UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

CAMILA SOUSA VASCONCELOS

DECOMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS EM FRAÇÕES PARCIAIS

FORTALEZA
2018

CAMILA SOUSA VASCONCELOS

DECOMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS EM FRAÇÕES PARCIAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Romildo José da Silva

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

V45d Vasconcelos, Camila Sousa.
Decomposição de Funções Racionais em Frações Parciais / Camila Sousa Vasconcelos. – 2018.
47 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Romildo José da Silva.

1. Integal. 2. Decomposição em Frações Parciais. 3. Funções Racionais. I. Título.
CDD 510

CAMILA SOUSA VASCONCELOS

DECOMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS EM FRAÇÕES PARCIAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em: 29 de Outubro de 2018

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Romildo José da Silva (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Esdras Soares de Medeiros Filho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. João Luzeilton de Oliveira
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

A Deus, fortaleza de minha caminhada.

A minha família, companheiros de estrada.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelos milagres de todos os dias, pela paz que me passava em dias de avaliação e pela força que me dava para acreditar que chegaria neste momento.

À minha família, pelas orações de sempre, em especial a meus pais, Francisco Benedito Vasconcelos e Maria Conceição de Sousa Vasconcelos, que sempre me incentivaram com carinho ao longo de toda minha vida escolar.

Ao meu noivo Moisés Nascimento dos Santos, pela companhia e apoio em todos os momentos, até nos quais estávamos longe.

Aos meus amigos de faculdade que mesmo distantes sempre me enviaram mensagens de incentivo e torcida.

Ao professor Márcio Nascimento da Silvia, meu maior incentivador nesta profissão e no ingresso deste curso.

Aos amigos de profissão, em especial Kelanne Linhares, que sempre me mostrou o lado positivo em meio às adversidades.

Aos colegas de Profmat, em especial Luciano Ribeiro dos Santos, parceiro das longas viagens e confidente em todos os obstáculos.

Aos professores do Profmat, por todos os ensinamentos repassados, em especial ao professor Romildo José da Silva, pela sábia orientação.

Ao Doutorando em Engenharia Elétrica, Ednardo Moreira Rodrigues, e seu assistente, Alan Batista de Oliveira, aluno de graduação em Engenharia Elétrica, pela adequação do *template* utilizado neste trabalho para que o mesmo ficasse de acordo com as normas da biblioteca da Universidade Federal do Ceará (UFC).

“Por vezes sentimos que aquilo que fazemos
não é senão uma gota de água no mar. Mas
o mar seria menor se lhe faltasse uma gota. ”

(Madre Teresa de Calcutá)

RESUMO

Este trabalho trata de um assunto bem pertinente nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral que é a determinação da integral de funções racionais. Para tal demonstraremos o método de decomposição destas funções em frações parciais que podem ser integradas usando ferramentas básicas de integração. Pretendemos com este trabalho aprimorar o estudo de Cálculo Diferencial e facilitar sua compreensão. Apesar de ser um tema bem conhececido dentre os estudantes de Cálculo, são poucos os textos em português que abordam este assunto demonstrando a veracidade da decomposição de qualquer função racional. Este trabalho é resultado de pesquisas e estudos sobre o assunto, o que nos possibilitou demonstrar e exemplificar cada decomposição desde o caso mais simples (denominador com raízes reais simples) ao mais complexo (denominador com raízes complexas múltiplas).

Palavras-chave: Integral. Decomposição em Frações Parciais. Funções Racionais.

ABSTRACT

This paper deals with a very pertinent subject in the courses of Differential and Integral Calculus that is the determination of the integral of rational functions. For this we will demonstrate the method of decomposition of these functions into partial fractions that can be integrated using basic integration tools. We intend with this work to improve the study of Differential Calculus and facilitate its understanding. Although it is a well-known subject among the students of Calculus, few texts in Portuguese that approach this subject demonstrating the veracity of the decomposition of any rational function. This work is the result of researches and studies on the subject, which allowed us to demonstrate and exemplify each decomposition from the simplest case (denominator with simple real roots) to the most complex one (denominator with multiple complex roots).

Keywords: Integral Defined. Decomposition in Partial Fractions. Ra- tional Functions.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Criada com o intuito de determinar a área da região limitada por uma curva descrita por meio de uma função, a Integral indefinida é uma ferramenta do Cálculo Diferencial e Integral bastante requisitada no meio matemático e científico. Entretanto, nem sempre conseguimos obtê-la de forma exata com facilidade, o que abriu caminho para a descoberta de diversas técnicas que facilitam sua busca, como a que apresentamos nesta dissertação.

O primeiro a propor o método de integração a ser apresentado neste texto foi Leibniz (1646-1716), um dos precursores do Cálculo Diferencial e Integral, mas ele não chegou a concluir seu trabalho. Os detalhes de sua descoberta foram desenvolvidos por Johann Bernoulli (1667-1748) que, em um artigo publicado em 1703 na Acta Eruditorum, mostrou que qualquer função racional pode ser decomposta em outras funções racionais mais simples.

Na engenharia, por exemplo, por vezes surgem integrais de funções com as quais não estamos familiarizados e no seu desenvolvimento podemos nos deparar com integral de funções racionais e isto pode ser um empecilho para obtermos sua solução, visto que, até mesmo alguns softwares de resolução de integrais falham ao resolvê-las.

Com esta dissertação pretendemos apresentar e demonstrar ferramentas para a integração de funções racionais, com coeficientes reais, por meio da sua decomposição em frações parciais. Para um melhor entendimento ela está dividida em cinco tópicos: decomposição em fatores lineares e não repetidos; decomposição em fatores lineares com repetições; decomposição em fatores lineares e quadráticos sem repetições; decomposição em fatores quadráticos com repetição e decomposição em fatores lineares e quadráticos com repetições. Tal classificação nos possibilitará maior clareza nas demontrações. Porém, para uma real compreensão deste texto, é necessário que o leitor conheça os fundamentos do Cálculo Diferencial e Integral.

