



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FRANCISCO EMMANOEL ANDRADE DE SOUZA

CONFINAMENTO DE PARTÍCULAS BOSÔNICAS E
SUPERPARTÍCULAS TESTE EM MODELOS DE MUNDO BRANA

FORTALEZA

2021

FRANCISCO EMMANOEL ANDRADE DE SOUZA

CONFINAMENTO DE PARTÍCULAS BOSÔNICAS E SUPERPARTÍCULAS TESTE
EM MODELOS DE MUNDO BRANA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

Coorientador: Prof. Dr. Makarius Oliveira Tahim.

FORTALEZA
2021

FRANCISCO EMMANOEL ANDRADE DE SOUZA

CONFINAMENTO DE PARTÍCULAS BOSÔNICAS E SUPERPARTÍCULAS TESTE
EM MODELOS DE MUNDO BRANA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 26/02/2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Makarius Oliveira Tahim (Coorientador)
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Prof. Dr. Ricardo Renan Landin de Carvalho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Wendel Macedo Mendes
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

Prof. Dr. Augusto Plácido Cavalcante Melo de Lima
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

A000p Souza, Francisco Emmanoel Andrade de .
Confinamento de partículas bosônicas e superpartículas teste em modelos de mundo brana / Francisco Emmanoel Andrade de Souza. – Fortaleza, 2021.
78.:il.

Tese (doutorado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2021.

Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

1. Modelo Randall-Sundrum. 2. Partícula bosônica. 3. Superpartícula. 4. Localização. 5. Massa efetiva. I. Título.

CDD:000.0

*Aos Meus Pais,
e a meu irmão.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a minha mãe, por todo amor, esforço em educar-me e por sempre acreditar em mim;

A meu pai, Francisco, por todo amor, apoio e momentos de descontração;

Ao meu irmão, Alexandre, por toda a ajuda, palavras de apoio e todo o carinho;

Ao Geová, além de orientador é um grande amigo, o qual agradeço por toda a ajuda, apoio, paciência, amizade e momentos de descontração;

Aos professores do departamento de física pelas aulas excelentes e que muito me engrandeceram;

Aos professores Renan, Makarius, Wendel e Augusto por aceitarem participar da banca e por todos os ótimos bons momentos de convívio.

Aos amigos do grupo LabGmc² (eterno CReU), Wendel, Wendell, Jason, Ivan, Raul, Augusto, Chefe, Felipe por todo apoio, ajuda e momentos de alegria;

As rodas de conversa e discussão com os amigos da física próximo as mangueiras;

Aos amigos da sala 14, Rivânia, Márcio e Naiara;

Ao Daniel Boris, que sempre foi presente em minha vida e da minha família, a quem tenho muita estima e carinho;

Ao Aristóteles Moreira pela amizade, puxões de orelha e momentos de diversão;

A minha avó torta "Bezé", que sempre acreditou e que estou sempre carregando em meu coração;

Aos meus colegas de trabalho, em especial Paulo Cesar, George, Wladimir, Rosa Angélica, Verônica e Mirtes pela parceria, respeito e momentos de descontração e que, além de tudo, foram pacientes com alguns atrasos;

Aos meus alunos que sempre fazem meu dia mais feliz;

A todos os demais amigos que não cito aqui;

Ao apoio financeiro da Funcap.

RESUMO

Nesta tese, estudamos o confinamento de partículas bosônicas e de superpartícula teste em modelos de Randall-Sundrum suave. Para isso, mostramos que é possível encontrar um potencial efetivo que descreve o movimento da partícula sobre a dimensão extra. Para o caso bosônico, é um fato conhecido que as partículas de teste livres não podem ser localizadas nos modelos de brana tipo delta nem suave. Recentemente, um acoplamento com um campo escalar foi usado para localizar uma faixa limitada de massas. Até agora, nenhum mecanismo foi encontrado para capturar partículas de teste de qualquer massa sobre a brana. Para resolver isso, mostramos que um acoplamento com o dilaton pode confinar partículas de qualquer massa. Em seguida, analisamos a superpartícula teste. As variáveis de spin, ψ^P , introduzem uma interação com o tensor de curvatura de Riemann. Isso introduz uma correção para o potencial efetivo. Ao analisá-lo, descobrimos que a superpartícula teste pode ser localizada em uma posição diferente daquela da brana. Também mostramos que uma superpartícula teste sobre a brana pode escapar ao infinito. Portanto, podemos concluir que as partículas bosônicas livres e superpartícula teste não estão aprisionadas na brana.

Palavras-chave: Modelo Randall-Sundrum. Partícula bosônica. Superpartícula. Localização. Massa efetiva.

ABSTRACT

In this thesis we study the confinement of bosonic and spinning test particles in smooth Randall-Sundrum models. For this, we show that it is possible to find an effective potential that describes the motion of the particle over the extra dimension. For the bosonic case, it is a known fact that free test particles can be localized neither on thin nor on thick branes. Recently, a coupling to a scalar field has been used to localize a limited range of masses. Up to now, no mechanism has been found that can trap test particles of any mass over the brane. To solve this, we show that a coupling with the dilaton can trap particles of any mass. Next, we analyze the spinning particle. The spin variables, ψ^P , introduces an interaction with the Riemann curvature tensor. This introduces a correction to the effective potential. By analyzing it, we find that the spinning particle can be localized at a position different of that of the brane. We also show that a spinning particle over the brane can escape to infinity. Therefore, we can conclude that free bosonic and spinning particles are not trapped in the brane.

Keywords: Randall-Sundrum model. Bosonic particle. Superparticle. Localize. Effective mass.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Potencial efetivo para uma partícula livre V_{eff} para uma escolha particular das constantes ($\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, c = 1, M_P^3 = \sqrt{2}, M_0^2 = 3$). 53
- Figura 2 – Comportamento de confinamento do potencial efetivo U_{eff} quando a interação é levada em consideração (linha fina) para uma escolha particular das constantes ($c = 1, v = 6, M_P^{(3)} = \sqrt{2}$ and $M_0^2 = 3$), em comparação com o caso quando não há interação (linha tracejada), ou seja, para $h = 0$. 56
- Figura 3 – Comportamento de confinamento do potencial efetivo deformado $V_{eff(s)}$ quando a interação é levada em consideração (linha fina) para uma escolha particular das constantes ($M_0^2 = 3, b = \frac{1}{2}, c = 1, M_P^3 = 0.3, \lambda = 1.5$), em comparação com o caso quando não há interação (linha marcada), ou seja, para $\lambda = 0$ 65
- Figura 4 – Plot de $u_{eff} = U_{eff}/M_0^2$ para o modelo (6.28) com $\sigma = 1$ e $\delta \equiv \frac{i}{M_0} \xi \psi_0^y$. . . 68

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	REVISÃO DO MODELO RANDALL-SUNDRUM	17
2.1	Brana tipo delta	18
2.2	Brana espessa	19
2.3	Acoplamento com o DÍLATON	20
2.4	Brana deformada	22
2.4.1	Localização de campos	23
2.4.2	Localização do campo escalar	24
2.4.3	Localização do campo fermiônico de spin $\frac{1}{2}$	26
3	A PARTÍCULA BOSÔNICA E A SUPER PARTÍCULA	30
3.1	Partícula livre não-relativística	30
3.2	Varáveis de Grassmann	31
3.2.1	Definições Básicas	32
3.2.2	Derivação	32
3.2.3	Mecânica Clássica	33
3.3	Teoria dos vínculos	35
3.3.1	Sistemas Vinculados	35
3.3.2	Parêntese de Dirac	38
3.3.3	Quantização Canônica	39
3.4	Ação Polinomial	41
3.5	Ação relativística para a superpartícula de Brink-Schwarz não massiva	42
3.5.1	Quantização no gauge do tempo próprio	44
3.6	Superpartícula teste em espaço curvo	45
4	CONFINAMENTO DE PARTÍCULAS TESTE EM MUNDO BRANA	48
4.1	Método analítico	50
4.2	Método do potencial efetivo	51
4.2.1	Partícula acoplada com o campo escalar	53
5	PROCEDIMENTO GERAL PARA LOCALIZAÇÃO DE PAR- TÍCULAS E A MASSA EFETIVA	57
5.1	Método geral do potencial efetivo	57

5.1.1	Massa efetiva	60
6	LOCALIZAÇÃO DE PARTÍCULAS BOSÔNICAS ACOPLADAS NÃO MINIMAMENTE COM O DÍLATON E DA SUPERPARTÍCULA TESTE	63
6.1	Confinamento de partículas teste acopladas não minimamente com o dilaton	63
6.1.1	Acoplamento com dilaton no espaço-tempo RS deformado . .	64
6.2	Confinamento de superpartículas	66
6.3	Aplicação	68
7	CONCLUSÃO	70
	REFERÊNCIAS	73
	APÊNDICE A - TRANSFORMAÇÕES DE PARAMETRIZAÇÃO E SUPERSIMETRIA LOCAL PARA A AÇÃO DA SUPERPARTÍCULA NÃO MASSIVA	79

1 INTRODUÇÃO

Desde o desenvolvimento do modelo de Kaluza-Klein [1–3], cenários gravitacionais com dimensões extras tem atraído a atenção dos físicos. Neste contexto, L. Randall and R. Sundrum (RS) propuseram o modelo de mundo-brana com uma métrica não fatorizável [4, 5].

Uma das mais duradouras ideias considerando a unificação entre gravitação e eletromagnetismo é a teoria de unificação de Kaluza [1]. Esta teve o interesse revivido no final da década de 70 por várias razões. Por exemplo, todas as interações não gravitacionais são ditadas por simetrias de gauge e a escala de unificação ser razoavelmente perto da massa de Planck, onde a gravitação não mais pode ser negligenciada. Embora a teoria de Kaluza-Klein não seja consistente com a física de baixas energias, é importante explorar sua estrutura [7]. No trabalho de Kaluza [1], este propõe a adição de uma dimensão espacial na geometria Riemanniana afim de obter uma unificação entre gravitação e eletromagnetismo, impulsionado pelos trabalhos de Thirring [8] e Weyl [9], onde a dimensão extra é compactificada cilindricamente. O trabalho de Kaluza tinha alguns problemas, como uma métrica não tensorial e a não justificativa da dimensão extra não visível. Foi Klein [10] quem resolveu estes problemas, propondo uma métrica com caráter tensorial, que mostrava a invariância de gauge da componente $\gamma_{\mu y}$ como campo de gauge e define o raio de compactificação da ordem de grandeza do comprimento de Planck. No modelo de Kaluza-Klein, é considerado o caso onde a dimensão extra é periodicamente identificada como

$$y \rightarrow y + 2\pi, R$$

que é chamado de compactificação toroidal. O espaço obtido é o produto do espaço-tempo de Minkowsky com um círculo ($M^4 \otimes S^1$) que pode ser imaginado como um cilindro 5-dimensional de raio R . Na teoria, um campo escalar não massivo $\phi(x^\mu, y)$ teria um momento quantizado na dimensão periódica:

$$p^y = \frac{n}{R}, \text{ onde } n \in \mathbb{Z}.$$

Podemos então expandir o campo em série de Fourier:

$$\phi(x^\mu, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^n(x^\mu) e^{i\frac{n}{R}y},$$

e as equações de movimento para o campo escalar 5-dimensional tornam-se

$$(\partial_\mu \partial^\mu + \partial_y \partial^y) \phi = 0 \rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \phi^n(x^\mu) = \frac{n^2}{R^2} \phi^n(x^\mu).$$

Assim, uma torre infinita de campos com massa $m^2 = n^2/R^2$ é gerada. Para pequenas energias, comparada a R^{-1} , somente o modo zero ($n = 0$) permanece e a física é efetivamente 4-dimensional. Para energias acima de R^{-1} , a torre de Kaluza-Klein é fisicamente aceitável. Um limite experimental no tamanho do raio de compactação R é imposto pelo fato de que esses estados de Kaluza-Klein nunca terem sido detectados em colisões com energias da ordem de TeV . Suas massas, conseqüentemente, devem ser maiores, $n/R > TeV$, o que implica uma forte restrição sobre R :

$$R \lesssim 10^{-21} cm.$$

Além do mais, teoria de Kaluza-Klein e as teorias das supercordas naturalmente dão origem a campos de dilaton, ou seja, a campos escalares neutros cujos valores de fundo determinam a força de algumas das constantes de acoplamento da teoria quadridimensional efetiva. As conseqüências experimentais de um campo de dilaton são de dois tipos: (i) modificação de fenômenos gravitacionais em grande escala (devido à mistura de um escalar com a interação tensorial usual) e (ii) violação do princípio de equivalência (através do espaço-tempo induzida pelo dílton das constantes de acoplamento efetivas medidas localmente, notavelmente a constante gravitacional de Newton). Ambos os tipos de efeitos são severamente restringidos pelos experimentos atuais. É por isso que freqüentemente se espera que os dilatons se tornem de alguma forma suficientemente grandes para cortar todos os desvios experimentais em escalas de comprimento (ou tempo) maiores que seu comprimento de Compton. No entanto, não é óbvio que um ou mais escalares sem massa não sobrevivam, acoplados à matéria com força gravitacional [11]. Este campo foi inicialmente introduzido na métrica de Kaluza-Klein, em que, quando é fixado o raio de compactificação da dimensão extra, surge espontaneamente um bóson de Goldstone, o qual é comumente chamado de dílton [7].

Uma saída para a restrição do raio de compactificação foi proposta em 1988 por Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali [12], conhecido como modelo ADD, baseado em uma ideia formulada em 1983 por Rubakov e Shaposhnikov [13]. Se as dimensões extras são acessíveis apenas para a gravidade e não para os campos do modelo padrão, o limite em seu tamanho é fixado por testes experimentais da lei da gravitação de Newton, que é da ordem de um milímetro:

$$R \lesssim 1mm,$$

logo, essas dimensões poderiam existir perfeitamente. Ademais, este cenário fornece uma solução para um dos problemas centrais da física de partículas: o Problema de Hierarquia. Este problema surge na teoria quântica de campos por causa das correções quadraticamente divergentes para a massa do campo de Higgs, que requerem um incrível ajuste fino para obter a massa esperada de algumas centenas de GeV . Este problema pode ser formulado de forma equivalente em termos da discrepância entre a força da gravidade e as das outras três forças fundamentais. No cenário ADD, a baixa magnitude da gravidade em comparação com as outras forças encontra uma explicação no fato de que a gravidade se dilui no grande volume das dimensões extras. A hierarquia entre a escala de Planck 4-dimensional $M_{Pl} \simeq 10^{19} GeV$ e a escala de interações fracas $M_W \simeq TeV$ seria, na realidade, apenas aparente. No entanto, esta solução apenas nos faz enxergar o problema da hierarquia como o problema da discrepância entre o enorme tamanho da dimensão extra $R \simeq 1mm$ e seu valor natural $R \simeq l_{Pl} \simeq 10^{-33}cm$. O modelo apresentado por Lisa Randall e Raman Sundrum em 1999 [4, 5] fornece uma nova explicação para o problema da hierarquia.

O modelo Randall-Sundrum assume a existência de uma dimensão extra compactada em um círculo cujas metades superior e inferior são identificadas. De um maneira formal, isso significa que trabalhamos no orbifold S_1/\mathbb{Z}_2 , onde S_1 é uma esfera unidimensional (ou seja, um círculo) e \mathbb{Z}_2 é o grupo multiplicativo $\{-1, 1\}$. Esta construção envolve dois pontos fixos, um na origem $y = 0$ e um na outra extremidade do círculo, em $y = \pi R \equiv L$ [14]. Em cada um dos essas fronteiras representam uma hipersuperfície que equivalem a um mundo quadridimensional como aquele em que vivemos. Por analogia com as membranas que encerram um volume, esses mundos com $3 + 1$ dimensões que encerram o espaço 5-dimensional foram chamados de 3-branas. Então, o modelo contém duas 3-branas, a uma distância L uma da outra, envolvendo um espaço 5-dimensional. Este modelo também leva em consideração a constante cosmológica 5-dimensional Λ (que ao contrário da constante cosmológica 4-dimensional efetiva não precisa ser nula ou mesmo pequena) a ação fundamental é a soma da ação de Hilbert-Einstein S_H e uma parte da matéria S_M :

$$S = S_H + S_M = \int d^4x \int_{-L}^{+L} dy \sqrt{-g} (2M_P^{(3)} R + \Lambda).$$

Onde $M_P^{(3)}$ é a escala de massa 5-dimensional fundamental, R o escalar de Ricci 5-dimensional e g o determinante da métrica, cuja forma explícita será investigada posteriormente [14]. Ainda hoje, modelos RS desempenham um papel importante no contexto de dimensões extra. Principalmente porque nos permitem recuperar a bem conhecida teoria gravitacional, mesmo com uma dimensão extra infinitamente grande. Isto é possível

pelo fato da gravidade estar confinada em uma hiper-superfície 4D (3-brana) embebida em um espaço-tempo 5D. Inspirado pelos modelos RS, muitos outros modelos de mundo brana com a gravidade confinada foram propostos [15–24]. Para todos estes modelos, a gravidade é confinada em uma 3-brana, nos permitindo recuperar a teoria gravitacional 4D. Entretanto, o mesmo não é verdade para campos de matéria, como foi amplamente verificado para todos os modelos mencionados anteriormente [25–32]. A concepção de modelos tipo Randall-Sunrum possibilitou o aparecimento de uma nova linha de pesquisa teórica em Física de Altas Energias, chamada localização ou confinamento de campos na 3-brana.

Em mecânica clássica, essencialmente, todas as variáveis dinâmicas são bosônicas, uma vez que são representadas por variáveis que comutam. Por outro lado, na teoria moderna de partículas elementares, somos tentados a especular que todas as partículas fundamentais da natureza são férmions, inclusive na composição dos bósons. Campos quânticos anticomutantes não possuem um limite clássico em termos de variáveis comutantes (c -números), mas sim em termos de variáveis de Grassmann [33]. A possibilidade de utilizar variáveis de Grassmann em mecânica quântica foi apontada por vários outros autores, como Casalbuoni [34] e Berezin, que introduzem graus de liberdade de spin no nível clássico. No caso da superpartícula, será introduzida a variável fermiônica $\psi^P(\tau)$ e o seu super-parceiro, a variável posição $x^P(\tau)$. A variável $\psi^P(\tau)$ é uma variável de Grassmann e é tomada como o grau de liberdade de spin, τ é um parâmetro ao longo da linha mundo da partícula e P , um índice de Lorentz, tal que $P = \mu, 5$ ($\mu = 0, 1, \dots, D - 1$).

O movimento da superpartícula é descrito por uma ação que é invariante por reparametrização e transformações de supersimetria local. A invariância sob reparametrizações de τ é necessária para que a escolha de qualquer parâmetro não altere a física do sistema [35], enquanto que a invariância por transformações de supersimetria local são necessárias para evitar que normas negativas, devido a componente temporal de ψ^P , não apareçam no espectro físico. A teoria quântica do sistema pode ser construída impondo as relações de comutação de Dirac [36]. Supersimetria representa a menor rota entre estas duas situações extremas que apresenta uma completa equivalência entre variáveis fermiônicas e bosônicas. Isto requer que a supersimetria possua operadores que conectam estes dois tipos de variáveis, uma vez que todas elas são fermiônicas [33]. Neste trabalho, a variável fermiônica estudada será a superpartícula de Brinck-Schwarz, que recebe o nome pelo fato do sistema apresentar uma supersimetria, ou seja, uma simetria que relaciona férmions e bósons [37]. A superpartícula recebe esse nome devido o trabalho de Brinck e Schwarz, de 1981, no qual eles analisam a mecânica quântica de uma superpartícula [38].

O confinamento de campos em mundo-brana leva, evidentemente, à localização

das partículas relacionadas. Entretanto, esta interpretação só pode ser obtida em um nível quântico. Para modelos de Kaluza-Klein 5-dimensional, a dinâmica de partículas foi largamente discutido [39–45]. Entretanto, a dinâmica e o confinamento de partículas teste clássicas em mundo-brana RS foi pouco discutido na literatura. Por exemplo, em [46] é discutido o movimento geodésico de partículas teste livre em mund-brana RS-II tipo delta. A partir desta análise, os autores mostraram que o movimento na dimensão extra y é desacoplado das outras dimensões e é dado por

$$|y(t)| = \frac{1}{2k} \ln(1 - v^2 k^2 t^2),$$

onde t é um parâmetro não afim e $p^2 = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$. Na equação de movimento acima $k^2 > 0$ está relacionada com a constante cosmológica. Portanto, matéria comum ($v^2 < 0$) é inevitavelmente expulsa para a dimensão extra e não pode ser confinada. Uma discussão semelhante também foi realizada em [47] para o modelo de brana espessa [15]. Os autores de [47] não encontraram uma solução analítica para $y(t)$. No entanto, eles encontraram um "potencial efetivo" fornecido pelo espaço-tempo curvo e, a partir disso, o confinamento foi discutido. A conclusão foi que, assim como no modelo tipo delta, o confinamento das partículas 'livres' nesta brana espessa não pode ser alcançado. Portanto, um mecanismo de localização para aprisionar partículas teste na 3-brana é necessário. Em [47], os autores forneceram o confinamento através do acoplamento da partícula com um campo escalar ϕ . Esta interação é construída modificando a ação da partícula "livre" por meio de uma redefinição da massa dada por $M_0 \rightarrow \sqrt{M_0^2 + h^2 \phi^2}$. Este mecanismo fornece o confinamento para alguns valores de massa.

Aqui, propomos um novo mecanismo para o confinamento das partículas de teste inspirado em [49], onde eles usaram uma transformação conforme do referencial de Jordan para o Einstein gerando um novo campo, chamado dilaton. Nesse cenário, todos os campos de matéria são acoplados a esse novo campo. No caso mais simples, onde a matéria é fenomenologicamente representada por um conjunto de partículas pontuais de massa \tilde{M} , a ação da matéria torna-se

$$S_M = - \sum \int \tilde{M} e^{\lambda\pi} ds.$$

Isso ainda pode ser reformulado como uma massa dependente do espaço-tempo no referencial conforme de Einstein, $M = \tilde{M} e^{\lambda\pi}$, onde \tilde{M} é a massa constante no referencial conforme de Jordan [49, 50]. Com esse novo acoplamento, o momento conjugado da partícula teste passa a ser $P_A P^A = -M_0^2 e^{2\lambda\pi(y)}$, permitindo, como veremos, o confinamento de partículas teste na brana.

Neste contexto, discutiremos o confinamento de partículas teste clássica em mundos-brana 5-dimensional. Ao fazer isso, iremos propor um novo mecanismo de localização para partículas teste bosônicas que nos permitirá confinar qualquer valor de massa. Além disso, também discutiremos o confinamento de superpartícula teste proposto por L. Brink *et.al.* [51]. Este modelo apresenta alguns recursos interessantes em 4-D e ainda não foi explorado no contexto do mundo brana.

O capítulos desta tese estão organizados da seguinte maneira: no capítulo 2 é feita uma revisão do modelo RS-II, no qual utilizaremos como espaço-tempo 5-dimensional no qual estamos interessados em localizar partículas bosônicas e superpartículas em uma hipersuperfície, chamada de 3-brana que seria a representação do nosso universo. No capítulo 3 são tratadas as variáveis de Grassmann, as quais fazem parte da construção da pseudomecânica que descreve partículas de spin $\frac{1}{2}$ e que embora não as representem fisicamente, após o processo de primeira quantização verificamos que estas representam as matrizes de Dirac. É também estudado a teoria de vínculos, uma vez que a lagrangeana para superpartículas possuam um vínculo no momento precisamos estender o conceito de parenteses de Poisson para parênteses de Dirac. No capítulo 4 desenvolvemos o procedimento geral para localização de partículas e aplicamos a alguns problemas já existentes na literatura. Finalmente no capítulo 5 aplicamos nosso mecanismo de localização via um novo mecanismo, o acoplamento não mínimo de partículas bosônicas com o dÍlaton e o processo de localização de superpartículas.

