UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

INGRID VIEIRA SALDANHA

ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

FORTALEZA

2020

INGRID VIEIRA SALDANHA

ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção de título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S154e Saldanha, Ingrid Vieira.
Estratégias de resolução de problemas de otimização / Ingrid Vieira Saldanha. – 2020.
98 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2020.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Problemas de otimização. 2. Geometria. 3. Cálculo. 4. Médias. 5. Função Quadrática. I. Título.
CDD 510

INGRID VIEIRA SALDANHA

ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino da Matemática

Aprovada em: 18/12/2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ângelo Papa Neto
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Dedico este trabalho a Deus, que me deu forças para concluir este curso.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela vida, saúde, força e coragem na realização deste curso e deste trabalho.

A minha mãe Iracema, responsável pela minha formação inicial e continuada, pelo exemplo de pessoa forte e batalhadora.

A toda minha família pelo apoio e incentivo durante o período de estudo.

Ao meu esposo, Marcos Antônio, pela paciência, apoio e incentivo necessário dado para que eu não desistisse.

Agradeço aos professores da UFC por todo o aprendizado durante a realização desse curso, em especial ao meu orientador professor Dr. Marcelo Melo, responsável pelos momentos de aprendizagens durante as disciplinas do curso lesionadas por ele e pela orientação deste trabalho.

Aos colegas da turma PROFMAT 2018 que, de alguma maneira, estiveram ao meu lado durante os períodos de estudos e contribuíram para a conclusão deste curso.

“Resolver problemas é uma arte que tem que ser praticada, tal como nadar, esquiar, tocar piano: aprende-se imitando e praticando...”. (GEORGE PÓLYA)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar três estratégias para a resolução de problemas de otimização, envolvendo alguns conceitos geométricos como áreas de figuras planas e volume de sólidos geométricos. Apresentaremos um método com o uso do cálculo diferencial e, dois outros, sem o uso do cálculo. Para isso, inicialmente trataremos sobre os principais teoremas a respeito do cálculo e, em seguida, alguns conceitos de geometria, fundamentais para a resolução dos problemas que serão apresentados. A partir disso, serão abordadas duas estratégias de resolução, uma com o uso de valores de máximos e mínimos de uma função quadrática e, posteriormente, outra, através do uso da desigualdade das médias. Finalizaremos com a terceira estratégia, abordando problemas de caráter geométrico, utilizando os teoremas de cálculo apresentados no início. Para este trabalho, utilizou-se como metodologia, a pesquisa bibliográfica. Por meio dessa pesquisa, pudemos concluir que, apesar dos três artifícios apresentados, o cálculo toma grande importância para a resolução desse tipo de problema, já que existe uma grande quantidade de situações que não podem ser resolvidas através da desigualdade das médias, nem com o uso da função quadrática.

Palavras-chave: Problemas de Otimização. Geometria. Cálculo. Médias. Função Quadrática.

ABSTRACT

This work aims to present three strategies for solving optimization problems, involving some geometric concepts such as areas of flat figures and volume of geometric solids. We will present a method using differential calculus and two others without calculus. To do this, we will initially deal with the main theorems regarding calculus and then some concepts of geometry, fundamental for solving the problems that will be presented. From this, two resolution strategies will be approached, one using the values of maximum and minimum values of a quadratic function and, later, another, using the inequality of averages. We will end with the third strategy, addressing geometric problems, using the calculation theorems presented at the beginning. For this work, bibliographic research was used as methodology. Through this research, we were able to conclude that, in spite of the three artifices presented, the calculation takes on great importance to solve this type of problem, since there are a large number of situations that cannot be solved through the inequality of averages, nor with the use of the quadratic function.

Keywords: Optimization problems. Geometry. Calculation. Averages. Quadratic function.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Função contínua 18
Figura 2 – Interpretação geométrica de derivada 20
Figura 3 – Quadrado de lado 4, com área $4^2 = 16$ 28
Figura 4 – Retângulo 29
Figura 5 – Paralelogramo 29
Figura 6 – Paralelogramo contido no retângulo 30
Figura 7 – Área do triângulo 30
Figura 8 – Decomposição do trapézio em triângulo e paralelogramo..31
Figura 9 – Círculo de raio R..32
Figura 10 – Cubo unitário..33
Figura 11 – Paralelepípedo retângulo..34
Figura 12 – Princípio de Cavalieri..35
Figura 13 – Volume do prisma..36
Figura 14 – Planificação do prisma triangular..37
Figura 15 – Razão de semelhança entre as bases de uma pirâmide 37
Figura 16 – Pirâmides de mesma base e mesma altura 38
Figura 17 – Decomposição do prisma em três pirâmides de mesmo volume 39
Figura 18 – Pirâmide decomposta em pirâmides triangulares..40
Figura 19 – Cilindro 41
Figura 20 – Área lateral do Cilindro..41
Figura 21 – Cone 42
Figura 22– Volume do cone 42
Figura 23 – Superfície lateral de um cone..43
Figura 24 – Volume da esfera..44
Figura 25 – Gráfico da função $f(x) = ax^2$..48
Figura 26 – Gráfico de $f(x) = a(x-m)^2$ 48
Figura 27 – Gráfico da função $f(x) = a(x-m)^2 + k$..49
Figura 28 – Bloco retangular de papelão..50
Figura 29 – Paralelogramo inscrito no retângulo 50
Figura 30 – Triângulo isósceles..51
Figura 31 – Retângulo de área máxima..55
Figura 32 – Caixa de base quadrada..59

Figura 33 – Cilindro regular inscrito em uma esfera 59
Figura 34 – Área retangular 62
Figura 35 – Cilindro circular reto 62
Figura 36 – Cilindro regular inscrito em uma esfera de raio r 64
Figura 37 – Cone inscrito em uma esfera 66
Figura 38 – Horta retangular 68
Figura 39 – Retângulo inscrito 69
Figura 40 – Retângulo inscrito em um círculo 70
Figura 41 – Ilustração do problema 3 73
Figura 42 – Ilustração do problema 5 75
Figura 43 – Ilustração do problema 6 76
Figura 44 – Ilustração do problema 7 78
Figura 45 – Ilustração do problema 8 79
Figura 46 – Caixa dobrável 84
Figura 47 – Curral retangular 84
Figura 48 – Cone circular reto 85
Figura 49 – Ilustração do problema 4.3 90
Figura 50 – Quadrado inscrito em outro quadrado 91

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 13

2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE CÁLCULO 16

2.1 Limite e Continuidade de Funções 16

2.1.1 Limite 16

2.1.1.1 Limites Laterais 17

2.1.2 Continuidade 18

2.2 Derivada 19

2.2.1 Conceito de Derivada 19

2.2.2 Regras de Derivação 21

2.2.2.1 Regra da Cadeia 21

2.3 Estudo da Variação das Funções 23

2.3.1 Máximos e mínimos 23

2.3.1.1 Máximo e Mínimo Absoluto e Local 23

2.3.1.2 Principais Teoremas 24

2.3.2 Crescimento e decrescimento 26

3 CONCEITOS DE GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL 28

3.1 Áreas de polígonos 28

3.2 Volume 32

3.2.1 Volume do Cubo 33

3.2.2 Volume do paralelepípedo retângulo 34

3.2.3 Princípio de Cavalieri 35

3.2.4 Volume e Área de Sólidos Geométricos 35

3.2.4.1 Prisma 36

3.2.4.2 Pirâmide 37

3.2.4.3 Cilindro 41

3.2.4.4 Cone 42

3.2.4.5 Esfera 44

4 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO SEM O USO DO CÁLCULO 46

4.1 Função quadrática 46

4.1.1 Outras Aplicações 51

4.1.2 Problemas propostos 55

4.2 Estudo das Médias 55

4.2.1 Média Aritmética e Geométrica 56

4.2.2 Desigualdade das médias 56
4.2.3 Problemas Propostos 62
5 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO COM USO DO CÁLCULO 63
5.1 Resolução de problemas geométricos com uso do cálculo 63
5.2 Aplicações de problemas de otimização em outras áreas 71
5.3 Problemas Propostos 84
6 CONCLUSÃO 86
REFERÊNCIAS 87
APÊNDICE A – RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS PROPOSTOS 89

1 INTRODUÇÃO

A otimização é um ramo da matemática que se preocupa com a obtenção das condições que dão o valor extremo de uma função sob determinadas circunstâncias. Em outras palavras, ela pode ser definida como o processo de encontrar o valor máximo ou mínimo de uma função.

Os problemas de otimização são aqueles para os quais envolvem o processo de encontrar a melhor solução para um problema. Nas palavras de Stewart (2013), existem diversas áreas do conhecimento onde podemos aplicar esse tipo de problema, dentre elas: indústria, comércio, geometria, física, economia, medicina, etc. Na Física, por exemplo, podemos ter aplicações quando desejamos minimizar o tempo para se fazer um determinado percurso; na química, pode ser utilizada na procura das melhores condições para a realização de um experimento; na economia pode ser aplicada para se procurar o lucro máximo ou o custo mínimo. Sem falar nas situações do cotidiano onde buscamos encontrar a melhor escolha, como na minimização dos custos na produção de uma embalagem, na busca de um caminho mais curto, ou do menor tempo para se realizar uma determinada atividade.

Desde a Grécia Antiga até hoje, pesquisas matemáticas demonstram um grande interesse no estudo dos problemas de otimização. Antigamente, a resolução desses problemas estava relacionada a estudos geométricos, como aponta Santiago (2013, p. 1) a primeira obra histórica onde se identifica os problemas de otimização foi bem anterior ao desenvolvimento do cálculo diferencial, pode-se encontrar anotações na obra Elementos, de Euclides, datada do século V a.C..

> Um dos mais antigos exemplos na história da Matemática é de natureza geométrica, o chamado problema isoperimétrico clássico que pode ser descrito da seguinte maneira: “achar, dentre as curvas planas fechadas de um dado comprimento, aquela que abarca a maior superfície” Os matemáticos gregos tentaram resolver este problema desde o século V a.C. quando formularam e resolveram vários problemas extremais que se refletiram nos Elementos de Euclides e nas obras de Arquimedes e Apolônio. (FEITOSA, 2015 p. 15)

Ao passar dos anos, muitos matemáticos foram se interessando por esses tipos de problemas, e desenvolveram outras ferramentas para resolvê-los. Uma delas é a utilização do Cálculo Diferencial. De acordo com Eves (2011, p. 11), pode-se dizer que o cálculo diferencial se originou de problemas relativos ao traçado de gráfico de curvas e de alguns problemas que tinham como objetivo encontrar os valores de máximos e mínimos de uma determinada função.

Vários matemáticos contribuíram para o desenvolvimento do cálculo diferencial, mas conforme Eves (2011, p. 429), “embora essas considerações remontem aos gregos antigos, parece razoável afirmar que a primeira manifestação realmente clara do método diferencial se encontra em algumas ideias de Fermat[1], expostas em 1629”.

> Com o desenvolvimento do cálculo a forma de resolver esses problemas foi se tornando mais simples e eficiente, ou seja, antes as demonstrações eram extremamente construtivas repetitivas e extensas. Hoje, passaram a ser mais curtas e diretas. E essa evolução aconteceu principalmente após a utilização do conceito de derivadas e sua aplicação ao cálculo de máximos e mínimos de uma função. (FILHO, 2016, p. 48).

De acordo com RPM,76, esses problemas caracterizam-se por não mostrarem em seu enunciado a função a ser otimizada, fazendo assim com que o leitor coloque em evidência seus conhecimentos prévios e suas habilidades de resolver problemas matemáticos. O que pode ser confirmado por Stewart (2013, p. 294) “Na solução destes problemas práticos, o maior desafio está em converter o problema em um problema de otimização matemática, determinando a função que deve ser maximizada ou minimizada. ”

O objetivo deste trabalho é apresentar três estratégias de resolução de problemas de otimização que surgem no campo de estudo da geometria, ou seja, problemas de otimização de caráter geométrico. Conforme Feitosa (2015, p. 25), os problemas geométricos de otimização, são aqueles onde se procuram valores máximos e mínimos de determinadas grandezas associadas a objetos geométricos. Por exemplo, segmentos, ângulos, áreas ou volumes de medida máxima ou mínima, no contexto de uma determinada situação-problema de caráter geométrico.

Podemos citar alguns exemplos de problemas como a determinação da maior área possível de um terreno, ou da maior superfície de um solido geométrico, especificamente, relacionados a maximização e minimização de área e volumes. Apesar dos problemas geométricos tomarem o maior foco deste trabalho, também apresentaremos algumas aplicações em outras áreas, como na Física, na Economia e na Natureza, por exemplo.

Para a resolução desses problemas, utilizaremos três estratégias de resolução, sendo elas: o *Teorema da Desigualdade das Médias*, o uso dos valores de máximo e mínimo de uma função quadrática e o conceito de derivada.

---

[1] Pierre Fermat (1601-1665), um advogado francês que tinha por passatempo favorito a matemática. Apesar de seu amadorismo, Fermat foi, junto com Descartes, um dos inventores da geometria analítica. Seus métodos para encontrar as tangentes às curvas e os valores máximo e mínimo (antes da invenção de limites e derivadas) fazem dele um precursor de Newton na criação do cálculo diferencial. (Stewart, 2012, p. 150).

Utilizamos como metodologia o estudo, a análise e síntese da referência bibliográfica. O texto está organizado em quatro capítulos. O primeiro está separado em três seções, que trazem os conceitos de limite, continuidade e principalmente de derivada e suas principais regras de derivação, além de trazer os conceitos relacionados a pontos máximos, mínimos e os principais teoremas sobre os sinais da derivada. Também aborda os testes de primeira e segunda derivada.

O capítulo 2 está divido em duas seções, a primeira delas traz um resumo sobre os principais conceitos de áreas de algumas figuras planas, já a segunda seção apresenta os conceitos de volumes de sólidos geométricos que serão essenciais para a resolução da maioria dos problemas abordados.

O terceiro capítulo está dividido em duas seções, a primeira aborda os conceitos de função quadrática, estudo dos pontos de máximo e mínimo da função e uma breve análise sobre o seu gráfico. Também apresentamos problemas de otimização de caráter geométrico e algumas aplicações em outras áreas. A segunda seção refere-se a uma alternativa de resolução através da desigualdade das médias, para isso são enunciados os conceitos de média aritmética, média geométrica e o teorema da desigualdade das médias. Também apresentamos alguns problemas que podem ser resolvidos através desse método.

O quarto capítulo, por sua vez, está dividido em três seções, a primeira delas, aborda o método de resolução através do uso do Cálculo Diferencial. Nesse capítulo, utilizaremos os conceitos, teoremas e definições apresentados nos Capítulos 1 e 2 para resolver alguns problemas geométricos de otimização. A segunda seção apresenta aplicações dos problemas de otimização em outras áreas como: na Natureza, Física e outras. Já a terceira seção traz uma lista de problemas propostos ao leitor.

2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE CÁLCULO

Este capítulo, com base principalmente em STEWART (2013) e THOMAS (2012) está dividido em três seções. Na primeira delas, apresentamos os conceitos de Limite e Continuidade, na segunda apontamos os conceitos de derivada e alguns teoremas que estabelecem uma ligação entre a derivada de uma função e o seu crescimento e decrescimento. Na terceira seção será exposto um estudo sobre o crescimento e decrescimento de funções. Esses pré-requisitos serão utilizados para a resolução dos problemas de otimização, abordados no último capítulo deste trabalho.

2.1 Limite e Continuidade de Funções

Entender as noções de limite e continuidade é essencial para a compreensão dos conceitos fundamentais de derivada que é um conteúdo muito importante na resolução de problemas de otimização.

2.1.1 Limite

Inicialmente, vamos abordar uma definição intuitiva de limite.

Suponha que $f(x)$ seja definida em um intervalo aberto em tomo de a, exceto, possivelmente, em a. Se $f(x)$ está arbitrariamente próxima a L (tão próxima de L quanto queiramos) para todo x próximo de a, dizemos que f se aproxima do limite L quando x se aproxima de a, e escrevemos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Lemos: "o limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a L".

Segundo Thomas (2012, p. 62), essa definição afirma que os valores de $f(x)$ estão próximos do número L sempre que x estiver perto de a (em qualquer lado de a).

Essa definição é informal, pois as frases “arbitrariamente próximo” e “suficientemente próximo” são imprecisas e seus significados dependem do contexto do problema. Por isso, se faz necessária a apresentação de uma definição formal, como veremos a seguir:

Definição 1: Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de a, exceto talvez em a. Dizemos que o limite de $f(x)$, conforme x se aproxima de a, é um número L, e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se para cada número $\epsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$, tal que, para todo valor de x, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Teorema 1: Uma função $f(x)$ terá limite quando x se aproxima de a, se e somente se tiver um limite lateral à direita e um à esquerda, e os dois limites laterais forem iguais, ou seja: $\lim_{x \to a} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L \; e \; \lim_{x \to a^+} f(x) = L$.

2.1.1.1 Limites Laterais

Definição 2. *Limite lateral à direita.* Dizemos que $f(x)$ tem um limite à direita L em a e escrevemos $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ se para qualquer número $\epsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$, de maneira que, para todos os valores de x, $a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Definição 3. *Limite lateral à esquerda.* Dizemos que $f(x)$ tem um limite à esquerda L em a e escrevemos $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ se para qualquer número $\epsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$, de maneira que, para todos os valores de x, $a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

A seguir, apresentamos o *Teorema do Confronto* que também é conhecido como *Teorema Sanduíche*, usamos esse teorema quando não podemos obter diretamente o limite de uma função f, mas podemos obtê-lo indiretamente quando o valor de f está limitados entre os valores de outras duas funções g e h.

Teorema 2. Sejam $g, f \; e \; h \; (a, b) \to \mathbb{R}$. Se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para qualquer $x \in (a, b)$ em um intervalo aberto, contendo c, exceto em $x = c$. Se supomos que $\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$, então $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

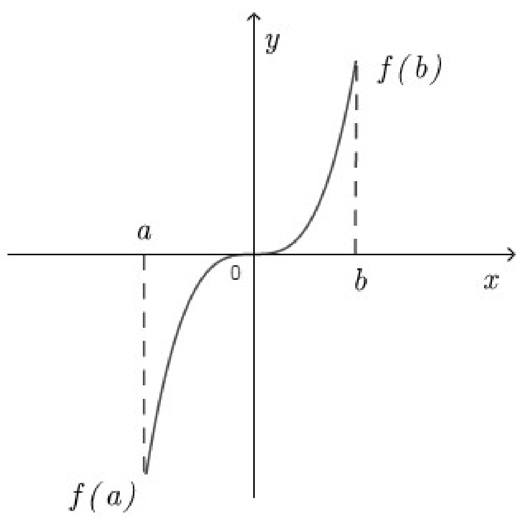
Demonstração: Dado arbitrariamente um $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$, então existe $\delta > 0$, tal que $0 < |x - c| < \delta$, então $L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \;\; e \;\; L - \varepsilon < h(x) <$

$L + \varepsilon$. Daí, sabemos que $L - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$. Então $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$, que equivale dizer que $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

2.1.2. Continuidade

Informalmente podemos dizer que uma função é contínua quando seu gráfico não apresenta interrupções, ou seja, seu gráfico pode ser traçado sem que o lápis se afaste do papel.

Figura 1 – Função contínua



Fonte: elaborada pela autora.

Uma definição formal é dada a seguir.

Definição 4. Uma função f é contínua no ponto a se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Para a função ser contínua num ponto a é necessário que este ponto pertença ao domínio da função. Daí decorre que se f é contínua em a, então três condições deverão ser satisfeitas:

1. $f(a)$ está definida (isto é, a está no domínio de f).
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Assim, para que uma função f seja contínua em um ponto $x = a$ é necessário que a função esteja definida em a e que os valores de $f(x)$ para x próximos de a, estejam próximos de $f(a)$.

2.2 Derivada

Esta seção apresenta o conceito de Derivada, que é muito importante, não só na Matemática, mas em várias outras áreas. A derivada de uma função é a ideia central do Cálculo Diferencial. Abordaremos sua aplicação para descobrir os valores de máximo e mínimo de uma função, pois esses conceitos serão muito importantes na resolução dos problemas de otimização.

2.2.1 Conceito de Derivada

Definição 5: A derivada de uma função f em um ponto a, denotada por $f'(a)$ é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Se o limite existe, dizemos que f é derivável no ponto a.

Conforme Thomas (2012, p. 121), podemos afirmar que o domínio de f' é o conjunto de pontos do domínio de f para o qual o limite existe; ele pode ser menor ou igual ao domínio de f. Se f' existe para determinado valor de x podemos dizer que f é derivável em x, mas se f' existe em qualquer ponto no domínio de f, então dizemos que f é derivável.

Se escrevermos $x = a + h$ então $h = x - a$, e h tende a 0 se, e somente se, x tende a a, a derivada de f torna-se

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

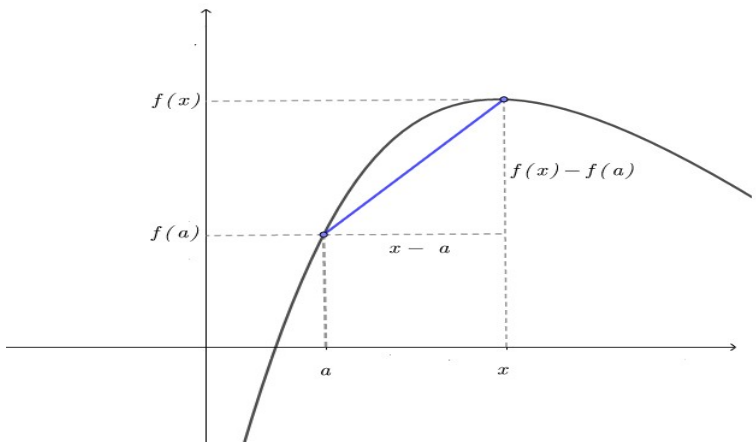
Que é uma maneira equivalente de se calcular a derivada de uma função f.

