



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DOUTORADO EM FÍSICA

SAMUEL MORAIS DA SILVA

**NAVEGAÇÃO DESCENTRALIZADA DE MÚLTIPLOS PACOTES EM REDES DE
TRANSPORTE E ESTUDO SOBRE A INFLUÊNCIA DA VELOCIDADE MÁXIMA
PERMITIDA NAS VIAS DE UMA CIDADE COM DESORDEM**

FORTALEZA

2020

SAMUEL MORAIS DA SILVA

NAVEGAÇÃO DESCENTRALIZADA DE MÚLTIPLOS PACOTES EM REDES DE
TRANSPORTE E ESTUDO SOBRE A INFLUÊNCIA DA VELOCIDADE MÁXIMA
PERMITIDA NAS VIAS DE UMA CIDADE COM DESORDEM

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Física. Área de Concentração: Matéria Condensada

Orientador: Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S583n Silva, Samuel Morais da.

Navegação descentralizada de múltiplos pacotes em redes de transporte e estudo sobre a influência da velocidade máxima permitida nas vias de uma cidade com desordem / Samuel Morais da Silva. – 2020.
136 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2020.

Orientação: Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo.

1. Redes de Kleinberg. 2. Mundo pequeno. 3. Tráfego de informação. 4. Trânsito das cidades. 5. Transição de fase. I. Título.

CDD 530

SAMUEL MORAIS DA SILVA

NAVEGAÇÃO DESCENTRALIZADA DE MÚLTIPLOS PACOTES EM REDES DE
TRANSPORTE E ESTUDO SOBRE A INFLUÊNCIA DA VELOCIDADE MÁXIMA
PERMITIDA NAS VIAS DE UMA CIDADE COM DESORDEM

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Física. Área de Concentração: Matéria Condensada

Aprovada em: 30 de Novembro de 2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Humberto de Andrade Carmona
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Saulo Davi Soares e Reis
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Luis Osorio de Oliveira Filho
Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)

Prof. Dr. Francisco Wellington de Sousa Lima
Universidade Federal do Piauí(UFPI)

AGRADECIMENTOS

A Minha querida esposa Maria Luana Gaudêncio dos Santos Morais, pela inegável dedicação, cuidado e amor que foram definitivos para a continuação desse trabalho. Até mesmo na leitura do texto para correção de erros.

Aos meus pais, Lucineide Morais da Silva e José Wilson da Silva, e irmãos, Jefferson Morais da Silva e Wellington Morais da Silva, por todo o cuidado e apoio demonstrado não só durante este trabalho mais em toda a minha vida.

Ao Prof. Dr. Ascânio dias Araújo, orientador deste trabalho que de maneira incansável contribui em vários aspectos da pesquisa. Assim como toda a banca de qualificação (Prof. Dr. Humberto de Andrade Carmona, Prof. Dr. Saulo Davi Soares e Reis e Prof. Dr. Luis Osorio de Oliveira Filho) pelas excelentes ideias sugeridas.

A todos os amigos e companheiros de laboratório pela parceria e ajuda nas disciplinas e apoio durante a pesquisa. Felipe Gioachino Operti, Thiago Bento dos Santos, Calebe de Andrade Alves, Aurélio Wildson Teixeira de Noronha, Emanuel Pinheiro Fontelles, Wagner Rodrigues de Sena, João Paulo da Costa Nogueira, Francisco Israel Alves do Nascimento, Marciel Carvalho Gomes. Especialmente ao Dr. Rilder de Sousa Pires, pelos incalculáveis auxílios na escrita dos códigos e entendimento das melhores práticas de utilização das linguagens de programação. Assim como pelo discussões teóricas do trabalho. Muito obrigado a todos.

E à Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento (Funcap), pelo financiamento parcial da pesquisa de doutorado via bolsa de estudos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Investigamos, por simulação numérica e análise de tamanho finito, o impacto de conexões de longo alcance em uma rede de transporte espacialmente incorporada. Nossas redes são construídas a partir de redes regulares quadradas ($d = 2$) que são melhoradas através da adição de ligações de longo alcance estabelecidas com probabilidade $P(r_{ij}) \sim r_{ij}^{-\alpha}$ [J. M. Kleinberg, Nature 406, 845 (2000)]. Considerando essas redes aprimoradas, realizamos simulações numéricas da navegação de vários pacotes discretos e encontramos um limite para a quantidade de pacotes que fluem pela rede. Tais limites são caracterizados por uma probabilidade crítica de criação de pacotes p_c , onde acima deste valor ocorre a transição para o estado congestionado. Além disso, p_c segue uma lei de potência, $p_c \sim L^{-\gamma}$, onde L é o tamanho da rede. Nossos resultados indicam a existência de um valor ótimo de $\alpha_{min} \approx 1.7$, onde o parâmetro γ alcança o seu valor mínimo e as redes são mais resilientes ao congestionamento para sistemas de tamanhos maiores. Curiosamente, este valor está próximo do valor analiticamente encontrado de α para a navegação ótima de pacotes únicos em redes espacialmente incorporadas, onde $\alpha_{opt} = d$. Também constatamos que o espectro de potência para o número de pacotes navegando na rede, para um dado passo de tempo t , que está relacionado com a divergência do tempo esperado de entrega, segue uma função Lorentziana universal, independentemente dos detalhes topológicos das redes.

O funcionamento inadequado do sistema de transporte de veículos em uma cidade causa danos tanto do ponto de vista econômico, ambiental e de saúde pública para a população. Esse fenômeno normalmente acontece devido à presença de uma demanda elevada quanto ao volume de tráfego em relação à capacidade das vias de comportar tal demanda em algumas regiões específicas da cidade. Neste trabalho, propomos um estudo sistemático acerca de um modelo que apresenta uma dinâmica de tráfego com restrições espacial e temporal. O modelo inclui uma implementação de fila nas ruas de uma cidade, e, a partir desta implementação, procuramos entender em que condições o sistema se torna vulnerável à presença de congestionamentos. Inicialmente propomos uma descrição idealizada para as cidades, onde estas são representadas por meio de uma rede bidimensional composta por vias conectadas entre si. Em uma primeira abordagem, consideramos as vias com volume limitado, e nestas aplicamos o *modelo discreto e espacial de filas (SPQM)*. Com base neste modelo, investigamos a ocorrência de uma transição de fase entre um estado livre de completa fluidez para os veículos e um estado congestionado onde carros não conseguem chegar aos seus destinos. A transição de fase foi caracterizada em

função do parâmetro τ , que está associada à velocidade máxima de trânsito dos carros nas vias. A partir deste estudo, observamos que a relação entre velocidade máxima nas vias e a existência de congestionamentos não acontece de forma trivial. Esse comportamento é observado na condição de uma demanda fixa de carros na rede com origem e destino estabelecidos de forma aleatória. Para esta condição, encontramos um regime onde um número maior de carros consegue chegar aos seus destinos se reduzimos a velocidade máxima nas vias. Em seguida, aplicamos o mesmo modelo na rede de vias de alguns centros urbanos, tais como Fortaleza, Boston e Porto. Para estes centros, concluímos que o modelo pode ser eficiente em prever a existência de limites de velocidade que melhoram o trânsito em cidades reais. Investigamos também o comportamento do sistema ao modificar o tempo de espera τ através das distribuições gaussiana e em lei de potência, com e sem concorrência de ruas.

Palavras-chave: Redes de Kleinberg. Mundo pequeno. Tráfego de informação. Trânsito das cidades. Transição de fase. Congestionamento. SPQM.

ABSTRACT

We investigate by numerical simulation and finite-size analysis the impact of long-range shortcuts on a spatially embedded transportation network. Our networks are built from two-dimensional ($d = 2$) square lattices to be improved by the addition of long-range shortcuts added with probability $P(r_{ij}) \sim r_{ij}^{-\alpha}$ [J. M. Kleinberg, Nature 406, 845 (2000)]. Considering those improved networks, we performed numerical simulation of multiple discrete package navigation and found a limit for the amount of packages flowing through the network. Such limit is characterized by a critical probability of creating packages p_c , where above this value a transition to a congested state occurs. Moreover, p_c is found to follow a power-law, $p_c \sim L^{-\gamma}$, where L is the network size. Our results indicate the presence of an optimal value of $\alpha_{min} \approx 1.7$, where the parameter γ reaches its minimum value and the networks are more resilient to congestion for larger system sizes. Interestingly, this value is close to the analytically found value of α for the optimal navigation of single packages in spatially embedded networks, where $\alpha_{opt} = d$. Finally, we show that the power spectrum for the number of packages navigating the network at a given time step t , which is related with the divergence of the expected delivery time, follows a universal Lorentzian function, regardless the topological details of the networks.

The inadequate functioning of the vehicle transport system in a city causes damage from the economic, environmental and public health point of view to the population. This phenomenon usually happens due to the presence of a high demand as to the volume of traffic in relation to the capacity of the ways of behaving such demand in some specific regions of the city. In this work, we propose a systematic study about a model that presents traffic dynamics with spatial and temporal constraints. The model includes a queuing implementation on the streets of a city, and from this implementation, we try to understand under what conditions the system becomes vulnerable to the presence of congestion. Initially we propose an idealized description for the cities, where these are represented by means of a two-dimensional network composed by roads connected to each other. In a first approach we consider the limited volume routes, and in these we apply the Spatial Point Queue Model (SPQM). Based on this model, we investigated the occurrence of a phase transition between a free state of complete fluidity for the vehicles and a congested state where cars can not reach their destinations. The phase transition was characterized as a function of the parameter τ , which is associated to the maximum traffic speed of the cars in the tracks. From this study we observed that the relationship between, maximum speed in the roads and the existence of congestion does not happen in a trivial way. This behavior

is observed in the condition of a fixed demand of cars in the network with origin and destiny established of random form. For this condition, we find a regime where a greater number of cars can reach their destinations if we reduce the maximum speed on the roads. We then apply the same model to the road network of some urban centers, such as Fortaleza, Boston and Porto. For these centers, we conclude that the model can be efficient in predicting the existence of speed limits that improve traffic in real cities. We also investigated the behavior of the system when modifying the waiting time τ through the Gaussian and power law distributions, with or without competition of way.

Keywords: Traffic. Phase transition. Traffic jam. SPQM.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Fonte: Figura publicada por Guggenheim em 1945 (GUGGENHEIM, 1945) para a curva de coexistência de oito fluidos diferentes (as densidades e as temperaturas são divididas pelo valores do ponto crítico). A linha cheia representa o ajuste com uma equação cúbica.	34
Figura 2 – Fonte: Produção do autor baseada em (SALINAS, 1997). Diagrama $P \times V$ para um processo isotérmico com temperatura T menor que o ponto crítico T_c	35
Figura 3 – Fonte: Produção do autor baseada em (SALINAS, 1997). Diagrama $P \times v$ para um processo isotérmico com temperaturas T menor, igual e maior que o ponto crítico T_c	36
Figura 4 – Fonte: Produção do autor baseada em (SALINAS, 1997). Diagrama $P \times V$ para um processo isotérmico com temperatura T menor que o ponto crítico T_c	38
Figura 5 – Fonte: Produção do autor baseada em (OLIVEIRA, 2001). Reticulado espaço-tempo para o autômato celular probabilístico de Domany-Kenzel.	41
Figura 6 – Representação das pontes de Königsberg em mapa e grafo.	49
Figura 7 – Tipos de grafos que representam uma rede.	50
Figura 8 – Grafo de exemplificação	51
Figura 9 – Tipos de redes regulares	52
Figura 10 – Grafo do tipo árvore	53
Figura 11 – Construção da rede de Erdős-Rényi	55
Figura 12 – Mapa dos Estados Unidos da América	56
Figura 13 – Seis graus/ligações de separação	58
Figura 14 – Transição do modelo de Watts-Strogatz	60
Figura 15 – Caminho médio e coeficiente de agregação normalizados	61
Figura 16 – Construção de uma rede Kleinberg	63
Figura 17 – Variação do expoente do tempo de envio de uma mensagem em relação a α	65
Figura 18 – Caminho mínimo médio e tempo de envio em uma rede de Kleinberg	66
Figura 19 – Evolução do modelo de Barabási-Albert	67
Figura 20 – Histograma de conectividade para rede de Barabási-Albert	69

Figura 21 – Fonte: Produção do autor. A figura mostra a topologia da rede estudada. A rede é constituída pelas ruas de uma cidade regular bidimensional onde as ruas formam quadras por toda a cidade. Os carros são criados em origens e destinos aleatórios e seguem o menor caminho entre estes dois pontos segundo a distância *Manhattan*. Em cada rua os carros obedecem a uma fila de entrega que prioriza a entrega dos carros que chegaram primeiro na rua. Estas ruas são limitadas, impedindo a entrada de novos carros quando sua capacidade de comportar carros alcançar o seu limite. As diferentes cores representam quantidades diferentes de carros que chegam a cada instante. 70

Figura 22 – As redes de Kleinberg são construídas adicionando ligações de longo alcance em uma rede regular quadrada. Para um dado nó i , um nó j é escolhido aleatoriamente e uma ligação não direcionada de tamanho r_{ij} é adicionada entre eles com uma probabilidade $P(r_{ij}) \sim r_{ij}^{-\alpha}$. Seguindo essa lógica, o nó j pode ser qualquer um a uma distância de Manhattan de r_{ij} . As linhas tracejadas destacam os oito possíveis nós separados do nó i em uma rede regular a uma distância de $r = 2$. Nós escolhemos aleatoriamente um desses nós j para estabelecer a ligação de longo alcance. 76

Figura 23 – Transição para fases congestionadas para diferentes valores de α . Em (a) mostramos o parâmetro de ordem η em função da probabilidade de criação de novos pacotes p . Quando a topologia da rede favorece o algoritmo de entrega descentralizada, os pacotes são entregues em alta taxa e novos pacotes são criados, evitando que os nós fiquem sobrecarregados e evitando, assim, congestionamentos. É o caso de $\alpha = 0, 1$ e 2 , onde a transição ocorre para valores maiores de p . Conforme descrito em (b), o limite crítico p_c marca um valor máximo na suscetibilidade de resposta χ . Aqui, usamos $L = 128$ com $T = 10^4$ para cada valor de α e tempo de simulação igual a 10^5 78

Figura 24 – Comportamento do ponto crítico p_c . No painel (a), mostramos a probabilidade crítica p_c como uma função do expoente α . Conforme o tamanho do sistema L aumenta, os pacotes demoram mais para serem entregues, causando o aumento de ΔN . Como consequência disso, a transição para fases congestionadas ocorre para valores ainda menores de p_c . Porém, independentemente do valor de L , a probabilidade crítica sempre apresenta um máximo à medida que α se aproxima do valor de $\alpha = 2$. As probabilidades críticas seguem um comportamento de lei de potência, $p_c \sim L^{-\gamma}$, conforme apresentado no gráfico principal de (b). Os valores do expoente γ resultantes de um ajuste de mínimos quadrados aos dados são apresentados na inserção (quadro menor), onde um comportamento não monotônico pode ser claramente observado. Aqui, usamos $L = 2^5$ com $T = 10^4$ para cada valor de α e tempo de simulação igual a 10^5 80

Figura 25 – (a) Espectro de potência de S em função de f para $\alpha = 0$, e para a fase livre, $p < p_c$. Como se pode ver, para todos os valores do parâmetro de controle reescalado ε , S tem a forma de uma função Lorentziana dada pela Eq. (4.6). Os valores de ε aumentam de cima para baixo. Portanto, as curvas no topo estão mais próximas do valor crítico p_c . Dado o comportamento Lorentziano, espera-se uma queda da lei de potência de S para valores maiores de f , conforme mostrado pela linha tracejada com inclinação -2 . (b) Intensidade I em função do parâmetro de ordem ε obtido do ajuste da curva não linear de S usando a Eq. (4.6), para diferentes valores de α na fase livre. O gráfico sugere que $I \sim \varepsilon^{-\zeta}$. Para $\alpha = 3$ e 4 , os valores estimados de I se desviam desse comportamento quando o sistema se aproxima da transição nos valores mais baixos de ε . As linhas sólidas são os resultados de ajuste usando $I \sim \varepsilon^{-\zeta}$ nos intervalos de ε onde tal comportamento de lei de potência é válido. Cada espectro de potência é obtido por meio de uma média de 100 realizações, com $L = 32$ e tempo de simulação igual a 10^5 82

Figura 26 – Colapso de dados do espectro de potência S para diferentes valores do parâmetro de controle ε e (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 1$, (c) $\alpha = 2$, (d) $\alpha = 3$, e (e) $\alpha = 4$. Usamos $\zeta = 2.2(0)$, $2.3(3)$, $2.6(0)$, $2.9(1)$ e $3.0(9)$ para $\alpha = 0, 1, 2, 3$ e 4 , respectivamente. Esses valores foram obtidos a partir de um ajuste de mínimos quadrados aos dados apresentados na figura 25 (b). A inserção (quadro menor) em cada gráfico são os dados originais para o espectro de potência S obtidos em nossas simulações. (f) Quando os eixos do gráfico são escalados usando $S\varepsilon^\zeta/I_0$ e $(f/f_0)\varepsilon^{-\zeta/2}$, todos os dados apresentados nos painéis (a) - (e) colapsam na função Lorentziana universal \mathcal{L} . Cada espectro de potência é obtido por meio de uma média de 100 realizações, com $L = 32$ e tempo de simulação igual a 10^5 83

Figura 27 – Fonte: Produção do autor. A figura mostra o gráfico do número médio de carros na rede em função do parâmetro τ , considerando diferentes capacidades de armazenamento das ruas V . O gráfico mostra três situações considerando três valores de $V = 16, 32, 64$ no estado livre. Mesmo assim, o número médio de carros em toda a rede depende apenas de τ e permanece com dependência linear em todas as situações. Este valor é calculado em um estado estacionário para um sistema composto de 1984 vias. 88

Figura 28 – Fonte: Produção do autor. A figura mostra o gráfico da suscetibilidade calculada para vários valores de V . Utilizamos um tamanho de janela $T' = 10^3$ e calculamos o parâmetro de ordem dentro destas janelas para em seguida determinar o desvio padrão para cada um dos casos observados. O ponto com maior desvio padrão é definido como o ponto crítico do sistema τ_c . O gráfico (a) contém os resultados para uma rede com condição de contorno fechada, enquanto o gráfico (b) contém os resultados que correspondem a uma rede com condição de contorno periódica. 89

- Figura 29 – Fonte: Produção do autor. A figura mostra o gráfico do resultado do parâmetro de ordem para diferentes valores de V em função de $\tau - \tau_c$. O valor do parâmetro η tende a 1 de maneira diferente para cada um dos casos. Quando V cresce, a rede consegue comportar mais carros mesmo já não conseguindo entregá-los. Para valores cada vez maiores de capacidade V é necessário um τ cada vez maior para que a rede chegue ao congestionamento. O gráfico (a) contém os resultados para uma rede com condição de contorno fechada, enquanto o gráfico (b) contém os resultados para uma rede com condição de contorno periódica. 89
- Figura 30 – Fonte: Produção do autor. A figura mostra o comportamento do parâmetro de ordem em função de $(\tau - \tau_c)$ em escala logarítmica. O parâmetro de ordem diverge de forma semelhante para diferentes valores de V . O resultado do escalonamento do parâmetro de ordem de $\eta \sim (\tau - \tau_c)^\gamma$ apresenta expoentes dentro do intervalo $\gamma = [0.14; 0.54]$. O gráfico (a) contém os resultados para uma rede com condição de contorno fechada, enquanto o gráfico (b) contém os resultados para uma rede com condição de contorno periódica. 90
- Figura 31 – Fonte: Produção do autor. A figura em (a) mostra os valores de intermediações (*betweenness*) calculadas para uma rede com $L = 64$ com condição de contorno fechada representada em mapa de cores. Dado todos os menores caminhos de um nó i para um j , o mapa representa a proporção de caminhos que passa em um nó i . As cores indicam o valor de *betweenness*, variando do azul escuro até o amarelo em ordem crescente. Em (b) mostramos o histograma do preenchimento das ruas. Os dados foram extraídos de uma simulação em que ocorreu um bloqueio das vias da rede. 92
- Figura 32 – A figura mostra a proporção de casos de surgimento de *bloqueios* para condição de carros alocados apenas no instante inicial. O crescimento dos casos congestionados não apresenta um comportamento em lei de potência em função de τ , sendo aproximadamente linear entre os limites de 20% e 80% dos casos. Em (a) mostramos os resultados para uma rede com condição de contorno fechada, enquanto em (b) mostramos os resultados para uma rede com condição de contorno periódica. 93

- Figura 33 – Fonte: Produção do autor. A figura mostra o diagrama de fase entre os casos em que não há congestionamento, representado pela cor preta, e onde este número representa todas as simulações realizadas, representado pela cor amarela, em função do tempo mínimo de espera τ do modelo. Estes resultados foram obtidos para 10000 simulações em (a), com condição de contorno fechada, e 1000 (b), com condição de contorno periódica. O gráfico (a) contém os resultados para uma rede com condição de contorno fechada, enquanto (b), os resultados para uma rede com condição de contorno periódica. 95
- Figura 34 – Fonte: Produção do autor. A figura mostra a formação de *bloqueio* na região central da rede. Nas imagens, o nível de lotação da rua é representado por pontos, dependendo da intensidade na direção do branco quanto mais próxima do limite máximo de comportar carros a via se encontra. A cor azul representa a rua que alcançou a sua capacidade máxima. 95
- Figura 35 – Fonte: Produção do autor. As figuras (a),(b),(c),(d),(e) e (f) mostram uma sequência de procedimentos utilizados para a devida realocação dos segmentos de reta para que possuam um tamanho mínimo de 50 metros. Em (b) mostramos que o ponto a ser realocado é o 2 pois esse possui conectividade menor que o ponto 1. Logo, a rua será realocada para o ponto 3. O processo é repetido até que o segmento possua um tamanho mínimo de 50 metros. . . 97
- Figura 36 – Fonte: Produção do autor. As figuras mostram o mapa original de Boston em (a) antes de ser tratado e, em (b), os mapas utilizados nas simulações após o tratamento de realocação de ruas. O eixo das abcissas e ordenadas contém as coordenadas de longitude e latitude, respectivamente. Processos semelhantes foram executados para as cidades de Fortaleza e Porto. 98
- Figura 37 – Fonte: Produção do autor. A figura mostra as transições de fase referentes às cidades de (a) Fortaleza, (b) Boston e (c) Porto. No eixo das abcissas, temos o parâmetro de controle τ , que é o tempo mínimo que um carro deve esperar em uma rua até se habilitar para ir para a próxima rua em direção ao seu destino. Já η é a razão do número de carros que não conseguem chegar ao seu destino em relação aos carros que são criados na rede N_{OD} 100

Figura 38 – Fonte: Produção do autor. A figura mostra os pontos críticos obtidos para vários valores de N_{OD} correspondentes à figura 37 para três centros urbanos. À medida que a demanda de carros circulando aumenta na cidade, a rede fica mais vulnerável ao aparecimento de congestionamento, pois o limite de espera vai diminuindo.	101
Figura 39 – Lei de escala para os pontos críticos obtidos para vários valores de N_{OD} utilizados na figura 38. O gráfico mostra que a forma como τ_c varia com N_{OD} não apresenta diferenças significativas entre as cidades estudadas.	102
Figura 40 – Divergência na determinação do ponto crítico N_{OD_c} e seus valores em função de V . Em (a) vemos que a dispersão nos valores de N_{OD_c} se mantém constante em cerca de 10% do volume V . Em (b) encontramos um valor para o ajuste semelhante ao encontrado por (ÇOLAK <i>et al.</i> , 2013). Cada ponto foi obtido por meio de 100 simulações.	105
Figura 41 – Comportamento do ponto crítico no limite termodinâmico. Em (a), temos o ponto crítico N_{OD_c} em função do tamanho do sistema. Em (b) e (c), o resultado para ajustes de acordo com uma função do tipo $aN(L)^{-b}$, onde a e b são constantes e ajudam a entender o comportamento do ponto crítico com o inverso do tamanho do sistema.	106
Figura 42 – Ponto crítico N_{OD_c} e valores assintóticos (figura menor), calculados para diferentes distribuições dos valores de τ segundo uma lei de potência com $P(\alpha) \sim \tau^{-\alpha}$. O resultado sugere melhores condições de tráfego para $\alpha \in [0, 1]$. As cores e símbolos da figura menor correspondem aos mesmos valores de α para a figura maior.	108
Figura 43 – Variação do ponto crítico N_{OD_c} para simulações com distribuição de τ gaussiano. Em (a), temos a variação do ponto crítico em relação ao valor de τ para vários valores de σ_τ . Já em (b), temos a variação do ponto crítico N_{OD_c} em relação ao valor de σ para vários valores de τ . Nos casos (a) e (b), os valores de V foram mantidos constantes.	110
Figura 44 – Parâmetro de ordem η , desvio padrão σ , tempo médio t_g de aparecimento de <i>gridlock</i> e ajuste do desvio padrão σ para determinação de N_{OD_c} de acordo com uma gaussiana $G'(N_{OD_c}, \sigma_{pc})$. Valores calculados para diferentes Volumes $V = 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80$	123

Figura 45 – Parâmetro de ordem η , desvio padrão σ , tempo médio t_g de aparecimento de <i>gridlock</i> e ajuste do desvio padrão σ para determinação de N_{ODc} de acordo com uma gaussiana $G'(N_{ODc}, \sigma_{pc})$. Valores calculados para diferentes tamanhos de sistema $N = 2 * L * L$	124
Figura 46 – Parâmetro de ordem η , desvio padrão σ , tempo médio t_g de aparecimento de <i>gridlock</i> e ajuste do desvio padrão σ para determinação de N_{ODc} de acordo com uma gaussiana $G'(N_{ODc}, \sigma_{pc})$. Valores calculados para $\alpha = 0$	125
Figura 47 – Parâmetro de ordem η , desvio padrão σ , tempo médio t_g de aparecimento de <i>gridlock</i> e ajuste do desvio padrão σ para determinação de N_{ODc} de acordo com uma gaussiana $G'(N_{ODc}, \sigma_{pc})$. Valores calculados para $\alpha = -1$	126
Figura 48 – Parâmetro de ordem η , desvio padrão σ , tempo médio t_g de aparecimento de <i>gridlock</i> e ajuste do desvio padrão σ para determinação de N_{ODc} de acordo com uma gaussiana $G'(N_{ODc}, \sigma_{pc})$. Valores calculados para $\alpha = -2$	127
Figura 49 – Parâmetro de ordem η , desvio padrão σ , tempo médio t_g de aparecimento de <i>gridlock</i> e ajuste do desvio padrão σ para determinação de N_{ODc} de acordo com uma gaussiana $G'(N_{ODc}, \sigma_{pc})$. Valores calculados para $\alpha = 3$	128
Figura 50 – Parâmetro de ordem η , desvio padrão σ , tempo médio t_g de aparecimento de <i>gridlock</i> e ajuste do desvio padrão σ para determinação de N_{ODc} de acordo com uma gaussiana $G'(N_{ODc}, \sigma_{pc})$. Valores calculados para $\alpha = -1$	129
Figura 51 – Parâmetro de ordem η , desvio padrão σ , tempo médio t_g de aparecimento de <i>gridlock</i> e ajuste do desvio padrão σ para determinação de N_{ODc} de acordo com uma gaussiana $G'(N_{ODc}, \sigma_{pc})$. Valores calculados para $\alpha = -2$	130
Figura 52 – Parâmetro de ordem η , desvio padrão σ , tempo médio t_g de aparecimento de <i>gridlock</i> e ajuste do desvio padrão σ para determinação de N_{ODc} de acordo com uma gaussiana $G'(N_{ODc}, \sigma_{pc})$. Valores calculados para $\alpha = -3$	131
Figura 53 – Transições de fase para o modelo SPQM sem concorrência de ruas e distribuição de τ em lei de potência para vários valores de V com $\alpha = 1$	132
Figura 54 – Primeiro resultados	133
Figura 55 – Transições de fase para o modelo SPQM sem concorrência de ruas e distribuição de τ gaussiano para vários valores de σ_τ com $\mu_\tau = 1$	133
Figura 56 – Transições de fase para o modelo SPQM sem concorrência de ruas e distribuição de τ gaussiano para vários valores de σ_τ com $\mu_\tau = 2$	134

Figura 57 – Transições de fase para o modelo SPQM sem concorrência de ruas e distribuição de τ gaussiano para vários valores de σ_τ com $\mu_\tau = 3$	134
Figura 58 – Transições de fase para o modelo SPQM sem concorrência de ruas e distribuição de τ gaussiano para vários valores de σ_τ com $\mu_\tau = 4$	135

LISTA DE SÍMBOLOS

T	Temperatura
P	Pressão
V	Volume
ρ	Densidade
CO_2	Dióxido de Carbono
L	Comprimento lateral da rede
η	Parâmetro de ordem
χ	Suscetibilidade
τ	Parâmetro de controle para o modelo SPQM
R	Taxa de criação de de carros por passo de tempo para o modelo SPQM
l	Comprimento de uma rua
v_r	Velocidade média em uma rua
x_O	Posição x da posição de origem
y_O	Posição y da posição de origem
x_D	Posição x da posição de destino
y_D	Posição y da posição de destino
d_M	Distância Manhattan
C	Capacidade da via em permitir a saída de veículos no modelo SPQM
W	Número de carros presentes na simulação
τ_c	Parâmetro de controle crítico para o modelo SPQM
σ	Desvio padrão
γ	Expoente de escala do parâmetro de ordem em relação ao parâmetro de controle ($\tau - \tau_c$)
N_{OD}	Número de carros criados com origem e destino
N_0	Número de carros criados apenas no início da simulação
S	Número total de sítios na rede
r_{ij}	Segmento de rede que representa trecho de uma rua

k_i	Conectividade média de uma cidade i
ν	Expoente de escala do parâmetro crítico τ_c em relação ao número de carros criados N_{OD}

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
2	SISTEMAS DINÂMICOS E ESTOCÁSTICOS	27
2.1	Cadeias de Markov	27
2.1.1	<i>Variáveis aleatórias</i>	28
2.1.2	<i>Processos estocásticos</i>	30
2.2	Transições de fase e fenômenos críticos: Teorias clássicas	32
2.2.1	<i>Diagrama de fase</i>	34
2.2.2	<i>Equação de Van der Waals</i>	36
2.3	Autômatos celulares probabilísticos	38
2.3.1	<i>Autômato celular de Domany-Kinzel</i>	40
2.3.2	<i>Percolação direcionada</i>	44
3	SISTEMAS COMPLEXOS: GRAFOS E REDES	48
3.1	Origem do estudo de redes complexas	48
3.2	Definições	49
3.3	Medidas de centralidade	50
3.4	Redes regulares euclidianas	52
3.5	Grafos aleatórios	52
3.6	Mundo Pequeno ou <i>Small World</i>	55
3.7	Watts-Strogatz	59
3.8	Redes de Kleinberg	62
3.9	Barabási-Albert	67
3.10	Modelo discreto e espacial de fila (<i>SPQM</i>)	68
4	NAVEGAÇÃO DESCENTRALIZADA DE MÚLTIPLOS PACOTES	73
4.1	Formulação do modelo	74
4.2	Resultados e discussões	77
4.2.1	<i>Transição da fase livre para congestionada</i>	77
4.2.2	<i>Comportamento do limiar crítico</i>	79
4.2.3	<i>Divergência do tempo de entrega esperado</i>	84
4.3	Conclusões	85

5	ESTUDO DO MODELO SPQM IDEALIZADO PARA CIDADES REGULARES E REAIS	87
5.1	SPQM Dinâmico	87
5.2	SPQM semi-dinâmico	91
5.3	Modelo discreto e espacial de fila (SPQM) aplicado em cidades reais	96
5.3.1	<i>Adequações dos mapas ao modelo (SPQM)</i>	<i>96</i>
5.3.2	<i>SPQM aplicado a cidades reais</i>	<i>99</i>
5.4	Modelo espacial de fila (SPQM) com desordem no parâmetro τ	102
5.4.1	<i>Desordem de τ através da distribuição gaussiana</i>	<i>103</i>
5.4.1.1	<i>Modificações no modelo</i>	<i>104</i>
5.4.1.2	<i>Resultados obtidos para redes com concorrência de ruas</i>	<i>104</i>
5.4.2	<i>Desordem do parâmetro τ através da distribuição em lei de potência</i>	<i>107</i>
5.4.3	<i>SPQM sem concorrência de ruas e com desordem em τ dado por gaussiana</i>	<i>109</i>
6	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	111
	REFERÊNCIAS	114
	APÊNDICES	123
	APÊNDICE A – Resultados Detalhados	123
A.1	Ponto crítico N_{OD_c} para redes com $L = 32$ e aplicação do modelo SPQM e desordem do parâmetro τ de acordo com uma Gaussiana $G(\mu_\tau = 16, \sigma_\tau = 0.33)$	123
A.2	Ponto crítico N_{OD_c} para redes com variação de L e aplicação do modelo SPQM e desordem do parâmetro τ de acordo com uma Gaussiana $G(\mu_\tau = 16, \sigma_\tau = 0.33)$	124
A.3	Desordem com lei de potência	125
A.3.1	<i>Resultados para $\alpha = 0$</i>	<i>125</i>
A.3.2	<i>Resultados para $\alpha = 1$</i>	<i>126</i>
A.3.3	<i>Resultados para $\alpha = 2$</i>	<i>127</i>
A.3.4	<i>Resultados para $\alpha = 3$</i>	<i>128</i>
A.3.5	<i>Resultados para $\alpha = -1$</i>	<i>129</i>
A.3.6	<i>Resultados para $\alpha = -2$</i>	<i>130</i>
A.3.7	<i>Resultados para $\alpha = -3$</i>	<i>131</i>
A.4	Sem concorrência de ruas	132

A.4.1	<i>Desordem em lei de potência</i>	132
A.4.2	<i>Sem concorrência de ruas e distribuição de τ dada por gaussiana.</i>	133
A.4.2.1	$\tau = 1$	133
A.4.2.2	$\tau = 2$	134
A.4.2.3	$\tau = 3$	134
A.4.2.4	$\tau = 4$	135
	ANEXOS	135
	ANEXO A – Navegação descentralizada de múltiplos pacotes em redes de transporte	136

1 INTRODUÇÃO

Há muitos anos, conhecemos as transições de *fase* (ou *estado*) em vários cenários relacionados à matéria condensada (STÄLLBERG-STENHAGEN; STENHAGEN, 1945; BANGHAM, 1946; SURYAN, 1947), existindo, portanto, uma grande quantidade de literatura sobre o assunto (STANLEY, 1971). Essas transições acontecem em vários ramos da ciência, tais como: Física (PAPON *et al.*, 2007; STANLEY, 1971), Biologia (POLLACK; CHIN, 2008; MILLER, 1983), Ciências Sociais (CASTELLANO *et al.*, 2009), Economia (PLEROU *et al.*, 2003) entre outros. Em todos eles, existem estados distintos com características singulares. Contudo, é possível distinguir e classificar estes estados utilizando um parâmetro e , assim, determinar a transição entre os estados do sistema baseando-se apenas no valor deste parâmetro, chamado *parâmetro de ordem* (STANLEY, 1971). Com base na variação do parâmetro de ordem obtida através da variação de um *parâmetro de controle*, podemos identificar o ponto onde ocorre a transição entre as fases. Este ponto, normalmente, é determinado onde existe grande flutuação, ou divergência, da função de correlação (STANLEY, 1971).

Na era digital, o interesse por sistemas de troca de informação se expandiu no mesmo ritmo do desenvolvimento tecnológico. Alguns desses sistemas são usados até hoje e se tornaram bastante conhecidos. São sistemas que podem ser representados por redes com características de mundo pequeno (MILGRAM, 1967). Redes que são caracterizadas por um caminho médio mínimo baixo quando comparado a rede de computadores, por exemplo. Da mesma forma, evoluímos bastante no entendimento desses sistemas através de trabalhos amplamente conhecidos, como os de (KLEINBERG, 2000; GUIMERÀ *et al.*, 2002a; ARENAS *et al.*, 2001; GUIMERÀ *et al.*, 2002b). Além de aplicações ainda mais ousadas que relacionam esses sistemas às redes cerebrais (GALLOS *et al.*, 2012b)(GALLOS *et al.*, 2012a).

No problema de navegação de pacotes, onde a informação viaja de uma origem a um destino (NEWMAN, 2010) (BARTHÉLEMY, 2011), as redes de Kleinberg (KLEINBERG, 2000) ganham destaque. Isso devido ao algoritmo desenvolvido por Jon Kleinberg que comprova o impacto da geografia da rede subjacente sobre o tempo de transporte dos pacotes. Além de comprovar a relação deste impacto com a dimensão da rede subjacente, o algoritmo proposto por Kleinberg cumpre o papel de realizar o transporte de informações de maneira otimizada. O diferencial desse sistema é a adição de ligações de longo e curto alcance de acordo com uma distribuição do tipo $P(r_{ij}) \sim r_{ij}^{-\alpha}$, onde r_{ij} representa a distância entre dois sítios de uma rede espacialmente localizada. Mostraremos como esse tipo de sistema é afetado quando inserimos

uma estratégia a fim de minimizar os tempos de tráfego. Isso ocorre à medida que a quantidade de pacotes existentes em um sítio aumenta (GUIMERÀ *et al.*, 2002a) (GUIMERÀ *et al.*, 2002b), ou seja, quando os pacotes que viajam na rede procuram evitar estes sítios mais ocupados.

Devido ao crescimento das cidades e da estrutura de serviços oferecidos em suas subáreas, há muitos anos, a comunidade científica tem mostrado bastante interesse nas transições de fase ligadas ao tráfego de veículos. Nas últimas décadas, muitos modelos foram desenvolvidos a fim de explicar e entender diversos fenômenos recorrentes ligados à mobilidade urbana (BRILL, 1970; MILLER, 1961; PUPPO *et al.*, 2015; ZHOU *et al.*, 2017). Nesses modelos, busca-se abordar a transição de fase que separa os regimes de completa fluidez para aquele onde há um nítido comprometimento da movimentação dos navegantes do sistema (QIAN *et al.*, 2017; BOUADI *et al.*, 2017). Os modelos mais conhecidos abordam a transição do fluxo de carros (*parâmetro de ordem*) observada através da variação da densidade de ocupação das vias (*parâmetro de controle*). Esta transição apresenta um comportamento de histerese e não simétrico (FAKHRMOOSAVI *et al.*, 2020) (PAPON *et al.*, 2007). Este tipo de tráfego pode também ser associado a outras entidades que interagem entre si. Basta que o sistema possua regras previamente estabelecidas em um modelo de *autômatos**. A importância do tema ocorre devido ao fato de vivermos em um mundo onde o tempo é determinante para a execução de muitas atividades. De outra maneira, o tempo está associado a custos (CUSHMAN *et al.*, 2016). Portanto, o mau funcionamento ou a paralisação de serviços de transporte resultará sempre em custos adicionais para o sistema como um todo.

Especialmente o transporte de veículos automotores que ocorre em grandes centros urbanos tem se tornado um grande desafio para países desenvolvidos e subdesenvolvidos. Segundo o Departamento Nacional de Trânsito Brasileiro (Denatran) (BRASIL, 2016), nos últimos 10 anos, a frota de veículos no Brasil entre carros quase duplicou, chegando no ano de 2016 a quase 94 milhões. Isso aumenta o desafio de garantir o fluxo de serviços nas principais capitais do país. Enquanto o fluxo de veículos é mantido e estes conseguem chegar ao seu destino, o sistema se mantém ativo e os serviços garantidos. Porém, o sistema pode apresentar um comportamento contrário, onde seus caminhantes não chegam ao seu destino e os serviços já não podem ser garantidos. Este segundo estado é muito comum nas grandes cidades nos períodos de pico de tráfego. Devido à alta densidade de veículos automotores, os congestionamentos são constantes nas grandes cidades. Os veículos destas cidades, usualmente, levam mais tempo para

* Entidades que se comportam como “robôs” em uma dinâmica estocástica (OLIVEIRA, 2001).

chegar ao seu destino quando se comparado a dias com ausência de congestionamento. Além da quantidade excessiva de veículos, outros fatores podem ser determinantes para a interrupção do tráfego, tais como: os frequentes acidentes de trânsito, problemas estruturais das vias e diversas intervenções típicas de grandes metrópoles. Isso nos permite dizer que se trata de um sistema que pode ser afetado por diversos fatores, sejam eles externos ou internos.

Vários estudos já foram realizados sobre as transições de fase que ocorrem em redes de transporte de informação (OHIRA; SAWATARI, 1998; SREENIVASAN *et al.*, 2007). Porém, estes modelos ainda não conseguem representar todos os aspectos dinâmicos característicos observados no tráfego de grandes cidades. Neste sentido, nosso objetivo é estudar um modelo que esteja mais próximo à dinâmica que ocorre em uma cidade. Assim, consideraremos neste estudo um modelo simples, *Modelo discreto e espacial de filas (SPQM)* (ÇOLAK *et al.*, 2013), sobre dois aspectos, dinâmico e semi-dinâmico, em relação ao aparecimento de caminhantes (carros) no sistema (cidade) com origem e destino. Neste modelo, a rede é constituída por ruas que se comunicam através de seus cruzamentos. Os carros circulam segundo o menor caminho entre sua origem e destino de acordo com o algoritmo de Dijkstra (DIJKSTRA, 1959a). A dependência temporal do sistema é expressa por meio de uma variável τ que está relacionada à velocidade máxima permitida nas vias. Esta variável controla o tempo mínimo que um carro deve esperar para seguir viagem entre uma rua e a próxima de sua rota. Observamos uma transição entre os estados livre e congestionado. Nesse contexto, nosso parâmetro de ordem é a fração de carros que não consegue chegar ao seu destino em relação ao número de carros criados no sistema em cada passo de tempo.

No capítulo 2, apresentaremos uma revisão simplificada de alguns assuntos de mecânica estatística essenciais para este trabalho. Abordaremos os principais conceitos relacionados ao tema, assim como as definições de transição de fase com seus parâmetros de ordem e controle. Além disso, veremos sistemas dinâmicos estocásticos através do estudo de autômatos celulares.

No capítulo 3, apresentaremos a descrição completa de todos os modelos de redes que usaremos nesse trabalho, além de alguns outros necessários para as discussões do estudo. Demonstraremos as principais métricas que serão utilizadas nas discussões de grafos e que definem as propriedades de centralidade de redes complexas.

No capítulo 4, apresentaremos os principais resultados que levaram ao artigo publicado (SILVA *et al.*, 2018) que consta no anexo A. Neste capítulo, trabalhamos com as redes de Kleinberg, que possuem uma característica bastante peculiar em relação às ligações existentes

entre sítios de uma rede espacialmente localizada. Essa característica, conhecida como mundo pequeno (*smallworld*), é encontrada em diversos sistemas reais de bastante interesse. Um exemplo desses sistemas são as redes sociais que representam as conexões entre os indivíduos dessas redes, tais como: *Facebook* e *Instagram*.

No capítulo 5, aplicaremos o modelo *SPQM* em cidades idealizadas que possuem alta capacidade de entregar carros de uma rua para as suas vizinhanças. Analisaremos a resposta do sistema para diferentes valores de τ e, conseqüentemente, a transição entre os estados livre e congestionado. Na sequência, aplicaremos o modelo em cidades reais para entender qual deve ser a velocidade máxima média nos centros urbanos de acordo com a demanda de veículos nas cidades. Nas seções finais, o estudo será conduzido a fim de esclarecer o comportamento deste modelo para sistemas idealizados onde pode, ou não, haver concorrência de ruas. Faremos também a adição de desordem no parâmetro τ que representa o tempo de espera nas vias da cidade, fazendo, assim, uma comparação entre modelos cuja analogia é usada para cidades inteligentes, interligadas e o modelo mais usual de cidades.

No capítulo 6, traremos as principais conclusões do trabalho com as perspectivas de aplicação e trabalhos futuros.

2 SISTEMAS DINÂMICOS E ESTOCÁSTICOS

A teoria das probabilidades e seus desdobramentos, a teoria dos processos estocásticos e a dinâmica estocástica, constituem a linguagem apropriada para a descrição dos processos aleatórios.

(OLIVEIRA, 2001)

Segundo (SALINAS, 1997), a termodinâmica é a teoria fenomenológica que sistematiza as leis empíricas sobre o comportamento térmico dos corpos macroscópicos, sendo a termodinâmica uma área da Física que traz uma série de tratamentos específicos pela introdução dos fenômenos aleatórios. Por isso a sua singularidade em relação às demais áreas.

Há muito tempo se conhecem e se estudam os fenômenos aleatórios. Porém, as suas implicações nos fenômenos térmicos possibilitaram perscrutar os estudos nesta área de uma maneira mais completa e, até então, inovadora. Na primeira parte deste capítulo, introduziremos alguns conceitos-chaves que nos permitirão estender nossa abordagem para sistemas constituídos por “agentes” que possuem algum tipo de interação, constituindo um *sistema complexo* (OTTINO, 2004; MAY *et al.*, 2008; MITCHELL, 2006) e, assim, extrair propriedades universais que explicam comportamentos macroscópicos*. Inicialmente, apresentaremos os conceitos iniciais de aleatoriedade, introduzindo algumas métricas básicas como média e desvio padrão. Em seguida, exploraremos os fenômenos críticos clássicos e alguns modelos estocásticos relevantes para o estudo de sistemas complexos que apresentam transição de fase. Também destacaremos a ideia de sistemas de naturezas diferentes que, na análise das transições de fase, apresentam o mesmo comportamento quanto à criticalidade, ou seja, apresentam o mesmo conjunto de *expoentes críticos*†.

2.1 Cadeias de Markov

Na descrição dos diferentes tipos de sistemas ou fenômenos aleatórios, sem dúvidas, o que produz maior impacto sobre os estudos apresentados aqui são os estudos realizados por

* Grandezas que podem ser medidas no mundo “macro”.

† Conjunto que descreve a classe de universalidade de um determinado fenômeno crítico.

Markov[‡](1856–1922). De forma resumida, são processos cujo estado de um sistema estocástico em $t + 1$ depende apenas de suas características no instante anterior t . Dando, assim, a ideia de uma evolução *acorrentada* do sistema, ou seja, de maneira a formar uma *cadeia*. Porém, antes de entrarmos nos detalhes dos processo markovianos, é importante introduzir alguns conceitos iniciais sobre a teoria das probabilidades.

A construção do conceito de *Probabilidade* é baseada em um conjunto constituído por todos os eventos possíveis de um experimento, agrupando os resultados em subconjuntos mutuamente excludentes. Assim, sendo atribuído um número real não nulo, diferente de zero, para cada um destes subconjuntos cujo somatório é igual a unidade, chegaremos, então, em uma distribuição de probabilidades definida sobre o conjunto dos possíveis resultados (OLIVEIRA, 2001). Na maioria das vezes, a probabilidade possui uma interpretação relacionada à frequência, ou seja, quanto maior a probabilidade, maior a frequência em que um determinado evento tende a acontecer, seja ele um sorteio de um número ou a ocorrência de um outro evento qualquer. Um exemplo desta interpretação poderia ser um grupo de jogadores que tentam acertar o gol durante uma partida de futebol. A região, subconjunto, que apresentasse a maior probabilidade, número real não nulo, deve ser a região onde mais vezes a bola deve passar. Este número pode ser facilmente determinado como a razão entre o número de vezes que a bola passa por esta região e o número total de chutes executados.

2.1.1 Variáveis aleatórias

Vamos considerar uma variável l que assume valores inteiros. Vamos supor também que para cada valor de l existe um número real $p_l \geq 0$ e também que $\sum_l p_l = 1$. Nestas condições podemos afirmar que l é a nossa variável aleatória discreta e p_l , a distribuição de probabilidade da variável l .

De maneira análoga, podemos chegar no caso das variáveis aleatórias contínuas apenas assumindo agora que a nossa variável, desta vez x , pode assumir qualquer valor em um intervalo real $[a, b]$ onde novamente teremos uma condição de normalização, $\int_a^b \rho(x)dx = 1$, para as probabilidades associadas aos valores da variável x . Porém, nestes casos, o número que está associado aos valores possíveis da variável x é uma função $\rho(x)$ que representa uma densidade

[‡] Andrei Andreyevich Markov foi um matemático russo que ficou conhecido por seus trabalhos em probabilidade e processos estocásticos. Em especial, as *cadeias de Markov*.

de probabilidade. De maneira mais generalizada podemos escrever

$$\rho(x) \geq 0 \quad (2.1)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1. \quad (2.2)$$

Podemos ainda definir a distribuição cumulativa como

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \rho(y) dy \quad (2.3)$$

que é uma função monotônica crescente e tende à unidade quando x tende ao infinito.

Alguns exemplos de funções de densidade de probabilidade mais conhecidos são as gaussianas[§],

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.4)$$

as laplacianas[¶],

$$\rho(x) = \frac{1}{2\alpha} \exp\left(-\frac{|x|}{\alpha}\right) \quad (2.5)$$

e a função delta de Dirac^{||}

$$\rho(x) = \sum_l p_l \delta(x - l) \quad (2.6)$$

na sua forma discreta.

Das funções de densidade de probabilidade das distribuições conhecidas podemos extrair algumas métricas relevantes. Estas métricas servem para entendermos o comportamento da variável aleatória que se pretende estudar. Neste ponto podemos destacar as médias e os momentos^{**} das distribuições.

[§] Com essa função, é possível estudar os casos mais simples de distribuições de valores aleatórios, como altura, peso e idade de uma população.

[¶] Esta distribuição vem sendo bastante usada nos estudos de reconhecimento de fala através dos coeficientes da transformada de Fourier discreta e também no modelo de compressão de imagens JPEG.

^{||} Esta função é uma das mais utilizadas para descrever potenciais eletrostáticos na resolução de problemas de eletrodinâmica clássica.