Denominamos por função polinomial real cada função $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $F(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0, \forall x\in\mathbb{R}$, onde $a_n,\cdots,a_1,a_0\in\mathbb{R}$. Denominamos por função polinomial complexa cada função $F:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ dada por $F(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0, \forall x\in\mathbb{C}$, onde $a_n,\cdots,a_1,a_0\in\mathbb{C}$. Em cada caso, dizemos que F tem grau n, quando $a_n\neq 0$, e denotaremos o grau de F por $Gr(F)$.

Denominamos por função racional real toda função quociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ onde $P(x)$

e $Q(x)$ são funções polinomiais reais. Denominamos por função racional complexa toda função quociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ onde $P(x)$ e $Q(x)$ são funções polinomiais complexas. Neste trabalho nos restringiremos às funções racionais reais. No entanto necessitaremos considerar as raízes complexas, portanto, apresentaremos e demonstraremos resultados para funções polinomiais reais e complexas. Diremos que a função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ é irredutível quando $P(x)$ e $Q(x)$ não possuem fatores lineares ou fatores quadráticos irredutíveis em comum.

Nas próximas secções, ao desenvolvermos métodos para a decomposição de uma função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ suporemos, sem perda de generalidade, que

– $P(x)$ e $Q(x)$ não possuem fatores lineares ou quadráticos irredutíveis em comum.

– $Q(x)$ é uma função polinomial mônica, isto é, $a_n = 1$, se grau de $Q(x) = n$.

– O grau de $P(x)$ é menor do que o grau de $Q(x)$. Caso contrário, efetuaremos a divisão de $P(x)$ por $Q(x)$ e obtendo-se

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

onde $Gr(R(x)) < Gr(P(x))$. Daí

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int (T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)})dx = \int T(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx + C,$$

C constante.

Como T é uma função polinomial, sua integral pode ser facilmente calculada e ficaremos apenas com $\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$. O objetivo deste trabalho é mostrar, nestas condições, o

Teorema 1. *Se $P(x)$ e $Q(x)$ são funções polinomiais sem fatores lineares e sem fatores quadráticos irredutíveis em comum, $Gr(P(x)) < Gr(Q(x))$ e $Q(x)$ é mônica, então $\frac{P(x)}{Q(x)}$ pode ser escrita como soma de funções dos tipos*

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad e/ou \quad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^m},$$

onde $A, B, C \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}^*$, a é raiz real de $Q(x)$ com multiplicidade α, $1 \leq n \leq \alpha$, $x^2 + bx + c = (x-z)(x-\overline{z})$, onde z é uma raiz complexa não real de Q com multiplicidade β e $1 \leq m \leq \beta$.

Para o que segue convém enunciar o teorema abaixo.

Teorema 2 (Teorema Fudamental da Álgebra)**.** *Sejam $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$, com $a_n \neq 0$, e a função polinomial $F(x)$, de grau n, dada por*

$$F(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \ , \forall x \in \mathbb{C}.$$

Existem $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$*, dois a dois distintos, e* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}^*$ *tais que*

$$F(x) = a_n(x - z_1)^{\alpha_1} . \cdots .(x - z_k)^{\alpha_k} \;, \forall x \in \mathbb{C}.$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$*,* α_i *é denominado a multiplicidade de* z_i *como raiz de* $F(x)$*.*

A demonstração para este Teorema pode ser encontrada no livro Polinômios e Equações Algébricas, coleção PROFMAT(HEFEZ ABRAMO; VILELA, 2012).

O trabalho está dividido da seguinte maneira: no capítulo 2 faremos a justificativa da escolha do tema e a metodologia usada na pesquisa. No capítulo 3, demonstraremos o Teorema 1 e, finalmente no Capítulo 4, os resultados e discussões.

No capítulo que segue faremos a justificativa da escolha do tema e metodologia usada na pesquisa.

2 JUSTIFICATIVA E METODOLOGIA

O tema abordado neste trabalho é bem pertinente no ensino de Matemática, em especial em cursos mais avançados de Cálculo, pois este facilita a obtenção de integrais de funções racionais. Apesar disso é dificil encontrar materiais, em especial em língua portuguesa, que abordem este assunto, daí a escolha deste tema.

Através de pesquisas literárias fora feito um apanhado de informações acerca do assunto, a partir daí elaboramos nossas próprias demonstrações e as agrupamos de forma a facilitar a compreensão do assunto.

A seguir estudaremos os possíveis casos para a decomposição de $Q(x)$.

3 DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS

Ao realizarmos a decomposição de uma função racional em frações mais simples a integral de uma função complicada passa a ser apenas a integral de uma soma de parcelas básicas, cuja solução é trivial.

A fim de ilustrar o que iremos apresentar nesta seção, vejamos a integral a seguir.

Seja $\int \frac{x-3}{x^2-1}dx$ a integral de uma função racional irredutível. Poderíamos optar por resolvê-la usando outros métodos que não a decomposição em frações parciais, mas seria um método particular para este caso e não um método que funcionaria em outros casos.

Para tal vejamos:

$\int \frac{x-3}{x^2-1}dx = \int \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1}dx = \int \frac{2}{x+1}dx - \int \frac{1}{x-1}dx = 2ln|x+1| - ln|x-1|$

Agora observe como este método é eficaz para todos os tipos de funções racionais reais.

3.1 Caso 1: Decomposição em fatores lineares e não repetidos

Seja $\frac{P(x)}{Q(x)}$ uma função racional irredutível, onde $Gr(P(x)) < Gr(Q(x))$ e $Q(x)$ é uma função polinomial de grau n que possui n raízes reais $a_1, \ldots, a_n$, distintas duas a duas. Deste modo,

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Queremos mostrar que existem $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + ... + \frac{A_n}{x-a_n}.$$

Para demonstrarmos a igualdade acima precisaremos da proposição e do corolário que seguem.

Proposição 1. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ e a função polinomial*

$$F(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Se $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ são dois a dois distintos e $F(c_0) = F(c_1) = \cdots = F(c_n) = 0$, então $F(x) = 0$.