Uma Interpretação geométrica da derivada

A derivada de uma função f pode ser interpretado geometricamente como a inclinação ou coeficiente angular da secante ao gráfico de f que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$. Se fizermos os valores de x se aproximarem do valor de a, a reta que passará pelo ponto $(a, f(a))$ terá inclinação igual a $f'(a)$ e será tangente ao gráfico de f.

$$m = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Figura 2 – Interpretação geométrica de derivada



Fonte: elaborada pela autora.

Teorema 3. Diferenciabilidade implica continuidade. Se f tem uma derivada em $x = c$ então f é contínua em $x = c$.

Demonstração: Se f é contínua em c, então devemos mostrar que $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Por hipótese, temos que

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Inicialmente vamos dividir e multiplicar $f(x) - f(c)$ por $(x - c)$

$$f(x) - f(c) = \frac{f(x) - f(c)}{(x - c)} . (x - c).$$

Assim, podemos escrever

$$\lim_{x \to c} f(x) - f(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} (x - c)$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} . \lim_{x \to c} (x - c)$$

$$= f'(c). 0 = 0$$

Agora, utilizando o fato de que $f(x) = f(x) - f(c) + f(c)$, então,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} [f(x) - f(c) + f(c)]$$

$$= \lim_{x \to c} [f(x) - f(c)] + \lim_{x \to c} f(c)$$

$$= 0 + \lim_{x \to c} f(c)$$

$$= f(c)$$

Sendo assim, provamos que $f(x)$ é contínua em c.

A recíproca desse teorema é falha, pois existem funções que são contínuas, mas não são diferenciáveis.

2.2.2 Regras de Derivação

Aqui, apresentaremos as regras de derivação usuais, isto é, fórmulas que relacionam as derivadas de duas funções deriváveis dadas com as derivadas de certas funções, obtidas a partir das funções iniciais. Segundo Stewart (2013, p. 157) as regras de derivação nos permitem calcular com relativa facilidade as derivadas de uma função sem ter que calcular quaisquer limites diretamente.

Proposição 1. *Derivada da função constante:* Seja k uma constante e $f(x) = k$. para todo x, temos, $f'(x) = 0$.

Proposição 2. *Derivada da função potência:* Seja n um número inteiro e $f(x) = x^n$, temos que $f'(x) = nx^{n-1}$

Proposição 3. Se $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções deriváveis em $x \in \mathbb{R}$, então:

1. $f \pm g$ é derivável em x, com

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x).$$

2. fg é derivável em x, com

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

3. Se $g(x) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ é derivável em x, com

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

2.2.2.1 Regra da Cadeia

O teorema a seguir é conhecido como a regra da cadeia e estabelece que a derivada de $f(g(x))$ é $f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Em outras palavras, ele auxilia no cálculo da derivada de funções compostas.

Teorema 4. Se g for derivável em x_0 e f for derivável em $g(x_0)$, então a função composta $F = f \circ g$ definida por $F(x_0) = f(g(x_0))$ é derivável em x_0 e F' é dada pelo produto

$$F'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big).g'(x_0).$$

Demonstração: Precisaremos da definição de derivada e de continuidade para a demonstração da regra da cadeira. Pela hipótese, se x_0 pertence ao domínio de g e $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ é o número real $g'(x_0)$, então $g(x_0)$ pertence ao domínio de f, logo $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(a) - f(g(x_0))}{a - g(x_0)}$ é o número real $f'(g(x_0))$. Assim, x_0 pertence ao domínio de $f \circ g$.

Seja h definida no mesmo domínio de f dada por

$$h(a) = \begin{cases} \dfrac{f(a) - f(g(x_0))}{a - g(x_0)}, a \neq g(x_0) \text{ } no \text{ } domínio \text{ } de \text{ } f; \\ f'\big(g(x_0)\big), a = g(x_0) \text{ } no \text{ } domínio \text{ } de \text{ } f \text{ }. \end{cases}$$

Dessa forma,

$$\lim_{a \to g(x_0)} h(a) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(a) - f(g(x_0))}{a - g(x_0)} = f'g(x_0) = h\big(g(x_0)\big).$$

Ou seja, podemos afirmar que h é contínua em $g(x_0)$ e, dessa forma, $h \circ g$ também é contínua em x_0. Portanto, temos

$$h(a) = \frac{f(a) - f(g(x_0))}{a - g(x_0)},$$

para todo $a \neq g(x_0)$ no domínio de f, ou seja $f(a) - f(g(x_0)) = h(a)\,(a - g(x_0))$ para todo a pertencente ao domínio de f.

Dessa forma, $f(g(x)) - f(g(x_0)) = h(g(x)).(g(x) - g(x_0))$ para todo x pertencente ao domínio de $f \circ g$. Assim, temos

$$\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = (h \circ g)(x).\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

para todo $x \neq x_0$ no domínio de $f \circ g$. Portanto,

$$\lim_{x \to p} \frac{(f \circ g)(x) - f\big(g(x_0)\big)}{x - x_0} = (h \circ g)(x).g'(x_0) = f'(g(x_0)).g'(x_0).$$

Ou seja, $f \circ g$ é diferenciável em x_0 e vale

$$(f \circ g)'(x_0) = f''\big(g(x_0)\big).g'(x_0)$$

Algumas funções admitem ser deriváveis mais de uma vez. De acordo com Stewart (2013, p. 145), se f for uma função diferenciável, então sua derivada f' também é uma função, de modo que f' pode ter sua própria derivada, denotada por f''. Esta nova função f'' é chamada de segunda derivada ou derivada de ordem dois de f.

Pode-se seguir o mesmo raciocínio para f'' que se possuir derivada será f''' e chamada de terceira derivada de f. Se f for n vezes derivável, obtemos a n-ésima derivada de f e podemos denotar por f^n.

2.3 Estudo da Variação das Funções

2.3.1 Máximos e mínimos

Apresentaremos as definições de valor máximo e valor mínimo de uma função. Esses valores também são chamados de valores extremos ou, simplesmente, extremos da função. Thomas (2012, p. 212) afirma que podemos localizar e identificar esses valores extremos (máximo ou mínimo) de uma função a partir de sua derivada. Uma vez que consigamos fazer isso, poderemos resolver uma série de problemas de otimização.

2.3.1.1 Máximo e Mínimo Absoluto e Local

Máximo absoluto (ou mínimo absoluto) também é chamado de máximo global (ou mínimo global).

Definição 6. Seja f uma função derivável, definida para todo x em certo intervalo D .
1. Um número real M, quando existe, é denominado de *valor máximo absoluto* (ou meramente máximo) da função f para x no intervalo D quando $f\ (x)\ \leq\ M$ para todo $x\ \in\ D$.
2. Um número real m, quando existe, é denominado de *valor mínimo absoluto* (ou meramente mínimo) da função f para x no intervalo $D, m\ \leq\ f\ (x)$ para todo $x\ \in\ D$.

Definição 7. *Máximo e mínimo Local*
1. O número $f(c)$ é um valor *máximo local* de f se $f(c)\ \geq f(x)$ quando x está próximo de c.
2. O número $f(c)$ é um valor *mínimo local* de f se $f(c)\ \leq f(x)$ quando x está próximo de c.

Definição 8. Seja f uma função contínua definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Se f assume seu máximo ou mínimo em um ponto $x = c$ no intervalo aberto (a, b), então ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

2.3.1.2. Principais Teoremas

Teorema 5. O *Teorema do Valor Extremo* Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em certos números c e d em $[a, b]$.

O teorema enunciado acima alega que uma função f que seja contínua em todo ponto de um intervalo fechado $[a, b]$ tem um valor máximo absoluto e um mínimo absoluto no intervalo. Ele será muito importante para a demonstração de teoremas que serão apresentados posteriormente. A demonstração será omitida por envolver noções de topologia o que foge do objetivo deste trabalho.

Teorema 6: *Teorema de Fermat.* Seja $f(a, b) \to \mathbb{R}$ derivável e c um ponto de máximo ou mínimo local de f em (a, b), então $f'(c) = 0$.

Demonstração: Demonstraremos para o caso de máximo local, para o caso de mínimo local a demonstração será análoga. Vamos supor que f tem um máximo local c. Então de acordo com a Definição 7, $f(c) \geq f(x)$ se x for suficientemente próximo de c. Isso implica que, se h for suficientemente próximo de 0, com h sendo positivo ou negativo então,

$$f(c) \geq f(c + h)$$

E, portanto

$$f(c + h) - f(c) \leq 0$$

Vamos dividir ambos os lados da desigualdade por um número positivo. Assim, se $h > 0$ e h for suficientemente pequeno, temos

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

Se tomarmos o limite à direita de ambos os lados dessa desigualdade, obtemos

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq \lim_{h \to 0^+} 0 = 0.$$

Se $f'(c)$ existe, temos:

$$f'(c) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Assim, mostramos que $f\,'(c) \leq 0$.

Se $h < 0$, então $f(c + h\,) - \ f(c) \geq 0$, se dividirmos por h, temos

$$\frac{f(c+h\,)-\ f(c)}{h} \geq 0 \ \ e\, h < 0$$

Portanto, se tomarmos o limite à esquerda, obtemos

$$f'(c) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0.$$

Concluímos que $f'(c) \geq 0$ e que $f'(c) \leq 0$. Como as duas desigualdades devem ser verdadeiras, isso implica que $f'(c) = 0$.

Teorema 7. *Teorema de Rolle.* Dada uma função contínua f definida em um intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), se $f(a) = f(b)$, então existe algum ponto c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração: Dividiremos a demonstração em três etapas:

1 - Se $f(x) = k$, ou seja, se f é uma função constante.

Nesse caso $f\,'(x) = 0$, logo o número c pode ser tomado em qualquer número em (a, b).

2 - Se $f(x) > f(a)$, para algum $x \in (a, b)$

Pelo $Teorema\ do\ Valor\ Extremo$, f tem um valor máximo em algum ponto de $[a, b]$. Dado que $f(a) = f(b)$ ela deve assumir esse valor máximo em um número c no intervalo aberto (a, b). Então f tem um máximo local em c e, por f ser diferenciável em (a, b), f é diferenciável em c. Logo $f\,'(c) = 0$ pelo *Teorema de Fermat*.

3 - Se $f(x) < f(a)$, para algum x em (a, b).

Pelo *Teorema do Valor Extremo*, f tem um valor mínimo em algum ponto de $[a, b]$. Se $f(a) = f(b)$ ela deve assumir esse valor mínimo em um número c no intervalo aberto (a, b). Assim, $f'(c) = 0$, pelo *Teorema de Fermat*.

Teorema 8. *Teorema do Valor Médio.* Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$ e f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b). Então existe um ponto $c \in (a, b)$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração: Seja $g: [\text{a}, \text{b}] \to \mathbb{R}$ uma função dada por $g(x) = f(x) - \left[\left(\frac{b-x}{b-a}\right) f(a) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right) f(b)\right]$, $\forall\, x \in [a, b]$. Podemos observar que $g(x)$ é contínua em $[a, b]$, pois se trata de uma soma de funções contínuas. Como $x \in [a, b]$, $g(x)$ é diferenciável em (a, b) e $g(a) = g(b) = 0$. Pelo *Teorema de Rolle* existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Calculando a derivada de g, obtemos que $g'(x) = f'(x) - \left(-\frac{f(a)}{b-a} + \frac{f(b)}{b-a}\right) = f'(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$. Como $g'(c) = 0$, temos $0 = g'(c) = f'(c) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

2.3.2 Crescimento e decrescimento

Vimos que a representação geométrica de uma derivada é a inclinação ou coeficiente angular da curva f no ponto $(x, f(x))$, ou seja, a derivada nos informa para qual direção a curva segue em cada ponto. Sendo assim, ela pode nos oferecer algumas informações sobre f, pode nos informar quando a função cresce ou decresce. A proposição a seguir mostra que f cresce quando $f'(x)$ é positiva e decresce quando $f'(x)$ é negativa, ou seja, relaciona o crescimento e decrescimento da função com sua derivada

Proposição 4. Seja f contínua em $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b), então:

1. Se $f'(x) > 0, \forall\, x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$.
2. Se $f'(x) < 0, \forall\, x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$.

Teorema 9. *Teste da Primeira derivada.* Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$ derivável em (a, b), exceto possível em $c \in [a, b]$.

1. $f'(x) > 0$, $\forall\, x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem um máximo relativo em c.
2. $f'(x) < 0$, $\forall\, x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem um mínimo relativo em c.

Demonstração:

1. De acordo com o Teorema 6, podemos afirmar que f é crescente em $[a, c]$ e decrescente em $[c, b]$. Por consequência, temo $f(x) > f(c)$ para todo $x \neq c$ em (a, b) e assim f tem um mínimo relativo em c.

2. De acordo com o Teorema 6, podemos afirmar que f é decrescente em $[a, c]$ e crescente em $[c, b]$. Por consequência, $f(x) > f(c)$ para todo $x \neq c$ em (a, b) e assim, f tem um mínimo relativo em c.

Teorema 10. *Teste da Segunda Derivada.* Se $f(x)$ é uma função contínua e derivável, cuja derivada $f'(x)$ também é derivável no intervalo (a, b) e ainda $f'(x)$ e $f''(x)$ contínuas em $(a\ b)$. Se c pertence a (a, b), tal que $f'(c) = 0$, então:

1. Se $f''(c) < 0$, então c é ponto de máximo local em $x = c$.

2. Se $f''(c) > 0$, então c é ponto de mínimo local em $x = c$.

Demonstração: 1. Por hipótese, $f''(c) = \lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0$ e, como $f'(c) = 0$, temos que $f''(c) = \lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c} < 0$. Portanto, para os valores de x próximos de c, temos que $\frac{f'(x)}{x-c} < 0$, ou seja, existem $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < c < b$ em (a, b), tais que $\frac{f'(x)}{x-c} < 0$, $\forall x \in (a, b)$, com $x \neq c$. Como $x - c < 0$, $\forall\, x \in (a, c)$, obtemos que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, c)$. Em contrapartida, como $x - c > 0$, $\forall x \in (c, b)$, obtemos que $f'(x) < 0$, $\forall x \in (c, b)$. Pelo Teste da Derivada Primeira, concluímos que f possui um máximo relativo em $x = c$. O segundo caso pode ser demonstrado de forma análoga.

O *Teste da Segunda Derivada* funciona para identificar máximos e mínimos relativos. Ele se torna inconclusivo quando $f''(c) = 0$, ou seja, esse ponto pode ser um máximo, um mínimo ou nenhum dos dois. Esse teste também falha quando $f''(c)$ não existe. Nesses casos o Teste da Primeira Derivada deve ser usado, pois mesmo quando os dois testes são adequados, o Teste da Primeira da Derivada é frequentemente mais fácil de se aplicar.

3 CONCEITOS DE GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL

Neste capítulo trazemos alguns conceitos importantes em geometria que serão utilizados na resolução dos problemas propostos nos capítulos seguintes. A primeira seção aborda o conceito de área de polígonos, a segunda trata do conceito de poliedros e o princípio de Cavalieri, já a terceira e última seção, aborda os conceitos de volume de alguns sólidos geométricos. Este capítulo é baseado principalmente nas definições de Lima (2006), Lima (2016) e Lima (2009).

3.1. Áreas de polígonos

De acordo com Lima (2006, p. 89) o cálculo da área de polígonos deve seguir os seguintes axiomas:

1. Podemos associar a cada polígono P um número real positivo chamado área de P;
2. Polígonos congruentes têm áreas iguais;
3. Se P é um quadrado de lado unitário então a área de $P = 1$;
4. Se P é um polígono que pode ser decomposto como reunião de n polígonos $P_1, \ldots P_n$ tais que dois quaisquer deles têm em comum, no máximo, alguns lados, então a área de P é a soma das áreas dos P_i.

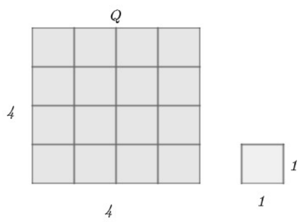
Como consequência da regra 4, pode-se concluir que se o polígono P está contido no polígono Q, então a área de P é menor do que a área de Q.

A partir dessas proposições iremos deduzir as fórmulas das áreas do quadrado, do retângulo, do paralelogramo, do triângulo e do trapézio.

Quadrado

Um quadrado de lado l tem área l^2

Figura 3 – Quadrado de lado 4, com área 4² = 16



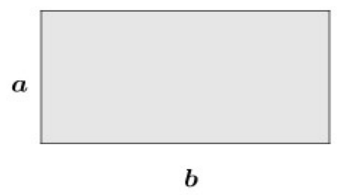
Fonte: elaborada pela autora.

Um quadrado Q que possui lado de medida l, onde $l \in \mathbb{Z}$, pode ser decomposto em l^2 quadrados justapostos, ao traçar paralelas aos seus lados. Cada um desses quadrados possui lado unitário, logo, pela regra 3, sua área será igual a 1. Portanto, a área do quadrado será igual a $l^2.1 = l^2$. A demonstração para um certo $l \in \mathbb{R}$ pode ser encontrada no livro "Medida e forma em Geometria", de Elon L. Lima.

Retângulo

Um retângulo de lados a e b tem área ab

Figura 4 – Retângulo



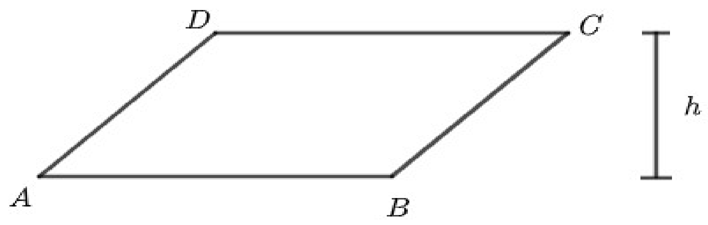
Fonte: elaborada pela autora.

Se os lados de um retângulo possuem como medidas os números naturais a e b, então podemos decompor esse retângulo, ao traçarmos paralelas aos seus lados, em ab quadrados unitários, onde a área de cada um desses quadrados será iguala a 1. Logo a área do retângulo será dada por $ab.1 = ab$. Portanto, a área do retângulo é dada pelo produto da base pela altura. A demonstração para o caso onde a e b são números racionais pode ser encontrada em "Medida e forma em Geometria", de Elon L. Lima.

Paralelogramo

A área de um paralelogramo de base a e altura h é igual a ah.

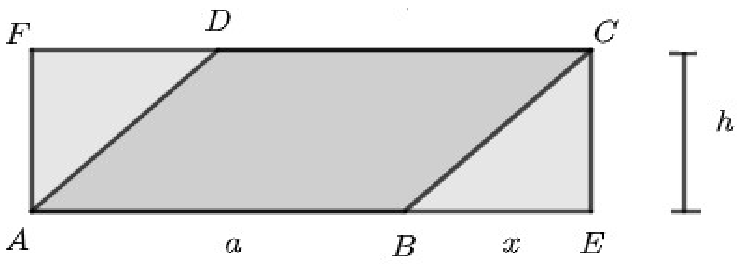
Figura 5 – Paralelogramo



Fonte: Lima, 2006.

Dado o paralelogramo acima de base a e altura h, vamos considerar o retângulo $AECF$ da figura a seguir que contêm o paralelogramo. Sendo $BE = x$, temos que a área do paralelogramo será igual a área do retângulo $AECF$ subtraída das áreas dos dois triângulos, BEC e AFD.

Figura 6 – Paralelogramo contido no retângulo



Fonte: elaborada pela autora, baseada em Lima, 2006.

Portanto, temos que

$$S(ABCD) = S(AECF) - S(BEC) - S(AFD)$$

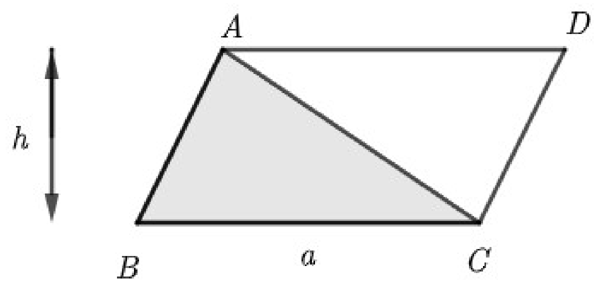
$$S(ABCD) = (a + x).h - \frac{xh}{2} - \frac{xh}{2} = ah + xh - xh = ah$$

Logo, a área do paralelogramo será igual ao produto de sua base pela altura.

Triângulo

Um triângulo de base a e altura h tem área $\frac{ah}{2}$.

Figura 7 – Área do triângulo



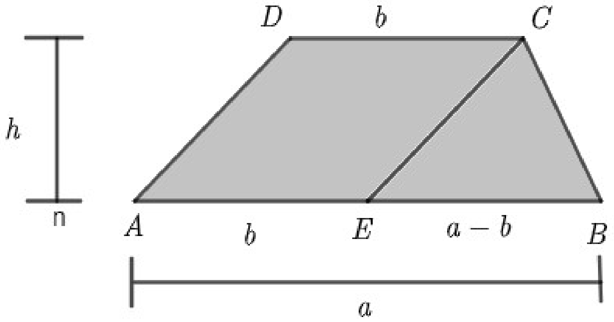
Fonte: elaborada pela autora, baseada na figura de Lima (2006, p. 88)

Para calcular a área do triângulo ABC da figura, vamos escolher o lado de medida a como base do triângulo, a altura relativa à base a, chamaremos de h. Se traçarmos uma reta paralela ao lado BC, passando pelo vértice A e outra reta paralela ao lado AB passando por C, obtemos o paralelogramo $ABCD$. Então, a área do triângulo ABC é a metade da área do paralelogramo $ABCD$.

Trapézio

Dado o trapézio $ABCD$ da figura abaixo, onde $AB = a$, $CD = b$ e altura h. Se traçarmos o segmento CE paralelo a AD, o trapézio $ABCD$ fica divido em duas figuras que já conhecemos a área, sendo elas: o paralelogramo $AECD$ e o triângulo CEB. Se somarmos as duas áreas, obtemos a área do trapézio.