^{**} Em alguns casos, distribuições totalmente distintas podem apresentar os mesmos índices, como é o caso do *data-saurus* (<http://www.thefunctionalart.com/2016/08/download-datasaurus-never-trust-summary.html>)(CAIRO, 2016)

Considerando um função $f(x)$ e sendo $\rho(x)$ a densidade de probabilidade associada à variável x , a média é definida como

$$\langle f(x) \rangle = \int f(x)\rho(x)dx. \quad (2.7)$$

Podemos ainda definir os momentos μ de ordem n na seguinte forma

$$\mu_n = \langle x^n \rangle = \int x^n \rho(x)dx. \quad (2.8)$$

Assim, podemos chegar na relação de que o primeiro momento μ_1 é simplesmente a média que definimos anteriormente. Já o segundo momento nos dará a medida de dispersão (σ) ou variância (σ^2) da distribuição através de

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \\ \sigma^2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \mu_2 - \mu_1^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.1.2 Processos estocásticos

Agora que conhecemos alguns conceitos básicos da mecânica estatística, podemos aprofundar um pouco mais nossos estudos nos processos de interesse. Os sistemas que abordaremos neste trabalho são classificados como sistemas complexos com um ingrediente de aleatoriedade. O diferencial dos processos de que trataremos está na mudança de propriedade que a nossa variável aleatória assumirá. A partir de agora, a variável aleatória terá uma dependência temporal, ou seja, x se tornará um $x(t)$ ^{††}. A estes processos cujo parâmetro que altera a variável aleatória é o tempo chamamos de *processos estocásticos*. Em nossa abordagem, tanto o tempo é discretizado como a variável estocástica.

Um processo estocástico pode ser completamente definido até um instante l . Assumindo que a variável estocástica x_t possui valores inteiros e t valores positivos, a expressão que representa completamente o processo será a distribuição de probabilidade conjunta

$$\mathcal{P}_l(n_0, n_1, n_2, \dots, n_l) \quad (2.10)$$

^{††} Uma variável aleatória que depende de um parâmetro t é chamada de função aleatória ou, se t significa o tempo, de variável estocástica (OLIVEIRA, 2001).

onde x_t é n_0 quando $t = 0$, n_1 quando $t = 1$, n_2 quando $t = 2$, ..., e n_l quando $t = l$. Se $\mathcal{P}_{l+1}(n_{l+1}|n_0, n_1, n_2, \dots, n_l) = \mathcal{P}_{l+1}(n_{l+1}|n_l)$ é válido, ou seja, estaremos diante de um processo *markoviano*. Assim, processos *markovianos* são definidos como processos onde a probabilidade condicional de x_t tomar um determinado valor em um determinado instante depende somente do valor que ela tenha tomado no instante anterior (OLIVEIRA, 2001). Dessa forma podemos escrever também

$$\mathcal{P}_l(n_0, n_1, n_2, \dots, n_l) = \mathcal{P}_l(n_l|n_{l-1}) \dots \mathcal{P}_2(n_2|n_1) \mathcal{P}_1(n_1|n_0) \mathcal{P}_0. \quad (2.11)$$

Logo, conhecendo as probabilidades $\mathcal{P}_{l+1}(n_{l+1}|n_l)$ e \mathcal{P}_0 , teremos o processo markoviano completamente definido.

Definindo a probabilidade $P_l(n_l)$ de que a variável x_t tome o valor n_l no instante $t = l$, sem nenhuma dependência dos valores anteriormente assumidos, teremos a seguinte definição

$$P_l(n_l) = \sum \mathcal{P}_l(n_0, n_1, n_2, \dots, n_l), \quad (2.12)$$

onde a soma se estende sobre os valores $n_0, n_1, n_2, \dots, n_{l-1}$, mas não sobre n_l . Assim, podemos chegar na equação de recorrência

$$P_l(n_l) = \sum_{n_{l-1}} \mathcal{P}_l(n_l|n_{l-1}) \mathcal{P}_{l-1}(n_{l-1}). \quad (2.13)$$

Logo, de forma análoga, se conhecermos $P_0(n_0)$, podemos obter $P_l(n_l)$ em qualquer instante. Estas probabilidades são probabilidades de transição entre os estados* n_l e n_{l+1} . Para processos markovianos cujas probabilidades de transição não variam no tempo, teremos

$$\mathcal{P}_{l+1}(n_{l+1}|n_l) = T(n_{l+1}, n_l), \quad (2.14)$$

onde a relação de recorrência antes citada se torna

$$P_l(n_l) = \sum_{n_{l-1}} T(n_l, n_{l-1}) P_{l-1}(n_{l-1}). \quad (2.15)$$

Observando apenas o termo $T(n_l, n_{l-1})$, veremos que ele pode ser escrito na forma $T(n, m)$, ou seja, como um elemento de uma matriz T . Qualquer matriz T que obedece às propriedades $T(n, m) \geq 0$ e $\sum_n T(n, m) = 1$ será chamada de *matriz estocástica*. É importante ressaltar que o somatório é realizado sobre o índice n de uma mesma linha, garantindo a normalização sobre todos os estados acessíveis posteriores a um estado inicial.

* Na sequência definiremos melhor o significado de estado.

Desta forma, poderemos escrever a seguinte relação em notação matricial

$$P_l = TP_{l-1} \quad (2.16)$$

ou ainda

$$P_l = T^l P_0 \quad (2.17)$$

se conhecermos o valor de P_0 , o problema se resume a encontrar a l -ésima potência da matriz estocástica T . De maneira mais detalhada, podemos reescrever $P_l(n)$ como

$$P_l(n) = \sum T^l(n, m) P_0(m) \quad (2.18)$$

onde o elemento $T^l(n, m)$ é interpretado como a probabilidade de transição do estado m para o estado n em l passos, ou seja, é a probabilidade de a variável x_t tomar o valor n em um certo instante t , dado que ela tenha tomado o valor m em um instante anterior $t - l$.

Apesar de trabalharmos com um sistema markoviano neste trabalho, a matriz estocástica possui alta complexidade. De tal forma que impossibilita a solução exata do problema analiticamente, sendo possível apenas a solução numérica através das simulações realizadas no decorrer deste trabalho.

2.2 Transições de fase e fenômenos críticos: Teorias clássicas

As transições de fase e fenômenos críticos ocorrem em diversas áreas da ciência (GREINER *et al.*, 2002; OSTERLOH *et al.*, 2002; WEGNER, 1971). Normalmente, a ideia de fase está associada aos estados mais conhecidos da matéria (sólido, líquido e gasoso). Porém, os estados, ou fases, abordados em nosso estudo compreendem uma série de outros exemplos. Podemos ter estas transições ocorrendo em sistemas de mistura de fluidos, materiais magnéticos, ligas metálicas, materiais ferroelétricos, superfluidos, supercondutores, cristais líquidos e muitos outros.

Na explicação e tratamento dos fenômenos críticos, as teorias de maior sucesso nos últimos séculos compreendem as teorias clássicas de Van der Waals e Pierre Weiss. A partir destas, foi possível conhecer melhor os fenômenos de transição em fluidos e materiais ferromagnéticos, respectivamente. O sucesso e a validade dos resultados ainda são obtidos até hoje (WANG *et al.*, 2019; GENT; WERF, 2019; ZHOU; SPRUCH, 1995). Teorias que descendem destas são conhecidas como *teorias clássicas das transições de fases*.

A tese de doutorado de Van der Waals, primeira grande referência de estudo de transição de fase, foi publicada em 1873. Mesmo assim, só a partir da década de 60 foram desenvolvidas as técnicas que possibilitaram a realização dos experimentos necessários para estudar estes fenômenos nas vizinhanças dos chamados *pontos críticos*[†]. Várias grandezas termodinâmicas demonstraram um comportamento singular nessa região crítica, como o calor específico[‡], a compressibilidade[§] e a suscetibilidade[¶]. A forma como estas grandezas termodinâmicas divergiam assintoticamente na região crítica permitiu o estabelecimento dos conhecidos *expoentes críticos*, que possibilitaria uma visão ainda mais macro de sistemas distintos a fim de relacioná-los. Isso porque, apesar de se tratar de fenômenos de natureza distintas, possuíam o mesmo conjunto de expoentes críticos, evidenciando um comportamento universal. Estes valores foram comprovados tanto do ponto de vista teórico quanto experimental (LEE, 1973). A figura 1 mostra o famoso colapso feito por Guggenheim em 1945. Nele podemos ver que diferentes gases, com suas propriedades físico-químicas diferentes, podem ser ajustados à mesma curva quando analisamos o comportamento relativo ao ponto crítico (ρ_c, T_c) .

É importante ressaltar a variedade de abordagens para explicar o comportamento de um sistema termodinâmico em relação às suas variáveis de estados, principalmente, para explicar os fenômenos de transição de estados. Porém, estas falhavam sempre na vizinhança dos pontos críticos.

Os sistemas físicos de muitos corpos apresentam correlação entre seus elementos que decaem exponencialmente com a distância, ou seja, são governados por um comprimento de correlação característico pequeno. Este comportamento é completamente o oposto quando comparado à região crítica onde as correlações decaem muito mais lentamente, sem nenhum comprimento de correlação característico (SALINAS, 1997).

Na década de 70, Keneth Wilson publicou um estudo completo sobre os *grupos de renormalização*. Neste trabalho Keneth não só justificou as leis de escala como também o caráter universal dos expoentes críticos, além de fornecer as ferramentas que ainda hoje são aperfeiçoadas para obter os valores precisos destes expoentes (WILSON, 1983).

[†] Pontos que servem como referência para determinar a região onde o parâmetro de ordem de um sistema apresenta um comportamento singular.

[‡] Capacidade e absorção de calor.

[§] Possibilidade de compressão da substância.

[¶] Grau de aderência do sistema a mudanças bruscas.

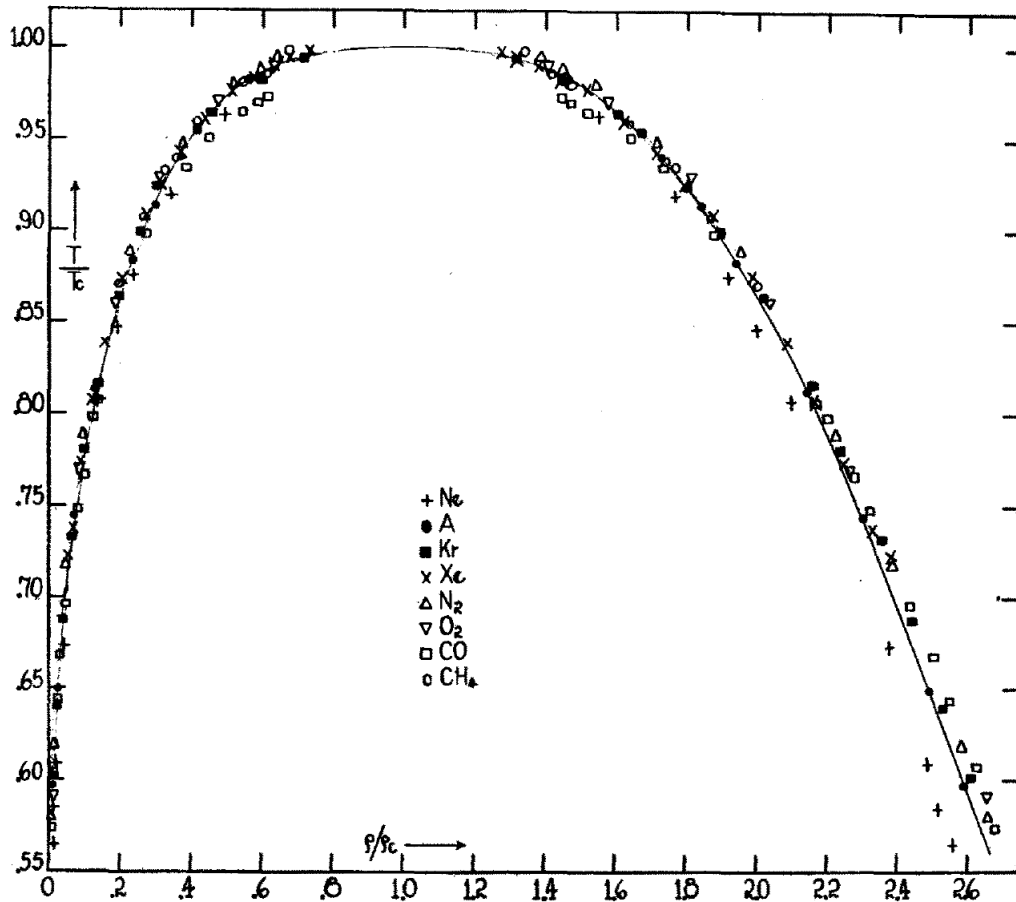


Figura 1 – Fonte: Figura publicada por Guggenheim em 1945 (GUGGENHEIM, 1945) para a curva de coexistência de oito fluidos diferentes (as densidades e as temperaturas são divididas pelo valores do ponto crítico). A linha cheia representa o ajuste com uma equação cúbica.

2.2.1 Diagrama de fase

Consideremos o diagrama de fase da figura 2. Na representação, as linhas cheias significam a interfase de coexistências de dois estados ao mesmo tempo com iguais valores para pressão e temperatura, mas com densidades diferentes. Nestas condições, dizemos que se trata de uma transição de primeira ordem segundo a classificação antiga de Ehrenfest (JAEGER, 1998). No ponto (T_t, p_t) temos o chamado ponto triplo, onde é possível a coexistência de três estados a uma mesma temperatura e pressão. Este ponto, considerando a água, estabelece a base da escala Kelvin onde teremos $T_t = 273,16K$ e $p_t = 4,58mmHg$. Porém, se seguirmos a linha que separa os estados líquido e gás, aumentando sempre a temperatura, chegaremos ao ponto crítico (T_c, p_c) . Percorrendo esta linha, veremos que a diferença de densidade entre as fases líquida e gasosa diminui cada vez mais até não existir mais diferença entre as densidades. Já neste ponto, observaremos uma transição de segunda ordem.

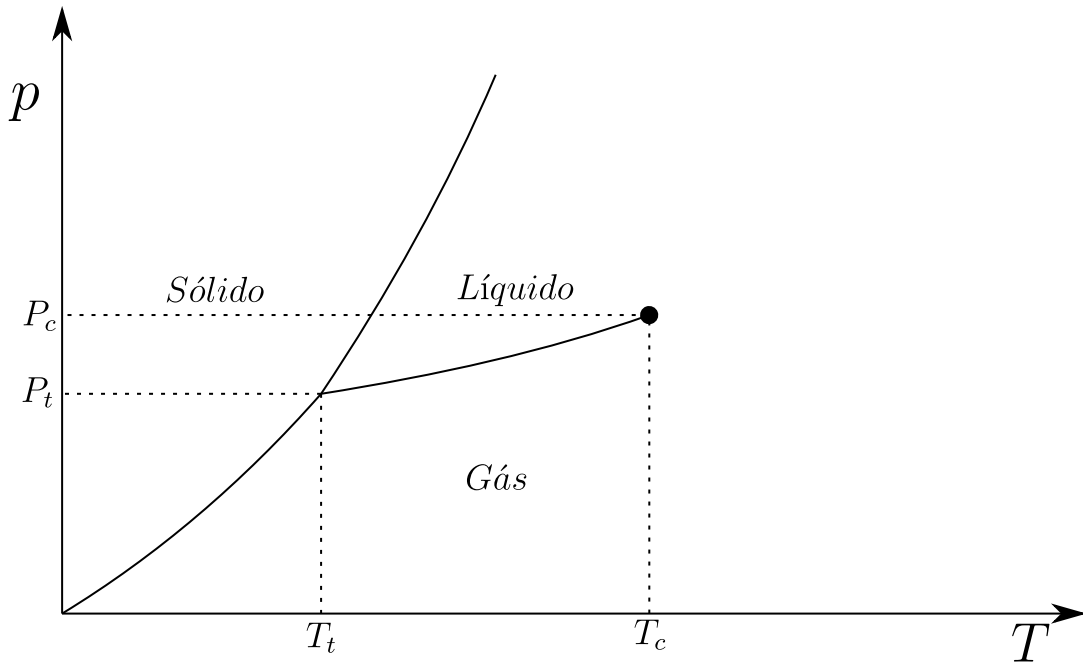


Figura 2 – Fonte: Produção do autor baseada em (SALINAS, 1997). Diagrama $P \times V$ para um processo isotérmico com temperatura T menor que o ponto crítico T_c .

Por vezes, é importante analisar este mesmo comportamento observando *pressão* e *Volume*, como mostra a figura 3. Aqui o volume no qual nos referimos é o volume específico, $v = V/N$, onde V é volume total e N , o número de moles. A figura mostra isotérmicas^{||} para valores diferentes de temperatura T . No primeiro, para $T < T_c$, vemos a marcação de dois pontos, v_L e v_G , em que a pressão é mantida constante mas o volume v apresenta valores distintos, mostrando a coexistência de dois estados, líquido e gasoso, respectivamente. À medida que a temperatura cresce, ou seja, quando as isotérmicas se aproximam da curva representada para $T = T_c$, veremos a diferença entre estes volumes $\psi = v_G - v_L$ diminuir cada vez mais. Logo, quando chegarmos em $T = T_c$, não haverá mais diferença entre os volumes para o estado líquido e gasoso. O mesmo ocorre se considerarmos $\psi = \rho_L - \rho_G$, onde $\rho = 1/v$.

Podemos, assim, introduzir um expoente crítico que caracterize esta transição, ou seja, quando $T \rightarrow T_c$,

$$\psi \sim B \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^\beta, \quad (2.19)$$

onde B e T_c não possuem nenhum carácter universal, mas o expoente β possui o valor de $1/3$ para quaisquer fluidos, como mostra a figura 1, comprovado experimentalmente.

^{||} Linhas que representam transformações termodinâmicas onde a temperatura se mantém constante.

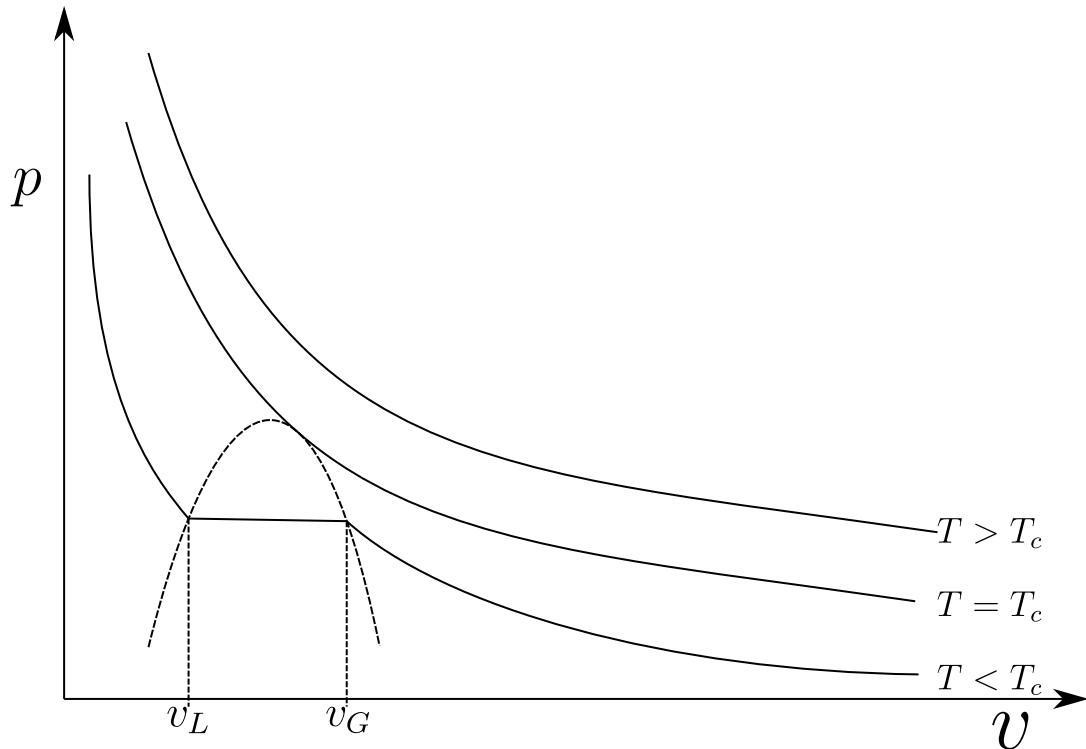


Figura 3 – Fonte: Produção do autor baseada em (SALINAS, 1997). Diagrama $P \times v$ para um processo isotérmico com temperaturas T menor, igual e maior que o ponto crítico T_c .

Voltando ao digrama pxT da figura 2, podemos descrever a linha de coexistência dos estados através da equação de Clausius-Clapeyron via energia livre de Gibbs por mol $g(T, p)$. Assim, teremos a seguinte igualdade

$$g_G(T, p) = g_L(T, p) \quad (2.20)$$

Assim também, podemos chegar na forma diferencial

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s_L - s_G}{v_L - v_G} = \frac{L}{T \Delta v} \quad (2.21)$$

considerando a forma diferencial $dg = -sdT + vdp$, onde Δv é a variação de volume específico e L , o calor latente da transição.

2.2.2 Equação de Van der Waals

O comportamento dos gases ideais já era conhecido e bem descrito pela lei de Boyle, $pv = RT$, onde R é a constante universal dos gases, ou $pv = NRT$, para descrever qualquer quantidade de *moles*. O tratamento adicional de Van der Waals consiste na consideração dos fatores de repulsão entre as partículas e o volume que elas ocupam. Assim teremos as seguintes

mudanças

$$v \rightarrow v - b \quad (2.22)$$

e

$$p \rightarrow p + a/v^2 \quad (2.23)$$

onde b representa o fator de repulsão das partículas e o fator a/v^2 , a correção devido à parte atrativa do potencial intermolecular. Assim, chegamos à famosa equação de Van der Waals dada por

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT. \quad (2.24)$$

A figura 4 mostra o comportamento da equação para $T < T_c$. Vemos que os patamares da situação experimental da figura 3, que descrevem um comportamento anômalo no intervalo $v_L < v < v_G$, não aparecem. Porém, aparece uma estrutura semelhante que ficou conhecida como as *alças* de van der Waals. Nesta aproximação, para uma mesma temperatura, é possível encontrar até três valores distintos de p . Há também um comportamento que pode ser classificado como instável, uma vez que a variação da pressão em função do volume tende a aumentar, ou seja, $(\partial p / \partial v)_T > 0$. A pressão aumentar e o volume também não parece um comportamento esperado. Logo, não parece razoável.

Podemos reescrever a equação 2.24 como um polinômio para v , para a determinação dos parâmetros críticos em função dos parâmetros fenomenológicos a e b .

$$v^3 - \left(b + \frac{RT}{p}\right)v^2 + \frac{a}{p}v - \frac{ab}{p} = 0 \quad (2.25)$$

Considerando o ponto crítico ($T = T_c; p = p_c$) e assemelhando esta equação a um produto notável de grau 3 do tipo $(v - v_c)^3 = 0$, chegaremos aos valores críticos das variáveis termodinâmicas com um pouco de álgebra. Os resultados para os valores críticos serão

$$v_c = 3b; \quad (2.26)$$

$$T_c = \frac{8a}{27bR} \quad (2.27)$$

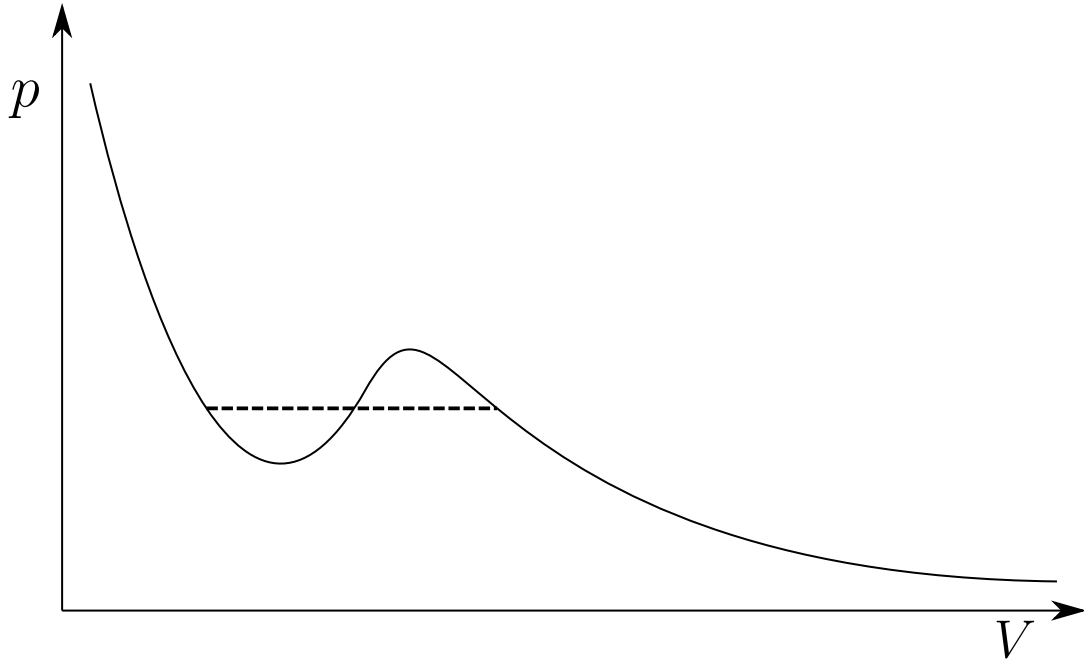


Figura 4 – Fonte: Produção do autor baseada em (SALINAS, 1997). Diagrama PxV para um processo isotérmico com temperatura T menor que o ponto crítico T_c .

e

$$p_c = \frac{a}{27b^2}. \quad (2.28)$$

O resultado seria semelhante se escrevêssemos a equação em função de p e aplicássemos as condições $(\partial p / \partial v)_T = 0$ e $(\partial^2 p / \partial v^2)_T = 0$.

2.3 Autômatos celulares probabilísticos

Em nossas simulações, teremos *agentes* que “tomam” decisões com o decorrer do tempo. Estes seguiram uma série de regras para estabelecer a sua evolução espacial e temporal. Autômatos celulares probabilísticos são processos markovianos em tempo discreto descritos por um conjunto de variáveis estocásticas discretas que residem em sítios de um reticulado (OLIVEIRA, 2001). A intervalos regulares de tempo, todas as variáveis são atualizadas simultaneamente de acordo com regras probabilísticas. Isso quer dizer que o autômato celular possui uma atualização síncrona a qual deve ser distinguida da atualização assíncrona, que é inerente aos sistemas descritos por equações mestras, como, por exemplo, o modelo de Glauber-Ising.

Cada sítio i de um reticulado de N sítios possui uma variável estocástica discreta η_i associada. As configurações microscópicas de um autômato celular probabilístico são descritas

pelo conjunto de variáveis estocásticas $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_i, \dots, \eta_N)$ e o sistema evolui no tempo através de passos discretos de tempo. Logo, a evolução da probabilidade $P_l(\eta)$ do estado η , no passo l , é governada pela equação

$$P_{l+1}(\eta) = \sum_{\eta'} W(\eta|\eta') P_l(\eta'), \quad (2.29)$$

Em que $W(\eta|\eta')$ é a probabilidade (condicional) de transição do estado η' para o estado η e, portanto, deve obedecer às seguintes prerrogativas

$$W(\eta|\eta') \geq 0, \quad (2.30)$$

$$\sum_{\eta} W(\eta|\eta') = 1. \quad (2.31)$$

Em um autômato celular, todos os sítios são atualizados de forma independente e simultânea, de modo que a probabilidade de transição $W(\eta|\eta')$ deve ser expressa na forma de um produto ou

$$W(\eta|\eta') = \prod_{i=1}^N w_i(\eta|\eta'), \quad (2.32)$$

em que $w_i(\eta|\eta') \geq 0$ é a probabilidade (condicional) de transição de que o estado do sítio i , no instante $l+1$, seja η_i , dado que, em l , o estado do sistema seja η' e possua a seguinte propriedade

$$\sum_{\eta} w_i(\eta_i|\eta') = 1, \quad (2.33)$$

o que implica que as condições das equações 2.30 e 2.31 estejam satisfeitas.

Um autômato celular probabilístico é simulado a partir de qualquer configuração inicial. A partir dela gera-se uma sequência de configurações, cada uma obtida da anterior através de uma atualização síncrona de todos os sítios. O i -ésimo sítio é atualizado de acordo com a probabilidade de transição w_i . Isto é, ele passa a ter o valor η_i com uma probabilidade $w_i(\eta_i|\eta')$, em que η' é a configuração anterior. A forma explícita de $w_i(\eta_i|\eta')$ e os valores que as variáveis assumem dependem do modelo específico que desejamos estudar.

2.3.1 Autômato celular de Domany-Kinzel

O modelo de autômato celular probabilístico introduzido por Domany e Kinzel em 1984 (DOMANY; KINZEL, 1984) é um modelo que apresenta probabilidades de transição irreversíveis e locais. Nele os sítios apresentam dois estados em uma rede unidimensional que possui um *estado absorvente*** . O modelo apresenta uma transição de fase típica de estados absorventes no regime estacionário, ou seja, seus expoentes pertencem à mesma classe de universalidade. O diferencial deste modelo para os mais conhecidos, como o modelo de Ising^{††}, é o fato de este acontecer fora do equilíbrio, além de ser um modelo com regras locais, que envolvem sítios dentro de uma pequena vizinhança e que contém os elementos básicos de irreversibilidade. Outro fato importante é que este modelo apresenta transição já em uma dimensão, o que não ocorre no modelo de Ising. Daí a sua importância para a mecânica estatística das transições de fase de não equilíbrio.

O modelo de autômato celular de Domany-Kinzel é definido em uma cadeia de N sítios, cada um deles associado a uma variável estocástica η_i que assume dois valores: $\eta_i = 0$, que representa o estado de um sítio vazio; e $\eta_i = 1$, representando o estado de um sítio que está ocupado por uma partícula. A evolução da probabilidade $P_l(\eta)$ do estado microscópico $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i, \dots, \eta_N)$, no instante l , é dado pela equação 2.33. Como a atualização dos estados dos sítios acontece de forma síncrona, ou seja, todos os sítios são atualizados de forma independente e simultânea, a probabilidade de transição $W(\eta|\eta')$ é dada como um produto de probabilidades de transição por sítio como na forma da equação 2.32.

Como as probabilidades de transição por sítio são iguais para este modelo podemos escrever

$$w_j(\eta_j|\eta') = w_{DK}(\eta_l|\eta'_{j-1}, \eta'_{j+1}). \quad (2.34)$$

O estado do sítio j no instante $l + 1$ depende somente dos estados dos sítios dados como primeiros vizinhos no instante l , ou seja, $j - 1$ e $j + 1$. Podemos resumir as probabilidades de transição w_{DK} através da tabela 1, em que p_1 e p_2 são dois parâmetros do autômato tais que $0 \leq p_1 \leq 1$ e $0 \leq p_2 \leq 1$. Podemos exemplificar a partir da tabela 1 que $w_{DK}(1|1,0) = p_1$. A

** Um estado absorvente é aquele em que a transição dele para qualquer outro é proibida, embora a transição de outros estados para ele possa ocorrer. Uma vez em tal estado, o sistema não pode escapar dele. Todos os modelos que exibem transições contínuas para o estado absorvente possuem o mesmo comportamento crítico, isto é, constituem uma mesma classe de universalidade (OLIVEIRA, 2001).

†† Modelo que apresenta a descrição mais simples do estado ferromagnético e da transição de fase ferromagnética-paramagnética.(OLIVEIRA, 2001)

última coluna da tabela 1 implica a existência de um estado absorvente em que todos os sítios estão vazios, $\eta_i = 0$ para qualquer valor de i , denominado um estado congelado. Assim, se todos os sítios estiverem vazios, não será possível um sítio ser ocupado por uma partícula, pois $w_{DK}(1|0,0) = 0$.

η/η'	1,1	1,0	0,1	0,0
1	p_2	p_1	p_1	0
0	$1-p_2$	$1-p_1$	$1-p_1$	1

Tabela 1 – Tabela com probabilidades de transição η baseadas nos estados descritos por η' .

Na evolução temporal desse autômato, é conveniente particular o reticulado espaço-tempo em duas sub-redes para N par, como é demonstrado na figura 5.

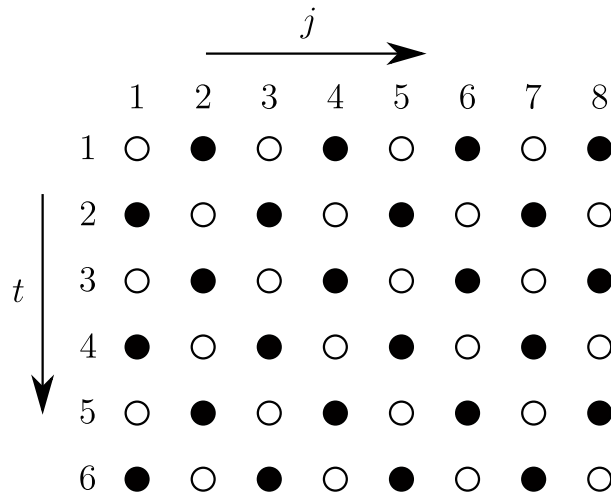


Figura 5 – Fonte: Produção do autor baseada em (OLIVEIRA, 2001). Reticulado espaço-tempo para o autômato celular probabilístico de Domany-Kenzel.

Logo, vemos que as regras deste autômato permitem a separação em dois sistemas residindo em sub-redes distintas e evoluindo no tempo independentemente. A observação dessa propriedade permite escrever as probabilidades de transição w_{DK} para uma das sub-redes como $w_{DK}(\eta_i|\eta'_i, \eta'_{i+1})$, em que os sítios são renumerados de tal modo que $i = (j-1)/2, \text{ mod } N/2$. Na descrição a seguir, tomaremos como referência uma destas sub-redes.

Dado que a distribuição de probabilidade referente a um sítio i é $P_l(\eta_i)$ e utilizando as equações 2.29 e 2.32, obteremos

$$P_{l+1}(\eta_i) = \sum_{\eta'_i} \sum_{\eta'_{i+1}} w(\eta_i|\eta'_i, \eta'_{i+1})P_l(\eta'_i, \eta'_{i+1}), \quad (2.35)$$

em que $P_l(\eta'_i, \eta'_{i+1})$ representa a distribuição de probabilidades referentes a dois sítios consecutivos. Logo, utilizando as probabilidades de transição dadas pela tabela 1, obtém-se

$$P_{l+1}(1) = p_2 P_l(11) + 2p_1 P_l(10). \quad (2.36)$$

onde a equação para $P_l(0)$ não se faz necessária pois

$$P_l(0) + P_l(1) = 1. \quad (2.37)$$

Sabemos que a equação que representa a evolução para a distribuição de probabilidades $P_l(\eta_i, \eta_{i+1})$ referente a dois sítios vizinhos pode ser obtida por procedimento similar e resulta em

$$P_{l+1}(\eta_i, \eta_{i+1}) = \sum_{\eta'_i} \sum_{\eta'_{i+1}} \sum_{\eta'_{i+2}} w_{DK}(\eta_i | \eta'_i, \eta'_{i+1}) w_{DK}(\eta_{i+1} | \eta'_{i+1}, \eta'_{i+2}) P_l(\eta'_i, \eta'_{i+1}, \eta'_{i+2}), \quad (2.38)$$

em que $P_l(\eta'_i, \eta'_{i+1}, \eta'_{i+2})$ é a distribuição de probabilidades referentes a três sítios consecutivos. Se substituirmos as regras dadas pela tabela 1 na equação acima, teremos a equação para a evolução para $P_l(11)$

$$P_{l+1}(11) = p_1^2 P_l(010) + 2p_1 p_2 P_l(110) + p_1^2 P_l(101) + p_2^2 P_l(111). \quad (2.39)$$

Podemos ainda encontrar a equação de evolução para $P_l(10)$ através da igualdade

$$P_l(10) + P_l(11) = P_l(1). \quad (2.40)$$

De maneira análoga, as equações de evolução para as probabilidades relativas a três sítios, como $P(111)$, que aparecem na equação 2.39, envolvem probabilidades relativas a quatro sítios; já as equações de evolução para essas envolvem probabilidades relativas a cinco sítios, e assim por diante, de modo que um conjunto infinito de probabilidades pode ser gerado. Esse conjunto hierárquico pode ser analisado a partir de um esquema de truncamento que resulta em aproximações denominadas de *campo médio dinâmico*.

O tratamento dessas equações, a partir de aproximações de campo médio dinâmico, será aqui obtido ao nível de pares de sítios. Dentro da abordagem de campo médio simples, ou de um sítio, usaremos a aproximação

$$P_l(\eta_i, \eta_{i+1}) = P_l(\eta_i) P_l(\eta_{i+1}), \quad (2.41)$$

de modo que a equação 2.36 se torna

$$P_{l+1}(1) = p_2 P_l(1) P_l(1) + 2p_1 P_l(1) P_l(0). \quad (2.42)$$

Usando a notação $x_l = P_l(1)$, então $P_l(0) = 1 - x_l$, teremos

$$x_{l+1} = p_2 x_l^2 + 2p_1 x_l (1 - x_l). \quad (2.43)$$

No regime estacionário teremos

$$x = p_2 x^2 + 2p_1 x (1 - x), \quad (2.44)$$

cujas soluções são $x = 0$ e

$$x = \frac{2p_1 - 1}{2p_1 - p_2}. \quad (2.45)$$

As soluções correspondem à fase absorvente e à fase ativa, respectivamente. A transição entre estas duas fases acontece para $p = 1/2$, nessa aproximação.

Dentro do esquema de campo médio ao nível de pares, podemos usar a aproximação

$$P_l(\eta_i, \eta_2, \eta_3) = \frac{P_l(\eta_1, \eta_2)P_l(\eta_2, \eta_3)}{P_l(\eta_2)} \quad (2.46)$$

que, quando inserida na equação 2.39, se torna

$$P_{l+1}(11) = p_1^2 \frac{P_l(01)P_l(10)}{P_l(1)} + 2p_1 p_2 \frac{P_l(01)P_l(11)}{P_l(1)} + p_2^2 \frac{P_l(11)P_l(11)}{P_l(1)} + p_1^2 \frac{P_l(10)P_l(01)}{P_l(0)}. \quad (2.47)$$

Se usarmos a notação $z_l = P_l(11)$ podemos reescrever a equação 2.36 como

$$x_{l+1} = p_2 z_l + 2p_1 (x_l - z_l) \quad (2.48)$$

já que $P_l(10) = x_l - z_l$, e a equação antecedente como

$$z_{l+1} = p_1^2 \frac{(x_l - z_l)^2}{x_l} + 2p_1 p_2 \frac{(x_l - z_l)z_l}{x_l} + p_2^2 \frac{z_l^2}{x_l} + p_1^2 \frac{(x_l - z_l)^2}{1 - x_l}. \quad (2.49)$$

No estado estacionário teremos apenas

$$x = p_2 z + 2p_1 (x - z), \quad (2.50)$$

$$z = p_1^2 \frac{(x - z)^2}{x} + 2p_1 p_2 \frac{(x - z)z}{x} + p_2^2 \frac{z^2}{x} + p_1^2 \frac{(x - z)^2}{1 - x}. \quad (2.51)$$

Podemos reescrever a equação 2.50 em função de z na forma

$$z = \frac{1 - 2p_1}{p_2 - 2p_1} x, \quad (2.52)$$

e substituir na equação antecedente. Assim, teremos a seguinte igualdade para x

$$x = \frac{(3p_1 - 2)p_1 + (p_1 - 1)^2 p_2}{(2p_1 - 1)(2p_1 - p_1)}. \quad (2.53)$$

A linha de transição será então obtida quando x tende a zero. Logo, chegaremos na expressão

$$p_2 = \frac{(2 - 3p_1)p_1}{(1 - p_1)^2}. \quad (2.54)$$

Chegamos à conclusão de que quando $p_2 = 0$, então $p_1 = 2/3$, quando $p_2 = 1$, então $p_1 = 1/2$ e, ao longo de $p_2 = p_1$, implica em $p_2 = p_1 = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0.618033\dots$

Nas proximidades da linha de transição, o parâmetro de ordem, que se identifica com a densidade de partículas x , possui o mesmo comportamento ao longo de toda a linha, com exceção da região ao redor do ponto $p_1 = 1/2$ e $p_2 = 1$. Por exemplo, para $p_2 = 0$ teremos

$$x = \frac{(3p_1 - 2)}{2(2p_1 - 1)} \quad (2.55)$$

ou

$$x \sim (p_1 - p_c) \quad (2.56)$$

em que $p_c = 2/3$, o que implica que o expoente crítico desta transição $\beta = 1$.

2.3.2 Percolação direcionada

O modelo de percolação direcionada é constituído considerando um reticulado composto por camadas com um certo número de sítios em cada uma delas. As camadas são numeradas pelo índice l de cima para baixo pelos números $0, 1, 2, 3, \dots$. Cada sítio de uma determinada camada está ligada a sítios vizinhos da camada superior e da camada inferior, mas não aos sítios da mesma camada. Cada sítio pode estar ativo com probabilidade p , ou inativo com probabilidade $(1 - p)$. Da mesma maneira existe uma probabilidade q associada à permanência das ligações entre os sítios com probabilidade $(1 - q)$ de a ligação não existir.

O objetivo é determinar a probabilidade de um sítio de uma determinada camada estar conectado a um outro sítio da camada zero. Entendemos a conexão entre dois sítios apenas se estes estiverem ativos e caso a conexão entre eles permaneça intacta. Já o caminho entre dois sítios será considerado apenas se este for constituído por pares de sítios conectados de maneira ascendente ou descendente. Logo, vemos que dois sítios de uma mesma camada nunca estarão conectados.

Definiremos a variável η_{il} que indicará se um sítio i está conectado à camada zero, ou seja, $\eta_{il} = 1$ se o sítio estiver conectado e $\eta_{il} = 0$ se não estiver. Já a probabilidade $P_l(\eta) = P_l(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)$ será a de o sítio 1 da camada l estar no estado η_1 , o sítio 2 da camada l estar no estado η_2 , o sítio 3 da camada l estar no estado η_3, \dots , e assim por diante.

Agora podemos escrever as probabilidades marginais $P_l(\eta_i)$ de um sítio e a referente a dois sítios consecutivos $P_l(\eta_i, \eta_{i+1})$. Assim, teremos

$$P_{l+1}(\eta_i) = \sum_{\eta'_i} \sum_{\eta'_{i+1}} w(\eta_i | \eta'_i, \eta'_{i+1}) P_l(\eta'_i, \eta'_{i+1}), \quad (2.57)$$

onde $w(\eta_i | \eta'_i, \eta'_{i+1})$ é a probabilidade de que um sítio i da camada $l + 1$ esteja no estado η_i , dado que os sítios i e $i + 1$ da camada l estejam nos estados η'_i e η'_{i+1} , respectivamente.

Como exemplo, dizemos que $w(1|11)$ é a probabilidade condicional de que um sítio esteja conectado à camada zero, dado que os dois vizinhos estejam conectados a esse camada. Logo, escreveremos

$$w(1|11) = 2pq(1 - q) + pq^2 = pq(2 - q) \quad (2.58)$$

De maneira análoga, chegaremos à conclusão que

$$w(1|10) = w(1|01) = pq \quad (2.59)$$

e

$$w(1|00) = 0. \quad (2.60)$$

Como o objetivo é trabalhar no limite termodinâmico, ou seja, quando $l \rightarrow \infty$, diremos que o sistema é um sistema percolante se $P = \lim_{l \rightarrow \infty} P_l(\eta_i = 1) \neq 0$. Nestas condições existirá um caminho que liga o i -ésimo sítio de uma camada infinitamente distante que estará ligada à camada zero. Obviamente, se $P = 0$ o sistema não é percolante.

Generalizando podemos expressar

$$P_{l+1}(\eta) = \sum_{\eta'} W(\eta | \eta') P_l(\eta'), \quad (2.61)$$

onde

$$W(\eta | \eta') = \prod_i w(\eta_i | \eta'_i, \eta'_{i+1}), \quad (2.62)$$

onde podemos igualar este mapeamento da percolação direcionada ao que é feito no problema do autômato celular probabilístico de Domany-Kinzel. Os parâmetros p_1 e p_2 do autômato descrito na seção anterior se relacionam com os parâmetros da percolação direcionada p e q , respectivamente. Assim,

$$p_1 = pq \quad , \quad p_2 = pq(2 - q) \quad (2.63)$$

e a transformação inversa será

$$p = \frac{p_1^2}{2p_1 - p_2} \quad , \quad q = \frac{2p_1 - p_2}{p_1} \quad (2.64)$$

Vale ressaltar que a condição de $p = 1$ e $q = 1$ representa a percolação de ligação e sítio, respectivamente. Para a percolação de sítio teremos $p_2 = p_1$, enquanto a percolação de ligações teremos $p_2 = 2p_1 - p_1^2$.

Com essa correspondência, vemos que a probabilidade de percolação P se identifica com a variável x apresentada no modelo de Domany-Kinzel da seção anterior. Usando os resultados da aproximação de campo médio simples, vemos que a solução é $P = 0$, e a outra se obtém de 2.45 e é dada por

$$P = \frac{2pq - 1}{pq^2} \quad (2.65)$$

válida para $2pq \geq 1$. Já para a percolação direcionada por sítio ($q = 1$), teremos

$$P = \frac{2p - 1}{p} \quad , \quad (2.66)$$

de que obtemos $p_c = 1/2$. Para a percolação direcionada por ligações ($p = 1$),

$$P = \frac{2q - 1}{q^2} \quad , \quad (2.67)$$

de que obtemos $q_c = 1/2$.

Usando a aproximação de campo médio ao nível de pares, obtemos que uma solução é $P = 0$, e a outra se obtém de 2.53 e é dada por

$$P = p - \frac{(pq - 1)^2}{2pq - 1} \quad (2.68)$$

Para a percolação direcionada por sítios ($q = 1$), obtemos

$$P = \frac{p^2 + p - 1}{2p - 1} \quad (2.69)$$

que acarreta $p_c = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0.618033\dots$. Para o caso de percolação direcionada por ligações ($p = 1$), obteremos

$$P = \frac{-q^2 + 4q - 2}{2q - 1} \quad (2.70)$$

que implica em $q_c = 2 - \sqrt{2} = 0.585786\dots$. Com estes resultados podemos concluir que existe uma relação entre a percolação direcionada e o autômato celular de Domany-Kinzel descrito na seção anterior. Essa correspondência ratifica a ideia de que os dois modelos pertencem à mesma classe de universalidade. Mesmo partindo de dinâmicas diferentes, os expoentes críticos que os caracterizam são iguais.

Vimos as principais definições das quantidades que definem um sistema termodinâmico. Isso nos ajudará a descrever sistemas físicos cujas propriedades macroscópicas surgem a partir de um comportamento microscópico. Outra tema de bastante relevância para o nosso trabalho são os fenômenos descritos a partir de expoentes de criticalidade universal. Pois a origem dos sistemas, assim como sua dinâmica microscópica, pode até ser diferente, mas as grandezas que descrevem as transições de fase apresentam os mesmo expoentes críticos.

No próximo capítulo, introduziremos um dos principais sistemas complexos, as redes de comunicação, com suas características principais e suas aplicações mais conhecidas. Elas serão a base de todos os sistemas descritos e estudados na sequência dos capítulos.

3 SISTEMAS COMPLEXOS: GRAFOS E REDES

A interação entre elementos de sistemas sociais, tecnológicos, biológicos, químicos e físicos é usualmente definida como redes complexas (GUIMERA *et al.*, 2002a). A forma como esses elementos se organizam e interagem define a sua evolução temporal e seu(s) estado(s) acessíveis. Com o crescimento tecnológico e o aparecimento de sistemas desta natureza, foi necessária a criação de vários modelos que explicassem de forma simples a origem de alguns fenômenos característicos relacionados a redes complexas.

Neste capítulo, discutiremos os principais modelos de rede e as definições e características básicas. Apresentaremos o início dos estudos e como esta área continua viva até hoje pela existência de aplicações em um mundo cada vez mais conectado. No final, apresentaremos um modelo que permite estudar a dinâmica do tráfego de veículos em uma cidade, onde o sistema é representado por uma rede complexa.

3.1 Origem do estudo de redes complexas

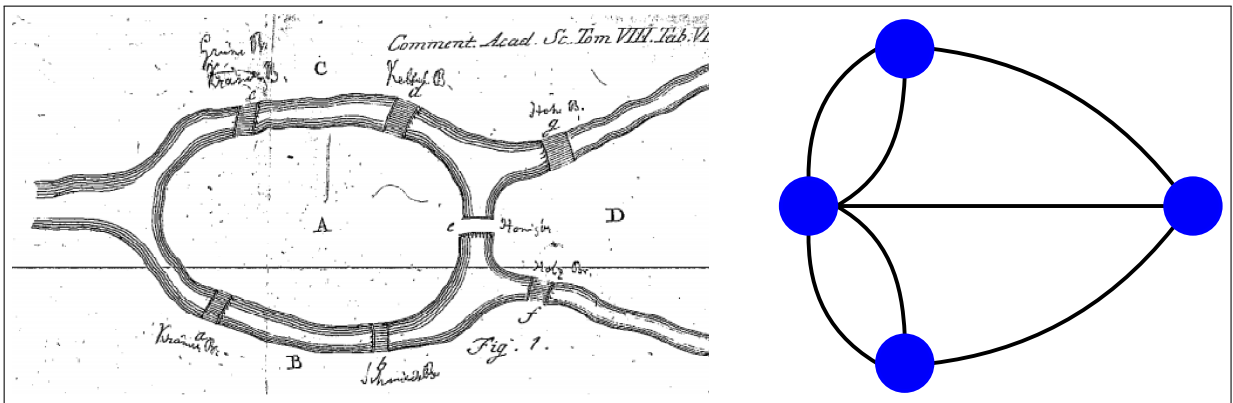
A construção e a estrutura de grafos ou redes são a chave para compreender o complexo mundo que nos rodeia.