2 REVISÃO DO MODELO RANDALL-SUNDRUM

Uma vez que estamos interessados em tratar o confinamento de partículas em modelos de mundo brana. Faremos neste capítulo, uma breve descrição dos modelos do mundo-brana, tais como: tipo delta, espessa, deformado por campo escalar (dílton) e a brana como defeito topológico. Devemos usar a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ na brana.

A primeira etapa é encontrar a métrica para tal configuração. Como estamos procurando soluções para as equações de Einstein 5-dimensional que possam representar o mundo real, exigimos que a métrica preserve a invariância de Poincaré: o universo 4-dimensional derivado desta teoria deve parecer plano e estático. Isso leva ao seguinte ansatz [14]:

$$ds^2 = e^{2a(y)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (2.1)$$

Segundo o ansatz (2.1), a métrica da teoria tem a forma:

$$g_{AB} = \text{diag}(e^{2a(y)}\eta_{\mu\nu}, 1). \quad (2.2)$$

O prefator $e^{2a(y)}$, chamado de fator de dobra, é escrito como um exponencial por conveniência. Sua dependência é apenas da dimensão extra y , fazendo com que esta métrica não seja fatorável, o que significa que, ao contrário das métricas que aparecem nos cenários usuais de Kaluza-Klein, a métrica (2.2) não pode ser expressa como um produto da métrica de Minkowski 4-dimensional e um termo da dimensão extra. Para determinar a função $a(y)$, temos que calcular as equações de Einstein 5-dimensional:

$$G_{MN} = R_{MN} - \frac{1}{2}g_{MN}R = \kappa^2 T_{MN}, \quad (2.3)$$

onde $\kappa^2 = \frac{1}{4M_P^{(3)}}$. Na ação (2.3), G_{MN} é o tensor de Einstein, R_{MN} é o tensor de Ricci, R é o escalar de Ricci e T_{MN} é o tensor energia-momento. Vamos definí-los abaixo:

$$R_{MN} = \partial_N \Gamma_{PM}^P - \partial_M \Gamma_{PN}^P + \Gamma_{PM}^S \Gamma_{NS}^P - \Gamma_{PN}^S \Gamma_{MS}^P \quad (2.4)$$

$$R = g^{MN} R_{MN} \quad (2.5)$$

$$T_{MN} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\partial g^{MN}} \quad (2.6)$$

em que Γ_{MN}^P é o símbolo de Christoffel e é dado por

$$\Gamma_{MN}^P = \frac{1}{2}g^{AB}(\partial_N g_{MQ} + \partial_M g_{NQ} - \partial_B g_{MN}) \quad (2.7)$$

Com o escopo matemático representado acima, podemos agora descrever os modelos de mundo-brana.

2.1 Brana tipo delta

Iremos definir branas tipo delta pela ação [46]

$$S = \int d^4x \int dy \sqrt{-g} (2M_P^{(3)} R - \Lambda) + \sigma \int_{y=0} d^4x \sqrt{-g_b}, \quad (2.8)$$

onde $M_P^{(3)}$ é a escala de Planck para a teoria, R é o escalar de Ricci, Λ é a constante cosmológica, σ é a tensão da brana e g_b é a métrica induzida na brana, $g_b = g(x, y)|_{y=0}$.

Os símbolos de Christoffel são dados por:

$$\Gamma_{MN}^\rho = [\delta_N^\rho \delta_M^y + \delta_M^\rho \delta_N^y] a', \quad (2.9)$$

$$\Gamma_{MN}^y = -\delta_M^\mu \delta_N^\nu g_{\mu\nu} a'. \quad (2.10)$$

O tensor de Ricci e o escalar de Ricci são dados por:

$$\begin{aligned} R_{MN} &= \delta_M^\rho \delta_N^\tau (-a'' - 4a'^2) g_{\rho\tau} - \delta_M^5 \delta_N^5 (4a'' + 4a'^2) g_{55} \\ R &= 8a'' + 20a'^2, \end{aligned}$$

com os quais podemos obter o tensor de Einstein

$$G_{MN} = \delta_M^\rho \delta_N^\tau (6a'^2 + 3a'') g_{\rho\tau} + \delta_M^5 \delta_N^5 (6a'^2) g_{55}. \quad (2.11)$$

Da ação (2.8), podemos tomar a ação de matéria como $S_M = \int d^4x \int dy \sqrt{-g} (-\Lambda) + \sigma \int_{y=0} d^4x \sqrt{-g_b}$, daí obtemos o tensor energia momento (2.6)

$$T_{MN} = -g_{MN} \Lambda + \delta_M^\mu \delta_N^\nu g_{\mu\nu} \sigma. \quad (2.12)$$

As equações de Einstein (2.3) obtidas são

$$\Lambda = -24M_P^{(3)} a'^2, \quad (2.13)$$

$$\sigma \delta(y) = 12M_P^{(3)} a'' + 24M_P^{(3)} a'^2 + \Lambda. \quad (2.14)$$

Resolvendo a equação (2.13), obtemos a solução

$$a(y) = -k|y|, \quad (2.15)$$

este é um fator de dobra, onde $k = \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M_P^{(3)}}}$. A métrica (2.2) então assume a forma

$$g_{AB} = \text{diag}(e^{-2k|y|}\eta_{\mu\nu}, 1), \quad (2.16)$$

que representará a 3-brana como uma hiper superfície tipo delta no espaço-tempo 5-dimensional.

2.2 Brana espessa

Na presença de um campo gravitacional em um espaço-tempo 5-dimensional, a ação para um campo escalar é [16]:

$$S = \int dx^5 \sqrt{-g} \left(2M_P^{(3)} R - \frac{1}{2} \partial_A \phi \partial^A \phi - V(\phi) \right). \quad (2.17)$$

Onde g é o determinante da métrica, R é o escalar de curvatura relativo à g_{AB} , $V(\phi)$ corresponde ao potencial do campo escalar e $M_P^{(3)}$ é a constante de Planck para o espaço-tempo 5-dimensional. Nós obtemos da ação (2.17), que o tensor energia-momento (2.6) do modelo é:

$$T_{AB} = \nabla_A \phi \nabla_B \phi - g_{AB} \left(\frac{1}{2} \nabla_A \phi \nabla^A \phi + V(\phi) \right), \quad (2.18)$$

que nos permite obter as equações de Einstein (2.3), enquanto a dinâmica do campo escalar é governada pela equação

$$\nabla^2 \phi - \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0. \quad (2.19)$$

Para um potencial escalar do tipo de poço duplo $V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2$, na ausência de gravidade, a equação do campo escalar possui uma solução estática semelhante a um salto dependendo apenas da dimensão extra, que é o mais simples [16]

$$\phi_B(y) = v \tanh(cy), \quad (2.20)$$

onde $c^2 \equiv \lambda v^2/2$. Quando introduzimos a métrica (2.2) obtemos as equações de Einstein

$$\frac{1}{2}(\phi')^2 - V(\phi) = 24M_P^{(3)}(a')^2, \quad (2.21)$$

$$\frac{1}{2}(\phi')^2 + V(\phi) = -12M_P^{(3)}a'' - 24M_P^{(3)}(a')^2. \quad (2.22)$$

Quando adicionamos (2.21) e (2.22), obtemos a equação diferencial de segunda ordem

$$(\phi')^2 = -12M_P^{(3)}a''. \quad (2.23)$$

Aplicando (2.20) em (2.23), obtemos as soluções

$$a(y) = -\beta \ln \cosh^2(cy) - \frac{\beta}{2} \tanh^2(cy), \quad (2.24)$$

onde $\beta \equiv \frac{v^2}{36M_P^{(3)}}$. Portanto, a métrica (2.2) assume a forma

$$g_{AB} = \text{diag}(e^{-2[\beta \ln \cosh^2(cy) + \frac{\beta}{2} \tanh^2(cy)]} \eta_{\mu\nu}, 1), \quad (2.25)$$

Observe que (2.24) representa um fator de dobra da métrica localizado [16]:

$$e^{2a(y)} = \frac{e^{-\beta \tanh^2(cy)}}{(\cosh^2(cy))^{2\beta}} \propto e^{-4c\beta|y|} \quad y \rightarrow \infty, \quad (2.26)$$

tendo a forma de Randall-Sundrum (2.16) para longas distâncias na direção da dimensão extra em relação a brana ($y = 0$).

2.3 Acoplamento com o Dílaton

Vamos considerar a ação [16]:

$$S = \int dx^5 \sqrt{-g} \left\{ 2M_P^{(3)} R - \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} (\partial\pi)^2 - V(\phi, \pi) \right\}, \quad (2.27)$$

onde ϕ é o campo escalar destinado a obter a configuração tipo salto e o outro campo escalar π é chamado dilaton, com a escolha adequada do potencial, que, em geral, depende de ϕ e π . Apresentando um ansatz para a métrica na forma [16]

$$g_{AB} = \text{diag}(e^{2a(y)} \eta_{\mu\nu}, e^{2b(y)}) \quad (2.28)$$

Usando a métrica (2.28), os símbolos de Christoffel symbols são dados por

$$\Gamma_{MN}^\rho = [\delta_N^\rho \delta_M^y + \delta_M^\rho \delta_N^y] a', \quad (2.29)$$

$$\Gamma_{MN}^y = \delta_M^y \delta_N^y b' - \delta_M^\mu \delta_N^\nu g_{\mu\nu} e^{-2b} a'. \quad (2.30)$$

Usando os símbolos de Christoffel (2.29) e (2.30), as componentes do tensor de Riemann são dadas por

$$R^{\rho}_{SQR} = \delta_S^y [\delta_R^\rho \delta_Q^y - \delta_Q^\rho \delta_R^y] [a'' + a'^2 - a'b'] + [\delta_R^\rho \delta_Q^\mu - \delta_Q^\rho \delta_R^\mu] \delta_S^\nu g_{\mu\nu} e^{-2b} a'^2, \quad (2.31)$$

$$R^y_{SQR} = \delta_S^\nu [\delta_R^y \delta_Q^\mu - \delta_Q^y \delta_R^\mu] [a'' + a'^2 - a'b'] g_{\mu\nu} e^{-2b}. \quad (2.32)$$

As equações de movimento resultantes de (2.27) são

$$R_{AB} - \frac{1}{2}g_{AB} = \frac{1}{4M_P^{(3)}} \left\{ \partial_A \phi \partial_B \phi + \partial_A \pi \partial_B \pi - g_{AB} \left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \partial\pi)^2 + V \right) \right\}, \quad (2.33)$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0, \quad (2.34)$$

$$\nabla^2 \pi - \frac{\partial V(\pi)}{\partial \pi} = 0. \quad (2.35)$$

e enquanto as soluções para os campos escalares dependem apenas da dimensão extra y , obtemos o conjunto de equações de Einstein

$$\frac{1}{2}(\phi')^2 + \frac{1}{2}(\pi')^2 - e^{2b}V = 24M_P^{(3)}(a')^2, \quad (2.36)$$

$$\frac{1}{2}(\phi')^2 + \frac{1}{2}(\pi')^2 + e^{2b}V = -12M_P^{(3)}a'' - 24M_P^{(3)}(a')^2 + 12M_P^{(3)}a'b', \quad (2.37)$$

$$\phi'' + (4a' - b')\phi' = \partial_\phi V, \quad (2.38)$$

$$\pi'' + (4a' - b')\pi' = \partial_\pi V, \quad (2.39)$$

das quais três são independentes. Soluções para o sistema de equações acima podem ser encontradas seguindo o método de superpotencial para o qual $\phi' = \frac{\partial W}{\partial \phi}$. A solução particular que consideraremos aqui corresponde ao potencial

$$V = e^{\pi/\sqrt{12M_P^{(3)}}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{5}{32M_P^{(3)}} W(\phi)^2 \right\} \quad (2.40)$$

Tomando as soluções

$$\pi(y) = -\sqrt{3M_P^{(3)}}a(y), \quad (2.41)$$

$$b(y) = \frac{a(y)}{4}, \quad (2.42)$$

$$a(y)' = -\frac{1}{12M_P^{(3)}}W. \quad (2.43)$$

escolhendo um específico $W(\phi)$, a solução está completamente especificada [16]. Para o superpotential

$$W(\phi) = vc \left(1 - \frac{\phi^2}{3v^2} \right) \quad (2.44)$$

obtemos

$$\phi_B(y) = v \tanh(cy),$$

$$a(y) = -\beta \ln \cosh^2(cy) - \frac{\beta}{2} \tanh^2(cy),$$

$$\pi(y) = \sqrt{3M_P^{(3)}}\beta \left(\ln \cosh^2(cy) + \frac{1}{2} \tanh^2(cy) \right).$$

A métrica (2.2) então assume a forma

$$g_{AB} = \text{diag}(e^{2[-\beta \ln \cosh^2(cy) - \frac{\beta}{2} \tanh^2(cy)]} \eta_{\mu\nu}, 1), \quad (2.45)$$

que tem a mesma forma da métrica da brana espessa (2.25), ou seja, em grandes distâncias da brana ($y = 0$) em relação a dimensão extra, representa a métrica RS.

2.4 Brana deformada

O método de deformação, abordado em [52] é baseado em modificações dos potenciais de modelos contendo solitons, a fim de produzir soluções novas e inesperadas [17], vamos usar o ansatz para a métrica

$$g_{AB} = \text{diag}(e^{2a_s(y)} \eta_{\mu\nu}, e^{2b_s(y)}), \quad (2.46)$$

onde s é o parâmetro de deformação, que controla o tipo de topologia. O parâmetro de deformação controla o tipo de defeito topológico deformado que desejamos para obter diferentes classes de membranas. Para resolver este problema, usamos a chamada função superpotencial $W_s(\phi)$, definida por

$$\phi' = \frac{\partial W_s}{\partial \phi}, \quad (2.47)$$

usando, então, a mesma abordagem de Kehagias e Tamvakis [16]. A solução particular decorre da escolha do potencial

$$V_s = e^{\frac{\pi}{\sqrt{12M_P^{(3)}}}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_s}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{5}{32M_P^{(3)}} W_s(\phi)^2 \right], \quad (2.48)$$

e superpotencial

$$W_s(\phi) = c\phi^2 \left[\frac{2}{2s-1} \left(\frac{v}{\phi} \right)^{\frac{1}{s}} - \frac{2}{2s-1} \left(\frac{\phi}{v} \right)^{\frac{1}{s}} \right], \quad (2.49)$$

onde c e v são parâmetros para ajustar a dimensionalidade. Como em [16], este potencial nos dá a solução do tipo soliton desejada. Desta forma, é fácil obter equações diferenciais de primeira ordem cujas soluções são as mesmas para a equação do movimento acima, a saber

$$a'_s = \frac{W_s}{12M_P^{(3)}}, \quad b_s = \frac{a_s}{4}, \quad \pi_s = -\sqrt{3M_P^{(3)}} a_s. \quad (2.50)$$

A solução para esse novo conjunto de equações é a seguinte:

$$\phi(y) = v \tanh(cy), \quad (2.51)$$

$$a_1(y) = -\beta_1 \ln \cosh^2(cy) - \frac{\beta_1}{2} \tanh^2(cy), \quad (2.52)$$

para $s = 1$, e

$$\phi(y) = v \tanh^s \left(\frac{cy}{s} \right) \quad (2.53)$$

$$a_s(y) = -\frac{\beta_s}{2} \tanh^{2s} \left(\frac{cy}{s} \right) - \frac{2s\beta_s}{2s-1} \left\{ \ln \left[\cosh \left(\frac{cy}{s} \right) \right] - \sum_{n=1}^{s-1} \frac{1}{2n} \tanh^{2n} \left(\frac{cy}{s} \right) \right\} \quad (2.54)$$

para $s > 1$, onde $\beta_1 = \frac{v^2}{36M_P^{(3)}}$ e $\beta_s = \frac{v^2}{12M_P^{(3)} 2s+1}$ [52]. Em seguida, obtemos um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem semelhantes à equação (2.23),

$$(\phi')^2 = -12M_P^{(3)} a_s'' \quad (2.55)$$

E s assume apenas valores inteiros ímpares positivos, uma vez que a primeira derivada da função escalar deve se comportar como uma função degrau [53]. E observe que este fator de distorção representa um fator de distorção métrico localizado

$$e^{2a_s(y)} \propto e^{-\frac{4s}{2s-1}\beta_s|y|} \equiv e^{-4c_s\beta_s|y|} \quad y \rightarrow \infty, \quad (2.56)$$

com $c_s = \frac{s}{2s-1}$. A métrica (2.2) então assume a forma

$$g_{AB} = \text{diag}(e^{2a_s(y)}\eta_{\mu\nu}, 1), \quad (2.57)$$

onde $a_s(y)$ é dado por (2.53). E assim como os modelos de brana vistos anteriormente, este também representa bem o modelo RS para longas distâncias da brana ($y = 0$) em relação a dimensão extra.

2.4.1 Localização de campos

Após o desenvolvimento do modelo Randall Sundrum-tipo II [5], surgiram vários trabalhos em que foram estudados os campos clássicos de matéria, dando origem a um novo ramo de pesquisa na física teórica, o problema da localização de campos, cujo objetivo é a criação de mecanismos para que os campos de vários spins que existem na natureza estejam confinados na 3-brana. Além do ramo do novo ramo de pesquisa na física teórica citado acima, cria-se também o ramo de localização de partículas teste. Verifica-se que partículas bosônicas e superpartículas não são confinadas estavelmente na brana sendo, portanto, necessário também a criação de mecanismos de mecanismos que possibilitem a sua localização ou confinamento. Embora haja uma sutil diferença, pois localização de campos é baseado em modos de Kaluza-Klein, ao passo que a localização de partículas (ao menos um dos mecanismos) é baseado na construção da equação da conservação da energia e dela encontrar e analisar as condições de equilíbrio de um potencial efetivo o qual a partícula (partícula bosônica e superpartícula) esteja sujeita. Além do

mais, quando obtemos as equações de movimento para a partícula bosônica, surge um vínculo da massa que após quantização nos fornece a equação de Klein-Gordon e analogamente, ao determinarmos as equações de movimento para superpartículas surge um vínculo associado às variáveis de Grassmann que, após quantização, nos fornece a equação de Dirac.

Seguindo, faremos nesta seção uma breve revisão sobre localização do campo escalar e do campo fermiônico de spin $1/2$. Para o caso onde existe apenas uma dimensão extra, é sempre possível escrever

$$S^5 = \int_{-\infty}^{\infty} dy |\phi(y)|^2 S_{eff}, \quad (2.58)$$

onde S^5 é a ação do campo no espaço-tempo 5-dimensional, S_{eff} é a ação efetiva do campo na 3-brana e $\phi(y)$ é uma função da dimensão extra [99]. Um campo é localizável se a integral de localização

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy |\phi(y)|^2 \quad (2.59)$$

for finita, ou seja, $\phi(y)$ deve ser quadrado integrável.

Uma vez que o modelo RS possui uma descontinuidade devido a presença de branas tipo delta, onde os modos zero de campos de spin 0 e spin 2 são localizados [25], por outro lado, os modos zero do campo de calibre (spin 1) e do campo spinorial (spin $\frac{1}{2}$) não o são [25]. Esse problema motivou o aparecimento de branas espessas [16]. Neste modelo é introduzido (ver seção 2.2) é introduzido um campo escalar dependente unicamente da dimensão extra, responsável pela geração da 3-brana dinamicamente, ou seja, através das equações de movimento. Nesse contexto, os autores mostram que, além dos modos zero da gravidade e do campo escalar, é possível também localizar uma das quiralidades (esquerda ou direita) do campo fermiônico [16, 73]. No trabalho [16] é também mostrado, com a introdução do campo dílaton, a localização do campo de spin 1.

2.4.2 Localização do campo escalar

Nesta subseção vamos analisar o confinamento de um campo escalar real no espaço-tempo 5-dimensional com métrica (2.1). Iremos ver que para o fator de dobra (2.15) o modo zero do campo escalar é localizado na 3-brana. Vamos, assim, tomar a ação do campo escalar não massivo acoplado com a gravidade:

$$S^5 = \frac{1}{2} \int d^5x \sqrt{-g} g^{AB} \partial_A \Phi \partial_B \Phi. \quad (2.60)$$

A equação de movimento para a ação (2.60) tem a forma

$$\frac{\delta S^5}{\delta \Phi} = 0 \rightarrow \partial_A(\sqrt{-g}g^{AB}\partial_B\Phi) = 0. \quad (2.61)$$

Usando a métrica (2.16) e decompondo esta equação na parte 4-dimensional e na parte da dimensão extra, encontramos a equação:

$$\frac{1}{e^{2a}}\partial_\mu(\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi) + \frac{1}{e^{4a}}\partial_y(e^{4a}\partial_y\Phi) = 0 \quad (2.62)$$

Vamos agora decompor o campo escalar $\Phi(x, y)$ como segue:

$$\Phi(x, y) = \phi(x^\mu)\chi(y), \quad (2.63)$$

e ao substituírmos (2.63) em (2.62), obtemos:

$$\frac{1}{\phi e^{2a}}\partial_\mu(\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) + \frac{1}{\chi e^{4a}}\partial_y(e^{4a}\partial_y\chi) = 0 \quad (2.64)$$

Uma onda plana que se propaga em um hiper-volume 4-dimensional satisfaz a correspondente equação de movimento:

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi(x) = m^2\phi(x), \quad (2.65)$$

sabendo disso, ao compararmos (2.64) e (2.65) chegamos à seguinte equação dependente apenas da dimensão extra:

$$\frac{1}{\chi e^{2a}}\partial_y(e^{4a}\partial_y\chi) = -m^2. \quad (2.66)$$

Introduzindo uma nova variável

$$u(y) = e^{2a}\chi(y) \quad (2.67)$$

na equação (2.66), podemos obter uma equação tipo Schrödinger para a parte dependente apenas da dimensão extra y :

$$[-\partial_y^2 - m^2 e^{-2a} + 4k^2 - 4k\delta(y)]u(y) = 0. \quad (2.68)$$

Esta equação coincide com a equação obtida em [5] para o graviton localizado. A solução para massa zero ($m^2 = 0$) para esta equação tem a forma:

$$u(y) = ce^{2a}, \quad (2.69)$$

onde c é uma constante. É interessante notar que, em termos da variável original χ o modo zero é apenas uma constante

$$\chi(y) = c. \quad (2.70)$$

Em primeira vista, a solução não poderia ser localizada, uma vez que não é suprimida da brana, devido o termo exponencial multiplicativo na massa que diverge. Porém, a solução ainda pode ser considerada como um modo localizado. A presença do fator de dobra exponencial na métrica (2.16) permite realizar a seguinte decomposição para o modo zero [25]

$$\begin{aligned}
S^5 &= \frac{1}{2} \int d^4x dy \sqrt{-g} g^{AB} \partial_A \Phi_0 \partial_B \Phi_0 \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \sqrt{-g} \chi^2(y) g^{\mu\nu} \int d^4x \partial_\mu \phi(x^\rho) \partial_\nu \phi(x^\rho) \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \sqrt{-g} \chi^2(y) e^{2a} \int d^4x \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi(x^\rho) \partial_\nu \phi(x^\rho) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dy \sqrt{-g} \chi^2(y) e^{2a} S_{eff}[\phi(x)],
\end{aligned} \tag{2.71}$$

como o modo zero nos fornece (2.70), a integral da dimensão extra não diverge, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \sqrt{-g} \chi^2(y) e^{2a} < \infty. \tag{2.72}$$

Como podemos ver, o modo-zero do campo escalar ϕ é efetivamente localizado sobre a brana devido o termo do fator de dobra que decresce exponencialmente.