Figura 8 – Decomposição do trapézio em triângulo e paralelogramo.



Fonte: elaborada pela autora, baseada na figura de Lima (2006, p. 88)

$$S = bh + \frac{(a-b).h}{2} = \frac{2bh + ah - bh}{2} = \frac{(a+b)h}{2}.$$

A área do trapézio é, portanto, o produto da base média[2] pela altura.

$$S = \frac{(a+b)h}{2}$$

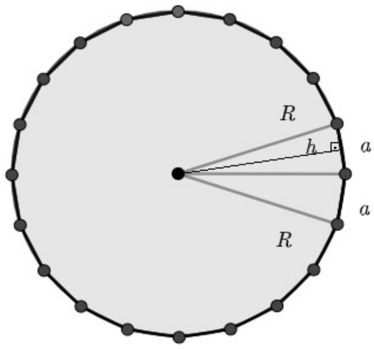
Segundo CAMINHA (2013, p. 184), o cálculo da área de um polígono poderá ser realizado de forma simples a partir das informações apresentadas até aqui, pois poderá ser calculada a partir da sua decomposição em triângulos, quando se traçam as diagonais de um polígono a partir de um dos vértices. Em seguida, é só calcular a área de cada triângulo obtido e somar as suas áreas, obtendo assim a área do polígono desejado.

[2] A base média de um trapézio é o segmento que une os pontos médios dos lados e é paralelo às bases. Sua medida é dada pela média aritmética das bases.

Área do círculo

Segundo Lima *et. al.* (2006, p. 101), a área do círculo é um número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos regulares inscritos, ou seja, se pegarmos um polígono regular com n lados (considerar n um número bem grande), inscrito em uma circunferência de raio R. Dividindo esse polígono em triângulos isósceles iguais, todos com vértices no centro da circunferência, cada triângulo tem dois lados iguais a R, um lado igual a a , lado do polígono, e altura h relativa a essa base.

Figura 9 – Círculo de raio R.



Fonte: elaborada pela autora.

A área desse polígono será dada por

$$A_n = n.\frac{ah}{2} = \frac{(na)h}{2} = \frac{p_n.h}{2}$$

Onde p_né o perímetro do polígono. Quando n cresce indefinidamente, $p_n$tende ao comprimento da circunferência, dado por $2\pi R$ e h tende ao raio da circunferência, assim, a área do círculo é dada por:

$$S = \frac{2\pi R.R}{2} = \pi R^2$$

3.2 Volume

Intuitivamente, calcular o volume de um sólido é o mesmo que calcular a quantidade de espaço por ele ocupado. Para exprimir essa "quantidade de espaço" através de um número, devemos compará-lo com uma unidade, para isso, devemos adotar uma unidade de medida, e verificar quantas vezes essa unidade está contida no objeto. O resultado dessa comparação é chamado de volume. Utilizaremos as seguintes proposições para o cálculo do volume:

1. Adotaremos como a unidade de volume o cubo de aresta 1.

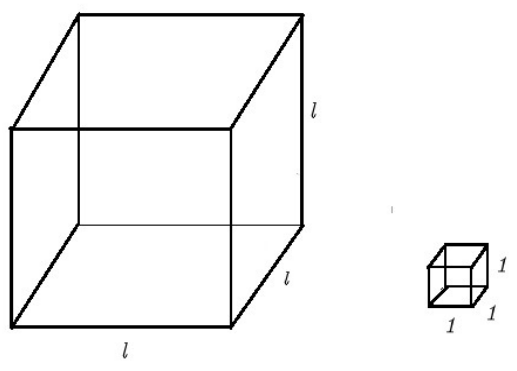
2. Se dois sólidos possuem em comum, no máximo pontos de suas superfícies, então o volume da união dos dois sólidos é a soma dos volumes de cada um.

Como alguns sólidos possuem formas irregulares, a utilização desse processo não é suficiente, por isso, devemos desenvolver alguns métodos que nos permitem obter fórmulas para o cálculo de volume de qualquer tipo de sólido. Vamos apresentar, inicialmente, dois sólidos onde essas proposições podem ser aplicadas, sendo eles: o cubo e paralelepípedo retângulo.

3.2.1 Volume do Cubo

Para o cálculo do volume de um cubo vamos utilizar as proposições apresentadas. Faremos semelhante ao que foi realizado para o cálculo da área do quadrado. Um cubo de aresta l, onde $l \in \mathbb{Z}$, pode ser decomposto em l^3 cubos unitários, ao se traçar planos paralelos as suas faces. Pela proposição 2, temos que o cubo unitário possui volume igual a 1 unidade, logo, o volume do cubo maior será dado por $V = 1. l^3 = l^3$.

Figura 10 – Cubo unitário



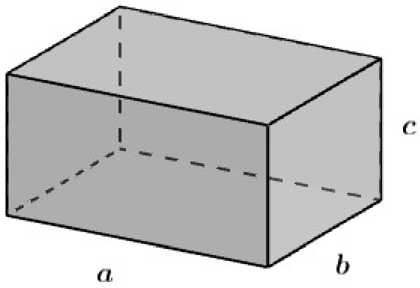
Fonte: elaborada pela autora.

A demonstração para $l \in \mathbb{Q}$ pode ser encontrada no livro Medida e Forma em Geometria, p. 63.

3.2.2 Volume do paralelepípedo retângulo

Para obter o volume de um paralelepípedo retângulo determinado por suas três medidas, a (comprimento), b (largura) e c (altura). Devemos levar em consideração que quando todas essas arestas possuem a mesma medida, temos o cubo, cujas faces são quadrados iguais. Tradicionalmente adotamos o cubo de lado unitário como unidade de medida de volume. Representaremos o volume do cubo unitário por $V\,(1,1,1) = 1$ e o volume do paralelepípedo retângulo por $V(a,b,c)$.

Figura 11 – Paralelepípedo retângulo



Fonte: elaborada pela autora.

Vamos utilizar a proposição 2 dessa seção para encontrar o volume do paralelepípedo retângulo, para isso, devemos analisar que o volume desse sólido é proporcional a cada uma das suas dimensões. Se multiplicarmos uma dessas medidas por um número natural n, o volume ficará também multiplicado por n, logo.

$$V(na,b,c) = nV(a,b,c).$$

Sendo a, b e c as dimensões de um paralelepípedo retângulo, temos que:

$$\begin{aligned} V(a,b,c) &= V(a.1,b,c) \\ &= aV(1,b,c) \\ &= aV(1,b.1,c) \\ &= abV(1,1,c) \\ &= abV(1,1,c.1) \\ &= abcV(1,1,1) \\ &= abc \end{aligned}$$

Ou seja, o volume do paralelepípedo retângulo será dado pelo produto de suas dimensões. Levando em consideração que o produto ab consiste na área da base do paralelepípedo, temos que o seu volume será dado pelo produto entre a área da base pela medida da altura $c = h$. Logo

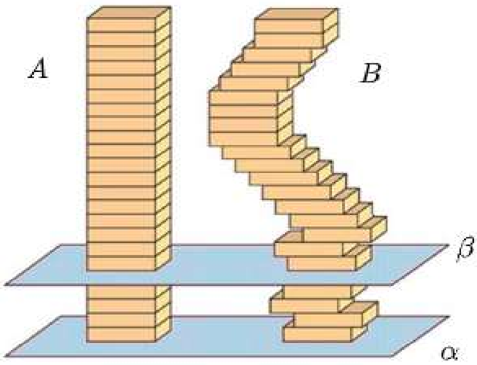
$$V(a, b, c) = A_b . h$$

3.2.3 Princípio de Cavalieri

Axioma 1. Dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos tem o mesmo volume.

Ou seja, podemos afirmar que dois sólidos A e B, como na figura a seguir, que possuem a mesma altura, têm o mesmo volume se, quando seccionados por um plano β paralelo ao plano α onde estão suas bases, formam figuras de mesma área.

Figura 12 – Princípio de Cavalieri



Fonte: Portal da Matemática[3]

Adotamos o princípio de Cavalieri como axioma, visto que sua demonstração envolve conceitos avançados da Teoria da Media, que não é o foco deste trabalho. Esse axioma será necessário para encontrar o volume de alguns sólidos geométricos que serão abordados em alguns dos problemas apresentados nos próximos capítulos.

3.2.4 Volume e Área de Sólidos Geométricos

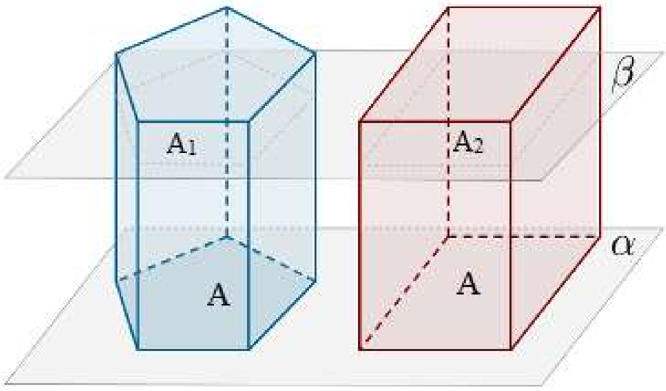
Agora, utilizaremos o princípio de Cavalieri para obter o volume de alguns sólidos, como: prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera.

[3] Disponível em: http://mauroweigel.blogspot.com/2010/08/bonaventura-cavalieri.html. Acesso em 12 de out. de 2020.

3.2.4.1 Prisma

Dado um prisma de altura h, cuja base seja um polígono de área A, contido em um plano horizontal α. Se construirmos sobre o mesmo plano um paralelepípedo retângulo com altura h e de forma que sua base seja um retângulo de área A, como mostra a figura a seguir.

Figura 13 – Volume do prisma



Fonte: Mundo educação[4]

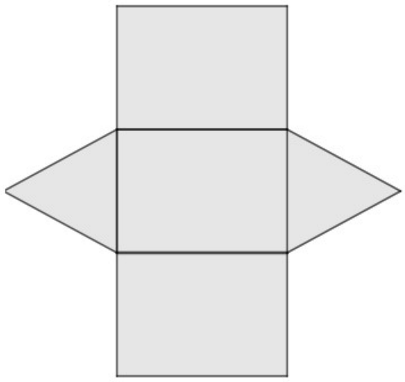
Suponha agora que os dois sólidos sejam cortados por outro plano horizontal β, que dá origem a duas seções de área A_1 e A_2 no prisma e no paralelepípedo, respectivamente. Como o paralelepípedo também é um prisma sabe-se que em todo prisma, uma seção paralela a base é congruente com essa base. Portanto, como figuras congruentes possuem a mesma área, temos que $A_1 = A = A_2$ e, pelo princípio de Cavalieri, os dois sólidos tem o mesmo volume. Como o volume do paralelepípedo é A $x\ h$, o volume do prisma também será dado pelo produto da área de sua base por sua altura.

$$V_{prisma} = A\ x\ h$$

A área lateral de um prisma depende do número de lados do polígono de sua base. Portanto, se um prisma que possui como base um polígono de n lados, sua área lateral é formada por n retângulos, sendo assim, basta calcular a área do retângulo e multiplicar por n.

[4] Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/principio-cavalieri.htm. Acesso em 12 de out. de 2020.

Figura 14 – Planificação do prisma triangular



Fonte: elaborada pela autora.

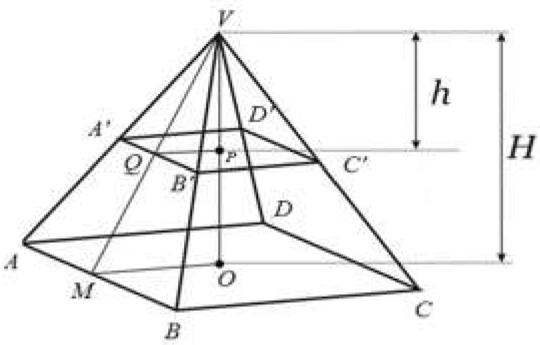
Sua área total é dada pelo dobro da área de sua base adicionada à área lateral

$$A_T = 2.A_b + A_l$$

3.2.4.2 Pirâmide

Para o cálculo do volume de uma pirâmide, vamos verificar o que o ocorre com esse sólido quando é seccionado por um plano paralelo à sua base. Considerando uma pirâmide de vértice V e base $ABCD$, como mostra a figura a seguir. Se seccionarmos essa pirâmide por um plano paralelo à sua base, distando h do vértice V, obtemos uma figura de vértices $A'B'C'D'$ que é semelhante a base da pirâmide.

Figura 15 – Razão de semelhança entre as bases de uma pirâmide



Fonte: elaborada pela autora.

Observando a figura, temos dois triângulos semelhantes, VPQ e VOM, portanto, por semelhança de triângulos obtemos que

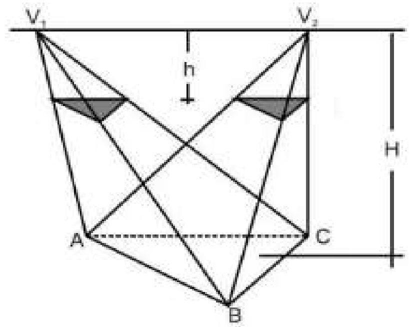
$$\frac{VP}{VO} = \frac{PQ}{OM} = \frac{VQ}{VM} = \frac{h}{H}$$

Logo, a seção e base da pirâmide são figuras semelhantes de razão de semelhança igual a $\frac{h}{H}$ e a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança, logo será igual a $\left(\frac{h}{H}\right)^2$. Esse resultado será fundamental para o cálculo do volume de uma pirâmide.

Teorema 1. Se duas pirâmides possuem a mesma base e a mesma altura, então elas possuem o mesmo volume.

Consideremos duas pirâmides de mesma base ABC, de vértices V_1e V_2 e de mesma altura H. Se traçarmos um plano paralelo ao plano da base dessas pirâmides distando h dos vértices, determinamos duas seções de áreas A_1 e A_2 , como mostra a figura a seguir.

Figura 16 – Pirâmides de mesma base e mesma altura



Fonte: Lima, 2016.

Sendo A a área da base, sabemos que a razão de semelhança entre as áreas da base e da seção é igual a $\left(\frac{h}{H}\right)^2$, então temos que

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_2}{A}$$

A partir daí, contatamos que $A_1 = A_2$, logo, pelo princípio de Cavalieri as duas pirâmides terão o mesmo volume.

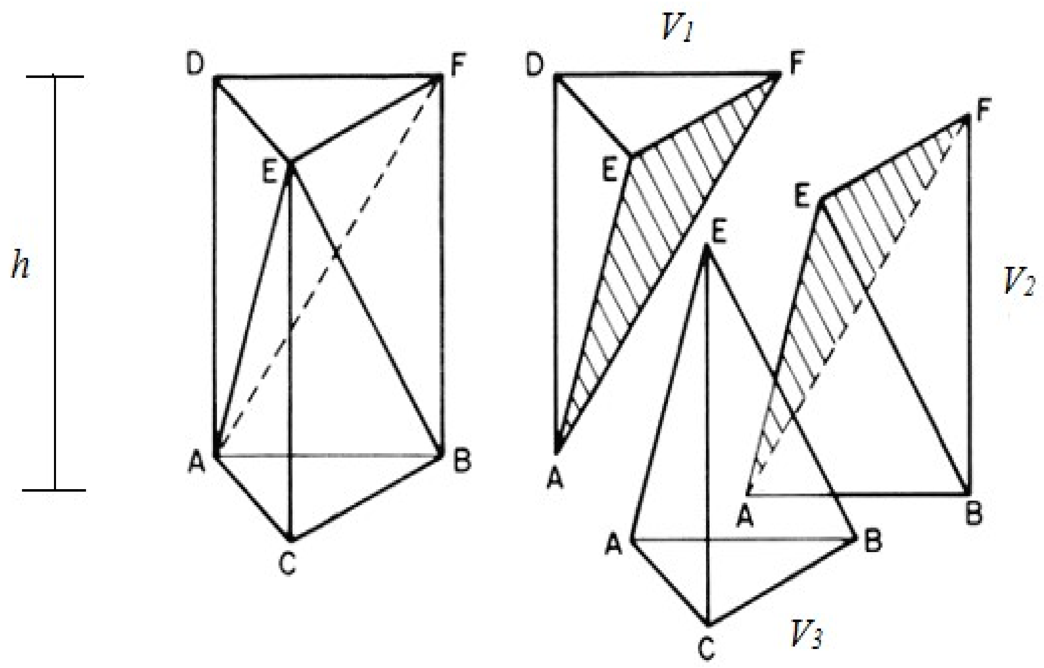
Teorema 2. O volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do produto da área de sua base pela altura.

Dado o prisma triangular $ABCDEF$, como na figura a seguir. Se cortarmos esse prisma pelos planos $AEF\ e\ ABE$, obtemos três pirâmides triangulares: $ABCE$, $ABEF$, $AEDF$ cujos volumes são $V_1, V_2\ e\ V_3$, respectivamente. Podemos afirmar que o volume do prisma é igual à soma dos volumes das três pirâmides, ou seja:

$$V_{prisma} = V_1 + V_2 + V_3$$

Os prismas $ABCE$ e $AEDF$ possuem o mesmo volume, de acordo com o teorema 1 desta seção, visto que possuem a mesma altura e a mesma base, já que as bases ABC e DEF do prisma possuem a mesma área. O mesmo ocorre com os prismas $AEDF$ e $ABEF$, pois possuem uma base em comum e dispõem da mesma altura.

Figura 17 – Decomposição do prisma em três pirâmides de mesmo volume



Fonte: RPM, nº 13[5].

Logo, podemos constatar que $V_1 = V_2 = V_3$, então o volume da pirâmide triangular será dado por:

$$V_{\ pirâmide} = \frac{1}{3}.\left(\acute{A}rea\ do\ prima\right).$$

[5] RPM, nº 13. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/13/11.htm. Acesso em 15 de out. de 2020.

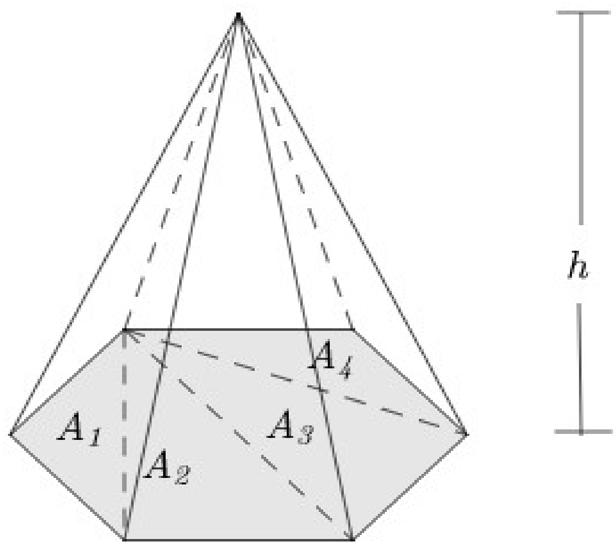
Sendo A área da base de um prisma e sua altura h, o volume da pirâmide triangular de base A e altura h será dado por:

$$V = \frac{1}{3}A.h.$$

Teorema 3. O volume de qualquer pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura. Qualquer pirâmide pode ser dividida em pirâmides de base triangular.

Se A é a área da base e h a medida da altura de uma pirâmide qualquer, então essa pirâmide pode ser decomposta em $(n-2)$ tetraedros e seu volume V será dado por

Figura 18 – Pirâmide decomposta em pirâmides triangulares



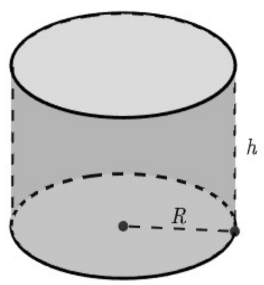
Fonte: elaborada pela autora.

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_{n-2} \Rightarrow V = \frac{1}{3}A_1.h + \frac{1}{3}A_2.h + \cdots + \frac{1}{3}A_{n-2}.h \Rightarrow V$$
$$= \frac{1}{3}\left(A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-2}\right).h \Rightarrow V = \frac{1}{3}A.h$$

A área da superfície total de uma pirâmide será dada pela soma da área lateral, que consiste da soma das áreas dos triângulos laterais, com a área da base.

3.2.4.3 Cilindro

Figura 19 – Cilindro



Fonte: elaborada pela autora.

No cilindro, toda seção paralela à base, é congruente com essa base. Esse fato permite concluir, pelo princípio de Cavalieri, que o volume do cilindro é o produto da área de sua base pela altura.

Dada um cilindro de altura h e base de área A contida em um plano horizontal α, e um prisma qualquer de altura H, com base de área A contida no mesmo plano α. Se outro plano horizontal β secciona os dois sólidos formando figuras de áreas $A_1\ e\ A_2$ então $A_1 = A = A_2$ e, por consequência, os dois tem mesmo volume. Logo, o volume do cilindro também é igual ao produto da área da base pela altura.

$$V_{cilindro} = A\ x\ h$$

Como a base do cilindro é um círculo cuja área é dada por πR^2, então o seu volume pode ser escrito como

$$V\ _{cilindro} = \pi R^2 h.$$

A superfície lateral de um cilindro reto de raio R e altura h, pode ser desenrolada e transformada em um retângulo de base $2\pi R$ e altura h. A área lateral do cilindro é dada pela área do retângulo, que vale $2\pi Rh$.

Figura 20 – Área lateral do Cilindro

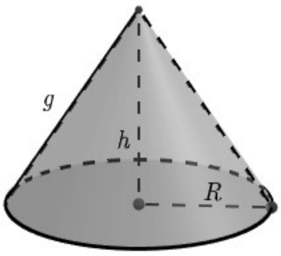
Fonte: elaborada pela autora.