Albert-László Barabási

Eram tempos de paz e prosperidade antes da Segunda Guerra Mundial, na Cidade de St. Petersburg, na Prússia Oriental, onde o matemático Euler vivia. A população preocupava-se com jogos de puzzle quando surgiu o enigma das pontes de Königsberg, no qual era proposta a seguinte questão: “É possível visitar todas as regiões ligadas pelas pontes sem passar pela mesma ponte duas vezes?” Mais importante do que a solução para a questão foi a ferramenta criada por Euler para resolver tal enigma, a teoria dos grafos. A figura 6 mostra a ilustração original publicada por Euler em seu artigo e, ao lado, o grafo que representa as faixas de terra e os links (pontes) que as conectam. Com a sua teoria formulada, Euler percebeu que o problema só seria resolvido se a quantidade de ligações de cada vértice fosse um número par, ou no máximo dois vértices com um número ímpar de ligações. O problema foi resolvido quando uma nova ponte, que ligou as regiões B e C, foi construída em 1875. Assim, cada vértice possuía um número de ligações que permitia visitar todas as regiões ligadas pelas pontes sem passar duas vezes pela

mesma ponte. Neste problema não nos interessa o tamanho das pontes ou das regiões que são interligadas, mas apenas como cada região é interligada às outras através das pontes. Esse foi o primeiro passo na direção do desenvolvimento de estudos sobre redes, pois permitiu o tratamento do problema através da construção de um simples *grafo*.

Figura 6 – Representação das pontes de Königsberg em mapa e grafo.



Fonte: A figura da esquerda foi a publicada por Euler (EULER, 1736) e a segunda é produção do autor. O grafo representa as faixas de terra através dos nós e as pontes através das ligações.

Antes de prosseguirmos, é necessário definirmos alguns objetos que citaremos durante o desenvolvimento deste trabalho.

3.2 Definições

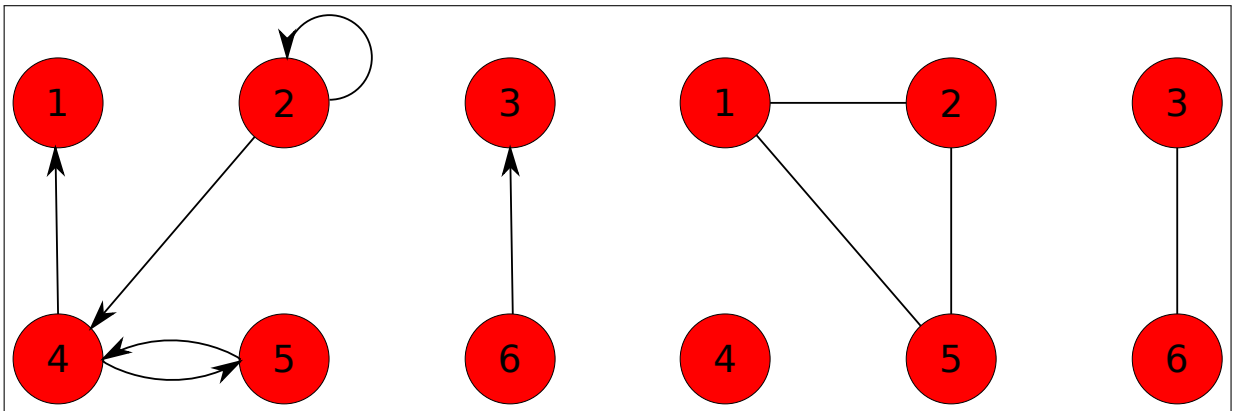
1. Grafo

Para fins de simplificação, usamos *grafos*, um ente matemático $G(V,E)$ (LEISERSON *et al.*, 2002) que contém os vértices e o conjunto de ligações entre os constituintes da rede. V é o conjunto finito de N vértices da rede e E , a relação binária entre os integrantes da rede, ou seja, as arestas ou *links*. Estes *grafos* podem também representar redes não-reais, onde sua construção não representa a estrutura de uma rede existente no mundo físico.

Há dois tipos de grafos: *orientado*, quando as ligações têm um sentido determinado; e *não orientado*, quando não há um sentido predefinido à ligação. Uma diferença significativa entre estes dois tipos é a possibilidade de formação de *autoloops* nos grafos orientados, quando um vértice pode possuir uma ligação a ele mesmo, o que não acontece com os grafos não orientados. Um grafo não orientado $G(V,E)$ é, formalmente, um *complex* (CALHEIROS, 1985) de dimensão 2 cujas arestas são células de dimensão 1 e cujos nós são células de dimensão 0 (CALHEIROS, 1985).

Na figura 7 temos os dois tipos de grafos citados.

Figura 7 – Tipos de grafos que representam uma rede.



Fonte: Produção do autor baseada em ((LEISERSON *et al.*, 2002), p. 590). O primeiro representa um grafo ordenado onde as ligações possuem um sentido determinado, enquanto o segundo representa um grafo não ordenado onde as ligações não possuem um sentido único.

2. Nó ou sítio

Definimos Nó/sítio como a representação dos indivíduos pertencentes a um grafo. Cada sítio pode se conectar a um ou mais sítios pertencentes ao grafo .

3. Ligação

Entidade que permite a interação entre os nós da rede. Através dela os pacotes podem se mover entre os nós até o seu destino final. No capítulo 4, associaremos uma qualidade a este canal, que favorece a sua utilização no transporte de informação.

4. Rede

A rede é diferente de um grafo. Trata-se de um sistema complexo real representado pelo grafo. A rede é o objeto final de interesse pois ela pode existir no mundo real, representando um sistema complexo, tal como o conglomerado de ruas de uma cidade.

5. Pacote

Definimos pacote como a quantidade de informação básica que atravessa a rede de sua origem ao seu destino. Este objeto será usado quando falarmos da dinâmica de transporte de informações ocorrendo em uma rede no processo de comunicação.

3.3 Medidas de centralidade

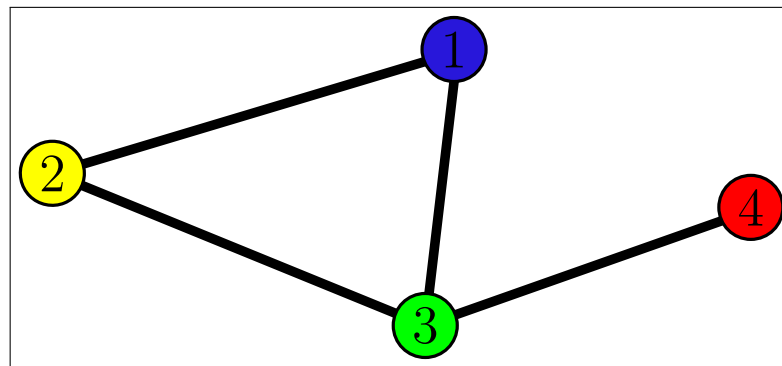
Tratando-se de redes, é necessário caracterizá-las em relação às suas condições estruturais. Estas características são importantes para diferenciar as redes e compará-las entre si.

Citaremos abaixo as principais medidas das redes chamadas de *centralidades*.

1. Comprimento de caminho*

Número de ligações que separam dois sítios de uma rede. Quando representa a menor distância entre dois sítios de uma rede, chamamos de *caminho mínimo* ou *geodésica*, e traduz a eficiência da rede quanto a sua navegação. Na figura 8, existem dois caminhos entre os nós 1 e 4, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ e $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$, sendo que o menor é aquele que não passa pelo nó 2. Podemos ainda ter o valor médio do caminho mínimo somando todos os caminhos entre os vértices e dividindo pelo número de vértices existentes.

Figura 8 – Grafo de exemplificação



Fonte: Produção do autor baseada em Barabási (2012, p. 32).

2. Conectividade ou grau

É uma medida básica que descreve o número de ligações que chegam ou saem de um nó. Na figura 8, as conectividades para nós 1, 2, 3, 4 são 2, 2, 3, 1, respectivamente, com conectividade média igual a 2.

3. Coeficiente de agregação†

Representa a probabilidade de dois vizinhos de um vértice também estarem conectados, ou seja, uma densidade de triângulos‡ na rede. Essa medida é calculada com o número de ligações entre vizinhos estabelecidas em relação ao número de ligações possíveis entre os vizinhos. Para o nó 3 da figura 8, das três ligações possíveis entre os vizinhos, $2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$ e $2 \rightarrow 4$, apenas uma ligação foi estabelecida, logo, o coeficiente de agregação para este nó será $1/3$.

* Também conhecido como *path length*.

† Também conhecido como *clustering coefficient*.

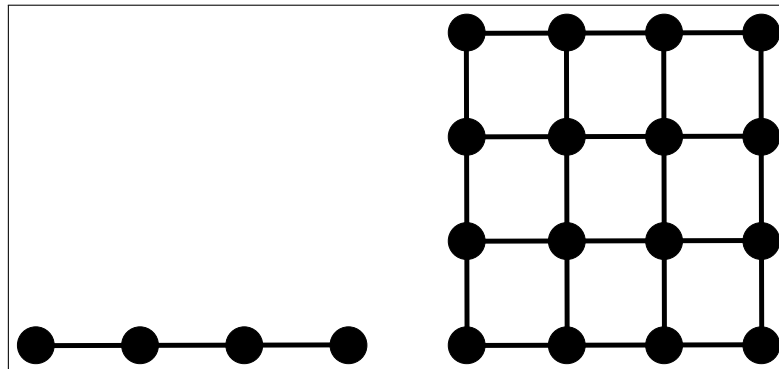
‡ Existem outras leituras para o coeficiente de agregação que consideram a densidade de “quadrados” ou “pentágonos”. Porém, não abordaremos essas tratativas neste trabalho.

3.4 Redes regulares euclidianas

O conceito de rede regular parte da definição de “lattice” (BIRKHOFF, 1940). Porém, aqui nos referiremos à rede regular quando tivermos um grafo, tal que os sítios constituintes estejam dispostos em posições equidistantes dos seus vizinhos, de forma a construir uma malha através das ligações entre os sítios, conforme ilustrado na figura 9, onde podemos observar uma rede regular em uma e duas dimensões, respectivamente. Em outras palavras, nos referiremos à rede regular como o espaço euclidiano discretizado. Neste tipo de grafo, teremos aqui que, diferente da distância euclidiana entre dois pontos, a distância entre dois sítios quaisquer da rede será simplesmente dada por:

$$r_{ij} = |x_i - x_j| + |y_i - y_j|. \quad (3.1)$$

Figura 9 – Tipos de redes regulares



Fonte: Produção do autor. Representações de Lattices (BIRKHOFF, 1940) em 1D e 2D onde as ligações possuem o mesmo peso e são igualmente distantes. A primeira representa uma rede em 1D semelhante a um *fibro*. Já a segunda representa uma rede 2D semelhante a uma *malha*.

É fácil perceber que uma rede regular possui conectividade média igual a 4 e um coeficiente de agregação igual a zero.

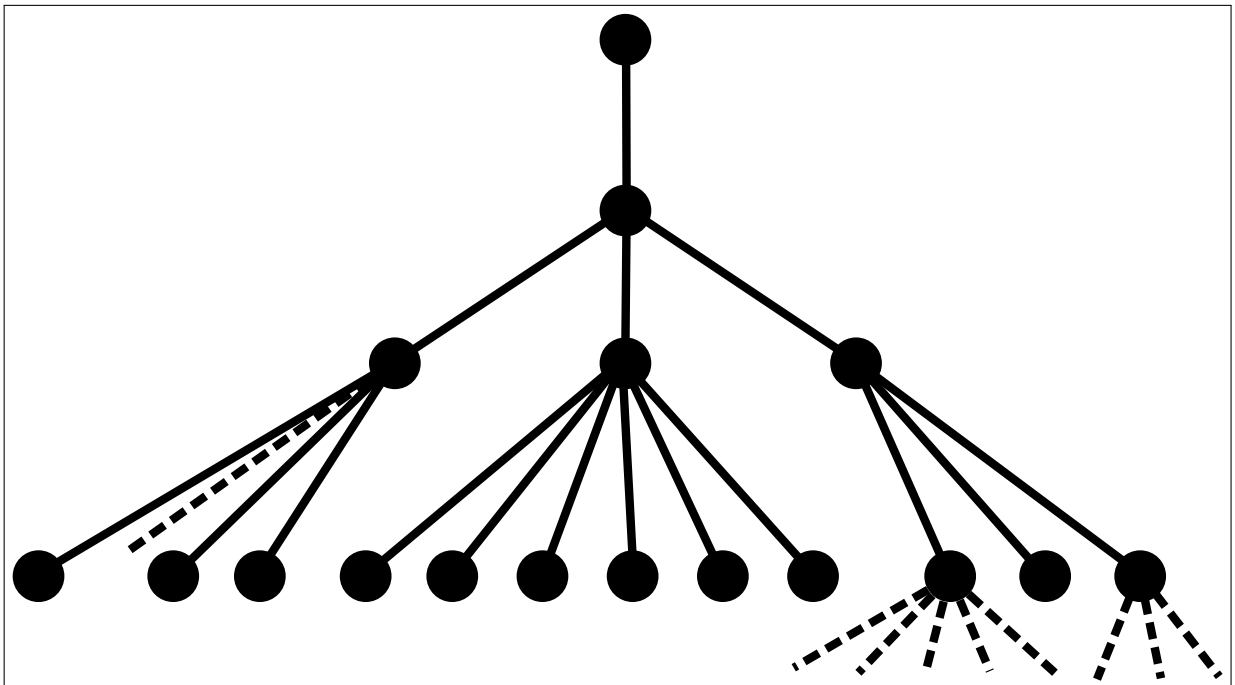
3.5 Grafos aleatórios

Os primeiros trabalhos de redes aleatórias são de 1948 (RAPOPORT, 1948) e 1951 (SOLOMONOFF; RAPOPORT, 1951), em que Solomonoff e Rapoport (CLAUSET; NEWMAN, 2009) estudaram a conectividade das ligações aleatórias em fibras neurais - o axônio[§] - que

[§] É uma parte do neurônio responsável pela condução dos impulsos elétricos que partem do corpo celular até outro local mais distante, como um músculo ou outro neurônio (DEBANNE *et al.*, 2011).

formam estruturas capazes de transmitir impulsos elétricos ou reagentes químicos. Neste último, Solomonoff e Rapoport mostraram a importância do tema para a solução de problemas envolvendo probabilidade de conexão entre os integrantes de uma rede na formação de agregados percolantes, considerando uma rede de neurônios. Também analisaram problemas envolvendo propagação de doenças contagiosas e descendências entre os indivíduos de uma população. Segundo Solomonoff e Rapoport, cada um destes problemas pode ser formalizado através da construção de uma “árvore probabilística”, figura 10, que representa os indivíduos da rede e suas interações.

Figura 10 – Grafo do tipo árvore



Fonte: Produção do autor baseada em Solomonoff et al (1951, p. 108). Idealização do modelo de rede proposto por Solomonoff e Rapoport em forma de árvore de conexões para explicar as conexões entre indivíduos de uma família, conexões neurais e propagação de doenças (SOLOMONOFF; RAPOPORT, 1951).

Como solução para os problemas citados, os autores utilizaram uma equação diferencial formulada por Shimbel (SHIMBEL, 1950), em 1950, que reduziu o problema ao de encontrar o valor de x quando $x \rightarrow \infty$ na equação abaixo:

$$\frac{dx}{dt} = [N - x(t)][x(t) - x(t - \tau)], \quad (3.2)$$

onde $x(t)$ é o valor esperado de t axônios removidos de um neurônio arbitrário e τ é a densidade de axônios, ou seja, a densidade de conexões.

A equação acima pode ser resolvida para um caso particular proposto por Rapoport (RAPOPORT, 1948), quando o número de axônios por neurônio é exatamente 1. Recursivamente, chega-se a solução:

$$x(t+1) - x(t) = [N - x(t)] \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N} \right)^{a[x(t) - x(t-1)]} \right] \quad (3.3)$$

onde N representa o número total de vértices.

Para a conectividade do sistema, denominada de γ por Solomonoff, obtém-se a seguinte função, onde a representa a densidade de axônios no sistema com criticalidade em $a = 1$.

$$\gamma = 1 - e^{-a\gamma}. \quad (3.4)$$

Em 1959 Erdős e Rényi (ERDÖS; RÉNYI, 1959) lançaram seu modelo de *grafo aleatório*: um modelo caracterizado como uma rede aleatória equilibrada[¶]. Definimos como rede de Erdős-Rényi a rede construída de tal forma que as conexões entre os indivíduos é feita de forma aleatória, ou seja, todas as conexões são igualmente prováveis. Sua construção é feita a partir de um conjunto de P_1, P_2, \dots, P_n pontos e N ligações definidos inicialmente. A cada passo de tempo, as ligações são estabelecidas de forma aleatória até que o número total de ligações preestabelecidas seja alcançado, como mostrado na figura 11. Nesta configuração, teremos um conjunto de $\binom{n}{N}$ conjuntos de grafos igualmente possíveis com um número máximo de arestas possíveis igual a $M = \frac{N}{2}(N - 1)$, com N sendo o número de sítios da rede.

Sendo p a probabilidade de que um sítio esteja conectado, teremos um *ensemble*, $G_{N,p}$, que possui um valor de conectividade constante para o limite de $N \rightarrow \infty$ igual a:

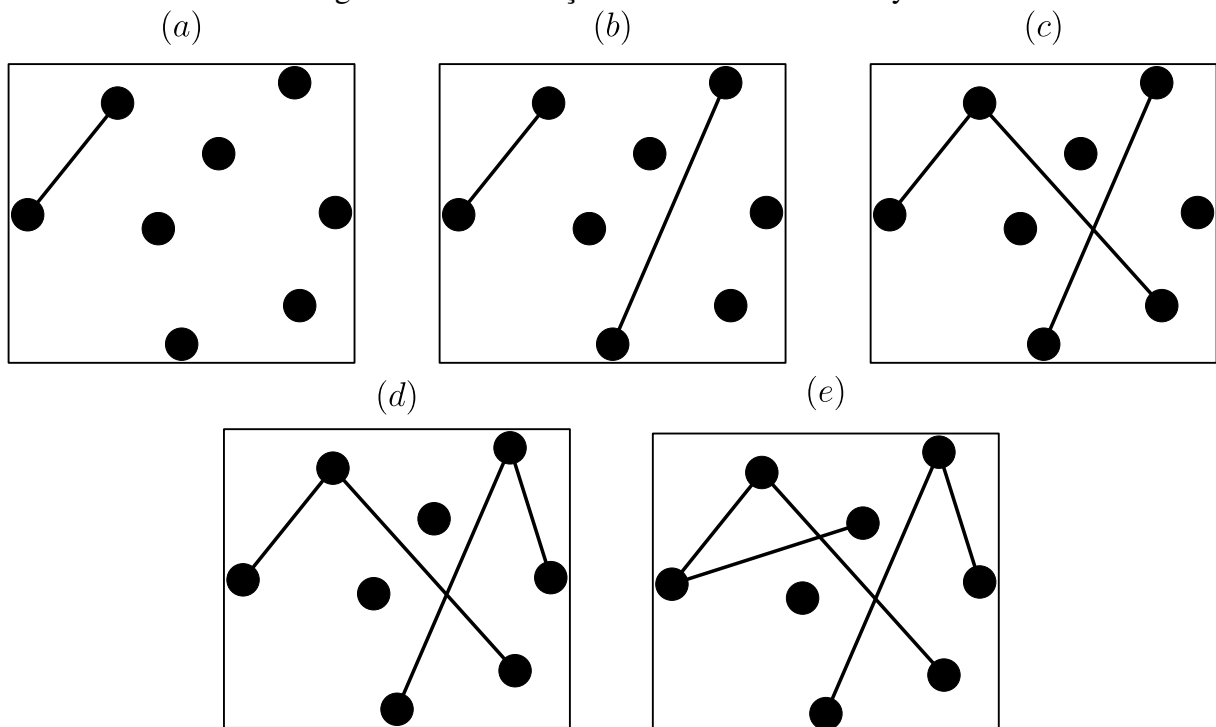
$$\langle k \rangle = p(N - 1) \simeq pN \quad (3.5)$$

Assim como a rede Solomonoff e Rapoport, a rede de Erdős-Rényi possui um valor crítico para a densidade de conectividade igual a 1.

O modelo de Erdős-Rényi foi revolucionário por ter introduzido a ideia de aleatoriedade nas conexões feitas entre vértices de um grafo qualquer. Este é o tratamento mais

[¶] Quando o número de nós é fixo e o número de ligações também. Além disso, as ligações são estabelecidas em pares e de maneira aleatória em uma rede aleatória não-equilibrada; o processo é semelhante, porém, à medida que acrescentamos as ligações, os vértices também são incluídos (DOROGOVTSEV; MENDES, 2013).

Figura 11 – Construção da rede de Erdős-Rényi



Fonte: Produção do autor. A figura mostra como acontece a evolução temporal da rede de Erdős-Rényi. Em cada instante de tempo, as ligações são estabelecidas entre os vértices da rede com igual probabilidade entre os vértices.

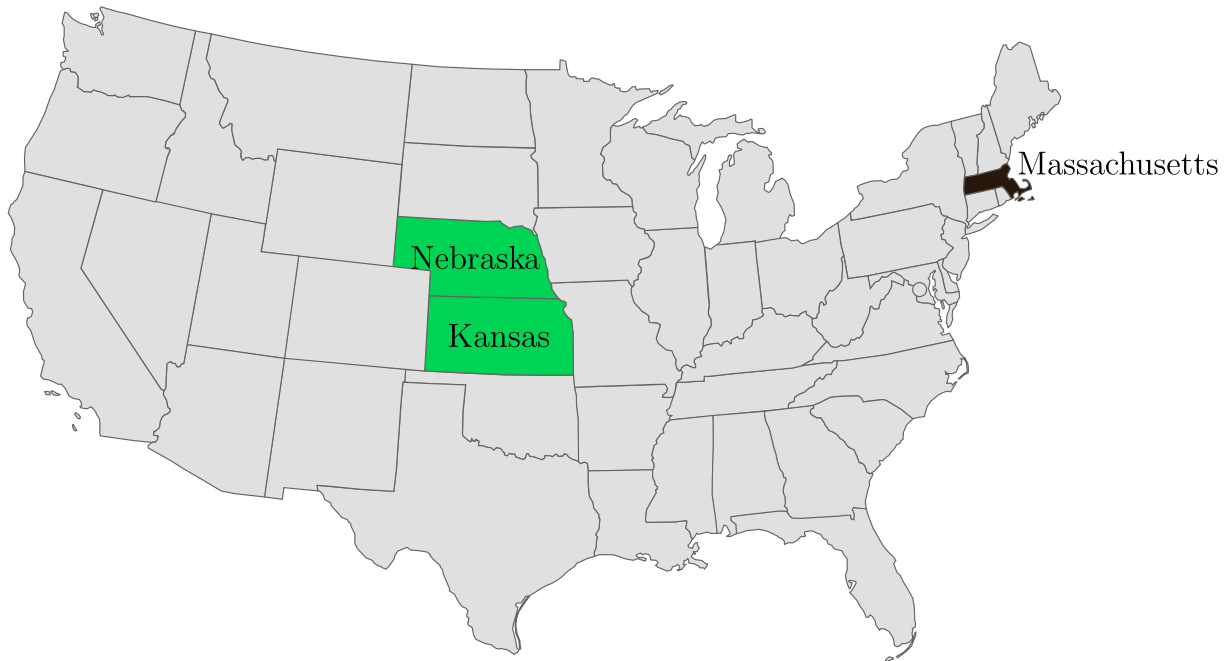
geral que se pode dar à eleição do sítio a ser ligado. Para um sistema suficientemente grande, veremos a formação de aglomerados de vértices formando sub-redes menores até o momento em que estes pequenos aglomerados formam uma rede com a dimensão do sistema. É possível observar que à medida que o sistema evolui com o tempo o número de sítios isolados diminui exponencialmente. Existe um limiar em que a estrutura sofre uma mudança drástica pois a rede se tornará totalmente conectada. Neste ponto, o número médio de conexões por sítio será um. Este fenômeno é nomeado de percolação (STAUFFER; AHARONY, 1994) ou emergência, em que há a formação de um gigantesco agregado que liga as extremidades da rede. Através dos modelos de redes aleatórias, foi possível uma maior compreensão de diversos sistemas, como as redes neurais, redes genéticas e vários outros sistemas auto-organizados. Porém, outros sistemas que não possuíam ligações aleatórias, como as redes sociais, precisavam ser explorados.

3.6 Mundo Pequeno ou *Small World*

Em 1967, o psicólogo Stanley Milgram (MILGRAM, 1967), estimulado pelo trabalho de Pool e Kochen (POOL; KOCHEN, 1978), realizou um experimento que contribuiu de forma significativa para o desenvolvimento do estudo das redes. Esse experimento ficou conhecido

como o experimento de mundo pequeno, ou *small world*. O objetivo de Milgram era quantificar o menor caminho médio, ou distância geodésica^{||}, entre dois atores em uma rede social. Até então, acreditava-se que essa distância seria da ordem de uma centena de ligações para que a mensagem chegasse ao seu destino, o que provocou preocupação por parte dos idealizadores do experimento, já que os pacotes poderiam ser perdidos no caminho e assim não serem entregues ao destino final. Em seguida descreveremos o experimento proposto por Milgram.

Figura 12 – Mapa dos Estados Unidos da América



Fonte: Wikipédia com modificação do autor. Mapa dos Estados Unidos da América com destaque para os Estados onde as correspondências do experimento de Milgram iniciaram (verde) e o Estado onde se localizava o destino final das correspondências.

Milgram enviou um total de 160 pacotes para diferentes pessoas escolhidas aleatoriamente na lista telefônica das cidades norte-americanas de Omaha, em Nebraska, e Wichita, em Kansas, figura 12. Todos os pacotes tinham como destino final um amigo de Milgram, que era corretor de ações em Massachusetts. Apesar de os pontos de partidas dos pacotes serem escolhidos aleatoriamente entre pessoas possivelmente não tão conectadas, o alvo era alguém que tinha uma conectividade média alta.

As instruções para cada participante que recebia os pacotes eram as seguintes:

1. O participante deveria adicionar seu nome e o nome da próxima pessoa que receberia a caixa em uma lista no pacote.

^{||} Menor número de ligações necessárias para chegar a um sítio da rede partindo de uma posição distinta (NEW-MAN, 2010).

2. De posse de um dos cartões existentes no interior do pacote, deveria preencher com seus dados e enviar para Harvard para que Milgram pudesse acompanhar o caminho em que os pacotes estivessem seguindo.
3. Se a pessoa que tivesse recebido o pacote conhecesse a pessoa para quem o pacote estava destinado, deveria enviá-lo diretamente a esta.
4. Se a pessoa que tivesse recebido o pacote não conhecesse a pessoa para quem o pacote estava destinado, deveria enviar a uma outra pessoa que conhecesse o alvo ou que facilitaria a entrega do pacote de alguma forma.

Para a surpresa de todos, o primeiro pacote chegou alguns dias depois de sair de Nebraska, passando apenas por duas ligações intermediárias. Ao todo, 42 pacotes de 160 conseguiram chegar ao destino final, alguns passando por até 12 intermediários. Porém, a média de ligações intermediárias necessárias para que os pacotes chegassem ao seu destino foi de 5,5 passos, aproximando-se para os tão famosos “seis graus de separação” ou *six degree*, figura 13.

Esse valor tão pequeno nos diz que não estamos tão longe uns dos outros como se pode imaginar. Pelo contrário, pertencemos a um mundo onde o número de ligações necessárias para ligar quaisquer duas pessoas é pequeno, dando origem ao termo mundo pequeno, *small world*. Na tabela 2, podemos ver alguns valores de conectividade, distância média e distância máxima entre dois sítios de suas respectivas redes.

Tabela 2 – Características de redes reais

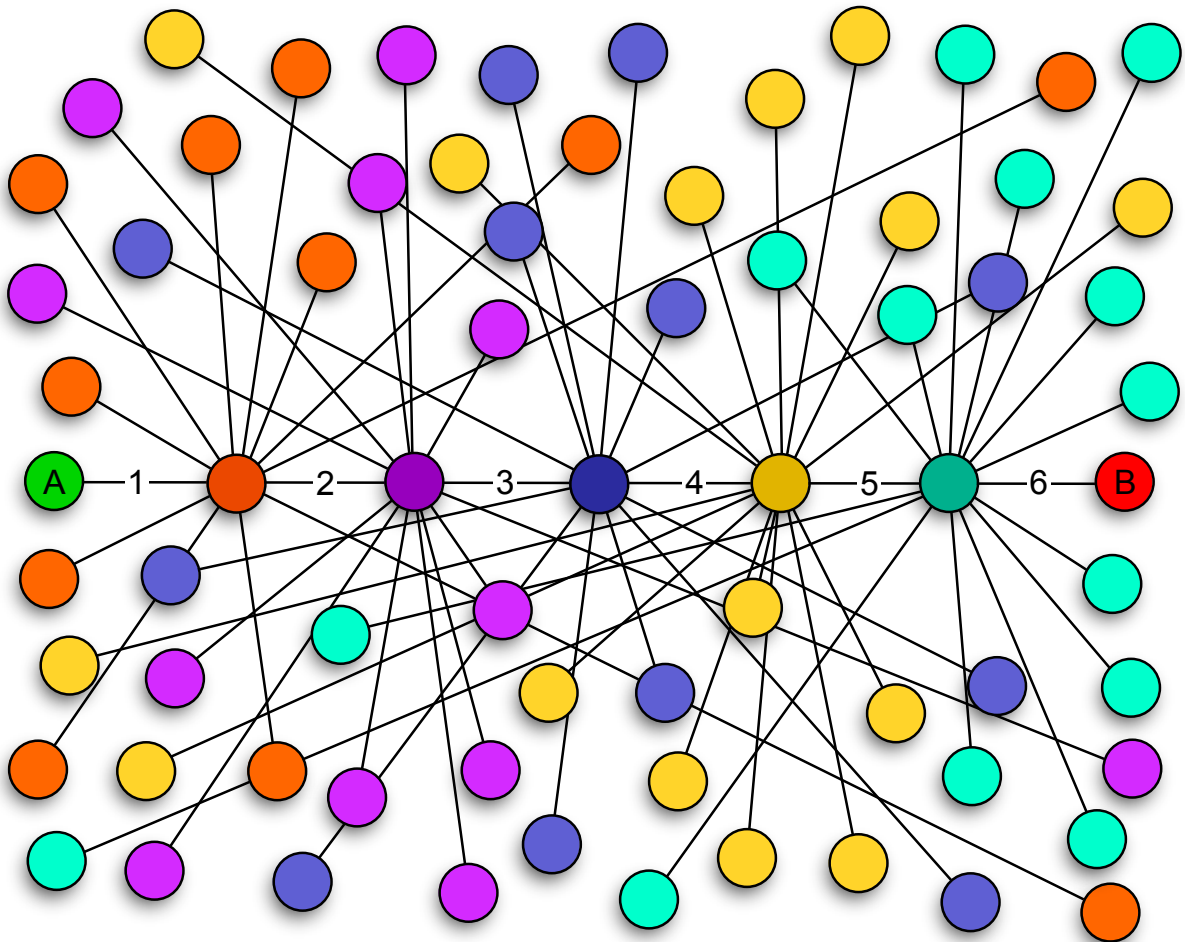
Rede	N	$\langle k \rangle$	$\langle d \rangle$	d_{max}
Internet	192244	6.34	6.98	26
WWW	325729	4.60	11.27	93
Celulares	36595	2.51	11.72	39
E-mail	57194	1.81	5.88	18

Fonte: Barabási (2012, p. 63). Aqui N é o número de nós que constitui a rede, $\langle k \rangle$ é a conectividade média do sistema, $\langle d \rangle$ é a distância média entre dois indivíduos e d_{max} , a distância máxima possível na rede.

Recentemente, um novo experimento de pequeno mundo foi realizado por Peter Sheridan Dodds et al (DODDS *et al.*, 2003). Este é considerado um experimento aperfeiçoado em termos de volume de participantes a priori. Neste trabalho, Dodds utilizou a rede de contatos de e-mails para a realização do experimento. No total, foram enviados mais de 60000 e-mails entre os participantes. Essas mensagens tinham como destino 18 pessoas localizadas em 13 países diferentes.

Apesar do número de participantes iniciais, a porcentagem de pessoas que repassaram

Figura 13 – Seis graus/ligações de separação



Fonte: Wikipédia. Exemplo de uma rede cujo número de passos que uma mensagem precisa para chegar ao seu destino, partindo de um vértice *A* até um vértice *B*, é 6. As demais distâncias entre os vértices possuem um valor máximo de 6 passos.

suas mensagens foi muito baixa comparada ao de Milgram. Newman (NEWMAN, 2010) aponta como causa da pouca participação do experimento o cansaço do público alvo em relação a mensagens recebidas que não foram solicitadas, sendo estas mensagens ignoradas pelos participantes. O número de mensagens que chegaram aos seus destinos neste experimento foi bem menor, 1.5%, quando comparado a de Milgram, 19%. Mesmo assim, o resultado encontrado por Dodds foi semelhante ao de Milgram. Para que uma mensagem eletrônica, com origem e destinos aleatórios, chegue ao destinatário são necessários poucos passos. Dodds encontrou um valor médio para o número de passos das mensagens igual a 4.05, um valor ainda menor que Milgram. Esse resultado comprova a ideia de que os indivíduos constituintes das cadeias de uma rede social estão ainda mais próximos se comparado às cadeias analisadas por Milgram.

É importante ressaltar que algumas cadeias não foram completadas, um aspecto que evidencia que nem sempre teremos circuitos direcionados fechados em rede social. Neste caso,

as mensagens deveriam retornar a um participante anterior até chegar em um vértice contido em um dos circuitos fechados onde a mensagem chegou ao seu destino. Logo, é necessário que os vértices de uma rede possuam interação entre vizinhos e vizinhos para que as informações que percorrem a rede não sejam perdidas.

Até então, temos o modelo de rede aleatória, que atribui ligações aleatórias entre os sítios da rede. O próximo passo é descrever um modelo de rede que se comporte como uma rede de mundo pequeno, ou seja, cuja probabilidade de conhecidos meus se conhecerem seja alta, como o que acontece em uma rede social, por exemplo.

3.7 Watts-Strogatz

Muitos sistemas dinâmicos de redes acopladas são usados para modelar redes neurais de controle genético. O modelo de rede que descreveremos nesta seção é utilizado para modelar outros sistemas que apresentam comportamento que está entre as redes regulares e as aleatórias, como redes biológicas, tecnológicas e sociais.

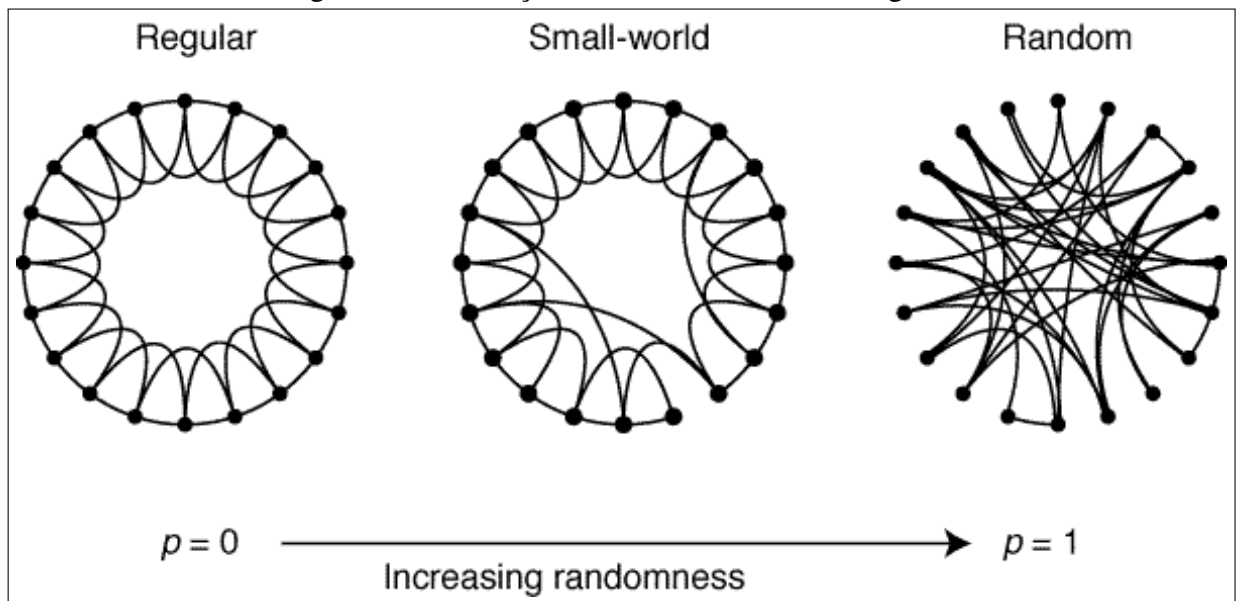
Em 1998, Duncan J. Watts e Steven H. Strogatz (WATTS; STROGATZ, 1998) anunciaram um novo modelo de rede que permitia descrever sistemas cujos limites são por um lado redes regulares e, por outro, redes aleatórias. Variando apenas um parâmetro, devemos observar esta transição no comportamento característico das redes. Este parâmetro p controla a realocação** das ligações existentes em uma rede inicialmente regular de tal forma que, no seu valor máximo, a rede muda todas as suas ligações, como mostra a figura 14. Este valor controla o grau de desordem adicionado ao sistema.

Definimos como uma rede de Watts-Strogatz aquela em que realocamos as ligações existentes a partir de uma rede inicialmente regular. Para construirmos esta rede partimos de uma rede regular com P_1, P_2, \dots, P_n pontos e N ligações. Em seguida, fazemos uma realocação (*rewired*) nas ligações existentes segundo uma probabilidade p , onde $p = 0$ significa uma rede regular e $p = 1$, uma rede completamente aleatória. Inicialmente é escolhida uma probabilidade p que determina a porcentagem de ligações que serão realocadas. Para cada ligação existente na rede sorteamos um número entre $[0,1]$ e, se este for menor que p , realocamos a ligação aleatoriamente.

Apesar da aparência na figura 14, a rede construída para um valor de $p = 1$ é a mesma do modelo de Erdős-Rényi, pois todas as ligações foram restabelecidas de forma aleatória. A

** Também conhecido como *rewired*.

Figura 14 – Transição do modelo de Watts-Strogatz



Fonte: Figura publicada em (Watts et al, 1998). O modelo parte de uma rede regular até uma rede totalmente aleatória (WATTS; STROGATZ, 1998). Neste caso a rede regular possui interação com os primeiros e segundos vizinhos.

grande vantagem é que este modelo poderia descrever o fenômeno de mundo pequeno, pois observa-se o aparecimento de uma densidade de “triângulos” significativa na rede, para um valor de coeficiente de reorganização das ligações entre 0 e 1.

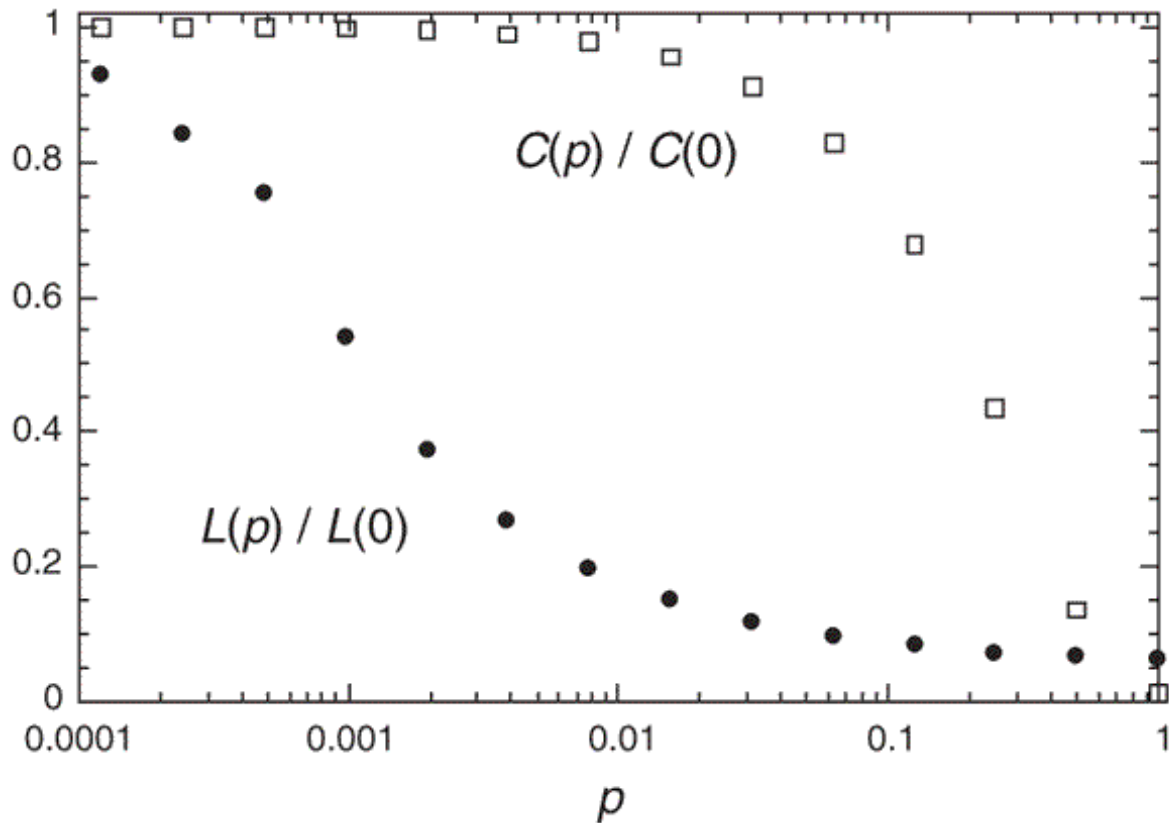
As mudanças demonstradas por Watts et al em seu trabalho foram observadas não apenas para um tipo de rede regular mas para vários modelos iniciais, porém os resultados obtidos foram semelhantes.

Sobre os resultados obtidos por Watts e Strogatz (WATTS; STROGATZ, 1998), representados na figura 15, podemos ver que é possível a construção de uma rede intermediária entre a regular e a aleatória, tal que as propriedades de transporte da rede sejam maximizadas, ou seja, teremos um caminho mínimo pequeno, possibilitando que a informação consiga alcançar o seu destino final. Na figura 15, os valores estão normalizados pelo valor do menor caminho médio e coeficiente de agregação para o caso de $p = 0$, quando nenhuma ligação da rede regular foi mudada.

Watts et al concluíram que o fenômeno de mundo pequeno não é meramente um fato curioso das redes sociais, nem um modelo idealizado, mas um comportamento genérico para um grande número de redes encontradas na natureza (WATTS; STROGATZ, 1998).

†† Uma espécie de nematódeo da família Rhabditidae que mede cerca de 1 milímetro de comprimento e vive em ambientes temperados. Tornou-se um importante modelo para o estudo da biologia, especialmente a biologia do desenvolvimento, desde a década de 1970 (WOOD, 1988).

Figura 15 – Caminho médio e coeficiente de agregação normalizados



Fonte: Gráfico publicado em (Watts et al, 1998). O gráfico da figura mostra os valores de caminho médio $L(p)$, normalizado por $L(p = 0)$, entre os vértices da rede e o coeficiente de agregação $C(p)$, normalizado por $C(p = 0)$, em função do parâmetro de realocação das ligações existentes. Os valores relativos a ($p = 0$) representam o estágio em que a rede ainda é regular (WATTS; STROGATZ, 1998).

Tabela 3 – Valores de centralidade de redes reais

Tipos de redes	L_{real}	$L_{aleatório}$	C_{real}	$C_{aleatório}$
Redes de atores em filme	3.65	2.99	0.79	0.00027
Rede elétrica	18.7	12.4	0.080	0.005
Rede de <i>C. elegans</i> ^{††}	2.64	2.25	0.28	0.05

Fonte: Tabela publicada em (Watts et al, 1998). A tabela contém dados reais e simulados para uma rede aleatória dos valores de distância entre dois vértices e coeficiente de agregação. Os valores apresentados identificam as redes como não-aleatórias e nem regulares, mas como redes de pequeno mundo entre os dois extremos.

Com este modelo de rede, também foi possível estudar a propagação de uma doença em pessoas pertencentes a uma determinada rede dependendo de um parâmetro r , onde r é a probabilidade de um vértice infectar um vizinho, para valores de p , que é a porcentagem de ligações realocadas, variando de 0 a 1. O valor crítico da probabilidade de infecção r_c , quando metade da população é infectada, decresce quando o valor de p aumenta. Assim também o tempo necessário para uma infecção máxima $T(p)$ decresce quando p aumenta. Porém, a forma como $T(p)$ decresce é semelhante a de $L(p)$, comprovando a dependência entre estes valores.

3.8 Redes de Kleinberg

Nesse tipo de rede, denominada pelo autor (KLEINBERG, 2000), as ligações são acrescentadas com uma probabilidade que depende das distâncias entre os sítios i e j aos quais se pretende conectar. Assim, a probabilidade de um sítio i estar ligado a um sítio j , sendo estes separados por uma distância $r_{i,j}$, será dada por:

$$P(r_{i,j}) \sim r^{-\alpha} \quad (3.6)$$

Para a construção da rede utilizamos um procedimento semelhante a de Li et al (LI *et al.*, 2013) conforme descrito abaixo.

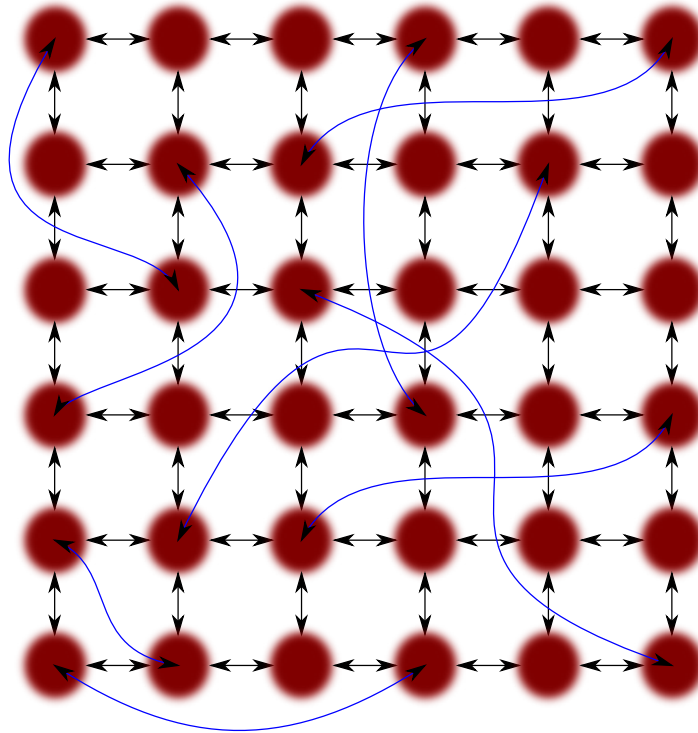
1. Cria-se uma rede de dimensão d com N vértices, tal que cada vértice está ligado a $2d$ vizinhos.
2. Escolhemos aleatoriamente um vértice i dos N vértices para receber uma ligação de longo alcance e geramos o tamanho da ligação r_{ij} a ser estabelecida de acordo com a equação 3.6.
3. Escolhemos o vértice j que receberá a ligação dentro do conjunto de vértices possíveis para o determinado tamanho de ligação r_{ij} .
4. Repetimos o processo até que o número de ligações de longo alcance chegue ao pretendido.

A figura 16 mostra a construção da rede em um determinado tempo.

Para a construção das redes de Kleinberg é necessário que o tamanho das ligações sorteadas obedeçam a uma distribuição em lei de potência. Clauset et al. (CLAUSET *et al.*, 2009) mostraram que o menor valor escolhido para ser sorteado interfere diretamente no número de realizações necessárias a se fazer para conseguir tal expoente. O método utilizado para a geração de números aleatórios seguindo uma lei de potência foi o de Press et al (FLANNERY *et al.*, 1992). Clauset et al (CLAUSET *et al.*, 2009) mostraram em seu trabalho que quanto maior for o menor valor possível dos números presentes na distribuição desejada, menor será o erro na distribuição comparada ao seu valor analítico. Logo, os valores limites a serem sorteados de tamanho de ligação devem ser pensados no intervalo entre 5 e $L - 1$, onde L é o tamanho do sistema para o caso 1D e o tamanho do lado da rede para o caso 2D.

Se a probabilidade de uma ligação entre os sítios i e j é $P(r_{ij}) \propto r_{ij}^{-\alpha}$, podemos normalizar esta probabilidade através de um fator somatório que pode ser aproximado por uma

Figura 16 – Construção de uma rede Kleinberg



Fonte: Produção do autor. A figura representa um instante de tempo em que algumas ligações de longo alcance já foram estabelecidas de acordo com uma probabilidade de criação $P(r_{ij}) \sim r_{ij}^{-\alpha}$.

integral, como segue:

$$\sum_{i \neq j} r_{ij}^{-\alpha} \sim \int_1^L x^{-\alpha} x^{d-1} dx = \begin{cases} L^{d-\alpha}, & \text{se } \alpha < d, \quad (i) \\ \ln(L), & \text{se } \alpha = d, \quad (ii) \\ (\alpha - d)^{-1}, & \text{se } \alpha > d. \quad (iii). \end{cases} \quad (3.7)$$

Para o caso (i), consideremos a seguinte situação. Imagine uma região circular de raio R , com $R = L^\delta$, onde no centro desta região localiza-se o vértice alvo a . Sabendo que a probabilidade de um vértice qualquer i se ligar a um vértice j é dada por

$$P(r_{ij}) = r_{ij}^{-\alpha}. \quad (3.8)$$

Portanto, a probabilidade de um vértice conectar um dos vértices contidos na região considerada pode ser expressa na seguinte forma:

$$\begin{aligned} P(r_{i,j} | r_{a,j} < R) &\leq \frac{R^d}{L^{d-\alpha}} \\ &\leq L^{\delta d - d + \alpha}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

No limite de uma rede muito grande, veremos que qualquer caminho entre uma fonte f e um alvo a deverá ter, pelo menos, uma ligação de longo alcance apontando para dentro desta região

circular. Além disso, o valor esperado para o número de passos necessários para a informação ser entregue é limitado a ser, no mínimo, igual a R , pela possibilidade de conexão com algum dos nós nas proximidades da borda da região circular. Sendo, portanto, necessário que a informação percorra toda a distância R se não houver nenhuma ligação de longo alcance que possa conduzir a informação.