2.4.3 Localização do campo fermiônico de spin $\frac{1}{2}$

Nesta subseção iremos analisar o confinamento do campo fermiônico na 3-brana. Para tal, partiremos da ação do campo fermiônico de spin 1/2 não massivo no espaço tempo 5-dimensional:

$$S^5 = \int d^5x i \sqrt{-g} \bar{\Psi} \Gamma^B D_B \Psi, \tag{2.73}$$

cuja equação de movimento pode ser obtida como abaixo

$$\frac{\delta S^5}{\delta \bar{\Psi}} = 0 \rightarrow \Gamma^B D_B \Psi = 0, \tag{2.74}$$

onde D_B é a derivada spin-covariante, definida por

$$D_A = \partial_A + \Omega_A, \tag{2.75}$$

em que Ω_A é a conexão de spin e tem um papel similar a conexão afim para o caso de vetores e tensores em espaço curvo, ou seja, ela é introduzida para que a derivada de um spinor no espaço curvo mantenha seu caráter spinorial. Sendo assim, a conexão afim tem

a forma

$$\Omega_A = e_B^{\tilde{A}}(\partial_A e^{\tilde{B}B} + \Gamma_{AC}^B e^{\tilde{B}C})\Sigma_{\tilde{A}\tilde{B}} = \frac{i}{2}\Omega_A^{\tilde{A}\tilde{B}}\Sigma_{\tilde{A}\tilde{B}}, \text{ onde } \Sigma_{\tilde{A}\tilde{B}} = \frac{i}{4}[\Gamma_{\tilde{A}}, \Gamma_{\tilde{B}}]. \quad (2.76)$$

Na equação (2.76), $\Omega_A^{\tilde{A}\tilde{B}}$ são os coeficientes da conexão de spin e os índices com $\tilde{}$ representam os índices do espaço de Minkowsky enquanto os outros representam os índices do espaço curvo. Os vierbeins não nulos para a métrica de Randall-Sundrum (2.2) são $e_{\mu}^{\tilde{\mu}} = e^{a(y)}\delta_{\mu}^{\tilde{\mu}}$ e $e_y^{\tilde{A}} = \delta_y^{\tilde{A}}$. Assim, as componentes não nulas da conexão de spin são:

$$\Omega_{\mu} = \frac{1}{2}a'\Gamma_{\mu}\Gamma_y. \quad (2.77)$$

As equações de movimento (2.74) podem ser decomposta como:

$$(\Gamma^{\mu}D_{\mu} + \Gamma^yD_y)\Psi(x, y) = 0. \quad (2.78)$$

As relações entre as matrizes gamma no espaço curvo ($\{\Gamma^A, \Gamma^B\} = 2g^{AB}$) e as matrizes gamma no espaço de Minkowsky ($\{\gamma^A, \gamma^B\} = 2\eta^{AB}$), de acordo com a métrica (2.2), são dadas por:

$$\Gamma^{\mu} = \frac{\gamma^{\mu}}{e^a}, \quad (2.79)$$

$$\Gamma^y = \gamma^y \quad (2.80)$$

E as derivadas covariantes (2.75) e conexão de spin (2.77) associadas à métrica (2.2) nos fornece:

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + \frac{1}{2}a'\Gamma_{\mu}\Gamma_y, \quad D_y = \partial_y. \quad (2.81)$$

Seguindo a mesma ideia que usamos na seção anterior, podemos decompor o campo espinorial $\Psi(x, y)$ 5-dimensional, através do método de separação de variáveis, em uma parte 4-dimensional e outra parte associada à dimensão extra: $\Psi(x, y) = \psi(x)\alpha(y)$, com a qual obtemos

$$\left(\Gamma^{\mu}\partial_{\mu} + \frac{1}{2}a'\Gamma^{\mu}\Gamma_{\mu}\Gamma_y + \Gamma^y\partial_y\right)\psi(x)\alpha(y) = 0, \quad (2.82)$$

e após algumas manipulações matemáticas, obtemos

$$\frac{\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi}{\psi} + \frac{\Gamma^y\partial_y\alpha}{\alpha} + 2a'\Gamma_y = 0. \quad (2.83)$$

Nós queremos que a parte 4-dimensional satisfaça a equação de movimento de uma partícula não massiva, ou seja, $\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi = 0$. Logo, com (2.79), $\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi = \frac{\gamma^{\mu}}{e^a}\partial_{\mu}\psi = 0$. Como resultado, obtemos uma equação com dependência apenas na componente y :

$$\Gamma^y[\partial_y + 2a']\alpha = 0 \rightarrow [\partial_y + 2a']\alpha = 0, \quad (2.84)$$

e ao multiplicarmos equação do lado direito por e^{2a} , obtemos [25, 90]:

$$\alpha(y) = ce^{-2a(y)}. \quad (2.85)$$

E agora, vamos analisar se o campo fermiônico é localizado na brana, e para isso vamos reescrever a ação (2.73) e verificar se a integral da parte relativa à dimensão extra converge ou diverge:

$$\begin{aligned} S^5 &= \int d^5x i\sqrt{-g}\bar{\Psi}\Gamma^B D_B\Psi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{4a}\alpha^2 \int d^4x i\bar{\psi}\frac{\gamma^\mu}{e^a}\partial_\mu\psi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{3a}\alpha^2 \int d^4x i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy (e^{2a})^{\frac{3}{2}}\alpha^2 \int d^4x i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-a}c^2 S_{eff}[\psi]. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Como podemos notar, a integral em y na equação (2.86) diverge, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-a}c^2 \rightarrow \infty,$$

o que implica que o campo fermiônico não é confinado livremente na brana. Portanto, é necessário algum mecanismo que permita a localização de campos fermiônicos em modelos RS.

Um mecanismo que possibilita a localização de campos fermiônicos é mostrado em [73], onde é introduzido um acoplamento de férmions com um campo escalar, $\phi\bar{\Psi}\Psi$, cuja ação (2.73) seria modificada e tomaria a forma:

$$S^5 = \int d^5x \sqrt{-g}[i\bar{\Psi}\Gamma^B D_B\Psi - h\phi\bar{\Psi}\Psi], \quad (2.87)$$

o que dá uma massa 5-dimensional efetiva aos férmions. No entanto, o termo de massa de massa dos férmions 5-dimensional $M\bar{\Psi}\Psi$ mudaria de sinal sob o reflexo em relação à brana. Desta maneira, apenas uma quiralidade do férmions pode ser localizada na brana [73], e a equação de movimento para o férmion toma a forma:

$$(\partial_y + 2a' + i\gamma_y M[\theta(y) - \theta(-y)])\Psi(x, y) = 0, \quad (2.88)$$

onde $\theta(y)$ é a função degrau. Introduzindo as quiralidades como $i\gamma_y\Psi_{L,R} = \pm\Psi_{L,R}$, descobre-se que a solução quiral $\Psi_L \propto \exp(2k - M)$ é localizada [25, 73] para a métrica

(2.2) enquanto:

$$M > \frac{k}{2}. \quad (2.89)$$

Então, ao introduzirmos o acoplamento entre o férmion e o campo escalar, torna-se possível a localização de apenas uma quiralidade do férmion. Além disso, o mecanismo de acoplamento aplicado para a localização de campos abre as portas para a criação de mecanismo de localização de partículas, pois como citado no início da seção, partículas livres (bosônicas e superpartículas) não são confinadas estavelmente na brana.

3 A PARTÍCULA BOSÔNICA E A SUPER PARTÍCULA

Neste capítulo iremos descrever o movimento de partículas bosônicas como também o movimento de superpartículas teste no espaço-tempo. Como estamos interessados no confinamento de partículas bosônicas e superpartículas, queremos analisar tanto o confinamento de partículas massivas quanto de partículas não massivas. Para alcançar nosso objetivo iremos descrever a ação da partícula livre em uma forma polinomial através da inserção de um grau de liberdade. Já para o movimento de superpartículas teste, este pode ser descrito em termos da posição $x^A(\tau)$ e variáveis de Grassmann $\psi^A(\tau)$, que são quadri-vetores no espaço de Minkowski. O sistema é invariante sobre transformações gerais de coordenadas $\tau \rightarrow f(\tau)$ o que nos vai proporcionar uma relatividade geral em uma dimensão. Existe também uma invariância local, que corresponde a uma supersimetria, quando o sistema é escrito de forma a ser manifestamente covariante [51].

Ademais, iremos discutir a construção da lagrangeana mais simples para descrever superpartículas. Uma vez que queremos avaliar o comportamento de superpartículas teste em mundo brana, devemos conhecer a ação que a descreve. Na natureza as partículas observadas não são necessariamente partículas Bose ou bosônicas, cujos operadores obedecem a relação de comutação $[x_i, p_j] = i\delta_{ij}$.

3.1 Partícula livre não-relativística

Nesta seção iremos ver brevemente o processo de primeira quantização para partículas livres não-relativística, onde a lagrangeana é quadrática na velocidade, na qual processo de primeira quantização é dado simplesmente por (3.4), uma vez que não existem vínculos na teoria. Adiante veremos que o mesmo não ocorre na descrição da pseudomecânica para partículas de spin $\frac{1}{2}$, na qual veremos que a representação lagrangeana da teoria não possui uma forma quadrática da velocidade.

A descrição clássica para a partícula livre não relativística é dada pela ação

$$S = \frac{1}{2}m \int \dot{x}^2 dt, \quad (3.1)$$

onde $\dot{x}^2 = x_i \dot{x}_i$ e $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ é a lagrangeana do sistema. O momento canônico da partícula é dada por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i. \quad (3.2)$$

Como a lagrangeana da partícula livre não-relativística é quadrática na velocidade, não existe problemas quanto aos processos de primeira quantização [35, 62]. A

relação básica de quantização canônica é dada por [58]

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[A, B], \quad (3.3)$$

para sistemas que não possuam vínculos. Sendo esta, a menos rota entre a mecânica clássica e a mecânica quântica. Logo, a relação de comutação para partículas não relativistas segue a relação:

$$\{x_i, p_j\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[x_i, p_j], \quad (3.4)$$

É bem sabido que o parênteses de Poisson da partícula não relativística é dado por $\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}$, logo a relação de comutação para a partícula não relativística é:

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}. \quad (3.5)$$

Como veremos adiante, sistemas cuja lagrangeana não são quadráticas na velocidade possuem vínculos associados ao momento conjugado, sendo necessário a extensão dos parênteses de Poisson para os parênteses de Dirac.

3.2 Varáveis de Grassmann

Existem partículas chamadas férmions, cujos operadores satisfazem relações de anti-comutação. Normalmente, uma 'descrição clássica' de spin é realizada na estrutura de campos, uma vez que não existe uma descrição clássica do spin. No entanto, partindo de uma representação de grupo de Lorentz adequada para campos clássicos, a descrição de spin pode ser obtida após o processo de quantização apropriado. Para o caso da partícula de teste, o grau de liberdade de spin pode ser incluído usando variáveis de Grassmann. Esses modelos são chamados de modelos pseudomecânicos ou de superpartículas. Este estudo foi realizado em 4 D para espaços-tempos planos [51, 62] e também curvos [63]. Entretanto, a passagem direta da Lagrangeana para a teoria quântica é limitada aos casos onde a Lagrangeana é quadrática nas velocidades. Para evitar esta limitação, vamos obter um método geral para Lagrangeanas mais gerais que esta [35].

Assim, a localização de partículas com spin $\frac{1}{2}$ será descrita por variáveis de Grassmann. Todavia essas variáveis só podem ser interpretadas como spin após quantização. Isso nos leva à teoria de sistema vinculados. Portanto nesta seção e na próxima, vamos estudar, respectivamente, variáveis de Grassmann e a teoria dos vínculos, necessária para sua quantização.

3.2.1 Definições Básicas

Se $\{\psi_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, é um conjunto de variáveis de Grassmann reais no espaço cartesiano não relativístico onde $i = 1, 2, 3$. Os elementos do conjunto $\{\psi_i\}$ satisfazem as seguintes relações de anti-comutação

$$\psi_i\psi_j + \psi_j\psi_i \equiv \{\psi_i, \psi_j\} = 0, \quad (3.6)$$

para todos os possíveis valores de A e B , sendo imediato das relações de comutação acima que $\psi_i^2 = 0$. Entretanto, assume-se que um c -número, x , real ou complexo comuta com variáveis de Grassmann, ou seja, $x\psi_i = \psi_i x$ [59].

Para um sistema de N variáveis de Grassmann é possível escrever um produto arbitrário de N variáveis de Grassmann como $\psi_{A_1}\psi_{A_2}\dots\psi_{A_N} = \varepsilon^{A_1A_2\dots A_N}\psi_1\psi_2\dots\psi_N$, onde $\varepsilon^{A_1A_2\dots A_N}$ é o símbolo de Levi-Civita em ordem N , definido por

$$\varepsilon^{A_1\dots A_N} = \begin{cases} +1 & \text{se } \{A_1\dots A_N\} \text{ é uma permutação par de } \{1,\dots,N\} \\ -1 & \text{se } \{A_1\dots A_N\} \text{ é uma permutação ímpar de } \{1,\dots,N\} \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Segue-se a partir de (3.6) que o conjunto de variáveis de Grassmann $\{\psi_i\}$, como um espaço linear possui dimensão 2^N . É conveniente considerar como bases os monômios $1; \psi_1, \dots, \psi_N; \psi_1\psi_2, \dots, \psi_{N-1}\psi_N; \dots; \psi_1\psi_2\dots\psi_N$. O monômio $\psi_{A_{i_1}}\dots\psi_{A_{i_N}}$ é chamado monômio de grau N [57–59].

Se tomarmos $f(x, \psi)$ uma função da variável c -número x e de $\psi \in \{\psi_i\}$, então a forma da expansão polinomial de $f(x, \psi)$ em termos de ψ é

$$\begin{aligned} f(\phi, \psi) = & f_0(x) + \sum_A \psi_{A_1} f_1(x, A) + \sum_{A_i} \psi_{A_1}\psi_{A_2} f_2(x, A_1, A_2) + \dots \\ & + \sum_{A_i} \psi_{A_1}\dots\psi_{A_N} f_N(x, A_1, \dots, A_N), \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde $f_N(x, A_1, \dots, A_N) = \frac{\partial^N f(x, \psi)}{\partial \psi_{A_1} \partial \psi_{A_2} \dots \partial \psi_{A_N}}$. Devido a conexão, tais funções possuem uma supersimetria, elas são conhecidas como superfunções e esta combinação entre x e ψ é conhecida como super-espaço [59].

3.2.2 Derivação

Define-se derivada a esquerda e a direita de uma função $f(\psi)$ das variáveis de Grassmann como $\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \psi_i} f$ e $f \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \psi_i}$, respectivamente, de uma função $f(\psi)$ de $\{\psi_i\}$. Ambas as derivadas são operações lineares em $\{\psi_i\}$. A derivada sobre um monômio de grau s é

dada por

$$\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\psi_j}[\psi_{A_1}\psi_{A_2}\cdots\psi_{A_N}] = \delta_{A_1j}\psi_{A_2}\cdots\psi_{A_N} + \cdots + (-1)^{N-1}\delta_{A_Nj}\psi_{A_1}\cdots\psi_{A_{N-1}}, \quad (3.8)$$

$$[\psi_{A_1}\psi_{A_2}\cdots\psi_{A_N}]\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\psi_j} = \delta_{A_Nj}\psi_{A_1}\cdots\psi_{A_{N-1}} + \cdots + (-1)^{N-1}\delta_{A_1j}\psi_{A_2}\cdots\psi_{A_N}, \quad (3.9)$$

onde

$$\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\psi_j}[\psi_{A_1}\psi_{A_2}\cdots\psi_{A_N}] = [\psi_{A_1}\psi_{A_2}\cdots\psi_{A_N}]\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\psi_j}$$

se N é par e

$$\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\psi_j}[\psi_{A_1}\psi_{A_2}\cdots\psi_{A_N}] = -[\psi_{A_1}\psi_{A_2}\cdots\psi_{A_N}]\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\psi_j}$$

se N é ímpar. Portanto, para calcular a derivada a esquerda de $\psi_{A_1}\cdots\psi_{A_N}$ em relação a ψ_j , devemos permutar ψ_j até o primeiro lugar no monômio por meio de (3.6) e então derivamos; para calcular a derivada a esquerda devemos permutar ψ_j até o último lugar e então derivar. Obviamente, se o monômio não possuir ψ_j , então ambas as derivadas são nulas [58].

É interessante notar que a diferenciação $\partial/\partial\psi_i$ (à esquerda ou a direita) é nilpotente, ou seja, $\frac{\partial^2}{\partial\psi_i^2} = 0$. Alguns exemplos simples podem ser tratados a partir dessa relação, como por exemplo a regra de Leibnitz que, para duas variáveis de Grassmann toma a forma $(\overrightarrow{\partial}/\partial\psi_k)(\psi_i\psi_j) = (\partial\psi_i/\partial\psi_k)\psi_j - (\partial\psi_j/\partial\psi_k)\psi_i = \delta_{ik}\psi_j - \delta_{jk}\psi_i$, com a qual podemos mostrar que $\{\partial/\partial\psi_i, \partial/\partial\psi_j\} = 0$ [57]. A partir de agora, todas as derivadas envolvendo variáveis de Grassmann serão tomadas pela esquerda.

3.2.3 Mecânica Clássica

Vamos aqui, formular a mecânica clássica no caso de variáveis de Grassmann e o resultado obtido, obviamente, possui uma forma diferente da usual, porém os conceitos de ação e Hamiltoniana sobrevivem à transição. Os parênteses de Poisson podem ser adaptados à variáveis de Grassmann afim de permitir a definição de uma mecânica quântica Grassmanniana.

Para construirmos a ação Grassmanniana, vamos inicialmente considerar um espaço N -dimensional e parametrizar a variável real ψ_i de forma que possamos representar a "posição" da partícula num determinado instante t , então $\psi_i \equiv \psi_i(t)$. Da equação (3.6), temos que $\{\psi_i(t), \psi_j(t')\} = 0$, e como nosso ψ_i é função de t , é possível termos uma derivada temporal, $\dot{\psi}_i(t)$, onde, ao derivarmos $\{\psi_i(t), \psi_j(t')\} = 0$ em relação ao tempo t' , teremos $\{\psi_i(t), \dot{\psi}_j(t')\} = 0$, que nos mostra que a derivada em relação ao tempo de uma variável de Grassmann, também é uma variável de Grassmann [59]. Para definirmos uma

ação apropriada envolvendo variáveis de Grassmann, iremos tomar os seguintes ansatz para a lagrangeana:

$$\psi, \dot{\psi}, \psi\psi, \dot{\psi}\dot{\psi} \text{ e } \psi\dot{\psi}.$$

Agora iremos examinar as ações possíveis e suas variações, para descobrir quais ações são inconsistentes ou quais fornecem equações de movimento inconsistentes. Inicialmente vamos analisar ψ

$$S = \int d\tau\psi \rightarrow \delta S = \int d\tau\delta\psi$$

A partir do Princípio de Hamilton, sabemos que $\delta S = 0$, portanto, a equação de movimento que obtemos é:

$$1 = 0,$$

que é claramente inconsistente. Os dois seguintes ansatz $\psi\psi$ e $\dot{\psi}\dot{\psi}$ são identicamente nulos, veja (3.6), logo também são inconsistentes. Assim, uma possível ação para um sistema é

$$S = \frac{i}{2} \int dt\psi_i\dot{\psi}_i. \quad (3.10)$$

Ao aplicarmos o princípio de Hamilton na ação acima, obtemos

$$\delta S = \int dt \left(\frac{i}{2}\psi_i\delta\dot{\psi}_i + \frac{i}{2}\delta\psi_i\dot{\psi}_i \right) = -i \int dt\dot{\psi}_i\delta\psi_i = 0,$$

foi aplicada integração por partes no primeiro termo depois da igualdade. A equação de movimento obtida é [37]

$$\dot{\psi}_i = 0. \quad (3.11)$$

As equações de movimento de Hamilton podem ser construídas de forma similar a construída com c -números. Vamos definir π_i , o momento conjugado a variável de Grassmann ψ_i , de maneira que a Hamiltoniana em termos da Lagrangeana tem a forma

$$H(\pi, \psi) = \pi_i\dot{\psi}_i - L(\psi, \dot{\psi}) \quad (3.12)$$

via transformação de Legendre. Ao variarmos a Hamiltoniana obtemos

$$\delta\pi_i \frac{\partial H}{\partial\pi_i} + \delta\psi_i \frac{\partial H}{\partial\psi_i} = \delta\pi_i\dot{\psi}_i - \delta\dot{\psi}_i\pi_i - \delta\psi_i \frac{\partial L}{\partial\psi_i} - \delta\dot{\psi}_i \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}_i}, \quad (3.13)$$

de (3.13) obtemos que o momento conjugado associado as variáveis de Grassmann possui a forma

$$\pi_i = -\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}_i}, \quad (3.14)$$

uma vez que a Hamiltoniana deve ser independente da componente $\dot{\psi}_i$. Daí segue que as

equações de Hamilton são

$$\dot{\pi}_i = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad \dot{\psi}_i = \frac{\partial H}{\partial \pi_i}. \quad (3.15)$$

O sinal diferente das equações de Hamilton para um sistema Grassmanniano em relação a um sistema bosônico vem do fato de π_i e $\dot{\psi}_i$ anti-comutarem [59].

O parênteses de Poisson para variáveis de Grassmann é definido por

$$\{\Pi, \Omega\}_+ \equiv \frac{\partial \Pi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \Omega}{\partial \pi_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial \pi_i} \frac{\partial \Omega}{\partial \psi_i},$$

que é chamado *anti-pararênteses de Poisson*. É simples ver que o anti-pararênteses de Poisson de ψ_i e π_j é dado por [59]

$$\{\psi_i, \pi_j\}_+ = \delta_{ij}. \quad (3.16)$$

3.3 Teoria dos vínculos

Para alguns sistemas é possível passar diretamente da Lagrangeana para a teoria quântica, porém são limitadas aos casos onde a Lagrangeana é quadrática nas velocidades. E como vemos, a ação mais simples para superpartículas (3.10) não é quadrática na velocidade, então para evitar esta limitação, vamos obter um método geral para Lagrangeanas mais gerais que esta [35]. No qual, iremos estender os parênteses de Poisson para os parênteses de Dirac afim de possibilitar a aplicação do método de primeira quantização e mostrar que variáveis de Grassmann podem representar as matrizes de Dirac e assim serem usadas para representar classicamente partículas com spin, através da pseudomecânica. E assim, poderemos investigar o confinamento de superpartículas em modelos de mundo brana tipo RS

3.3.1 Sistemas Vinculados

Seja um sistema descrito pela Lagrangeana $L(q, \dot{q}, t)$ num espaço de configurações N -dimensional, com coordenadas generalizadas $q_i(t)$, onde $i = 1, 2, \dots, N$ e suas respectivas velocidades generalizadas $\dot{q}_i(t)$. A ação do sistema é

$$S = \int_{t_2}^{t_1} dt L(q, \dot{q}, t). \quad (3.17)$$

As equações de movimento clássicas obtidas ao variarmos (3.17) são dadas por

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right), \quad (3.18)$$

que pode ser também escritas na forma $(\partial^2 L / \partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j) \ddot{q}^j = \partial L / \partial q^i - (\partial^2 L / \partial \dot{q}^i \partial q^j) \dot{q}^j$, Em que o termo

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \quad (3.19)$$

é chamado *matriz Hessiana*. Se o determinante dessa matriz é nulo, diz-se que o sistema possui vínculos e não podemos determinar unicamente a aceleração do sistema em termos das coordenadas e velocidades generalizadas. Neste caso, teremos diferentes evoluções temporais para uma mesma condição inicial [55]. A transição para o formalismo Hamiltoniano é feito, inicialmente, pela introdução dos momentos canônicos, $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$. No caso de sistemas não vinculados, q^i e p^i são variáveis independentes. Para o caso de sistemas vinculados, as equações do momnto canônico levam a vínculos denotados por

$$\Phi_m(q, p) \equiv p_m - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M \leq N, \quad (3.20)$$

Esses vínculos, oriundos diretamente da definição do momento, são chamados *vínculos primários*. Outros podem existir, que não surgem de (3.20), e são chamados *vínculos secundários* [56].