Já a área da superfície total do cilindro será obtida através da soma das áreas de suas bases com a área lateral. Como a área de sua base é dada por πR^2 e sua área lateral é dada por $2\pi Rh$. Sua área total é dada por

$$A_T = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R(R + h).$$

3.2.4.4 Cone

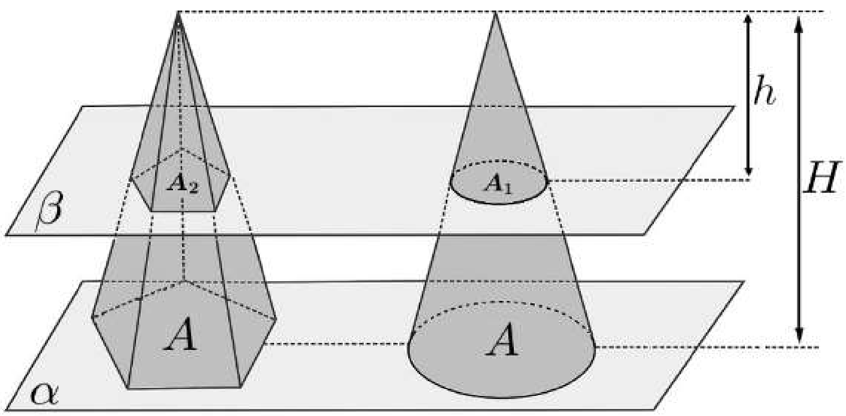
Figura 21 – Cone



Fonte: elaborada pela autora.

Para calcular o volume do cone, vamos utilizar o mesmo argumento utilizado para o volume do cilindro. Dado um cone de altura H e base de área A contida em um plano horizontal α, consideramos uma pirâmide de altura H e base de área A contida nesse mesmo plano α. Se outro plano horizontal β, distando h do vértice desses sólidos secciona os dois formando duas figuras de áreas A_1 e A_2, como mostra a figura a seguir.

Figura 22– Volume do cone



Fonte: Campos, 2014.[6]

[6] Disponível em: <https://docplayer.com.br/50285261-Area-e-volume-com-o-auxilio-do-multiplano-blocos-cubicos-e-solidos-geometricos.html.> Acesso em 20 de out. de 2020.

Podemos observar que

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_2}{A}.$$

Isto significa que $A_1 = A_2$ que, pelo princípio de Cavalieri, garante que os dois sólidos têm o mesmo volume e, portanto, concluímos que o volume do cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

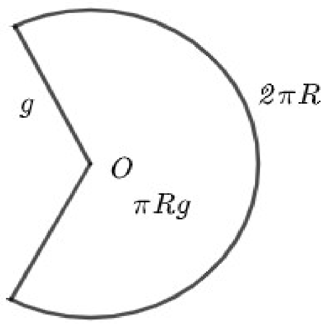
$$V_{cone} = \frac{1}{3}\, A \; x \; H$$

A fórmula da área lateral do cone pode ser obtida da seguinte forma: desenrolamos sua superfície lateral, como mostra a Figura 23, que será transformada em um setor de raio g cujo arco tem comprimento $2\pi R$. Faremos uma regra de três para o cálculo área; diremos que a área A desse setor está para a área do círculo de raio g, assim como o comprimento do arco $2\pi R$ está para o comprimento total da circunferência $2\pi g$, ou seja

$$\frac{A}{\pi g^2} = \frac{2\pi R}{2\pi g}.$$

Dessa forma, constatamos que a área lateral do cone reto vale πRg.

Figura 23 – Superfície lateral de um cone



Fonte: elaborada pela autora.

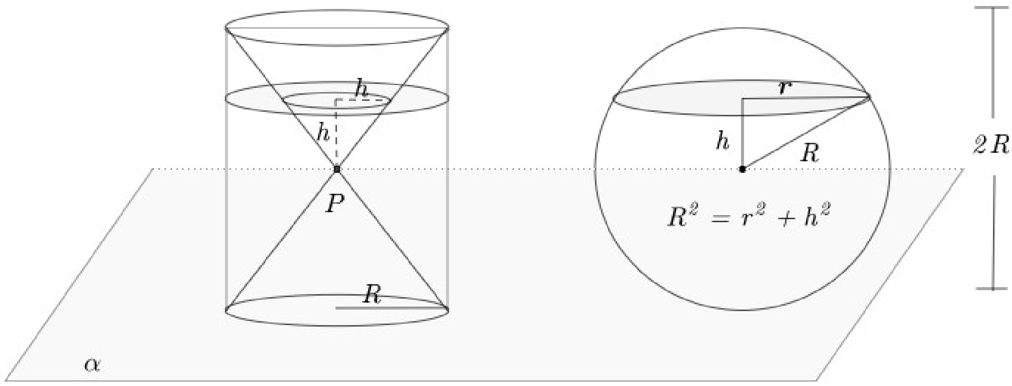
A área da superfície total do cone será dada pela soma da área de sua base com área da sua superfície lateral, ou seja:

$$A_T = \pi R^2 + \pi Rg = \pi R\,(R + g).$$

3.2.4.5 Esfera

Para encontrar o volume da esfera vamos considerar um cilindro equilátero[7], sobre um plano α, de raio da base igual a R e altura igual a $2R$ e seja P oponto médio do eixo do cilindro. Vamos tomar dois cones que possuem como bases as do cilindro e P como vértice comum, como pode ser visto na figura a seguir.

Figura 24 – Volume da esfera



Fonte: elaborada pela autora.

Do cilindro retiramos esses cones, obtendo o sólido que chamaremos de S. Tomemos uma esfera, tangente ao plano α que esteja no mesmo semi-espaço determinado por α. Traçando um plano β, paralelo a α, que dista h do centro da esfera e que produza duas seções, uma na esfera outra no sólido S que possuem a mesma área.

1. A seção na esfera é um círculo de área igual a πr^2, onde $r^2 = R^2 - h^2$ pelo Teorema de Pitágoras no triângulo da Figura 24.

$$A_1 = \pi(R^2 - h^2)$$

2. Seção no sólido S que possui área igual a $\pi R^2 - \pi h^2 = \pi\,(R^2 - h^2)$ que corresponde à área de uma coroa circular.

$$A_2 = \pi\,(R^2 - h^2)$$

Como as áreas das seções na esfera e no sólido são iguais, temos que pelo princípio de Cavalieri, os sólidos possuem o mesmo volume, logo:

[7] Cilindro equilátero é todo cilindro cuja secção meridiana é um quadrado, ou seja, sua altura é igual ao diâmetro da base.

O volume do sólido S é igual ao volume do cilindro de raio R e altura $2R$ subtraído de dois cones de raio R, isso dá

$$V = V_{cilindro} - 2.V_{cone} = \pi R^2.2R - 2\frac{1}{3}\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Portanto, o volume da esfera é dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

A área da superfície de uma esfera não será demonstrada aqui, pois a esfera não pode ser planificada, então os métodos utilizados para a demonstração utilizam conceitos de integral que não foram abordados neste trabalho. Traremos apenas um argumento considerado plausível.

Dada uma esfera de centro O e raio R e dado um número positivo h, iremos considerar outra esfera de mesmo centro, mas de raio igual a $R + h$. A região compreendida entre essas duas esferas concêntricas é uma reunião de segmentos de reta de comprimento h. Cada um desses segmentos é perpendicular a ambas as esferas. Logo é intuitivamente aceitável que, para valores pequenos de h, o volume dessa casca será aproximadamente igual a $A\,x\,h$, onde A é a área da esfera de raio R. Usando a fórmula do volume da esfera e utilizando o símbolo de aproximadamente, obtemos:

$$Axh = V = \frac{4\pi}{3}(R+h)^3 - \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4}{3}\pi h(3R^2 + 3Rh + h^2).$$

Assim, para valores pequenos de h temos:

$$A = 4/3\,\pi(3R^2 + 3Rh + h^2).$$

Se h for um número muito pequeno, as parcelas $3Rh$ e h^2 serão insignificantes portanto

$$A = \frac{4}{3}\pi.3R^2 = 4\pi R^2.$$

Podemos concluir que a superfície da esfera de raio R é igual a 4πR².

4 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO SEM O USO DO CÁLCULO

Este capítulo apresenta algumas teorias que auxiliarão no estudo da otimização sem os recursos do Cálculo. Ele está dividido em duas seções. Na primeira delas, será discutida a resolução de problema de otimização utilizando os conceitos de função quadrática, já que existem vários contextos em que muitos dos problemas de otimização conduzem a uma função polinomial do segundo grau, principalmente aqueles onde se deve maximizar ou minimizar uma determinada área. Também abordaremos alguns problemas de otimização de caráter geométrico e aplicações em outras áreas. A segunda seção aborda o conceito de média aritmética, média geométrica e o *Teorema da Desigualdade das Médias*, além de alguns problemas resolvidos através da aplicação desse teorema.

4.1 Função quadrática

Nesta seção abordaremos as principais definições sobre função quadrática, seus valores de máximo, mínimo e algumas considerações sobre o seu gráfico, além de resolver alguns problemas de otimização com o uso dessa ferramenta. As definições apresentadas nesta seção são baseadas em Lima *et. al.,* 2001, Lima, *et. al*., 2006, e Lima *et. al*., 2012.

Definição 8. Uma função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b, c com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Podemos escrever o trinômio $f(x) = ax^2 + bx + c$ em sua forma canônica, para isso, utilizaremos a técnica de completar quadrados.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x\right] + c =$$

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Quando igualamos a zero, obtemos uma equação do segundo grau, onde

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamada de discriminante que pode assumir os seguintes valores:

I. Se $\Delta < 0$ essa equação não terá raízes reais

II. Se $\Delta = 0$, então $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, logo a equação terá a raiz dupla $x = \frac{-b}{2a}$

III. Se $\Delta > 0$, então teremos $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

A partir da identidade

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Fazendo $m = \frac{-b}{2a}$ e $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$, com essa notação, temos, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = a(x - m)^2 + k, onde\ m = \frac{-b}{2a}\ e\ k = f(m).$$

A forma canônica $f(x) = a(x - m)^2 + k$ nos permite tirar duas observações.

1. Quando $a > 0$ a função $f(x) = a(x - m)^2 + k$ possui um valor mínimo igual a k, que ocore para $x = m$, isto é, $f(m) = k$ é o menor valor que f pode assumir.

Demonstração: Se $a > 0$, tem-se que, $a(x - m)^2 \geq 0\ \forall\, x$. Com $x \neq m$ temos $f(x) = a\,(x - m)^2 + k > k$, já que $a(x - m)^2 > 0$. Assim, mostramos que $f(y) < f(x)$ pata todo $x \neq y$.

2. Se $a < 0$ a função $f(x) = a(x - m)^2 + k$, possui valor de máximo igual a k, que ocorre para $x = m$, ou seja, $f(m) = k$ é o maior valor que f assume.

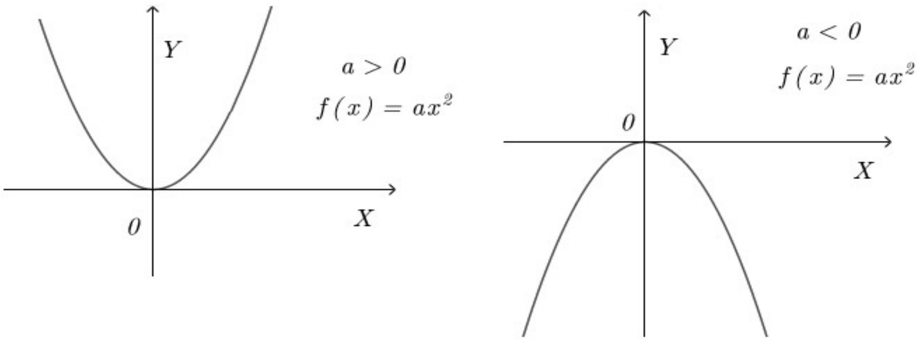
Demonstração: segue da mesma forma que anterior se $a < 0$, temos que, $a(x - m)^2 \leq 0$ para todo x. Com $x \neq m$ temos $f(x) = a\,(x - m)^2 + k < k$, já que $a(x - m)^2 < 0$. Assim, mostramos que $f(y) > f(x)$ pata todo $x \neq y$.

As observações acima mostram que dada a forma canônica $f(x) = a(x - m)^2 + k$, se $a > 0$ a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ assume seu valor mínimo, que representa $x = k$, quando $x = m = -b/2a$, mas se $a < 0$ no ponto m, o valor $k = f(m)$ é o valor máximo entre todos os valores de $f(x)$, com $x \in \mathbb{R}$.

Gráfico da função quadrática

O gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$ é uma curva chamada de parábola. Já a função $f(x) = ax^2$, pode ser representada por uma parábola com concavidade voltada para cima ou para baixo de acordo com o valor do seu coeficiente a. Vejamos, a seguir, os gráficos nos casos em que $a > 0$ e que $a < 0$.

Figura 25 – Gráfico da função f(x) = ax²

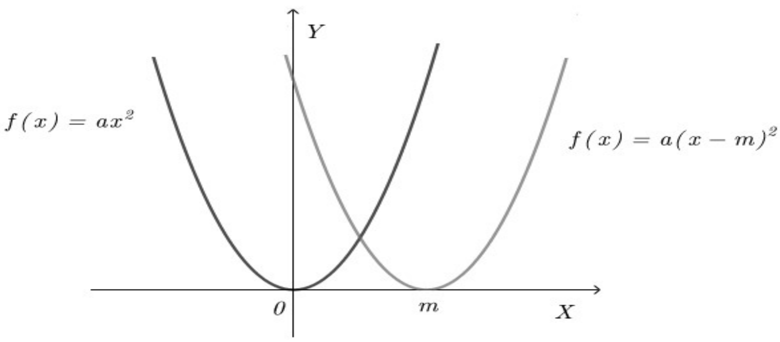


Fonte: elaborada pela autora.

Nesse exemplo, o ponto de coordenas (0,0), origem do sistema de coordenadas, será o ponto de mínimo da parábola quando $a > 0$ e é o ponto de máximo quando $a < 0$. Esse ponto é chamado de vértice da parábola.

O gráfico da função quadrática $f(x) = a(x - m)^2$ também será uma parábola obtida do gráfico de $f(x) = ax^2$ por uma translação horizontal de m unidades. O seu vétice (ponto de máximo ou ponto de mínimo, conforme $a > 0$ ou $a < 0$) é o ponto $(m, 0)$, como podemos verificar na figura a seguir.

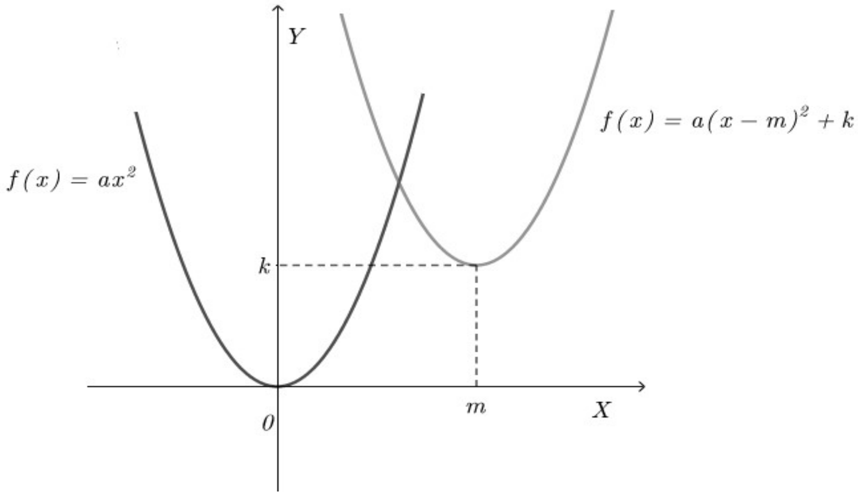
Figura 26 – Gráfico de $f(x) = a(x - m)^2$



Fonte: elaborada pela autora, baseada em Lima, 2006, p. 54.

Sendo k uma constante, o gráfico da função $f(x) = a(x - m)^2 + k$ também pode ser obtido a partir do gráfico de $f(x)$, deslocando-o verticalmente k unidades, para cima (quando $k > 0$) ou para baixo (quando $k < 0$), como pode ser visto na figura a seguir.

Figura 27 – Gráfico da função $f(x) = a(x - m)^2 + k$



Fonte: elabora pela autora, baseada em Lima, 2016, p. 55.

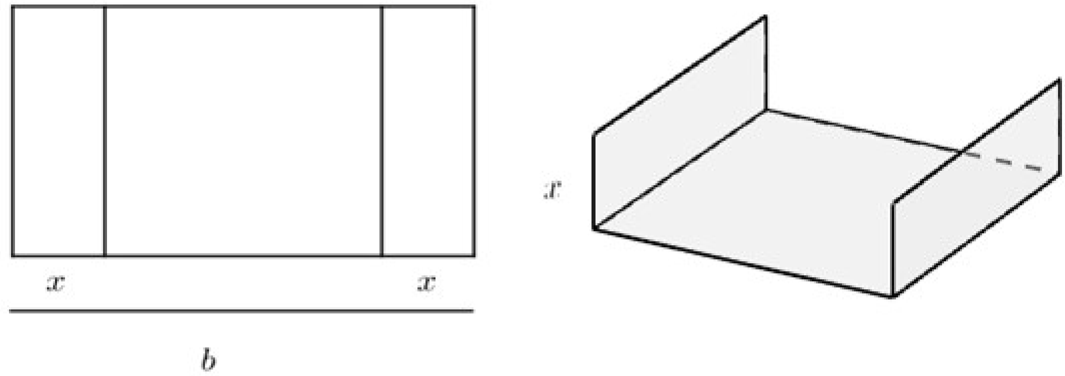
Logo, podemos concluir que o gráfico da função $f(x) = a(x - m)^2 + k$ é uma parábola, obtida a partir do gráfico de $f(x) = ax^2$, deslocando-o de m unidades na horizontal e k unidades na vertical e o seu vértice é dado por (m, k).

Se a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não admite raízes, então o seu gráfico tocará o eixo OX, quando a equação possui uma raiz dupla, a parábola tangencia o eixo horizontal no ponto $-b/2a$ e em todos os casos, a parábola corta o eixo OY no ponto de ordenda c.

Essas observações nos permitem resolver alguns problemas interessantes de otimização onde pretendemos encontrar valores máximos e mínimos de uma grandeza que pode ser expressa através de uma função do segundo grau. Vejamos a seguir três problemas onde podemos aplicá-las

Problema 1. Um retângulo de papelão tem base b e altura a. Fazendo duas dobras de largura x, paralelas à altura do retângulo, obtemos três faces de um bloco retangular. Determine x de modo que esse bloco tenha volume máximo.

Figura 28 – Bloco retangular de papelão

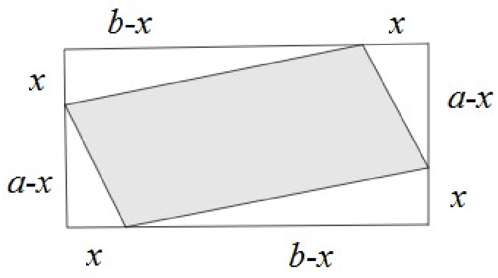


Fonte: Lima *et. al.*, 2006 p. 58

Solução: O volume do bloco é dado por $v(x) = x.a.(b-2x) = -2ax^2 + abx$. O valor de máximo de $v(x)$ será atingido em $x = m = -\frac{ab}{2.(-2a)} = \frac{b}{4}$. Para esse valor, o volume máximo será dado por $v(m) = \frac{ab^2}{8}$.

Problema 2. Na figura a seguir, determinar o valor de x para que a área do paralelogramo inscrito no retângulo seja mínima. Supõe-se que $a \leq b \leq 3a$. (LIMA *et. al.*, 2011, p. 26)

Figura 29 – Paralelogramo inscrito no retângulo



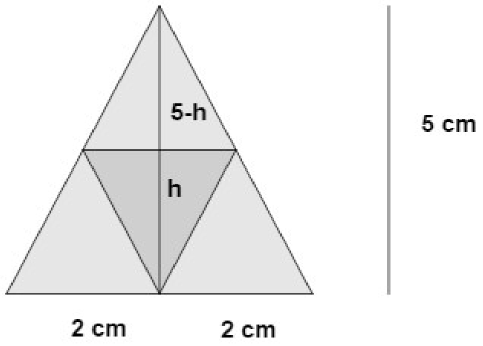
Fonte: elabora pela autora.

Solução: A área do paralelogramo inscrito é $f(x) = ab - x\,(a-x) - x\,(b-x) = 2x^2 - (a+b)x + ab$.

Os dados do problema impõem que $0 \leq x \leq a$. O mínimo de $f(x)$ é atingido no ponto $m = (a+b)/4$ e vale $f(m) = ab - \frac{(a+b)^2}{8}$. A condição $b \leq 3a$ equivale a $\frac{(a+b)}{4} \leq a$, logo $m \leq a$, portanto é legítima a solução obtida.

Problema 3. Um triângulo isósceles mede 4cm de base e 5 cm de altura. Nele, deve-se inscrever outro triângulo isósceles invertido, cuja base é paralela à base do maior e cujo vértice é o ponto médio da base do primeiro. Qual a área máxima possível do triângulo invertido? (LIMA *et. al.,* 2001, p. 41)

Figura 30 – Triângulo isósceles



Fonte: elaborada pela autora.

Solução: Podemos observar que a área do triângulo inscrito é dada por $A(x) \ = \frac{hx}{2}$, onde x é a medida da base paralela à base do triângulo externo. Por semelhança de triângulos, podemos afirmar que

$$\frac{5-h}{5} = \frac{x}{4}$$

Daí tiramos que $h = \frac{20-5x}{4}$. Substituindo em $A(x)$ obtemos que

$$A(x) = \frac{hx}{2} = \frac{\frac{20-5x}{4}.x}{2}$$

$$A(x) = \frac{-5x^2 + 20x}{8}$$

Escrevendo na forma canônica, obtemos $A(x) = -\frac{5}{8}(x-2) + \frac{5}{2}$, onde o valor máximo da função é dado para $k = \frac{5}{2}$.

4.1.1 Outras Aplicações

Apresentaremos alguns problemas de otimização que serão resolvidos através dos conceitos de máximo e mínimo de uma função quadrática, com abordagem em áreas distintas como física, geometria analítica, indústria e outras.

