoria eletromagnética), o campo escalar φ também obedece a uma equação de Klein-Gordon.

Com isso terminamos os estudos a respeito da teoria de Maxwell-BF como uma generalização da teoria de Maxwell do eletromagnetismo. Foram obtidas as equações de movimento e recuperadas propriedades fundamentais, demonstrando que em uma redução de dimensionalidade o modelo BF tem propriedades semelhantes aos modelos de Chern-Simons e que no limite da massa tendendo a zero o modelo BF se reduz a teoria de Maxwell.

4 CONCLUSÃO

Nesse trabalho, começamos falando sobre a evolução dos formalismos utilizados na física, começando pelo formalismo vetorial utilizando principalmente para a mecânica Newtoniana e explicando a necessidade da mudança para um formalismo Lagrangiano para o tratamento de campos clássicos.

Posteriormente, definimos o formalismo das formas diferenciais e demonstramos propriedades e vantagens desse formalismo em relação ao formalismo vetorial e Lagrangiano, entre elas o fato de não depender nem da dimensionalidade nem das coordenadas do sistema em questão.

Utilizando os formalismos discutidos, mostramos as equações de Maxwell e debatemos sobre suas principais propriedades, entre elas a não existência de massa do fóton nesta teoria e a simetria por transformações de $gauge$. Logo em seguida, fizemos uma primeira tentativa de generalizar a teoria, adicionando um termo de massa a Lagrangiana através do modelo de Proca. Para esse modelo, mostramos como variavam as equações de Maxwell e que o campo de $gauge$ passava a obedecer uma equação de Klein-Gordon, explicando por quê dizemos que o fóton adquire uma massa nessa teoria.

Posteriormente, foi discutido o modelo de Chern-Simons acoplado com os termos do eletromagnetismo clássico. Encontramos as equações de Maxwell-Chern-Simons, verificando que a densidade de carga e a densidade de corrente são modificadas para densidades efetivas, visto que ocorre o surgimento de termos extras relacionados aos valores dos campos. Também foi explicado que teorias de Chern-Simons são restritas a variedades de dimensões ímpar.

Por fim, seguimos o mesmo procedimento para encontrar as equações do eletromagnetismo no modelo BF utilizando tanto o formalismo tensorial quanto o de formas diferenciais, assim como no restante do trabalho. Vimos que o modelo BF é uma generalização eficaz do modelo de Chern-Simons e provamos isso fazendo uma redução dimensional de um sistema de (3+1) dimensões para um sistema de (2+1) dimensões, encontrando uma Lagrangiana efetiva coerente com a teoria de Chern-Simons. Também foi mostrado como ocorre o surgimento de massa nesse modelo e como ficam as equações dos campos elétrico e magnético.

REFERÊNCIAS

[1] Frederick Reif. *Fundamentals of statistical and thermal physics*. Waveland Press, 2009.

[2] Lewis H Ryder. *Quantum field theory*. Cambridge university press, 1996.

[3] Herbert Goldstein, Charles Poole, and John Safko. Classical mechanics, 2002.

[4] Cornelius Lanczos. *The variational principles of mechanics*. Courier Corporation, 2012.

[5] João Barcelos Neto. *Matemática para físicos com aplicações: Vetores, tensores e spinores*. Livraria da Física, 2010.

[6] G.B. Arfken, H.J. Weber, and F.E. Harris. *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. Elsevier Science, 2011.

[7] Horatiu Năstase. *Classical field theory*. Cambridge University Press, 2019.

[8] Valery Rubakov. *Classical theory of gauge fields*. Princeton University Press, 2009.

[9] David J Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. American Association of Physics Teachers, 2005.

[10] Harley Flanders. *Differential forms with applications to the physical sciences by harley flanders*. Elsevier, 1963.

[11] Mikio Nakahara. *Geometry, topology and physics*. CRC press, 2003.

[12] José Maria Filardo Bassalo and Mauro Sérgio Dorsa Cattani. *Cálculo exterior*. Editora Livraria da Física, 2009.

[13] Márcio A M Gomes and R R Landim. Duality and field redefinition in three dimensions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(1):257–262, dec 2004.

[14] Gerald V Dunne. Aspects of chern-simons theory. In *Aspects topologiques de la physique en basse dimension. Topological aspects of low dimensional systems*, pages 177–263. Springer, 1999.

[15] Walter Greiner et al. *Relativistic quantum mechanics*, volume 2. Springer, 2000.

[16] David J Griffiths and Darrell F Schroeter. *Introduction to quantum mechanics*. Cambridge University Press, 2018.

[17] Wolfgang Rindler. Relativity: special, general, and cosmological, 2003.

[18] John David Jackson. Classical electrodynamics, 1999.

[19] AL Proca. Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs. *Journal de Physique et le Radium*, 7(8):347–353, 1936.

[20] R Kumar and Debmalya Mukhopadhyay. (3+ 1)-dimensional topologically massive 2-form gauge theory: geometrical superfield approach. *The European Physical Journal C*, 78(6):1–14, 2018.

[21] R Kumar and Amitabha Lahiri. Dimensional reduction of four-dimensional topologically massive gauge theory. *arXiv preprint arXiv:1507.05771*, 2015.

[22] Pedro Henrique Ferreira de Oliveira. Teorias de gauge topologicamente massivas: um ensaio sobre a teoria de maxwell-bf. 2020.