Demonstração. Faremos a demonstração usando Indução sobre n. O resultado mostra-se trivialmente verdadeiro para $n = 0$. Suponha que o resultado vale para n. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1}, a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$, a função polinomial

$$F(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

e $c_0, c_1, \ldots, c_n, c_{n+1} \in \mathbb{R}$, dois a dois distintos, tais que $F(c_0) = F(c_1) = \cdots = F(c_n) = F(c_{n+1}) = 0$. Existe uma função polinomial $G(x)$, com grau de $G(x)$ no máximo n, tal que $F(x) = (x - c_{n+1}).G(x)$. Daí $G(c_0) = \cdots = G(c_n) = 0$ e, pela hipótese de indução, $G(x) = 0$. Portanto $F(x) = 0$ e o resultado mostra-se verdadeiro para $n+1$. Deste modo, é possível e verdadeiro para cada $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Corolário 1. *Sejam $F(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ e $G(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$ funções polinomiais reais e $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, distintos dois a dois. Tem-se $F(x) = G(x)$ se, e somente se, $F(x_i) = G(x_i)$ $\forall i \in \{0, ..., n\}$.*

Demonstração. A ida é trivial vem da definição de função, então demonstremos a volta, para tal cosideremos a hipótese de que $F(x_i) = G(x_i)\ \forall i \in 1,...,0$. Logo:

$$\begin{bmatrix} x_0^n & ... & x_0 & 1 \\ x_1^n & ... & x_1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ x_n^n & ... & x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ ... \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0^n & ... & x_0 & 1 \\ x_1^n & ... & x_1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ x_n^n & ... & x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n \\ ... \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} x_0^n & ... & x_0 & 1 \\ x_1^n & ... & x_1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ x_n^n & ... & x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n - b_n \\ ... \\ a_1 - b_1 \\ a_0 - b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A primeira matriz é uma matriz de Vandermonte, onde cada linha ou coluna segue uma progressão aritmética. Com isso temos a garantia de que o determinante da matriz é diferente de zero e, portanto temos que

$a_n - b_n = ... = a_1 - b_1 = a_0 - b_0 = 0$ e daí $a_i = b_i\ \forall i \in 1,...,n$ e $F(x) = G(x)$.

$\square$

Mostraremos na Proposição 2, a seguir, que existem A_1, A_2, ..., $A_n \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + ... + \frac{A_n}{x-a_n}.$$

Proposição 2. *Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ funções polinomiais reais sem fatores lineares em comum, com $Gr(P) < Gr(Q) = n$. Se $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$, com $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ distintos dois a dois, então existem $A_1,\dots,A_n \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + ... + \frac{A_n}{x-a_n}.$$

Demonstração. Se $A_1,...,A_n \in \mathbb{R}$ são tais que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + ... + \frac{A_n}{x-a_n},$$

então

$$P(x) = A_1\frac{Q(x)}{x-a_1} + A_2\frac{Q(x)}{x-a_2} + ... + A_n\frac{Q(x)}{x-a_n}$$

sendo $F_i(x) = \frac{Q(x)}{x-a_i}$ para cada $i \in \{1,\dots,n\}$, temos que

$$P(x) = A_1F_1(x) + A_2F_2(x) + \cdots + A_nF_n(x).$$

Dado $i \in \{1,\dots,n\}$, $F_j(a_i) = 0, \quad \forall j \neq i$, e assim $A_i = \frac{P(a_i)}{F_i(a_i)}$.

Note que $F_i(a_i) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n}(x-a_j)$, e portanto, $F_i(a_i) \neq 0$.

Daí

$$P(a_i) = A_iF_i(a_i), \quad \forall i \in \{1,...,n\}.$$

Deste modo, pelo Corolário 1,

$$P(x) = A_1F_1(x) + A_2F_2(x) + \cdots + A_nF_n(x).$$

isto é,

$$P(x) = A_1\frac{Q(x)}{x-a_1} + A_2\frac{Q(x)}{x-a_2} + ... + A_n\frac{Q(x)}{x-a_n}.$$

Portanto,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + ... + \frac{A_n}{x-a_n},$$

e assim,

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = A_1\int\frac{1}{x-a_1}dx + A_2\int\frac{1}{x-a_2}dx + ... + A_n\int\frac{1}{x-a_n}dx + C$, onde C é uma constante.

$\square$

No exemplo a seguir, vamos mostrar como o Caso 1.

Exemplo 1. *Sendo $P(x) = x^2 - 3x - 4$ e $Q(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$, então calcule*

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int\frac{x^2-3x-4}{x^3-x^2-14x+24}dx.$$

Note que

$$Q(x) = (x-2)(x-3)(x+4).$$

logo, devemos obter A_1, A_2, A_n tais que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x-3} + \frac{A_3}{x+4}$$

De acordo com a proposição 2, temos:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{P(a_1)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)} = 1, \\ A_2 &= \frac{P(a_2)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)} = \frac{-4}{7}, \\ A_3 &= \frac{P(a_3)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)} = \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

Podemos então calcular a integral de $\frac{P(x)}{Q(x)}$:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{1}{x-2}dx + \int \frac{-\frac{4}{7}}{x-3}dx + \int \frac{\frac{12}{21}}{x+4}dx,$$

o que nos dá

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \ln|x-2| - \frac{4}{7}\ln|x-3| + \frac{4}{7}\ln|x+4| + c.$$

3.2 Caso 2: Decomposição em fatores lineares com repetições

Seja $\frac{P(x)}{Q(x)}$ uma função racional irredutível, com $Gr(P(x)) < Gr(Q(x))$ e $Q(x)$ uma função polinomial de grau k que possui somente raízes reais. Sejam $a_1, \ldots, a_n$ as raízes de $Q(x)$, distintas duas a duas, com multiplicades $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}^*$. Deste modo $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k$ e

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} \cdots (x-a_n)^{\alpha_n}.$$

Queremos mostrar que existem

$$A_{11}, \ldots, A_{1\alpha_1}, \ldots, A_{1n}, \ldots, A_{1\alpha_n} \in \mathbb{R},$$

tais que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-a_1} + \cdots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \cdots + \frac{A_{n1}}{x-a_n} + \cdots + \frac{A_{n\alpha_n}}{(x-a_n)^{\alpha_n}}.$$

Primeiro, demonstraremos uma versão mais simples desse resultado.