A probabilidade de encontrar um nó com estas características em R passos é $RL^{\delta d-d+\alpha}$, onde $\lim_{L \rightarrow \infty} RL^{\delta d-d+\alpha} = 0$ que implica na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} 0 < RL^{\delta d-d+\alpha} < 1 \\ 0 < L^{\delta(d+1)-d+\alpha} < 1. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Logo,

$$\delta(d+1) - d + \alpha < 0 \quad \Rightarrow \quad \delta < \frac{(d-\alpha)}{1+d}. \quad (3.11)$$

Assim, o menor valor esperado do número de passos que uma informação (pacote) precisa para atingir o seu destino final não pode ser menor que $L^{(d-\alpha)/(1+d)}$ para o caso (i).

Considerando agora o caso (iii), a probabilidade de termos uma ligação maior que L^γ ($0 < \gamma < 1$) é determinada pela seguinte relação:

$$\int_{L^\gamma}^{\infty} \frac{x^{-(\alpha-d+1)}}{\alpha-d} dx \sim L^{\gamma(d-\alpha)}. \quad (3.12)$$

Portanto, a probabilidade de que a informação dê um passo maior do que L^γ , em um número de L^β com ($0 < \beta < 1$) passos, é menor do que $L^\beta L^{\gamma(d-\alpha)}$, onde

$$\lim_{L \rightarrow \infty} L^\beta L^{\gamma(d-\alpha)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x \rangle \leq L^{\beta+\gamma} \quad (3.13)$$

Assim, a distância que separa os vértices fonte e alvo é proporcional a L , o que resulta em

$$\beta + \gamma = 1. \quad (3.14)$$

A probabilidade de existirem conexões com um tamanho superior a L^γ torna-se muito pequena quando $[\beta + \gamma(d-\alpha) < 0]$, implicando em

$$\beta < \frac{(\alpha-d)}{\alpha-d+1} \quad \Rightarrow \quad \langle t \rangle = L^\beta \sim L^{(\alpha-d)/(\alpha-d+1)} \quad (3.15)$$

onde $\langle t \rangle$ representa o tempo esperado de envio de uma informação.

Finalmente, analisando o caso (II), podemos imaginar que o alvo a está rodeado de m regiões circulares de raio $e^{m-1} < R < e, m = 1, 2, 3, \dots$. Se o vértice u que possui a informação

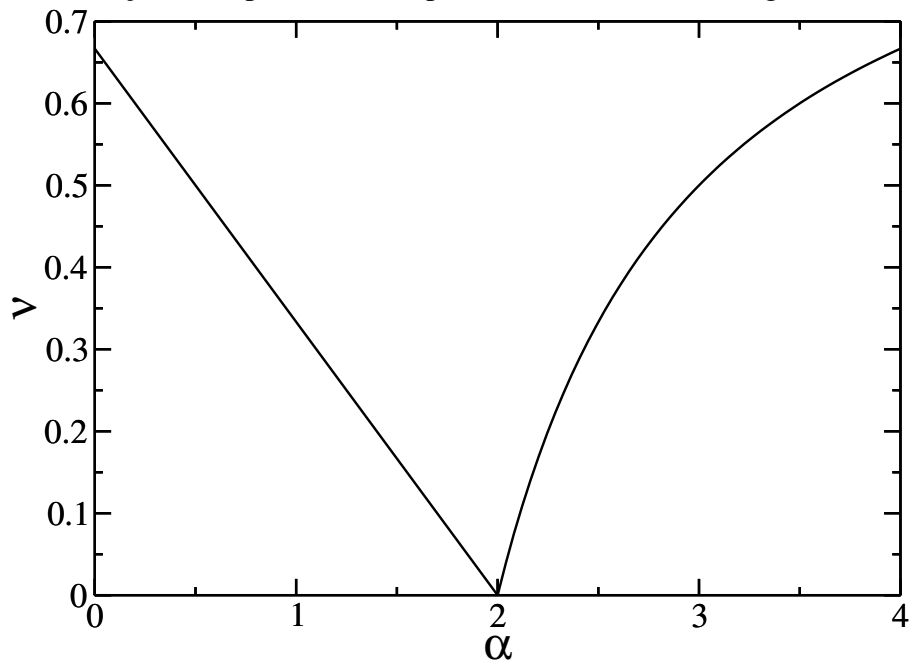
estiver na região m , a probabilidade de que u possua uma conexão com algum vértice v na região $(m - 1)$ é dada por

$$P(r_{i,j}) \sim \int_{e^{m-1}}^{e^m} \frac{y^{-1}}{\ln L} dy = \frac{1}{\ln L}. \quad (3.16)$$

A probabilidade de se alcançar a próxima região $(m - 1)$ em mais do que x passos é $p(x) = (1 - 1/\ln L)^x$. Assim, $\langle t \rangle \leq O((\ln L)^2)$.

Podemos concluir que o tempo médio $\langle t \rangle$ que uma informação leva de um vértice fonte f para um vértice alvo a possui limites na forma L^ν , como podemos observar no gráfico 17.

Figura 17 – Variação do expoente do tempo de envio de uma mensagem em relação a α



Fonte: Produção do autor. Comportamento do expoente ν em função do parâmetro α . Assim como no resultado mostrado por Kleinberg (KLEINBERG, 2000), o valor mínimo do expoente tende ao valor da dimensão do sistema, neste caso $d = 2$.

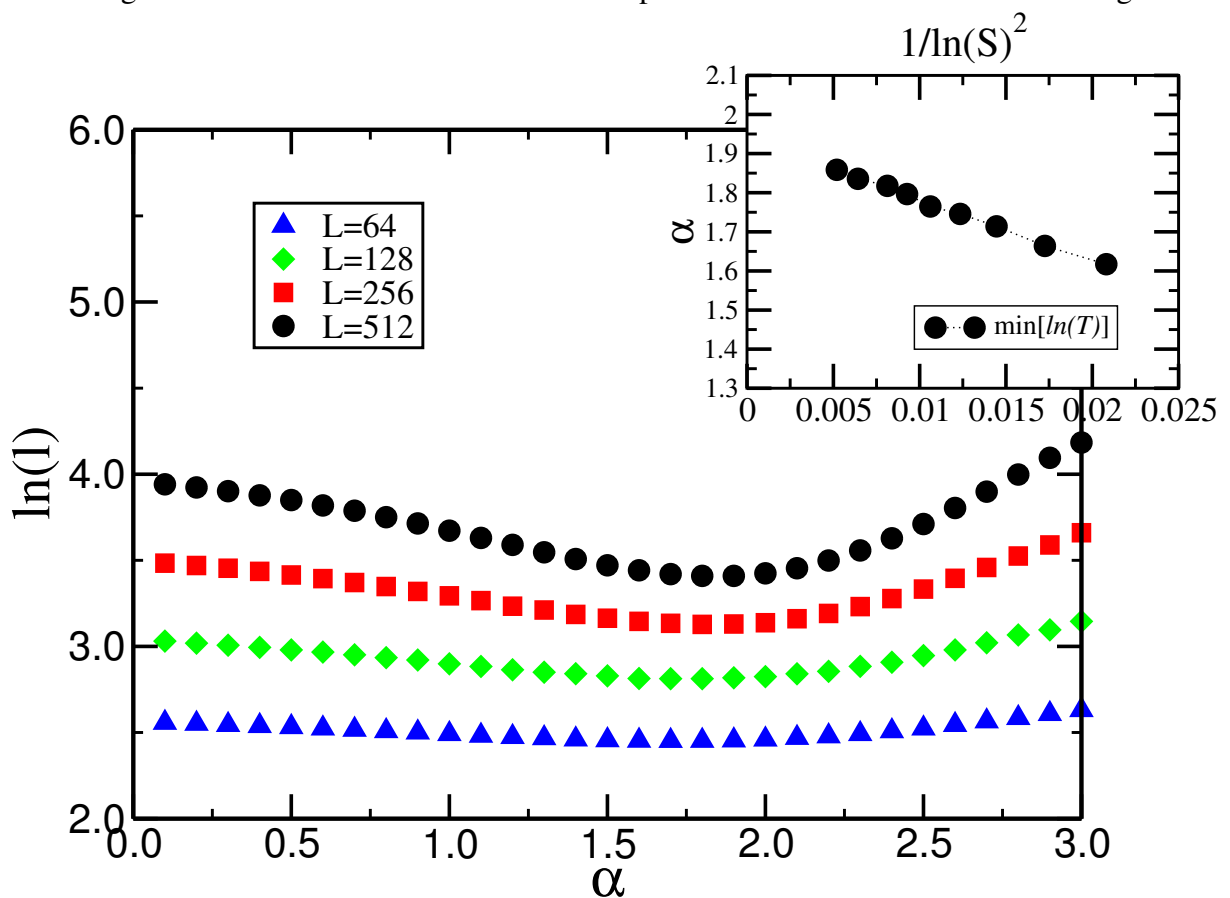
A partir do gráfico 18, podemos constatar que, quando aumentamos o tamanho do sistema, o valor mínimo médio do tempo de envio de uma mensagem tende à dimensão do sistema, neste caso, $d = 2$.

As ligações de longo alcance podem ser entendidas como sendo a medida da probabilidade de vizinhos dos vizinhos mais próximos estarem conectados. Quando o parâmetro α possui um valor muito pequeno, a rede formada possui características de um grafo aleatório, pois as ligações de longo alcance são estabelecidas com probabilidades iguais. Já quando α é

grande, as ligações de longo alcance não fazem mais tanta diferença ao caminho seguido pelos pacotes, pois estas são bem mais prováveis de existirem entre sítios próximos.

Neste ponto podemos pensar que quando $\alpha = 0$, ou bem próximo, estabelece-se uma rede com ótima navegação. Em seu artigo, Kleinberg (KLEINBERG, 2000) mostrou que existe um valor de α tal que a menor distância média entre dois sítios de uma rede é mínima. Este valor tende à dimensão d do sistema quanto maior for o sistema, fato que foi comprovado experimentalmente através dos resultados mostrados no gráfico 18, obtidos para uma rede bidimensional.

Figura 18 – Caminho mínimo médio e tempo de envio em uma rede de Kleinberg

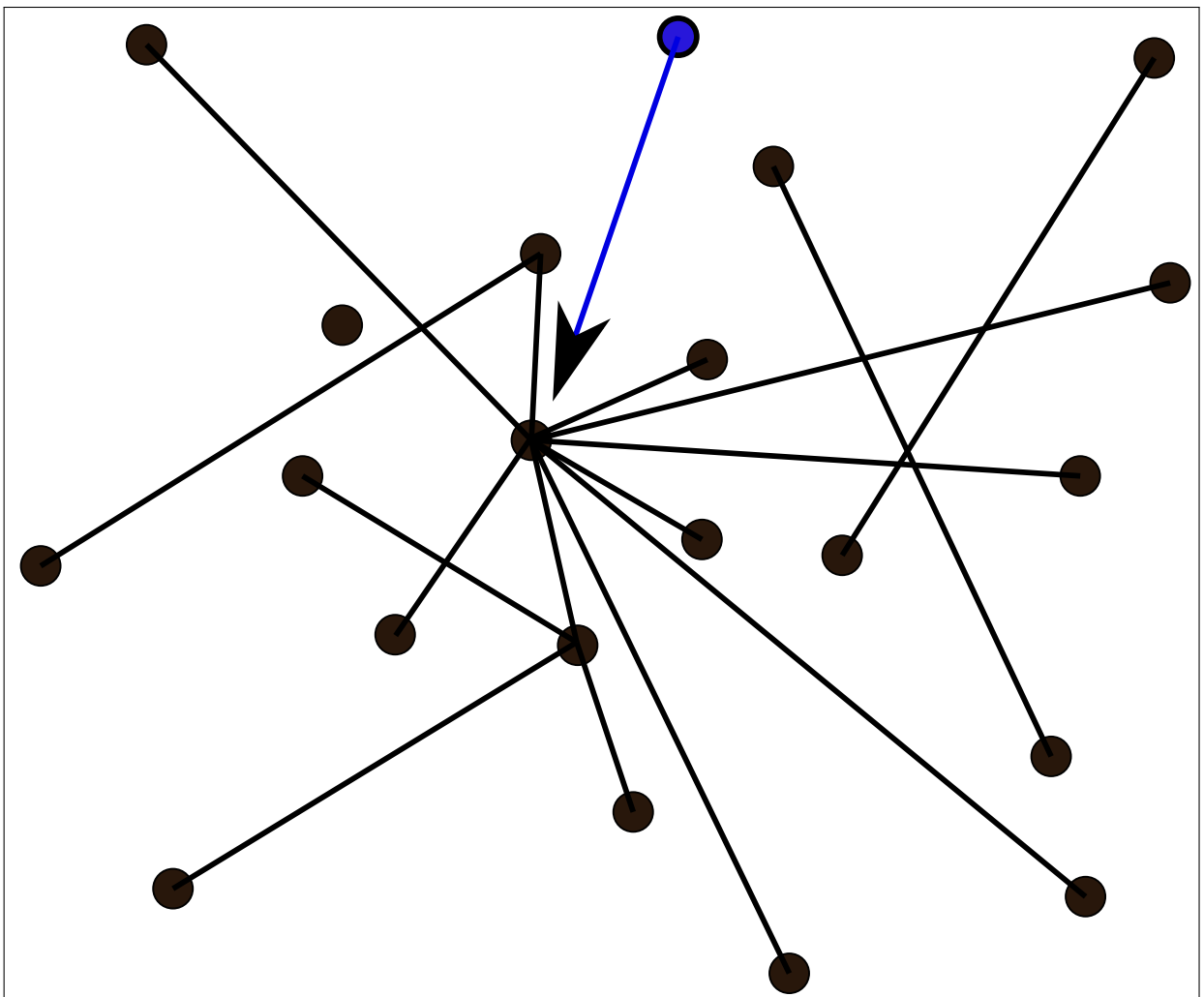


Fonte: Produção do autor. Tempo médio para um pacote chegar ao destino considerando as ligações sempre livres para transporte entre os vizinhos. Os diferentes símbolos correspondem a diferentes tamanhos de rede. No gráfico pequeno à direita, podemos observar que, à medida que aumentamos o tamanho do sistema, o valor de α , em que o tempo de entrega dos pacotes é minimizado, tende à dimensão do sistema $d = 2$.

3.9 Barabási-Albert

A internet é uma das redes que mais cresce em número de sites e usuários no Brasil e no mundo. Segundo pesquisa feita pela empresa eMarketer, no final do ano de 2014, já eram 107,7 milhões de brasileiros conectados à rede (BBC, 2014). Em pesquisa realizada pela União Internacional de Telecomunicações (UIT), em 2014, o Brasil ocupa a 65ª posição, enquanto a Dinamarca aparece como país mais conectado (AFP, 2014). Nesta rede, os novos vértices adicionados não são conectados à rede de forma aleatória. O mais provável é que estes novos vértices se liguem a vértices bem conectados com a rede para facilitar a sua comunicação para outros vértices da rede. Neste contexto, surge o modelo denominado de *Barabási-Albert* ilustrado pela figura 19.

Figura 19 – Evolução do modelo de Barabási-Albert



Fonte: Idealização do modelo de rede de Barabási-Albert. Podemos ver a evolução de um passo de tempo onde o próximo vértice (azul) a ser acrescentado à rede prefere se ligar a vértices com um número maior de conexões.

O modelo de Barabási-Albert (BA) pode ser encarado como uma continuação do modelo de Erdős-Rényi, com o acréscimo da ligação a vértices mais conectados. O modelo BA é moldado a partir de conjunto inicial de vértices m_0 onde, em cada instante de tempo t , acrescentamos um vértice que se liga a outros m vértices dando preferência aos vértices que possuem um maior número de ligações, os chamados *hubbles*. Ao final da simulação, o sistema deve conter $(m_0 + t)$ sítios com (mt) ligações (ALBERT; BARABÁSI, 2002). A interpretação deste sistema é bem simples e traduz muitos tipos de redes, como a *World Wide Web* (WWW), redes de citações, redes sociais e muitas outras. No caso de uma rede social, quando um novo membro vai associar-se à rede, existe uma grande probabilidade deste ter uma ligação com os membros mais conhecidos desta rede. O mesmo acontece no caso de uma rede de citações, em que os mais citados possuem uma probabilidade maior de receberem ainda mais citações.

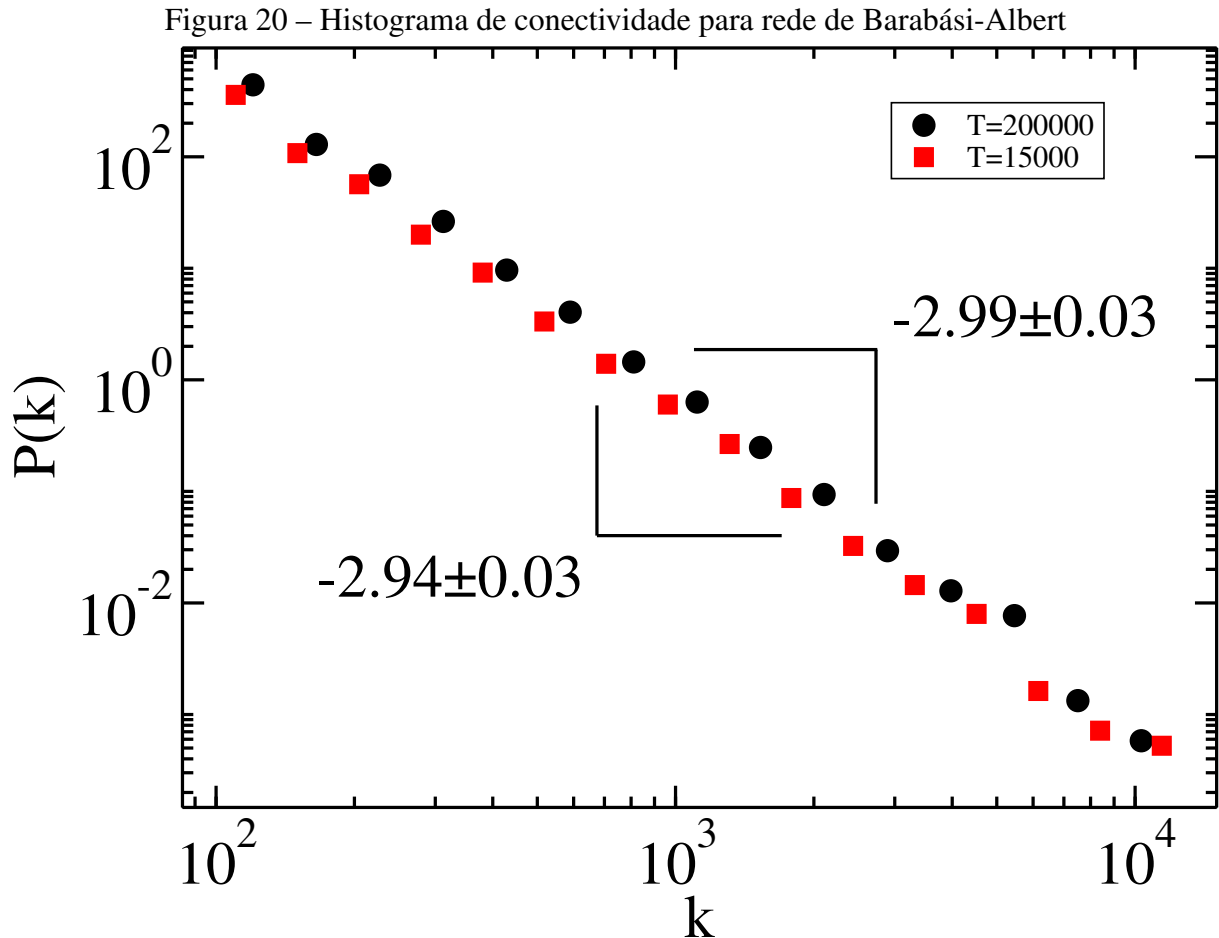
A probabilidade de um vértice receber ligações é proporcional à sua conectividade, ou seja, devemos ter $P(k) \propto k^\gamma$ com γ real. Nas simulações realizadas, encontramos valores aproximados de $\gamma = -2.94 \pm 0.03$ e $\gamma = -2.99 \pm 0.03$ muito próximos do publicado por Barabási-Albert (ALBERT; BARABÁSI, 2002).

3.10 Modelo discreto e espacial de fila (SPQM)

Os estudos relacionados a tráfego foram iniciados há muitos anos atrás, possuindo uma grande quantidade de modelos criados para o entendimento dos fenômenos relacionados. Porém, há alguns modelos que se destacam pelo sucesso na representação de fenômenos ligados à presença de congestionamento. Primeiramente, podemos destacar os modelos que descrevem o tráfego nas redes de computadores, os ditos Modelos de internet ou *Internet Model(IM)* (OHIRA; SAWATARI, 1998; ECHENIQUE *et al.*, 2005; SREENIVASAN *et al.*, 2007; De Martino *et al.*, 2009; ASZTALOS *et al.*, 2012). Nesses modelos, pacotes de informações eram transmitidos de um ponto a outro da rede, através de suítes de internet que possuíam um limite na quantidade de informação que poderia ser transmitida em cada instante da simulação. Porém, a quantidade de informação que se acumulava nos computadores era ilimitada^{‡‡}.

Em seguida, o modelo que tratava da dinâmica interna dos sítios, conhecido como *Point Queue Model (PQM)*(KUWAHARA; AKAMATSU, 1997; KUWAHARA; AKAMATSU, 2001; NIE; ZHANG, 2005), foi bastante explorado e obteve sucesso ao considerar que, antes

^{‡‡} Não havia preocupação em relação à limitação de informação que poderia chegar nos *switches*. Assim, todos os componentes da rede apenas enviavam todas as informações para os suítes, que gerenciavam a transmissão, ou não, das informações.



Fonte: Produção do autor. Distribuição de probabilidades em função da conectividade k , para o modelo de Rede BA com $m_0 = m = 5$ e tempo de simulação $t = 150000$ e $t = 200000$, como indicado no gráfico.

da transmissão de um ponto a outro da rede, os caminhantes formam filas de prioridade, ou seja, quem chega primeiro a um sítio da rede sairá primeiro para o próximo em direção ao seu destino. O modelo tratado nesta sessão foi introduzido por Cesak e nomeado de *Spatial Point Queue Model (SPQM)* (ÇOLAK *et al.*, 2013). Este modelo foi inspirado no já conhecido *PQM*, onde os caminhantes da rede formam filas nos nós da rede a fim de serem transferidos para os nós vizinhos. Assim como o nome sugere, existem dois componentes adicionais em relação ao modelo mais clássico de transporte, (*IM*), que são: o limite de carros comportados pelos sítios (V) e o tempo mínimo (τ) que um carro deve esperar para sair deste. Aqui, o valor de τ representa o tempo de espera que os carros devem esperar antes de serem transmitidos. Outra interpretação seria a quantidade de “saltos” que serão necessários realizar até a extremidade da rua, onde os carros terão permissão de passar para o próximo sítio durante a sua trajetória, como mostra a figura 21.

A rede é composta por ruas que se conectam através dos cruzamentos, como mostra a figura 21. Cada rua possui seis ligações a outras ruas vizinhas, três de um lado e mais três no

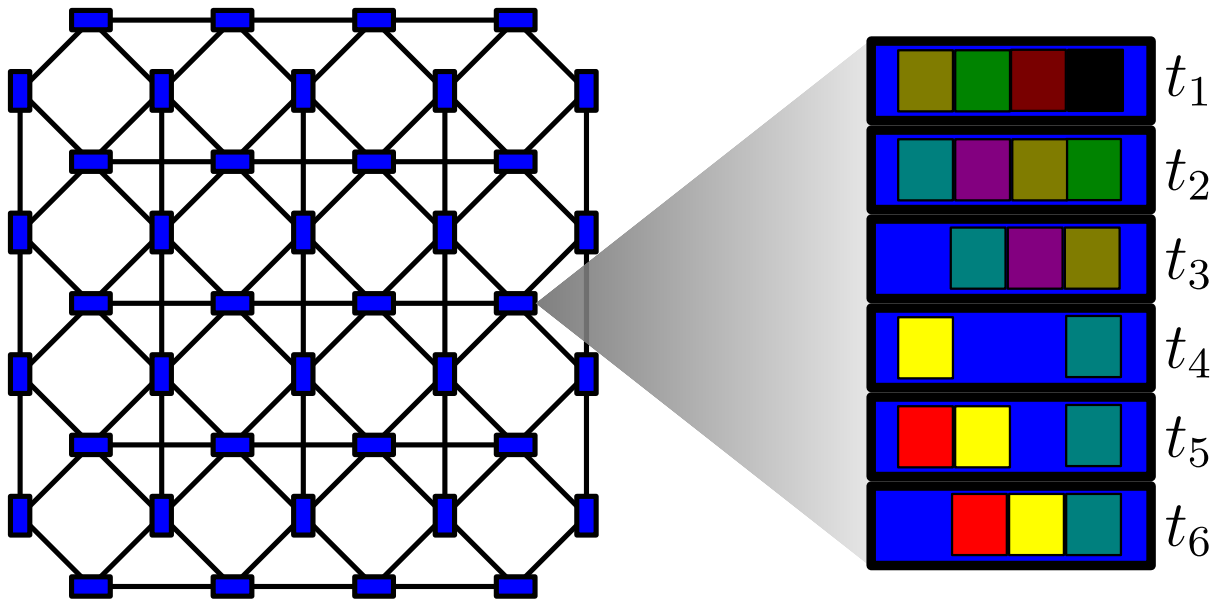


Figura 21 – Fonte: Produção do autor. A figura mostra a topologia da rede estudada. A rede é constituída pelas ruas de uma cidade regular bidimensional onde as ruas formam quadras por toda a cidade. Os carros são criados em origens e destinos aleatórios e seguem o menor caminho entre estes dois pontos segundo a distância *Manhattan*. Em cada rua os carros obedecem a uma fila de entrega que prioriza a entrega dos carros que chegaram primeiro na rua. Estas ruas são limitadas, impedindo a entrada de novos carros quando sua capacidade de comportar carros alcançar o seu limite. As diferentes cores representam quantidades diferentes de carros que chegam a cada instante.

lado com direção oposta. Os carros são criados com uma determinada taxa fixa, R (*carros/passo de tempo*), com origem e destino previamente determinados de maneira aleatória. Quando um carro chega ao seu destino, ele é removido da rede.

A implementação das filas nas ruas altera a dinâmica do problema pois determina a sequência de carros a serem entregues. Logo, os carros que chegam primeiro em uma determinada rua terão prioridade para sair dela, assim como ocorre em situações reais em vias da cidade. Porém estas ruas possuem um limite V para comportar carros. Se um carro for criado em uma origem cuja rua já esteja completamente cheia, este novo carro deve ser realocado em outra rua. Além disso, as ruas estabelecem um tempo mínimo τ que um carro deve esperar para seguir para a próxima rua em direção ao seu destino, e este será o nosso parâmetro de controle.

O valor de τ representa um controle local das ruas na dinâmica do modelo, uma vez que os carros só poderão seguir viagem quando tiverem “permissão” do controlador (rua) para tal. Esse valor pode ser interpretado de duas maneiras em uma situação real. Primeiro, pode ser a velocidade máxima permitida em uma rua, já que, para percorrer uma rua com comprimento l , um carro passará l/v_r (passos de tempo) para continuar sua rota, pelo menos. Também podemos

associar este valor à quantidade de sinais que uma via possui. A presença destes sinais de trânsito controlaria a quantidade de carros que pode deixar uma determinada rua, depois de passar por um certo número de semáforos, até chegar na extremidade da rua, oposta a de entrada.

Todos os carros, em suas respectivas rotas, percorrem o menor caminho entre a origem e seu destino segundo a distância *Manhattan* d_M . Essa distância é definida como a soma dos módulos das diferenças horizontal e vertical entre dois pontos em uma rede regular quadrada, como mostra a equação 3.17.

$$d_M = |x_O - x_D| + |y_O - y_D| \quad (3.17)$$

Em nosso caso, estes pontos serão determinados pela posição atual do carro na rede e o seu destino. Caso exista, na procura de um menor caminho, mais de uma rua possível a ser seguida, a escolha será feita de forma aleatória com igual probabilidade de escolha.

O volume V alocado para cada rua pode ser traduzido simplesmente como o comprimento que ela possui. Se mudarmos o número de carros que as ruas podem comportar, significa que estamos aumentando o comprimento das ruas analisadas. Esta é a limitação espacial do modelo. Já as filas que se formam nas ruas são formadas pelos carros que vão chegando provenientes de uma rua vizinha ou que tenham sido criados naquele instante naquela rua. Mesmo que um determinado carro não possua nenhum outro em sua frente na fila, este deve esperar um tempo mínimo τ para ir à próxima rua. Após percorrer a fila, e chegando na outra extremidade da via, ele passará para a próxima rua se a próxima possuir capacidade de comportá-lo; caso contrário, esperará o próximo passo de tempo ou o número de passos até que seja possível prosseguir. Há ainda um outro parâmetro do modelo que define a capacidade de uma rua entregar carros. A cada instante de tempo, uma rua só poderia entregar um número limitado de carros C . Porém, decidimos considerar uma cidade cujas ruas possuem capacidade ilimitada de entregar carros. Assim, se os carros que estão na via permaneceram um tempo mínimo τ , todos estes poderão seguir o seu caminho independente da quantidade que houver.

Para acompanhar a evolução do sistema usaremos um parâmetro de ordem que já foi abordado em trabalhos anteriores (ZHAO *et al.*, 2005; YAN *et al.*, 2006). Como discutido anteriormente, este parâmetro deve ser igual a zero em algum momento e diferente de zero em outro, caracterizando a existência de dois estados acessíveis ao sistema. Em seguida, mostramos a equação para o cálculo do parâmetro de ordem introduzido por Guimera e seus colaboradores

(GUIMERÀ *et al.*, 2002b):

$$\eta(\tau) = \lim_{t \rightarrow t_s} \frac{\langle \Delta W(\tau) \rangle}{R\Delta t} \quad (3.18)$$

com

$$\langle \Delta W \rangle = \frac{1}{N_{\Delta t}} \sum_{t=t_s}^T [W(t + \Delta t, \tau) - W(t, \tau)]. \quad (3.19)$$

$W(t)$ é o número de carros no sistema em um dado tempo t , e $N_{\Delta t}$ é o número de flutuações observadas, considerando um intervalo de tempo em que o sistema encontra-se em estado estacionário t_s até o fim da simulação T . Limitando o tempo de observação do sistema ao período em que este se encontra no estado estacionário, dividimos este intervalo de tempo em várias janelas de tamanho Δt e medimos a flutuação do sistema em relação ao número de carros em cada um destes intervalos, obtendo o valor médio $\langle \Delta W \rangle$. Para efeitos de sistematização, fixamos este intervalo de observação entre $I = [10\sqrt{T}, T]$, onde T é o tempo total da simulação.

Sendo $\langle \Delta W \rangle$ a flutuação média do número de carros trafegando na rede, o parâmetro de ordem η é definido como sendo o número médio de carros que não conseguem chegar ao seu destino em relação aos carros que foram criados. Logo, quando o sistema cria os carros e estes chegam aos destinos com a mesma taxa, o valor de η se mantém igual a zero. Por outro lado, quando a quantidade de carros na rede é maior que a quantidade suportada, o sistema tende a acumular carros, chegando ao limite de impossibilitar a locomoção destes, resultando em η diferente de zero.

Neste trabalho abordaremos duas perspectivas para este modelo. Na primeira, utilizaremos este modelo em um sistema “idealizado” em que há concorrência dos veículos nas ruas mesmo quando estes estão trafegando em sentidos opostos. Na segunda, não haverá esta concorrência e toda rua possuirá uma correspondente dual que representará o sentido do tráfego na direção contrária. Outra diferença será o fato de que na primeira abordagem os nós ou sítios terão conectividade igual a 6. Já na segunda, cada rua se conecta a apenas 3 outras.

Tendo discutido os modelos de redes e possíveis abordagens dinâmicas para modelos aplicados nestas redes, nos próximos capítulos, abordaremos aplicações destes modelos de transporte em redes discutidas aqui.

4 NAVEGAÇÃO DESCENTRALIZADA DE MÚLTIPLOS PACOTES

O problema de navegação consiste em enviar uma mensagem, ou um pacote de informação, de uma dada origem para um nó destino de uma rede (NEWMAN, 2010) (BARTHÉLEMY, 2011). Levando em conta esta perspectiva, as redes de comunicação, a internet e a rede de ruas de uma cidade para transporte público, todas essas compartilham de um mesmo objetivo básico: entregar os pacotes desejados o mais rápido possível aos seus destinos, enquanto mantém a sua funcionalidade. Nesse ponto de vista, em 1967, o experimento de *mundo-pequeno* de Milgram se torna um exemplo de paradigma (MILGRAM, 1967). A abordagem do algoritmo do experimento realizado posteriormente por Kleinberg (KLEINBERG, 2000) não só mostrou que uma navegação guiada apenas por algoritmos descentralizados é capaz de realizar a tarefa, mas também que a dimensão subjacente da rede espacialmente incorporada pode afetar drasticamente o tempo de entrega previsto. No presente trabalho, investigamos o impacto da geografia subjacente da rede de transporte na navegação de múltiplos pacotes onde existe um limite de carga para os nós da rede.

Em muitas redes de transporte de interesse em ciência e tecnologia, o transporte eficiente de pacotes de informações, energia ou mesmo pessoas é pensado em termos de evitar congestionamentos em vez de minimizar o tempo de entrega esperado (ARENAS *et al.*, 2001) (GUIMERA *et al.*, 2002a)(GUIMERA *et al.*, 2002b). Por exemplo, ao usar aplicativos colaborativos de mapas para se locomover em uma cidade, os motoristas normalmente sacrificam o tempo de deslocamento, adotando um desvio mais longo para evitar engarrafamentos. Considere agora que, com a adição de novos atalhos, nosso objetivo seja planejar ou melhorar uma rede de transporte existente. Como mostraremos, considerar a estrutura subjacente a tal rede, ao mesmo tempo que agrega atalhos, desempenha um papel importante na forma como ocorre o transporte, permitindo o aumento do número de pacotes que trafegam na rede, sem perder sua funcionalidade.

A estrutura de redes espacialmente incorporadas faz uso de uma rede regular de dimensão d com conexões de longo alcance adicionadas aleatoriamente a ela. Geralmente, ela considera a adição de conexões de longo alcance entre dois nós dados i e j com uma probabilidade decaindo com sua distância de rede r_{ij} , $P(r_{ij}) \sim r_{ij}^{-\alpha}$ (KLEINBERG, 2000). A interação entre a estrutura regular subjacente e uma construção aleatória de longo alcance é uma receita bem conhecida para imitar o chamado fenômeno de *mundo-pequeno* (WATTS; STROGATZ, 1998) quando a distância típica ℓ entre dois pares de nós cresce lentamente com

o número de nós N da rede, $\ell \sim \log N$ (BARTHÉLÉMY; AMARAL, 1999). Porém, para o caso de redes espacialmente embutidas, isso é verdade apenas para $\alpha \leq d$ (KOSMIDIS *et al.*, 2008)(CHEN *et al.*, 2016). Notoriamente, a propriedade de mundo-pequeno pode ser estabelecida por um algoritmo descentralizado apenas quando $\alpha = d$ (KLEINBERG, 2000) (CARMI *et al.*, 2009)(CARTOZO; RIOS, 2009) (HU *et al.*, 2011a)(HU *et al.*, 2011b), um resultado válido para fractais (ROBERSON; AVRAHAM, 2006)(ROZENFELD *et al.*, 2010), para fenômenos de transporte que obedecem às leis de conservação locais (OLIVEIRA *et al.*, 2014)(FILHO *et al.*, 2016), regras de percolação não locais (REIS *et al.*, 2012) e redes cerebrais (GALLOS *et al.*, 2012b)(GALLOS *et al.*, 2012a). Além disso, quando uma restrição de custo é imposta à adição de atalhos à rede subjacente, verificou-se que as melhores condições de navegação são obtidas quando $\alpha = d + 1$ (LI *et al.*, 2010a) (YANG *et al.*, 2010)(LI *et al.*, 2010b)(LI *et al.*, 2010a). Argumenta-se que tais condições, com e sem restrição de custo, são ótimas devido às fortes correlações entre a rede espacial subjacente e a estrutura de longo alcance, permitindo ao portador do pacote encontrar os caminhos mais curtos na rede de mundo pequeno (KLEINBERG, 2000). Afirma-se que tal compromisso entre as estruturas locais e de longo alcance leva a uma dimensão efetiva mais elevada do que a dimensão da estrutura local subjacente (DAQING *et al.*, 2011) (BOGUÑÁ *et al.*, 2009).

Este capítulo está organizado da seguinte maneira. Na seção 4.1, descreveremos um pouco melhor a rede espacialmente embutida de Kleinberg (KLEINBERG, 2000). As regras para sobrecarga de nós usadas no presente estudo para simular o início do congestionamento também são apresentadas na Seção 4.1. Na Seção 4.2, são apresentados os resultados de nossas simulações e análises numéricas, em que estudamos o comportamento do parâmetro de ordem, a escala do ponto crítico e a divergência do tempo característico. Na seção final 4.3, teremos as conclusões.

4.1 Formulação do modelo

Usando um modelo simples e geral baseado em um algoritmo descentralizado, nós estudamos os efeitos da não localidade assumindo três ingredientes simples (ARENAS *et al.*, 2001)(GUIMERA *et al.*, 2002b). A primeira é uma estrutura física espacialmente incorporada onde ocorre o processo de transporte, ou seja, a própria rede de transporte. Em segundo lugar, assumimos que os canais pelos quais as informações fluem têm capacidade limitada. Por fim, as informações que navegam nesta rede são compostas por pacotes discretos. Sem falta de

generalidade, as características importantes do problema são obtidas pela análise da navegação e do congestionamento desses pacotes discretos.

Como é mostrado na figura 22, a rede de transporte é incorporada em uma rede regular quadrada com $N = L \times L$ nós, onde adicionamos ligações de longo alcance. Nesse modelo, pares de nós i e j são escolhidos aleatoriamente para receber uma destas ligações de longo alcance com probabilidade proporcional à $r_{ij}^{-\alpha}$, onde r_{ij} é a distância de Manhattan entre os nós i e j . As redes possuem condições de contorno periódicas e recebem um número fixo de ligações de longo alcance. Na construção, anexamos uma das extremidades de uma conexão de longo alcance a cada um dos $N = L^2$ nós da rede subjacente, enquanto a outra extremidade é conectada aleatoriamente a outro nó de acordo com a probabilidade $P(r_{ij}) \sim r_{ij}^{-\alpha}$, definida previamente. Portanto, cada nó recebe uma conexão de longo alcance, mas pode receber outras devido ao processo de conexão aleatório. Como o número de nós separados pela distância r da rede de um nó i em uma rede d -dimensional é proporcional a r^{d-1} (ver figura 22), a probabilidade $P(r_{ij})$ pode ser mapeada na função de distribuição de densidade $p(r) \sim r^{d-1-\alpha}$. Após a distância r ser escolhida seguindo a distribuição $p(r)$, escolhemos aleatoriamente o nó j do conjunto de nós separados de i pela distância r . Claramente, o presente modelo satisfaz o paradigma do mundo pequeno, ou seja, é rico em conexões de curto alcance, mas tem apenas algumas conexões de longo alcance (WATTS; STROGATZ, 1998).

O algoritmo de transporte dos pacotes é definido a seguir. Inicialmente, atribuímos a toda a rede uma probabilidade p para a criação de pacotes de informação. Depois disso, a cada passo de tempo t , sorteamos um número aleatório uniformemente distribuído no intervalo de 0 a 1 para cada nó s . Se este número for menor que p , um pacote de informações é criado no nó s . Então, para cada novo pacote, um nó de destino t é atribuído aleatoriamente. Para simular situações da vida real, os nós (por exemplo, os roteadores da Internet) não têm informações sobre toda a topologia da rede. Portanto, um nó portador de informação a escolhe de seu conjunto de vizinhos, de curto e longo alcance, o nó vizinho b que está geograficamente mais próximo de t para enviar o pacote. Claramente, este algoritmo tem estreita relação com o algoritmo “ambicioso” proposto por Kleinberg, utilizado para estudar o problema de navegação eficiente de um pacote de informação em uma rede de mundo pequeno (KLEINBERG, 2000).

Depois que o potencial próximo candidato a receber o pacote é escolhido, o pacote é transmitido, ou não, de um nó a para um b de acordo com a qualidade do canal (link) que é determinado por q_{ab} (ARENAS *et al.*, 2001). Em situações da vida real, essa qualidade

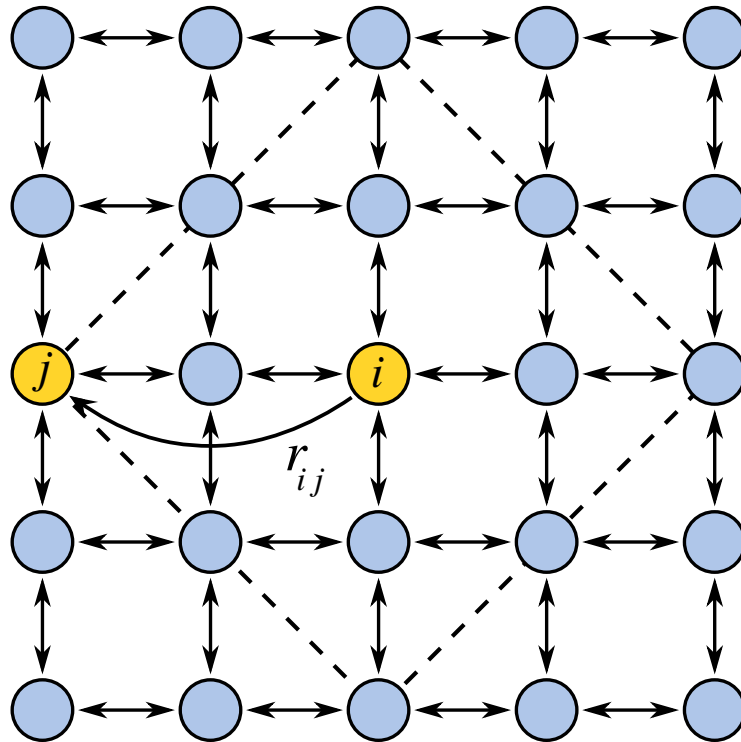


Figura 22 – As redes de Kleinberg são construídas adicionando ligações de longo alcance em uma rede regular quadrada. Para um dado nó i , um nó j é escolhido aleatoriamente e uma ligação não direcionada de tamanho r_{ij} é adicionada entre eles com uma probabilidade $P(r_{ij}) \sim r_{ij}^{-\alpha}$. Seguindo essa lógica, o nó j pode ser qualquer um a uma distância de Manhattan de r_{ij} . As linhas tracejadas destacam os oito possíveis nós separados do nó i em uma rede regular a uma distância de $r = 2$. Nós escolhemos aleatoriamente um desses nós j para estabelecer a ligação de longo alcance.

influencia a probabilidade de transmissão e espera-se que dependa da carga de pacote dos nós conectados. Assim, a capacidade κ_a do nó a para receber um novo pacote pode ser definida como

$$\kappa_a = \begin{cases} 1, & \text{se } n_a = 0; \\ n_a^{-\xi}, & \text{se } n_a = 1, 2, 3, \dots; \end{cases} \quad (4.1)$$

onde n_a é o número de pacotes no nó a . Assim, podemos definir a qualidade do canal como a média geométrica $q_{ab} = \sqrt{\kappa_a \kappa_b}$ (ARENAS *et al.*, 2001). Logo, para entender melhor nossas simulações, escrevemos uma relação de escala para a qualidade do canal como

$$q_{ab} = (n_a n_b)^{-\xi/2}, \quad (4.2)$$

para $n_a > 0$ and $n_b > 0$. Assumindo q_{ab} como a probabilidade de um nó a entregar um pacote no nó b , o número médio de pacotes entregues do nó a para o b por unidade de tempo pode

escalar como $\langle n_{ab} \rangle \sim n_a^{1-\xi/2} n_b^{-\xi/2}$ (GUIMERÀ *et al.*, 2002a). Note que os pacotes são criados uniformemente na rede; Assim, podemos assumir $n_a \sim n_b$. Consequentemente,

$$\langle n_{ab} \rangle \sim n_a^{1-\xi}. \quad (4.3)$$

Onde $\xi < 1$, o número médio de pacotes entregues cresce com a carga de pacotes do nó, e, por essa razão, o sistema sempre se encontrará na fase de fluidez, ou seja, os pacotes chegam sempre ao seu destino. Por outro lado, se $\xi > 1$, o número médio de pacotes entregues decai rapidamente, o que significa que os nós não conseguem entregar os pacotes, causando o surgimento de uma fase de congestionamento. É importante notar que esse fato não significa que as fases de congestionamento aparecem para todos os valores de p e $\xi > 1$, mas apenas que nenhuma fase de congestionamento ocorre para $\xi < 0$. Por exemplo, para $\xi > 1$, podem existir valores não triviais de $p > 0$ para os quais ocorrem transições de fase abruptas, conforme relatado na literatura (GUIMERÀ *et al.*, 2002a). Ao longo dessas linhas, o presente modelo tem uma transição de fase clara de uma fase de fluxo livre para uma congestionada em $\xi = 1$. A seguir, concentramos nosso estudo neste valor crítico de ξ para $d = 2$.

4.2 Resultados e discussões

4.2.1 Transição da fase livre para congestionada

Para $\xi = 1$, esperamos ter ambas as fases de fluxo livre e congestionamento, dependendo da probabilidade p . Portanto, começamos nossa análise definindo e calculando o parâmetro de ordem η dado por

$$\eta(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{pL^2} \frac{\langle \Delta N \rangle}{\Delta t}, \quad (4.4)$$

onde pL^2 é o número médio de pacotes criados por intervalo de tempo, ΔN é o número de pacotes não entregues que navegam na rede em janelas de tempo de duração Δt . Em estados estacionários ($t \rightarrow \infty$), a média $\langle \Delta N \rangle$ está relacionada com a taxa de criação de pacotes e a taxa de entrega de pacotes por intervalo de tempo e, portanto, depende apenas de p para valores grandes de t , uma vez que ΔN será proporcional à duração das janelas de tempo Δt (ARENAS *et al.*, 2001)(GUIMERÀ *et al.*, 2002b).

Conforme representado na figura 23 (a), a análise do parâmetro de ordem η nos permite definir a probabilidade crítica de criação de novos pacotes p_c , caracterizando uma típica transição de fase de segunda ordem entre as fases congestionada e livre (ARENAS *et*

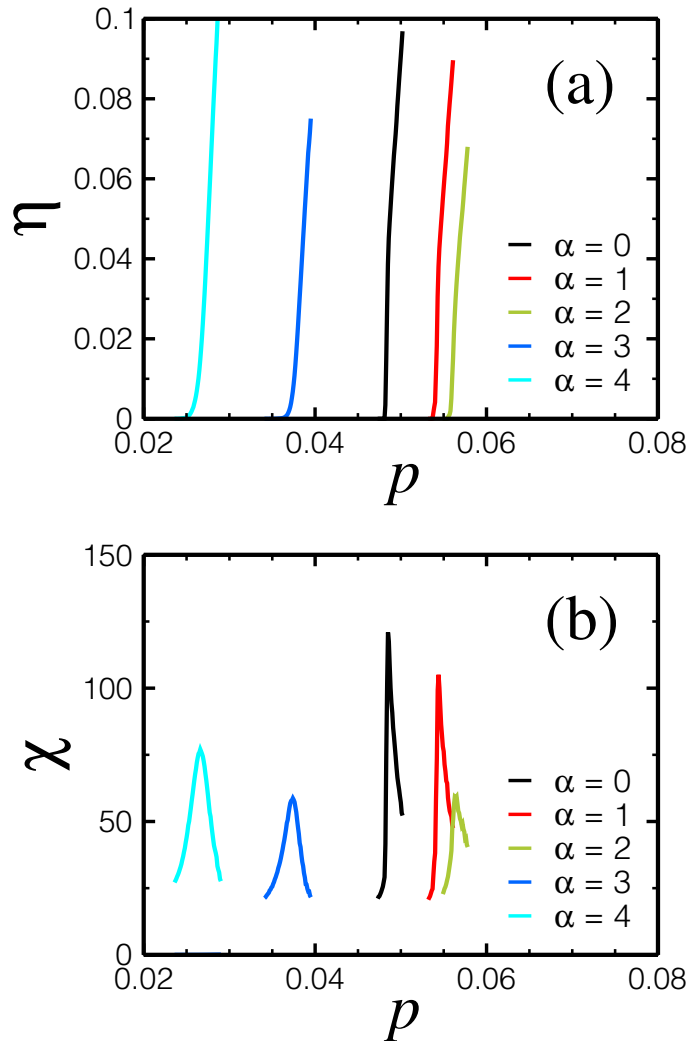


Figura 23 – Transição para fases congestionadas para diferentes valores de α . Em (a) mostramos o parâmetro de ordem η em função da probabilidade de criação de novos pacotes p . Quando a topologia da rede favorece o algoritmo de entrega descentralizada, os pacotes são entregues em alta taxa e novos pacotes são criados, evitando que os nós fiquem sobrecarregados e evitando, assim, congestionamentos. É o caso de $\alpha = 0, 1$ e 2 , onde a transição ocorre para valores maiores de p . Conforme descrito em (b), o limite crítico p_c marca um valor máximo na suscetibilidade de resposta χ . Aqui, usamos $L = 128$ com $T = 10^4$ para cada valor de α e tempo de simulação igual a 10^5 .

al., 2001)(GUIMERÀ *et al.*, 2002a)(GUIMERÀ *et al.*, 2002b). Para valores pequenos de p , $\langle \Delta N \rangle = 0$ no estado estacionário, resultando em fases livres, o que significa que a taxa de criação de pacotes é menor do que a taxa de entrega de pacotes. Conforme p aumenta, a taxa de criação de pacotes também aumenta, até atingir o limite crítico p_c , onde a taxa de pacotes criados é igual à taxa suportada de entrega de pacotes. Além desse limite crítico, o valor de $\langle \Delta N \rangle$ aumenta com t , resultando em valores para $\eta > 0$, marcando a existência de uma fase congestionada.