Vamos considerar a quantidade $p^i \dot{q}_i - L$. Ao fazermos variações em termos das variáveis q^i e \dot{q}^i teremos, $\delta(p^i \dot{q}_i - L) = \delta p^i \dot{q}_i - \dot{p}^i \delta q_i$. Então vemos que a variação de $(p^i \dot{q}_i - L)$ envolve somente variações dos q^i s e p^i s. Essa quantidade é bem conhecida e leva o nome de Hamiltoniana, H .

Entretanto, quando o sistema possui vínculos essa Hamiltoniana não é unicamente determinada e podemos adicionar combinações lineares dos Φ , que são nulos. Assim, ficaremos com a Hamiltoniana

$$H_T = H + c^m \Phi_m, \quad (3.21)$$

onde os coeficientes c^m podem ser funções dos q^i s e dos p^i s. Ao variarmos H_T obtemos as seguintes equações de movimento

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p^i} + u^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial p^i} \quad (3.22)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - u^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial q^i}, \quad (3.23)$$

onde os u_m são coeficientes desconhecidos.

É conveniente introduzir um formalismo que nos permita escrever estas equações de uma forma mais simples, para tal, usaremos o parêntese de Poisson. Se temos duas funções dos q^i s e dos p^i s, por exemplo $f(q, p)$ e $g(q, p)$, então o parêntese de Poisson, $\{f, g\}$, é definido por $\{f, g\} = (\partial f / \partial q^i)(\partial g / \partial p_i) - (\partial f / \partial p^i)(\partial g / \partial q_i)$. Os parêntese-

ses de Poisson possuem algumas propriedades que vêm de sua definição, que são anti-simetria, linearidade, regra do produto e identidade de Jacobi, dadas, respectivamente, por $\{f, g\} = -\{g, f\}$, $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$, $\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + \{f_1, g\} f_2$ e $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$.

Com o auxílio do parêntese de Poisson, podemos reescrever as equações de movimento. Seja uma função $g(q, p)$, temos

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial g}{\partial p^i} \dot{p}^i. \quad (3.24)$$

Então, com as equações (3.22) e (3.23) a equação (3.24) toma a forma

$$\dot{g} = \{g, H\} + u^m \{g, \Phi_m\}. \quad (3.25)$$

Os parênteses de Poisson de duas funções f e g possuem significado somente se estas puderem ser expressas em termos das variáveis q e p . Para o caso de uma função que não possa ser expressa em termos dos q 's e p 's, esta não possuirá parêntese de Poisson com qualquer outra função. Portanto, vamos estender o significado do parêntese de Poisson e dizer que ele existe para quaisquer duas funções e satisfazem as suas propriedades, mas por outro lado serão ditas indeterminadas se estas não são funções dos q 's e p 's. Desta forma, podemos escrever (3.25) na forma

$$\dot{g} = \{g, H + u^m \Phi_m\}. \quad (3.26)$$

Aqui, vemos os coeficientes u^m aparecendo em um dos membros de (3.26), mas estes não são funções dos q 's e p 's, então não podemos determinar o parêntese de Poisson (3.26). Entretanto, podemos usar as propriedades dos parênteses de Poisson. Utilizando a propriedade da soma, obtemos $\dot{g} = \{g, H\} + \{g, u^m \Phi_m\}$. Agora aplicando a propriedade do produto no segundo membro da equação acima, teremos:

$$\{g, u^m \Phi_m\} = \{g, u^m\} \Phi_m + u^m \{g, \Phi_m\}. \quad (3.27)$$

O último membro em (3.27) é bem definido, pois g e Φ_m são, ambos, funções dos q 's e p 's, enquanto que o termo $\{g, u^m\}$ é indefinido, mas é multiplicado por um termo nulo, Φ_m , e desta forma o primeiro termo do lado direito de (3.27) se anula e assim chegamos à $\{g, H + u^m \Phi_m\} = \{g, H\} + u^m \{g, \Phi_m\}$ e assim (3.26) concorda com (3.25).

Devemos ser cuidadosos acerca do formalismo do parênteses de Poisson, pois no caso dos vínculos, (3.20), nenhuma aplicação foi feita com os mesmos, por isso vamos representá-los por $\Phi_m \approx 0$, onde o sinal “ \approx ” indica “fracamente nulo”, pois os parênteses de Poisson de Φ com alguma variável canônica pode ser não nulo. Então a equação (3.26)

pode ser escrita na forma $\dot{g} \approx \{g, H_T\}$.

Portanto, as equações de movimento (3.22), (3.23) e (3.25) tomam a forma

$$\dot{q}_i \approx \frac{\partial H}{\partial p_i} + u^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_i} \quad (3.28)$$

$$\dot{p}_i \approx -\frac{\partial H}{\partial q_i} - u^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial q_i} \quad (3.29)$$

$$\dot{g} \approx \{g, H\} + u^m \{g, \Phi_m\}. \quad (3.30)$$

Vamos assumir que os vínculos sejam constantes no tempo, então tomando a equação (2.14) para $g = \Phi_n$ obtemos as seguintes relações de consistência

$$\dot{\Phi}_n \approx 0 \rightarrow \{\Phi_n, H\} + u^m \{\Phi_n, \Phi_m\} \approx 0, \quad (3.31)$$

que nos dá três possibilidades [35]:

1. as equações reduzem-se a $0 = 0$, ou seja, ela é identicamente satisfeita;
2. as equações reduzem-se a equações independentes dos u 's, envolvendo somente as variáveis q 's e p 's que são chamadas *vínculos secundários*, Φ_n , ($n = 1, 2, \dots, K \leq N - M$) e devem ser feitas as relações de consistência com estes até que não surjam mais vínculos;
3. as equações determinam os coeficientes u^m .

A definição de vínculos primários e secundários é simplesmente pra diferenciar os vínculos que surgem da definição de momento daqueles que surgem das relações de consistência e é apenas por questão de organização, pois na aplicação do método de quantização canônica ambos tem a mesma importância. Nesse contexto, uma classificação útil é separar os vínculos que possuem parêntese de Poisson fracamente nulo, chamados *vínculos de primeira classe* dos demais, que são chamados *vínculos de segunda classe*. A existência de vínculos de primeira classe significa que a teoria possui simetrias [56].

3.3.2 Parêntese de Dirac

Seja uma certa quantidade dinâmica $A(q, p, t)$, sua evolução temporal será dada por $dA/dt = (\partial i/\partial q_i)\dot{q}_i + (\partial i/\partial p_i)\dot{p}_i + \partial i/\partial t$ e utilizando as equações (2.12) e (2.13), obtemos,

$$\frac{dA}{dt} \approx \{A, H\} + u^m \{A, \Phi_m\} + \frac{\partial i}{\partial t}, \quad (3.32)$$

com m variando de $m = 1, 2, \dots, M + K$, uma vez que os vínculos secundários devem ser incluídos em H_T .

Voltando a equação (3.31) e definindo $C_{nm} = \{\Phi_n, \Phi_m\}$ uma matriz $n \times m$, ficaremos com

$$\{\Phi_n, H\} + u^m C_{nm} \approx 0 \Rightarrow u^p \approx -(C^{-1})^{pn} \{\Phi_n, H\}. \quad (3.33)$$

Substituindo a equação acima em (3.32), teremos

$$\frac{dA}{dt} \approx \{A, H\} - \{A, \Phi_m\} (C^{-1})^{mn} \{\Phi_n, H\} + \frac{\partial i}{\partial t} \approx \{A, H\}_D + \frac{\partial i}{\partial t} \quad (3.34)$$

onde definimos,

$$\{A, H\}_D = \{A, H\} - \{A, \Phi_m\} (C^{-1})^{mn} \{\Phi_n, H\} \quad (3.35)$$

chamado *parênteses de Dirac* entre A e H .

A relação básica de quantização canônica é dada por (3.3) para sistemas que não possuam vínculos. O resultado (3.34) leva a crer que no caso de sistemas vinculados, a ponte com a Mecânica Quântica se faça através dos parênteses de Dirac,

$$\{A, B\}_D \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [A, B], \quad (3.36)$$

onde o significado de $\{A, B\}_D$, da definição (3.35), é

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \Phi_m\} (C^{-1})^{mn} \{\Phi_n, B\}. \quad (3.37)$$

3.3.3 Quantização Canônica

Para quantizarmos a teoria devemos, primeiramente, calcular o momento canônico associado a variável ψ_i que foi definido em (3.14). A Lagrangeana do sistema pode ser obtida de (3.10). É interessante notar que a matriz Hessiana do sistema possui autovalores nulos, o que configura vínculos primários $\partial^2 L / (\partial \dot{\psi}_i \partial \dot{\psi}_j) = 0$.

Sem perda de generalidade, podemos definir o anti-parêntese de Dirac a partir da definição (3.37)

$$\{A, B\}_{D+} = \{A, B\}_+ - \{A, \Phi_m\}_+ C_{mn}^{-1} \{\Phi_n, B\}_+, \quad (3.38)$$

onde A, B e Φ_m são, agora, variáveis de Grassmann.

Agora, vamos calcular os vínculos da teoria, definidos em (3.20). Para tal, vamos utilizar a definição (3.14) e, desta forma, obtemos os vínculos

$$\Phi_m = \pi_m - \frac{i}{2} \psi_m. \quad (3.39)$$

Para calcularmos as relações de consistência (3.31), precisamos calcular a Hamiltoniana do sistema, que é dada por $H(\pi, \psi) = \pi_i \dot{\psi}_i - L(\psi, \dot{\psi})$, que ao substituirmos a Lagrangeana

$L = (i/2)\psi_i\dot{\psi}_i$ e o momento $\pi_m = (i/2)\dot{\psi}_m$ obtemos que a Hamiltoniana é nula. As relações de consistência ficam $\dot{\Phi}_n \approx 0 \rightarrow \{\Phi_n, H\}_+ + u_m\{\Phi_n, \Phi_m\}_+ \approx 0$, mas como $H = 0$, obtemos $u_m\{\Phi_n, \Phi_m\}_+ \approx 0$, resolvendo o antiparênteses de Poisson entre Φ_n e Φ_m chegamos à $\{\Phi_n, \Phi_m\}_+ = (-i)\delta_{mn}$, o que nos dá a solução para os coeficientes, $u_n \approx 0$. Da equação de consistência fica claro que nenhum vínculo de segunda classe surge, então podemos calcular o anti-parênteses de Dirac entre ψ_i e π_j , assim

$$\{\psi_i, \pi_j\}_{D+} = \{\psi_i, \pi_j\}_+ - \{\psi_i, \Phi_m\}_+ C_{mn}^{-1} \{\Phi_n, \pi_j\}_+, \quad (3.40)$$

onde definimos a matriz $C_{mn} \equiv \{\Phi_m, \Phi_n\} = -i\delta_{mn}$. Por fim, obtemos

$$\{\psi_i, \pi_j\}_{D+} = \frac{1}{2}\delta_{ij}. \quad (3.41)$$

A relação de quantização canônica equivalente a (3.36) é $\{A, B\}_{D+} \rightarrow (1/i\hbar)[A, B]_+$, onde $[A, B]_+$ é o anti-comutador e é definido por $[A, B]_+ = AB + BA$, portanto, obtemos as relações de anti-comutação

$$[\psi_i, \pi_j]_+ = \frac{i\hbar}{2}\delta_{ij}, \quad [\psi_i, \psi_j]_+ = \hbar\delta_{ij}, \quad (3.42)$$

onde usamos a definição do momento canônico na segunda relação de anti-comutação.

É interessante notar que se tomarmos a dinâmica da variável $\psi(t)$, obteremos, via (2.14), $\dot{\psi}_i \approx \{\psi_i, H\}_+ + u_m\{\psi_i, \Phi_m\}_+$, onde $\dot{\psi}_i = d\psi_i/dt$, refere-se a um tempo absoluto, ou seja, as equações de movimento de Hamilton não são manifestamente relativísticas. No entanto, o que ocorre é que $H = 0$, então a dinâmica de $\psi(t)$ fica $\dot{\psi}_i \approx u_m\{\psi_i, \Phi_m\}_+$. Como os coeficientes u_m são arbitrários, podemos multiplicar os $d\psi_i/dt$'s por um fator qualquer, que representa uma diferente escala temporal, ou seja, temos equações de movimento em que a escala de tempo é arbitrária. Assim, podemos introduzir uma outra variável temporal τ ao invés de t , que nos dá as equações de movimento

$$\frac{d\psi_i}{d\tau} \approx u'_m\{\psi_i, \Phi_m\}_+, \quad (3.43)$$

que são equações de movimento onde a variável temporal não é absoluta. Se olharmos a ação (3.10) podemos notar que a mesma é invariante por reparametrizações de t . Sendo assim, podemos concluir que esta ação pode representar muito bem o sistema relativístico e para tal devemos apenas incluir a invariância de Lorentz, assim temos que a ação relativística para variáveis de Grassmann tem a forma [35]

$$L = \frac{i}{2}\eta_{\mu\nu}\psi^\mu\dot{\psi}^\nu, \quad (3.44)$$

onde $\mu = 0, 1, 2, 3$ são as coordenadas do espaço-tempo plano 4-dimensional e $\eta_{\mu\nu} =$

$\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ é a métrica do espaço de Minkowsky 4-dimensional.

3.4 Ação Polinomial

Como o movimento da partícula teste é descrito por uma geodésica, e a ação mais geral que inclui partículas massivas e não massivas é alcançada acoplando o sistema minimamente ao campo vierbein (unidimensional) E [51], que, no entanto, não deve introduzir novos graus de liberdade dinâmicos [60]. A ação contendo x^A e E para uma partícula de massa M num espaço-tempo curvo D -dimensional, com métrica g_{AB} é

$$S = \frac{1}{2} \int [E^{-2} g_{AB} \dot{x}^A \dot{x}^B - M^2] E d\tau, \quad (3.45)$$

onde $A = 0, 1, 2, \dots, D-1$ são os índices do espaço-tempo curvo D -dimensional, cuja métrica é representada por g_{AB} . Embora, como veremos mais adiante, avaliaremos o movimento de superpartículas tanto no espaço tempo plano, no qual basta fazermos $g_{AB} \rightarrow \eta_{AB}$ quanto no espaço tempo curvo. Estamos, portanto, obtendo a forma polinomial da ação da partícula livre para o caso mais geral.

Na ação (3.45), E é o vierbien, $\dot{x}^A = \frac{dx^A}{d\tau}$ e M é a massa da partícula no espaço 5-dimensional. Para o caso livre, a massa da partícula é uma constante dada por M_0 . Porém, como também será discutido o caso de interação (mecanismo de localização), vamos considerar que esta massa é função das coordenadas do espaço-tempo x^A , $M = M(x^A)$. Geralmente, a ação usada para discutir a dinâmica das partículas relativísticas é aquela na Eq. (3.50). No entanto, a ação (3.45) apresenta uma vantagem importante para nossa discussão porque nos permite estudar o caso sem massa. Assim como a Eq. (3.50), ação (3.45) é invariante pela transformação de parâmetro arbitrário $\tau \rightarrow \tau' = f(\tau)$, se o vierbein E se transforma como $E \rightarrow E' = \frac{d\tau}{d\tau'} E$. Este vierbein desempenha o papel de uma terada na linha mundo da partícula teste. Tomando a variação da ação (3.45),

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2} \int \left[-\delta E (E^{-2} g_{AB} \dot{x}^A \dot{x}^B + M^2) - \delta x^C \left(E^{-1} \delta_C g_{AB} \dot{x}^A \dot{x}^B \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \frac{d}{d\tau} (E^{-1} g_{AC} \dot{x}^A) - 2M \partial_C M \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int \left[-\delta E (E^{-2} g_{AB} \dot{x}^A \dot{x}^B + M^2) - \delta x^C \left(\frac{D}{D\tau} [E^{-1} g_{AC} \dot{x}^A] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2M \partial_C M \right) \right] \end{aligned} \quad (3.46)$$

onde $\partial_C g_{AB} \dot{x}^A \dot{x}^B = 2g_{BD} \Gamma_{AC}^D$ e assim, satisfazendo a condição de Hamilton $\delta S = 0$,

obtemos as equações do movimento

$$\frac{\delta S}{\delta E} = 0 \rightarrow g_{AB}\dot{x}^A\dot{x}^B + E^2 M^2(x^N) = 0, \quad (3.47)$$

$$\frac{\delta S}{\delta x^N} = 0 \rightarrow \frac{D}{D\tau} [E^{-1} g_{NA}\dot{x}^A] + EM\partial_N M = 0. \quad (3.48)$$

Como a equação de movimento para E é puramente algébrica (3.47), E não representa um novo grau de liberdade dinâmico [60]. Em geral, para partículas teste massivas, podemos fixar a nova variável como $E = \frac{1}{M(x^A)}$ e usar a restrição $g_{AB}\frac{dx^A}{d\theta}\frac{dx^B}{d\theta} + 1 = 0$. Para partículas teste não massivas, podemos escolher a nova variável como $E = 1$ e a restrição $g_{AB}\frac{dx^A}{d\theta}\frac{dx^B}{d\theta} = 0$, para $x^A = 0$, $M^2(0) = M_0^2 = 0$. Então, se a massa $M_0^2 = 0$, a ação (3.50) não está bem definida para $E = \frac{1}{M(x^A)}$. Da equação (3.48) obtemos que o momento conjugado para a partícula é dado por:

$$p_B = E^{-1} g_{AB}\dot{x}^A. \quad (3.49)$$

Observe que, ao substituir a equação (3.47) na ação (3.45), obtemos

$$S = - \int M(x^N) \sqrt{-g_{AB}\dot{x}^A\dot{x}^B} d\tau, \quad (3.50)$$

que é a ação comum para uma partícula de teste quando $M(x^A) = M_0$. Isso mostra que as ações (3.50) e (3.45) são equivalentes.

3.5 Ação relativística para a superpartícula de Brink-Schwarz não massiva

A ação para a superpartícula de Brink-Schwarz não massiva é dada pela associação da ação da partícula relativística polinomial não massiva juntamente com a ação relativística Grassmanniana (3.44), que nos dá a ação

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau \left(\dot{x}^2 E^{-1} - \eta_{AB}\psi^A\dot{\psi}^B \right), \quad (3.51)$$

cuja Lagrangeana pode ser escrita como uma derivada total, que implica numa invariância da ação. É possível que, devido a componente temporal de ψ^A normas negativas apareçam no espectro físico assim como acontece com a partícula relativística. Para evitar este problema é necessário adicionar uma invariância adicional que sane o possível problema e nos dê uma invariância por supersimetria. Daí, introduzimos um super-parceiro, χ , ao campo vierbein. A Lagrangeana fica, então, na forma

$$L = \frac{1}{2} \left(\dot{x}^2 E^{-1} - \eta_{AB}\psi^A\dot{\psi}^B - iE^{-1}\chi\eta_{AB}\dot{x}^A\psi^B \right), \quad (3.52)$$

que é invariante por reparametrização $\tau \rightarrow \tau' = \tau - f(\tau)$ se:

$$\delta x^A = f \dot{x}^A \quad (3.53)$$

$$\delta \psi^A = f \dot{\psi}^A \quad (3.54)$$

$$\delta E = f \dot{E} + \dot{f} E \quad (3.55)$$

$$\delta \chi = \dot{f} \chi + f \dot{\chi}, \quad (3.56)$$

A transformação por reparametrização é dada por

$$\delta L = \frac{d}{d\tau}(fL), \quad (3.57)$$

ver (A.1), daí, a variação da Lagrangeana é uma derivada total, que implica na invariância por reparametrização.

Se escolhermos as seguintes transformações de supersimetria local,

$$\begin{aligned} \delta x &= i\alpha\psi, & \delta \psi &= \alpha \left(\dot{x}E^{-1} - \frac{i}{2}E^{-1}\chi\psi \right); \\ \delta E &= i\alpha\dot{\chi}, & \delta \chi &= 2\dot{\alpha}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

teremos uma invariância por transformações de supersimetria local. A variável de Grassmann α é uma função arbitrária de τ e sob as transformações (3.58), a variação da ação é

$$\delta L = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau}(\alpha E^{-1} \psi^A \dot{x}_A), \quad (3.59)$$

ver (A.2), e assim nosso sistema tem as invariâncias requeridas [36]. Se tomarmos o comutador entre duas transformações de supersimetria e atuarmos sobre os campos, encontraremos

$$\begin{aligned} [\delta_\beta, \delta_\alpha]E &= f\dot{E} + \dot{f}E + i\alpha'\dot{\chi} & [\delta_\beta, \delta_\alpha]\chi &= f\dot{\chi} + \dot{f}\chi + 2\alpha', \\ [\delta_\beta, \delta_\alpha]x &= f\dot{x} + i\alpha'\dot{\psi} & [\delta_\beta, \delta_\alpha]\psi &= f\dot{\psi} + \alpha' \left(\dot{\psi}E^{-1} - \frac{i}{2}E^{-1}\chi\psi \right), \end{aligned}$$

onde $f(\tau) = \frac{2i\alpha\beta}{E}$ e $\alpha' = \frac{1}{2}f(\tau)\chi$ [51]. Então vemos que o comutador de suas transformações de supersimetria gera uma reparametrização adicionada de uma transformação de supersimetria. Essas relações nos mostram também que não há uma estrutura simples para o grupo na ação, pois não observamos constantes de estrutura.