Proposição 3. *Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ funções polinomiais sem fatores lineares em comum, com $Gr(P(x)) < Gr(Q(x))$. Se $\alpha \in \mathbb{N}^*$ e $Q(x) = (x-a)^\alpha$ então existem $A_1, \ldots, A_\alpha \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \cdots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}.$$

Demonstração. Faremos a demonstração usando Indução sobre α. O resultado mostra-se trivialmente verdadeiro para $\alpha = 1$.

Suponha o resultado verdadeiro para α. Se $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^{\alpha+1}}$ e $Gr(P(x)) < \alpha+1$, então existem um polinômio $F(x)$, com $Gr(F) < \alpha$, e um número real r, com $r \neq 0$, tais que $P(x) = F(x).(x-a) + r$. Daí, temos

$$\frac{P(x)}{(x-a)^{\alpha+1}} = \frac{F(x)(x-a)+r}{(x-a)^{\alpha+1}} = \frac{F(x)}{(x-a)^\alpha} + \frac{r}{(x-a)^{\alpha+1}}.$$

Por hipótese de indução, existem $A_1, \ldots, A_\alpha \in \mathbb{R}$, tais que

$$\frac{F(x)}{(x-a)^\alpha} = \frac{A_1}{x-a} + \cdots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha},$$

Ou seja o resultado vale para $\alpha+1$, e assim, o resultado vale para cada $\alpha \in \mathbb{N}$. $\square$

Proposição 4. *Sejam* $a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$*, a função polinomial*

$$F(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

e $a \in \mathbb{R}$*. Se* $F(a) = F'(a) = \cdots = F^{(n)}(a) = 0$*, então* $F(x) = 0$*.*

Demonstração. Faremos a demonstração usando indução sobre n. O resultado mostra-se trivialmente verdadeiro para $n = 0$.

Suponha que o resultado vale para n. Se

$$F(a) = F'(a) = \cdots = F^{(n)}(a) = F^{(n+1)}(a) = 0,$$

então existe uma função polinomial $G(x)$ com grau no máximo n tal que

$$F(x) = (x-a).G(x).$$

Como

$F'(x) = G(x) + (x-a).G'(x),$
$F''(x) = 2G'(x) + (x-a).G''(x),$
$\ldots,$
$F^{(n+1)}(x) = (n+1)G^{(n)}(x) + (x-a)G^{(n+1)}(x),$

segue que

$$G(a) = G'(a) = \cdots = G^n(a), = 0.$$

Assim, por hitpótese de indução $G = 0$ e, daí, $F(x) = 0$. Deste modo, o resultado vale para cada $n \in \mathbb{N}$. □

Proposição 5. *Sejam* $a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$*, a função polinomial*

$$F(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$*, com* $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n+1$ *e* $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ *dois a dois distintos. Se* $F(c_i) = \cdots = F^{(\alpha_i - 1)}(c_i) = 0$ *para cada* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *então* $F = 0$*.*

Demonstração. Faremos a demonstração usando indução sobre n. O resultado mostra-se trivialmente verdadeiro para $n = 0$. Suponha que o resultado vale para n. Sejam $a_{n+1}, a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, a função polinomial

$$F(x) = a_{n+1} x^{n+1} + a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$ com $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n+2$ e $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ dois a dois distintos, tais que $F(c_i) = \cdots = F^{(\alpha_i)}(c_i) = 0$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\alpha_1 \neq 0$. Daí existe uma função polinomial $G(x)$ com grau no máximo n, e

$$F(x) = (x - c_1).G(x).$$

Veja que, para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$,

$$\begin{aligned}
&F'(x) = G(x) + (x - c_1).G'(x)\\
&F''(x) = 2G'(x) + (x - c_1).G''(x)\\
&\ldots\\
&F^{(\alpha_j)}(x) = 2G^{(\alpha_j - 1)}(x) + (x - c_1).G^{(\alpha_j)}(x).
\end{aligned}$$

Daí segue, primeiro, que $G(c_1) = G'(c_1) = \cdots = G^{(\alpha_1 - 1)}(c_1) = 0$ e, segundo, que $G(c_j) = G'(c_j) = \cdots = G^{(\alpha_j - 1)}(c_j) = 0$ para cada $j \in \{2, \ldots, k\}$, com $(\alpha_1 - 1) + \cdots + \alpha_k = n + 1$. Logo, por hipótese de indução, $G(x) = 0$ e, portanto, $F = 0$. Deste modo, o resultado vale para cada n. $\square$

Corolário 2. *Sejam $F(x)$ e $G(x)$ funções polinomiais reais com grau no máximo n, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$, com $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n+1$ e $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$, dois a dois distintos. Se $F(a_i) = G(a_i), \ldots, F^{(\alpha_i - 1)}(a_i) = G^{(\alpha_i - 1)}(a_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, então $F(x) = G(x)$.*

Observe que se $n \in \mathbb{N}^*$, $G(x)$ é uma função n vezes diferenciável em um intervalo $I \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, e $F(x)$ é a função dada por $F(x) = (x-a)^n.G(x)$ então $F(x)$ é n vezes diferenciável em I com $F(a) = F'(a) = \cdots = F^{(n-1)}(a) = 0$. Este resultado, de simples demonstração, é utlizado na proposição que segue.

Proposição 6. *Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ funções polinomiais reais sem fatores lineares em comum, com $Gr(P(x)) < Gr(Q(x)) = k$. Se $Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} ... (x-a_n)^{\alpha_n}$, com $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ distintos dois a dois, então existem*

$$A_{11}, \ldots, A_{1\alpha_1}, \ldots, A_{1n}, \ldots, A_{1\alpha_n} \in \mathbb{R},$$

tais que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x - a_1} + ... + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x - a_1)^{\alpha_1}} + ... + \frac{A_{n1}}{x - a_n} + ... + \frac{A_{n\alpha_n}}{(x - a_n)^{\alpha_n}}.$$

Demonstração. Se $A_{11},\ldots,A_{1\alpha_1},\ldots,A_{n1},\ldots,A_{n\alpha_n}\in\mathbb{R}$ e