Curiosamente, p_c apresenta um comportamento não trivial com α em redes de

Kleinberg, conforme ilustrado na Figura 23 (a). Especificamente, quando $\alpha > 0$, o limite crítico aumenta ligeiramente ($\alpha = 1$ e 2), mostrando que nesta faixa de α as redes são mais resilientes à criação de pacotes de informação. No entanto, para valores maiores do expoente α , $\alpha = 3$ e 4 , o limite crítico diminui drasticamente, levando as redes mais rapidamente a congestionamentos.

4.2.2 Comportamento do limiar crítico

A seguir, investigamos o comportamento de p_c . Espera-se que as transições de fase de segunda ordem sejam dominadas por grandes flutuações no parâmetro de ordem perto de seu limite crítico (STANLEY, 1971). Assim, a fim de calcular p_c com precisão, é conveniente definir a função macroscópica de suscetibilidade $\chi(p)$ como

$$\chi(p) = \lim_{T \rightarrow \infty} T \sigma_\eta(T), \quad (4.5)$$

onde $\sigma_\eta(T)$ é o desvio padrão do parâmetro de ordem calculado em muitas janelas de tempo de largura T . Portanto, para calcular $\chi(p)$ é necessário um tempo de simulação bastante longo para uma única realização. No contexto de fenômenos críticos, tal função é sensível às flutuações do parâmetro de ordem, em que diverge conforme o parâmetro de controle se aproxima de seu valor crítico (STANLEY, 1971). Conforme mostrado na figura 23 (b), $\chi(p)$ apresenta um máximo em valores não triviais de p para valores diferentes de α . Assim, identificamos esses valores como p_c (ARENAS *et al.*, 2001) (GUIMERÀ *et al.*, 2002b). Para determinar como o expoente α afeta a resiliência da rede ao congestionamento, estudamos a dependência do ponto crítico p_c com o tamanho linear L para diferentes valores de α . A Figura 24 (a) mostra os valores estimados de p_c como uma função do expoente α para três tamanhos de sistema diferentes. De acordo com os resultados para $\eta(p)$ e $\chi(p)$, o ponto crítico p_c apresenta comportamento semelhante em relação a α . Conforme apresentado na figura 23, p_c aumenta com α para $0 < \alpha < 2$. No entanto, ele diminui para $2 < \alpha < 4$ e, finalmente, satura e atinge seus valores mais baixos para $\alpha > 4$.

A maneira como p_c escala com L , entretanto, segue comportamentos bastante diferentes, dependendo dos valores de α . Conforme apresentado no gráfico principal da figura 24 (b), nossos resultados sugerem que o ponto crítico p_c segue uma lei de escala com tamanho L , seguindo uma função do tipo lei de potência, $p_c \sim L^{-\gamma}$. Este comportamento da lei de potência fornece uma informação importante sobre o nosso modelo: conforme o tamanho do sistema aumenta e, conseqüentemente, a distância entre os nós de origem e os nós de destino também aumenta em média, mais pacotes estão navegando na rede em um determinado intervalo de

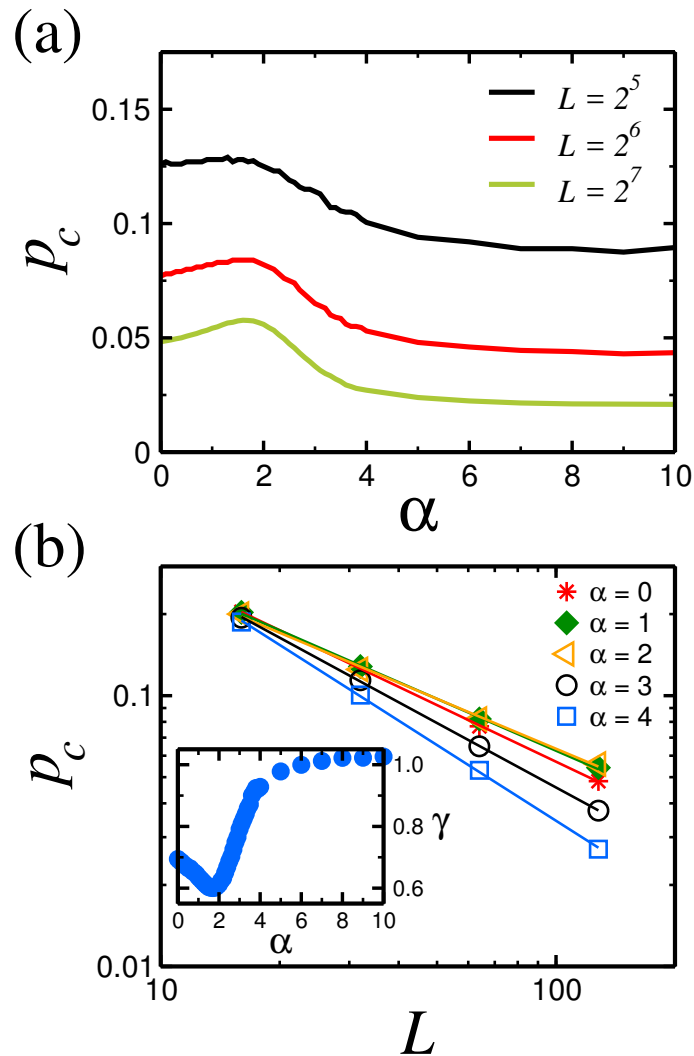


Figura 24 – Comportamento do ponto crítico p_c . No painel (a), mostramos a probabilidade crítica p_c como uma função do expoente α . Conforme o tamanho do sistema L aumenta, os pacotes demoram mais para serem entregues, causando o aumento de ΔN . Como consequência disso, a transição para fases congestionadas ocorre para valores ainda menores de p_c . Porém, independentemente do valor de L , a probabilidade crítica sempre apresenta um máximo à medida que α se aproxima do valor de $\alpha = 2$. As probabilidades críticas seguem um comportamento de lei de potência, $p_c \sim L^{-\gamma}$, conforme apresentado no gráfico principal de (b). Os valores do expoente γ resultantes de um ajuste de mínimos quadrados aos dados são apresentados na inserção (quadro menor), onde um comportamento não monotônico pode ser claramente observado. Aqui, usamos $L = 2^5$ com $T = 10^4$ para cada valor de α e tempo de simulação igual a 10^5 .

tempo. Isso torna as redes maiores mais suscetíveis ao congestionamento, uma vez que o número esperado de pacotes ocupando um nó aumenta. Para o caso dos padrões de mobilidade nas cidades, este resultado está de acordo com as relações alométricas entre a população da cidade e o atraso total do tráfego (LOUF; BARTHELEMY, 2014) e acidentes de trânsito (MELO *et al.*, 2014). Além disso, os diferentes valores do expoente de escala γ sugerem que para um determinado tamanho de sistema L existem valores de α que geram redes mais robustas para transporte de pacotes.

Extraímos mais informações sobre essa escala realizando simulações extensivas para diferentes valores de α e realizações muito longas para diferentes tamanhos de sistema. Em cada caso, o ponto crítico p_c é estimado pelo cálculo da susceptibilidade $\chi(p)$. A inserção (quadro menor) na figura 24 (b) mostra os valores do expoente γ em função do expoente α . Como se pode ver, conforme α aumenta, γ diminui ligeiramente de $\gamma = 0.6(9)$ em $\alpha = 0$ para perto de $\gamma = 0.6(1)$, quando α se aproxima da dimensão da rede subjacente, $\alpha = 2$. Aqui, obtemos o valor mínimo de γ para $\alpha_{min} = 1.7$, onde $\gamma = 0.6(0)$. Para $2 < \alpha < 4$, o valor do expoente γ aumenta acentuadamente. Para o intervalo de $4 < \alpha < 10$, os valores de γ aumentam muito lentamente. Encontramos os valores de $\gamma = 0.9(3)$ para $\alpha = 4$, e $\gamma = 1.0(3)$ para $\alpha = 10$.

O comportamento não monotônico de γ pode ser melhor compreendido pela análise do caso da navegação de pacote único. Para este caso, sob algoritmos descentralizados, comportamento semelhante foi encontrado na mesma topologia para a forma de escala do tempo de entrega esperado (KLEINBERG, 2000)(ROZENFELD *et al.*, 2010)(CARMI *et al.*, 2009) (CARTOZO; RIOS, 2009). Precisamente, o valor do expoente α que otimiza o tempo de entrega de um pacote em duas dimensões é $\alpha_{opt} = 2$, em que o tempo de entrega esperado escala de maneira logarítmica com L . Para α diferente da dimensão da rede subjacente d , o tempo de entrega esperado tem um comportamento de lei de potência, L^x (CARMI *et al.*, 2009)(CARTOZO; RIOS, 2009). Nesta situação, o valor $\alpha = d$ é um ponto transitório para o qual $x = (d - \alpha)/(d + 1 - \alpha)$, para o qual $\alpha < d$, e $x = \alpha - d$ para $\alpha > d$. Acreditamos que o valor diferente encontrado para o mínimo, $\alpha_{min} = 1.7$, resulta dos pequenos tamanhos de rede usados devido ao longo tempo de simulação necessário para o cálculo de $\chi(p)$. Consequentemente, conjecturamos que este valor ótimo, $\alpha_{opt} = 2$, ajudaria a tornar a rede de transporte mais resiliente a taxas de produção de pacotes mais altas.

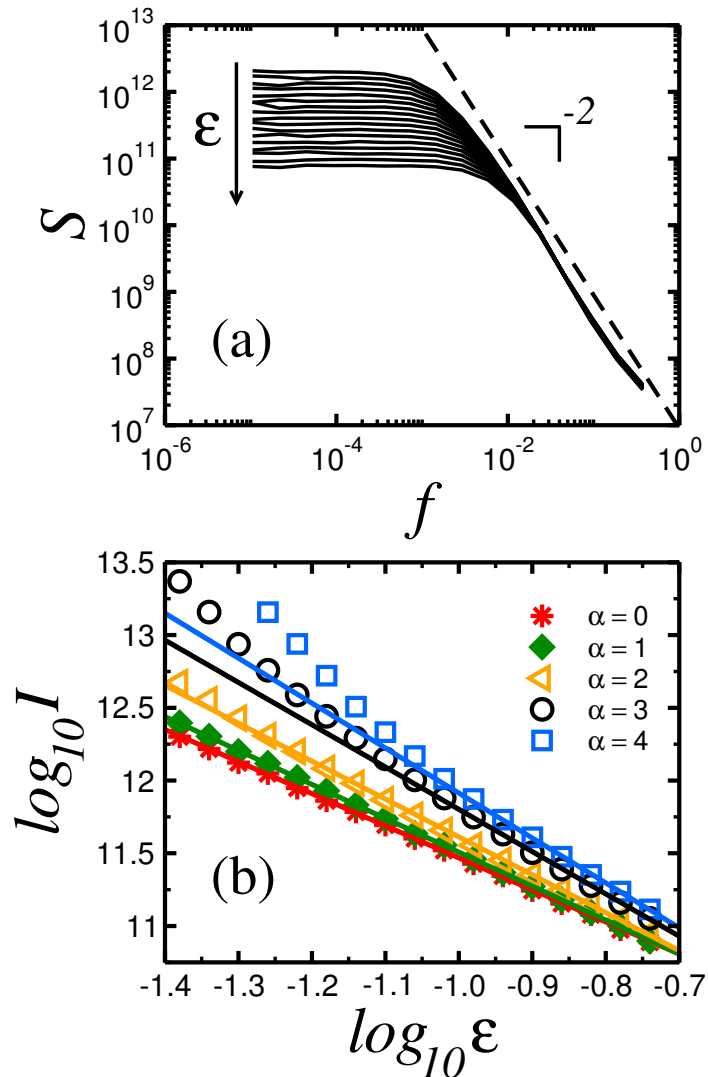


Figura 25 – (a) Espectro de potência de S em função de f para $\alpha = 0$, e para a fase livre, $p < p_c$. Como se pode ver, para todos os valores do parâmetro de controle reescalado ε , S tem a forma de uma função Lorentziana dada pela Eq. (4.6). Os valores de ε aumentam de cima para baixo. Portanto, as curvas no topo estão mais próximas do valor crítico p_c . Dado o comportamento Lorentziano, espera-se uma queda da lei de potência de S para valores maiores de f , conforme mostrado pela linha tracejada com inclinação -2 . (b) Intensidade I em função do parâmetro de ordem ε obtido do ajuste da curva não linear de S usando a Eq. (4.6), para diferentes valores de α na fase livre. O gráfico sugere que $I \sim \varepsilon^{-\zeta}$. Para $\alpha = 3$ e 4 , os valores estimados de I se desviam desse comportamento quando o sistema se aproxima da transição nos valores mais baixos de ε . As linhas sólidas são os resultados de ajuste usando $I \sim \varepsilon^{-\zeta}$ nos intervalos de ε onde tal comportamento de lei de potência é válido. Cada espectro de potência é obtido por meio de uma média de 100 realizações, com $L = 32$ e tempo de simulação igual a 10^5 .

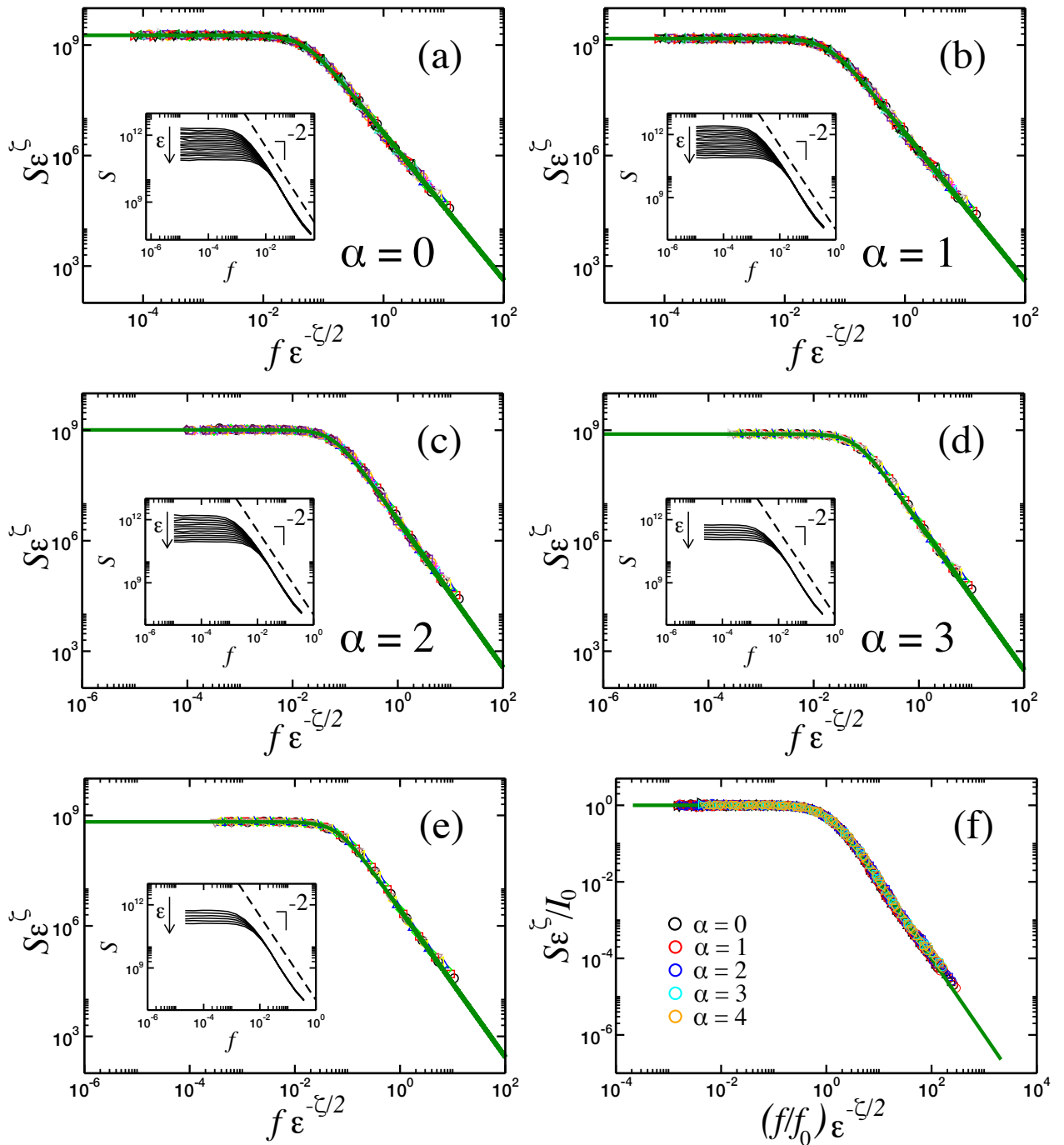


Figura 26 – Colapso de dados do espectro de potência S para diferentes valores do parâmetro de controle ϵ e (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 1$, (c) $\alpha = 2$, (d) $\alpha = 3$, e (e) $\alpha = 4$. Usamos $\zeta = 2.2(0)$, $2.3(3)$, $2.6(0)$, $2.9(1)$ e $3.0(9)$ para $\alpha = 0, 1, 2, 3$ e 4 , respectivamente. Esses valores foram obtidos a partir de um ajuste de mínimos quadrados aos dados apresentados na figura 25 (b). A inserção (quadro menor) em cada gráfico são os dados originais para o espectro de potência S obtidos em nossas simulações. (f) Quando os eixos do gráfico são escalados usando $S \epsilon^\zeta / I_0$ e $(f/f_0) \epsilon^{-\zeta/2}$, todos os dados apresentados nos painéis (a) - (e) colapsam na função Lorentziana universal \mathcal{L} . Cada espectro de potência é obtido por meio de uma média de 100 realizações, com $L = 32$ e tempo de simulação igual a 10^5 .

4.2.3 Divergência do tempo de entrega esperado

Agora, focamos nossa atenção na divergência do tempo esperado de entrega. Para fazer isso, analisamos o comportamento do espectro de potência de $N(t)$ definido como a transformada de Fourier $S(f) = \mathcal{F}\{N(t)\}$, onde f é a frequência associada à entrega do pacote. Na figura 25 (a), mostramos S como uma função de f para diferentes valores do parâmetro de controle reescalado com $\varepsilon = |p - p_c|/p_c$ na fase livre, $p < p_c$, com $\alpha = 0$. Conforme representado, o espectro de potência S tem a forma de uma função Lorentziana dada por:

$$S = \frac{I}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}, \quad (4.6)$$

onde a intensidade I é o valor máximo de S e f_c é uma frequência característica. O parâmetro de intensidade I está associado à largura da função Lorentziana. Por outro lado, a frequência característica f_c está intimamente relacionada com o tempo médio de entrega de um pacote $\tau \sim 1/f_c$. Como se pode ver na figura 25 (a), conforme ε diminui, a largura do platô marcando o valor de I também diminui, e no limite $\varepsilon \rightarrow 0$ o espectro de potência deve escalar com $1/f^2$. Esta é uma assinatura da divergência do tempo médio de entrega esperado, levando $f_c \rightarrow 0$ e $\varepsilon \rightarrow 0$, enquanto $\tau \sim \varepsilon^{-z}$ (GUIMERÀ *et al.*, 2002a).

Para analisar melhor a divergência de τ perto da transição, calculamos os valores do expoente z por meio da análise de I como uma função de ε . Como $\varepsilon \rightarrow 0$, espera-se que $I \sim \varepsilon^{-\zeta}$. Além disso, o expoente z , que descreve a divergência do tempo de entrega esperado, deve estar relacionado com ζ pela equação $z = \zeta/2$ (GUIMERÀ *et al.*, 2002a). Na figura 25 (b), mostramos os valores de I , coletados do ajuste da curva não linear de S usando a Eq. 4.6, como uma função de ε em forma de log-log. Para $\alpha = 0, 1$ e 2 , encontramos $\zeta = 2.2(0), 2.3(3)$ e $2.6(0)$, respectivamente. Para $\alpha = 3$ e 4 , o comportamento de I difere de um escalonamento como $\varepsilon \rightarrow 0$. Devido ao perfil Lorentziano, à medida que p se aproxima de seu valor crítico p_c , a largura da função Lorentziana diminui, já que $S \sim 1/f^2$ neste limite, resultando em uma superestimativa de I . Assim, para estimar ζ , usamos o intervalo de ε onde o comportamento da lei de potência de I é válido. Fazendo isso, encontramos $\zeta = 2.9(1)$ e $3.0(9)$ para $\alpha = 3$ e 4 , respectivamente. Portanto, quando $\tau \sim \varepsilon^{-\zeta/2}$, o aumento monotônico de ζ com α leva à conclusão de que τ diverge mais rápido para valores mais altos de α conforme o sistema se aproxima do ponto de transição. Os resultados para ζ e a resiliência ao congestionamento com o tamanho do sistema (ver figura 24) levam a um melhor compromisso para as condições de transporte alcançadas quando $\alpha \approx 2$. Portanto, com base em resultados anteriores relatados na

literatura (KLEINBERG, 2000)(KOSMIDIS *et al.*, 2008) (CARMI *et al.*, 2009)(CARTOZO; RIOS, 2009) (ROBERSON; AVRAHAM, 2006)(OLIVEIRA *et al.*, 2014)(LI *et al.*, 2010a) (YANG *et al.*, 2010)(LI *et al.*, 2010b)(LI *et al.*, 2010a), conjecturamos que a condição ótima para a navegação de múltiplos pacotes em redes espacialmente incorporadas é obtida quando $\alpha = d$, onde d é a dimensão da rede subjacente.

É interessante observar que a relação de escala $I = I_0 \varepsilon^{-\zeta}$ e $f_c = f_0 \varepsilon^{\zeta/2}$ nos permite escrever Eq. 4.6 na forma mais geral

$$S' = \varepsilon^{-\zeta} S(f \varepsilon^{\zeta/2}). \quad (4.7)$$

Conforme representado nas Figs. 26 (a) - (e), todos os dados para $S \varepsilon^{\zeta}$ como uma função de $f \varepsilon^{-\zeta/2}$ colapsam em um comportamento único para todos os valores de α . Se usarmos os valores obtidos para I_0 e f_0 (ver figura 26 (f)), o reescalonamento dos eixos do gráfico mostra que, independentemente dos detalhes topológicos da rede definida por α , todos os dados de simulação colapsam em uma curva universal descrita pela Lorentziana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{1 + F^2}, \quad (4.8)$$

onde $F = (f/f_0) \varepsilon^{-\zeta/2}$ e $\mathcal{L} = S'/I_0$. Uma vez que a adição de atalhos muda a dimensão efetiva da rede (DAQING *et al.*, 2011), acreditamos que este comportamento Lorentziano deve valer para qualquer topologia de rede, como as redes unidimensionais e bidimensionais, bem como as redes do tipo árvore, como a Cayley (GUIMERÀ *et al.*, 2002a).

4.3 Conclusões

A fim de revelar o papel da topologia de rede no transporte de pacotes de informação, estudamos a dinâmica de um modelo simples e geral de redes de transporte em redes espacialmente incorporadas. Ao assumir conexões adicionais de longo alcance adicionadas a uma rede quadrada bidimensional seguindo uma distribuição de lei de potência $P(r_{ij}) \sim r_{ij}^{-\alpha}$, encontramos um limite para o valor total de pacotes de informações que fluem pela rede caracterizados por uma probabilidade crítica de criar novos pacotes p_c . Nossos resultados mostram que p_c é descrito por uma lei de potência do tamanho linear da rede, $p_c \sim L^{-\gamma}$, como foi encontrado em outras topologias (GUIMERÀ *et al.*, 2002b). Notavelmente, devido às características do modelo de rede utilizado, γ apresenta uma dependência não trivial com o parâmetro topológico α . Especificamente, γ tem um mínimo para $\alpha_{min} = 1.7$, o que significa que, neste caso, a rede é

mais resiliente à criação de novos pacotes de informação. Visto que o algoritmo de transporte faz uso apenas do conhecimento local da geografia da rede, esta condição de robustez coincide com o regime de mundo pequeno da rede (KOSMIDIS *et al.*, 2008). Além disso, está próximo da condição de navegação ideal para um único pacote em duas dimensões, $\alpha_{opt} = 2$. Portanto, as peculiaridades espaciais da rede desempenham um papel importante na robustez do transporte de múltiplos pacotes. Em outras palavras, ao otimizar a resiliência da troca de informações nas redes de transporte, deve-se levar em consideração não apenas o protocolo adotado, mas também buscar as dicas fornecidas pela análise de suas propriedades geográficas. Esses resultados nos levam a conjecturar que a navegação ótima de múltiplos pacotes em redes espacialmente incorporadas é alcançada quando $\alpha_{opt} = d$, da mesma forma que na navegação ótima de pacotes únicos (KLEINBERG, 2000) (KOSMIDIS *et al.*, 2008)(CARMI *et al.*, 2009)(CARTOZO; RIOS, 2009) (ROBERSON; AVRAHAM, 2006)(OLIVEIRA *et al.*, 2014)(LI *et al.*, 2010a) (YANG *et al.*, 2010)(LI *et al.*, 2010b)(LI *et al.*, 2010a).

Além da robustez das redes de transporte, estudamos seu comportamento crítico, analisando o espectro de potência do número total de pacotes em função do tempo. Quando $p < p_c$, esses espectros são descritos por uma função Lorentziana e saturam em um valor característico I . Em contraste, quando p se aproxima de p_c , o espectro de potência apresenta um comportamento de lei de potência com expoente -2 . Considerando o valor de saturação característico I e seu comportamento de lei de potência descrito pelo expoente ζ , pudemos mostrar que os espectros de potência colapsam em uma função Lorentziana universal, independentemente dos detalhes topológicos das redes e sua dimensão de subjacente. Esses espectros de potência fornecem a divergência de quantidades relevantes para fins práticos, como o tempo médio de entrega de um pacote e o número de pacotes que navegam na rede. Esperamos que a abordagem de modelagem e os resultados apresentados aqui possam ser úteis em estudos futuros sobre o problema de navegação de pacotes múltiplos em diferentes topologias de rede, o que pode levar a melhorias significativas nos processos de entrega de pacotes que ocorrem em redes de transportes reais.

5 ESTUDO DO MODELO *SPQM* IDEALIZADO PARA CIDADES REGULARES E REAIS

Neste capítulo, descreveremos o modelo *SPQM*, aplicado a redes regulares e a regiões em cidades. A metodologia será apresentada evidenciando os parâmetros que caracterizam as transições de fase. A transição de fase é caracterizada quando o sistema passa de um estado livre, onde carros conseguem facilmente chegar ao seu destino, para o estado congestionado, quando os carros não conseguem atingir o seu destino final e ficam estagnados em ruas da cidade. Inicialmente, abordaremos o modelo onde a criação de carros acontece a cada passo de tempo, o que acarreta em uma densidade de carros que se altera durante a dinâmica de tráfego. Em seguida, analisaremos um modelo cuja criação de carros é feita apenas no momento inicial da simulação.

Nas próximas seções, apresentaremos o modelo *SPQM*, introduzido no capítulo 3, aplicado em sistemas cuja transmissão de carros se assemelha à transmissão de dados na Internet. Esse tipo de comparação entre sistemas de natureza diferentes tem se mostrado válida, inclusive no entendimento dos possíveis riscos que um sistema de veículos integrados pode oferecer por estes estarem conectados (VIVEK *et al.*, 2019).

5.1 *SPQM* Dinâmico

Este modelo já foi bastante explorado para diferentes valores de capacidade V (ÇOLAK *et al.*, 2013). A figura 27 apresenta a similaridade do número de carros total na rede para diferentes valores de V . Podemos observar que o determinante para a quantidade de carros que circulam na rede é o valor de τ . Isso porque fixamos a taxa de criação de carros e variamos apenas o tempo que estes esperam para mudar de rua. Este tempo de espera está associado a diferentes condições (número de semáforos, velocidade na via) que podem acontecer em um cenário real para deslocamentos de veículos em uma cidade.

Além do parâmetro de ordem η , utilizaremos a suscetibilidade χ para determinar o ponto de transição entre os estados livre e congestionado. A suscetibilidade nos permitirá calcular quando o sistema estará mais sensível a mudanças bruscas, ou seja, quando este se encontra no ponto crítico τ_c . A expressão que define a suscetibilidade,

$$\chi(\tau) = \lim_{T' \rightarrow \infty} T' \sigma_{\eta(T')}, \quad (5.1)$$

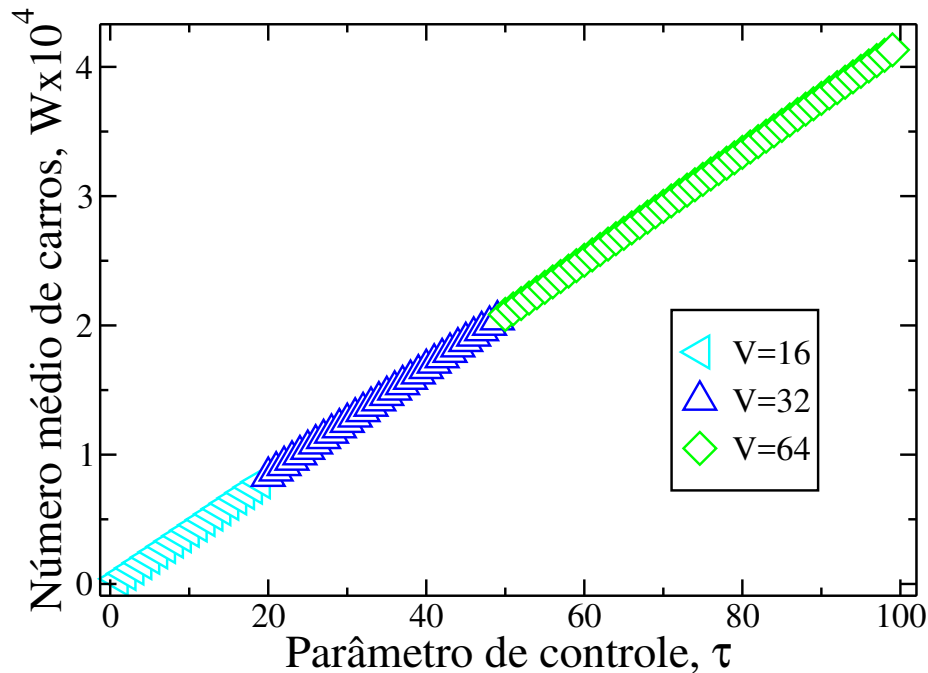


Figura 27 – Fonte: Produção do autor. A figura mostra o gráfico do número médio de carros na rede em função do parâmetro τ , considerando diferentes capacidades de armazenamento das ruas V . O gráfico mostra três situações considerando três valores de $V = 16, 32, 64$ no estado livre. Mesmo assim, o número médio de carros em toda a rede depende apenas de τ e permanece com dependência linear em todas as situações. Este valor é calculado em um estado estacionário para um sistema composto de 1984 vias.

já foi usada em outros trabalhos e foi introduzida também por Guimera e seus colaboradores (GUIMERA *et al.*, 2002a) onde T' é o tamanho da janela utilizado para calcular o parâmetro de ordem. Além de determinarmos a suscetibilidade χ , dividimos a série temporal do número de carros em janelas de tempo de tamanho T' , e em cada uma destas janelas calculamos o parâmetro de ordem η_i . Feito isso, calculamos o desvio padrão dos valores obtidos.

A suscetibilidade apresenta singularidade no ponto crítico em função do parâmetro de controle τ_c , uma vez que, neste ponto, o sistema sofre uma maior instabilidade em relação ao número de carros. Neste ponto, em $\tau = \tau_c$, a rede se encontra na iminência do congestionamento, em que os carros começam a se acumular na rede e as vias congestionadas começam a surgir na rede. A figura 28 mostra a suscetibilidade calculada para uma rede de (32×32) com diferentes limites de volume de carros suportados nas vias.

Conhecendo o valor do ponto crítico τ_c para cada um dos valores observados de V , obtivemos os resultados mostrados na figura 29. Este resultado nos revela como o congestionamento cresce à medida que aumentamos o tempo de espera dos carros nas ruas para seguirem ao próximo sítio. As curvas exibidas na figura 29 mostram que, quando o valor de capacidade

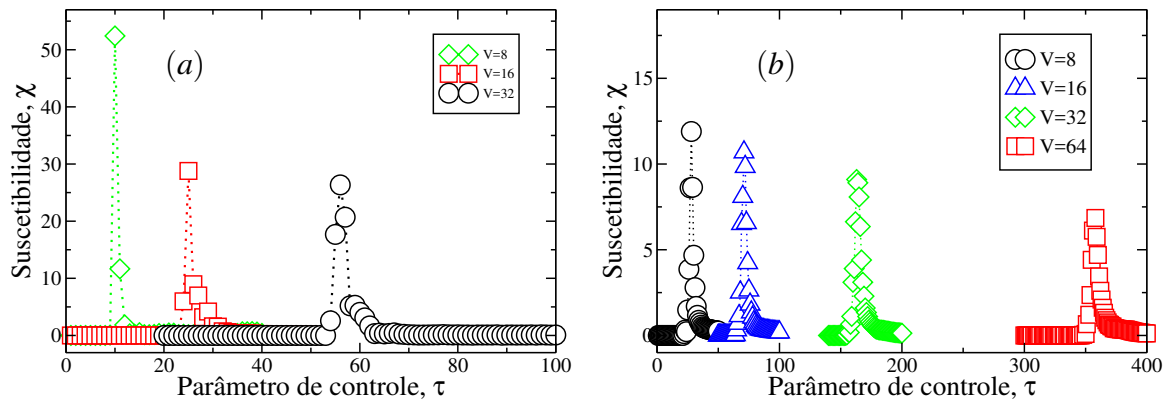


Figura 28 – Fonte: Produção do autor. A figura mostra o gráfico da suscetibilidade calculada para vários valores de V . Utilizamos um tamanho de janela $T' = 10^3$ e calculamos o parâmetro de ordem dentro destas janelas para em seguida determinar o desvio padrão para cada um dos casos observados. O ponto com maior desvio padrão é definido como o ponto crítico do sistema τ_c . O gráfico (a) contém os resultados para uma rede com condição de contorno fechada, enquanto o gráfico (b) contém os resultados que correspondem a uma rede com condição de contorno periódica.

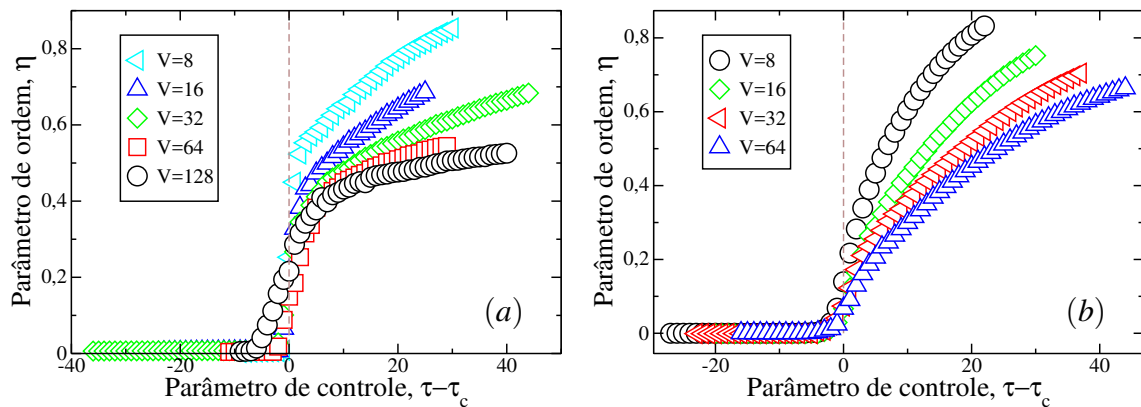


Figura 29 – Fonte: Produção do autor. A figura mostra o gráfico do resultado do parâmetro de ordem para diferentes valores de V em função de $\tau - \tau_c$. O valor do parâmetro η tende a 1 de maneira diferente para cada um dos casos. Quando V cresce, a rede consegue comportar mais carros mesmo já não conseguindo entregá-los. Para valores cada vez maiores de capacidade V é necessário um τ cada vez maior para que a rede chegue ao congestionamento. O gráfico (a) contém os resultados para uma rede com condição de contorno fechada, enquanto o gráfico (b) contém os resultados para uma rede com condição de contorno periódica.

das ruas aumenta, o congestionamento das vias tende a ser mais lento com o aumento de τ . Isso ocorre porque, quando aumentamos a capacidade das ruas em comportar carros, a rede não será preenchida rapidamente, uma vez que as ruas ainda suportam alocar mais alguns carros que não conseguem chegar ao destino. Este processo se mantém por um longo período de tempo antes que todos os espaços sejam preenchidos. Este efeito pode ser entendido como um atraso na “informação” do congestionamento, pois mesmo a rede não conseguindo entregar uma taxa

significativa de carros aos seus respectivos destinos, a rede continua a aceitar a criação de carros até atingir o seu limite, em que todas as ruas ficam preenchidas. Este efeito ocorre devido à falta de informação global. Os carros não chegam ao seu destino final. Apenas as informações locais estão acessíveis, e o sistema ainda permite a criação de novos carros em pontos distintos da rede. No estágio final, novos carros são impossibilitados de entrar no sistema.

Uma forma de medir a evolução do congestionamento é olhando para o crescimento do parâmetro de ordem η à medida que o parâmetro de controle τ aumenta. Para isso, devemos ajustar as curvas do parâmetro de ordem de forma semelhante ao representado na figura 29 e procurar um comportamento do tipo lei de potência (*power law*). Analisando este comportamento, podemos entender como o sistema se aproxima do congestionamento total à medida que o parâmetro de controle τ aumenta. Fizemos esta análise para diferentes valores de capacidade de comportar carros V , como mostrado na figura 30.

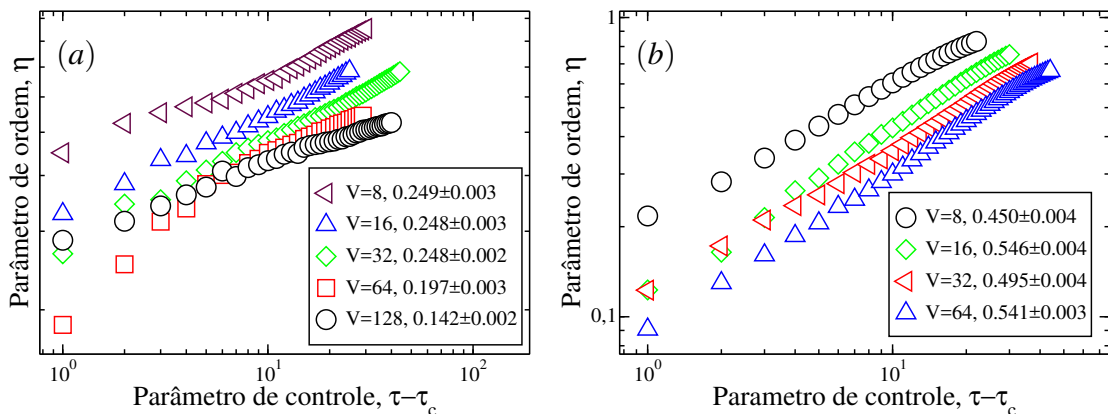


Figura 30 – Fonte: Produção do autor. A figura mostra o comportamento do parâmetro de ordem em função de $(\tau - \tau_c)$ em escala logarítmica. O parâmetro de ordem diverge de forma semelhante para diferentes valores de V . O resultado do escalonamento do parâmetro de ordem de $\eta \sim (\tau - \tau_c)^\gamma$ apresenta expoentes dentro do intervalo $\gamma = [0.14; 0.54]$. O gráfico (a) contém os resultados para uma rede com condição de contorno fechada, enquanto o gráfico (b) contém os resultados para uma rede com condição de contorno periódica.

Quando calculamos o expoente que governa o comportamento em lei de potência nas proximidades do ponto crítico, conforme mostrado na figura 30, buscamos um comportamento universal do parâmetro de ordem para diferentes valores de V . Com esse intuito, analisamos como o parâmetro de ordem η escala com a diferença $(\tau - \tau_c)$. O resultado é mostrado na figura 30. A partir destes dados, podemos identificar um comportamento semelhante para a divergência do parâmetro de ordem considerando diferentes valores de V . O valor do expoente γ na relação $\eta \sim (\tau - \tau_c)^\gamma$ varia entre 0.14 e 0.54. Os resultados atestam que, para valores de $V = 8, 16, 32,$

o valor do expoente revela uma transição mais abrupta quando comparado com os resultados para $V = 64, 128$. Estes resultados reforçam a ideia de que uma capacidade maior de comportar carros resulta em um congestionamento total mais suave ou lento pois existe mais espaço para a alocação de novos carros.

Em seguida analisaremos o mesmo modelo apresentado até agora com a alteração na condição inicial de criação de carros. Este processo de criação de carros ocorrerá apenas no início do processo de simulação. Para esta nova condição inicial, nosso interesse consiste em um entendimento da transição olhando para uma demanda fixa.

5.2 SPQM semi-dinâmico

A condição básica para que haja congestionamento é o aparecimento de uma simples região de *bloqueio* ou *gridlock* (MENDES *et al.*, 2012) na cidade. Esta condição já foi estudada e generalizada para quaisquer sistemas de transporte e é conhecida como o efeito de “*gargalo*” ou *bottleneck* (WRIGHT; ROBERG, 1998; KERNER, 2002), onde existe um sítio/região da rede que possui uma alta demanda de carros trafegando. Neste fenômeno, sítios ou regiões que são extremamente utilizados como rota de tráfego tendem a influenciar o transporte em regiões vizinhas, como um efeito em cascata. Em nosso modelo, esse efeito acontece como consequência da condição de contorno fechada. Embora se trate de uma condição de contorno da rede estudada, esta acaba se estabelecendo na prática, uma vez que os usuários normalmente não estão dispostos a mudarem substancialmente suas rotas por meio de caminhos alternativos bem mais longos. Nesta condição, as ruas centrais possuem uma probabilidade maior de serem escolhidas como um dos pontos da rota de menor caminho entre dois sítios quaisquer da rede, conforme o mapa exibido na figura 31.

Quando um carro necessita passar por uma rota que apresenta ruas já no limite de sua capacidade, este não conseguirá. Esse fenômeno não pode ser evitado devido à ausência de um conhecimento global sobre as vias do sistema. Uma vez estabelecida uma rota, essa não pode ser alterada posteriormente. Com isso, este carro contribui para a formação de um *bloqueio*. Com o surgimento das regiões de bloqueio o sistema certamente evoluirá para o estado de congestionamento. Alcançado este regime, o sistema tende a propagar este congestionamento, pois todo e qualquer carro que tenha como caminho alguma das ruas que pertencem ao bloqueio ficará preso em ruas vizinhas ao bloqueio até que esta rua passe a pertencer ao bloqueio, e assim sucessivamente. A região que apresenta a maior probabilidade de aparecimento de bloqueios é a

região central no caso de condição de contorno fechada, conforme esperado para esse tipo de rede.

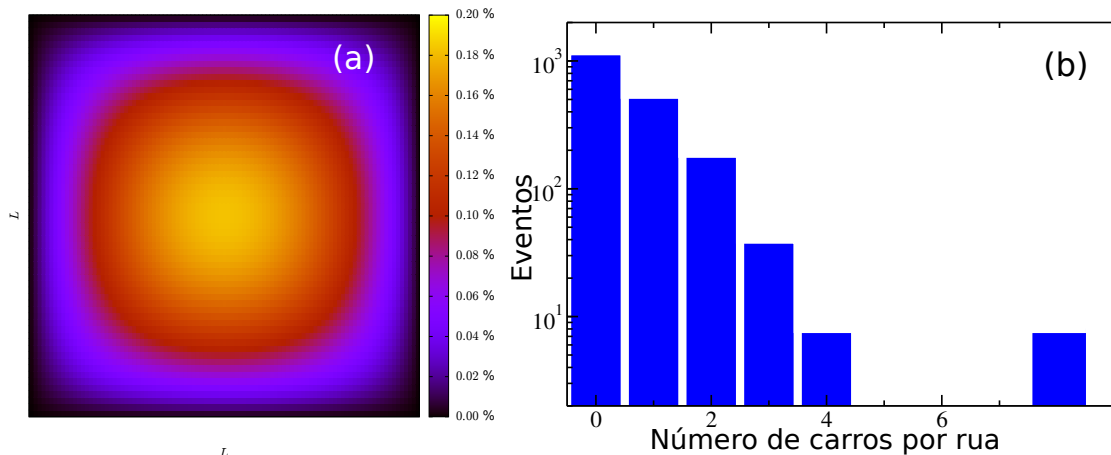


Figura 31 – Fonte: Produção do autor. A figura em (a) mostra os valores de intermediações (*betweenness*) calculadas para uma rede com $L = 64$ com condição de contorno fechada representada em mapa de cores. Dado todos os menores caminhos de um nó i para um j , o mapa representa a proporção de caminhos que passa em um nó i . As cores indicam o valor de *betweenness*, variando do azul escuro até o amarelo em ordem crescente. Em (b) mostramos o histograma do preenchimento das ruas. Os dados foram extraídos de uma simulação em que ocorreu um bloqueio das vias da rede.

Uma forma de analisar o sistema foi então desenvolvida a fim de estudar em que condições a rede se torna suscetível a um estado de congestionamento. Assim, limitamos a entrada de carros na rede apenas ao instante inicial. Esta condição acarreta em um número fixo de carros durante todo o processo de simulação. Neste caso, estamos estabelecendo uma demanda inicial para o trânsito de carros e, com base nesta demanda, pretendemos investigar como o sistema se comporta com relação ao percentual de carros que consegue atingir o seu destino final.

Dada a variação de diferentes condições iniciais, realizamos este estudo para várias sementes, o que significa diferentes combinações de origens e destinos para um mesmo número de carros.

A figura 32 mostra a proporção de casos em relação ao número total de simulações realizadas para os quais os carros não chegam ao seu destino final. Houve o aparecimento de um ou mais bloqueios na rede que impediu o fluxo de veículos. No eixo x da figura 32, o valor do número de carros N_0 está normalizado pela capacidade máxima de armazenamento da rede, ou seja, pelo produto entre o número de sítios S na rede e o volume máximo V de carros suportado

em cada rua. O gráfico mostra um crescimento progressivo da proporção de casos congestionados em relação ao número total de simulações, sem saltos abruptos. Percebemos que, a partir de um certo limite, não há alterações significativas nos resultados. Este comportamento atesta que o aumento do tempo de espera τ (representado em diferentes cores, em ordem crescente da esquerda para a direita), para que os carros possam seguir de uma rua para a próxima em seu caminho, claramente proporciona um melhor desempenho na dinâmica de deslocamento dos carros em relação à chegada destes ao seu destino final. Isso pode ser melhor compreendido se pensarmos em ruas que inicialmente possuem um limite de velocidade elevada e, por alguma questão de segurança, os agentes reguladores resolvem reduzir as velocidades nas vias, ou implementar semáforos para pedestres em várias vias da cidade, o que de fato acarreta em um aumento no tempo de espera em cada via da rede (cidade).

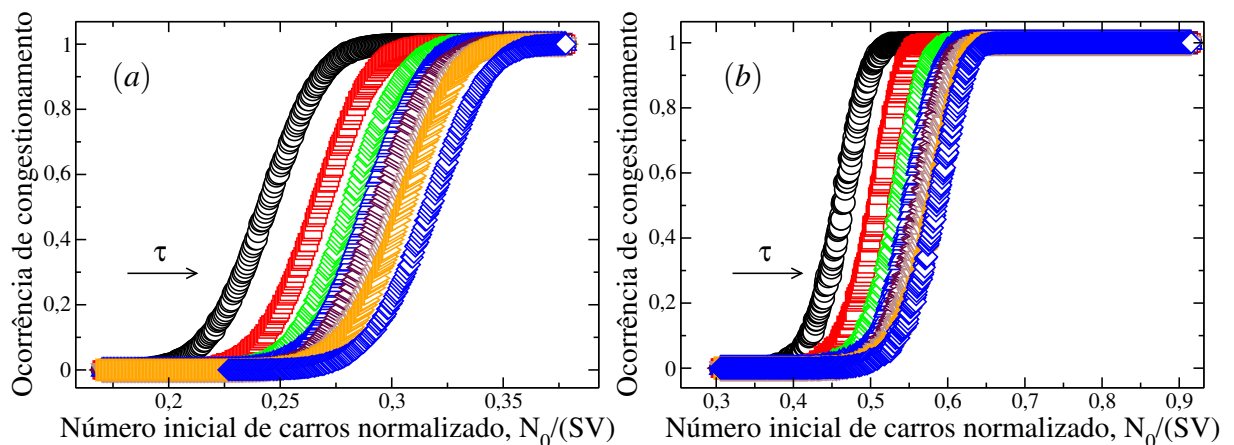


Figura 32 – A figura mostra a proporção de casos de surgimento de *bloqueios* para condição de carros alocados apenas no instante inicial. O crescimento dos casos congestionados não apresenta um comportamento em lei de potência em função de τ , sendo aproximadamente linear entre os limites de 20% e 80% dos casos. Em (a) mostramos os resultados para uma rede com condição de contorno fechada, enquanto em (b) mostramos os resultados para uma rede com condição de contorno periódica.