As equações de movimento em relação a x e ψ pela aplicação das equações de

Euler-Lagrange sob a ação (3.52) são

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_A} \right) &= \frac{\partial L}{\partial x_A} \Rightarrow \frac{d}{d\tau} \left(E^{-1} \dot{x}^A - \frac{i}{2} \chi E^{-1} \psi^A \right) = 0 \\ &\Rightarrow p^A = E^{-1} \dot{x}^A - \frac{i}{2} \chi E^{-1} \psi^A \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_A} \right) = \frac{\partial L}{\partial \psi_A} \Rightarrow \dot{\psi}^A - \frac{1}{2} \chi E^{-1} \dot{x}^A = 0. \quad (3.61)$$

Os campos E e χ não possuem dinâmica, então aplicando a equação de Euler-Lagrange obteremos as seguintes equações de vínculos

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \chi} \right) = \frac{\partial L}{\partial \chi} \Rightarrow E^{-1} \dot{x}^A \psi_A = 0 \quad (3.62)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial E} \right) = \frac{\partial L}{\partial E} \Rightarrow \dot{x}^2 - i \chi \dot{x}^A \psi_A = 0 \quad (3.63)$$

3.5.1 Quantização no gauge do tempo próprio

A Lagrangeana (3.52) possui uma invariância de gauge o que nos permite escolher $E = 1$ e sua variação, que está em (3.58) nos leva a $\delta E = 0 \Rightarrow \chi = 0$ e isto corresponde ao gauge do tempo próprio e as equações de movimento (3.60-3.63) tornam-se

$$p^A = \dot{x}^A \quad (3.64)$$

$$\dot{\psi}^A = 0, \quad (3.65)$$

para as variáveis x e y . E as equações de vínculo tornam-se:

$$\dot{x}^A \psi_A = 0 \quad (3.66)$$

$$\dot{x}^2 = 0. \quad (3.67)$$

Das equações (3.64) e (3.65), implica que $\ddot{x}^A = \dot{\psi}^A = 0$, cujas soluções são

$$x^A = q^A + p^A \tau, \quad \psi^A = \xi^A, \quad (3.68)$$

com ξ^A um 4-vetor Grassmanniano constante. As equações de vínculo (3.62) continuam válidas e correspondem a ortogonalidade spin-velocidade e condição de massa, respectivamente. As equações de movimento podem ser obtidas da Lagrangeana linearizada

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 - i \psi^A \dot{\psi}_A), \quad (3.69)$$

que agora é invariante apenas por translações de τ e transformações de supersimetria. Para quantizar a teoria, vamos calcular o parêntese e o anti-parêntese de Poisson, e

podemos obter assim as relações quânticas de comutação e anti-comutação. Para a relação de anti-comutação, há um problema devido a um vínculo primário, pois a matriz Hessiana da Lagrangeana (3.69), possui autovalores nulos. Assim, precisamos utilizar o método de Dirac tratado no capítulo (3.3) e seção (3.3.3) e obtemos

$$[x_A, p_B] = i\eta_{AB}, \quad [\psi_A, \psi_B]_+ = \eta_{AB}, \quad (3.70)$$

onde $p_B = \dot{x}_B$. Uma solução para a relação de anti-comutação é dada por

$$\psi_A = \sqrt{\frac{1}{2}}\gamma_A, \quad (3.71)$$

que leva a álgebra de Grassmann para a álgebra de Dirac-Clifford, no regime quântico. Os auto estados do momento da teoria são dados por $|\psi\rangle = |p\rangle u(p)$, onde $|p\rangle = e^{-ip^A x_A} |0\rangle$, em que p^A são os autovalores do operador momento [36] e $|0\rangle$ é o fundamental do operador momento que é gerado atuando o operador destruição $a(p)$ sucessivamente. Um estado de uma partícula, por exemplo, é gerado atuando o operador de criação $a^\dagger(p)$ no operador do estado fundamental e $u(p)$ é um spinor de Dirac [88]. Os vínculos (3.66) e (3.67) são impostos sobre esses estados e encontramos

$$p^2 |\tilde{\psi}\rangle = \gamma^A p_A |\tilde{\psi}\rangle = 0, \quad (3.72)$$

$$p^2 |\tilde{\phi}\rangle = 0 \quad (3.73)$$

em que os $|\tilde{\psi}\rangle$ e $|\tilde{\phi}\rangle$ são estados físicos aceitáveis. A realização das relações de comutação descrevem uma partícula de Dirac não massiva com a equação de Dirac e Klein-Gordon para partículas não massivas surgindo como resultado dos vínculos da teoria. Então vemos de (3.71) que variáveis de grassmann podem representar as matrizes de Dirac e, portanto, representar classicamente partículas com spin $\frac{1}{2}$.

3.6 Superpartícula teste em espaço curvo

Vamos aqui descrever a ação da superpartícula massiva em espaço curvo, obter suas equações de movimento afim de analisar posteriormente como se dá o processo de localização em modelos de mundo brana. Fazendo isso, vamos começar pela ação [63].

$$S = \frac{1}{2} \int \left[E^{-1} g_{AB} \dot{x}^A \dot{x}^B - EM_0^2 - i g_{AB} \psi^A \frac{D\psi^B}{D\tau} - i \xi \dot{\xi} - i \chi (E^{-1} g_{AB} \dot{x}^A \psi^B + M_0 \xi) \right] d\tau, \quad (3.74)$$

onde

$$\frac{D\psi^B}{D\tau} = \dot{\psi}^B + \Gamma_{SR}^B \psi^S \dot{x}^R$$

é a derivada covariante de ψ^N . Da ação (3.74) obtemos o momento conjugado da superpartícula:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^N} \equiv p_N = E^{-1} g_{AN} \dot{x}^A - \frac{i}{2} (g_{AB} \psi^A \psi^S \Gamma_{NS}^B + \chi E^{-1} g_{NB} \psi^B) \quad (3.75)$$

Deve-se apontar que, ao contrário de x^N , a variável Grassmann ψ^N é um vetor por transformações de coordenadas gerais. Isso explica a forma da derivada covariante acima. Aqui, evidentemente, essa ação merece explicações. Inicialmente, as coordenadas x^μ , y e E são variáveis comutantes (c-números), e ψ^N , ξ e χ são variáveis anticomutantes (números a). Portanto, deve-se tomar cuidado com, por exemplo, $\psi^N \psi^M = -\psi^M \psi^N$, como vimos na seção 3.2. Nesta configuração, as variáveis x^A descrevem a geodésica e E é o vierbein. As quantidades ψ^N e ξ estarão relacionadas com a descrição do spin e χ é necessário para manter a supersimetria de linha mundo local [63]. Mais explicações sobre o significado das variáveis de Grassmann serão fornecidas após as equações de movimento abaixo. Assim como a ação (3.45), a ação (3.74) é invariante pela reparametrização $\tau \rightarrow \tau' = f(\tau)$. Além disso, também é invariante pelas transformações SUSY de linha mundo local.

$$\begin{aligned} \delta x^N &= i\alpha \psi^N, & \delta E &= i\alpha \chi, & \delta \chi &= 2\dot{\alpha}, \\ \delta \xi &= M_0 \alpha + \frac{i}{M_0 E} \alpha \xi \left(\dot{\xi} - \frac{1}{2} M_0 \chi \right), \\ \delta \psi^N &= \alpha E^{-1} \left(\dot{x}^N - \frac{i}{2} \chi \psi^N \right). \end{aligned}$$

Onde α é um parâmetro anticomutante real. Para uma discussão mais detalhada sobre pseudomecânica, recomendamos [?, 62]. A seguir, é discutida a equação de movimento para a ação (3.74). Fazendo isso, nosso objetivo é verificar se as novas variáveis de spin podem modificar o potencial efetivo $U_{eff}(y)$ a fim de possibilitar o confinamento.

A partir da ação (3.74), as equações de movimento podem ser obtidas e dadas por

$$\frac{\delta S}{\delta E} \rightarrow g_{AB} [\dot{x}^A \dot{x}^B - i\chi \dot{x}^A \psi^B] + E^2 M_0^2 = 0, \quad (3.76)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \chi} \rightarrow g_{AB} \dot{x}^A \psi^B + E M_0 \xi = 0, \quad (3.77)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \xi} \rightarrow \dot{\xi} - \frac{1}{2} M_0 \chi = 0, \quad (3.78)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \psi^A} \rightarrow \frac{D\psi^A}{D\tau} - \frac{1}{2} E^{-1} \chi \dot{x}^A = 0, \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta x^N} &\rightarrow \frac{D}{D\tau} [E^{-1} g_{AN} \dot{x}^A] - \frac{i}{2} \frac{d}{d\tau} [\chi E^{-1} g_{AN} \psi^A] \\ &+ \frac{i}{2} R_{NSBR} \psi^B \psi^R \dot{x}^S = 0. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Vamos escolher $E = 1$ e $\chi = 0$ [51] e da Eq. (3.78) implica que ξ é uma constante. As outras equações acima podem ser simplificadas para

$$\frac{\delta S}{\delta E} \rightarrow g_{AB}\dot{x}^A\dot{x}^B + M_0^2 = 0, \quad (3.81)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \chi} \rightarrow g_{AB}\dot{x}^A\psi^B + M_0\xi = 0, \quad (3.82)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \xi} \rightarrow \dot{\xi} = 0, \quad (3.83)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \psi^A} \rightarrow \frac{D\psi^A}{D\tau} = 0, \quad (3.84)$$

$$\frac{\delta S}{\delta x^N} \rightarrow \frac{D}{D\tau} [g_{PN}\dot{x}^A] + \frac{i}{2}R_{NSQR}\psi^B\psi^R\dot{x}^S = 0. \quad (3.85)$$

As equações (3.82) e (3.84) irão descrever a dinâmica de spin, com a Eq. (3.82) desempenhando o papel da equação de Dirac. Ao contrário do caso da partícula bosônica, como discutido anteriormente, agora a geodésica (3.85) apresenta um acoplamento entre o spin e o tensor de curvatura de Riemann. Na verdade, as Eqs. (3.81) - (3.85) seria análogo às equações de Mathisson-Papapetrou que descrevem um corpo giratório em um espaço-tempo curvo [75, 76]. A partir das equações acima, pode ser discutido brevemente a interpretação física das variáveis de Grassmann. Na verdade, não é possível entender as variáveis ψ^B ou ξ classicamente. Porém, após a quantização ser realizada, as variáveis ψ^B e ξ podem ser identificadas com a matriz gama de Dirac [51], como visto na seção 3.5.1.

4 CONFINAMENTO DE PARTÍCULAS TESTE EM MUNDO BRANA

Nesta seção, revisaremos o que foi feito na literatura sobre o confinamento de partículas teste no cenário Randall-Sundrum. Iniciaremos com a descrição analítica de localização, onde o autor [46] descreve uma transformação não afim para descrever a dinâmica da partícula teste de maneira similar a leis de Newton. Em seguida, analisaremos o método do potencial efetivo [47] que é descrito após a obtenção da equação da energia para a partícula teste para o caso da partícula bosônica acoplada não minimamente como campo escalar. Daremos aqui, uma visão geral sobre o confinamento de partículas de teste com base no modelo Randall-Sundrum (RS), na qual faremos uma revisão da literatura em outra abordagem, utilizando a ação para a partícula relativística como em (3.45), com a qual mostraremos as vantagens de tal abordagem. Para o modelo RS, como dito, consideraremos a ação (3.45) para uma partícula teste com massa $M(y)$, onde a massa é acoplada a qualquer campo dependente da dimensão extra do espaço-tempo RS como o seguinte

$$S = \frac{1}{2} \int E [-E^{-2} g_{AB} \dot{x}^A \dot{x}^B + M^2(y)] d\tau. \quad (4.1)$$

Como vimos, esta nova forma tem algumas vantagens sobre a original (3.50), pois nos permite escrever a ação para o caso de partícula teste não massiva e também não contém raiz quadrada, o que nos dá equações de movimento mais simples [60].

As equações de movimento para (4.1) em um espaço tempo de RS 5-dimensional com uma métrica arbitrária

$$g_{AB} = (e^{2a(y)} \eta_{\mu\nu}, g_{55}(y)), \quad (4.2)$$

segundo (3.48), são dadas, como segue abaixo, por

$$\frac{\delta S}{\delta E} = 0 \rightarrow g_{AB} \dot{x}^A \dot{x}^B + E^2 M^2(y) = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{\delta S}{\delta x^\mu} = 0 \rightarrow \eta_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu + 2a' \eta_{\mu\nu} \dot{y} \dot{x}^\nu - E^{-1} \dot{E} \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\nu = 0, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta y} = 0 \rightarrow & g_{55} \ddot{y} - a' g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{1}{2} g'_{55} (\dot{y})^2 \\ & - E^{-1} \dot{E} g_{55} \dot{y} + E^2 M(y) M'(y) = 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

com $a' = da/dy$ e $M'(y) = dM(y)/dy$. Para obtermos quantidades conservadas nas direções x^μ e y , escrevemos as equações (4.4) e (4.5) como derivadas totais conforme a seguir.

Inicialmente, para obter a quantidade conservada na direção x^μ , multiplicamos

a equação (4.4) por $E^{-1}e^{2a}$ e a escrevemos como uma derivada total,

$$\frac{d}{d\tau} [E^{-1}e^{2a}\dot{x}^\mu] = 0 \rightarrow E^{-1}e^{2a}\dot{x}^\mu = p^\mu, \quad (4.6)$$

que dá a quantidade conservada na direção x^μ

$$\dot{x}^\mu = e^{-2a}\eta^{\mu\nu}Ep_\nu. \quad (4.7)$$

Para a dimensão extra y , substituímos (4.7) na equação (4.5) e escrevemos como a seguinte derivada total

$$\frac{d}{d\tau} [g_{55}\dot{y}^2E^{-2} + M(y)^2 + p^2e^{-2a}] = 0, \quad (4.8)$$

nos fornecendo a quantidade conservada

$$g_{55}\dot{y}^2E^{-2} + M(y)^2 + p^2e^{-2a} = C^2, \quad (4.9)$$

onde $p^2 = \eta^{\mu\nu}p_\mu p_\nu$. Da equação (4.7), obtemos

$$p^2e^{-2a} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu E^{-2}. \quad (4.10)$$

Ao substituímos (4.7) na equação (4.9) obtemos a seguinte expressão

$$g_{55}\dot{y}^2E^{-2} + M(y)^2 + g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu E^{-2} = C^2 \rightarrow g_{AB}\dot{x}^A\dot{x}^B E^{-2} + M(y)^2 = C^2, \quad (4.11)$$

comparando (4.11) com a equação (4.3) concluímos que $C = 0$ e, assim, (4.9) toma a forma

$$g_{55}\dot{y}^2E^{-2} + M(y)^2 + p^2e^{-2a} = 0. \quad (4.12)$$

Multiplicando (4.12) pelo fator e^{2a} , obtemos uma quantidade conservada na direção da dimensão extra como segue

$$E^{-2}g_{55}e^{2a}\dot{y}^2 + M^2e^{2a} = p^2, \quad (4.13)$$

esta quantidade pode ser interpretada como a energia total da partícula teste ao longo da dimensão extra e isso mostra que o movimento da partícula ao longo da dimensão extra se desacopla do movimento em outras direções. E como veremos mais adiante, dependendo da escolha de E [ver(4.7)], obtemos o movimento da partícula teste independente, tanto na direção x^μ , quanto ao longo da dimensão extra y .

Portanto, com base nas quantidades (4.12) e (4.13) podemos analisar o confinamento e a estabilidade da partícula teste analiticamente ou pelo método do potencial efetivo, respectivamente, como mostraremos a seguir.

4.1 Método analítico

O confinamento de partículas de teste livres em branas tipo delta é descrito analiticamente na referência [46], com base em uma transformação de parâmetro não afim t que nos permite obter uma forma analítica para as equações de movimento e verificar o comportamento da partícula ao longo da dimensão extra.

Como vimos, podemos escrever as equações (3.48) para a métrica (4.2) como derivadas totais, ou seja, podemos obter quantidades conservadas nas direções x^μ e y dadas, respectivamente, por (4.7) e (4.13).

Podemos avaliar o movimento das partículas com base na parametrização não afim

$$\frac{dt}{d\tau} = E e^{-2a}, \quad (4.14)$$

que se aplica apenas quando $y \neq 0$, pois em $y = 0$ a parametrização acima é afim sob certas condições [61], portanto, as equações (4.7) podem ser escritas como EDOs de primeira ordem. Assim, aplicando a regra da cadeia na equação (4.7) e substituindo (4.14), obtemos

$$\frac{dx^\mu}{dt} = p^\mu \rightarrow x^\mu = x_0^\mu + p^\mu t, \quad (4.15)$$

que implica que, com o parâmetro não afim t , a partícula segue uma geodésica plana. Para partícula de teste livre, a massa é constante e dada por $M^2(y) = M_0^2$. Aplicando a regra da cadeia à equação (4.9), usando a parametrização não afim (4.14), escolhendo o parâmetro $E = 1$, a métrica (2.2) e a massa da partícula teste como $M(y)^2 = M_0^2$, encontramos:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 e^{-4a} + e^{-2a} p^2 = -M_0^2. \quad (4.16)$$

Após algumas manipulações matemáticas, podemos escrever a equação (4.16) como a seguinte integral

$$\int \frac{dy e^{-2a}}{(-M_0^2 - p^2 e^{-2a})^{\frac{1}{2}}} = \int dt, \quad (4.17)$$

que tem solução analítica para branas tipo delta (2.16), enquanto para branas espessas é menos trivial, uma vez que o fator de dobra é composto de funções transcendentais, ver (2.25), (2.57) e (2.45). Tomando (2.15) e com o novo parâmetro, a equação (4.9), pode ser escrita como

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 e^{4k|y|} + e^{2k|y|} p^2 = -M_0^2, \quad (4.18)$$

podemos definir y_0 para um dado tempo inicial t_0 , de modo que $-M_0^2 = \dot{y}_0^2 e^{4k|y_0|} + e^{2k|y_0|} p^2$.

Após manipulação matemática análoga, obtemos uma forma analítica para a equação

$$e^{2k|y|} = e^{2k|y_0|} + 2k \frac{dy_0}{dt} e^{2k|y_0|} t - p^2 k^2 t^2. \quad (4.19)$$

A equação acima é válida quando $y \neq 0$, uma vez que a parametrização (4.14) em $y = 0$ é afim sob certas condições [61]. Assim, para o modelo Randall-Sundrum ($k > 0$), uma partícula comum, $p^2 < 0$, é repelida da brana mesmo se assumirmos $|y_0| \rightarrow 0$ em qualquer tempo t . A partícula não atingirá $y = 0$, ou seja, a partícula é repelida para fora da brana, e no limite que $|\frac{dy_0}{dt}| \rightarrow 0$ e $|\dot{y}_0| \rightarrow 0$ a equação (4.18) é válida se $M_0^2 > 0$, ou seja, a partícula no espaço 5-dimensional também é comum.

Para partículas taquiônicas, $p^2 > 0$, elas são atraídas pela brana e no limite que $|y_0| \rightarrow 0$ e $|\frac{dy_0}{dt}| \rightarrow 0$ a equação (4.18) é válido se $M_0^2 < 0$, ou seja, a partícula no espaço 5-dimensional também é taquiônica. Enquanto partículas sem massa, $p^2 = 0$, elas só serão expelidas da brana se $\frac{dy_0}{dt} \neq 0$, já que são contínuas, como podemos inferir de (3.48) para $N = y$. Uma maneira de resolver o problema de localização de partículas é inverter a tensão da brana $k \rightarrow -k$ [46], mas a gravidade não é mais localizada [25].

4.2 Método do potencial efetivo

O confinamento de partículas de teste em branas tipo delta é descrito em [47], onde foi obtido uma equação de conservação de energia da partícula de teste em dimensão extra através da ação padrão $S = M_0 \int (-g_{AB} \dot{x}^A \dot{x}^B)^{\frac{1}{2}} d\tau$ com o vínculo $g_{AB} \dot{x}^A \dot{x}^B = -\epsilon$, onde ϵ assume os valores $\{-1, 0, 1\}$ representando táquions, partículas tipo luz e partículas causais, respectivamente. Neste método, denominado método do potencial efetivo, a partícula teste aparece sob ação de um potencial efetivo que depende apenas da dimensão extra. No entanto, esta ação não está bem definida para partículas de teste sem massa; isso porque a ação padrão não está bem definida para $M_0 = 0$.

Para resolver o problema relativo a partículas teste não massivas, em vez de aplicar a ação usada em [47]. Portanto, com a ação na forma (4.1) e o vínculo (4.3). A equação de conservação (4.13), como veremos a seguir, pode ser interpretada como a energia da partícula teste ao longo da dimensão extra. Assim, para avaliar a energia na brana, devemos tomar o ponto $y = 0$, o que nos dá a equação de conservação igual a $p^2 = \dot{y}^2|_{y=0} + M_0^2$, onde $\dot{y}^2|_{y=0}$ pode ser interpretada como a energia cinética inicial da partícula ao longo da dimensão extra, quando a partícula estava inicialmente na brana. Então, substituindo $p^2 = \dot{y}^2|_{y=0} + M_0^2$ em (4.13), usando a métrica (2.16) e usando o vierbein $E = 1$, obtemos

$$e^{2a} \dot{y}^2 = \dot{y}^2|_{y=0} - M_0^2 (e^{2a} - 1), \quad (4.20)$$

onde a equação (4.20) é a energia total da partícula teste ao longo da dimensão extra. O último termo é o potencial efetivo, segundo o qual a partícula pode se mover na região $\dot{y}^2|_{y=0} - M_0^2(e^{2a} - 1) \geq 0$, sendo $\dot{y}^2|_{y=0}$ o máximo valor do potencial efetivo

$$U_{\text{eff}}(y_{\text{max}}) = \dot{y}^2|_{y=0}. \quad (4.21)$$

A equação (4.20), portanto, representa o movimento da partícula livre sob a influência de um potencial efetivo

$$U_{\text{eff}} = M_0^2(e^{2a} - 1), \quad (4.22)$$

exceto para partículas não massivas, que não são afetadas pelo potencial efetivo e permanecem na brana se $\dot{y}_0 = 0$, caso contrário, a partícula é expelida da brana, porque a velocidade da partícula de teste sem massa obedecer, a partir da equação (4.20), a relação

$$e^{2a}\dot{y}^2 = \dot{y}^2|_{y=0}, \quad (4.23)$$

where in the limit $y \rightarrow \infty$, $\dot{y}^2 \rightarrow \infty$, that is, the test particle does not return (see figure 1 for $M_0^2 = 0$).

Para investigar o movimento de uma partícula de teste na brana, iremos analisar a primeira e a segunda derivadas do potencial efetivo em torno de $y = 0$ e para $M_0^2 \neq 0$. A primeira derivada é $U'_{\text{eff}} = 2M_0^2 a' e^{2a}$, onde a condição necessária para o confinamento é ter $y = 0$ como ponto crítico, sendo necessário que $a'(0) = 0$. Assim, $a(y)$ deve satisfazer uma condição inicial $a(0) = a'(0) = 0$. Uma vez que as duas condições são satisfeitas, a segunda derivada do potencial efetivo, que é igual a $U''_{\text{eff}}(0) = 2M_0^2 a''(0)$, nos fornece informações sobre a estabilidade do ponto crítico. Analisando a segunda derivada e de acordo com as equações (2.15) e (2.24), $a''(y) \leq 0$ para todos y . Podemos, portanto, avaliar a estabilidade das partículas teste de acordo com o valor de M_0^2 , sendo o ponto $y = 0$ um ponto máximo (equilíbrio instável) para partículas causais (ver figura 1 para $M_0^2 > 0$) e ponto mínimo (equilíbrio estável) para táquions (ver figura 1 para $M_0^2 < 0$).

Para o fator de dobra da brana espessa, definido em (2.24), temos

$$V_{\text{eff}} = M_0^2(\text{sech}^{4\beta}(cy)/e^{\beta \tanh^2(cy)} - 1).$$

Os táquions são confinados de forma estável, enquanto as partículas causais não são, ou seja, a gravidade por si só não é suficiente para confinar as partículas causais, como mostrado no Fig. 1.