Problema 1. Se um projétil é lançado com uma velocidade inicial de v_0 metros por segundo num ângulo α acima da horizontal e assumindo que a resistência do ar é desprezível, então a posição depois de t segundos é dada pelas equações paramétricas

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \quad y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

onde g é a aceleração da gravidade (9,8 m/s2).

a) Se uma arma for disparada com α = 30° e v_0 = 500 m/s, quando a bala atingirá o solo? A que distância da arma a bala atingirá o solo? Qual a altura máxima alcançada pela bala?

Solução: Vamos escrever as equações paramétricas de acordo com os dados na questão, então temos que

$$x = (500\, cos\, 30°)t = 250\sqrt{3}t$$

$$y = (500sen30°)t - \frac{1}{2}9{,}8t^2 = 250t - 4{,}9t^2.$$

Para saber o instante em que a bala cai no chão, devemos fazer $y = 0$, assim obtemos:

$$250t - 4{,}9t^2 = 0$$

O instante em que a bala atingirá o ponto máximo será dado por

$$x = m = -\frac{b}{2a} = \frac{-250}{2.(-4{,}9)} = 25{,}5.$$

Então o instante procurado é de $25{,}5\, s$. Substituindo esse valor de t em y, encontramos que $y = 250.25{,}5 - 4{,}9.\, 25{,}5^2 \approx 3189\, m$. Logo, a bala atingirá uma altura máxima em aproximadamente 3189 m.

b) Mostre que a trajetória é parabólica, eliminando o parâmetro.

Solução: Vamos eliminar os parâmetros e mostrar que essa trajetória é determinada por uma parábola. Para isso, devemos isolar o valor de t na primeira equação paramétrica, assim temos que $t = \frac{x}{250\sqrt{3}}$. Substituindo o valor de t na segunda temos:

$$y = 250.\left(\frac{x}{250\sqrt{3}}\right) - 4{,}9\left(\frac{x}{250\sqrt{3}}\right)^2$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} - 4{,}9.\frac{x^2}{250^2.3}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{4,9}{187500}\,x^2$$

Podemos observar que y representa a equação de uma parábola.

Problema 2. A preço p $(0 \leq p \leq 200)$, uma indústria consegue vender $1000 - 5p$ artigos por semana. O custo de produção de x artigos é $200 + 20x$. Determine p e o nível da produção semanal para que o lucro da indústria seja máximo.

Solução: O número de artigos vendidos é dado por $x = 1000 - 5p$. A receita pode ser expressa por px e o custo é expresso por $200 + 20x$. Portanto, o lucro é:

$$L = px - (200 + 20x)$$

$$= \frac{1000 - x}{5}.x - 20x - 200$$

$$= -\frac{x^2}{5} + 180x - 200.$$

Sabemos que o lucro será máximo quando $x = m = \frac{-b}{2a} = \frac{-180}{2.(-1/5)} = 450$. Quando $x = 450$, temos $p = 110$.

Problema 3. O diretor de uma orquestra percebeu que, com o ingresso a R\$ 9,00 em média 300 pessoas assistem ao concerto e que, para cada redução de R\$ 1,00 no preço dos ingressos, o público aumenta de 100 expectadores. Qual deve ser o preço do ingresso para que a receita seja máxima?

Solução: Se o preço do ingresso for $9 - x$, o público que comparecerá será dado por $300 + 100x$ e a receita será expressa por $R = (9 - x).(300 + 100x) = -100x^2 + 600x + 2700$. A receita representa uma função quadrática que terá valor máximo quando $x = m = \frac{-b}{2a} = 3$. Logo, o preço do ingresso deverá ser R\$ 4,00.

Problema 4. Laranjeiras da California produzem 600 laranjas por ano, se forem plantadas, no máximo 20 árvores por acre $(4km^2)$. Cada árvore plantada a mais causa um decréscimo de 15 laranjas por pé. Quantas árvores devem ser plantadas para se obter o maior número de laranjas?

Solução: Cada laranjeira produz 600 laranjas por ano, se forem plantadas, no máximo 20 árvores, ou seja, nesses padrões teríamos um número máximo de laranjas em um ano dado por

$L = 20.600 = 1200$ que é o produto do número de árvores plantadas pela quantidade de laranjas que cada uma produz. Se cada árvore plantada a mais causa um decréscimo de 15 laranjas por pé. Vamos pensar da seguinte forma: se forem plantadas x laranjeiras, isso significa que a produção será dada por $(600 - 15.(x - 20))$, por cada laranjeira. Logo, o número total de laranjas em um ano será expresso por:

$$L(x) = x(600 - 15.(x - 20))$$

$$L(x) = x(600 - 15x + 300)$$

$$L(x) = -15x^2 + 900x$$

Como a $L(x)$ expressa uma função quadrática, temos que o valor de x será máximo quando for o ponto máximo da função, ou seja $x = m = \frac{-b}{2a} = 30$.

Problema 5. Encontre os pontos sobre a elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que estão mais distantes do ponto $(1, 0)$.

Solução: A distância entre dois pontos no plano é dada por $d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, então a distância de um ponto (x, y) ao ponto $(1, 0)$ é dada por $d = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$. Na equação da elipse dada, podemos isolar o valor de y e temos que $y^2 = 4 - 4x^2$, substituindo em (I), obtemos:

$$d = \sqrt{(x - 1)^2 + 4 - 4x^2}$$

$$d^2 = (x - 1)^2 + 4 - 4x^2$$

$$d^2 = -3x^2 - 2x + 5.$$

É uma equação do quadrática. O ponto de máximo dessa função que ocorre quando $x = m = -b/2a$, isso implica que $x = -1/3$, nesse caso, temo que y pode assumir os valores:

$$y^2 = 4 - 4(-\frac{1}{3})^2$$

$$y^2 = 4 - \frac{4}{9}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{32}{9}}$$

$$y = \pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

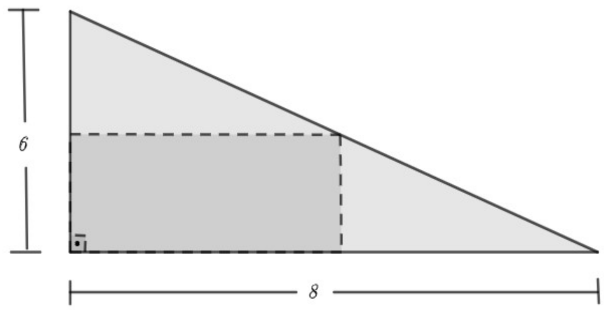
Logo os pontos serão $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$ $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$.

O tópico a seguir apresenta alguns problemas propostos de otimização de caráter geométrico que podem ser solucionados através dos conceitos de máximo e mínimo de uma função quadrática.

4.1.2 Problemas propostos

Problema 4.1. É dada uma folha de cartolina como na figura a seguir. Cortando a folha na linha pontilhada resultará um retângulo. Determine esse retângulo sabendo que a área é máxima. (IEZZI, G., MURAKAMI, C, 2004, p. 150)

Figura 31 – Retângulo de área máxima



Fonte: elaborada pela autora

Problema 4.2. (Lima, *et. al.* 2006, p. 58) Dentre os triângulos de base e perímetro fixados, prove que o isósceles tem a maior área.

Problema 4.3. Determine o retângulo de maior área contido num triângulo equilátero de lado 4 cm, estando a base do retângulo num lado do triângulo.

Problema 4.4. Qual a menor área de um quadrado inscrito em outro quadrado de lado a? (Lima, 2006, p. 58)

4.2 Estudo das Médias

As médias estão associadas à ideia de substituir uma sequência de números por um único representante que exprime toda a sequência. Elas estão associadas a uma determinada operação sobre a sequência dos números. Se essa operação é a soma dos elementos da sequência, obtemos a média aritmética. Mas se a operação for o produto dos elementos da sequência, obtemos a média geométrica.

Segundo RPM, 76, “Podemos tratar situações relativas à otimização através da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, essa ferramenta mostra-se eficiente na resolução desse tipo de problemas”.

4.2.1 Média Aritmética e Geométrica

As definições a seguir estão baseadas em (LIMA *et. al.*, 2016).

Definição 9. A *Média aritmética* (simples), da lista de n números x_1, x_2,..., x_n é um valor $\bar{x}$ tal que $x_1+x_2+\cdots+x_n=\bar{x}+\bar{x}+\cdots+\bar{x}=n\bar{x}$. Logo a média aritmética da lista de n números é dada por

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

Definição 10. A *Média Geométrica* (simples) dos n números positivos x_1, x_2,..., x_n é um valor positivo g tal que $x_1x_2\ldots x_n=g.g\ldots g=g^n$. Logo, a média geométrica dos n números positivos x_1, x_2,..., x_n é definida por

$$g=G(x_1,x_2,\ldots x_n)=\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

Observação: A média geométrica é definida apenas para números positivos, pois evitamos a possibilidade de não existir a média, como no caso do cálculo da média geométrica de dois números x_1 e x_2, onde um desses números é negativo, teríamos a raiz quadrada de um número negativo que não é um número real.

4.2.2 Desigualdade das médias

Teorema 4. *Desigualdade das médias.* Se x_1, x_2,..., x_n são números positivos e A e G são suas médias Aritmética e Geométrica, respectivamente, então $A\geq G$. Além disso, as médias serão iguais se, e somente se $x_1=x_2=\cdots=x_n$. Portanto, temos

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$$

Observação: O Teorema da desigualdade das médias é válido para as médias quadrática, harmônica, aritmética e geométrica, mas como estamos abordando apenas as médias aritmética e geométrica, achamos conveniente omitir as outras duas.

Uma demonstração geométrica

Sendo x e y números positivos quaisquer, eles podem ser considerados como lados de um retângulo R, que tem perímetro igual ao quadrado Q cujo lado mede $\frac{(x+y)}{2}$. Logo a área de $R \leq$ a área de Q, ou seja $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$. Portanto, $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, ou seja, a média aritmética de dois números positivos é sempre maior do que a média geométrica deles, exceto quando são iguais, já que $\frac{x+y}{2} = \sqrt{xy}$ apenas quando $x = y$.

Existem várias demonstrações dessa desigualdade para dois números, quatro, e assim por diante. Agora, iremos fazer uma demonstração da generalização. Essa demonstração pode ser encontrada no livro Meu professor de Matemática e outras Histórias de Elon Lages Lima.

Uma segunda demonstração

Sejam $x_1, \dots, x_n$ números reais positivos. A desigualdade $G \leq A$ equivale a afirmar que, quando a soma $x_1 + \cdots + x_n = n.c$ é constante, o produto $x_1.x_2 \dots x_n$ será máximo se tivermos $x_1 = \cdots = x_1 = c$, logo esse produto será igual a c^n.

Para essa demonstração, vamos substituir o menor desses números (que chamaremos de x) e o maior deles (que chamaremos de y) pelos números G e $\frac{xy}{G}$, mantendo os $n-2$ números restantes inalterados. Temos que $G.\frac{xy}{G} = xy$, a média geométrica dos novos números continua igual a G. Sabemos que $x \leq G \leq y$, portanto:

$$x + y - \left(G + \frac{xy}{G}\right) = x + y - G - \frac{xy}{G} = (x - G)\left(1 - \frac{y}{G}\right) \geq 0.$$

Logo, $x + y \geq G + \frac{xy}{G}$. Portanto, ao fazer a substituição, a nova média aritmética será menor ou igual à anterior, ocorrendo a igualdade se $x = G$ ou $y = G$, em cujo caso todos os números dados são iguais.

Prosseguindo com o mesmo passo, mas agora com os números u e v, respectivamente, o menor e o maior dos novos números. Substituindo-os por G ou $\frac{uv}{G}$, novamente não alteremos a média geométrica, que continua igual a G, mas a média aritmética mais uma vez fica menor ou igual.

Depois desta segunda etapa, pelo menos dois números tornaram-se iguais a G. Depois de no máximo n etapas, obtemos n números iguais a G. Sua média geométrica é G e sua média aritmética também. Mas, como esta última não aumentou depois de nenhuma das modificações feitas, concluímos que $G \leq A$. Só se tem $G = A$ quando, em todas as etapas do processo, a média aritmética se mantiver invariável. A igualdade só ocorre quando todos os x_i forem iguais.

Vejamos agora, alguns exemplos de problemas de otimização que podem ser solucionados através do *Teorema da Desigualdade das Médias*. Serão apresentados três problemas de caráter geométrico e duas aplicações algébricas. Utilizar esse método exige certa prática, pois é necessário descobrir quais as variáveis que devem formar a desigualdade das médias a ser aplicada em cada problema.

Problema 1. Mostre que, entre todos os retângulos de área A, o quadrado é o de menor perímetro.

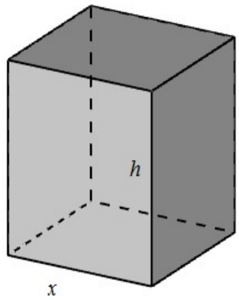
Solução: Se os lados do retângulo são x e y, então sua área $A = xy$, logo a média geométrica de x e y é dada por $\sqrt{xy} = \sqrt{A}$. O perímetro do retângulo será igual a $2.(x + y)$. Considerando $2.(x + y) = 4.\frac{(x+y)}{2}$ e aplicando a desigualdade das médias, obtemos:

$$2.(x + y) = 4.\frac{(x + y)}{2} \geq 4.\sqrt{xy} = 4\sqrt{A}$$

Por consequência, $2.(x + y) \geq 4\sqrt{A}$ e a igualdade só será obtida se $x = y$. Dessa maneira, o retângulo de menor perímetro é o quadrado de perímetro $4\sqrt{A}$.

Problema 2. Se 1200 cm² de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa e as dimensões para que isso ocorra. (RPM, 76)

Figura 32 – Caixa de base quadrada



Fonte: elaborada pela autora.

Solução: Seja A a área da superfície e V o volume da caixa. Se h é a altura da caixa, temos $A = x^2 + 4xh = 1200$ que também pode ser escrita como $A = x^2 + 2xh + 2xh = 1200$ e $V = x^2 h$. Observe que se aplicarmos o *Teorema da desigualdade das médias* nos três termos da expressão de A, obtemos:

$$\frac{1200}{3} = \frac{x^2 + 2xh + 2xh}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 2xh 2xh} = \sqrt[3]{4(x^2h)^2} = \sqrt[3]{4V^2}$$

$$400 \geq \sqrt[3]{4V^2}.$$

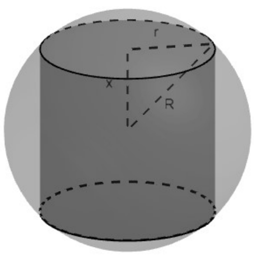
Portanto, $4V^2 \leq 400^3$ ou $V \leq 4000$. Esse resultado nos diz que o volume é menor ou igual a 4000 cm³, e o volume será máximo se, e quando, a igualdade ocorrer. A igualdade acontece quando os termos forem iguais, ou seja, quando $x^2 = 2xh$. Das igualdades obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} x^2 = 2xh \\ x^2 + 4xh = 1200 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos que $x = 20cm$ e $h = 10\ cm$, portanto deduzimos que o valor máximo ocorre quando V = 4000 cm³.

Problema 3. Qual o volume máximo de um cilindro regular inscrito em uma esfera?

Figura 33 – Cilindro regular inscrito em uma esfera



Fonte: elaborada pela autora.

Solução: Utilizando os dados pela figura acima, podemos observar que a altura do cilindro é igual a $2x$ e a área de sua base é dada por $2\pi r$, logo, o seu volume é definido por $V = \pi r^2 2x$. Vamos utilizar o teorema de Pitágoras no triângulo que pode ser observado na imagem, assim conseguimos obter que $r^2 = R^2 - x^2$, reescrevendo o volume substituindo o valor de r^2, obtemos

$$V = 2\pi x(R - x)(R + x).$$

Agora, vamos utilizar a desigualdade das médias $G \leq A$, com os termos de V, calculando a média geométrica dos termos $2\pi x, (R - x) e\ (R + x)$. Aqui, faremos uma pequena alteração que não irá alterar o valor de G. Acrescentaremos α e β com o objetivo de tornar A independente de x.

$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{\alpha\beta}.x.\alpha(R - x)\beta(R + x)}$$

$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{\alpha\beta}}\sqrt[3]{x\alpha(R - x)\beta(R + x)}$$

Aqui, está um outro passo importante, vamos utilizar a desigualdade $\sqrt[3]{x\alpha(R - x)\beta(R + x)} \leq \left(\frac{x+\alpha(R-x)+\beta(R+x)}{3}\right)$

$$\sqrt[3]{V} \leq \sqrt[3]{\frac{2\pi}{\alpha\beta}}\left(\frac{x + \alpha(R - x) + \beta(R + x)}{3}\right).$$

Na desigualdade acima, temos um fator comum $\sqrt[3]{\frac{2\pi}{\alpha\beta}}$ e a desigualdade $G \leq A$, calculadas nos termos x, $\alpha(R - x)$ e $\beta(R + x)$. Observe que em A, temos no numerador $x + \alpha(R - x) + \beta(R + x) = (1 + \beta - \alpha)x + (\alpha + \beta)R$. Queremos que A independa de x, então o termo $(1 + \beta - \alpha)$ deve ser igual a zero, fazendo isso, obtemos $\alpha - \beta = 1$. Porém, sabemos que a igualdade das médias só ocorrerá quando seus três termos forem iguais, ou seja: $x = \alpha(R - x) = \beta(R + x)$. Portanto,

$$\alpha = \frac{x}{R - x}\ e\ \beta = \frac{x}{R + x}$$

Se substituirmos os valores de α e β em $\alpha - \beta = 1$ obtemos

$$\frac{x}{R - x} - \frac{x}{R + x} = 1$$

$$x\left(\frac{R + x - R + x}{R^2 - x^2}\right) = 1$$

$$2r^2 = R^2 - x^2$$

$$x = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

Substituindo o valor de x em V, concluímos que o volume máximo para o cilindro inscrito numa esfera de raio R será igual a $V = \frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$.

Problema 4. Sejam a, b e c números reais positivos e suponha que $ax^2 + by^2 = c$, determine x e y reais positvos, tais que o produto xy seja máximo.

Solução: Utilizando o *Teorema da Desigualdade das Médias*, temos que:

$$\frac{ax^2 + by^2}{2} \geq \sqrt{ax^2by^2}$$

$$\frac{c}{2} \geq xy\sqrt{ab}$$

$$xy\sqrt{ab} \leq \frac{c}{2}$$

O valor de xy será máximo quando ocorrer a igualdade, ou seja $ax^2 = by^2 = \frac{c}{2}$. Portanto $x = \sqrt{\frac{c}{2a}}$ e $y = \sqrt{\frac{c}{2b}}$.

Problema 5. Para $x > 0$ qual o valor mínimo de $y = x^2 + \frac{1}{x}$?

Solução: A função y poderá ser escrita da seguinte forma

$$y = x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}$$

Aplicando o teorema da desigualdade das médias $A \geq G$, obtemos

$$\frac{x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 . \frac{1}{2x} . \frac{1}{2x}}$$

$$x^2 + \frac{1}{x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

A igualdade será obtida quando $x^2 = \frac{1}{2x} \Rightarrow x^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt[2]{\frac{1}{2}}$.

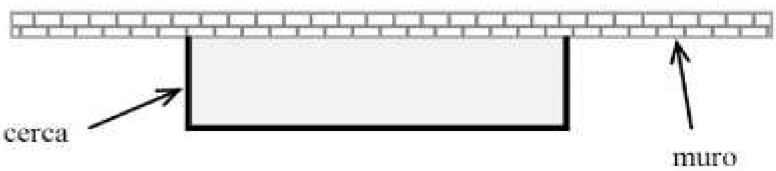
A seguir apresentamos alguns problemas de otimização de caráter geométrico que podem ser solucionados através do *Teorema da Desigualdade das Médias*.

4.2.3 Problemas Propostos

Problema 4.5. Se uma lata de zinco de volume $128\ \text{cm}^3$ deve ter a forma de um cilindro circular reto, encontre a altura e o raio do cilindro para que a quantidade de material usado em sua fabricação seja a menor possível. (RPM 76, p. 28)

Problema 4.6. Um fazendeiro deseja delimitar uma área retangular utilizando 40m de cerca e aproveitando um muro (de mais de 40m) que já está construído. Determine as dimensões do retângulo de maior área que o fazendeiro consegue delimitar. (PROFMAT, ENA 2012)

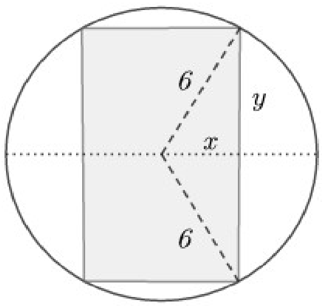
Figura 34 – Área retangular



Fonte: ENA, 2012.[8]

Problema 3.7. Encontre as dimensões do cilindro circular reto de maior área lateral que pode ser inscrito numa esfera de raio 6 m. (RPM, 76, p. 29)

Figura 35 – Cilindro circular reto



Fonte: elaborada pela autora, baseada em RPM, nº 76, p. 29.

Problema 4.8. Qual o volume máximo de um paralelepípedo retângulo de área total A? (Fonte, 2013)

[8] Disponível em: <https://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2016/08/Exame-de-Acesso_questoes_-2012.pdf>. Acesso em 05 de out. de 2020.

5 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO COM USO DO CÁLCULO

Este capítulo está dividido em três seções. Na primeira delas apresentamos algumas orientações para a resolução de problemas de otimização utilizando os conceitos fundamentais de Cálculo e aplicamos essas orientações na resolução de alguns problemas selecionados envolvendo áreas e volumes, para isso, também serão utilizados os conceitos de Geometria, expostos no capítulo 2. A segunda seção aborda alguns problemas de otimização aplicados em outras áreas como Física, Economia e na Natureza. Já a terceira e última seção apresenta alguns problemas propostos ao leitor.