Em trabalhos anteriores, encontramos a dependência do fluxo de veículos em relação à densidade de ocupação de uma rua. Nestes casos, existe um limite de ocupação para que seja estabelecido um fluxo máximo na via (TREIBER *et al.*, 2012). Caso a densidade de carros exceda um certo limite, o fluxo de veículo passa a diminuir causando congestionamento. Já em nosso modelo, teremos o parâmetro τ sendo determinante para um fluxo interno da via. A maneira como este fluxo acontece é determinante para o aparecimento, ou não, de congestionamentos na rede. Uma vez que os engarrafamentos acontecem devido a um acúmulo primeiramente local,

nas vias, esse comportamento se estende para uma escala global quando as vias bloqueadas começam a interromper o tráfego de veículos.

É fácil ver a relação em nosso modelo entre os tempos τ e as velocidades das vias v_i . Assim, podemos pensar que estamos diminuindo a velocidade de uma via e evitando paradas abruptas entre os cruzamentos, ou mantendo uma distância de segurança entre os carros. Isso permite que os carros, embora estejam deslocando-se com velocidades reduzidas, continuem a se mover nas ruas de forma a evitar acúmulos repentinos excedendo a densidade limite da via, provocando os *bloqueios*.

A velocidade de circulação de veículos em grandes cidades é um assunto de grande relevância, pois altera diretamente a qualidade do transporte na cidade, por motivos de segurança e eficiência. Com este resultado, podemos afirmar que, considerando o modelo apresentado aqui, o aumento de velocidade em uma via tende a provocar um efeito contrário não trivial ao que se espera, quando estamos pensando em fluidez do tráfego. Podemos ainda destacar que existe um limite até onde é possível reduzir a velocidade máxima permitida nas vias e este limite resultar em uma melhoria para o tráfego. Pois neste caso, a rede só apresenta o aparecimento de bloqueios para um número elevado de carros, ou seja, a rede se torna mais eficiente globalmente quando controlamos a transferência de carros de uma rua para outra de uma forma mais sistemática, evitando o acúmulo de veículos em pontos distintos da rede. Isso porque a nossa cidade apresenta uma alta capacidade de conduzir os carros as seus destinos finais, ou seja, uma boa fluidez. Logo, se os carros adquirem permissão de deixar as ruas com rapidez e estes disputam a entrada em uma mesma região com alto valor de intermediação (*Betweenness*), não haverá espaço suficiente para todos devido à limitação física das ruas e, conseqüentemente, alguns carros não conseguirão chegar aos seus destinos.

Usando como base os dados da figura 32, podemos construir um diagrama de fase, conforme mostrado na figura 33, que estabelece os limites em que começaremos a ter casos de congestionamento e quais faixas de valores estes representam 100% dos casos simulados.

Conforme já comentado, o surgimento de um *bloqueio* é determinante para a existência de congestionamentos na rede. A figura 34 mostra dois momentos da rede em uma típica simulação em que, no primeiro instante, figura 34(a), há a formação de um *bloqueio* (pontos em cor azul) que se mantém inalterado até os instantes finais da simulação, figura da direita. Isso ocorre porque os caminhos a serem seguidos pelos carros são independentes, ou seja, mesmo existindo uma determinada rua completamente bloqueada no seu trajeto definido

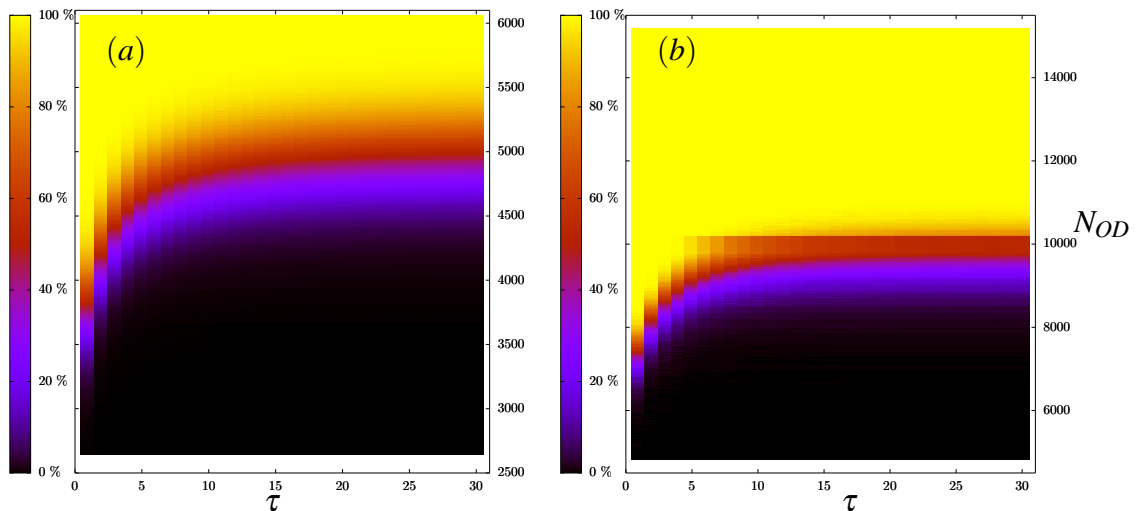


Figura 33 – Fonte: Produção do autor. A figura mostra o diagrama de fase entre os casos em que não há congestionamento, representado pela cor preta, e onde este número representa todas as simulações realizadas, representado pela cor amarela, em função do tempo mínimo de espera τ do modelo. Estes resultados foram obtidos para 10000 simulações em (a), com condição de contorno fechada, e 1000 (b), com condição de contorno periódica. O gráfico (a) contém os resultados para uma rede com condição de contorno fechada, enquanto (b), os resultados para uma rede com condição de contorno periódica.

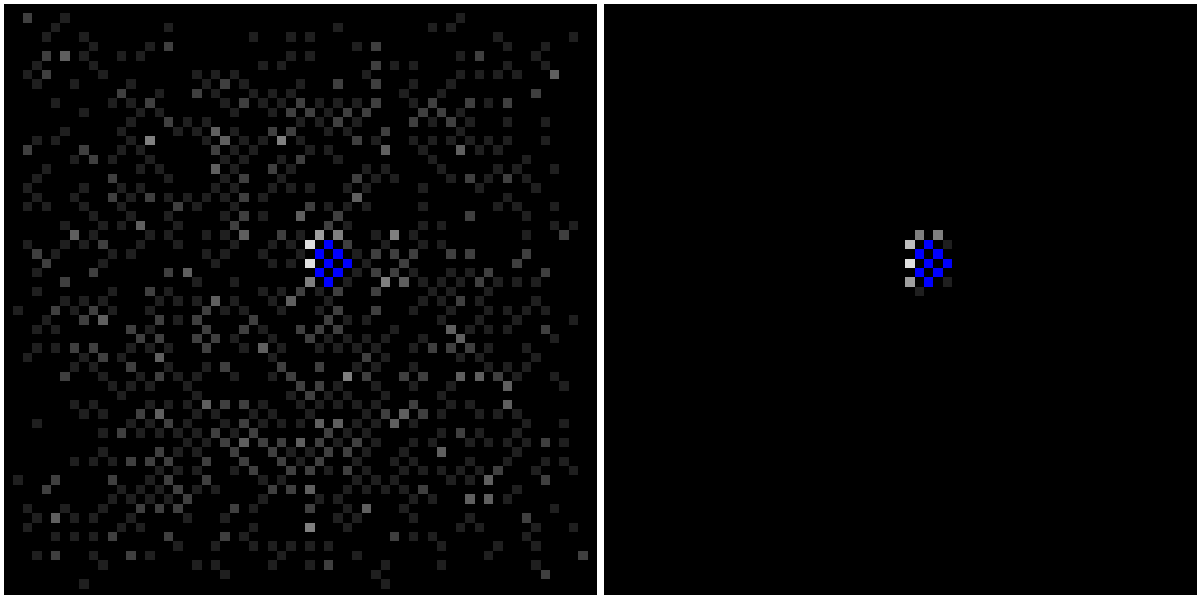


Figura 34 – Fonte: Produção do autor. A figura mostra a formação de *bloqueio* na região central da rede. Nas imagens, o nível de lotação da rua é representado por pontos, dependendo da intensidade na direção do branco quanto mais próxima do limite máximo de comportar carros a via se encontra. A cor azul representa a rua que alcançou a sua capacidade máxima.

pelo caminho mínimo, não existe possibilidade de mudança no trajeto. Esta condição pode ser observada no cotidiano quando a maioria dos motoristas que estão em um congestionamento

não conseguem sair com facilidade. Ainda nesta condição, os demais motoristas que fazem uma determinada rota diariamente, e que está congestionada, dificilmente mudarão a sua rota. Com o advento de novas tecnologias e aplicativos designados para melhorar o trânsito, poderíamos evitar estes problemas que surgem devido à limitação do conhecimento local, uma vez que os motoristas se utilizariam de sistemas que monitoram o trânsito em tempo real e poderiam indicar as melhores rotas evitando as regiões de maior congestionamento.

5.3 Modelo discreto e espacial de fila (SPQM) aplicado em cidades reais

Neste capítulo aplicaremos o modelo discreto e espacial de fila (SPQM) em cidades reais. Inicialmente descreveremos a adaptação feita para adequação dos mapas para o modelo discreto e em seguida seguiremos com a análise de transição de fase entre os estados onde os carros chegam aos seus destinos (livre) e o estado onde os bloqueios impedem o livre tráfego de veículos (congestionado).

5.3.1 Adequações dos mapas ao modelo (SPQM)

Todos os mapas utilizados neste trabalho foram extraídos do *Open Street Map (OSM)*, que possui distribuição livre. Esses dados devem ser adaptados para receber o modelo (SPQM), ou seja, precisamos que as ruas contidas nos mapas possuam todas as atribuições inerentes ao modelo aplicado. Isso inclui capacidade de armazenar carros e capacidade de entregá-los, e assim, estabelecermos o valor de τ_c .

Os dados das ruas foram extraídos utilizando uma combinação de scripts em *Python2* e *Python3*, seguindo as atribuições abaixo:

1. As ruas selecionadas para as simulações foram as que são consideradas como *highway* podendo ser: *primary*, *primary_link*, *secondary*, *secondary_link*, *tertiary*, *tertiary_link*, *trunk*, *trunk_link*, *motorway*, *motorway_link*, *platform* e *residential*;
2. As ruas que não possuem atribuição de sentido explícita nos dados, ou seja, cujo valor *oneway* seja diferente de 1, -1 ou *no* são consideradas de sentido duplo;
3. Todas as ruas foram transformadas em um conjunto de segmentos de retas, em que cada um destes seguimentos contém informação de número de faixas, sentido e tamanho;
4. As ruas que não possuem atribuição de número de faixas explicitamente são consideradas com duas faixas.

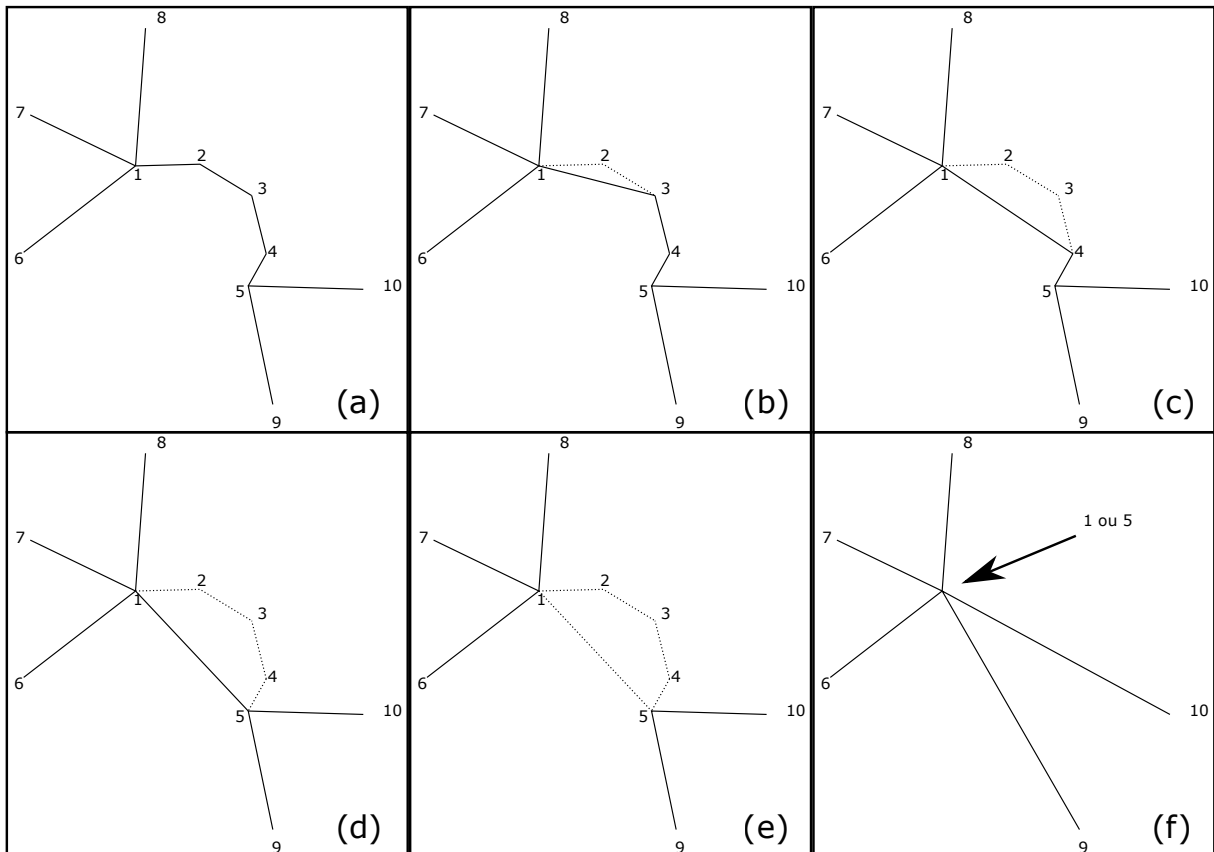


Figura 35 – Fonte: Produção do autor. As figuras (a),(b),(c),(d),(e) e (f) mostram uma sequência de procedimentos utilizados para a devida realocação dos segmentos de reta para que possuam um tamanho mínimo de 50 metros. Em (b) mostramos que o ponto a ser realocado é o 2 pois esse possui conectividade menor que o ponto 1. Logo, a rua será realocada para o ponto 3. O processo é repetido até que o segmento possua um tamanho mínimo de 50 metros.

Considerando os processos descritos acima, fizemos uma adequação do mapa para receber o modelo *SPQM*. A definição do mapa é dada pela quantidade de pontos existentes que recebem os seguimentos de reta. Porém, o comprimento dos segmentos de retas criados possuem valores tão pequenos que não permitem a aplicação direta do modelo, pois não haveria espaço suficiente para que os carros ocupassem espaço dentro das ruas. Decidimos usar um algoritmo de realocação dos seguimentos de retas para que estes tenham um valor mínimo de 50 metros. O procedimento é descrito nos quadros da figura 35. A figura mostra que os segmentos de reta $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ são pequenos demais para receber o modelo *SPQM*. Mesmo após todo o processo demonstrado entre as figuras 35(a)-(d), o novo seguimento $1 \rightarrow 5$ ainda é menor que 50 metros, precisando dos passos seguintes para a realocação das conexões do ponto 5 para o ponto 1 até que todos os segmentos possuam um tamanho mínimo para a aplicação do modelo *SPQM*. De maneira sistemática, uma vez encontrado um seguimento de reta r_{ij} com tamanho

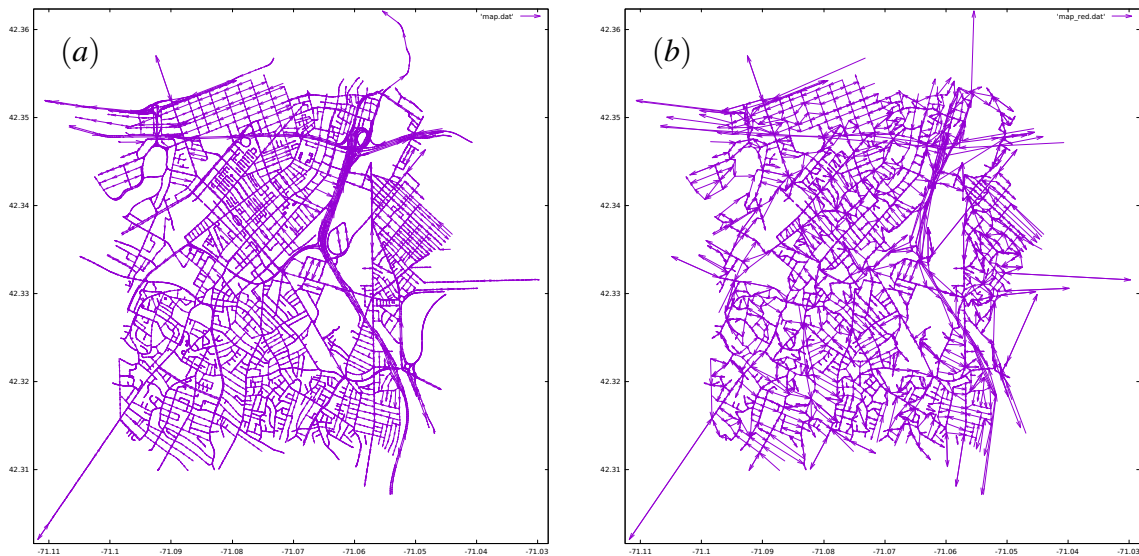


Figura 36 – Fonte: Produção do autor. As figuras mostram o mapa original de Boston em (a) antes de ser tratado e, em (b), os mapas utilizados nas simulações após o tratamento de realocação de ruas. O eixo das abcissas e ordenadas contém as coordenadas de longitude e latitude, respectivamente. Processos semelhantes foram executados para as cidades de Fortaleza e Porto.

menor que 50 metros, identificamos a conectividade dos nós i e j , e aquele que possui menor conectividade é realocado para um nó que possui conexão com o mesmo k , proporcionando um novo segmento de reta $r'_{(k,j)ou(i,k)}$ com tamanho maior que r_{ij} porém menor que todos os outros seguimentos possíveis $r'_{(k_p,j)ou(i,k_p)}$. Na figura 35(a) $i = 1, j = 2$ e $k = 3$. O algoritmo selecionará o nó a ser realocado prioritariamente pela conectividade, em seguida pela nova distância e, por último, aleatório. O algoritmo é executado até que não haja mais ligações pequenas. O resultado é o mostrado na figura 36, onde o gráfico da figura 36(a) mostra o mapa original e em (b) o resultado final. As conectividades médias dos grafos resultantes são $\langle k_F \rangle = 1.65$ para Fortaleza, $\langle k_B \rangle = 2.36$ para Boston e $\langle k_P \rangle = 1.75$ para Porto.

Para aplicarmos o modelo *SPQM* resta-nos determinar alguns parâmetros. O volume que os carros ocupam será o de um carro médio, que foi estabelecido como $5m$. Já a relação entre número de faixas e capacidade de entregar carros será de 1 para 5. Assim, o passo de tempo será parametrizado em $1s$. Assumiremos também que, caso o número de carros total chegue a 80% da capacidade total, a simulação chega ao fim.

5.3.2 *SPQM aplicado a cidades reais*

Os resultados descritos acima nos permitem aplicar o modelo SPQM aos novos mapas e analisar para quais valores de τ a rede apresenta transição de fase dado um número fixo de carros criados por passo de tempo. As transições de fase para as cidade de Fortaleza, Boston e Porto são mostradas na figura 37(a), 37(b) e 37(c), respectivamente. Estas apresentam uma abrupta transição entre os estados livres e congestionados. Isso acontece prioritariamente devido à forma da rede que representa a cidade. Se a rede possui conectividade média menor que as redes ideais analisadas no capítulo anterior, devemos esperar que mais carros queiram seguir por uma rota que passe pelo centro desta rede, o que facilita o aparecimento dos *bloqueios* conforme descritos no capítulo anterior. Devido ao fato de as vias das cidades apresentarem uma baixa conectividade e serem direcionadas, ou seja, apresentarem um sentido determinado nas vias, o número de possíveis caminhos são bastante reduzidos em algumas regiões. Por sua vez, o congestionamento afeta as regiões vizinhas e se espalha até que toda a rede se torne congestionada com o passar do tempo (WRIGHT; ROBERG, 1998).

Agora, temos ruas que são muito mais utilizadas do que outras. Logo, se estas ruas, que possuem um alto *betweenness* (NEWMAN, 2010), são congestionadas, a cidade rapidamente será afetada e passará para um estágio onde o congestionamento se estende por grandes regiões da cidade.

No capítulo anterior, trabalhamos com redes em que era possível aplicarmos condição de contorno periódica e retirar os efeitos de tamanho finito descentralizando a importância das ruas. Agora a aplicação de condição de contorno periódica não faria sentido. Esta condição encontra-se implícita em uma cidade, uma vez que podemos optar por rotas longas utilizando regiões ao redor da cidade. Este fato, porém, não ocorre na prática em uma cidade. Os usuários não costumam optar por caminhos que demandem longas distâncias e acarretem em longos períodos de tempo. Usualmente, estes escolhem rotas mais próximas, o que provoca o surgimento de grandes congestionamentos.

Outro fato importante é que este fenômeno ocorre em regiões distintas da cidade, e se um condutor mudar sua rota acabará se deparando com outras regiões engarrafadas em diferentes partes da cidade. Neste caso é pouco provável que a mudança de rota traga algum ganho considerável em termos de tempo para o usuário.

Quando comparamos os resultados mostrados na figura 37, verificaremos que, à medida que aumentamos o número de carros criados na rede a cada instante, o tempo mínimo τ_c

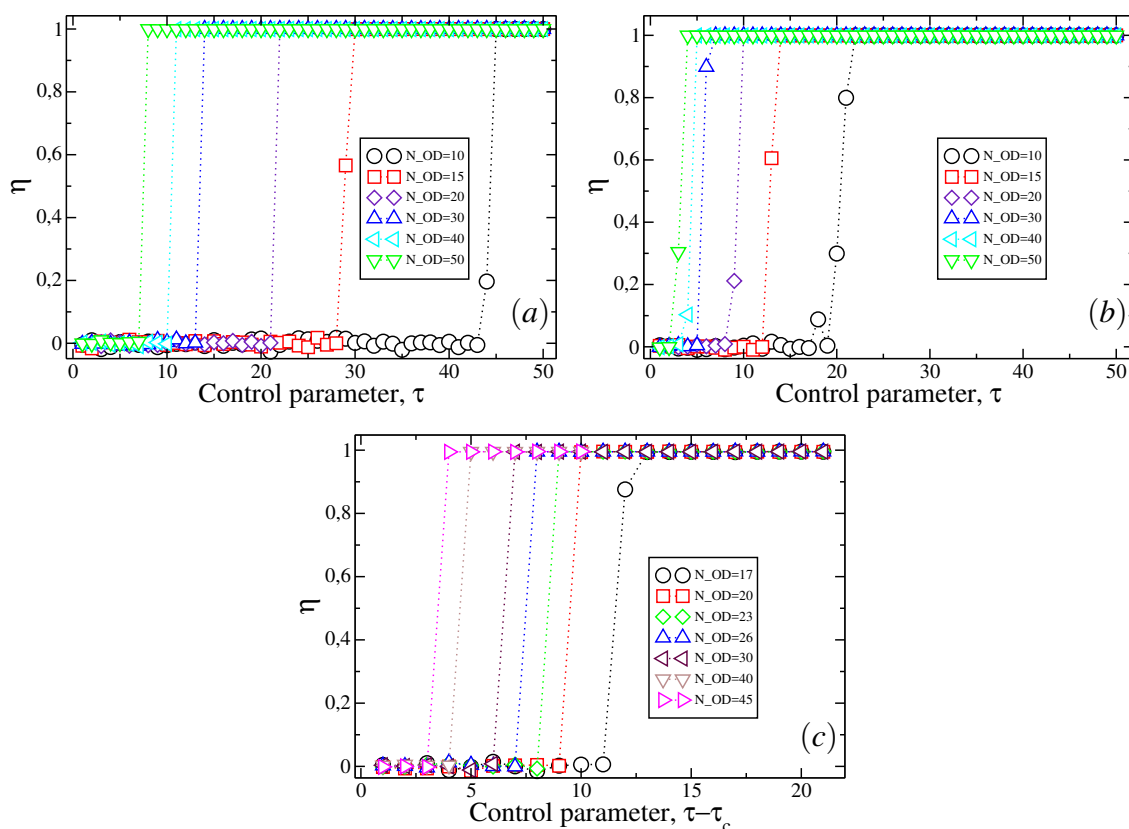


Figura 37 – Fonte: Produção do autor. A figura mostra as transições de fase referentes às cidades de (a) Fortaleza, (b) Boston e (c) Porto. No eixo das abcissas, temos o parâmetro de controle τ , que é o tempo mínimo que um carro deve esperar em uma rua até se habilitar para ir para a próxima rua em direção ao seu destino. Já η é a razão do número de carros que não conseguem chegar ao seu destino em relação aos carros que são criados na rede N_{OD} .

que os carros esperam nas ruas para que as redes (cidades) não congestionem sofre alteração nas duas cidades analisadas.

Os resultados mostrados na figura 37, quando estendidos para outros valores de N_{OD} , permitem-nos determinar um limite de espera τ_c nas vias para as quais acontece a transição entre os estados livre e congestionado. Caso tivéssemos acesso aos dados reais de demanda de carros que circulam em uma determinada região da cidade, poderíamos tentar estabelecer, por meio desta análise, o tempo máximo de espera (em média) para os carros em vias urbanas, no sentido de evitar congestionamentos. Como resultado de uma análise semelhante, temos os dados mostrados na figura 38, onde o valor para o ponto crítico, no qual surgem os congestionamentos, se comporta em função de uma demanda de veículos para regiões específicas em cidades distintas.

Como esperávamos, à medida que o número de carros criados a cada instante N_{OD} aumenta, teremos τ_c cada vez menor. Os resultados obtidos mostram que, quando a demanda

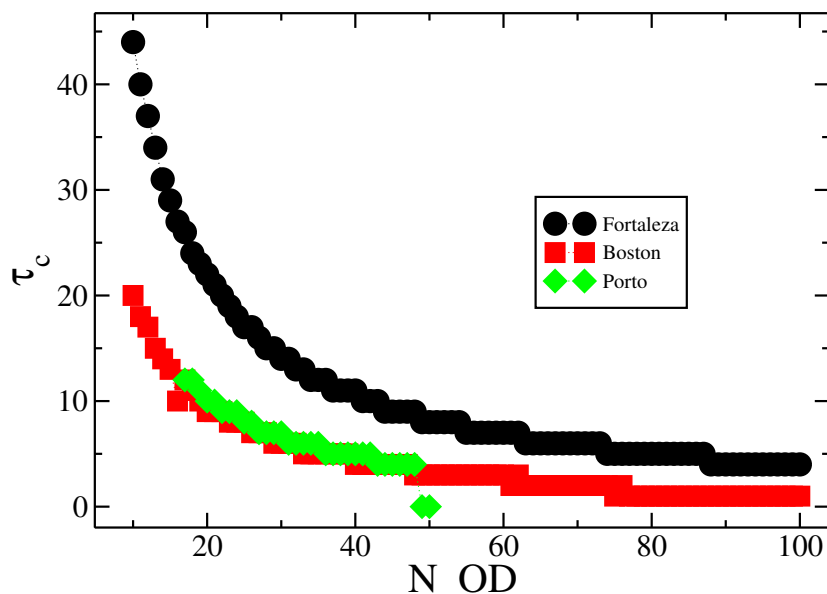


Figura 38 – Fonte: Produção do autor. A figura mostra os pontos críticos obtidos para vários valores de N_{OD} correspondentes à figura 37 para três centros urbanos. À medida que a demanda de carros circulando aumenta na cidade, a rede fica mais vulnerável ao aparecimento de congestionamento, pois o limite de espera vai diminuindo.

nas cidades analisadas é alta, os valores de τ_c tendem a um mesmo valor independentemente da cidade, ou seja, as redes que representam os mapas das cidades não se diferenciam de forma significativa em sua eficiência de evitar congestionamentos, considerando uma demanda do tipo aleatória. Fica evidente que o conhecimento da demanda real estabelece uma análise mais fidedigna sobre os valores de τ_c para cada cidade. Porém, o mesmo não acontece quando a demanda é baixa. Podemos observar que Fortaleza apresenta maior eficiência em evitar congestionamento quando a demanda de carros é baixa, pois os carros podem esperar mais tempo nas vias sem que haja o aparecimento de regiões que impedem a circulação dos veículos.

Podemos ainda construir uma função de $\tau_c(N_{OD})$, conforme mostrado na figura 38, que escala na forma $\tau_c \sim (N_{OD})^{-\nu}$. Portanto, dado o número de carros que circulam em uma cidade podemos determinar qual deve ser o tempo máximo que estes devem esperar para passar para a próxima rua pertencente a sua rota. Este valor pode servir como uma base para que intervenções nas ruas das cidades não venham a fazer com que o tempo de trânsito nas vias difiram muito do valor aqui sugerido. Caso contrário, estes veículos irão se acumular na cidade. Já o expoente ν nos permite indicar qual o mapa (rede da cidade) apresenta um melhor tráfego de acordo com o aumento do número de veículos que circulam na cidade. Para os mapas considerados, obtivemos um valor aproximado de $\nu = -1.06$, como mostra os ajustes lineares realizados nas curvas exibidas na figura 39.

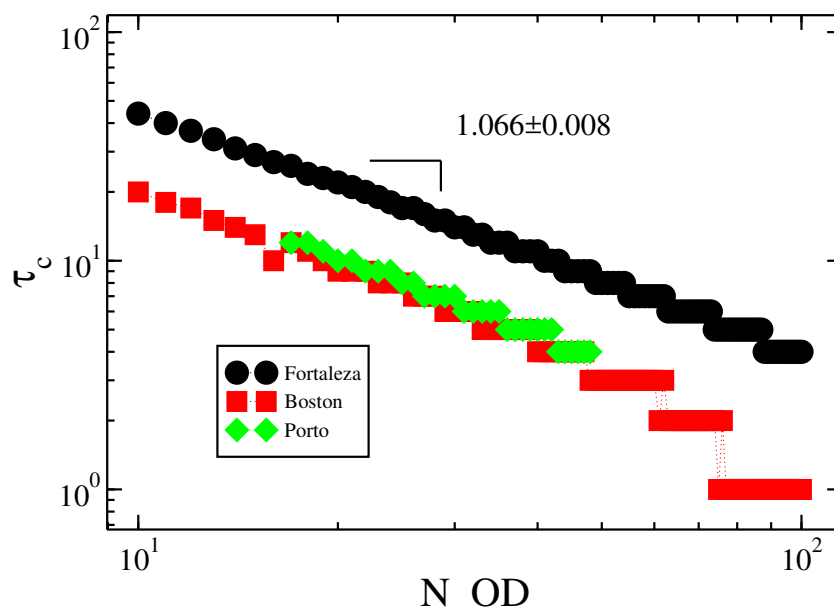


Figura 39 – Lei de escala para os pontos críticos obtidos para vários valores de N_{OD} utilizados na figura 38. O gráfico mostra que a forma como τ_c varia com N_{OD} não apresenta diferenças significativas entre as cidades estudadas.

Este resultado sugere que a taxa de decrescimento do parâmetro crítico τ_c em função da demanda de carros N_{OD} apresenta um comportamento universal para redes que representam mapas de cidades, utilizadas neste trabalho. É claro que este comportamento deverá ser investigado em regiões maiores das cidades ou em outras partes distintas para confirmar tal indicação. Também deve ser analisado em cidades que apresentam propriedades diferentes (CARDILLO *et al.*, 2006), quanto a sua forma de desenvolvimento ao longo do tempo, das que foram analisadas aqui.

Ao longo deste capítulo, vimos a aplicação do modelo simulado do transporte de veículos em cidades virtuais e reais com adaptações. Na próxima seção, estudaremos a aplicação deste modelo para entender como a existência de desordem na distribuição dos valores de τ para diferentes vias da cidade (rede) interfere no aparecimento de congestionamento.

5.4 Modelo espacial de fila (SPQM) com desordem no parâmetro τ

Sabemos que o fator que mais influencia o aparecimento de congestionamentos em uma cidade é o quanto uma rua está congestionada em relação às suas ruas vizinhas, considerando o tráfego da rede, ou seja, a existência de “gargalos” que concentram o fluxo de veículos em determinadas regiões da cidade (DEMŠAR *et al.*, 2008).

Nas seções anteriores, abordamos vários sistemas que tratam a dinâmica de transporte

de veículos em uma cidade (rede) e como se comportam à medida que alteramos as suas características, ou seja, as variáveis que os descrevem. Neste seção, ampliaremos nossos estudos considerando o modelo *SPQM* com desordem no parâmetro τ . Vale ressaltar que apresentaremos os resultados do modelo *SPQM* com concorrência de ruas, ou seja, um modelo semelhante ao transporte de informação em redes de computadores (SILVA *et al.*, 2018). Porém, na última subseção, ampliaremos a nossa análise para o caso sem concorrência de ruas.

Os efeitos de desordem em sistemas de natureza estocásticos são bastante frequentes (PELKOWITZ, 1987; BOJDECKI; HOSZA, 1984; CHATTERJEE; LORING, 1994). No capítulo 4, constatamos os efeitos da desordem nas distâncias entre os sítios de uma rede regular que representam um sistema de *mundo pequeno* nas redes de Kleinberg. Constatamos que a resposta da rede muda completamente quando trabalhamos com valores de α que favorecem o aparecimento de ligações de longo ou curto alcance (KLEINBERG, 2000). Considerando heterogeneidades nas vias da cidade quanto ao limite de velocidades ou número de semáforos, seguiremos com a implantação de desordem nos valores para o parâmetro τ atribuído às vias que compõem a rede (cidade). Consideraremos dois tipos de desordem para τ : através de uma distribuição gaussiana e, posteriormente, por meio de uma distribuição em lei de potência.

A representação de uma grandeza por meio de uma distribuição Gaussiana $G(\mu, \sigma)$ fica estabelecida pela determinação dos parâmetros μ e σ , que representam a média e o desvio padrão, respectivamente. Já para a distribuição em lei de potência $P \sim x^{-\alpha}$, é necessária a determinação do parâmetro α para a descrição completa da distribuição. Utilizaremos a desordem via distribuição gaussiana permitindo alterações mais suaves no parâmetro τ . Já para o caso da distribuição em lei de potência, teremos variações mais significativas no nosso parâmetro τ entre os valores máximos e mínimos.

5.4.1 Desordem de τ através da distribuição gaussiana

A distribuição gaussiana pode ser assimilada em diversas situações (BORGES *et al.*, ; BRÉON; HENRIOT, 2006; PILON, 2015), inclusive na criação de sistemas livres de enviesamento para a determinação de menores caminhos em uma rede espacialmente localizada (WANG *et al.*, 2015), ou seja, onde não queremos privilegiar qualquer simetria da rede. Quando analisamos altura, idade ou massa de uma população, é fácil se obter distribuições gaussianas para cada uma destas medidas. Para este tipo de distribuição temos uma média bem definida com um desvio padrão que localiza 90% dos valores que se distribuem simetricamente em relação

à média μ . Já para as distribuições em lei de potência isso não acontece. Para estes casos, não é possível estabelecer $\langle x \rangle$, pois a curva da função densidade de probabilidade que liga o valor mais recorrente ao menos recorrente varia em lei de potência. Neste caso, não existe um tamanho característico na distribuição. Ainda é possível determinar os valores que são mais ou menos frequentes de acordo com os limites impostos à distribuição. Porém, não há simetria na distribuição das vizinhanças desses valores.

5.4.1.1 Modificações no modelo

Para observar o comportamento sobre outra perspectiva, estabelecemos como parâmetro de controle o número de carros que são criados a cada instante N_{OD} . Também modificaremos o valor de τ atribuído como constante para as vias da rede, para o caso onde estes valores são definidos a partir de uma distribuição gaussiana $G(\mu_\tau, \sigma_\tau)$. Este fato aumenta a desordem do sistema, pois haverá regiões em que os carros poderão passar com mais ou menos facilidade. Devido a este “ruído” nos valores de τ , o menor caminho* não será apenas a distância de Manhattan entre os pontos. Para isso, usaremos o algoritmo de Dijkstra (DIJKSTRA, 1959b) para o cálculo dos menores caminhos que os carros devem percorrer. O peso definido para uma ligação entre duas ruas $P(i, j)$ será o valor de τ_i . Isso porque, para um carro que deseja realizar tal trajeto, é necessário que este passe apenas pela fila no sítio i , sendo entregue em seguida ao sítio j , se no sítio j ainda for possível a alocação de espaço. Logo, o tempo mínimo que um carro pode levar na sua trajetória pode ser descrito por $t_{\text{mínimo}}(i, j) = \sum_{i, i \neq j} \tau_i$, onde i representa todos os sítios em que o carro passará até chegar ao destino j . Esse tempo mínimo de viagem só será possível na situação em que não aconteça nenhum atraso na trajetória percorrida. Assim, qualquer atraso no percurso gerado por congestionamentos levará ao aumento deste tempo de viagem.

5.4.1.2 Resultados obtidos para redes com concorrência de ruas

Pela grande quantidade de parâmetros do modelo, decidimos, no primeiro momento, realizar simulações com os valores na distribuição de τ concentrados em torno de um valor médio com $\sigma_\tau = 0.33$. Decidimos, também, reproduzir alguns resultados do trabalho (ÇOLAK *et al.*, 2013) em que o modelo *SPQM* foi introduzido. Fixamos os parâmetros $L = 32$, $\tau = 16$,

* Aqui, o menor caminho que um carro percorrerá entre um sítio i e um sítio j será definido como aquele cujo tempo de navegação é o mínimo possível entre a origem e o destino.

$C = 16$ e calculamos o ponto crítico do sistema para diferentes valores de volume V . O valor de σ_η foi utilizado para se estabelecer o ponto crítico do sistema. Logo, onde o desvio padrão do parâmetro η for máximo, definiremos como o ponto crítico da transição de fase, N_{OD_c} , onde N_{OD} é o nosso parâmetro de controle para que ocorra a transição.

Os resultados encontrados nas simulações são semelhantes aos que já vimos nas seções anteriores e podem ser vistos detalhadamente no apêndice A.1. Vemos que o número de carros que são criados a cada passo de tempo é determinante para que haja o congestionamento da rede. À medida que o valor N_{OD} aumenta, fica claro que o sistema se torna mais suscetível ao aparecimento de áreas de congestionamento, *gridlocks* e, conseqüentemente, à disseminação desse congestionamento para todo o sistema.

Mostramos na figura 40 os resultados encontrados à medida que o parâmetro V aumenta. Na figura 40(a), temos a divergência $\sigma_{N_{OD_c}}$, sendo que cada ponto representado é o resultado obtido por meio da realização de 100 simulações. O resultado constata uma tendência de aumento na flutuação do valor de N_{OD_c} à medida que o parâmetro V aumenta. Essa tendência fraca revela que a incerteza no valor do ponto crítico permanece em cerca de 10% do valor de V . Da mesma maneira, obtivemos a curva de N_{OD_c} , normalizado por C , em função de V/τ . O resultado mostrado na figura 40(b) estabelece um valor de 1.18 para o coeficiente linear do ajuste realizado, e é semelhante ao que já foi publicado por (ÇOLAK *et al.*, 2013) e seus colaboradores para redes não periódicas. Porém, em nossas simulações, não atingimos o comportamento em forma de platô assintótico que foi apresentado por (ÇOLAK *et al.*, 2013).

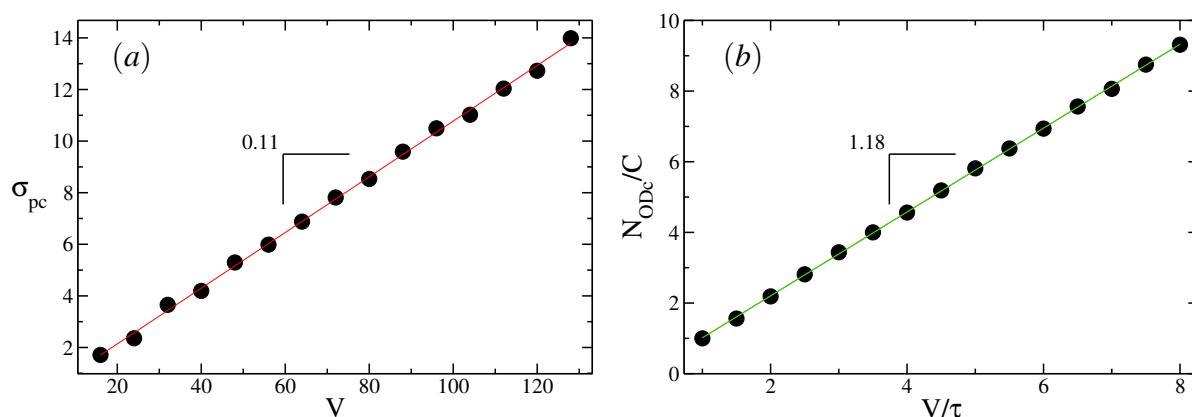


Figura 40 – Divergência na determinação do ponto crítico N_{OD_c} e seus valores em função de V . Em (a) vemos que a dispersão nos valores de N_{OD_c} se mantém constante em cerca de 10% do volume V . Em (b) encontramos um valor para o ajuste semelhante ao encontrado por (ÇOLAK *et al.*, 2013). Cada ponto foi obtido por meio de 100 simulações.

Também realizamos um estudo sobre a influência do tamanho do sistema L sobre o valor do ponto crítico N_{ODc} . Os resultados detalhados por L para as transições de fase podem ser encontrados no apêndice A.2. O resumo destes resultados é apresentado na figura 41. Na figura 41(a), verificamos que o ponto crítico N_{ODc} sempre cresce à medida que o tamanho do sistema aumenta. Porém, nosso interesse é descobrir qual o comportamento do sistema quando este se aproxima do limite termodinâmico, ou seja, quando a função $N(L)$, que representa o número total de ruas em função de L , tende ao infinito. Assim, a figura 41(b) e 41(c) nos mostra o valor esperado de $N_{ODc} \sim N(L)^{-1}$ onde constatamos que o sistema não tende assintoticamente para nenhum valor constante. Isso nos permite inferir que o parâmetro de ordem N_{OD} não se mantém robusto quando nos aproximamos dos limites termodinâmicos, ou seja,

$$\lim_{N(L) \rightarrow \infty} \frac{N_{ODc}}{N(L)} = 0. \quad (5.2)$$

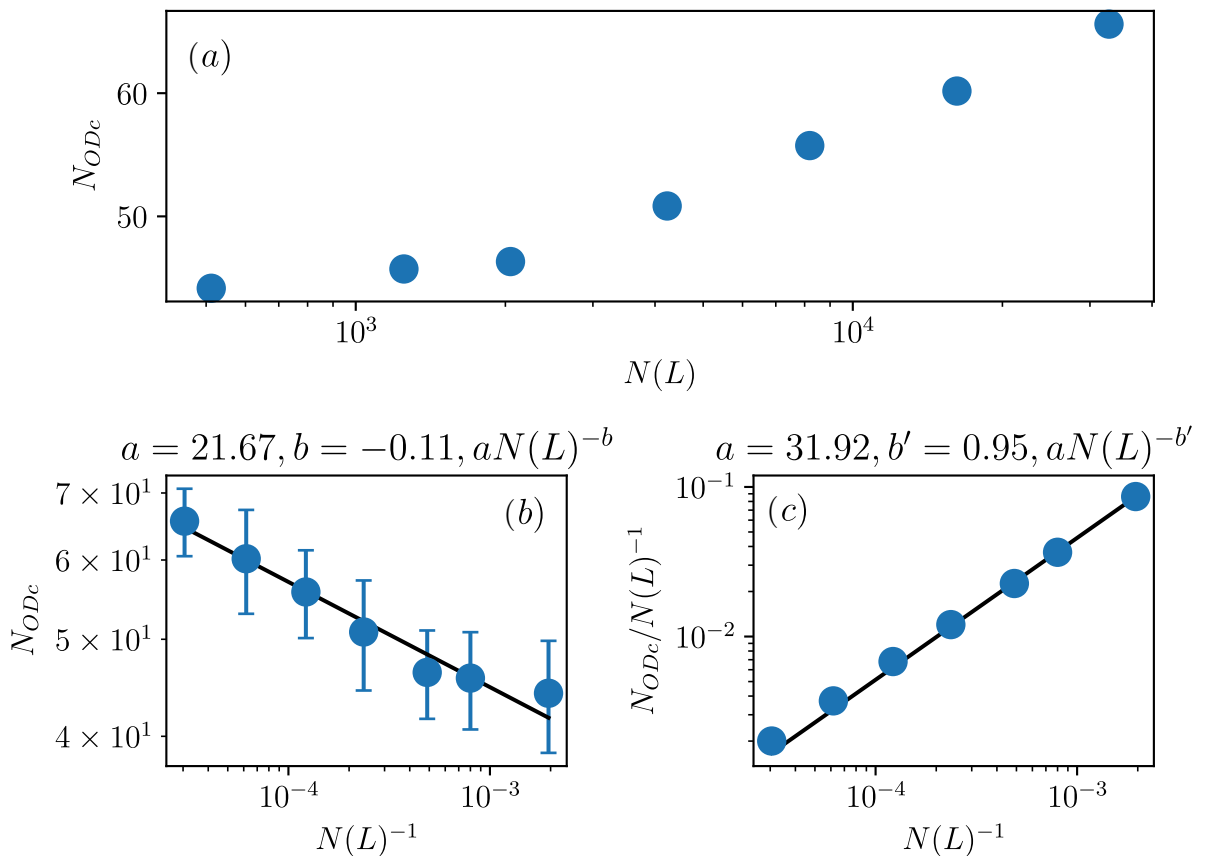


Figura 41 – Comportamento do ponto crítico no limite termodinâmico. Em (a), temos o ponto crítico N_{ODc} em função do tamanho do sistema. Em (b) e (c), o resultado para ajustes de acordo com uma função do tipo $aN(L)^{-b}$, onde a e b são constantes e ajudam a entender o comportamento do ponto crítico com o inverso do tamanho do sistema.

5.4.2 *Desordem do parâmetro τ através da distribuição em lei de potência*

Nesta subseção, apresentaremos os resultados da inserção de desordem no sistema através de uma distribuição de τ segundo uma distribuição que segue uma lei de potência $P(\tau) \sim \tau^{-\alpha}$. Como já discutimos no início desta seção, este fato aumenta a desordem do sistema de uma maneira mais abrupta, quando comparado com a distribuição gaussiana, pois haverá regiões em que os carros poderão passar com muito mais facilidade do que outras. Ou, no caso inverso, regiões onde o fluxo de veículos é bastante reduzido quando comparado às demais vias da cidade. No caso da desordem adicionada via gaussiana temos um efeito parecido. Porém, a variação permitida pela distribuição gaussiana com $\sigma = 0.33$ é muito menor do que a permitida por meio de uma distribuição em lei de potência. Aqui, procuramos simular cidades que possuam essa tendência de desordem no tempo de tráfego de suas vias, cidades cujo tempo de tráfego em algumas vias seja bastante diferente das demais.

O parâmetro α controla o balanceamento entre os valores de τ maiores e menores. Quando o valor de α é maior que zero significa uma maior probabilidade de haver ruas com valores de τ pequenos. Já no caso contrário, ruas com tempo de espera maior são a maioria no sistema. Um caso peculiar acontece quando $\alpha = 0$. Aqui, a probabilidade dos valores maiores e menores é igual, estabelecendo o estado de maior desordem possível entre os valores de τ , ou seja, uma distribuição uniforme.

Devido à diferença dos valores de τ , que agora seguirão uma lei de potência, foi necessário ajustar a capacidade de entrega de carro para $C = 8$. Isso permite obter valores da transição entre o regime livre e congestionado em patamares maiores, facilitando a determinação do ponto crítico N_{OD_c} .

A maneira como o parâmetro η reflete a transição é semelhante aos gráficos mostrados nas seções anteriores e pode ser vista no detalhe no apêndice A.3. Ao todo, realizamos simulações com valores de α dentro do intervalo $\alpha \in [-3, 3]$. Já os valores de τ , estabelecidos pela distribuição, estão contidos no intervalo de $[1, L]$. O limite superior citado foi arbitrário, pois quando tentamos valores maiores o sistema se encontrava no regime congestionado em praticamente todos os casos.