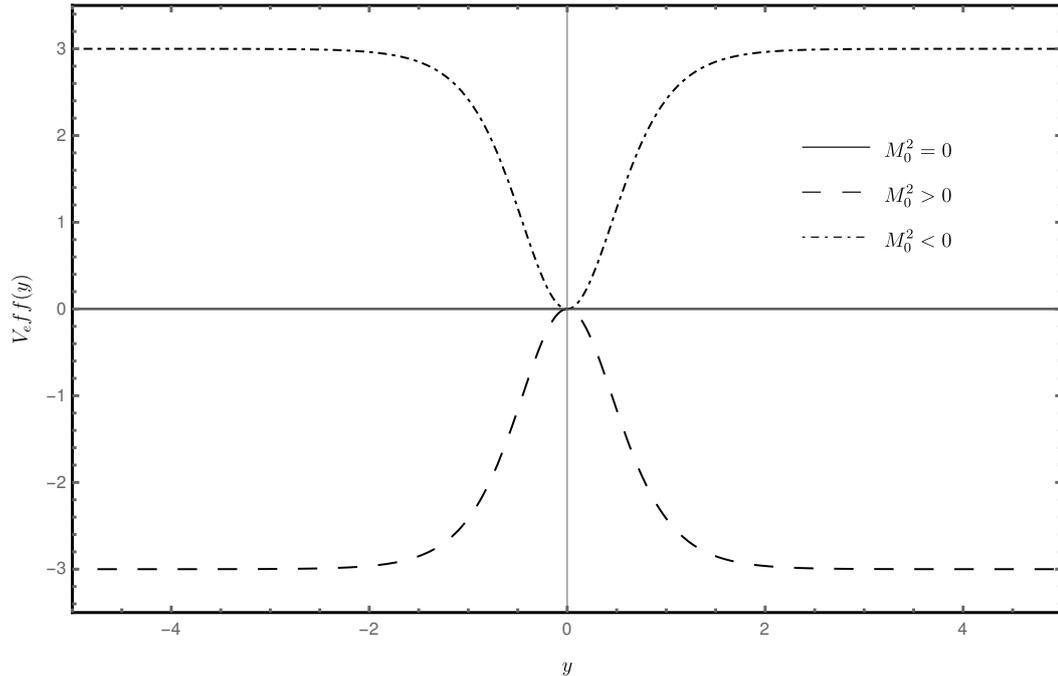


Figura 1: Potencial efetivo para uma partícula livre V_{eff} para uma escolha particular das constantes ($\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c = 1$, $M_P^3 = \sqrt{2}$, $M_0^2 = 3$).

Em seguida, é necessário introduzir outro mecanismo para que as partículas teste sejam confinadas de forma estável na brana. Em [47], o autor propôs um mecanismo onde a partícula é acoplada não minimamente ao campo escalar para resolver o problema do confinamento.

4.2.1 Partícula acoplada com o campo escalar

A localização de campos gerais no modelo Randall-Sundrum só é possível pela implementação de um mecanismo específico que explica a localização do campo na brana. Por exemplo, em regime quântico, apenas uma quiralidade (direita ou esquerda) do campo espinorial de Dirac pode ser localizado na brana por uma interação do tipo Yukawa com o campo escalar [13, 16, 73], cuja ação é expressa por (2.87). Quando a solução clássica de parede de domínio ϕ_B é considerada, a equação de campo para Ψ é

$$i\Gamma^A D_A \Psi - h\phi_B \Psi = 0, \quad (4.24)$$

por analogia à equação de Dirac, notamos que o campo escalar gera massa para o férmion 5-dimensional. Admitindo que o férmion 5-dimensional possui uma massa de repouso M_0 , devido à interação de Yukawa obtém-se a seguinte relação

$$P_A P^A = -(M_0^2 + h^2 \phi^2), \quad (4.25)$$

onde P_A representa o momento 5-dimensional do f3rmion. Assim, assumindo que este mecanismo pode surgir em uma imagem cl3ssica de part3culas de teste, o confinamento 3 poss3vel permitindo uma intera33o direta entre a part3cula de teste e o campo escalar [47]. A intera33o 3 proposta pela redefini33o da a33o (3.45) modificando a massa atrav3s da intera33o de Yukawa

$$M_0 \rightarrow (M_0^2 + h^2\phi^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.26)$$

ent3o a nova a33o para a part3cula de teste assume a forma

$$S = \frac{1}{2} \int (-g_{AB}\dot{x}^A\dot{x}^B + M_0^2 + h^2\phi^2) d\theta, \quad (4.27)$$

onde escolhemos $E = 1$. Para a a33o (4.27), obtemos as equa33es de movimento,

$$\ddot{y} + a' (M_0^2 + h^2\phi^2 + \dot{y}^2) + h^2\phi\phi' = 0, \quad (4.28)$$

onde a restri33o $g_{AB}\dot{x}^A\dot{x}^B = -(M_0^2 + h^2\phi^2)$ foi usada, isto 3, para part3culas teste massivas levando a uma massa diferente de zero, mas se $M_0 = 0$ em $y = 0$ temos uma part3cula de teste sem massa, no entanto, isso n3o 3 mais um problema.

Multiplicando (4.28) pelo fator $e^{2a\frac{dy}{d\theta}}$, a primeira integral pode ser obtida, ent3o obtemos uma quantidade conservada

$$[\dot{y}^2 + M_0^2 + h^2\phi^2] e^{2a} = C. \quad (4.29)$$

Avaliando em $y = 0$ podemos reorganiz3-lo e obter uma equa33o de energia na dire33o da dimens3o extra como abaixo

$$e^{2a}\dot{y}^2 = \dot{y}^2 \Big|_{y=0} - [M_0^2 (e^{2a} - 1) + e^{2a}h^2\phi^2], \quad (4.30)$$

o 3ltimo termo 3 o potencial efetivo

$$U_{eff}(y) = [e^{2a}(M_0^2 + h^2\phi^2) - M_0^2], \quad (4.31)$$

que se reduz ao caso livre (5.9), com $M_0^2 \neq 0$, quando $h = 0$. Podemos obter os pontos extremos do potencial efetivo avaliando suas derivadas, como na se33o anterior. Tomando a primeira derivada do potencial efetivo, obtemos

$$U'_{eff}(y) = 2e^{2a} [a' (M_0^2 + h^2\phi^2) + h^2\phi\phi']. \quad (4.32)$$

Os valores reais para y que devem satisfazer $U'_{eff}(y) = 0$ são

$$y = 0; \quad (4.33)$$

$$|y_{max}| = \frac{1}{c} \operatorname{arctanh} \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{M_0^2}{2h^2v^2} + \frac{1}{2\beta} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sqrt{-4h^2v^2\beta(h^2v^2 - 3M_0^2\beta) + (-h^2v^2 + M_0^2\beta - 3h^2v^2\beta)^2}}{2h^2v^2\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (4.34)$$

$$(4.35)$$

onde

$$-1 < \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{M_0^2}{2h^2v^2} + \frac{1}{2\beta} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sqrt{-4h^2v^2\beta(h^2v^2 - 3M_0^2\beta) + (-h^2v^2 + M_0^2\beta - 3h^2v^2\beta)^2}}{2h^2v^2\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \right] < 1,$$

que representa os pontos extremos da função. Para avaliar as condições de confinamento estável da partícula de teste, devemos avaliar os pontos extremos em $U''_{eff}(y)$,

$$U''_{eff}(y) = 2e^{2a} \left\{ \phi'^2 \left[h^2 - \frac{1}{12M_P^3} (M_0^2 + h^2\phi^2) \right] + 2h^2\phi\phi' + h^2\phi\phi'' \right\} \\ + 2a'U'_{eff}(y), \quad (4.36)$$

onde a relação (2.23) foi usada. Obtemos uma condição para a partícula massiva, de modo que $y = 0$ é um ponto mínimo se satisfazer (5.13), o que implica que esta é satisfeita em (4.36) se [47]

$$M_0^2 < 12M_P^{(3)}h^2 \quad (4.37)$$

O ponto $y = 0$ representará um ponto de equilíbrio estável quando a massa na massa satisfizer a desigualdade (4.37). No entanto, o autor [47] não avalia a massa da partícula de teste na brana.

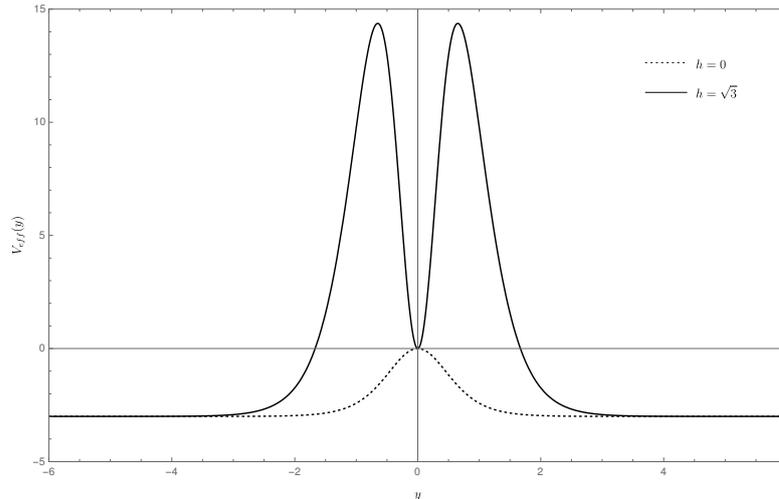


Figura 2: Comportamento de confinamento do potencial efetivo U_{eff} quando a interação é levada em consideração (linha fina) para uma escolha particular das constantes ($c = 1, v = 6, M_P^{(3)} = \sqrt{2}$ and $M_0^2 = 3$), em comparação com o caso quando não há interação (linha tracejada), ou seja, para $h = 0$.

Se a partícula adquire velocidade ao longo da dimensão extra, a energia cinética da partícula ao longo da dimensão extra deve implicar em um aumento na massa efetiva, embora a massa efetiva só tenha sentido físico se a partícula estiver confinada na brana. Mas ainda assim podemos dizer que o movimento da partícula na dimensão extra é caracterizado pelo aumento da massa. Podemos, portanto, analisar a massa efetiva da partícula em modelos RS-II, e então avaliar os valores observáveis. No próximo capítulo, desenvolveremos um mecanismo que mostra que podemos determinar se a partícula pode ser confinada apenas por conhecer a função que descreve a massa da partícula na massa.

5 PROCEDIMENTO GERAL PARA LOCALIZAÇÃO DE PARTÍCULAS E A MASSA EFETIVA

Neste capítulo, iremos generalizar o método do potencial efetivo para o caso de uma partícula cuja massa depende apenas da dimensão extra y , $M^2 = M^2(y)$, e obtemos também a massa efetiva observada na brana ($y = 0$) [48], afim de alcançar um mecanismo de confinamento de partículas teste bosônicas bem como analisar a localização de superpartículas teste. Portanto, será discutido o confinamento de uma partícula teste bosônica e da superpartícula teste no mundo-brana codimensão um. A fim de obter uma análise geral, vamos considerar uma métrica para o campo de fundo dada por (2.28). Os fatores de dobra $a(y)$ and $b(y)$ são funções apenas da coordenada extra y , que é considerada infinitamente grande. O fator de dobra $b(y)$ está relacionado ao dilaton e foi usado para localizar campos de calibre. Com ele, a métrica acima é mais geral do que a RS original, que pode ser obtida corrigindo $b(y) = 0$ [16]. Além disso, $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski com assinatura $(-, +, +, +)$. Consideramos a simplificação em que a métrica é um campo de fundo plano quando $a(y) = b(y) = 0$. Portanto, não consideraremos possíveis efeitos de reação reversa das partículas sobre ele, como nas Refs. [39–47]. Esta forma genérica da métrica nos permitirá discutir uma variedade de mundo-brana, entre eles, o modelo RS-II tipo delta [4] e também alguns modelos de brana espessa [15–18, 65].

5.1 Método geral do potencial efetivo

Ao discutir a localização de uma partícula teste, devemos analisar seu movimento na dimensão extra y , mas como vimos na seção anterior a solução da ação (4.17) não é trivial quando se trata de modelos de brana espessa, uma vez que o fator de dobra, em geral, é uma função transcendental, daí se pudermos associar um potencial ao movimento na coordenada y , a partícula será confinada quando esse potencial tiver um mínimo localizado sobre a brana, a saber, $y = 0$. Como visto na literatura, a localização da partícula teste não pode ser alcançada para o caso livre, ou seja, $M(y) = M_0$ [46, 47]. Portanto, é discutido o caso geral com $M(y)$ arbitrário para incluir possíveis mecanismos de localização. Para tal, usaremos a métrica (2.28), os símbolos de Christoffel são dados por (2.29) e (2.30). Com isso, nossas equações para x^P em (3.48) torna-se

$$\frac{\delta S}{\delta x^\mu} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{D}{D\tau} [E^{-1}\dot{x}^\mu] = \frac{d}{d\tau} [E^{-1}\dot{x}^\mu] + 2a'E^{-1}\dot{x}^\mu\dot{y} = 0, \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta y} = 0 \quad \rightarrow \quad & \frac{D}{D\tau} [E^{-1}\dot{y}] + EMM'e^{-2b} = \frac{d}{d\tau} [E^{-1}\dot{y}] + E^{-1}b'\dot{y}^2 \\ & -E^{-1}a'g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu e^{-2b} + EMM'e^{-2b} = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Nas equações acima, " " significa uma derivada em relação a y . Da equação (3.47) notamos que o vierbein E não possui dinâmica e, portanto, podemos escolher uma condição de calibre e fixar E . É conveniente definir que o parâmetro τ pode ser identificado com o tempo próprio na brana. Isso pode ser alcançado pela escolha $E = e^{2a(y)}$. Usando este calibre e equação (3.47), podemos mostrar que

$$g_{\mu\nu} \frac{D}{D\tau} [E^{-1} \dot{x}^\nu] = \frac{d}{d\tau} [e^{-2a} g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu] = 0 \quad (5.3)$$

e

$$\dot{y} e^{2b} \left[\frac{D}{D\tau} (e^{-2a} \dot{y}) + e^{2a} M M' e^{-2b} \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} [e^{2(b-a)} \dot{y}^2 + M(y)^2 e^{2a}] = 0. \quad (5.4)$$

Portando, das equações (5.3) e (5.4) juntamente com as equações (3.47), (3.48) e a definição do momento canônico (3.49) obtemos

$$e^{-2a} g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu = p_\mu = \text{constante}, \quad (5.5)$$

$$e^{2b(y)-2a(y)} \dot{y}^2 + M(y)^2 e^{2a} = -C^2 = \text{constante}. \quad (5.6)$$

Na primeira equação acima, usamos a definição do quadri-momento (3.49)

$$p_\mu = \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}^\mu} = e^{-2a} g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu. \quad (5.7)$$

Para interpretar a constante C^2 , podemos usar a Eq. (3.47) e (5.5) para descobrir que $C^2 = p^2$.

A equação (5.6) pode ser interpretada como a energia total $E = T + U$ e, a partir disso, é possível obter um potencial efetivo. A constante C^2 em (5.6) $y = 0$ tem a forma $-C^2 = \dot{y}^2|_{y=0} + M(0)^2$, com a qual podemos escrever (5.6) como

$$e^{2b(y)-2a(y)} \dot{y}^2 = \dot{y}^2|_{y=0} - [M(y)^2 e^{2a} - M(0)^2] \quad (5.8)$$

Ao fazer isso, o último termo atua como potencial efetivo

$$U_{eff} = M(y)^2 e^{2a(y)} - M(0)^2. \quad (5.9)$$

Veremos como a localização das partículas pode ser retirada da análise desse potencial. Vamos discutir o confinamento e a massa efetiva observada sobre a brana abaixo.

Primeiro, a partícula será confinada em uma brana colocada em $y = 0$ apenas se o potencial (5.9) satisfizer

$$(i) \quad U'_{eff}(y)|_{y=0} = 0$$

Tomando a primeira derivada do potencial efetivo (5.9)

$$U'_{eff}(y) = 2[a'(y)M(y)^2 + M(y)M'(y)]e^{2a(y)} = 0, \quad (5.10)$$

quando avaliado em $y = 0$, obtemos

$$U'_{eff}(0) = 2[a'(0)M(0)^2 + M(0)M'(0)] = 0 \quad (5.11)$$

a condição ((i)) é satisfeita se, e somente se, em (5.11)

$$M'(0) = 0, \quad (5.12)$$

uma vez que $a'(0) = 0$ em modelos do mundo brana [15, 16, 18, 65]. Portanto, se (5.12) é satisfeita, significa que $y = 0$ é um ponto crítico. Porém devemos avaliar também a segunda derivada para avaliar se $y = 0$ é um ponto de mínimo (equilíbrio estável) ou ponto de máximo (equilíbrio instável). Além da condição (i), o potencial efetivo (5.9) também deve satisfazer:

(ii) $U''_{eff}|_{y=0} > 0$ Tomando a segunda derivada do potencial efetivo (5.9), obtemos

$$\begin{aligned} U''_{eff}(y) &= 2[a''(y)M^2(y) + 2a'(y)M'(y)M(y) + M'(y)^2 + M(y)M''(y)]e^{2a(y)} \\ &\quad + 2a'(y)U'_{eff}(y), \end{aligned} \quad (5.13)$$

que, ao ser avaliada em $y = 0$ nos fornece a expressão

$$U''_{eff}(0) = 2[a''(0)M^2(0) + 2a'(0)M'(0)M(0) + M'(0)^2 + M(0)M''(0)] + 2a'(0)U'_{eff}(0) > 0.$$

Logo, se a condição (i) é satisfeita, ou seja, $M'(0) = 0$, obtemos

$$U''_{eff}(0) = 2[a''(0)M^2(0) + M(0)M''(0)] > 0$$

e a condição (ii) representa um ponto de mínimo (equilíbrio estável) se a seguinte inequação for satisfeita

$$[M(y)M''(y) + M^2(y)a''(y)]e^{2a}\Big|_{y=0} > 0. \quad (5.14)$$

Concluimos, então, que o confinamento da partícula de teste na brana depende apenas de sua massa no espaço tempo RS 5-dimensional. Logo, a condição (ii) é satisfeita se (5.14) também o for. E juntamente com ((i)), em $y = 0$, nos garante que a partícula teste esteja em um ponto crítico de mínimo na brana e, portanto, a partícula esteja em equilíbrio estável na brana.

Devemos lembrar que as condições (i) e (ii) são necessárias, mas não suficientes para confinar uma partícula. Se o potencial efetivo tiver a forma de um vulcão, uma partícula com um grande momento na dimensão extra pode escapar. Portanto, dado que U_{eff} tem um máximo em y_{max} , a partícula será capturada se $\dot{y}_{max} = 0$.

5.1.1 Massa efetiva

Na seção anterior, investigamos as condições de confinamento de partículas testes em modelos de mundo brana RS, mas aí surge um questionamento importante: qual é a massa efetiva observada da partícula de teste? Nesse sentido, os autores em [61] definem a massa efetiva através da restrição $g_{AB}\dot{x}^A\dot{x}^B + 1 = 0$, mas eles não fornecem uma solução. Nesta seção, obtemos uma expressão geral para a massa efetiva das partículas teste observada na brana.

Diferente do que ocorre com campos, onde a localização do campo é baseada nos modos de Kaluza-Klein [94], a massa efetiva das partículas teste pode ser obtida por uma parametrização afim no parâmetro de movimento τ para outro parâmetro λ . Tal movimento é observado na hipersuperfície em $y = 0$ [61], chamada 3 brana, e este modelo representa nosso mundo. Então, para escrever a equação do movimento (4.4) como

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = 0, \quad (5.15)$$

precisamos encontrar uma transformação afim. Portanto, na brana ($y = 0$), devemos ter a métrica de Minkowsky como a seguinte

$$\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + m_{\text{eff}}^2 = 0, \quad (5.16)$$

onde m_{eff}^2 é a massa efetiva da partícula de teste na brana. Então, por parametrização (4.3) obtemos a equação

$$\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = -e^{-2a} \left(\frac{d\tau}{d\lambda} \right)^2 \left[E^2 M^2(y) + g_{55} \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2 \right], \quad (5.17)$$

onde estamos utilizando a métrica (4.2). Uma vez que a ação (4.1) é invariante sob reparametrização $E(\lambda) = \frac{d\tau}{d\lambda} E(\theta)$ para a nova variável, e por restrições (4.3) e (5.16) escolhemos a relação sob os parâmetros da forma mais simples, portanto, sendo dada por $\left(\frac{d\tau}{d\lambda} \right) = 1$, o que implica em $E(\tau) = E(\lambda)$. A equação (4.4) pode ser escrita como uma derivada total na forma

$$\frac{d}{d\tau} [E^{-1} e^{2a} \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\nu] = 0,$$

notemos que ao escolhermos $E = e^{2a(y)}$, obtemos a equação na forma (5.15) e, portanto,

ao compararmos (5.16) e (5.17) obtemos que a massa efetiva da partícula teste ao longo da dimensão extra é dada por

$$m_{eff} = e^{2a(y)}M^2(y) + e^{-2a(y)}g_{55}\dot{y}^2, \quad (5.18)$$

Uma outra maneira de obter a expressão (5.18) vem da expressão (5.6) e usando $p^2 = -m_{eff}^2$, uma vez que usamos a mesma escolha do vierbein $E = e^{2a(y)}$. Da discussão do final da seção anterior, podemos substituir y_{max} e $\dot{y}_{max} = 0$ na equação (5.6) para obter [48]

$$m_{eff}^2 = M^2(y_{max})e^{2a(y_{max})}. \quad (5.19)$$

Assim, a expressão (5.19) nos dá a massa efetiva máxima que da partícula da partícula teste que pode ser observada na brana e esta é intimamente relacionada ao ponto de retorno y_{max} . Evidentemente, se o ponto de retorno y_{max} não existe, a massa efetiva (5.19) não tem significado físico. Para este caso, a partícula não está confinada e o conceito de massa efetiva sobre a brana não tem sentido. Agora, podemos aplicar o procedimento acima a casos específicos.

Num ponto de vista geral, a partícula adquire velocidade ao longo dimensão extra, então haverá uma energia cinética que implicará em um aumento na massa efetiva, como pode ser visto na equação (5.18) portanto, o movimento da partícula teste ao longo da dimensão extra é caracterizado pelo aumento da massa. Podemos, então, analisar a massa efetiva da partícula em modelos RS-II, e então avaliar os valores observáveis.

Iremos aqui nesta subseção, encontrar a massa efetiva (5.19) dos modelos vistos na literatura, como segue abaixo:

- Partícula teste Livre: Como vimos na seção 4.2 a partícula livre não é confinada, em concordância com [46, 47], portanto, partículas livres não podem ser confinadas estavelmente na brana. Para confinar partículas teste, é necessário acoplar a partícula teste com algum campo que dependa apenas da dimensão extra e que satisfaça a equação (5.10) e (5.13). Portanto, como não são confinadas, partículas teste livres não possuem massa efetiva na brana.
- Partícula teste acoplada com o campo escalar: Para uma partícula teste acoplada com o campo escalar, cuja massa é dada por $M^2(y) = M_0^2 + h^2\phi^2$ [47]. Ao substituímos essa massa nas equações (5.10) e (5.13) obtemos a desigualdade

$$h^2 - \frac{M_0^2}{12M_P^3} > 0, \quad (5.20)$$

e então obtemos a mesma condição (4.37): $M_0^2 < 12M_P^{(3)}h^2$, para partículas teste

com massa nua não nula, $M_0^2 \neq 0$ e h pode assumir qualquer valor para partículas teste não massivas, $M_0^2 = 0$.