5.1 Resolução de problemas geométricos com uso do cálculo

De acordo com STEWART (2013, p. 249), para resolver um problema de otimização através do Cálculo, precisamos seguir algumas etapas sequencialmente. Como a função não é diretamente dada, devemos encontrá-la e, em seguida, escrever a função e seu domínio. O segundo passo consiste em calcular a derivada da função e verificar qual o domínio da derivada.

Através da derivada, encontramos os possíveis valores de máximo e mínimo, fazendo $f'(x) = 0$, em seguida, devemos prestar atenção se esses pontos pertencem ao domínio da função. Para confirmar se esses pontos são realmente os valores procurados, precisaremos do estudo do sinal de $f'(x)$ e $f''(x)$, ou seja, teste da primeira e segunda derivada.

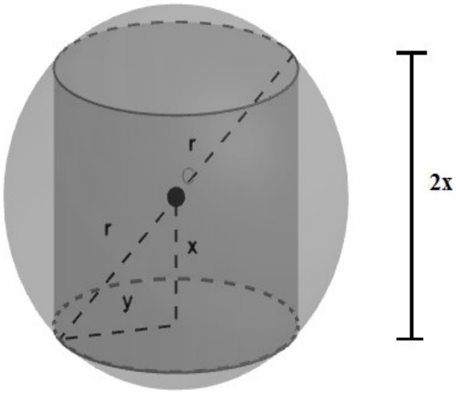
O estudo do sinal de $f'(x)$ ajuda a determinar os máximos e mínimos locais, que pode ser feito através do teste da derivada primeira, visto no Capítulo 1. Através do estudo do sinal de $f''(x)$, os máximos e mínimos locais podem ser determinados pelo teste da derivada segunda. Por último, devemos garantir que o ponto é de máximo ou mínimo global no intervalo do domínio do problema proposto.

Apresentamos, a seguir, cinco problemas de otimização dentro do contexto da geometria, onde queremos maximizar (ou minimizar) medidas de áreas e volumes.

Problema 1. Um cilindro circular reto é inscrito em uma esfera de raio r. Encontre a maior superfície possível para este cilindro. (STEWART, 2013, p. 300)

Solução: Para a resolução deste problema utilizaremos o teste da primeira derivada apresentado no Capítulo 1 e a definição de área da superfície total de um cone. O problema nos dá a medida do raio r da esfera. Chamaremos de y o raio da base do cilindro e sua altura de $2x$, assim podemos esboçar a figura a seguir

Figura 36 – Cilindro regular inscrito em uma esfera de raio r



Fonte: elaborada pela autora.

Primeiramente, vamos encontrar a função que queremos maximizar. Devemos maximizar a superfície do cilindro que pode ser representada pela seguinte fórmula

$$S = 2\pi y^2 + 2\pi y(2x).$$

Para encontrar a máxima superfície precisamos encontrar o raio do cilindro, que chamaremos de y, então isolaremos uma dessas variáveis utilizando o triângulo retângulo, aplicando o teorema de Pitágoras.

$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad (I)$$

Substituindo o valor de y e m S, obtemos:

$$S = 2\pi y^2 + 2\pi y(2x) = 2\pi\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 + 2\pi.\sqrt{r^2 - x^2}.(2x)$$

$$S = 2\pi(r^2 - x^2) + 4\pi x\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$S = 2\pi r^2 - 2\pi x^2 + 4\pi x\sqrt{r^2 - x^2}$$

Vamos calculara a derivada primeira de S e em seguida fazemos $S'(x) = 0$ para obter os pontos crítico:

$$S'(x) = 0 = 0 - 4\pi x + 4\pi\sqrt{r^2 - x^2} + 4\pi x.\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right), 0 \le x \le r$$

$$S'(x) = 0 = 4\pi\left[-x - \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \sqrt{r^2 - x^2}\right]$$

$$S'(x) = 0 = 4\pi\frac{\left(-x\sqrt{r^2 - x^2} - 2x^2 + r^2\right)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Como toda a função está sobre um mesmo quociente, e 4π é uma constante, podemos ignorar esses termos para resolver o restante da equação, logo:

$$S'(x) = x\sqrt{r^2 - x^2} = r^2 - 2x^2$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$x^2\sqrt{(r^2 - x^2)^2} = (r^2 - 2x^2)^2$$

$$x^2(r^2 - x^2) = r^4 - 4r^2x^2 + 4x^4$$

Daí, obtemos a seguinte equação biquadrada

$$S'(x) = 5x^4 - 5x^2r^2 + r^4$$

Igualando a zero e resolvendo a equação, obtemos que

$$x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}r^2$$

Podemos ignorar a raiz com sinal positivo, porque como vimos em (I), x^2 precisa ser no máximo metade de r^2, senão teremos uma raiz negativa e isso inviabiliza a equação, logo,

$$x = r\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$$

Já que encontramos o valor de x, agora podemos calcular o valor de y e substituir em S.

$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$y^2 = r^2 - \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}r^2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}r^2$$

$$y = r\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$$

Substituindo o valor de y em $S = 2\pi y^2 + 4\pi yx$, obtemos

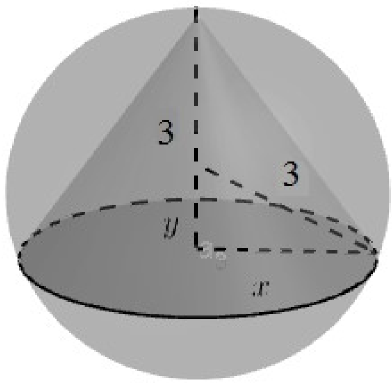
$$S = 2\pi.\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{10}r\right)^2 + 4\pi.\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{10}r\right)\left(r\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}\right)$$

$$S = \pi r^2 \left[2\frac{5+\sqrt{5}}{10} + 4\left(\frac{\sqrt{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}}{10} \right) \right] = \pi r^2 \left[\frac{5+5\sqrt{5}}{5} \right] = \pi r^2 (1+\sqrt{5})$$

Portanto, podemos concluir que a superfície máxima é dada por: $S = \pi r^2(1+\sqrt{5})$.

Problema 2. Determine o volume do maior cone de revolução[9] que pode ser inscrito em uma esfera de raio igual a 3. (Thomas, 2012)

Figura 37 – Cone inscrito em uma esfera



Fonte: elaborada pela autora.

Solução: Para a resolução deste problema precisamos dos conceitos de volume do cone e volume da esfera que foram abordados no capítulo 2 deste trabalho. Além dos testes de primeira derivada, abordados no capítulo 1.

O volume desse cone é dado pela área da base vezes a altura. Usando as variáveis dadas no enunciado, temos:

$$V = \frac{\pi x^2 (y+3)}{3}$$

Mas olhando para o triângulo retângulo de catetos x e y, e de hipotenusa 3, obtemos:

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

Se isolarmos o valor x^2, temos:

$$x^2 = 9 - y^2$$

[9] Cone de revolução é o sólido geométrico gerado por um triângulo retângulo que roda em torno de um dos seus catetos até completar uma volta completa.

O volume ficará

$$V = \frac{\pi(9-y^2)(y+3)}{3} = \frac{\pi(9y+27-y^3-3y^2)}{3}$$

$$V = \frac{\pi(9y+27-y^3-3y^2)}{3}$$

Iremos considerar y variando de -3 a 3. Estamos dizendo que y é a distância do centro da esfera até a base do cone, mas distância vista como coordenada. Assim pegamos os cones como na figura ou que tenha a base acima do centro. Logo, nosso domínio é dado por:

$$-3 \leq y \leq 3$$

Após encontrarmos o domínio, precisamos encontrar os pontos críticos, calculando a primeira derivada de V e fazendo $V' = 0$

$$V' = \frac{\pi(-3y^2-6y+9)}{3}$$

Fazendo $V' = 0$, obtemos:

$$\frac{\pi(-3y^2-6y+9)}{3} = 0 \Rightarrow -3y^2-6y+9 = 0$$

Resolvendo a equação, encontramos que $y = -3$ ou $y = 1$

Agora, devemos encontrar os valores dessa função nos pontos críticos e extremos do intervalo.

Se $y = 3$ então,

$$V = \frac{\pi(9.3+27-3^3-3.3^2)}{3} = \frac{\pi}{3}.0 = 0$$

Se $y = 1$ então,

$$V = \frac{\pi(9.1+27-1^3-3.1^2)}{3} = \frac{\pi}{3}.32 = \frac{32\pi}{3}$$

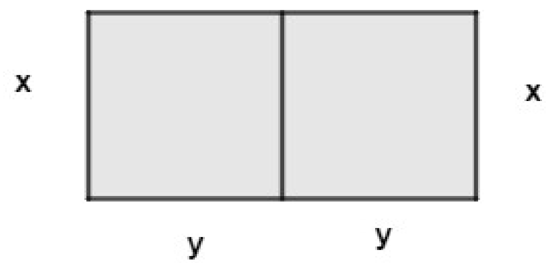
Se $y = -3$ então,

$$V = \frac{\pi(9.(-3)+27-(-3)^3-3.(-3)^2)}{3} = \frac{\pi}{3}.0 = 0$$

Logo, o maior valor obtido ocorre quando $y = 1$, ou seja, o volume máximo será $\frac{32}{3}$.

Problema 3. Uma horta de ervilhas retangular com 216 m² será cercada e dividida em duas partes iguais por outra cerca paralela a um dos lados. Quais as dimensões do retângulo externo que exigirão a menor quantidade total de cerca? Quantos metros de cerca serão necessários? (THOMAS 2012, p. 311)

Figura 38 – Horta retangular



Fonte: elaborada pela autora.

Solução: Para a resolução deste problema, vamos utilizar os conceitos de área do retângulo e o teorema da derivada primeira. O total de cerca que precisamos utilizar será dado por

$$C = 3y + 4x \qquad \text{(I)}$$

A área da horta foi dada, então

$$A = 2xy = 216$$

Daí tiramos que $xy = 108$, isolando o valor de $y = \frac{108}{x}$ com $x \neq 0$. Substituindo em (I), temos:

$$C = 3.\frac{108}{x} + 4x$$

$$C = 4x + \frac{324}{x}$$

Para encontrarmos o valor de mínimo ou máximo, devemos comparar o valor da função nos pontos críticos e nos extremos do intervalo

Para encontrar os pontos críticos, vamos calcular a derivada primeira da função.

$$C' = 4 - 324x^{-2}$$

Igualando a zero, e resolvendo a equação obtida, encontramos que $x = \pm 9$. Além desses pontos, vamos ter o ponto crítico quando $x = 0$, pois nesse caso a derivada não existe. Mas de todos esses valores apenas o valor $x = 9$ é que servirá para o problema. O nosso próximo passo será encontrar o valor da função nos pontos críticos e extremos do intervalo. Sendo uma das limitações o zero, podemos afirmar que a outra limitação será o infinito.

Para $x = 0 \rightarrow C = 4.0 + \frac{324}{0} = \infty$

Para $x = 9 \rightarrow C = 4.9 + \frac{324}{9} = 72$

Para $x = \infty \rightarrow C = 4.\infty + \frac{324}{\infty} = 0$

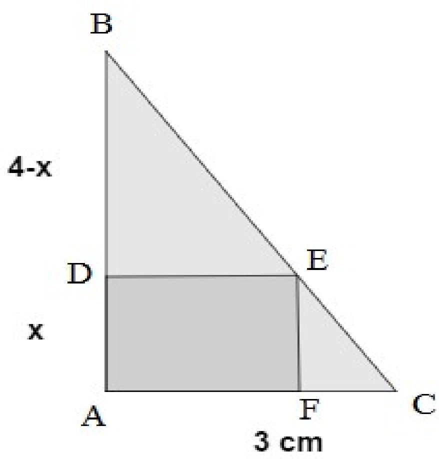
Logo, o menor dos três valores que x pode assumir é 9. Sendo assim, $y = 12m$ e o comprimento mínimo procurado será de $72\ m$.

O problema a seguir, mostra um exemplo que poderia ser resolvido sem o uso do cálculo diferencial, mas optamos por resolvê-lo utilizando essa ferramenta, mesmo podendo ser facilmente resolvido com as definições de funções quadráticas apresentadas no capítulo anterior.

Problema 4. Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um triângulo retângulo com catetos de comprimentos 3 e 4 cm, se dois lados do retângulo estiverem sobre os catetos. (STEWART, 2013, p. 300)

Solução: Seja x a variável que representa o comprimento de um lado do retângulo inscrito, ou seja, chamaremos $\overline{AD} = x$, por semelhança de triângulos, podemos encontrar a medida do outro lado em função da variável x.

Figura 39 – Retângulo inscrito



Fonte: elaborada pela autora.

Sabemos que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo DBE, chamaremos de y a medida do outro lado do retângulo, daí tiramos a proporção:

$$\frac{4}{3} = \frac{4 - x}{y}$$

Encontramos que $y = 3 - \frac{3}{4}x$. A área do retângulo é dada pelo produto

$$A(x) = xy$$

Fazendo a substituição do valor de y encontrado obtemos:

$$A(x) = x.\left(-\frac{3}{4}x + 3\right) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$$

$$A(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$$

Encontramos a função que nos dará a área máxima desse retângulo. Derivando a função $A(x)$, obtemos:

$$A'(x) = -\frac{3}{2}x + 3$$

Igualando a zero, temos:

$$-\frac{3}{2}x + 3 = 0$$

$$x = 2$$

Sendo $x = 2$, então y será dado por:

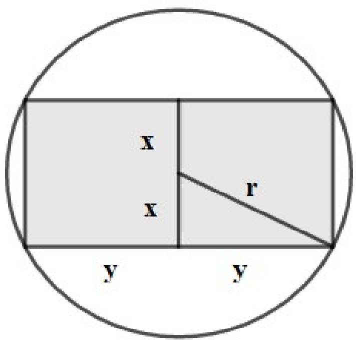
$$y = 3 - \frac{3}{4}.2 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

Logo, a área máxima será $A(x) = xy = 3\ cm^2$

Problema 5. Encontre as dimensões do retângulo com a maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio r. (STEWART, 2013, p. 300)

Solução: Primeiramente, vamos fazer uma ilustração do problema.

Figura 40 – Retângulo inscrito em um círculo



Fonte: elaborada pela autora.

Agora, no segundo passo, devemos encontrar uma função que representa esse problema. Sabe-se que a equação do círculo é dada por: $x^2 + y^2 = r^2$. Se isolarmos a variável y, obtemos:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad (I)$$

Ao observar a figura, os lados do retângulo são dados por $2x$ e $2y$, logo sua área é igual a $4xy$. Agora, vamos substituir o valor de y que encontramos na equação (I) na expressão da área, assim, obtemos:

$$A(x) = 4x\sqrt{r^2 - x^2}$$

Onde $A(x)$ é a função que determina a área do retângulo em função da variável x. Vamos calcular a primeira derivada e fazer $A'(x) = 0$ para determinar os pontos críticos.

$$A'(x) = 4\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{4x}{2} . \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} . (-2x)$$

$$= 4\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$= \frac{4(r^2 - x^2) - 4x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$A'(x) = \frac{4r^2 - 8x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0$$

Da igualdade, encontramos que

$$x^2 = \frac{r^2}{2} \Rightarrow x = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

Substituindo na equação I para determinar o valor de y:

$$y = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2}.$$

Logo, $x = y$ e as dimensões do retângulo são $2x = r\sqrt{2}$ e $2y = r\sqrt{2}$

Portanto, o retângulo inscrito no círculo de raio r que tem a maior área é um quadrado de lado igual a $r\sqrt{2}$.

5.2. Aplicações de problemas de otimização em outras áreas

Apesar do foco geométrico deste trabalho, sabemos que em diversas áreas da ciência é possível encontrar aplicações de problemas de otimização e de derivada. Nesta seção, resolveremos algumas situações-problemas que surgem de aplicações na física, biologia, indústria e outras.

Problema 1. Um objeto com peso W é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda presa ao objeto. Se a corda fizer um ângulo θ com o plano, então a magnitude da força é

$$F = \frac{\mu W}{\mu sen\theta + \cos\theta}$$

onde μ é uma constante positiva chamada coeficiente de atrito e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Mostre que F é minimizada quando $tg\theta = \mu$.

Solução: Neste problema, já temos a função que deve ser minimizada, vamos calcular sua derivada em relação a θ. Sendo μW constante, temos que

$$F^{'}(\theta) = \frac{(\mu W)'(\mu sen\theta + \cos\theta) - (\mu W)(\mu sen\theta + \cos\theta)'}{(\mu sen\theta + \cos\theta)^2}$$

$$F^{'}(\theta) = \frac{-(\mu W)(\mu cos\theta - sen\,\theta)}{(\mu sen\theta + \cos\theta)^2}$$

Fazendo $F^{'}(\theta) = 0$ para determinar os seus pontos críticos, obtemos:

$$\frac{-(\mu W)(\mu cos\theta - sen\,\theta)}{(\mu sen\theta + \cos\theta)^2} = 0$$

$$-(\mu W)(\mu cos\theta - sen\,\theta) = 0.(\mu sen\theta + \cos\theta)^2$$

$$(\mu cos\theta - sen\,\theta) = \frac{0}{-(\mu W)}, com\ \mu W \neq 0$$

$$\mu cos\theta - sen\,\theta = 0$$

$$\mu = \frac{sen\,\theta}{cos\theta}$$

$$\mu = tg\theta$$

Ou seja, o ponto de mínimo dessa função será quando $\mu = tg\theta$.

Problema 2. Para quais valores dos números a e b a função

$$f(x) = axe^{bx^2}$$

tem valor máximo $f(2) = 1$?

Solução: Inicialmente vamos calcular a derivada de $f(x)$.

$$f^{'}(x) = ax.e^{bx^2}$$

$$f\ '(x) = a.e^{bx^2} + ax.e^{bx^2}.2bx$$

$$f'(x) = ae^{bx^2}.(1 + 2bx^2)$$

Para determinar o ponto máximo, devemos fazer $f\,'(x) = 0$ e sabdemos que esse ponto máximo ocorre quanfo $x = 0$, pois foi dado que $f(2) = 1$ é o ponto máximo dessa função. Logo, podemos afirmar que:

$$ae^{b2^2}.(1 + 2b.2^2) = 0$$

$$ae^{4b}.(1 + 8b) = 0.$$

Da igualdade, concluímos que $1 + 8b = 0$, portanto $b = -\frac{1}{8}$. Substituindo esse valor na função f, obtemos:

$$f(2) = a.2.e^{-\frac{1}{8}.2^2} = 1$$

$$ae^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

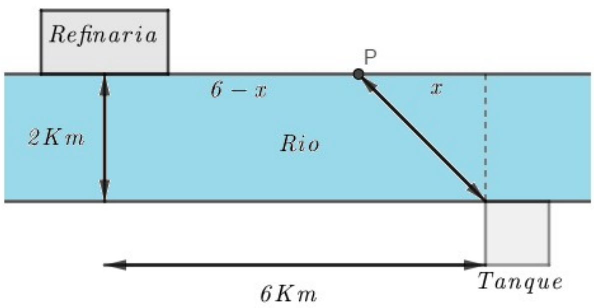
$$a\frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{\sqrt{e}}{2}.$$

Concluímos que a função f terá valor máximo $f(2) = 1$ se $a = -\frac{1}{8}$ e $b = \frac{\sqrt{e}}{2}$.

Problema 3. Uma refinaria de petróleo está localizada na margem norte de um rio reto que tem 2 km de largura. Um oleoduto deve ser construído da refinaria até um tanque de armazenamento localizado na margem sul do rio, 6 km a leste da refinaria. O custo de construção do oleoduto é \$ 400.000/km sobre a terra, até um ponto P na margem norte e \$ 800.000/km sob o rio até o tanque. Onde P deveria estar localizado para minimizar o custo do oleoduto?

Figura 41 – Ilustração do problema 3



Fonte: elaborada pela autora.

Solução: Inicialmente, vamos encontrar a função custo da construção do oleoduto que poderá ser expressa da seguinte forma:

$$C(x) = 400000(6 - x) + 800000y$$

Chamamos de y a distância do ponto P ao oleoduto. Observando a figura 41, podemos afirmar que $y^2 = x^2 + 2^2$, daí tiramos que $y = \sqrt{x^2 + 4}$. Fazendo a substituição do valor de y na função, obtemos:

$$C(x) = 400000(6 - x) + 800000.\sqrt{x^2 + 4}$$

Vamos minimizar $C(x)$, fazendo $C'(x) = 0$

$$C'(x) = -400000 + \frac{800000x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$-400000 + \frac{800000x}{\sqrt{x^2 + 4}} = 0$$

$$x = \frac{400000\sqrt{x^2 + 4}}{800000}$$

$$x = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

Resolvemos a equação fazendo

$$2x = \sqrt{x^2 + 4}$$

Eliminamos o radical elevando ambos os membros ao quadrado, assim temos:

$$4x^2 = x^2 + 4$$

$$3x^2 = 4$$

$$x = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1{,}15$$

O problema quer saber onde P deveria estar localizado para minimizar, observando a ilustração, observamos que P deve estar a $(6 - x)\ km$ da refinaria, portanto P estará a, aproximadamente, 4,85 km da refinaria.

Problema 4. Determine o número real positivo cuja soma com o inverso de seu quadrado seja mínima.

Solução: Seja x um número real positivo. Chamaremos de $f(x)$ a soma desse número com o inverso do quadrado desse número x, ou seja:

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2}.$$

Para que a soma seja mínima, devemos obter o mínimo global da função $f(x)$, para determinar esse valor precisamos calcular a derivada de f e igual a zero, assim temos:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$$

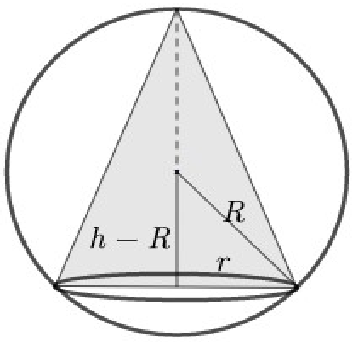
$$1 - \frac{2}{x^3} = 0$$

$$x = \sqrt[3]{2}$$

A soma será mínima em $x = \sqrt[3]{2}$.