A figura 42 mostra o comportamento do ponto crítico do sistema à medida que aumentamos o valor de V , semelhante ao que vimos na seção anterior. Porém, ela traz várias curvas, uma para cada valor de α simulado. Constatamos que para todas as curvas existe um ponto de mudança de comportamento em relação à V/C . Todas as curvas tendem a se aproximar

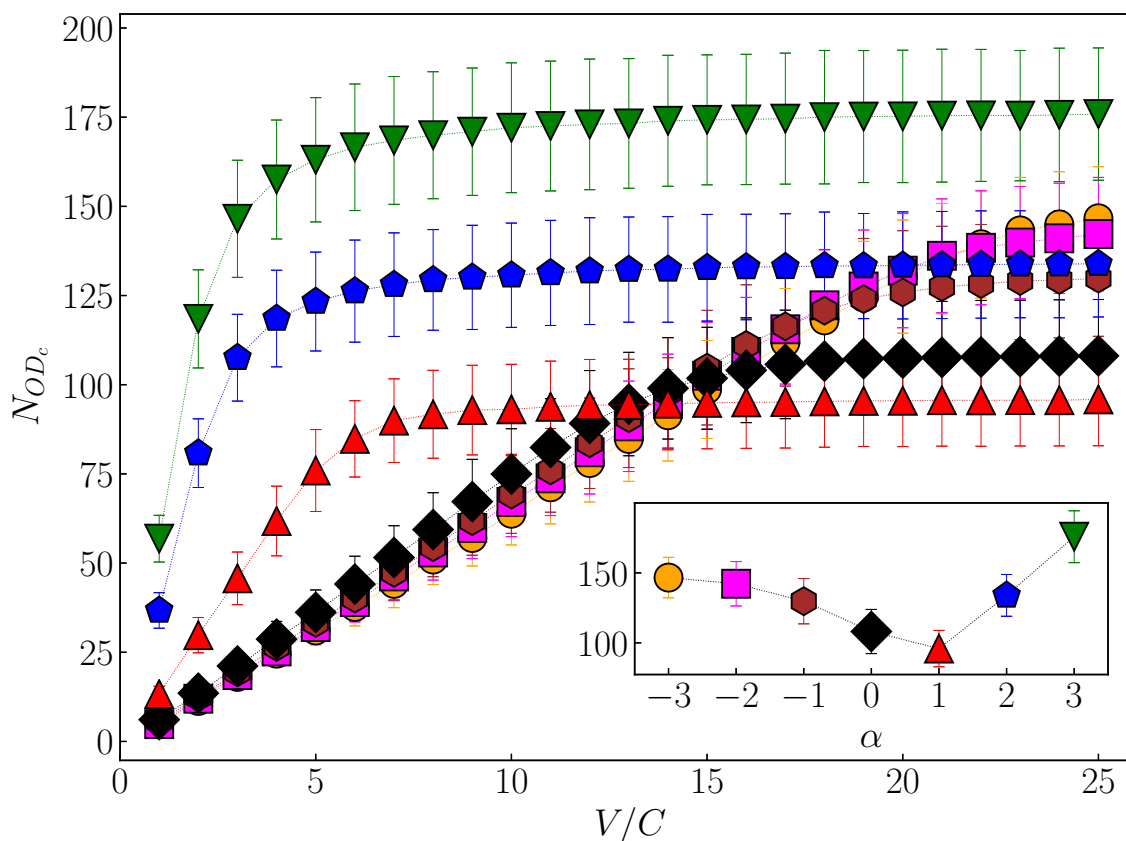


Figura 42 – Ponto crítico N_{OD_c} e valores assintóticos (figura menor), calculados para diferentes distribuições dos valores de τ segundo uma lei de potência com $P(\alpha) \sim \tau^{-\alpha}$. O resultado sugere melhores condições de tráfego para $\alpha \in [0, 1]$. As cores e símbolos da figura menor correspondem aos mesmos valores de α para a figura maior.

de um valor fixo de N_{OD_c} à medida que a quantidade V/C aumenta, como mostra a figura 42. Da mesma forma, também vemos que a maneira como estas curvas tendem a este patamar acontece de maneira diferente, dependendo se $\alpha < 0$ ou $\alpha > 0$. Para $\alpha > 0$, os sistemas se estabilizam muito mais rápido quando comparado à situação de $\alpha < 0$, além de possuir um valor inesperado para $\alpha = 0$.

À medida que o volume das ruas aumenta, a rede, que representa as ruas de uma cidade, chega a um valor assintótico de N_{OD_c} que não depende mais do volume de carros comportados por rua. Dadas as assíntotas das curvas para os valores de α , chegamos ao gráfico inserido no gráfico principal na figura 42, onde representamos o patamar assintótico das curvas em função dos α s utilizados nas simulações. Ele indica que a distribuição de tempos de espera τ aleatório, ou seja, quando $\alpha = 0$, pode levar o sistema a um ponto crítico N_{OD_c} igual ou até melhor quando comparado a valores de $\alpha > 0$, que favorece o aparecimento de valores de τ menores. Os dados mostram uma singularidade quando $\alpha = 1$, ou seja, quando a distribuição de τ favorece valores menores.

O resultado da figura 42 é bastante intrigante, uma vez que a completa aleatoriedade na distribuição dos tempos τ , ou seja, valores igualmente prováveis dentro do intervalo $\tau \in [1, L]$, não representa o pior cenário. Aparentemente, um cenário parecido mas com maior probabilidade de τ s pequenos, $\alpha = 1$, gera piores condições de tráfego na rede. Esse resultado nos faz lembrar daqueles apresentados no capítulo 5, onde a rede não parecia reagir bem com valores de τ pequenos. Porém, a margem de erro não nos permite assegurar este comportamento diferente no intervalo $\alpha = [0, 1]$.

5.4.3 *SPQM sem concorrência de ruas e com desordem em τ dado por gaussiana*

Buscando a proximidade ainda maior de um sistema que se assemelha a redes de tráfego de carros em uma cidade, decidimos alterar o modelo novamente. Agora, os carros não devem mais concorrer pelo mesmo espaço na rua quando andam em sentidos opostos. Para isso, construímos uma rede em um espaço real e outra em um espaço dual, onde a real possui as ruas com sentido da esquerda para a direita e de baixo para cima. Já na dual estão representadas as ruas com sentido da direita para a esquerda e de cima para baixo. De maneira similar à seção anterior, calculamos o ponto crítico do sistema N_{OD_c} em várias situações para uma cidade onde não há concorrência de ruas. O apêndice A.4 possui o resultado das simulações feitas para as redes sem concorrência de ruas e com desordem em τ em lei de potência. Mas aqui nos concentraremos no estudo das redes com desordem na distribuição de τ seguindo uma gaussiana. Isso porque o sistema já se mostrou mais sensível à desordem no valor de τ em lei de potência. Logo, se faz necessário observar este sistema congelando todas as variáveis que o descrevem com exceção do desvio padrão σ_τ da distribuição gaussiana que determina o valor de τ . O detalhamento das curvas de $\eta \times N_{OD}$ pode ser consultado no apêndice A.4.2.

Os resultados mostrados no apêndice A.4.2 possuem um padrão semelhante ao que já vimos nos outros casos sem concorrência de ruas. O que muda é apenas a escala da transição. Isso acontece porque o valor de μ_τ é fixo, mas a dispersão dada por σ altera o ponto de transição entre os estados livres e congestionados.

Nosso objetivo é observar, com maior precisão, o que acontece quando alteramos a dispersão dos valores de τ através do desvio padrão da gaussiana que gera os valores de τ . Assim como na figura 40, a figura 43(a) apresenta como o valor do ponto crítico N_{OD_c} varia com τ . Isso porque nesse caso congelamos o valor de V e alteramos apenas os valores de μ_τ para vários valores de σ_τ . Podemos ver que, à medida que o valor de τ aumenta no intervalo de

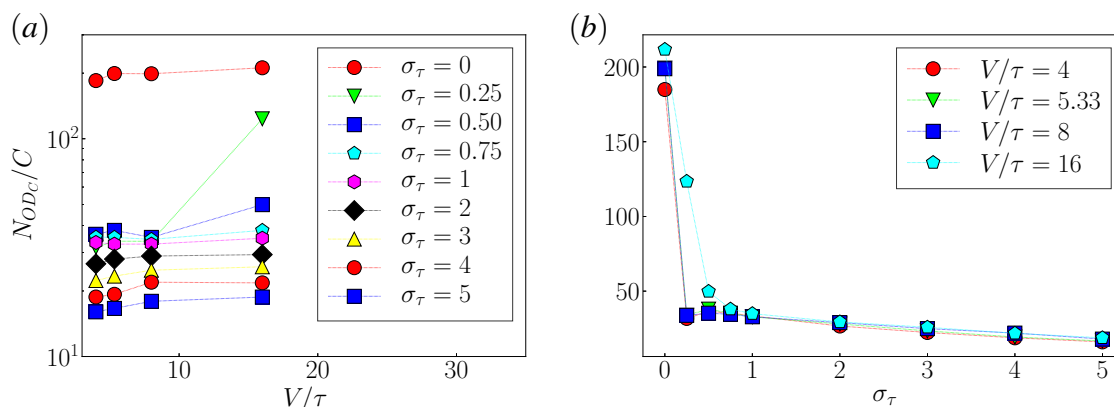


Figura 43 – Variação do ponto crítico N_{ODc} para simulações com distribuição de τ gaussiano. Em (a), temos a variação do ponto crítico em relação ao valor de τ para vários valores de σ_τ . Já em (b), temos a variação do ponto crítico N_{ODc} em relação ao valor de σ para vários valores de τ . Nos casos (a) e (b), os valores de V foram mantidos constantes.

$\sigma_\tau \in (0.25, 5]$, não observamos uma mudança expressiva no ponto crítico das transições de fase, com exceção da curva para $\sigma = 0.25$ que apresenta um resultado anômalo. Aqui já temos um indicativo interessante, pois trata-se da dispersão mais fraca, diferente de zero, simulada entre os nossos resultados de σ_τ . Já a figura 43(b) nos traz uma visão ainda mais clara de como uma pequena dispersão nos valores de τ já é suficiente para grandes transformações no ponto crítico N_{ODc} . O resultado nos permite inferir que, à medida que a dispersão no valor de τ aumenta, os pontos de transição de fase tendem a ocorrer cada vez mais cedo, ou seja, as condições de tráfego no sistema tendem a piorar. Vemos que a principal mudança no comportamento dos pontos críticos N_{ODc} ocorre quando passamos de $\sigma_\tau = 0$ para $\sigma_\tau = 0.25$, confirmando que a mínima ocorrência de ruído no tempo de espera nas ruas provoca problemas de navegação na nossa rede como um todo.

O resultado dessas simulações nos leva a acreditar que a melhor estratégia na distribuição dos tempos de espera nas vias — ou de outra maneira, nas velocidades máximas permitidas — deve ser sempre tal que provoque o mínimo possível de diferenças em relação às ruas vizinhas, ou seja, um sistema homogêneo. Assim, a forma como os carros poderão trafegar será sempre muito semelhante entre as ruas que separam sua origem e seu destino.

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Sistemas complexos existem nos mais variados contextos do nosso cotidiano. Os vários tipos de redes criados para simular esses sistemas são necessários pois cada um possui uma propriedade diferente. Além disso, essas redes servem de suporte e podem receber várias estratégias diferentes que simulam a movimentação dos caminhantes do sistema.

Na navegação descentralizada de múltiplos pacotes abordada no capítulo 4, vimos como a topologia da rede pode alterar a reação do sistema quanto ao aparecimento de congestionamentos. Vimos que, ao acrescentar ligações de longo alcance, as redes continuam sendo caracterizadas por uma probabilidade crítica de criação de pacotes p_c que escala com o tamanho do sistema na forma $p_c \sim L^\gamma$, onde γ assume valores não triviais dependentes do parâmetro topológico α da rede. Essa mudança topológica torna o sistema mais resiliente à criação de pacotes, pois as ligações de longo alcance melhoram as condições de fluidez do sistema. Esse resultado ficou evidente ao analisar que γ possui um valor mínimo para $\alpha = 1.7$, valor próximo ao apresentado por trabalhos anteriores para redes de mundo pequeno. Na análise dos espectros de potência da série temporal do número de pacotes na rede para $p < p_c$, vimos que é possível estabelecer um relação universal devido ao colapso das curvas que tendem a apresentar uma lei de potência de expoente -2 .

O bom funcionamento dos sistemas de transporte é essencial para a rotina de uma cidade. Se o seu funcionamento for afetado, acarretará em custos econômicos e ambientais para a cidade. Para entender melhor as condições que levam tais sistemas ao fenômeno de congestionamento, nos capítulos 4 e 5, estudamos as transições de fase entre os estados que representam, de um lado, o pleno funcionamento do sistema de transporte e, do outro, o aparecimento de bloqueios que dificultam o livre tráfego de veículos. O parâmetro τ inserido no modelo *SPQM*, usado para controlar as transições no capítulo 5, pode ser traduzido como a velocidade máxima permitida na via v_f através da relação $v_f = l/\tau$, onde l é o comprimento da via. Com base nas transições observadas, estudamos o efeito do tempo durante o qual os carros esperam para serem transferidos de uma via para outra com o aparecimento de bloqueios. No primeiro momento, onde variamos a demanda de carros N_{OD} , observamos a existência de um limite de tempo de espera τ em que a rede se mantém em pleno funcionamento. Porém, acima deste limite de tempo de espera, os carros acumulam-se na rede mudando o sistema para o estado congestionado. Em um segundo momento, onde a demanda de carros é fixa, o comportamento é não trivial. Neste caso os resultados mostraram que existe um limite de tempo de espera em que,

apesar de os carros demorarem um pouco mais para chegarem ao seu destino, a probabilidade de acontecer congestionamentos é reduzida. Estes resultados foram simulados para cidades ideais com capacidade ilimitada de transferir carros de uma via a outra, o que nos leva à conclusão de que o fato de aumentar a capacidade de fluxo nos cruzamentos de uma cidade não é suficiente para extinguir o aparecimento de congestionamento. De um ponto de vista prático, poderíamos traduzir esta capacidade ilimitada para o número de faixas multiplicadas nas vias de uma cidade, resultantes de intervenções para o alargamento das ruas.

Nas seções iniciais do capítulo 5, analisamos que redes ideais, com alta eficiência em entregar carros, diminuem essa eficiência se aumentarmos, indiscriminadamente, a velocidade máxima das vias através do parâmetro τ . Na verdade, a melhor maneira de melhorar a eficiência na entrega global de carros seria diminuir a velocidade máxima até um determinado limiar. Nestas condições, as vias conseguem comportar e entregar os carros antes que estejam completamente cheias e gerem regiões de bloqueio. Assim, mesmo que os carros demorem um pouco para chegar ao seu destino, globalmente, o trânsito da cidade seria melhorado quando a demanda de veículos é constante.

Quando um motorista sente que seu trajeto se tornou mais penoso devido ao tempo que ele demora para fazer a sua viagem, isso pode não representar as condições gerais da rede, pois dada uma situação em que este motorista transite por ruas cuja velocidade máxima seja alta e este consiga desenvolver altas velocidades nestas vias, haverá outros motoristas que disputarão as mesmas ruas que ele em um intervalo de tempo menor. Em outras palavras, não há benefício em desenvolver altas velocidades em uma via se isso provocar uma alta demanda nos cruzamentos, pois as ruas possuem limitação física, e não será possível suportar todos os carros que passam por elas em um curto período de tempo. O ideal é que os carros não preencham as vias rapidamente, mas que cheguem e sejam entregues em quantidades menores devido ao volume de carros que a via pode suportar.

Os resultados da aplicação do modelo em cidades reais revelaram diferenças significativas em relação às transições anteriormente apresentadas. As redes que representam os mapas das cidades se mostraram ser bem mais sensíveis à mudança de tempo de espera τ nas vias. Em todos os mapas analisados, observamos transições abruptas do parâmetro de ordem η quando variamos o parâmetro τ . A explicação se dá devido a algumas diferenças em relação às redes idealizadas anteriormente. Na rede da cidade, a conectividade média é mais baixa, o que provoca a diminuição de caminhos alternativos nas rotas dos carros. Outro fator determinante

é a limitação na entrega de carros, ou seja, aqui nem todos os carros que já esperaram tempo suficiente na via poderão seguir sua rota. Logo, a melhoria no transporte de veículos em uma cidade deve levar em conta não somente a velocidade máxima que os carros podem desenvolver, mas também a capacidade de fluxo nos cruzamentos e a capacidade física das vias para comportar os carros.

A aplicação do modelo SPQM pode ser útil para a determinação da velocidade máxima nas ruas de uma cidade se soubermos a demanda de veículos que circulam na rede. Através desta aplicação, sabemos qual o limite de espera dos veículos para que não haja congestionamento nas vias de acordo com o número de carros N_{OD} . Logo, para tais cidades, é possível sugerir a velocidade máxima a ser adotada para as vias a fim de evitar congestionamentos.

Nas seções finais do capítulo 5, abordamos um estudo mais preciso em relação à influência da dispersão dos valores de τ sobre o ponto crítico N_{OD_c} . Tanto nas distribuições de τ em lei de potência quanto em gaussiana, vimos que esse tipo de sistema é sensível em relação a mudanças nos valores de tempo de espera. Constatamos esse comportamento inclusive em sistemas que apresentam maior probabilidade de conter vias mais rápidas do que lentas, onde $\alpha = 1$, assim como na adição de dispersão mínima nos valores de τ através do parâmetro σ_τ .

Com esse trabalho, conseguimos entender diversos aspectos das redes de transporte que podem facilitar, ou não, o aparecimento de congestionamentos, tanto em redes que tratam do transporte de informação quanto de veículos. Acreditamos que estes resultados possam ajudar nas estratégias que os administradores desses sistemas possam tomar a fim de trazer cada vez mais fluidez ao tráfego das redes que representam o transporte de informações ou veículos.

REFERÊNCIAS

- AFP. **Dinamarca é o país mais conectado do mundo, mostra relatório**. 2014. <<https://exame.abril.com.br/tecnologia/dinamarca-e-o-pais-mais-conectado-do-mundo-mostra-relatorio-da-uit/>>. Accessed: 2019-06-07.
- ALBERT, R.; BARABÁSI, A.-L. Statistical mechanics of complex networks. **Reviews of modern physics**, APS, v. 74, n. 1, p. 47, 2002.
- ARENAS, A.; DÍAZ-GUILERA, A.; GUIMERÀ, R. Communication in networks with hierarchical branching. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 86, n. 14, p. 3196–3199, 2001. ISSN 00319007. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.3196>>.
- ASZTALOS, A.; SREENIVASAN, S.; SZYMANSKI, B. K.; KORNISS, G. Distributed flow optimization and cascading effects in weighted complex networks. **The European Physical Journal B**, v. 85, n. 8, p. 288, 2012. ISSN 1434-6036. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1140/epjb/e2012-30122-3>>.
- BANGHAM, D. The recognition of phase transitions in adsorbed films on solids. **The Journal of Chemical Physics**, AIP Publishing, v. 14, n. 5, p. 352–352, 1946.
- BARTHÉLEMY, M. Spatial networks. **Physics Reports**, Elsevier, v. 499, n. 1-3, p. 1–101, 2011.
- BARTHÉLÉMY, M.; AMARAL, L. A. N. Small-world networks: Evidence for a crossover picture. **Physical Review Letters**, APS, v. 82, n. 15, p. 3180, 1999.
- BBC, B. B. C. **Brasil deve fechar 2014 como 4º país com mais acesso à internet, diz consultoria**. 2014. <https://www.bbc.com/portuguese/noticias/2014/11/141124_brasil_internet_pai#orb-banner>. Accessed: 2019-06-07.
- BIRKHOFF, G. **Lattice Theory**. American Mathematical Society, 1940. (American Mathematical Society colloquium publications, v. 25, pt. 2). ISBN 9780821810255. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=ePqVAwAAQBAJ>>.
- BOGUÑÁ, M.; KRIOUKOV, D.; CLAFFY, K. C. Navigability of complex networks. **Nature Physics**, v. 5, n. 1, p. 74–80, 2009. ISSN 1745-2481. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/nphys1130>>.
- BOJDECKI, T.; HOSZA, J. On a generalized disorder problem. **Stochastic Processes and their Applications**, v. 18, n. 2, p. 349 – 359, 1984. ISSN 0304-4149. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304414984903053>>.
- BORGES, L. R.; GUERRERO, I.; BAKIC, P. R.; MAIDMENT, A. D.; VIEIRA, M. A. Gaussian-poisson noise estimation from individual mammography images.
- BOUADI, M.; JETTO, K.; BENYOUSSEF, A.; KENZ, A. E. The investigation of the reentrance phenomenon in cellular automaton traffic flow model. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 469, p. 1–14, 2017.
- BRASIL, G. F. do. **Frota de veículos no Brasil**. 2016. Disponível em: <<http://www.denatran.gov.br/index.php/estatistica/237-frota-veiculos>>.

BRILL, E. A. **Stochastic models of vehicular traffic congestion**. [s.n.], 1970. FOR FURTHER BIBLIOGRAPHIC INFORMATION SEE CARD CATALOG IN THE TRANSPORTATION LIBRARY. p. FOR FURTHER BIBLIOGRAPHIC INFORMATION SEE CARD CATALOG IN THE TRANSPORTATION LIBRARY. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/2027/ien.35556031434871>>.

BRÉON, F. M.; HENRIOT, N. Spaceborne observations of ocean glint reflectance and modeling of wave slope distributions. **Journal of Geophysical Research: Oceans**, v. 111, n. C6, 2006. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2005JC003343>>.

CAIRO, A. **Download the Datasaurus: Never trust summary statistics alone; always visualize your data**. 2016. Disponível em: <<http://www.thefunctionalart.com/2016/08/download-datasaurus-never-trust-summary.html>>.

CALHEIROS, F. J. L. C. **Análise combinatória no estudo das transições de fase dos sistemas de spin vectorial**. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Universidade do Porto, <http://hdl.handle.net/10216/11927>, 1985. Dissertação apresentada para obtenção do grau de Doutor em Matemática Aplicada, na Universidade do Porto.

CARDILLO, A.; SCELLATO, S.; LATORA, V.; PORTA, S. Structural properties of planar graphs of urban street patterns. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 73, p. 066107, Jun 2006. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.73.066107>>.

CARMI, S.; CARTER, S.; SUN, J.; AVRAHAM, D. ben. Asymptotic behavior of the kleinberg model. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 102, p. 238702, Jun 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.238702>>.

CARTOZO, C. C.; RIOS, P. D. L. Extended navigability of small world networks: Exact results and new insights. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 102, p. 238703, Jun 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.238703>>.

CASTELLANO, C.; FORTUNATO, S.; LORETO, V. Statistical physics of social dynamics. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 81, p. 591–646, May 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.591>>.

CHATTERJEE, A. P.; LORING, R. F. Effective medium approximation for random walks with non-markovian dynamical disorder. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 50, p. 2439–2450, Oct 1994. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.50.2439>>.

CHEN, Q.; QIAN, J.-H.; ZHU, L.; HAN, D.-D. Optimal transport in time-varying small-world networks. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 93, p. 032321, Mar 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.93.032321>>.

CLAUSET, A.; SHALIZI, C. R.; NEWMAN, M. E. Power-law distributions in empirical data. **SIAM review**, SIAM, v. 51, n. 4, p. 661–703, 2009.

CLAUSET, C. R. S. A.; NEWMAN, M. E. J. Power-law distributions in empirical data. **Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 51, n. 4, p. 661–703, Nov 2009. ISSN 1095-7200. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/070710111>>.

ÇOLAK, S.; SCHNEIDER, C. M.; WANG, P.; GONZÁLEZ, M. C. On the role of spatial dynamics and topology on network flows. **New Journal of Physics**, v. 15, 2013. ISSN 13672630.

CUSHMAN, I. J.; RAWAT, D. B.; CHEN, L.; YANG, Q. Performance evaluation of vehicular ad hoc networks for rapid response traffic information delivery. In: _____. **Wireless Algorithms, Systems, and Applications: 11th International Conference, WASA 2016, Bozeman, MT, USA, August 8-10, 2016. Proceedings**. Cham: Springer International Publishing, 2016. p. 571–579. ISBN 978-3-319-42836-9. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-42836-9_50>.

DAQING, L.; KOSMIDIS, K.; BUNDE, A.; HAVLIN, S. Dimension of spatially embedded networks. **Nature Physics**, v. 7, n. 6, p. 481–484, 2011. ISSN 1745-2481. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/nphys1932>>.

De Martino, D.; DALL'ASTA, L.; BIANCONI, G.; MARSILI, M. Congestion phenomena on complex networks. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 79, n. 1, p. 15101, jan 2009. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.79.015101>>.

DEBANNE, D.; CAMPANAC, E.; BIALOWAS, A.; CARLIER, E.; ALCARAZ, G. Axon physiology. **Physiological Reviews**, v. 91, n. 2, p. 555–602, 2011. PMID: 21527732. Disponível em: <<https://doi.org/10.1152/physrev.00048.2009>>.

DEMŠAR, U.; ŠPATENKOVÁ, O.; VIRRANTAUŠ, K. Identifying critical locations in a spatial network with graph theory. **Transactions in GIS**, v. 12, n. 1, p. 61–82, 2008. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1467-9671.2008.01086.x>>.

DIJKSTRA, E. W. A note on two problems in connexion with graphs. **Numer. Math.**, Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, v. 1, n. 1, p. 269–271, dez. 1959. ISSN 0029-599X. Disponível em: <<http://dx.doi-org.ez11.periodicos.capes.gov.br/10.1007/BF01386390>>.

DIJKSTRA, E. W. A note on two problems in connexion with graphs. **Numerische Mathematik**, v. 1, n. 1, p. 269–271, Dec 1959. ISSN 0945-3245. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01386390>>.

DODDS, P. S.; MUHAMAD, R.; WATTS, D. J. An experimental study of search in global social networks. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 301, n. 5634, p. 827–829, 2003. ISSN 0036-8075. Disponível em: <<https://science.sciencemag.org/content/301/5634/827>>.

DOMANY, E.; KINZEL, W. Equivalence of cellular automata to ising models and directed percolation. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 53, p. 311–314, Jul 1984. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.53.311>>.

DOROGOVTSEV, S.; MENDES, J. **Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW**. OUP Oxford, 2013. ISBN 9780191004407. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=FFL1AgAAQBAJ>>.

ECHENIQUE, P.; GOMEZ-GARDENES, J.; MORENO, Y. Dynamics of jamming transitions in complex networks. **EPL (Europhysics Letters)**, v. 71, n. 2, p. 325–331, 2005. ISSN 0295-5075. Disponível em: <<http://www.iop.org/EJ/abstract/0295-5075/71/2/325>>.

ERDÖS, P.; RÉNYI, A. On random graphs i. **Publicationes Mathematicae Debrecen**, v. 6, p. 290, 1959.

FAKHRMOOSAVI, F.; SAEDI, R.; ZOCCAIE, A.; TALEBPOUR, A. Impacts of connected and autonomous vehicles on traffic flow with heterogeneous drivers spatially distributed over large-scale networks. **Transportation Research Record**, v. 2674, n. 10, p. 817–830, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/0361198120940997>>.

FILHO, C. I. N. S.; SANTOS, T. B. dos; MOREIRA, A. A.; MOREIRA, F. G. B.; ANDRADE, J. S. Majority-vote model on spatially embedded networks: Crossover from mean-field to ising universality classes. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 93, p. 052101, May 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.93.052101>>.

FLANNERY, B. P.; PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. Numerical recipes in c. **Press Syndicate of the University of Cambridge, New York**, v. 24, p. 78, 1992.

GALLOS, L.; SIGMAN, M.; MAKSE, H. The conundrum of functional brain networks: Small-world efficiency or fractal modularity. **Frontiers in Physiology**, v. 3, p. 123, 2012. ISSN 1664-042X. Disponível em: <<https://www.frontiersin.org/article/10.3389/fphys.2012.00123>>.

GALLOS, L. K.; MAKSE, H. A.; SIGMAN, M. A small world of weak ties provides optimal global integration of self-similar modules in functional brain networks. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Academy of Sciences, v. 109, n. 8, p. 2825–2830, 2012. ISSN 0027-8424. Disponível em: <<https://www.pnas.org/content/109/8/2825>>.

GENT, M. R. van; WERF, I. M. van der. Influence of oblique wave attack on wave overtopping and forces on rubble mound breakwater crest walls. **Coastal Engineering**, v. 151, p. 78 – 96, 2019. ISSN 0378-3839. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378383919300912>>.

GREINER, M.; MANDEL, O.; ESSLINGER, T.; HÄNSCH, T. W.; BLOCH, I. Quantum phase transition from a superfluid to a mott insulator in a gas of ultracold atoms. **Nature**, v. 415, n. 6867, p. 39–44, 2002. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/415039a>>.

GUGGENHEIM, E. A. The principle of corresponding states. **The Journal of Chemical Physics**, v. 13, n. 7, p. 253–261, 1945. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1724033>>.

GUIMERÀ, R.; ARENAS, A.; DÍAZ-GUILERA, A.; GIRALT, F. Dynamical properties of model communication networks. **Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics**, v. 66, n. 2, p. 1–8, 2002. ISSN 15393755.

GUIMERÀ, R.; DÍAZ-GUILERA, a.; VEGA-REDONDO, F.; CABRALES, a.; ARENAS, a. Optimal network topologies for local search with congestion. **Physical review letters**, v. 89, n. 24, p. 248701, 2002. ISSN 0031-9007.

HU, Y.; WANG, Y.; LI, D.; HAVLIN, S.; DI, Z. Possible origin of efficient navigation in small worlds. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 106, p. 108701, Mar 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.108701>>.

HU, Y.; ZHANG, J.; HUAN, D.; DI, Z. Toward a general understanding of the scaling laws in human and animal mobility. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 96, n. 3, p. 38006, oct 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1209/0295-5075/96/38006>>.

JAEGER, G. The ehrenfest classification of phase transitions: Introduction and evolution. **Archive for History of Exact Sciences**, v. 53, p. 51–81, 05 1998.

KERNER, B. S. Empirical macroscopic features of spatial-temporal traffic patterns at highway bottlenecks. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 65, p. 046138, Apr 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.65.046138>>.

KLEINBERG, J. M. Navigation in a small world. **Nature**, v. 406, n. 6798, p. 845–845, 2000. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/35022643>>.

KOSMIDIS, K.; HAVLIN, S.; BUNDE, A. Structural properties of spatially embedded networks. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 82, n. 4, p. 48005, may 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1209%2F0295-5075%2F82%2F48005>>.

KUWAHARA, M.; AKAMATSU, T. Decomposition of the reactive dynamic assignments with queues for a many-to-many origin-destination pattern. **Transportation Research Part B: Methodological**, v. 31, n. 1, p. 1 – 10, 1997. ISSN 0191-2615. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0191261596000203>>.

KUWAHARA, M.; AKAMATSU, T. Dynamic user optimal assignment with physical queues for a many-to-many {OD} pattern. **Transportation Research Part B: Methodological**, v. 35, n. 5, p. 461 – 479, 2001. ISSN 0191-2615. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0191261500000059>>.

LEE, E. W. Phase transitions and critical phenomena vol 1 exact results. **Physics Bulletin**, IOP Publishing, v. 24, n. 8, p. 493–493, aug 1973. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F0031-9112%2F24%2F8%2F022>>.

LEISERSON, C.; CORMEN, T.; RIVEST, R.; STEIN, C. **Algoritmos: teoria e prática**. ELSEVIER, 2002. ISBN 9788535209266. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=OtSHPgAACAAJ>>.

LI, G.; REIS, S.; MOREIRA, A.; HAVLIN, S.; STANLEY, H.; JR, J. A. Optimal transport exponent in spatially embedded networks. **Physical Review E**, APS, v. 87, n. 4, p. 042810, 2013.

LI, G.; REIS, S. D. S.; MOREIRA, A. A.; HAVLIN, S.; STANLEY, H. E.; ANDRADE, J. S. Towards design principles for optimal transport networks. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 104, p. 018701, Jan 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.018701>>.

LI, Y.; ZHOU, D.; HU, Y.; ZHANG, J.; DI, Z. Exact solution for optimal navigation with total cost restriction. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 92, n. 5, p. 58002, dec 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1209%2F0295-5075%2F92%2F58002>>.

LOUF, R.; BARTHELEMY, M. How congestion shapes cities: from mobility patterns to scaling. **Scientific Reports**, The Author(s) SN -, v. 4, p. 5561 EP –, Jul 2014. Article. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/srep05561>>.

MAY, R. M.; LEVIN, S. A.; SUGIHARA, G. Ecology for bankers. **Nature**, v. 451, n. 7181, p. 893–894, 2008. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/451893a>>.

MELO, H. P. M.; MOREIRA, A. A.; BATISTA, É.; MAKSE, H. A.; ANDRADE, J. S. Statistical signs of social influence on suicides. **Scientific Reports**, The Author(s) SN -, v. 4, p. 6239 EP –, Sep 2014. Article. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/srep06239>>.

MENDES, G. A.; SILVA, L. R. da; HERRMANN, H. J. Traffic gridlock on complex networks. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 391, n. 1–2, p. 362–370, 2012. ISSN 0378-4371. Disponível em: <www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437111005954>.

MILGRAM, S. The small world problem. **Psychology today**, New York, v. 2, n. 1, p. 60–67, 1967.

MILLER, A. J. A queueing model for road traffic flow. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, JSTOR, p. 64–90, 1961.

MILLER, E. Population dynamics of infectious diseases: Theory and applications. **Immunology**, Wiley-Blackwell, v. 50, n. 4, p. 677, 1983.

MITCHELL, M. Complex systems: Network thinking. **Artificial Intelligence**, v. 170, n. 18, p. 1194 – 1212, 2006. ISSN 0004-3702. Special Review Issue. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S000437020600083X>>.

NEWMAN, M. **Networks: An Introduction**. OUP Oxford, 2010. ISBN 9780199206650. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=-DgTDAAAQBAJ>>.

NIE, X.; ZHANG, H. M. A comparative study of some macroscopic link models used in dynamic traffic assignment. **Networks and Spatial Economics**, v. 5, n. 1, p. 89–115, 2005. ISSN 1572-9427. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s11067-005-6663-6>>.

OHIRA, T.; SAWATARI, R. Phase transition in a computer network traffic model. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 58, n. 1, p. 193–195, jul 1998. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.58.193>>.

OLIVEIRA, C. L. N.; MORAIS, P. A.; MOREIRA, A. A.; ANDRADE, J. S. Enhanced flow in small-world networks. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 112, p. 148701, Apr 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.148701>>.

OLIVEIRA, M. de. **Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade Vol. 35**. EDUSP, 2001. ISBN 9788531405952. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=OQIwCr9eOd8C>>.

OSTERLOH, A.; AMICO, L.; FALCI, G.; FAZIO, R. Scaling of entanglement close to a quantum phase transition. **Nature**, v. 416, n. 6881, p. 608–610, 2002. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/416608a>>.

OTTINO, J. M. Engineering complex systems. **Nature**, v. 427, n. 6973, p. 399–399, 2004. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/427399a>>.

PAPON, P.; SCHNUR, S.; LEBLOND, J.; MEIJER, P. **The Physics of Phase Transitions: Concepts and Applications**. Springer Berlin Heidelberg, 2007. (Advanced Texts in Physics). ISBN 9783540333906. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=n-fiyYg3iSIC>>.

PELKOWITZ, L. The general markov chain disorder problem. **Stochastics**, v. 21, n. 2, p. 113–130, 1987. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/17442508708833454>>.

PILON, B. H. A. **PREDICTIVE ANALYTICS VIA GAUSSIAN PROCESSES AND STATISTICAL AUDIT VIA GAUSSIAN MIXTURES IN BUSINESS INTELLIGENCE SYSTEMS**. Tese (Doutorado) — FACULDADE DE TECNOLOGIA - DEPARTAMENTO DE

ENGENHARIA ELETRICA, <https://repositorio.unb.br/handle/10482/18956>, 2015. Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica, na Universidade de Brasília.

PLEROU, V.; GOPIKRISHNAN, P.; STANLEY, H. E. Econophysics: Two-phase behaviour of financial markets. **Nature**, v. 421, n. 6919, p. 130–130, Jan 2003. ISSN 0028-0836. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/421130a>>.

POLLACK, G.; CHIN, W. **Phase Transitions in Cell Biology**. Springer Netherlands, 2008. ISBN 9781402086519. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=95rqIqR7AicC>>.

POOL, I. de S.; KOCHEN, M. Contacts and influence. **Social Networks**, v. 1, n. 1, p. 5 – 51, 1978. ISSN 0378-8733. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0378873378900114>>.

PUPPO, G.; SEMPLICE, M.; TOSIN, A.; VISCONTI, G. Kinetic models for traffic flow resulting in a reduced space of microscopic velocities. **arXiv preprint arXiv:1507.08961**, 2015.

QIAN, W.-L.; WANG, B.; LIN, K.; MACHADO, R. F.; HAMA, Y. A mesoscopic approach on stability and phase transition between different traffic flow states. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Elsevier, v. 89, p. 59–68, 2017.

RAPOPORT, A. Cycle distributions in random nets. **The bulletin of mathematical biophysics**, v. 10, n. 3, p. 145–157, Sep 1948. ISSN 1522-9602. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02477489>>.

REIS, S. D. S.; MOREIRA, A.; ANDRADE, J. Nonlocal product rules for percolation. **Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics**, v. 85, p. 041112, 04 2012.

ROBERSON, M. R.; AVRAHAM, D. ben. Kleinberg navigation in fractal small-world networks. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 74, p. 017101, Jul 2006. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.74.017101>>.

ROZENFELD, H. D.; SONG, C.; MAKSE, H. A. Small-world to fractal transition in complex networks: A renormalization group approach. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 104, p. 025701, Jan 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.025701>>.

SALINAS, S. **Introdução a Física Estatística Vol. 09**. EDUSP, 1997. ISBN 9788531403866. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=cAIP3sc0K44C>>.

SHIMBEL, A. Contributions to the mathematical biophysics of the central nervous system with special reference to learning. **The bulletin of mathematical biophysics**, v. 12, n. 3, p. 241–275, Sep 1950. ISSN 1522-9602. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02478324>>.

SILVA, S. M. da; REIS, S. D. S.; ARAÚJO, A. D.; ANDRADE, J. S. Decentralized navigation of multiple packages on transportation networks. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 98, p. 032306, Sep 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.98.032306>>.

SOLOMONOFF, R.; RAPOPORT, A. Connectivity of random nets. **The bulletin of mathematical biophysics**, v. 13, n. 2, p. 107–117, Jun 1951. ISSN 1522-9602. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02478357>>.

SREENIVASAN, S.; COHEN, R.; LÓPEZ, E.; TOROCZKAI, Z.; STANLEY, H. E. Structural bottlenecks for communication in networks. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 75, n. 3, p. 36105, mar 2007. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.75.036105>>.

STÄLLBERG-STENHAGEN, S.; STENHAGEN, E. Phase transitions in condensed monolayers of normal chain carboxylic acids. **Nature**, v. 156, n. 3956, p. 239–240, 1945.

STANLEY, H. **Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena**. Oxford University Press, 1971. (International series of monographs on physics). ISBN 9780195053166. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=C3BzcUxoanKc>>.

STAUFFER, D.; AHARONY, A. **Introduction To Percolation Theory**. Taylor & Francis, 1994. ISBN 9781420074796. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=v66pllej5QC>>.

SURYAN, B. Bounded linear harmonic oscillator and phase transitions of second order. **Physical Review**, APS, v. 71, n. 10, p. 741, 1947.

TREIBER, M.; KESTING, A.; THIEMANN, C. **Traffic Flow Dynamics: Data, Models and Simulation**. Springer Berlin Heidelberg, 2012. ISBN 9783642324604. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=Xlsa9aaLc_QC>.

VIVEK, S.; YANNI, D.; YUNKER, P.; SILVERBERG, J. Cyberphysical risks of hacked internet-connected vehicles. **Physical Review E**, v. 100, 07 2019.

WANG, F.; LI, D.; XU, X.; WU, R.; HAVLIN, S. Percolation properties in a traffic model. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 112, n. 3, p. 38001, nov 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1209%2F0295-5075%2F112%2F38001>>.

WANG, Y.; KIM, J. C.; WU, R. J.; MARTINEZ, J.; SONG, X.; YANG, J.; ZHAO, F.; MKHOYAN, A.; JEONG, H. Y.; CHHOWALLA, M. Van der waals contacts between three-dimensional metals and two-dimensional semiconductors. **Nature**, v. 568, n. 7750, p. 70–74, 2019. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/s41586-019-1052-3>>.

WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. **nature**, Nature Publishing Group, v. 393, n. 6684, p. 440, 1998.

WEGNER, F. J. Duality in generalized ising models and phase transitions without local order parameters. **Journal of Mathematical Physics**, v. 12, n. 10, p. 2259–2272, 1971. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1665530>>.

WILSON, K. G. The renormalization group and critical phenomena. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 55, p. 583–600, Jul 1983. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.55.583>>.

WOOD, W. B. 1 introduction to c. elegans biology. **Cold Spring Harbor Monograph Archive**, v. 17, p. 1–16, 1988.

WRIGHT, C.; ROBERG, P. The conceptual structure of traffic jams. **Transport Policy**, v. 5, n. 1, p. 23 – 35, 1998. ISSN 0967-070X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0967070X98000067>>.

YAN, G.; ZHOU, T.; HU, B.; FU, Z.-Q.; WANG, B.-H. Efficient routing on complex networks. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 73, p. 046108, Apr 2006. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.73.046108>>.

YANG, H.; NIE, Y.; ZENG, A.; FAN, Y.; HU, Y.; DI, Z. Scaling properties in spatial networks and their effects on topology and traffic dynamics. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 89, n. 5, p. 58002, mar 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1209%2F0295-5075%2F89%2F58002>>.

ZHAO, L.; LAI, Y.-C.; PARK, K.; YE, N. Onset of traffic congestion in complex networks. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 71, p. 026125, Feb 2005. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.71.026125>>.

ZHOU, F.; SPRUCH, L. van der waals and retardation (casimir) interactions of an electron or an atom with multilayered walls. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 52, p. 297–310, Jul 1995. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.52.297>>.

ZHOU, Z.; SCHUTTER, B. D.; LIN, S.; XI, Y. Two-level hierarchical model-based predictive control for large-scale urban traffic networks. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 25, n. 2, p. 496–508, March 2017. ISSN 1063-6536.

APÊNDICE A – RESULTADOS DETALHADOS

A.1 Ponto crítico N_{OD_c} para redes com $L = 32$ e aplicação do modelo SPQM e desordem do parâmetro τ de acordo com uma Gaussiana $G(\mu_\tau = 16, \sigma_\tau = 0.33)$

As simulações apresentadas aqui na figura 44 são sempre médias de 100 repetições de um sistema nas mesmas configurações alterando apenas a semente utilizada para a inicialização do gerador de números aleatórios.

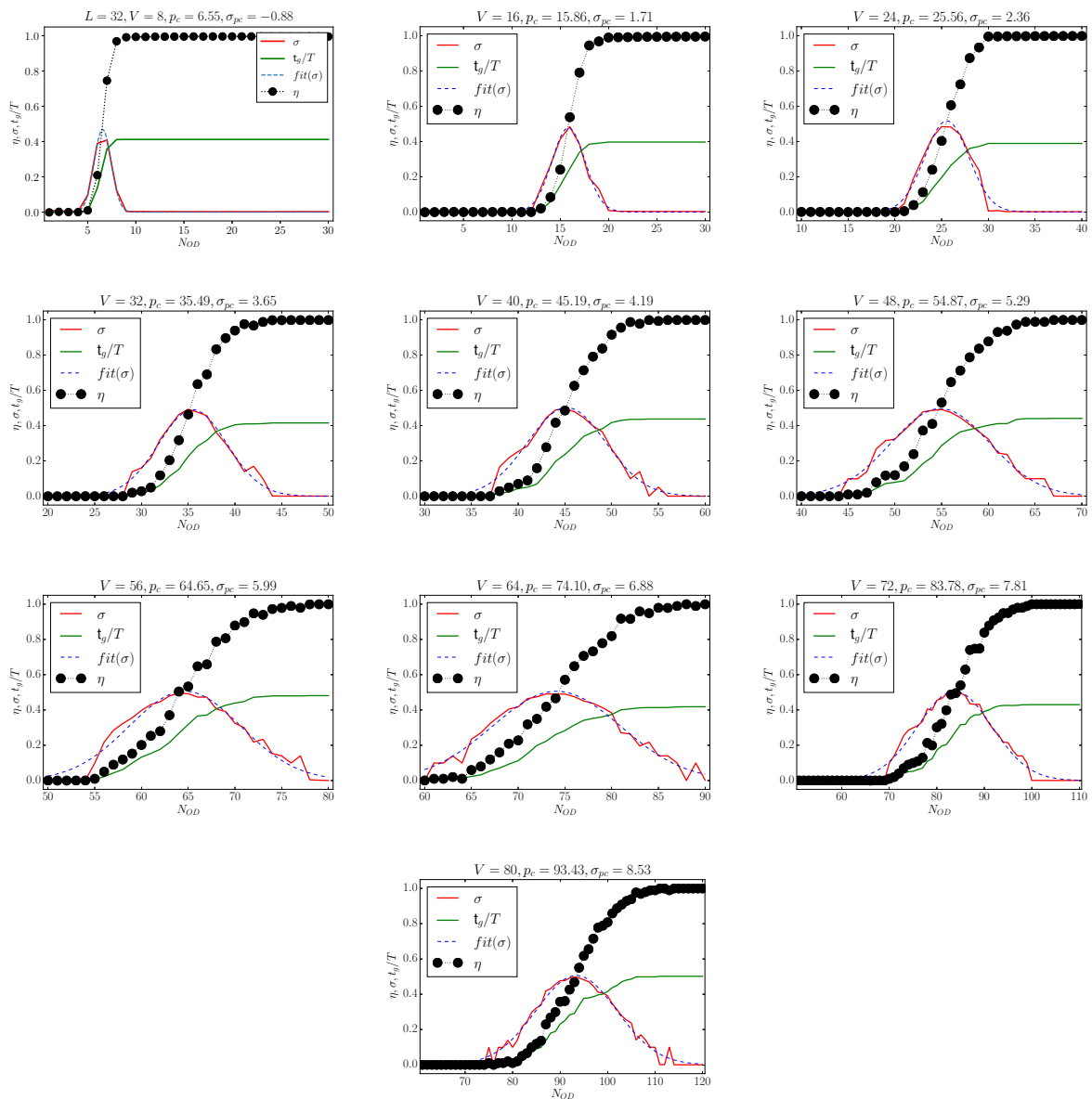


Figura 44 – Parâmetro de ordem η , desvio padrão σ , tempo médio t_g de aparecimento de *gridlock* e ajuste do desvio padrão σ para determinação de N_{OD_c} de acordo com uma gaussiana $G'(N_{OD_c}, \sigma_{pc})$. Valores calculados para diferentes Volumes $V = 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80$.

A.2 Ponto crítico N_{OD_c} para redes com variação de L e aplicação do modelo SPQM e desordem do parâmetro τ de acordo com uma Gaussiana $G(\mu_\tau = 16, \sigma_\tau = 0.33)$

A figura 45 mostra como o sistema se comporta a medida que aumentamos o tamanho do mesmo, ou seja, quando nos aproximamos do limite termodinâmico. Para isso, fixamos novos parâmetros para as simulações onde $\mu_\tau = 8$, $C = 8$ e $V = 24$.

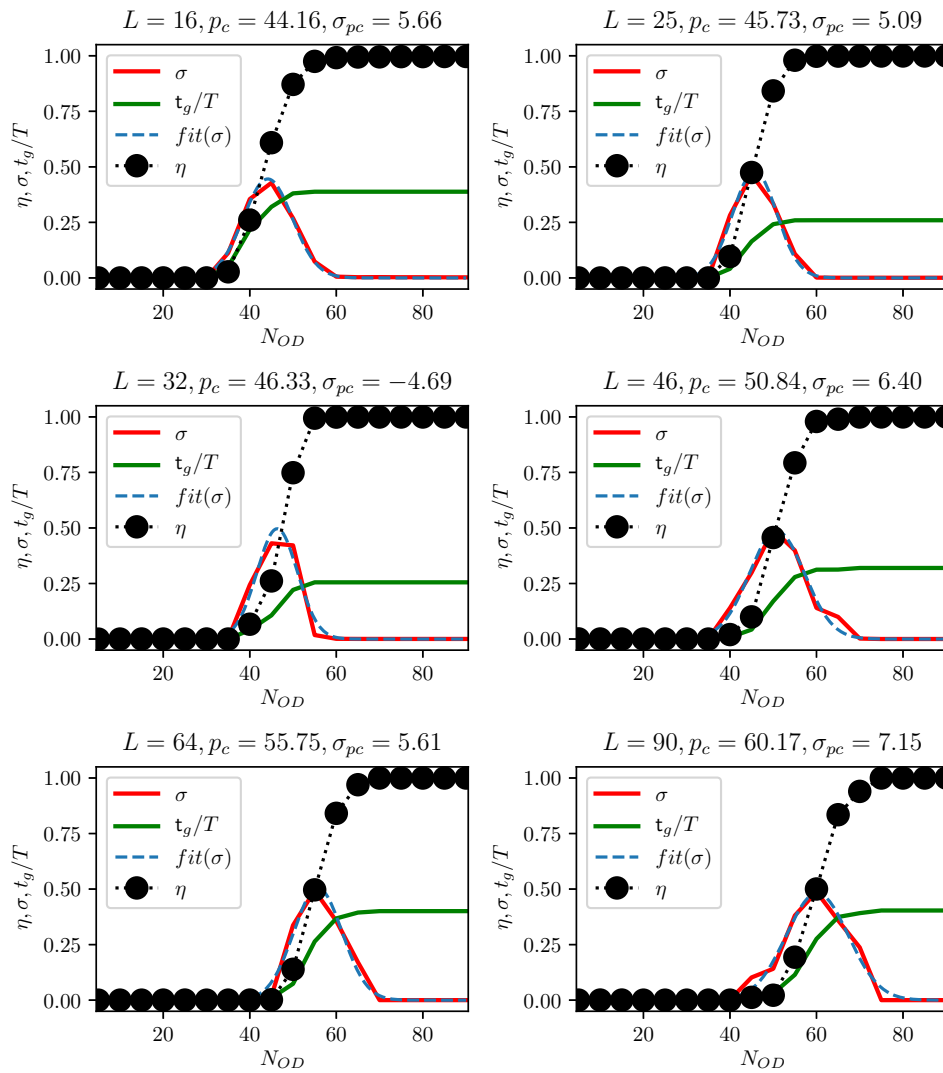


Figura 45 – Parâmetro de ordem η , desvio padrão σ , tempo médio t_g de aparecimento de *gridlock* e ajuste do desvio padrão σ para determinação de N_{OD_c} de acordo com uma gaussiana $G'(N_{OD_c}, \sigma_{pc})$. Valores calculados para diferentes tamanhos de sistema $N = 2 * L * L$.