Então, uma partícula teste massiva, $M_0 \neq 0$, é observada na brana, onde a massa efetiva (5.19) dada por

$$12M_P^{(3)}h^2 \leq m_{\text{eff}}^2 < [12M_P^{(3)} + \phi^2(y_{\text{max}})]h^2e^{2a(y_{\text{max}})}, \quad (5.21)$$

onde y_{max} é dado por (4.35), e representa o ponto máximo do potencial efetivo (4.31), que é o ponto onde a equação (5.21) é satisfeita (veja a Fig. 2, para $h = \sqrt{3}$). Então, se a partícula de teste tem uma massa que não satisfaz as desigualdades (5.10) e (5.13), a partícula de teste não pode ser confinada de forma estável.

No caso de partículas de teste com massa nua nula, $M_0 = 0$, a massa efetiva na brana é obtida tomando o limite quando $M_0^2 \rightarrow 0$ na equação (5.21), então temos

$$h^2\phi^2(0) \leq m_{\text{eff}}^2 < h^2\phi^2(y_{\text{max}}); \quad (5.22)$$

mas $\phi(0) = 0$, portanto, na brana, a partícula de teste pode ser observada como uma partícula teste não massiva desde que esta possua velocidade ao longo da dimensão extra.

$$m_{\text{eff}}^2 = 0, \quad (5.23)$$

mas note que devido a equação (5.22) a partícula pode também ser observada como uma partícula massiva. Além disso, o momento canônico no campo de fundo (4.25), para $M_0^2 = 0$ dado por $P^A P_A = -h^2\phi^2$ e pode assumir valores valor nulo, o que concorda com os resultados obtidos em [47].

6 LOCALIZAÇÃO DE PARTÍCULAS BOSÔNICAS ACOPLADAS NÃO MINIMAMENTE COM O DÍLATON E DA SUPERPARTÍCULA TESTE

6.1 Confinamento de partículas teste acopladas não minimamente com o dilaton

Na seção (2.3), vimos que o dilaton atua de forma a modificar a métrica espaço-tempo, permitindo-nos escolher um campo apropriado da forma $\pi(y) = -\sqrt{3M_P^3} a(y)$ e $b(y) = \frac{1}{4}a(y)$ de modo que a equação (2.23) permaneça inalterada; ressaltamos que a partícula livre neste novo cenário também não ficará confinada.

Aqui vamos propor um mecanismo para confinamento das partículas baseado na generalização da teoria escalar-tensorial mais simples, também chamada teoria de Jordan-Brans-Dicke. A ação da teoria é dada por

$$S = \int \left[\tilde{\phi} \tilde{R} - \frac{\omega}{\tilde{\phi}} \tilde{g}^{AB} \partial_A \tilde{\phi} \partial_B \tilde{\phi} \right] \tilde{g}^{\frac{1}{2}} d^4x + S_M[\Phi, \tilde{g}_{AB}],$$

onde $\tilde{g}_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço tempo (também chamado de referencial conforme de Jordan), \tilde{R} é o escalar de curvatura, ω é uma constante de acoplamento adimensional, $\tilde{\phi}$ é um campo escalar e Φ representa campos de matéria. Faz-se uma transformação de Weyl na métrica \tilde{g}_{AB} afim de contruir uma generalização desta teoria que permita acoplamentos mais fortes do campo escalar. Então, é definida outra métrica $g_{\mu\nu}$ do, chamado, referencial conforme de Einstein e um outro campo escalar π dados por

$$\begin{aligned} g_{AB} &= (2\kappa^2 \tilde{\phi}) \tilde{g}_{AB} \\ \pi &= - \left(\omega + \frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \ln(2\kappa^2 \tilde{\phi}), \end{aligned}$$

onde κ^2 é uma constante. Com essa nova métrica podemos obter uma ação equivalente

$$S = \int \left[\frac{R}{2\kappa^2} - \frac{g^{AB} \partial_A \pi \partial_B \pi}{2\kappa^2} \right] g^{\frac{1}{2}} d^4x + S_M[\Phi, e^{2\lambda\pi} g_{AB}],$$

onde R é o escalar de curvatura no referencial de Einstein e [49]

$$\lambda = \frac{1}{2 \left(\omega + \frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \tilde{\phi} = \frac{1}{2\kappa^2} e^{-2\lambda\pi}$$

Na nova ação obtida, o novo campo escalar, chamado dilaton (π), é obtido e todos os campos de matéria são acoplados com a métrica, isto é, a Lagrangeana de matéria aparece somente na combinação $g_{AB} e^{2\lambda\pi}$. No caso mais simples onde a matéria é fenomenolo-

gicamente representada por um conjunto de partículas pontuais de massa \tilde{M} , a ação de matéria se torna

$$S_M = - \sum \int \tilde{M} e^{\lambda\pi} ds \quad (6.1)$$

que pode ser reformulada como uma massa dependente do espaço-tempo no referencial de Einstein, $M = \tilde{M} e^{\lambda\pi}$, onde \tilde{M} é a massa constante no referencial de Jordan [49, 50].

Para resolver isso, propomos a partícula teste acoplada não minimamente ao campo de dilatação,

$$M_0^2 \rightarrow e^{2\lambda\pi} M_0^2, \quad (6.2)$$

cujos momento conjugado passa a ser $P_A P^A = -M_0^2 e^{2\lambda\pi(y)}$, permite confinar a partícula na brana.

6.1.1 Acoplamento com dilaton no espaço-tempo RS deformado

Conforme mostrado na introdução, a ação para a partícula teste (3.45), para $M^2(y) = e^{2\lambda\pi} M_0^2$, pode ser escrito como:

$$S = \frac{1}{2} \int (-g_{AB} \dot{x}^A \dot{x}^B + M_0^2 e^{2\lambda\pi}) d\tau, \quad (6.3)$$

onde escolhemos a nova variável $E(\theta) = 1$, como vimos anteriormente. Usando a condição de confinamento da partícula teste (5.10) e (5.13) e substituindo a massa desta partícula teste dada por (6.2), obtemos a desigualdade

$$M_0^2 (-\lambda \sqrt{3M_P^{(3)}} + 1) a_s''(0) \geq 0. \quad (6.4)$$

Mas como $a_s'' < 0$ para todos y , a desigualdade acima é satisfeita se

$$\lambda \geq \frac{1}{\sqrt{3M_P^{(3)}}}, \quad (6.5)$$

para uma massa nua não nula da partícula de teste na massa, $M_0^2 \neq 0$. Para o caso em que a massa nua da partícula teste é nula, $M_0^2 = 0$, a desigualdade (6.4) não é satisfeita, portanto, a partícula de teste sem massa não é confinada.

Então, uma partícula de teste no espaço 5-dimensional com massa nua não nula, $M_0 \neq 0$, é observada na brana com massa efetiva máxima (5.19) dada por

$$m_{eff}^2 = M_0^2 e^{2a_s(y_{max})(1-\lambda\sqrt{3M_P^{(3)}})}; \quad (6.6)$$

onde y_{max} pode ser obtido analisando a equação do potencial efetiva (5.9), que é dada por

$$U_{eff}(y) = M_0^2 (e^{2a_s(1-\lambda\sqrt{3M_P^{(3)}})} - 1), \quad (6.7)$$

onde o caso para uma partícula teste livre é obtido quando tomamos $\lambda = 0$. Porém, se a relação (6.5) for satisfeita, analisamos a segunda derivada do potencial efetivo (6.4)

$$V''_{eff}(y) = 2(-\sqrt{3M_P^3\lambda + 1})a''_s e^{2(\lambda\pi+a_s)} + 4(\lambda\pi' + a'_s)^2 e^{2(\lambda\pi+a_s)}.$$

Notamos que o primeiro termo é positivo, uma vez que $(\phi')^2 = -12M_P^{(3)}a''_s$ para todos os valores de y e o segundo termo da expressão acima é sempre positiva, ou seja, a segunda derivada do potencial efetivo (6.4) é positiva para todos os valores de y implicando em um potencial máximo com $y_{max} \rightarrow \infty$ e $U_{eff}(y_{max}) \rightarrow \infty$. Portanto, a massa efetiva da partícula livre acoplada ao campo de dilaton na brana pode assumir qualquer valor,

$$m_{eff}^2 < \infty. \quad (6.8)$$

Além disso, não há restrições quanto à massa da partícula teste causal no espaço 5-dimensional, e é válido para brana deformada por qualquer valor de s . Somos capazes de resolver o problema da massa limitada em [47], mas pagando o preço que as partículas do tipo luz não ficam confinadas de forma estável na brana.

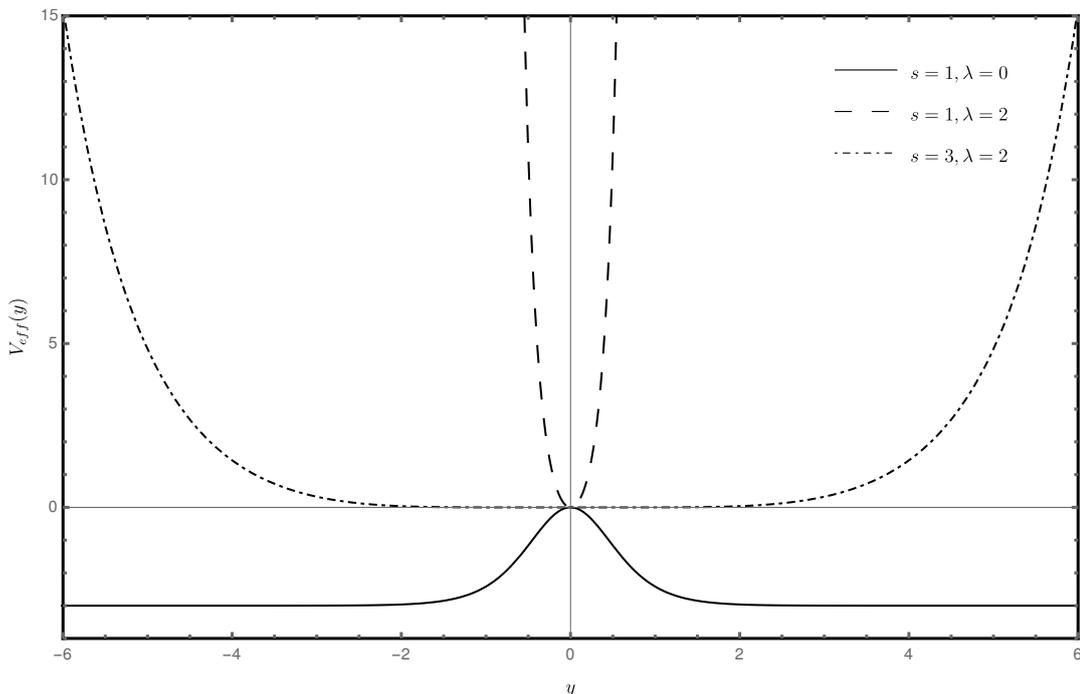


Figura 3: Comportamento de confinamento do potencial efetivo deformado $V_{eff(s)}$ quando a interação é levada em consideração (linha fina) para uma escolha particular das constantes ($M_0^2 = 3$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 1$, $M_P^3 = 0.3$, $\lambda = 1.5$), em comparação com o caso quando não há interação (linha marcada), ou seja, para $\lambda = 0$.

6.2 Confinamento de superpartículas

Antes de discutir o confinamento da superpartícula teste, é conveniente escolher as condições de calibre para as duas simetrias mencionadas na seção 3.6. Vamos escolher $E = e^{2a}$, como na partícula bosônica, e $\chi = 0$ [51]. Da Eq. (3.78) implica que ξ é uma constante. As outras equações acima podem ser simplificadas para

$$g_{AB}\dot{x}^A\dot{x}^B + M_0^2 e^{4a} = 0, \quad (6.9)$$

$$g_{AB}\dot{x}^A\psi^B + M_0 e^{2a}\xi = 0, \quad (6.10)$$

$$\frac{D\psi^A}{D\tau} = 0, \quad (6.11)$$

$$\frac{D}{D\tau} [e^{-2a}\dot{x}^A] + \frac{i}{2} R^A{}_{SBR}\psi^B\psi^R\dot{x}^S = 0. \quad (6.12)$$

Como vimos para o caso da partícula bosônica, estamos interessados em analisar as equações para o componente y . Da equação (6.12), obtemos as equações para os componentes de x^M

$$\begin{aligned} \frac{D}{D\tau} [e^{-2a}\dot{y}] + \frac{i}{2} R^y{}_{\mu\lambda\rho}\psi^\lambda\psi^\rho\dot{x}^\mu \\ + iR^y{}_{\mu y\rho}\psi^y\psi^\rho\dot{x}^\mu = 0, \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}\frac{D}{D\tau} [e^{-2a}\dot{x}^\nu] + iR_{\mu y y\rho}\psi^y\psi^\rho\dot{y} \\ + \frac{i}{2} R_{\mu\nu\rho\alpha}\psi^\rho\psi^\alpha\dot{x}^\nu = 0. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Substituindo os tensores de Riemman (2.31) e (2.32) em (6.13) e (6.14), respectivamente, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{D}{D\tau} [e^{-2a}\dot{x}^\rho] + i[a'' - a'b']\psi^y\psi^\rho\dot{y} \\ + iM_0\psi^\rho\xi e^{2(a-b)}a'^2 = 0, \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\frac{D}{D\tau} [e^{-2a}\dot{y}] = iM_0 [a'' + a'^2 - a'b'] e^{2(a-b)}\xi\psi^y. \quad (6.16)$$

Na equação acima, usamos a restrição

$$e^{2b}\dot{y}^2\psi^y + e^{2a}\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\psi^\nu + M_0 e^{2a}\xi = 0 \quad (6.17)$$

que foi obtida de (6.10), para eliminar a dependência em \dot{x}^μ . Para encontrar as constantes de movimento, precisamos usar as equações para ψ^M . Da Eq. (6.11) e usando os símbolos

de Christoffel (2.29) e (2.30), obtemos

$$\dot{\psi}^\rho + [\psi^y \dot{x}^\rho + \psi^\rho \dot{y}] a' = 0, \quad (6.18)$$

$$\dot{\psi}^y + \psi^y (\dot{b} + \dot{a}) + \xi M_0 e^{2a-2b} a' = 0. \quad (6.19)$$

Podemos multiplicar a Eq. (6.19) por ξ e usar a restrição (6.17) para encontrar a solução

$$\psi^y(\tau)\xi = \psi_0^y \xi e^{-a-b}. \quad (6.20)$$

Agora, podemos multiplicar as Eqs.(6.18) e (6.19) por ψ^y e ψ^ρ , respectivamente, para obter

$$\frac{d}{d\tau} [\psi^y \psi^\rho] + \psi^y \psi^\rho (\dot{b} + 2\dot{a}) + M_0 \xi e^{2a-2b} a' \psi^\rho = 0. \quad (6.21)$$

Finalmente, a partir da equação acima, podemos mostrar que

$$\frac{d}{d\tau} [\psi^y \psi^\rho e^{2a+b}] + M_0 \xi e^{4a-b} a' \psi^\rho = 0. \quad (6.22)$$

Com esta expressão, podemos discutir se a superpartícula teste pode ser confinada. Se usarmos nossas relações anteriores (5.3), (5.4), (6.20) e (6.22) na equação (6.15), obtemos

$$\frac{d}{d\tau} [\dot{x}^\mu + i\psi^y \psi^\mu e^{2a} a'] = \frac{dp^\mu}{d\tau} = 0, \quad (6.23)$$

$$\frac{d}{d\tau} [e^{2b-2a} \dot{y}^2 + M_0^2 e^{2a} - 2iM_0 \xi \psi_0^y e^{a-b} a'] = 0. \quad (6.24)$$

Na primeira das equações acima, definimos o momento conservado (3.75)

$$p^\mu = \dot{x}^\mu + i\psi^y \psi^\mu e^{2a} a'. \quad (6.25)$$

Para interpretar a constante proveniente da equação (6.24), devemos usar nossa restrição de massa(6.9) e equação (6.25) para obter

$$-p^2 = e^{2b-2a} \dot{y}^2 + M_0^2 e^{2a} - 2iM_0 \xi \psi_0^y e^{a-b} a', \quad (6.26)$$

com $p^2 = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$. Assim, como antes, podemos interpretar o termo no lado direito da equação (6.26) como uma energia total e

$$U_{eff} = M_0^2 \left[e^{2a} - \frac{2i}{M_0} \xi \psi_0^y e^{a-b} a' \right]. \quad (6.27)$$

Primeiro, quando ψ^N é zero, o último termo no lado direito da equação acima é zero. Portanto, obtemos os resultados discutidos anteriormente para a partícula teste bosônica,

dados pela Eq. (5.9) com $M(y) = M_0$. Agora, por causa das variáveis de spin, obtemos uma nova peça no potencial efetivo U_{eff} da partícula. Assim, o spin modifica o potencial efetivo devido à interação deste com a curvatura. Com isso, temos a possibilidade de confinar a superpartícula teste.

6.3 Aplicação

Para o caso sem massa, vemos na Eq. (6.27) que $U_{eff} = 0$. Portanto, assim como no caso bosônico, a superpartícula teste não está confinada. Entretanto, para o caso massivo U_{eff} tem uma correção devido às variáveis de Grassmann. A figura (4) mostra um gráfico do potencial efetivo (6.27) para a brana espessa apresentada em [15], a saber,

$$a(y) = \ln [\operatorname{sech}^\sigma (cy)], \quad b(y) = 0. \quad (6.28)$$

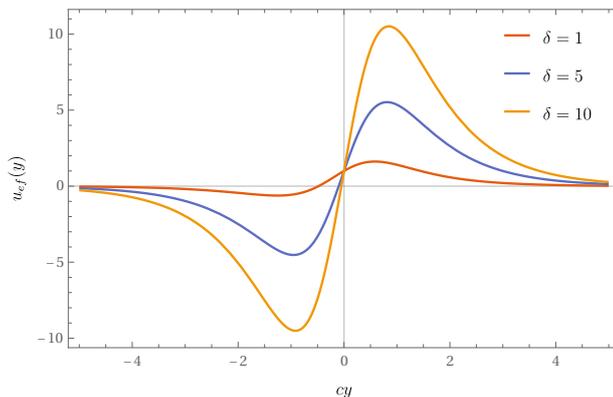


Figura 4: Plot de $u_{eff} = U_{eff}/M_0^2$ para o modelo (6.28) com $\sigma = 1$ e $\delta \equiv \frac{i}{M_0} \xi \psi_0^y$.

Como podemos ver, $y = 0$ não é um extremo para este potencial efetivo. Na verdade existem dois pontos extremos, e um deles é o mínimo. Portanto, a superpartícula teste pode ser localizada no mínimo desse potencial. No entanto, essa localização não ocorre em $y = 0$, mas em um ponto ligeiramente deslocado da origem. Conclusões semelhantes também são obtidas para outros modelos como, por exemplo, a brana tipo delta [5], a brana espessa apresentada em [16] ou a brana espessa com estrutura interna obtida em [18, 64, 65]. Da Fig.(4) podemos concluir que qualquer partícula sobre a brana escapará para a dimensão extra. Observe que $U_{eff}(y = 0) > 0$ e para y grande o potencial é nulo. Portanto, qualquer partícula sobre a brana vai para o infinito.

Uma possibilidade interessante é procurar modelos em que o mínimo de U_{eff} coincida com a posição da brana. Como nosso U_{eff} é assimétrico, devemos procurar modelos de brana com a mesma propriedade. Eles são chamados de mundos-brana assimétricos e foram discutidos por D. Bazeia *et.al.* em [66–68]. No entanto, para esses modelos, também descobrimos que a superpartícula teste não é localizada. Parece que há

alguma propriedade geral do potencial (6.27) que proíbe o confinamento. Deixe-nos agora mostrar isso. Primeiro observe que

$$U'_{eff} = 2M_0^2 e^{2a} a' - 2M_0^2 \delta e^{a-b} [a'' + a'^2 - a'b']. \quad (6.29)$$

Agora devemos lembrar que para qualquer mundo-brana, devemos ter que na posição da brana $a'(y_B) = b'(y_B) = 0$, $a''(y_B) > 0$ e com isso, obtemos que

$$U'_{eff}(y_B) = -2\delta e^{a-b} a'' \neq 0. \quad (6.30)$$

Portanto, concluímos que na posição da brana nunca temos um mínimo de U_{eff} . No entanto, poderíamos ter a possibilidade de que a partícula fique presa em torno da posição da brana e não escape para o infinito. Para analisar isso, usamos as propriedades gerais $a(y_B) = 0$, $e^a(\infty) = 0$ para obter

$$\Delta U_{eff} \equiv U_{eff}(\infty) - U_{eff}(y_B) = -M_0^2. \quad (6.31)$$

Portanto, o potencial no infinito é sempre menor do que o potencial sobre a brana e qualquer superpartícula teste sobre a brana escapará para o infinito [48].

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho, discutimos o confinamento de partículas de teste em mundos-brana de codimensão um. Nós primeiro discutimos a partícula de teste bosônica e depois conduzimos a discussão sobre o confinamento da superpartícula teste. A localização de partículas de teste bosônicas já foi estudada anteriormente na literatura. Para o modelo RS-II tipo delta, [46] discutiu o confinamento de uma partícula de teste livre. Para a brana espessa, a discussão foi apresentada em [47], onde os autores propuseram um mecanismo de localização.

Na discussão da partícula de teste bosônica, nós estudamos os casos massivo e sem massa. Para o caso livre, obtivemos as quantidades conservadas dadas nas equações (5.5) e (5.6). A partir disso, mostramos que o movimento na dimensão extra pode ser desacoplado das outras coordenadas. Mostramos que este movimento pode ser descrito pelo potencial efetivo (5.9), a saber,

$$U_{eff} = M(y)^2 e^{2a(y)} - M(0)^2. \quad (7.1)$$

Com este potencial, o confinamento pode ser alcançado se as condições $U'_{eff}(0) = 0$ e $U''_{eff}(0) > 0$ forem satisfeitas. Para as partículas massivas livres, essas condições implicam que $a''(y) > 0$. No entanto, para todos os modelos do mundo brana com gravidade localizada, as equações de Einstein nos fornecem $a''(y) < 0$ [5, 15, 16, 18, 64, 65]. Portanto, a condição necessária para confinar as partículas massivas, a saber, $a''(y) > 0$, não pode ser satisfeita. Este resultado está de acordo com o obtido nas Refs. [46, 47] por outros meios. No entanto, o caso sem massa não foi considerado nas Refs. [46, 47], visto que suas ações são mal definidas para $M = 0$. Usando uma ação quadrática, mostramos que (7.1) é válido para ambos os casos. Para $M = 0$, obtemos que (7.1) é zero e, portanto, a partícula sem massa não está localizada sobre a brana.

Em seguida, propusemos um novo mecanismo de localização para a partícula massiva, substituindo

$$M_0 \rightarrow M(y) = M_0 e^{\lambda\pi(y)},$$

onde $\pi(y)$ é um campo escalar chamado dilaton. Este novo mecanismo é uma alternativa ao apresentado na Ref. [47], onde foi proposto um acoplamento com o campo escalar dado por $M_0 \rightarrow \sqrt{M_0^2 + h^2\phi^2}$. Com este mecanismo, o confinamento pode ser obtido para partículas com valores de massa que satisfaçam $M_0 < \sqrt{3}\frac{h}{\kappa}$. Usando nosso mecanismo de

localização [48], mostramos que é possível obter um potencial efetivo modificado dado por

$$U_{eff} = M_0^2 \left(e^{2(1-\lambda\sqrt{3M_p^3})A} - 1 \right). \quad (7.2)$$

Mais uma vez, aplicamos as condições de confinamento para obter

$$\lambda > \frac{1}{\sqrt{3M_p^3}}.$$

Este resultado apresenta a característica interessante de nos permitir confinar partículas com qualquer massa ($M_0^2 > 0$). Nesse sentido, o acoplamento com o campo de dilaton parece proporcionar um confinamento mais eficiente das partículas massivas.