Problema 5. Determine a altura do cone circular reto, de volume máximo, inscrito na esfera de raio R dado.

Figura 42 – Ilustração do problema 5



Fonte: elaborada pela autora.

Solução: Observando a ilustração a seguir, podemos observar que $R^2 = (h - R)^2 + r^2$, isolando r^2, obtemos

$$r^2 = 2hR - h^2.$$

O volume de um cone é dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, substituindo o valor de r^2, encontramos

$$V = \frac{1}{3}\pi(2hR - h^2).h = \frac{\pi}{3}(2h^2R - h^3).$$

Obtemos uma função V na variável h, onde $0 < h < 2R$. Vamos encontrara derivada primeira de V.

$$V = \frac{\pi}{3}(2h^2R - h^3)$$
$$V' = \frac{\pi}{3}(4hR - 3h^2)$$
$$V' = \frac{\pi}{3}h(4R - 3h)$$

Igualando a zero obtemos

$$\frac{\pi}{3}h(4R - 3h) = 0$$
$$h = 0 \; ou \; h = \frac{4R}{3}$$

Visto que h não poderia ser nulo, temos que $h = \frac{4R}{3}$ é a altura que maximiza o volume do cone inscrito na esfera de raio R. O raio do cone inscrito na esfera é dado por $r^2 = 2\frac{4R}{3}R - \left(\frac{4R}{3}\right)^2$, que resulta em $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$.

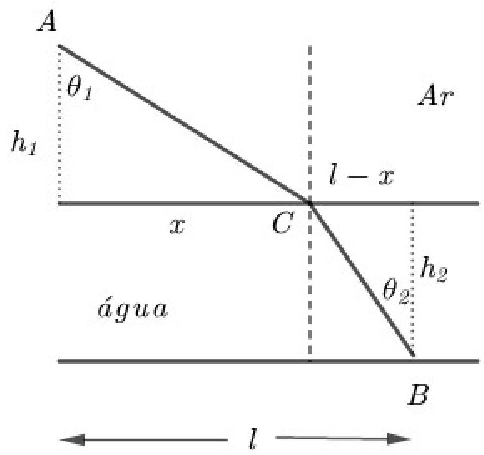
Problema 6. (Lei de Snell) Seja v_1 a velocidade da luz no ar e v_2 a velocidade da luz na água. De acordo com o Princípio de Fermat, um raio de luz viajará de um ponto A no ar para um ponto B na água por um caminho ACB que minimiza o tempo gasto. Mostre que

$$\frac{sen\theta_1}{sen\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

onde θ_1 é o ângulo de incidência e θ_2 o ângulo de refração.

Solução:

Figura 43 – Ilustração do problema 6



Fonte: elaborada pela autora.

Solução: Observe a ilustração acima. Devemos minimizar o tempo em que o raio de luz leva para fazer o percurso de A até B.

Sabe-se que a velocidade é dada pela razão entre a distância percorrida e o tempo gasto, logo temos

$$v_1 = \frac{AC}{T_1} \qquad v_2 = \frac{CB}{T_2}$$

$$T_1 = \frac{AC}{v_1} \qquad T_2 = \frac{CB}{v_2}$$

O tempo total gasto será dado pela soma dos tempos gastos para percorrer de A até C e de C até B.

$$T = T_1 + T_2$$

$$T = \frac{AC}{v_1} + \frac{CB}{v_2} \quad (I)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras nos dois triângulos retângulos da ilustração, obtemos

$$AC^2 = x^2 + {h_1}^2$$

$$AC = \sqrt{x^2 + {h_1}^2}$$

$$CB^2 = (l - x)^2 + {h_2}^2$$

$$CB = \sqrt{(l - x)^2 + {h_2}^2}$$

Substituindo os valores de AC e CB encontramos em (I), temos que

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + {h_1}^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(l - x)^2 + {h_2}^2}}{v_2}$$

Com x variando de zero a l, como pode se visto na figura ilustrativa, ou seja, $0 \leq x \leq l$.

Derivando T para encontrar os valores extremos, obtemos:

$$T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2 + {h_1}^2}} + \frac{d - x}{v_2\sqrt{(l - x)^2 + {h_2}^2}}$$

Fazendo $T'(x) = 0$ encontramos:

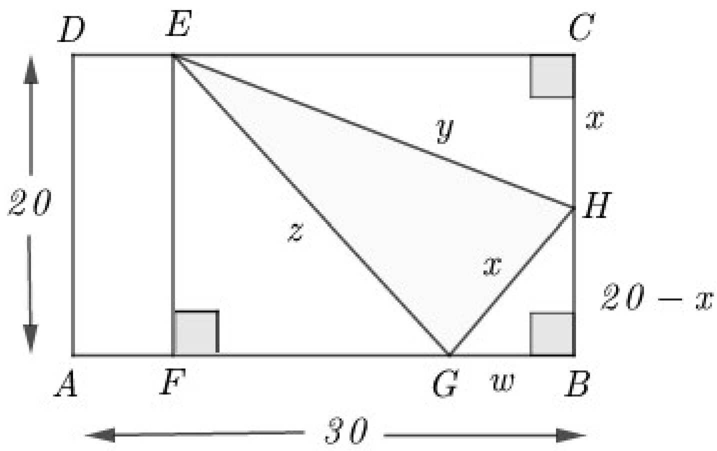
$$\frac{Sen\theta_1}{V_1} + \frac{Sen\theta_2}{V_2} = 0$$

$$\frac{Sen\theta_1}{v_1} = \frac{Sen\theta_2}{v_2}$$

Esse resultado é conhecido como Lei de Snell.

Problema 7. O canto superior direito de um pedaço de papel com 30 cm de largura por 20 cm de comprimento é dobrado sobre o lado direito. Como você dobraria de forma a minimizar o comprimento da dobra?

Figura 44 – Ilustração do problema 7



Fonte: elaborada pela autora.

Solução: Observando a ilustração do problema, vamos inicialmente, aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo GBH, obtendo

$$x^2 = (20 - x)^2 + w^2$$
$$x^2 - w^2 = 400 - 40x + x^2$$
$$w^2 = 40x - 400$$
$$w^2 = 40(x - 10)$$
$$w = \sqrt{40(x - 100)} = 2\sqrt{10x - 100}.$$

Podemos observar que os ângulos $F\hat{E}G$ e $B\hat{G}H$ são congruentes, já que os triângulos FEG e GBH são semelhantes pelo caso AAA, pois ambos têm um ângulo reto e os dois têm os outros dois ângulos complementares ao triângulo GEH, portanto podemos escrever a proporção

$$\frac{20}{z} = \frac{2\sqrt{10x - 100}}{x}.$$

De onde obtemos que

$$z = \frac{20x}{2\sqrt{10x-100}} = \frac{10x}{\sqrt{10x-100}}.$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo sombreado, encontramos:

$$y^2 = x^2 + z^2\,.$$

Fazendo $f(x) = y^2$ e substituindo z por seu valor encontrado, obtemos

$$f(x) = x^2 + \left(\frac{10x}{\sqrt{10x-100}}\right)^2$$

Desenvolvendo encontramos a função que precisamos ser minimizada.

$$f(x) = \frac{x^3}{x-10}$$

Com $4 < x \leq 8$.

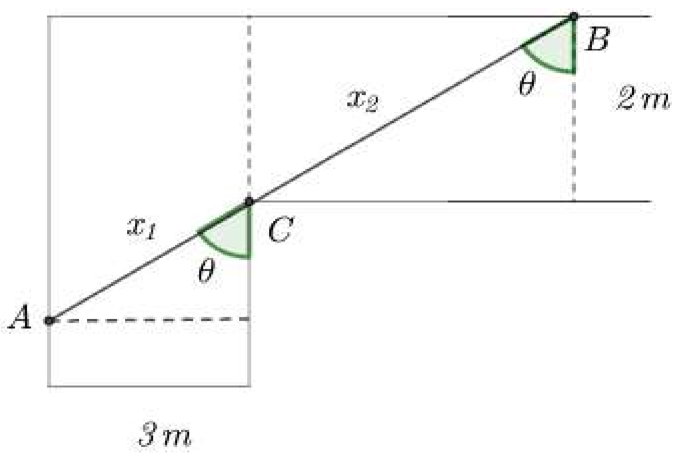
Vamos minimizar $f(x)$, calculando sua derivada primeira e igualando a zero.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-10) - x^3}{(x-10)^2} = \frac{2x^3 - 30x^2}{(x-10)^2} = \frac{2x^2(x-15)}{(x-10)^2} = 0$$

Da igualdade resulta que $2x^2 = 0$ ou $x = 15$, mas como x não pode ser zero, então o valor que minimiza y é $x = 15$.

Problema 8. Um cano de metal está sendo carregado através de um corredor com 3 m de largura. No fim do corredor há uma curva em ângulo reto, passando-se para um corredor com 2 m de largura. Qual é o comprimento do cano mais longo que pode ser carregado horizontalmente em torno do cano?

Figura 45 – Ilustração do problema 8



Fonte: elaborada pela autora, baseada em Stewart, 2012, p. 303.

Solução: Para a resolução desse problema, chamaremos de x_1, a distância AC e de x_2, a distância CB. Utilizando as funções trigonométricas, temos que $sen\ \theta\ = \frac{3}{x_1}$ e $cos\ \theta = \frac{2}{x_2}$

A medida de $AC\ =\ y$ será dada por

$$y = x_1\ +\ x_2\ =\ \frac{3}{sen\ \theta} + \frac{2}{\cos\theta} = 3cossec\theta + 2.\sec\theta$$

$$y = 3cossec\theta + 2.\sec\theta$$

Determinando a derivada primeira de y, obtendo

$$y' = -3cossec\ \theta\ .\cot\theta + 2.\sec\theta\ .tg\ \theta.$$

Igualando a zero, temos

$$-3cossec\ \theta\ .\cot\theta + 2.\sec\theta\ .tg\ \theta = 0$$

$$\frac{cossec\ \theta\ .\cot\theta}{\sec\theta\ .tg\ \theta} = \frac{3}{2}$$

$$tg^3\theta = \frac{3}{2}$$

$$tg\ \theta = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$

Pelas relações trigonométricas fundamentais, sabe-se que $cossec^2\theta\ =\ 1 + cotg^2\ \theta$ e que $\sec^2\theta = 1 + tg^2\theta$. Temos então que $tg^2\theta = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, substituindo nas duas relações encontramos

$$sec^2\ \theta =\ 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow cossec\ \theta = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}} = \left[1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$cossec^2\theta = 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \sec\theta = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}} = \left[1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Substituindo os valores de $cossec\theta$ e de $\sec\theta$ em y, obtemos

$$y = 3.\left[1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}} + 2.\left[1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$y \approx 21,07m.$$

Então ocomprimento mais longo do cano será de aproximadamente $21,07$ m.

Problema 9. Em uma colmeia, cada alvéolo um é prisma hexagonal regular, aberto em uma extremidade com um ângulo triédrico na outra extremidade. Acredita-se que as abelhas formam esses alvéolos de modo a minimizar a área da superfície para um dado volume, usando assim uma quantidade mínima de cera na construção. O exame desses alvéolos mostrou que a medida do ângulo do ápice θ é surpreendentemente consistente. Baseado na geometria do alvéolo, pode ser mostrado que a área da superfície S é dada por

$$S = 6sh - \frac{3}{2}s^2 cotg\theta + (3s^2.\frac{\sqrt{3}}{2})cosec\theta$$

onde s, o comprimento dos lados do hexágono, e h, a altura, são constantes.

a) Calcule $dS/d\theta$.

Solução: Sendo $S = 6sh - \frac{3}{2}s^2 cotg\theta + (3s^2.\frac{\sqrt{3}}{2})cosec\theta$, vamos calcular $\frac{dS}{d\theta}$.

$$\frac{dS}{d\theta} = S'(\theta) = \frac{3}{2}s^2 cossec^2\theta - \left(3s^2.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)cosec\theta.cotg\theta$$

$$S'(\theta) = \frac{3}{2}s^2 cossec\,\theta\big(cossec\,\theta - \sqrt{3}.cotg\theta\big)$$

b) Que ângulo as abelhas deveriam preferir?

Solução: O melhor ângulo poderá ser encontrado, fazendo $S'(\theta) = 0$, então

$$\frac{3}{2}s^2 cossec\,\theta\big(cossec\,\theta - \sqrt{3}.cotg\theta\big) = 0$$

Para que a igualdade seja a zero, considerando $\frac{3}{2}s^2 cossec\,\theta$ uma constante, devemos ter $cossec\,\theta - \sqrt{3}.cotg\theta = 0 \Rightarrow cossec\,\theta = \sqrt{3}.cotg\theta$. Como $cossec\,\theta = \frac{1}{sen\,\theta}$ e $cotg\theta = \frac{\cos\theta}{sen\,\theta}$, fazendo as substituições, encontramos que $\frac{1}{sen\,\theta} = \sqrt{3}\frac{\cos\theta}{sen\,\theta}$. Dessa igualdade tiramos que $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.. Analisando a tabela trigonométrica, verificamos que $\theta \approx 55°$.

c) Determine a área da superfície mínima do alvéolo (em termos de s e h).

Solução: A área da superfície mínima é dada por $S = 6sh - \frac{3}{2}s^2 cotg\theta + (3s^2.\frac{\sqrt{3}}{2})cosec\theta$. Considerando $\theta = 55°$, então $cotg\ 55° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $cossec\ 55° = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ .Vamos substituir esses valores e obtemos a área desejada.

$$S \ = \ 6sh \ - \frac{3}{2}s^2.\frac{1}{\sqrt{2}} \ + \ \left(3s^2.\frac{\sqrt{3}}{2}\right).\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$S \ = \ 6sh - \frac{3s^2}{2\sqrt{2}} + \frac{9s^2}{2\sqrt{2}}$$

$$S = 6sh + \frac{6s^2}{2\sqrt{2}}$$

Problema 10. Para um peixe nadando a uma velocidade v em relação à água, a energia gasta por unidade de tempo é proporcional a v_3. Acredita-se que os peixes migratórios tentam minimizar a energia total necessária para nadar uma distância fixa. Se o peixe estiver nadando contra uma corrente $u \ (u \ < \ v)$, então o tempo necessário para nadar a uma distância L é $L/(v \ - u)$ e a energia total E requerida para nadar a distância é dada por

$$E(v) \ = \ av^3.\frac{L}{v \ - \ u}$$

onde a é uma constante de proporcionalidade.

a) Determine o valor de v que minimiza E.

Solução: Como a função E já foi dada, precisamos somente calcular sua derivada primeira e igualar a zero para encontrar o valor de v que minimiza a função

$$E'(v) = aL\frac{3v^2(v-u) - \ v^3}{(v \ - \ u)^2}$$

Considerando aL constantes, temos que

$$\frac{3v^2(v-u) - \ v^3}{(v - u)^2} = 0$$

$$2v^3 - \ 3v^2u = 0$$

$$2v = \ 3u$$

$$v = \ \frac{3u}{2}$$

Problema 11. Quando um objeto estranho se aloja na traqueia, forçando uma pessoa a tossir, o diafragma empurra-o para cima, causando um aumento na pressão dos pulmões. Isso é acompanhado por uma contração da traqueia, fazendo um canal mais estreito por onde o ar expelido escoe. Para uma dada quantidade de ar escapar em um tempo fixo, é preciso que ele se mova mais rápido através do tubo mais estreito do que do mais longo. Quanto maior for a velocidade da corrente de ar, maior a força sobre o objeto estranho. O uso de raios X mostra que o raio do tubo circular da traqueia se contrai $2/3$ de seu raio normal durante a tosse. De acordo com o modelo matemático para a tosse, a velocidade v está relacionada ao raio r da traqueia pela equação

$$v(r) = k(r_0 - r)r^2 \qquad \frac{1}{2}r_0 \leq r \leq r_0,$$

Onde k é uma constante, e r_0 o raio normal da traqueia. A restrição sobre r deve-se ao fato de que as paredes da traqueia endurecem sob pressão, evitando uma contração maior que $\frac{1}{2}r_0$ (de outra forma, a pessoa ficaria sufocada).

a) Determine o valor de r no intervalo $[\frac{1}{2}r_0, r_0]$ no qual v tenha um máximo absoluto. Como isso se compara com a evidência experimental?

Solução: Como a função já foi dada, temos que calcular a derivada primeira e igualar a zero em seguida para encontrar o máximo absoluto.

$$v'(r) = 2krr_0 - 3kr^2$$

$$kr(2r_0 - 3r) = 0$$

$$kr = 0 \; ou \; 2r_0 - 3r = 0$$

$r = 0$ ou $r = \frac{2r_0}{3}$

Mas $r = 0 \notin [\frac{1}{2}r_0, r_0]$, portanto $r = \frac{2r_0}{3}$.

O próximo passo consiste em encontre os valores de v em $r = \frac{2r_0}{3}$ e encontrar os valores de v nos números críticos de v $[\frac{1}{2}r_0, r_0]$.

1. $r = \frac{1}{2}r_0$

$$v\left(\frac{1}{2}r_0\right) = k\left(r_0 - \frac{1}{2}r_0\right)\left(\frac{1}{2}r_0\right)^2 = k.\frac{1}{2}r_0.\frac{1}{4}\,{r_0}^2 = \frac{1}{8}k{r_0}^3$$

2. $r = \dfrac{2r_0}{3}$

$$v\left(\frac{2r_0}{3}\right) = k\left(r_0 - \frac{2r_0}{3}\right)\left(\frac{2r_0}{3}\right)^2 = k.\frac{1}{3}r_0.\frac{4}{9}\,{r_0}^2 = \frac{4}{27}k{r_0}^3$$

3. $r = r_0$

$$v(r_0) = k(r_0 - r_0)(r_0)^2 = 0$$

Podemos concluir que v será máximo quando $r = \frac{2r_0}{3}$

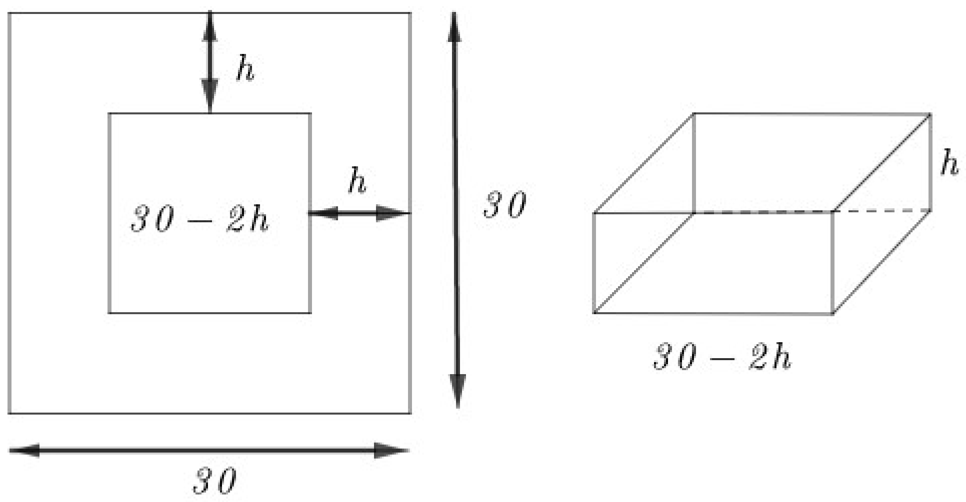
b) Qual é o valor máximo absoluto de v no intervalo?

Solução: Quando $r = \frac{2r_0}{3}$, temos que $v = \frac{4}{27} k{r_0}^3$.

5.3 Problemas Propostos

Problema 5.1. Uma caixa sem tampa vai ser manufaturada a partir de um pedaço de papelão de 30 cm por 30 cm cortado e dobrado como mostrado na Figura 46. Quais são as dimensões que vão produzir uma caixa com o volume máximo. (Ryan, 2011, p. 176 - modificada)

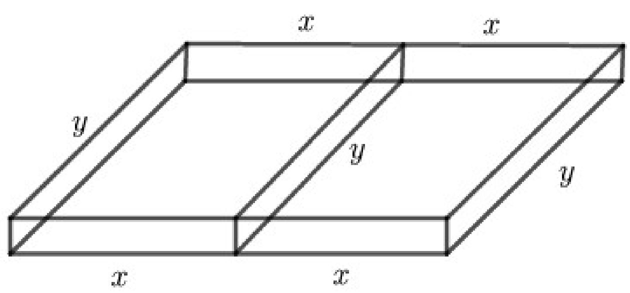
Figura 46 – Caixa dobrável



Fonte: elaborada pela autora, baseada em Ryan, 2011, p. 176.

Problema 5.2. Um fazendeiro tem dinheiro para comprar 300 metros de cerca para fazer um curral que é dividido em dois retângulos iguais. Veja a Figura 41. Quais são as dimensões que vão maximizar a área do curral? (Ryan, 2011, p. 177)

Figura 47 – Curral retangular

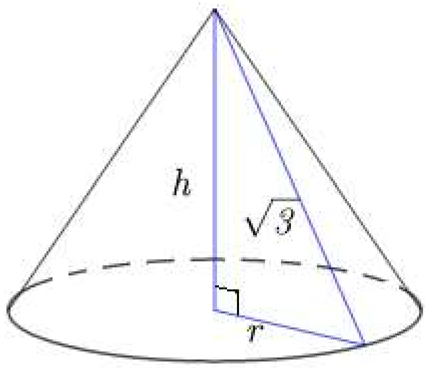


Fonte: elaborada pela autora, baseada em Ryan, 2011, p. 177.

Problema 5.3. Quais são as menores dimensões de uma lata em forma de cilindro reto, sem tampa, para conter 1000 cm³ de volume? Thomas (2012, p. 311)

Problema 5.4. Um triângulo retângulo de hipotenusa $\sqrt{3}$ m gira em torno de um de seus catetos gerando um cone circular reto. Determine o raio, a altura e o volume do cone de maior volume que pode ser gerado dessa maneira. Thomas (2012, p. 259)

Figura 48 – Cone circular reto



Fonte: elaborada pela autora, baseada em Thomas, 2012, p. 259.