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_{11}}{x-a_1}+...+\frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+...+\frac{A_{n1}}{x-a_n}+...+\frac{A_{n\alpha_n}}{(x-a_n)^{\alpha_n}},$$

então

$$P(x)=A_{11}\frac{Q(x)}{x-a_1}+...+A_{1\alpha_1}\frac{Q(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+...+A_{n1}\frac{Q(x)}{x-a_n}+...+A_{n\alpha_n}\frac{Q(x)}{(x-a_n)^{\alpha_n}}.$$

Sendo $F_{ij}(x)=\frac{Q(x)}{(x-a_i)^j}$, temos

$$P(x)=A_{11}F_{11}(x)+...+A_{1\alpha_1}F_{1\alpha_1}(x)+...+A_{n1}F_{n1}(x)+...+A_{n\alpha_n}F_{n\alpha_n}(x).$$

Dado $i\in\{1,\ldots,n\}$,

$$F_{sj}(a_i)=0,\ \forall s\neq i,\ \text{ e }\ F_{ij}(a_i)=0,\ \forall j\in\{1,\ldots,\alpha_i-1\}.$$

Assim,

$$P(a_i)=A_{i\alpha_i}F_{i\alpha_i}(a_i),\ \text{ isto é, }\ A_{i\alpha_i}=\frac{P(a_i)}{F_{i\alpha_i}(a_i)}.$$

Dados $i\in\{1,\ldots,n\}$ e $k\in\{1,...,\alpha_i-1\}$, temos

$$F_{ij}^{(k)}(a_i)=0 \text{ se } j<\alpha_i-k$$

e

$$F_{sj}^{(k)}(a_i)=0 \text{ se } s\neq i \text{ e } k<\alpha_i.$$

Portanto,

$$P^{(k)}(a_i)=A_{i,\alpha_i-k}F_{i,\alpha_i-k}^{(k)}(a_i)+\cdots+A_{i,\alpha_i}F_{i,\alpha_i}^{(k)}(a_i),$$

isto é,

$$P^{(k)}(a_i)=\sum_{j=0}^{k}A_{i,\alpha_i-j}F_{i,\alpha_i-j}^{(k)}(a_i).$$

Daí,

$$P^{(k)}(a_i)=F_{i,\alpha_i-k}^{(k)}(a_i)A_{i,\alpha_i-k}+\sum_{j=0}^{k-1}A_{i,\alpha_i-j}F_{i,\alpha_i-j}^{(k)}(a_i)$$

e, portanto,

$$A_{i,\alpha_i-k}=\frac{P^{(k)}(a_i)-\sum_{j=0}^{k-1}A_{i,\alpha_i-j}F_{i,\alpha_i-j}^{(k)}(a_i)}{F_{i,\alpha_i-k}^{(k)}(a_i)}.$$

Agora, sendo

$$A_{i\alpha_i} = \frac{P(a_i)}{F_{i\alpha_i}(a_i)} \quad \text{para cada} \quad i \in \{1,\ldots,n\}, \quad \text{e}$$

$$A_{i,\alpha_i-k} = \frac{P^{(k)}(a_i) - \sum_{j=0}^{k-1} A_{i,\alpha_i-j} F^{(k)}_{i,\alpha_i-j}(a_i)}{F^{(k)}_{i,\alpha_i-k}(a_i)},$$

para cada $i \in \{1,...,n\}$ e, para cada $k \in \{1,...,\alpha_i - 1\}$, onde $F_{ij}(x) = \frac{Q(x)}{(x-a_i)^j}$, então

$$P(a_i) = A_{i\alpha_i} F_{i\alpha_i}(a_i), \quad \text{para cada} \quad i \in \{1,\ldots,n\}, \quad \text{e}$$

$$P^{(k)}(a_i) = F^{(k)}_{i,\alpha_i-k}(a_i) A_{i,\alpha_i-k} + \sum_{j=0}^{k-1} A_{i,\alpha_i-j} F^{(k)}_{i,\alpha_i-j}(a_i),$$

para cada $i \in \{1,...,n\}$ e para cada $k \in \{1,...,\alpha_i - 1\}$, isto é,

$$P^{(k)}(a_i) = \sum_{j=0}^{k} A_{i,\alpha_i-j} F^{(k)}_{i,\alpha_i-j}(a_i),$$

para cada $i \in \{1,...,n\}$ e para cada $k \in \{1,...,\alpha_i - 1\}$. Daí, pelo Corolário 2,

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\alpha_i} A_{ij} F_{ij}(x),$$

isto é,

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\alpha_i} A_{ij} \frac{Q(x)}{(x-a_i)^j}.$$

Portanto,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-a_1} + ... + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + ... + \frac{A_{n1}}{x-a_n} + ... + \frac{A_{n\alpha_n}}{(x-a_n)^{\alpha_n}}.$$

□

Apresentaremos agora um exemplo para fazer o cálculo de $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ com a função Q satisfazendo as condições do caso 2.

Exemplo 2. *Sejam* $p(x) = x^2 - 5x + 6$ *e* $q(x) = x^5 + 10x^4 + 31x^3 + 26x^2 - 28x - 40$*, para calcularmos* $\int \frac{p(x)}{q(x)}$ *basta ver que* $\frac{p(x)}{q(x)}$ *é irredutível e que e* $q(x) = (x+2)^3(x+5)(x-1)$*.*

Assim, devemos obter A_{11}*,* A_{12}*,* A_{13}*,* A_{21} *e* A_{31} *tais que:*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_{11}}{x+2} + \frac{A_{12}}{(x+2)^2} + \frac{A_{13}}{(x+2)^3} + \frac{A_{21}}{x+5} + \frac{A_{31}}{x-1}$$

Multiplicando a igualdade por $q(x)$ ficamos com

$$p(x) = A_{11}\frac{q(x)}{x+2} + A_{12}\frac{q(x)}{(x+2)^2} + A_{13}\frac{q(x)}{(x+2)^3} + A_{21}\frac{q(x)}{x+5} + A_{31}\frac{q(x)}{x-1}$$

Com base na proposição 6 temos: $A_{13} = -\frac{20}{9}$, $A_{21} = \frac{28}{81}$ *e* $A_{31} = \frac{1}{81}$

Para obtermos A_{12} *usando o valor de* A_{13} *basta derivarmos* $p(x)$ *e calcularmos* $p'(-2)$, *o que nos dá* $A_{12} = 1$

Do mesmo modo A_{11} *é obtido ao calcularmos* $p''(-2)$ *e substituirmos* A_{13} *e* A_{12}, *o que nos dá* $A_{11} = -\frac{29}{81}$

Agora podemos calcular $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$.