Para concluir a análise, discutimos a superpartícula teste, apresentada por $4D$ em [?, 62, 63]. Este estudo ainda não foi realizado no contexto do mundo brana. Assim como na partícula de teste bosônica, ela foi discutida para os casos massivo e sem massa. Descobrimos que o potencial efetivo modificado é dado por (6.27), a saber,

$$U_{eff} = M_0^2 \left[e^{2a} - \frac{2i}{M_0} \xi \psi_0^y e^{a-b} a' \right].$$

A modificação neste potencial está intimamente relacionada à presença das variáveis de spin ψ^A e ξ , o que introduz uma interação com o tensor de curvatura de Riemann. A análise do confinamento foi primeiro realizado graficamente. Da figura (4), concluímos que o potencial acima nos permite localizar as partículas de teste com spin em uma posição próxima à brana, mas não sobre ela. Ao analisar as características gerais do potencial acima, fomos capazes de mostrar que, de fato, qualquer partícula sobre a brana escapará para o infinito. Isso é válido para fatores de dobra geral $a(y)$ e $b(y)$. Além disso, o potencial acima também é válido para o caso sem massa, e nós poderíamos concluir que as superpartícula testes sem massa também são não localizadas. Portanto, nem a partícula bosônica nem a partícula livre em rotação podem ser localizadas sobre a brana. Isso é muito diferente da descrição do campo, onde o campo escalar livre está localizado, mas os campos de spinor e calibre não.

Finalmente, devemos apontar que, devido à presença da supersimetria de linha de mundo, a possibilidade de acoplamentos é muito restrita. Por exemplo, não é possível introduzir um acoplamento com os campos escalares ou dilaton acima sem quebrar essa simetria. No entanto, podemos considerar o caso com mais de uma supersimetria e spins ainda mais altos do ponto de vista da linha de mundo [69, 70]. Outra possibilidade é considerar a supersimetria do espaço-tempo do ponto de vista da linha de palavras, como na superpartícula de Brink-Schwarz ou mesmo na descrição de espinor puro covariante [71, 72]. Portanto, a introdução de variáveis de Grassmann abre uma nova via de pesquisa

sobre confinamento de partículas de teste em mundos-brana.

REFERÊNCIAS

- [1] T. Kaluza, *Zum Unitätsproblem der Physik*, Int. J. Mod. Phys. D **27** (2018) no.14, 1870001 doi:10.1142/S0218271818700017 [arXiv:1803.08616 [physics.hist-ph]].
- [2] O. Klein, *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*, Z. Physik 37, 895–906 (1926). <https://doi.org/10.1007/BF01397481>
- [3] O. Klein, *Nature*, 118 (1926) 51.
- [4] L. Randall and R. Sundrum, *A Large mass hierarchy from a small extra dimension*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999), 3370-3373 doi:10.1103/PhysRevLett.83.3370 [arXiv:hep-ph/9905221 [hep-ph]].
- [5] L. Randall and R. Sundrum, *An Alternative to compactification*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999), 4690-4693 doi:10.1103/PhysRevLett.83.4690 [arXiv:hep-th/9906064 [hep-th]].
- [6] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, “The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter,” Phys. Lett. B **429** (1998), 263-272.
- [7] Gross, D. J. & Perry, M. J., *Magnetic Monopoles in Kaluza-Klein Theories*, Nucl. Phys., B226, 26 (1983)
- [8] Thirring, H., *On the Effect of Rotating Distant Masses in Einstein’s Theory of Gravitation*, Phys. Z.,19, 33 (1918)
- [9] Weyl, H., *Gravitation und Elektrizität* Sitzungsber. Akademie der Wissenschaften Berlin, 465-480 (1918)
- [10] O. Klein, *Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity.*, Z. Phys., 37 (1926)
- [11] P. Jordan, “Formation of the Stars and Development of the Universe,” Nature **164**, 637 (1949).
- [12] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, “The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter,” Phys. Lett. B **429**, 263 (1998).
- [13] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, “Do We Live Inside a Domain Wall?,” Phys. Lett. B **125** (1983), 136-138
- [14] Gabella & Maxime, *The Randall-Sundrum Model*, (2006)
- [15] M. Gremm, *Four-dimensional gravity on a thick domain wall*, Phys. Lett. B **478** (2000), 434-438 doi:10.1016/S0370-2693(00)00303-8 [arXiv:hep-th/9912060 [hep-th]].
- [16] A. Kehagias and K. Tamvakis, “Localized gravitons, gauge bosons and chiral fermions in smooth spaces generated by a bounce,” Phys. Lett. B **504**, 38 (2001) doi:10.1016/S0370-2693(01)00274-X [hep-th/0010112].
- [17] D. Bazeia, L. Losano and J. M. C. Malbouisson, *Deformed defects*, Phys. Rev. D **66** (2002), 101701 doi:10.1103/PhysRevD.66.101701 [arXiv:hep-th/0209027 [hep-th]].

- [18] D. Bazeia and A. R. Gomes, “Bloch brane,” JHEP **05** (2004), 012.
- [19] T. Gherghetta and M. E. Shaposhnikov, “Localizing gravity on a string - like defect in six-dimensions,” Phys. Rev. Lett. **85** (2000), 240-243.
- [20] B. de Carlos and J. M. Moreno, “A Cigar - like universe,” JHEP **11** (2003), 040.
- [21] J. E. G. Silva, V. Santos and C. A. S. Almeida, “Gravity localization in a string-cigar braneworld,” Class. Quant. Grav. **30** (2013), 025005.
- [22] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. R. Dvali and N. Kaloper, “Infinitely large new dimensions,” Phys. Rev. Lett. **84** (2000), 586-589.
- [23] D. Choudhury and S. Sengupta “Generalization of the Randall-Sundrum warped braneworld model to higher dimensions” Phys. Rev. D **76**, (2007), 064030.
- [24] N. B. Cendejas and A. H. Aguilar Phys. Rev. D **73** (2006), 084022. Erratum: Phys. Rev. D **77**(2008), 049901.
- [25] B. Bajc and G. Gabadadze, “Localization of matter and cosmological constant on a brane in anti-de Sitter space,” Phys. Lett. B **474**, 282 (2000).
- [26] G. Alencar, R. R. Landim, M. O. Tahim and R. N. Costa Filho Phys. Lett. B **739**, 125 (2014).
- [27] Z. H. Zhao, Q. Y. Xie and Y. Zhong, “New localization method of $U(1)$ gauge vector field on flat branes in (asymptotic) AdS_5 spacetime,” Class. Quant. Grav. **32** (2015) no.3, 035020.
- [28] G. Alencar, C. R. Muniz, R. R. Landim, I. C. Jardim and R. N. Costa Filho, “Photon mass as a probe to extra dimensions,” Phys. Lett. B **759** (2016), 138-140.
- [29] G. Alencar, “Hidden conformal symmetry in Randall–Sundrum 2 model: Universal fermion localization by torsion,” Phys. Lett. B **773** (2017), 601-603.
- [30] W. M. Mendes, G. Alencar and R. R. Landim, “Spinors Fields in Co-dimension One Braneworlds,” JHEP **1802**, 018 (2018).
- [31] L. F. Freitas, G. Alencar and R. R. Landim, “Universal Aspects of $U(1)$ Gauge Field Localization on Branes in D -dimensions,” JHEP **02** (2019), 035.
- [32] C. E. Fu, Y. X. Liu, H. Guo and S. L. Zhang, “New localization mechanism and Hodge duality for q -form field,” Phys. Rev. D **93** (2016) no.6, 064007.
- [33] F. Ravndal, *Supersymmetric Dirac Particles in external Fields*, Phys.Rev. D **21** 2823 (1980)
- [34] R. Casalbuoni, *Relativity and supersymmetries*, Phys. Lett. **62B**, 49 (1976); Nuovo Cimento **33A**, 389 (1976); A. Barducci, B. Casalbuoni and L.Lusanna, NuovoCimento **35A**, 377 (1976).
- [35] Dirac, P. A. M., *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, (1964).

- [36] L. Brink, P. di Vecchia, P. Howe, *A Lagrangian Formulation of the Classical and Quantum Dynamics of Spinning Particles*, Nucl. Phys., B118 76 (1977).
- [37] Nauta, Lodewijk, *Supersymmetric Quantum Mechanics*, University of Amsterdam, Bachelors Project Physics and Astronomy, (1983).
- [38] Brink, L. and Schwarz, J. H., *Quantum Superspace*, Phys. Lett. B100 310-312, (1981).
- [39] J. Gegenberg and G. Kunstatter, Phys. Lett. A **106** (1984), 410.
- [40] D. Kovacs, "THE GEODESIC EQUATION IN FIVE-DIMENSIONAL RELATIVITY THEORY OF KALUZA-KLEIN," Gen. Rel. Grav. **16** (1984), 645-655.
- [41] Y. M. Cho and D. H. Park, "Fifth force from Kaluza-Klein unification," Gen. Rel. Grav. **23** (1991), 741-757.
- [42] P. S. Wesson, B. Mashhoon, H. Liu and W. N. Sajko, "Fifth force from fifth dimension," Phys. Lett. B **456** (1999), 34-37.
- [43] J. Ponce de Leon, "Does the force from an extra dimension contradict physics in 4-D?," Phys. Lett. B **523** (2001), 311-316.
- [44] J. Ponce de Leon, "Equations of motion in Kaluza-Klein gravity revisited," Grav. Cosmol. **8** (2002), 272-284.
- [45] J. Ponce de Leon, "Invariant definition of rest mass and dynamics of particles in 4-D from bulk geodesics in brane world and noncompact Kaluza-Klein theories," Int. J. Mod. Phys. D **12** (2003), 757-780.
- [46] W. Mueck, K. S. Viswanathan and I. V. Volovich, "Geodesics and Newton's law in brane backgrounds," Phys. Rev. D **62**, 105019 (2000) doi:10.1103/PhysRevD.62.105019 [hep-th/0002132].
- [47] F. Dahia and C. Romero, "Confinement and stability of the motion of test particles in thick branes," Phys. Lett. B **651**, 232 (2007) doi:10.1016/j.physletb.2007.06.004 [gr-qc/0702011 [GR-QC]].
- [48] F.E.A. Souza, G. Alencar, L. F. F. Freitas, R. R. Landim "Confinement of bosonic and spinning particles in braneworlds " <https://arxiv.org/abs/1906.11665>
- [49] T. Damour, G. W. Gibbons and C. Gundlach, "Dark Matter, Time Varying G , and a Dilaton Field," Phys. Rev. Lett. **64**, 123 (1990). doi:10.1103/PhysRevLett.64.123
- [50] J. A. Casas, J. Garcia-Bellido and M. Quiros, "Scalar - tensor theories of gravity with ϕ dependent masses," Class. Quant. Grav. **9**, 1371 (1992) doi:10.1088/0264-9381/9/5/018 [hep-ph/9204213].
- [51] L. Brink, S. Deser and B. Zumino, P. Di Vecchia and P. Howe, *Local Supersymmetry for Spinning Particles*, L. Brink, S. Deser, B. Zumino, P. Di Vecchia, and P. Howe, Phys. Lett. 64B, 435 (1976); L. Brink, P. Di Vecchia, and P. Howe, Nucl. Phys. B118, 76 (1977).

- [52] R. R. Landim, G. Alencar, M. O. Tahim and R. N. Costa Filho, “A Transfer Matrix Method for Resonances in Randall-Sundrum Models II: The Deformed Case,” *JHEP* **02** (2012), 073 doi:10.1007/JHEP02(2012)073
- [53] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser and A. Karch, “Modeling the fifth-dimension with scalars and gravity,” *Phys. Rev. D* **62**, 046008 (2000) doi:10.1103/PhysRevD.62.046008 [hep-th/9909134].
- [54] Ramond, P., *Field theory : a modern primer*, Addison-Wesley, (1990)
- [55] Frederico, João Eduardo, *Quantização BRST de Teorias com Simetria de Gauge $Sp(2,R)$* , Tese de Doutorado, Instituto de Física da USP, (2009).
- [56] Barcelos Neto, João, *Matemática para Físicos com Aplicações: Tratamentos Clássico e Quântico, Volume II*, Editora Livraria da Física, (2011).
- [57] Nakahara, M., *Geometry, Topology and Physics*, Institute of Physics Publishing, (2003).
- [58] Berezin, F. A., *The Method of Second Quantization*, Academic Press, Inc., (1966).
- [59] Swanson, Mark S., *Path Integrals and Quantum Processes*, Academic Press, Inc., (1992).
- [60] R. Blumenhagen, D. Lüst and S. Theisen, “Basic concepts of string theory,” doi:10.1007/978-3-642-29497-6
- [61] D. Youm, “Extra force in brane worlds,” *Phys. Rev. D* **62**, 084002 (2000) doi:10.1103/PhysRevD.62.084002 [hep-th/0004144].
- [62] F. A. Berezin and M. S. Marinov, “Particle Spin Dynamics as the Grassmann Variant of Classical Mechanics,” *Annals Phys.* **104** (1977), 336.
- [63] H. M. Ali, “Spinning particles in curved space-time,” *Int. J. Theor. Phys.* **41** (2002), 2319-2338.
- [64] D. Bazeia, C. Furtado and A. R. Gomes, “Brane structure from scalar field in warped space-time,” *JCAP* **02** (2004), 002
- [65] G. Alencar, R. R. Landim, M. O. Tahim and R. N. C. Filho, “A Transfer Matrix Method for Resonances in Randall-Sundrum Models III: An analytical comparison,” *JHEP* **01** (2013), 050.
- [66] D. Bazeia, R. Menezes and R. da Rocha, “A Note on Asymmetric Thick Branes,” *Adv. High Energy Phys.* **2014** (2014), 276729.
- [67] D. Bazeia and D. A. Ferreira D. Bazeia and D. A. Ferreira, “New results on asymmetric thick branes,” *Annals Phys.* **411** (2019), 167975.
- [68] “Symmetric and asymmetric thick brane structures,” *Eur. Phys. J. Plus* **135** (2020) no.7, 587.
- [69] J. W. van Holten, “D = 1 supergravity and spinning particles,”

- [70] F. Bastianelli, O. Corradini and E. Latini, “Spinning particles and higher spin fields on (A)dS backgrounds,” JHEP **11** (2008), 054.
- [71] L. Brink and J. H. Schwarz, “Quantum Superspace,” Phys. Lett. B **100** (1981), 310-312.
- [72] N. Berkovits, “Covariant quantization of the superparticle using pure spinors,” JHEP **09** (2001), 016
- [73] R. Jackiw and C. Rebbi, “Solitons with Fermion Number 1/2,” Phys. Rev. D **13** (1976), 3398-3409
- [74] T. W. Kim and E. J. Son JHEP**09**(2003), 040.
- [75] M. Mathisson, “Neue mechanik materieller systemes,” Acta Phys. Polon. **6** (1937), 163-2900.
- [76] A. Papapetrou, “Spinning test particles in general relativity. 1.,” Proc. Roy. Soc. Lond. A **209** (1951), 248-258.
- [77] Gitman, D. M., Saa, A. V., *Quantization of Spinning Particle with Anomalous Magnetic Momentum*, Class.Quant.Grav.10:1447-1460, (1993).
- [78] Casalbuoni R., *on quantization of systems with anticommuting variables*, Nuovo Cimento 33A, 115-25 (1976).
- [79] Blumenhagen, R., Lüst, D. and Theisen, S., *Basic Concepts of String Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2013).
- [80] Snoeck, Michiel, *Group Theory Part I, Discrete Groups*, University of Amsterdam, Department of Physics and Astronomy, (2012).
- [81] Freedman, D.Z. and Van Proeyen, A., *Supergravity* , Cambridge University Press, (2012).
- [82] Siegel, Warren, *Fields*, C. N. Yang Institute for Theoretical Physics, (2005).
- [83] Tung, Wu-Ki, *Group Theory in Physics*, World Scientific Publishing Co Pte Ltd, (1985).
- [84] Georgi, Howard, *Lie Algebras in Particle Physics*, Westview Press, (1999).
- [85] Snoeck, Michiel, *Group Theory Part II, Lie Groups and Lie Algebras*, University of Amsterdam, Department of Physics and Astronomy, (2012).
- [86] Tong, David, *Quantum Field Theory*, University of Cambridge Part III Mathematical Tripos, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, (2006).
- [87] Kaku, Michio, *Quantum Field Theory*, Oxford University Press, (1993).
- [88] Lahiri, Amitabha, *A First Book of Quantum Field Theory*, Oxford University Press, (2005).
- [89] Mendes, Wendel Macedo, *Localização de Férmions em D dimensões*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física da UFC, (2013).

- [90] Mendes, Wendel Macedo, *Campos espinoriais em cenário de mundo brana de co-dimensão um*, Tese de doutorado, Instituto de Física da UFC, (2018).
- [91] Polchinski, J. G., *String Theory*, Cambridge University Press, vol. 1, (1999).
- [92] Rumpf, Helmut, *Supersymmetric Dirac Particles in Riemann-Cartan Space-Time*, Gen. Rel. and Grav. vol. 14, num. 09, (1982)
- [93] G. Alencar, I. C. Jardim and R. R. Landim, “ p -Forms non-minimally coupled to gravity in Randall–Sundrum scenarios,” Eur. Phys. J. C **78**, no. 5, 367 (2018).
- [94] L. Randall and R. Sundrum, “An Alternative to compactification,” Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999).
- [95] L. Randall and R. Sundrum, “A Large mass hierarchy from a small extra dimension,” Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999).
- [96] V. A. Rubakov, “Extra dimensions: A primer,”
- [97] A. Chamblin and G. W. Gibbons, “Supergravity on the brane,” Phys. Rev. Lett. **84**, 1090 (2000).
- [98] M. Gremm, “Four-dimensional gravity on a thick domain wall,” Phys. Lett. B **478**, 434 (2000).
- [99] C. Csaki, J. Erlich, T. J. Hollowood and Y. Shirman, “Universal aspects of gravity localized on thick branes,” Nucl. Phys. B **581**, 309 (2000).
- [100] M. Visser, “An Exotic Class of Kaluza-Klein Models,” Phys. Lett. **159B**, 22 (1985).
- [101] M. Gogberashvili, “Hierarchy problem in the shell universe model,” Int. J. Mod. Phys. D **11**, 1635 (2002).
- [102] M. Gogberashvili, “Our world as an expanding shell,” Europhys. Lett. **49**, 396 (2000).
- [103] C. Brans and R. H. Dicke, “Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation,” Phys. Rev. **124**, 925 (1961).
- [104] R. H. Dicke, “Mach’s principle and invariance under transformation of units,” Phys. Rev. **125**, 2163 (1962).
- [105] Weinberg, Steven, "Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity", publisher "Wiley", address "New York, NY", year "1972",
- [106] F. Dahia, E. M. Monte and C. Romero, “Fifth force from fifth dimension: A Comparison between two different approaches,” Mod. Phys. Lett. A **18**, 1773 (2003).

**APÊNDICE A – TRANSFORMAÇÕES DE PARAMETRIZAÇÃO E
SUPERSIMETRIA LOCAL PARA A AÇÃO DA
SUPERPARTÍCULA NÃO MASSIVA**

A ação (3.51) é invariante por reparametrização no parâmetro $\tau \rightarrow \tau'(\tau) = \tau - f(\tau)$, segundo as variações (3.53-3.56), como segue abaixo:

$$\begin{aligned} \delta L = & \frac{1}{2} \left[2E^{-1}\dot{x}^\mu \delta \dot{x}_\mu - \dot{x}^2 E^{-2} \delta E - i\psi^\mu \delta \psi_\mu - i\delta \psi^\mu \dot{\psi}_\mu + iE^{-2} \chi \dot{x}^\mu \psi_\mu \delta E - iE^{-1} \delta \chi \dot{x}^\mu \psi_\mu \right. \\ & - iE^{-1} \chi \delta \dot{x}^\mu \psi_\mu - iE^{-1} \dot{x}^\mu \delta \psi_\mu \left. \right] = \frac{1}{2} \left[2\dot{x}^\mu (\dot{f} \dot{x}_\mu + f \ddot{x}_\mu) - \dot{x}^2 E^{-2} (f \dot{E} + \dot{f} E) \right. \\ & - i\psi^\mu (f \dot{\psi}_\mu + f \ddot{\psi}_\mu) - i f \dot{\psi}^2 + iE^{-2} \chi \dot{x}^\mu \psi_\mu (f \dot{E} + \dot{f} E) - iE^{-1} (f \dot{\chi} + \dot{f} \chi) \dot{x}^\mu \psi_\mu \\ & \left. - iE^{-1} \chi (\dot{f} \dot{x}^\mu + f \ddot{x}^\mu) \psi_\mu - iE^{-1} \chi f \dot{x}^\mu \dot{\psi}_\mu \right] = \frac{d}{d\tau} (fL), \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

A ação (3.51) é invariante por transformações de supersimetria local (3.58), como segue abaixo:

$$\begin{aligned} \delta L = & \frac{1}{2} \left[2E^{-1}\dot{x}^\mu \delta \dot{x}_\mu - \dot{x}^2 E^{-2} \delta E - i\psi^\mu \delta \psi_\mu - i\delta \psi^\mu \dot{\psi}_\mu + iE^{-2} \chi \dot{x}^\mu \psi_\mu \delta E - iE^{-1} \delta \chi \dot{x}^\mu \psi_\mu \right. \\ & - iE^{-1} \chi \delta \dot{x}^\mu \psi_\mu - iE^{-1} \dot{x}^\mu \delta \psi_\mu \left. \right] = \frac{1}{2} \left\{ 2iE^{-1} \dot{x}^\mu (\dot{\alpha} \psi_\mu + \alpha \dot{\psi}_\mu - iE^{-2} \dot{x}^2 \alpha \chi \right. \\ & - i\alpha \left(E^{-1} \dot{x}^\mu - \frac{i}{2} E^{-1} \chi \psi^\mu \right) \dot{\psi}_\mu - i\psi^\mu \left[\dot{\alpha} \left(E^{-1} \dot{x}_\mu - \frac{i}{2} E^{-1} \chi \psi_\mu \right) \right. \\ & \left. + \alpha \left(E^{-1} \ddot{x}_\mu - E^{-2} \dot{E} \dot{x}_\mu + \frac{i}{2} E^{-2} \dot{E} \chi \psi_\mu - \frac{i}{2} E^{-1} \dot{\chi} \psi_\mu - \frac{i}{2} E^{-1} \chi \dot{\psi}_\mu \right) \right] \\ & - E^{-2} \alpha \chi^2 \dot{x}^\mu \psi_\mu - 2iE^{-1} \dot{\alpha} \dot{x}^\mu \psi_\mu - iE^{-1} \chi (i\alpha \dot{\psi}^\mu + i\dot{\alpha} \psi^\mu) \psi_\mu \\ & \left. - iE^{-1} \chi \dot{\psi}^\mu \alpha \left(\dot{x}_\mu - \frac{i}{2} \chi \psi_\mu \right) \right\} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (\alpha E^{-1} \psi^\mu \dot{x}_\mu) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$