6 CONCLUSÃO

Através deste trabalho, conhecemos um pouco sobre os problemas de otimização, que são aqueles para os quais envolvem o processo de encontrar a melhor solução para um problema. Além disso, verificamos que existem diversas áreas de aplicação desses problemas. Associados aos problemas de otimização, trabalhamos com alguns conceitos em geometria plana e espacial.

Observamos que os problemas de otimização surgiram há muito tempo, mas com o desenvolvimento do Cálculo passaram a ser resolvidos de uma forma mais simples, já que a derivada de uma função passou a ser uma excelente ferramenta para resolução desse tipo de problemas. No entanto, além do Cálculo existem outras técnicas que podemos utilizar na resolução desses modelos de problemas e apresentamos outras duas: o uso da desigualdade das médias, que pode ser um importante instrumento na resolução de problemas de otimização aplicados à Geometria Plana e à Geometria Espacial, e o estudo de valores de máximos e mínimos de funções quadráticas.

Acreditamos que as estratégias apresentadas podem ser abordadas no Ensino Médio, visto que formular e resolver problemas e criar soluções com base nos conhecimentos das diferentes áreas é uma das competências gerais da educação básica de acordo com a BNCC (2018, p. 9).

Além disso, o estudo dos problemas de otimização trata de conteúdos importantes, como o estudo de função quadrática, os conceitos de média aritmética, média geométrica, noções geométricas, além dos conceitos de limite e derivada, que apesar de não serem incluídos por muitos professores, no Ensino Médio, poderiam ser apresentados de forma simples e modesta no contexto do estudo das funções.

Conclui-se que, apesar dos três artifícios apresentados, o cálculo toma grande importância para a resolução desse tipo de problema, já que existem várias situações-problemas que não podem ser resolvidas através da desigualdade das médias, nem com o uso dos valores de máximo e mínimo de uma função quadrática.

Almeja-se que este trabalho possa servir de apoio a professores que desejem ampliar os seus conhecimentos pela área abordada ou utilizar em seu planejamento didático para as aulas de Matemática a fim de que possam desenvolver em seus alunos a capacidade de resolver problemas de otimização.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=85121-bncc-ensino-medio&category_slug=abril-2018-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 10 de out. de 2020.

CAMINHA, A. **Geometria: coleção PROFMAT**. Rio de janeiro: SBM, 2013.

CORRÊA, S. D. **O uso de métodos numéricos em problemas de otimização: aplicações no ensino.** UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, 2016. Disponível em: <Médiohttp://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/306035/1/Correa_SoniaDourado_M .pdf>. Acesso em 12 de set. 2020.

DOLCE, O.; POMPEU, J. N. **Fundamentos de matemática elementar**. Vol. 9 .7 ed. São Paulo: Atual, 1993.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar**. Vol. 10. 8a. ed. São Paulo: Atual, 2006.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**, tradução Hygino H. Domingues,5ª ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 2011.

FEITOSA, O. L. **Algumas técnicas de resolução de problemas de mínimos e máximos na geometria euclidiana**. Universidade Federal de Roraima. Boa Vista, 2015. Disponível em: < http://www.bdtd.ufrr.br/tde_arquivos/7/TDE-2015-06-19T090151Z-236/Publico/OsmilcyLimaFeitosa.pdf >. Acesso em: 12 de jan. de 2020.

FILHO, A.F.B. **Estudo para a resolução de problemas de otimização envolvendo funções trigonométricas.** Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. Cruz das Almas, 2016.

FONTE, A. C. **Médias, desigualdades e problemas de otimização**, 2013. Universidade Federal Rural de Pernambuco. Disponível em: <http://www.dm.ufrpe.br/sites/www.dm.ufrpe.br/files/medias_andre.pdf>. Acesso em: 05 de jul. de 2020.

GERÔNIMO J. R., FRANCO. V.S. **Geometria plana e espacial: um estudo axiomático**. 2ed. Maringá: Eduem, 2010.

IEZZI, G., MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar**. Vol. 1. 8ed. São Paulo: Atual, 2004.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. 3. ed. v.1. São Paulo: Harbra, 1994.

LIMA, E. L., *et al.* **A matemática do Ensino Médio.** Volume 1. 10a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012

LIMA, E. L. **Meu professor de matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LIMA, E. L., *et al.* **A matemática do Ensino Médio.** Volume 2. 7a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016

LIMA, E. L., *et al.* **Temas e problemas**. 3a ed. Rio de janeiro: SBM, 2001.

LIMA, E. L., *et al.* **Temas e problemas elementares.** 12a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA. E. L. **Medida e forma em geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

RPM, 76. **Médias e problemas de otimização.** Fernando Henrique Antunes Araújo. Disponível em: <http://rpm.org.br/rpm/img/conteudo/files/RPM%2076%20-%20Mdias%20e%20problemas%20de%20otimizao.pdf>. Acesso em 10 de jun. de 2020.

RYAN, M. **Cálculos para leigos**. Tradução: Márcia Danielle. 2ed. Rio de Janeiro: Alta Books, 2011.

SANTIAGO, A.E. E. **Entre Euclides e a actualidade: um problema de otimização**, 2013, Universidade Nova de Lisboa, Disponível em < http://www.spiem.pt/eiem2013/wp-content/uploads/2013/05/GD3C5SantiagoAstudillo1.pdf>. Acesso em: 01 de setembro de 2020.

STEWART, J. **Cálculo**. Volume 1. 7a ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. Volume 1. 12a ed. São Paulo: Addison Wesley, 2012.

APÊNDICE A - RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS PROPOSTOS

Problema 4.1. Observando a Figura 31, se chamarmos de x e y, respectivamente, as medidas do comprimento e largura do retângulo, teremos que sua área máxima será dada por $S = xy$. Por semelhança de triânguolos em ABC e DEC, obtemos que

$$\frac{8-x}{y} = \frac{8}{6}$$

$$y = -\frac{6x}{8} + 6.$$

Substituindo em S, temos:

$$S = x.\left(-\frac{6x}{8} + 6\right)$$

$$= -\frac{6x^2}{8} + 6\text{x}$$

O valor de x será máximo quando $x = m = -\frac{b}{2a}$, ou seja, $x = 4$. Logo, a área máxima do retângulo é dada por $S(x) = 12$.

Problema 4.2. Sendo S a área do triângulo. Se S é máxima, então S^2 também será. Dada a fórmula de Heron para calcular a área de um triângulo.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Onde a, b e c são os lados de um triângulo ABC e p é o semiperímetro do triângulo dado por $2p = a + b + c$. Dados a e p, se fizermos $c = x$, temos que $b = 2p - a - x$. Substituindo em S, obtemos:

$$S^2 = p(p-a)(p-(2p-a-x))(p-x)$$

$$S^2 = p(p-a)(a+x-p)(p-x)$$

Devemos encontrar o valor de x para que $(a+x-p)(p-x)$ seja máximo, ou seja $-x^2 + (2p-a)x + (ap-p^2)$ seja máximo. Esse valor será obtido quando $x = \frac{-b}{2a}$. Logo,

$$x = \frac{-(2p-a)}{2.(-1)} = p - \frac{a}{2}.$$

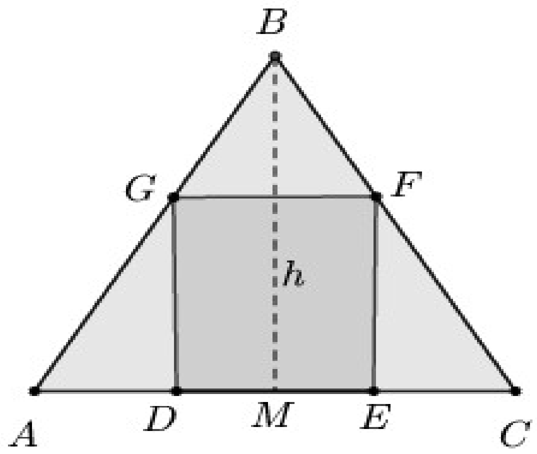
Substituindo em b, obtemos que:

$$b = 2p - a - \left(p - \frac{a}{2}\right) = p - \frac{a}{2}$$

Portanto, $b = x$ e o triângulo será isósceles.

Problema 4.3. Observando a figura a seguir podemos afirmar que ABC é um triângulo equilátero, temos que $AB = BC = CA = 4$. Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo MCB, obtemos $h = 2\sqrt{3}$. Chamaremos de x e y as dimensões do retângulo $DEFG$ inscrito no triângulo.

Figura 49 – Ilustração do problema 4.3



Fonte: elaborada pela autora.

Por semelhança de triângulos em GBF e ABC, obtemos:

$$\frac{(2\sqrt{3} - y)}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{4}.$$

Daí, tiramos que

$$y = -\frac{2\sqrt{3}}{4}x + 2\sqrt{3}.$$

Sabendo que a área do retângulo é dada por $S = xy$, se fizermos a substituição em y, encontramos

$$S = -\frac{2\sqrt{3}}{4}x^2 + 2\sqrt{3}x = -\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 2\sqrt{3}x.$$

O valor de x será máximo quando $x = m = -b/2a$, ou seja:

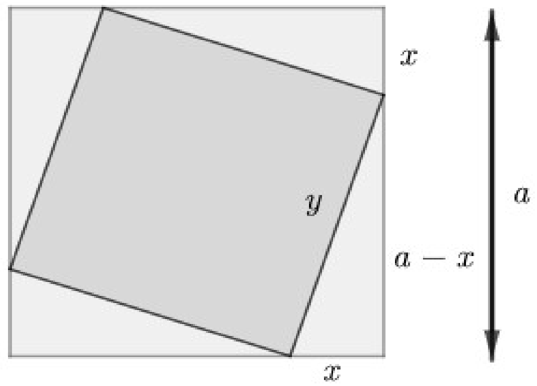
$$x = \frac{-2\sqrt{3}}{2.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$x = 2.$$

Quando x é máximo, y será dado por $\sqrt{3}$. Logo, temos um retângulo de dimensões 2 e $\sqrt{3}$.

Problema 4.4. Podemos observar na ilustração a seguir que ao inscrever um quadrado de lado a em outro quadrado, obtemos quatro triângulos retângulos congruentes.

Figura 50 – Quadrado inscrito em outro quadrado



Fonte: elaborada pela autora.

Chamando de x a medida de um dos catetos do triângulo, logo o outro cateto terá medida $a - x$. Chamaremos de y, o lado do quadrado inscrito, logo y^2 será a área do quadrado inscrito. Aplicando o teorema de Pitágoras em um dos triângulos, obtemos:

$$y^2 = x^2 + (a - x)^2$$

$$y^2 = 2x^2 - 2ax + a^2.$$

Como y^2 corresponde à área do quadrado, faremos $y^2 = A(x)$

$$A(x) = 2x^2 - 2ax + a^2.$$

A função $A(x)$ assume seu valor mínimo quando $x = m = \frac{-b}{2a}$, logo

$$x = \frac{-(-2a)}{2.2} = \frac{a}{2}.$$

Substituindo o valor de x na função $A(x)$, obtemos

$$A(x) = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2a.\left(\frac{a}{2}\right) + a^2$$

$$A(x) = \frac{a^2}{2} - a^2 + a^2$$

$$A(x) = \frac{a^2}{2}.$$

Portanto, a área mínima de um quadrado inscrito em um quadrado de lados com comprimento a é $A(x) = \frac{a^2}{2}$.

Problema 4.5. Chamamos de r o raio da base do cilindro, h a altura e S a área da superfície total. O volume do cilindro é dado por $V = \pi r^2 h$ e sua superfície total é igual a soma da área lateral com as áreas das duas bases, ou seja, $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$. Foi dado que $V = 128\pi$, então temos que $r^2 h = 128$. Utilizando o *Teorema da Desigualdade das Médias* nos termos de S, obtendo:

$$\frac{\pi rh + \pi rh + 2\pi r^2}{3} \geq \sqrt[3]{\pi rh. \pi rh. 2\pi r^2}$$

$$\frac{S}{3} \geq \sqrt[3]{2. \pi^{3(r^2 h)2}}.$$

Substituindo $r^2 h$ po 128, obtemos

$$\frac{S}{3} \geq \sqrt[3]{2. \pi^3 (128)^2} = \sqrt[3]{2. \pi^3 (2^7)^2} = \sqrt[3]{2^{15}. \pi^3} = 2^5 \pi$$

$$\frac{S}{3} \geq 32\pi$$

$$S \geq 96\pi.$$

S será mínima se, e quando, ocorrer a igualdade, ou seja, quando $\pi rh = 2\pi r^2$. Resolvendo o sistema a seguir.

$$\begin{cases} \pi rh = 2\pi r^2 \\ r^2 h = 128 \end{cases}$$

Obtemos que $h = 8$ e $r = 4$.

Problema 4.6. Observando a Figura 34, chamaremos de x o comprimento dos lados do retângulo perpendiculares ao muro e de y o comprimento do lado paraleleo ao muro. A quantidade de cerca utilizada é dada por $2x + y = 40$ e a área do retângulo será expressa por $A = xy$. Pelo *Teorema da Desigualdade das Médias*, temos:

$$\frac{2x + y}{2} \geq \sqrt{2xy}$$

$$20 \geq \sqrt{2A}$$

A área máxima será dada quando ocorrer a igualdade, ou seja, quando $A = 200$, que ocorre quando $2x = y = 20$.

Problema 4.7. A Figura 35 mostra a interseção do sólido com o plano que contém o eixo do cilindro. Se S é a área lateral do cilindro, temos que $S = 4\pi xy$, onde $x^2 + y^2 = 36$. Se aplicarmos o *Teorema da Desigualdade das Médias* nos números x^2 e y^2, obtemos:

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2y^2}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy$$

$$\frac{36}{2} \geq \frac{S}{4\pi}$$

$$S \leq 72\pi$$

A área lateral do cilindro é então menor ou igual a $72\pi\ m^2$ e será máxima quando, e se, a igualdade ocorrer. A igualdade acontece quando os termos são iguais, ou seja, $x^2 = y^2$, daí, obtemos:

$$\begin{cases} x^2 = y^2 \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos que $x = y = 3\sqrt{2}m$.

Problema 4.8. Dado um paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c. Seu volume será dado por $V = abc$ e sua área total dada por $A = 2(ab + ac + cb)$. Pelo *Teorema da Desigualdade das Médias*, sabemos que

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

A igualdade ocorre apenas quando $x = y = z$. Se fizermos $x = ab$, $y = ac$ e $z = cb$, obtemos:

$$\frac{ab + ac + cb}{3} \geq \sqrt[3]{ab.ac.cb}$$

$$\frac{ab + ac + cb}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados, temos que

$$\sqrt{\frac{ab + ac + cb}{3}} \geq \sqrt[3]{abc} \quad (I)$$

Sendo $ab + ac + cb = \frac{A}{2}$ e fazendo a substituição em (I), encontramos

$$\sqrt{\frac{A}{6}} \geq \sqrt[3]{V}$$

O volume máximo ocorre se ocorrer a igualdade, nesse caso será dado por $V = \sqrt{\frac{A^3}{216}}$. Isso acontece quando $ab = bc = ac$, ou seja, quando $a = b = c$.

Problema 5.1. Observando a Figura 46, uma caixa sem tampa será montada a partir de um pedaço de papelão de 30 $cm\ x$ 30 cm cortado e dobrado. Queremos encontrar as dimensões que irão produzir uma caixa de volume máximo. Inicialmente, precisamos escrever o volume da caixa como uma função cuja variável a ser maximizada é a altura da caixa que chamamos de h. $V(h) = a\,.\,b\,.\,h$, onde a, b e h correspondem às dimensões da caixa.

Observamos que $a = b = 30 - 2h$. Logo, substituindo em $V(h) = a.b\,.h$, obtemos:

$$V(h) = (30 - 2h).(30 - 2h).h$$

$$V(h) = 4h^3 - 120h^2 + 900h.$$

A altura h não pode ser negativa ou maior do que 15 cm, pois o papelão tem apenas 30 cm de largura, então metade disso seria a altura máxima. Assim, os possíveis valores para h estão no intervalo são $0 \leq h \leq 15$.

Vamos calcular os pontos críticos, fazendo $V'(h) = 0$

$$V'(h) = 12h^2 - 240h + 900$$

$$12h^2 - 240h + 900 = 0$$

Se dividirmos por 12, obtemos:

$$h^2 - 20h + 75 = 0$$

Resolvendo a equação, encontramos $h = 15$ ou $h = 5$.

Agora, vamos encontrara os valores de V nos pontos críticos e extremos no intervalo para localizar o máximo da função.

1. Se $h = 0$

$$V(0) = 0.$$

2. Se $h = 5$

$$V(5) = 4.5^3 - 120.5^2 + 900.5 = 2000.$$

3. Se $h = 15$

$$V(15) = 4.15^3 - 120.15^2 + 900.15 = 0.$$

Logo, o volume máximo acontecerá quando $h = 5\ cm$ e será dado por $V(5) = 2000\ cm^3$. As dimesões da caixa serão: $h = 5\ cm$ e $a = b = 30 - 2h = 30 - 2.5 = 20$ cm.

Problema 5.2. A área máxima do curral será dada por $A = 2xy$ e a quantidade de cerca que será utilizada para cerca-lo é $4x + 2y = 300$. Isolando o valor de y, obtemos que:

$$y = \frac{300 - 4x}{3}.$$

Substituindo o valor de y na área do curral, temos

$$A = 2x.\left(\frac{300 - 4x}{3}\right)$$

$$A = -\frac{8x^2}{3} + 200x.$$

Como não podemos ter um comprimento de cerca negativo e o valor máximo que x pode assumir é 75, temos que $0 \leq x \leq 75$.

Calculando a derivada primeira de A

$$A' = -\frac{16x}{3} + 200.$$

Igualamos a zero para encontrar os pontos críticos, obtemos

$$-\frac{16x^2}{3} + 200 = 0 \Rightarrow x = 37{,}5.$$

Agora, vamos encontrar os valores de A nos pontos críticos e extremos do intervalo.

1. Se $x = 0$

$$A = -\frac{8.0^2}{3} + 200.0 = 0.$$

2. Se $x = 37{,}5$

$$A = -\frac{8.(37{,}5)^2}{3} + 200.37{,}5 = 3750.$$

3. Se $x = 75$

$$A = -\frac{8.75^2}{3} + 200.75 = 0.$$

A área máxima será obtida quando $x = 37{,}5\ m$, ou seja, as dimensões do curral serão iguais a $2x = 75m$ e $y = \frac{300-4.37{,}5}{3} = 50m$. A área máxima será $A = 3750m^2$.

Problema 5.3. A área total da superfície da lata é igual a área lateral adicionada à área da base sem a tampa, como foi especificado na questão. Então:

$$A = 2\pi rh + \pi r^2 \quad \text{(I)}.$$

A questão afirma que o volume é igual a 1000, logo temos que

$$\pi r^2 h = 1000.$$

Se isolarmos o valor de h, obtemos que

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}.$$

Substituindo o valor de h em (I), encontramos:

$$A = \frac{2000}{r} + \pi r^2, \qquad \text{com} \quad r > 0.$$

Vamos calcular os pontos críticos derivando A

$$A' = -2000r^{-2} + 2\pi r.$$

Se igualarmos a zero, obtemos:

$$-2000r^{-2} + 2\pi r = 0$$

$$\frac{-2000}{r^2} = -2\pi r$$

$$2\pi r^3 = 2000$$

$$r^3 = \frac{2000}{2\pi}$$

$$r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$$

Agora, vamos encontrar os valores de A nos pontos críticos e extremos do intevalo.

1. Se $r = 0$, então temos:

$$A = \frac{2000}{0} + \pi 0^2 = \infty.$$

2. Se $r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$, obtemos:

$$A = \frac{2000}{\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}} + \pi\left(\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2 = 200\sqrt[3]{\pi} + \frac{100\pi}{\sqrt[3]{\pi^2}} = 300\sqrt[3]{\pi}.$$

3. $r = \infty$

$$A = \frac{2000}{\infty} + \pi\infty^2 = \infty.$$

O valor mínimo será obtido quando $r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$, logo, h será dado por:

$$h = \frac{1000}{\pi \boldsymbol{r}^2}$$

$$h = \frac{1000}{\pi\left(\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2} \Rightarrow h = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}.$$

Problema 5.4. O volume do cone é dado por $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$. Se utilizarmos o Teorema de Pitágoras no triângulo sombreado da Figura 48, obtemos que $h^2 + r^2 = 3$. Isolando o valor de r^2, temos $r^2 = 3 - h^2$. Substituindo na expressão do volume, encontramos

$$V = \frac{\pi(3 - h^2)h}{3}.$$

Como $r \geq 0$, temos que $3 - h^2 \geq 0$, isso implica que $0 \leq h \leq \sqrt{3}$.

Calculando a derivada primeira de V, obtemos

$$V = \frac{\pi(3 - h^2)h}{3} = \frac{\pi}{3}.(3h - h^3)$$

$$V' = \frac{\pi}{3}.(3 - 3h^2)$$

$$V' = \pi.(1 - h^2)$$

Fazendo $V' = 0$, encontramos $h = -1$ ou $h = 1$, como h não pode assumir o valor -1, iremos considerar apenas $h = 1$. O próximo passo consiste em encontrar os valores que a função assume nos pontos críticos e extremos do intervalo, fazemos:

1. Se $h = 0$

$$V = \frac{\pi(3 - 0^2).0}{3} = 0.$$

2. Se $h = 1$

$$V = \frac{\pi(3 - 1^2).1}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

3. Se $h = \sqrt{3}$

$$V = \frac{\pi\left(3 - \sqrt{3}^2\right)\sqrt{3}}{3} = 0.$$

O maior volume é obtido quando $h = 1$ e será dado por $V = \frac{2\pi}{3}$ e o raio será igual a $\sqrt{3 - h^2} = \sqrt{2}$.