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int \frac{-\frac{29}{81}}{x+2}dx + \int \frac{1}{(x+2)^2}dx + \int \frac{-\frac{20}{9}}{(x+2)^3}dx + \int \frac{\frac{28}{81}}{x+5}dx + \int \frac{\frac{1}{81}}{x-1}dx$$

Efetuando cada integral separadamente obtemos:

$$-\frac{29}{81}ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + \frac{10}{9(x+2)^2} + \frac{28}{81}ln|x+5| + \frac{1}{81}ln|x-1| + c$$

3.3 Caso 3: Decomposição em fatores lineares e quadráticos sem repetições

Seja $\frac{P(x)}{Q(x)}$ uma função racional irredutível, tal que $Q(x)$ é uma função polinomial mônica de grau $m+2n$, que possui m raízes reais $a_1, \ldots, a_m$ simples e $2n$ raízes complexas simples não reais $z_1, z_2, \ldots, z_{2n-1}, z_{2n}$, onde $z_1 = \overline{z_2}, \ldots, z_{2n-1} = \overline{z_{2n}}$. Deste modo,

$$Q(x) = (x-a_1).\cdots.(x-a_m).(x-z_1).(x-z_2).\cdots.(x-z_{2n-1}).(x-z_{2n}),$$

e, assim

$$Q(x) = (x-a_1).\cdots.(x-a_m).(x^2+b_1x+c_1).\cdots.(x^2+b_nx+c_n),$$

em que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x^2+b_ix+c_i$ é um polinônio quadrático com coeficientes reais e irredutível. Assim,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)...(x-a_m)(x^2+b_1x+c_1)...(x^2+b_nx+c_n)}.$$

Queremos mostrar que existem $A_1, \ldots, A_m, B_1, C_1, \ldots, B_n, C_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + ... + \frac{A_m}{x-a_m} + \frac{B_1+C_1x}{x^2+b_1x+c_1} + ... + \frac{B_n+C_nx}{x^2+b_nx+c_n}.$$

Proposição 7. *Sejam $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, com $a_n \neq 0$, e a função polinomial $F(x)$, de grau n, dada por*

$$F(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0, \ \forall x \in \mathbb{C}.$$

Se z é raiz de f com multiplicidade α então $\overline{z}$ é raiz de $F(x)$ com multiplicidade α.

Demonstração. Sejam $a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, com $a_n \neq 0$, e $F(x) = a_nx^n + ... + a_1x + a_0$. Se $z \in \mathbb{C}$, não real, é raiz de $F(x)$, então

$$a_nz^n + ... + a_1z + a_0 = 0.$$

Daí,

$$\overline{a_nz^n + ... + a_1z + a_0} = 0,$$

ou seja,

$$a_n\overline{z}^n + ... + a_1\overline{z} + a_0 = 0.$$

Portanto, $\overline{z}$ é raiz de $F(x)$. Suponha que α, a multiplicidade de z, seja diferente de β, a multiplicidade de $\overline{z}$. Seja $\gamma = min\{\alpha, \beta\}$. Divindo $F(x)$ sucessivamente por $x^2 + ax + b = (x - z).(x - \overline{z})$, obtemos $F(x) = (x^2 + bx + c)^{\gamma}.G(x)$, onde $g(x)$ é um polinômio com coeficientes reais em que z é raiz de $G(x)$ e $\overline{z}$ não é, ou o contrário, o que é um absurdo. Portanto $\alpha = \beta$. □

As definições e os resultados a seguir fazem-se necessários para provar resultados envolvendo polinômios com raízes complexas. Eles versam sobre funções polinomiais com coeficientes complexos e variável complexa.

Definição 1. *Sejam $a_n, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ e a função polinomial complexa $F(x)$ dada por*

$$F(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \ \forall x \in \mathbb{C}.$$

A função polinomial derivada de $F(x)$ é a função polinomial $F'(x)$ dada por

$$F'(x) = n a_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1, \ \forall x \in \mathbb{C}.$$

Proposição 8. *Se F e G são funções polinomiais complexas, então $(F+G)'(x) = F'(x) + G'(x)$ $\forall x \in \mathbb{C}$. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e F é uma função polinomial complexa então $(\lambda F)'(x) = \lambda F'(x)$, $\forall x \in \mathbb{C}$.*

Demonstração. Sejam $F(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ e $G(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ tais que $n \geq m$. Se $n > m$, então $G(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$, com $b_n = \cdots = b_{m+1} = 0$. Daí,

$$(F+G)(x) = (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0).$$

Assim,

$$(F+G)'(x) = n(a_n + b_n)x^{n-1} + \cdots + 2(a_2 + b_2)x + (a_1 + b_1) =$$
$$(n a_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1) + (n b_n x^{n-1} + \cdots + 2b_2 x + b_1) =$$
$$(n a_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1) + (m b_m x^{m-1} + \cdots + 2b_2 x + b_1) = F'(x) + G'(x).$$

Sejam $F(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Temos que

$$(\lambda F)(x) = (\lambda a_n)x^n + \cdots + (\lambda a_1)x + \lambda a_0.$$

Assim,

$$(\lambda F)'(x) = n(\lambda a_n)x^{n-1} + \cdots + 2(\lambda a_2)x + \lambda a_1 =$$
$$\lambda(n a_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1) = \lambda F'(x).$$