A.3 Desordem com lei de potência

Os resultados das figuras 46 até a 52 mostram os resultados obtidos nas simulações com $\alpha = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Como demonstramos no texto principal, a resposta do sistema para $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$ é bem diferente em relação ao seu ponto crítico para os mesmos valores de N_{OD_c} . Porém, O comportamento quando aumentamos o capacidade das ruas de armazenas carros é semelhante. A medida que o volume v cresce, vemos que a rede passa a suportar um tráfego maior de veículos e, conseqüentemente, apresentar um ponto crítico maior.

A.3.1 Resultados para $\alpha = 0$

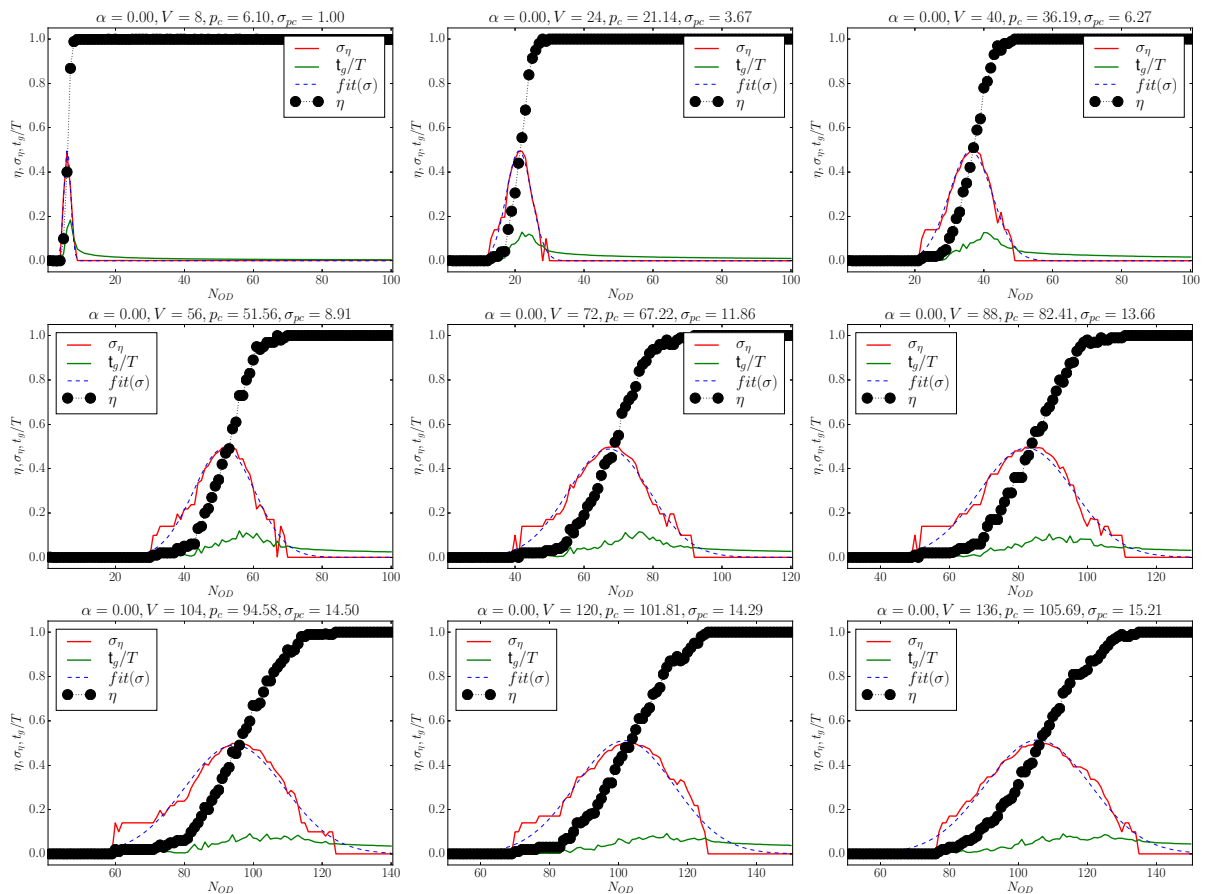


Figura 46 – Parâmetro de ordem η , desvio padrão σ , tempo médio t_g de aparecimento de *gridlock* e ajuste do desvio padrão σ para determinação de N_{OD_c} de acordo com uma gaussiana $G'(N_{OD_c}, \sigma_{pc})$. Valores calculados para $\alpha = 0$.

A.3.2 Resultados para $\alpha = 1$

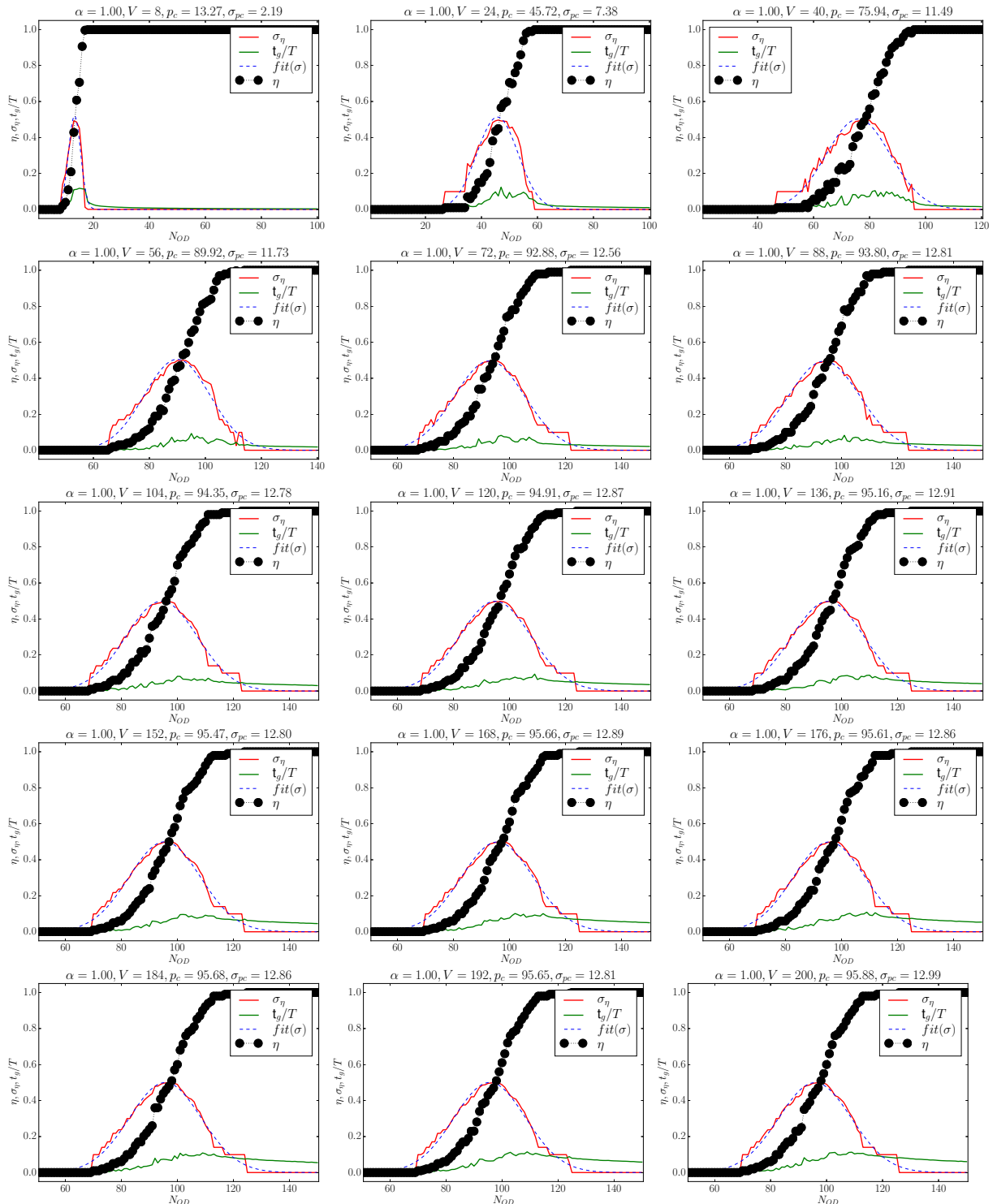


Figura 47 – Parâmetro de ordem η , desvio padrão σ , tempo médio t_g de aparecimento de *gridlock* e ajuste do desvio padrão σ para determinação de N_{ODc} de acordo com uma gaussiana $G'(N_{ODc}, \sigma_{pc})$. Valores calculados para $\alpha = -1$.

A.3.3 Resultados para $\alpha = 2$

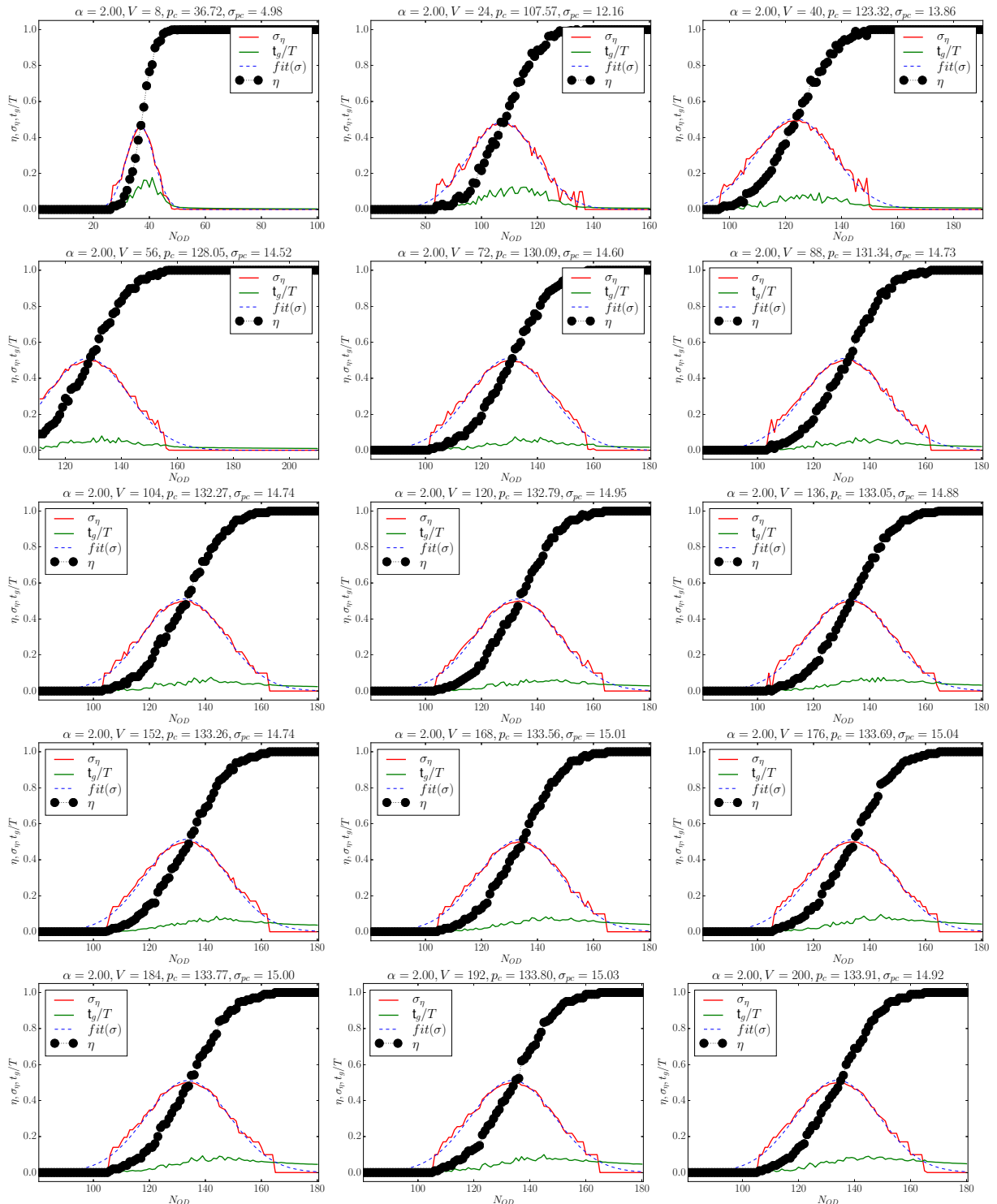


Figura 48 – Parâmetro de ordem η , desvio padrão σ , tempo médio t_g de aparecimento de *gridlock* e ajuste do desvio padrão σ para determinação de N_{ODc} de acordo com uma gaussiana $G'(N_{ODc}, \sigma_{pc})$. Valores calculados para $\alpha = -2$.

A.3.4 Resultados para $\alpha = 3$

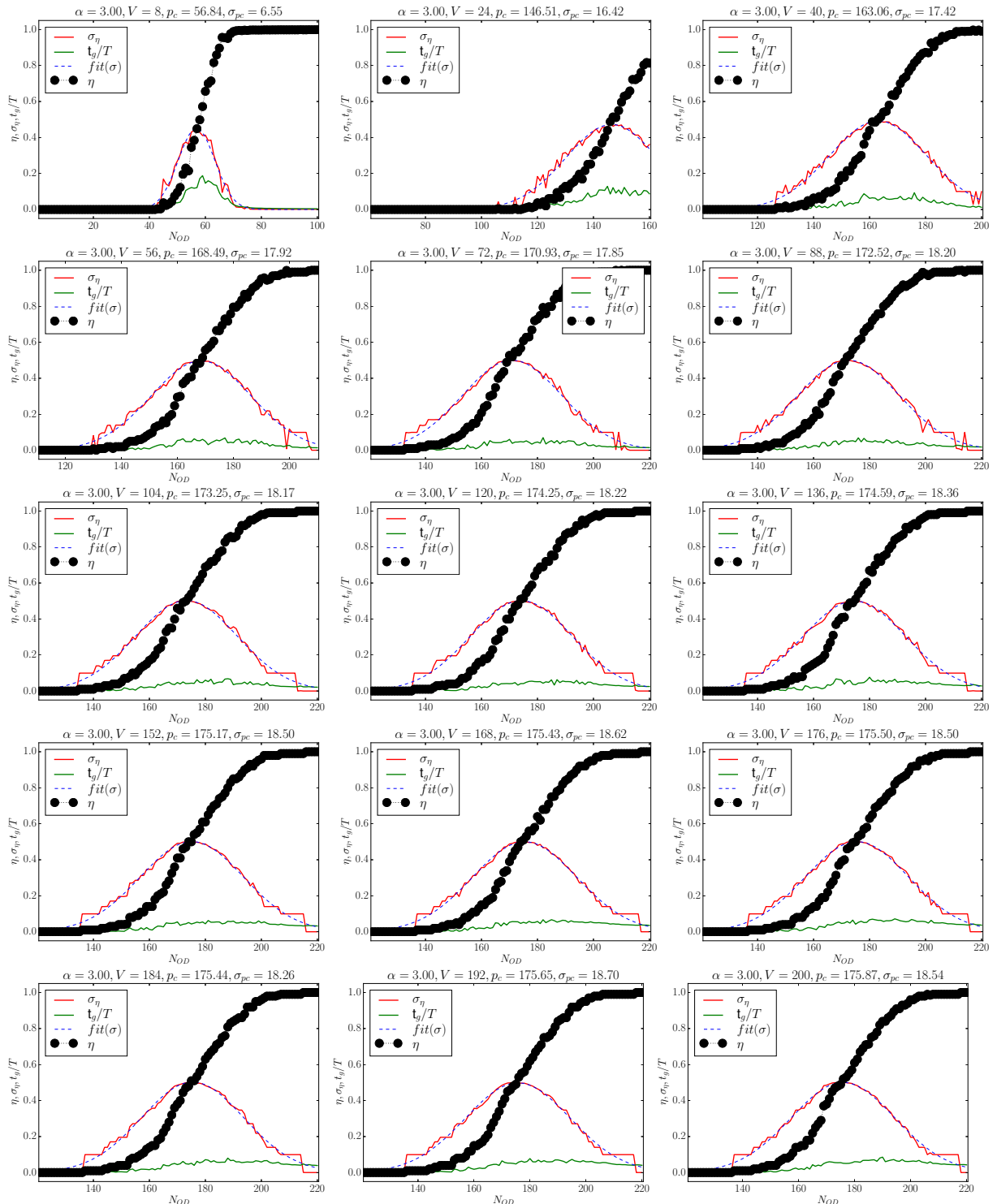


Figura 49 – Parâmetro de ordem η , desvio padrão σ , tempo médio t_g de aparecimento de *gridlock* e ajuste do desvio padrão σ para determinação de N_{ODc} de acordo com uma gaussiana $G'(N_{ODc}, \sigma_{pc})$. Valores calculados para $\alpha = 3$.

A.3.5 Resultados para $\alpha = -1$

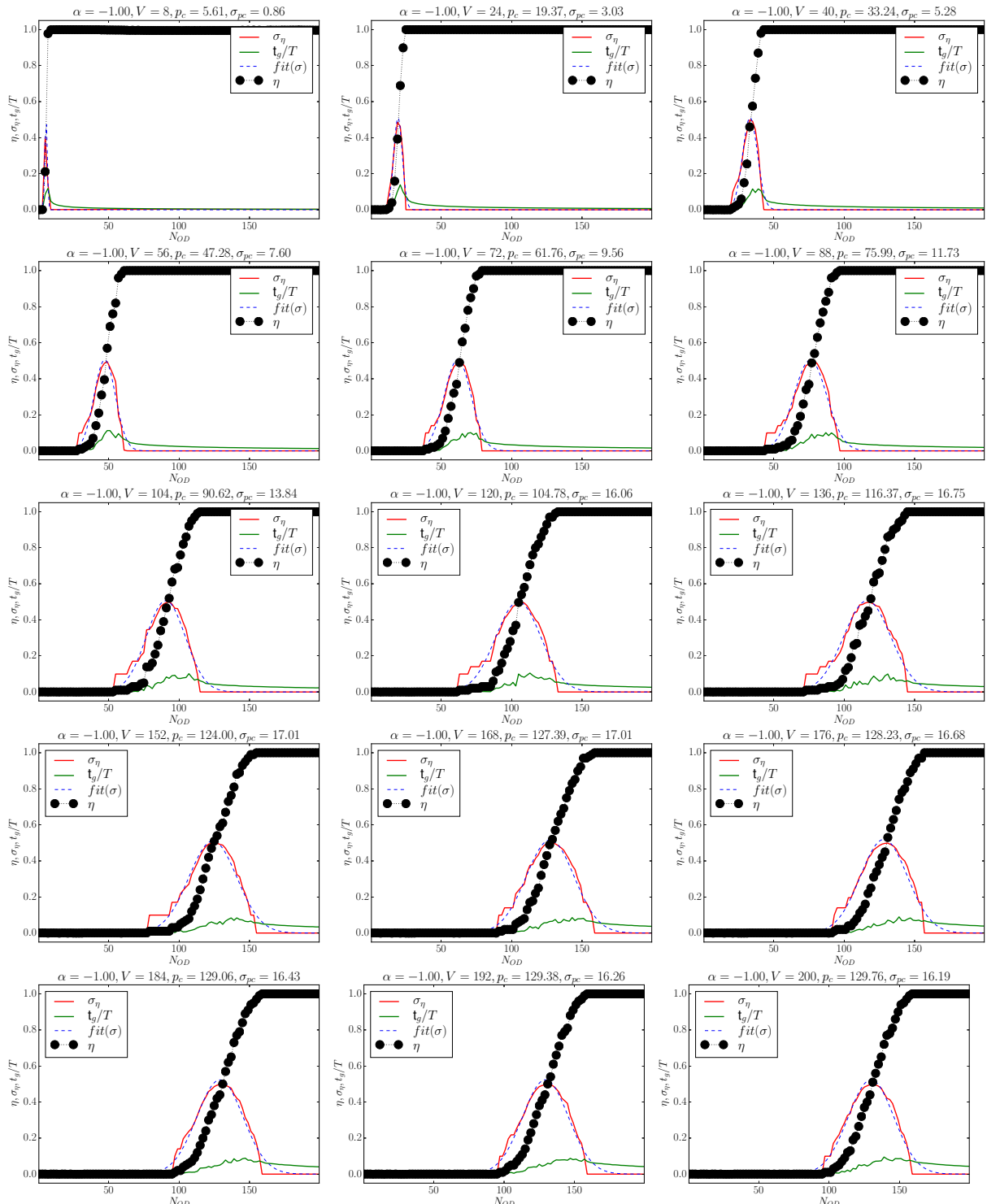


Figura 50 – Parâmetro de ordem η , desvio padrão σ , tempo médio t_g de aparecimento de *gridlock* e ajuste do desvio padrão σ para determinação de N_{ODc} de acordo com uma gaussiana $G'(N_{ODc}, \sigma_{pc})$. Valores calculados para $\alpha = -1$.

A.3.6 Resultados para $\alpha = -2$

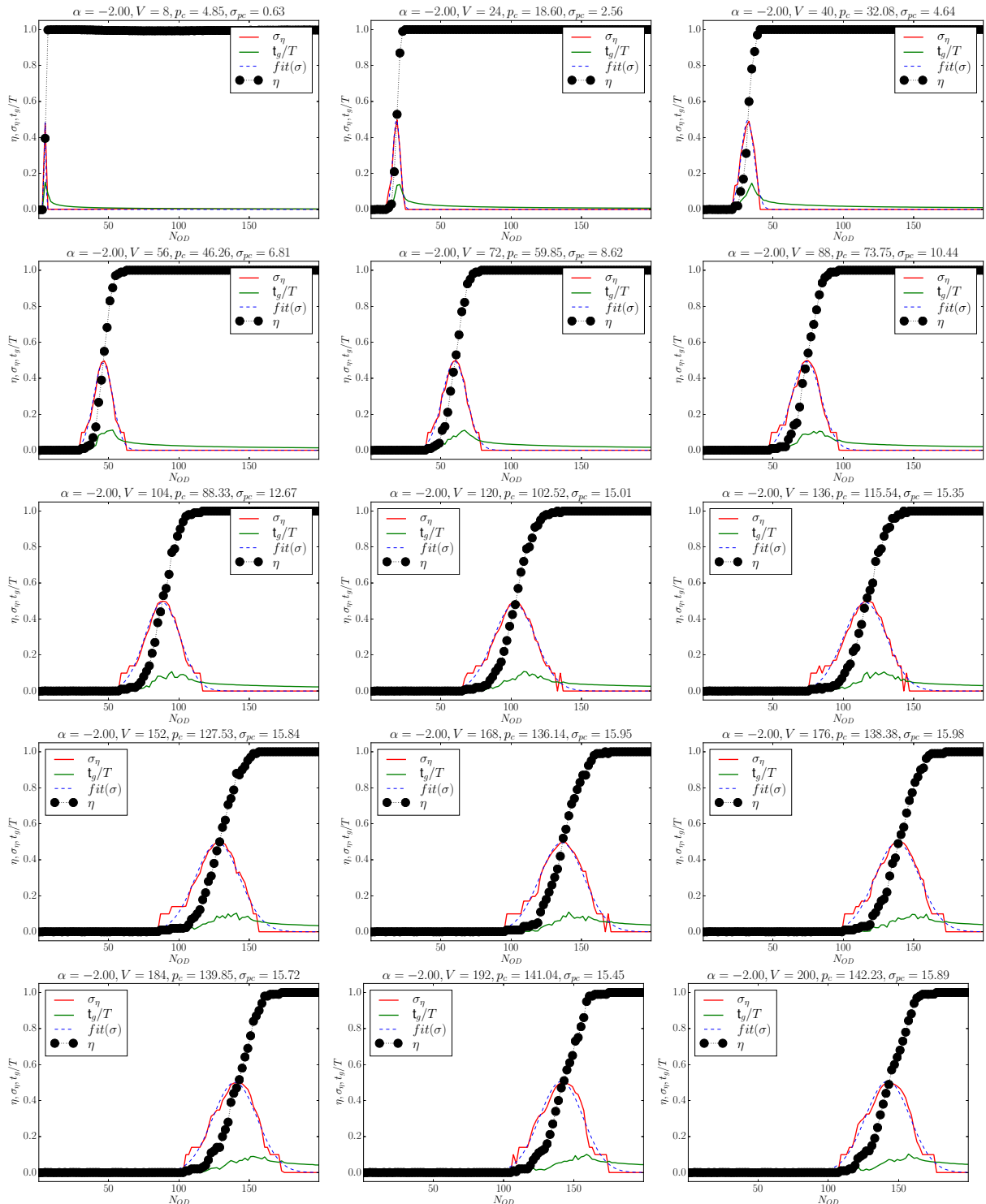


Figura 51 – Parâmetro de ordem η , desvio padrão σ , tempo médio t_g de aparecimento de *gridlock* e ajuste do desvio padrão σ para determinação de N_{ODc} de acordo com uma gaussiana $G'(N_{ODc}, \sigma_{pc})$. Valores calculados para $\alpha = -2$.

A.3.7 Resultados para $\alpha = -3$

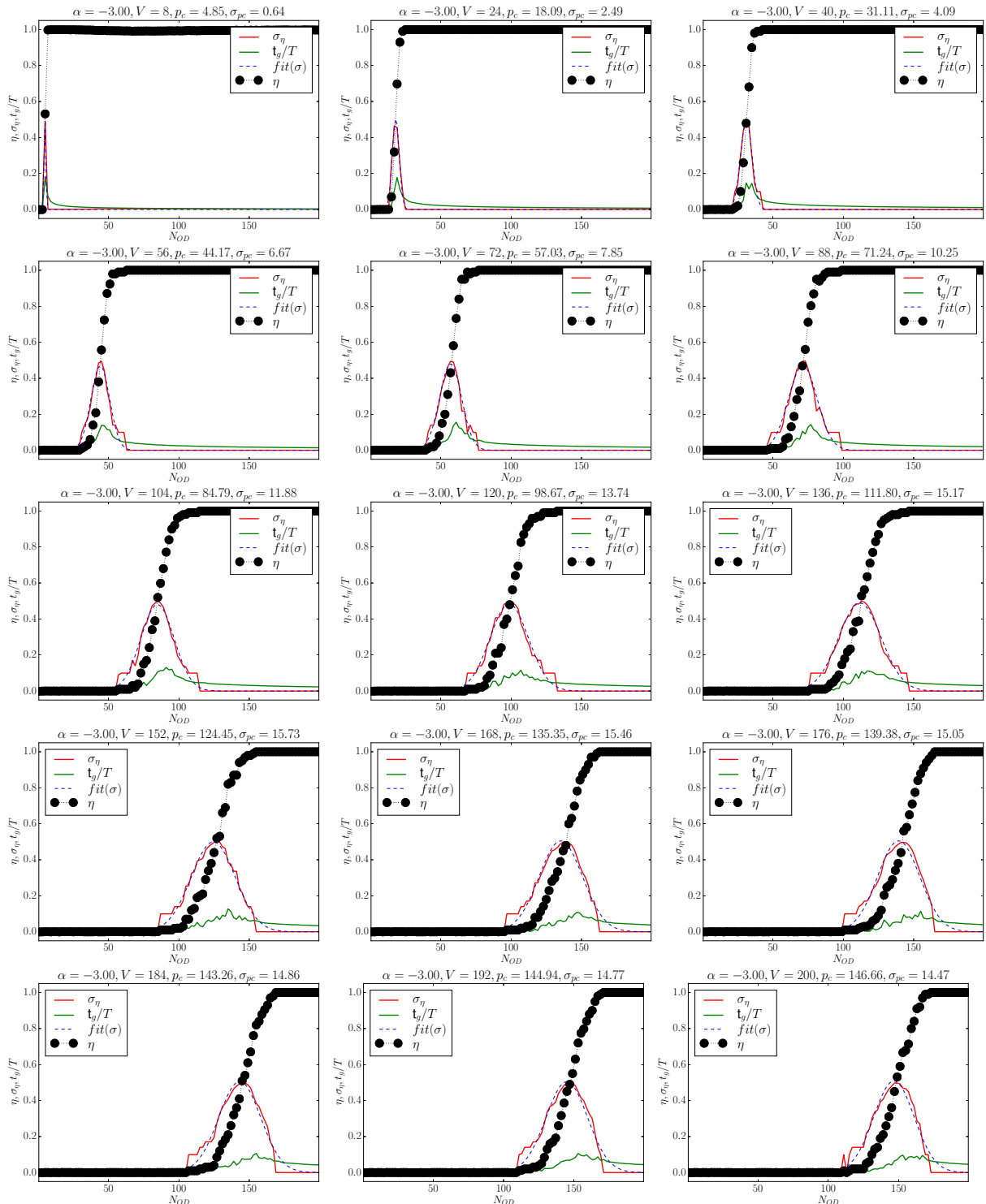


Figura 52 – Parâmetro de ordem η , desvio padrão σ , tempo médio t_g de aparecimento de *gridlock* e ajuste do desvio padrão σ para determinação de N_{ODc} de acordo com uma gaussiana $G'(N_{ODc}, \sigma_{pc})$. Valores calculados para $\alpha = -3$.

A.4 Sem concorrência de ruas

Nesta seção apresentamos os resultados para as transições de fase sem concorrência de ruas. Também distinguiremos os resultados para a desordem nos valores de τ segundo uma lei de potência e segundo uma função gaussiana.

A.4.1 Desordem em lei de potência

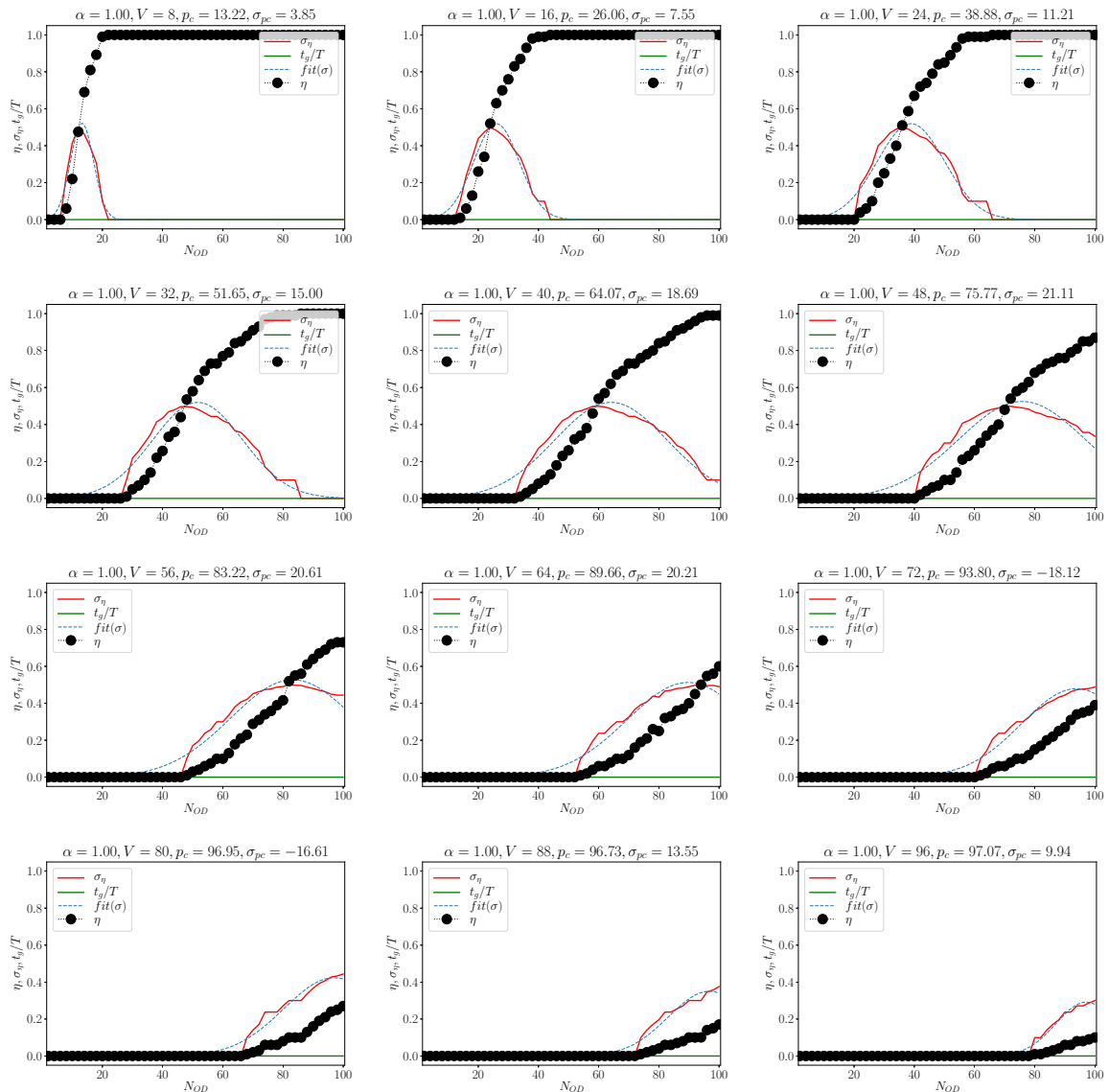


Figura 53 – Transições de fase para o modelo SPQM sem concorrência de ruas e distribuição de τ em lei de potência para vários valores de V com $\alpha = 1$.

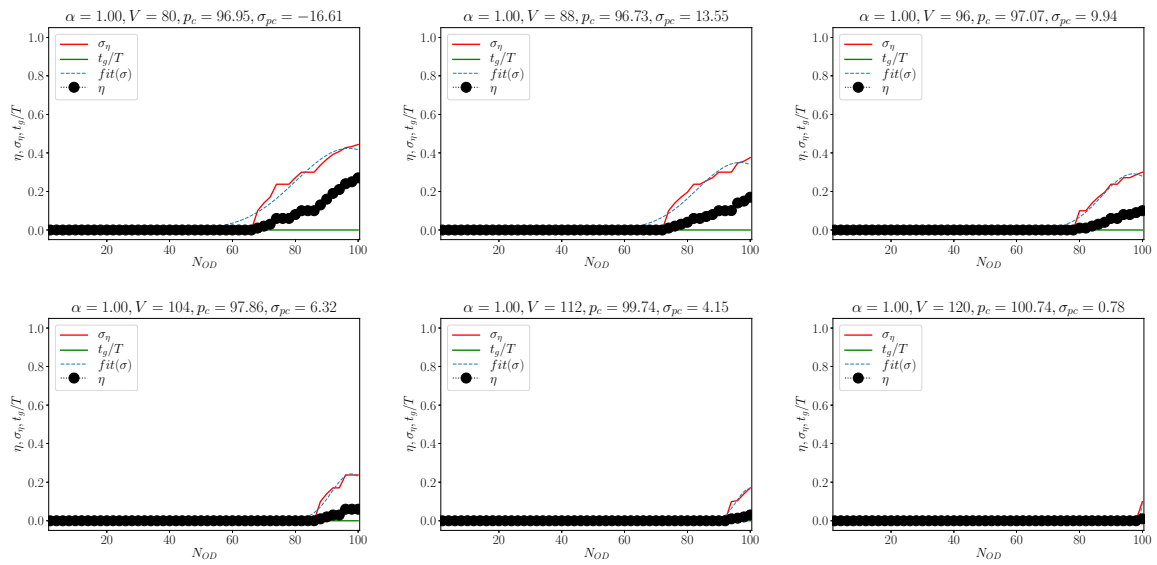


Figura 54 – Primeiro resultados

A.4.2 Sem concorrência de ruas e distribuição de τ dada por gaussiana.

A.4.2.1 $\tau = 1$

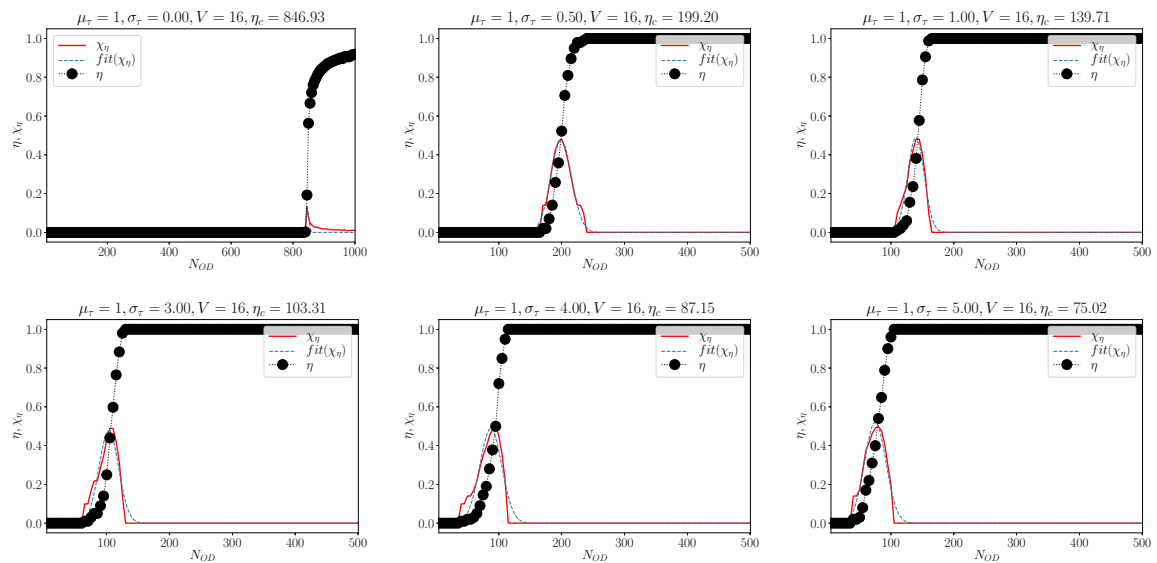


Figura 55 – Transições de fase para o modelo SPQM sem concorrência de ruas e distribuição de τ gaussiana para vários valores de σ_τ com $\mu_\tau = 1$.

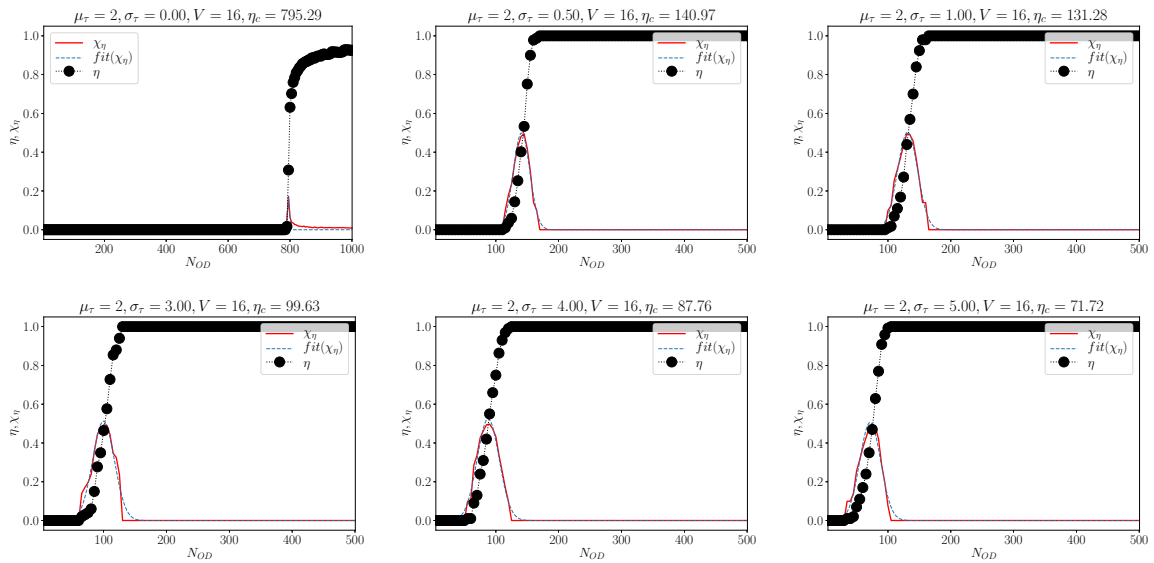
A.4.2.2 $\tau = 2$ 

Figura 56 – Transições de fase para o modelo SPQM sem concorrência de ruas e distribuição de τ gaussiano para vários valores de σ_τ com $\mu_\tau = 2$.

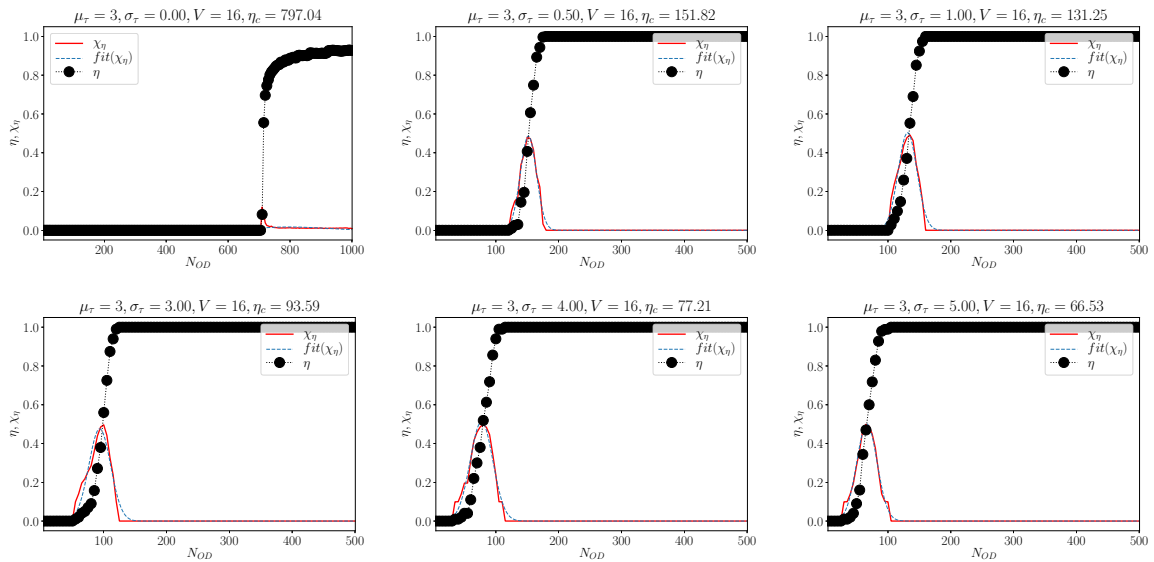
A.4.2.3 $\tau = 3$ 

Figura 57 – Transições de fase para o modelo SPQM sem concorrência de ruas e distribuição de τ gaussiano para vários valores de σ_τ com $\mu_\tau = 3$.

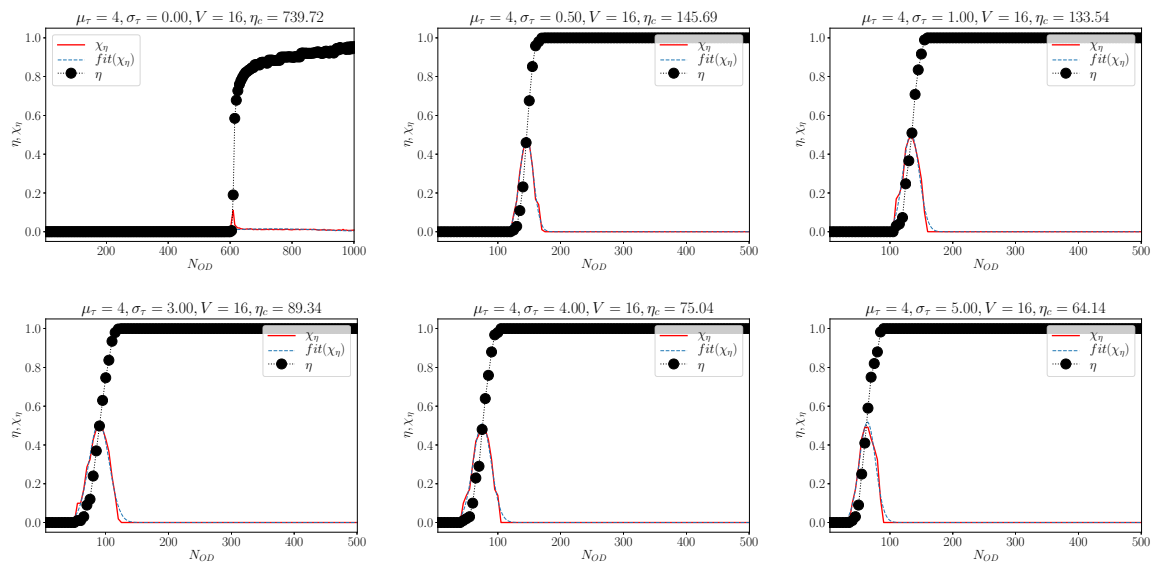
A.4.2.4 $\tau = 4$ 


Figura 58 – Transições de fase para o modelo SPQM sem concorrência de ruas e distribuição de τ gaussiano para vários valores de σ_τ com $\mu_\tau = 4$.

ANEXO A – NAVEGAÇÃO DESCENTRALIZADA DE MÚLTIPLOS PACOTES EM REDES DE TRANSPORTE

PHYSICAL REVIEW E **98**, 032306 (2018)

Decentralized navigation of multiple packages on transportation networks

Samuel M. da Silva, Saulo D. S. Reis, Ascânio D. Araújo, and José S. Andrade, Jr.
Departamento de Física, Universidade Federal do Ceará, 60451-970 Fortaleza, Ceará, Brazil

 (Received 15 June 2018; published 17 September 2018)

We investigate by numerical simulation and finite-size analysis the impact of long-range shortcuts on a spatially embedded transportation network. Our networks are built from two-dimensional ($d = 2$) square lattices to be improved by the addition of long-range shortcuts added with probability $P(r_{ij}) \sim r_{ij}^{-\alpha}$ [J. M. Kleinberg, *Nature* **406**, 845 (2000)]. Considering those improved networks, we performed numerical simulation of multiple discrete package navigation and found a limit for the amount of packages flowing through the network. Such a limit is characterized by a critical probability of creating packages p_c , where above this value a transition to a congested state occurs. Moreover, p_c is found to follow a power law, $p_c \sim L^{-\gamma}$, where L is the network size. Our results indicate the presence of an optimal value of $\alpha_{\min} \approx 1.7$, where the parameter γ reaches its minimum value and the networks are more resilient to congestion for larger system sizes. Interestingly, this value is close to the analytically found value of α for the optimal navigation of single packages in spatially embedded networks, where $\alpha_{\text{opt}} = d$. Finally, we show that the power spectrum for the number of packages navigating the network at a given time step t , which is related to the divergence of the expected delivery time, follows a universal Lorentzian function, regardless of the topological details of the networks.

DOI: [10.1103/PhysRevE.98.032306](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.032306)

I. INTRODUCTION

The navigation problem consists of sending a message, or some piece of information, from a given source node to a target node of a network [1,2]. Taking this perspective into account, communication networks, the internet, and the network of streets for public transportation all share the same basic purpose: to deliver the desired packages as faster as possible to their destiny, while maintaining the network's functionality. From this point of view, the 1967 small-world experiment proposed by the American psychologist Stanley Milgram is a paradigmatic example [3]. The algorithmic approach of the experiment performed later by Kleinberg [4] showed not only that navigation guided solely by decentralized algorithms is capable of accomplishing the task, but also that the underlying dimension of the spatially embedded network can drastically affect the expected delivery time. In the present work, we investigate the impact of the underlying geography of the transportation network on the navigation of multiple packages where a load limit to the network nodes exists.

In many transportation networks of interest in science and technology, efficient transport of information packages, energy, or even people is thought of in terms of avoiding congestion rather than minimizing expected delivery time [5–7]. For instance, when using a crowdsourcing map application to navigate a city, the driver usually sacrifices time of travel, adopting a longer detour in order to avoid traffic jams. Consider now that, by the addition of new shortcuts, we aim to plan or improve an existing transportation network. As we shall show, to consider the underlying structure of such network, while adding shortcuts, plays an important role in the way the transportation occurs, allowing the increase of the number of packages traveling the network, without missing its functionality.

The framework of spatially embedded networks makes use of a regular lattice of dimension d with long-range connections randomly added upon it. Generally, it considers the addition of long-range connections between two given nodes i and j with a probability decaying with their lattice distance r_{ij} , $P(r_{ij}) \sim r_{ij}^{-\alpha}$ [4]. The interplay between the underlying regular structure and a randomized long-range construction is a well-known recipe to mimic the so called small-world phenomenon [8], where the typical distance ℓ between a pair of nodes grows slowly with the number of nodes N of the network, $\ell \sim \log_{10} N$ [9]. However, for the case of spatially embedded networks, this is true only for $\alpha \leq d$ [10,11]. Remarkably, the small-world property can be accessed by a decentralized algorithm only when $\alpha = d$ [4,12–15], a result that holds for fractals [16,17], transport phenomena that obey local conservation laws [18,19], nonlocal percolation rules [20], and brain networks [21,22]. Moreover, when a cost constraint is imposed on the addition of shortcuts to the underlying network, it has been found that better conditions to navigation are attained when $\alpha = d + 1$ [23–26]. It is argued that such conditions, with and without cost constraint, are optimal due to strong correlations between the underlying spatial network and the long-range structure, allowing the package holder to find the shortest paths in the small-world network [4]. It is claimed that such a compromise between local and long-range structures leads to an effective dimension higher than the dimension of the underlying local structure [27,28].

This paper is organized as follows. In Sec. II we describe the spatially embedded network model proposed by Kleinberg [4]. The rules for node overload used in the present study in order to mimic the onset of congestion are also presented in Sec. II. In Sec. III the results of our simulations and numerical analysis are presented, where we study the behavior of the order parameter, the scale of the critical point