□

Proposição 9. *Se* $m \in \mathbb{N}^*$, F *é uma função polinomial complexa e* G *é a função polinomial complexa dada por* $G(x) = x^m.F(x),\ \forall x \in \mathbb{C}$, *então*

$$G'(x) = mx^{m-1}.F(x) + x^m.F'(x),\ \forall x \in \mathbb{C}.$$

Demonstração. Se $F(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, então,

$$G(x) = a_n x^{m+n} + \cdots + a_1 x^{m+1} + a_0 x^m.$$

Assim,

$$G(x) = (m+n)a_n x^{m+n-1} + \cdots + (m+1)a_1 x^m + m a_0 x^{m-1} =$$

$$(m a_n x^{m+n-1} + \cdots + m a_1 x^m + m a_0 x^{m-1}) + (n a_n x^{m+n-1} + \cdots + a_1 x^m) =$$

$$m x^{m-1}(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 x) + x^m (n a_n x^{n-1} + \cdots 2a_2 x + a_1) =$$

$$m x^{m-1}.f(x) + x^m.F'(x).$$

□

Proposição 10. *Se* $F(x)$ *e* $G(x)$ *são funções polinomiais complexas e* $H(x)$ *é a função polinomial dada por* $H(x) = F(x).G(x),\ \forall x \in \mathbb{C}$, *então*

$$H'(x) = F'(x).G(x) + F(x).G'(x)\ \forall x \in \mathbb{C}.$$

Demonstração. Se $F(x) = F(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, então

$$H(x) = F(x).G(x) = a_n x^n G(x) + \cdots + a_1 x G(x) + a_0 G(x).$$

Daí,

$$H'(x) = a_n n x^{n-1} G(x) + a_n x^n G'(x) + \cdots + a_1 G(x) + a_1 x G'(x) + a_0 G'(x) =$$

$$(a_n n x^{n-1} G(x) + \cdots + a_1 G(x) + a_1 x G(x)) + (a_n x^n G'(x) + \cdots + a_1 x G'(x) + a_0 G'(x)) =$$

$$(a_n n x^{n-1} + \cdots + a_1 G + a_1 x) G(x) + (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) G'(x) =$$

$$F'(x).G(x) + G(x).G'(x).$$

□

Proposição 11. *Sejam* $n \in \mathbb{N}$, $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$ *e a função polinomial complexa*

$$F(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Se $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ *são dois a dois distintos e* $F(c_0) = F(c_1) = \cdots = F(c_n) = 0$ *então* $F(x) = 0$.

Demonstração. Faremos a demonstração usando indução sobre n. O resultado mostra-se trivialmente verdadeiro para $n = 0$. Suponha que o resultado vale para n. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1}, a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$, a função polinomial $F(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ e $c_0, c_1, \ldots, c_n, c_{n+1} \in \mathbb{R}$, dois a dois distintos, tais que $F(c_0) = f(c_1) = \cdots = F(c_n) = F(c_{n+1}) = 0$. Existe uma função polinomial G, com grau de G no máximo n, tal que $F(x) = (x - c_{n+1}).G(x)$. Daí, $G(c_0) = \cdots = G(c_n) = 0$ e, por hipótese de indução, $G = 0$. Portanto $F = 0$ e o resultado mostra-se verdadeiro para $n+1$. Deste modo, vale o resultado para cada $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Corolário 3. *Sejam $F(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ e $G(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$ funções polinomiais complexas e $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ distintos dois a dois. Tem-se $F = G$ se, e somente se, $F(x_i) = G(x_i)$, $\forall i \in \{0, ..., n\}$.*

Proposição 12. *Sejam $a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$, a função polinomial complexa*

$$F(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

e $a \in \mathbb{C}$. Se $F(a) = F'(a) = \cdots = F^{(n)}(a) = 0$, então $F(x) = 0$.

Demonstração. Faremos a demonstração usando indução sobre n. O resultado mostra-se trivialmente verdadeiro para $n = 0$. Suponha que o resultado vale para n. Se

$$F(a) = F'(a) = \cdots = F^{(n)}(a) = F^{(n+1)}(a) = 0,$$

então existe uma função polinomial G com grau no máximo n tal que $F(x) = (x - a).G(x)$. Como

$F'(x) = G(x) + (x - a).G'(x)$,
$F''(x) = 2G'(x) + (x - a).G''(x)$,
...,
$F^{(n+1)}(x) = (n+1)G^{(n)}(x) + (x - a)G^{(n+1)}(x)$,
segue que

$$G(a) = G'(a) = \cdots = G^{n}(a) = 0.$$

Logo, por hitpótese de indução, $G(x) = 0$, e assim, $F(x) = 0$. Deste modo, o resultado vale para cada $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Proposição 13. *Sejam* $a_n, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$*, a função polinomial complexa*

$$F(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$ *com* $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n+1$ *e* $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C}$ *dois a dois distintos. Se* $F(c_i) = \cdots = F^{(\alpha_i - 1)}(c_i) = 0$ *para cada* $i \in \{1, \dots, k\}$*, então* $F(x) = 0$*.*

Demonstração. Faremos a demonstração usando indução sobre n. O resultado mostra-se trivialmente verdadeiro para $n = 0$. Suponha que o resultado vale para n. Sejam $a_{n+1}, a_n, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$, a função polinomial

$$F(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$, com $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n+2$ e $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C}$, dois a dois distintos, tais que $F(c_i) = \cdots = F^{(\alpha_i)}(c_i) = 0$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\alpha_1 \neq 0$. Daí, existe uma função polinomial $G(x)$ tal que grau de $G(x)$ é no máximo n e

$$F(x) = (x - c_1).G(x).$$

Veja que, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$,

$$\begin{aligned}
&F'(x) = G(x) + (x - c_1).G'(x)\\
&F''(x) = 2G'(x) + (x - c_1).G''(x)\\
&\dots\\
&F^{(\alpha_j)}(x) = 2G^{(\alpha_j - 1)}(x) + (x - c_1).G^{(\alpha_j)}(x).
\end{aligned}$$

Daí segue, primeiro, que $G(c_1) = G'(c_1) = \cdots = G^{(\alpha_1 - 1)}(c_1) = 0$ e, segundo, que $G(c_j) = G'(c_j) = \cdots = G^{(\alpha_j - 1)}(c_j) = 0$, para cada $j \in \{2, \dots, k\}$, com $(\alpha_1 - 1) + \cdots + \alpha_k = n+1$. Logo, por hipótese de indução, $G = 0$ e, portanto, $F(x) = 0$. Deste modo, resultado vale para cada $n \in \mathbb{N}$. □

Corolário 4. *Sejam* $F(x)$ *e* $G(x)$ *funções polinomiais complexas com grau no máximo* n*,* $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$ *com* $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n+1$ *e* $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ *dois a dois distintos. Se* $F(a_i) = G(a_i), \dots, F^{(\alpha_i - 1)}(a_i) = G^{(\alpha_i - 1)}(a_i)$*, para cada* $i \in \{1, \dots, k\}$ *então* $F(x) = G(x)$*.*

Proposição 14. *Sejam* $z, w \in \mathbb{C}$*, com* $z \notin \mathbb{R}$*. Se* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $a + bz = w$*, então* $b = \frac{Im(w)}{Im(z)}$ *e* $a = w - bz$*. Se* $a, b \in \mathbb{C}$*,* $b = \frac{Im(w)}{Im(z)}$ *e* $a = w - bz$*, então* $a, b \in \mathbb{R}$*, com* $a + bz = w$*.*

Demonstração. Se $a,b \in \mathbb{R}$ e $a+bz = w$, então $a+bRe(z)+ibIm(z) = Re(w)+iIm(w)$. Daí, $b = \frac{Im(w)}{Im(z)}$ e, trivialmente, $a = w-bz$.

Agora, se $a,b \in \mathbb{C}$, $b = \frac{Im(w)}{Im(z)}$ e $a = w-bz$, então $b \in \mathbb{R}$, e

$$a = Re(w)+iIm(w) - \frac{Im(w)}{Im(z)}.(Re(z)+iIm(z)),$$

isto é,

$$a = Re(w)+iIm(w) - \frac{Im(w)}{Im(z)}.Re(z) - iIm(w) = Re(w) - \frac{Im(w)}{Im(z)}.Re(z).$$

Portanto, $a \in \mathbb{R}$ e $a+bz = w$. □

Proposição 15. *Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ funções polinomais reais sem fatores quadráticos em comum, e com $Gr(P(x)) < Gr(Q(x)) = 2n$. Se $z_1,\ldots,z_n$ são as raízes complexas, não reais, duas a duas distintas e não conjugadas de $Q(x)$, e $b_1,c_1,\ldots,b_n,c_n \in \mathbb{R}$ são tais que $(x-z_i).(x-\overline{z_i}) = x^2+b_ix+c_i$, para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, então existem $B_1,C_1,\ldots,B_n,C_n \in \mathbb{R}$, tais que*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_1+C_1x}{x^2+b_1x+c_1} + \ldots + \frac{B_n+C_nx}{x^2+b_nx+c_n}.$$

Demonstração. Se $B_1,C_1,\ldots,B_n,C_n \in \mathbb{R}$ são tais que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_1+C_1x}{x^2+b_1x+c_1} + \ldots + \frac{B_n+C_nx}{x^2+b_nx+c_n},$$

então

$$P(x) = (B_1+C_1x)\frac{Q(x)}{x^2+b_1x+c_1} + \ldots + (B_n+C_nx)\frac{Q(x)}{x^2+b_nx+c_n},$$

com

$$G_i(x) = \frac{Q(x)}{x^2+b_ix+c_i},$$

para $i \in \{1,...,n\}$. Temos que

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n}(B_i+C_ix)G_i(x).$$

Dado $i \in \{1,\ldots,n\}$, z_i é raiz complexa de $x^2+b_i+c_i$, e daí,

$$P(z_i) = (B_i+C_iz_i)G_i(z_i),$$

isto é,

$$B_i+C_iz_i = \frac{P(z_i)}{G_i(z_i)}.$$

Logo, pela Proposição 14,

$$C_i = \frac{Im(\frac{P(z_i)}{G_i(z_i)})}{Im(z_i)} \quad \text{e} \quad B_i = \frac{P(z_i)}{G_i(z_i)} - C_i z_i.$$

Agora, se

$$C_i = \frac{Im(\frac{P(z_i)}{G_i(z_i)})}{Im(z_i)} \quad \text{e} \quad B_i = \frac{P(z_i)}{G_i(z_i)} - C_i z_i,$$

para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, então, pela Proposição 14, $B_i, C_i \in \mathbb{R}$ e

$$P(z_i) = (B_i + C_i z_i) G_i(z_i),$$

para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$. Portanto, pelo Corolário 3,

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} (B_i + C_i x) \frac{Q(x)}{x^2 + b_i x + c_i},$$

e assim,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i + C_i x}{x^2 + b_i x + c_i}.$$

$\square$

Proposição 16. *Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ funções polinomiais reais sem fatores lineares ou quadráticos em comum e com $Gr(P) < Gr(Q) = m + 2n$. Se $a_1,\ldots,a_m \in \mathbb{R}$ são as raízes reais de $Q(x)$, duas a duas distintas, $z_1,\ldots,z_n$ são as raízes complexas, não reais, duas a duas distintas e não conjugadas de $Q(x)$ e $b_1, c_1, \ldots, b_n, c_n \in \mathbb{R}$, são tais que $(x - z_i).(x - \overline{z_i}) = x^2 + b_i x + c_i$, para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, então existem $A_1,\ldots,A_m, B_1, C_1, \ldots, B_n, C_n \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \ldots + \frac{A_m}{x - a_m} + \frac{B_1 + C_1 x}{x^2 + b_1 x + c_1} + \ldots + \frac{B_n + C_n x}{x^2 + b_n x + c_n}.$$

Demonstração. Se $A_1,\ldots,A_m, B_1, C_1, \ldots, B_n, C_n \in \mathbb{R}$ são tais que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \ldots + \frac{A_m}{x - a_m} + \frac{B_1 + C_1 x}{x^2 + b_1 x + c_1} + \ldots + \frac{B_n + C_n x}{x^2 + b_n x + c_n},$$

então

$$P(x) = A_1 \frac{Q(x)}{x - a_1} + \ldots + A_m \frac{Q(x)}{x - a_m} +$$
$$(B_1 + C_1 x) \frac{Q(x)}{x^2 + b_1 x + c_1} + \ldots + (B_n + C_n x) \frac{Q(x)}{x^2 + b_n x + c_n},$$

Com $F_i(x) = \frac{Q(x)}{x-a_i}$, para cada $i \in \{1,...,m\}$, e $G_i(x) = \frac{Q(x)}{x^2+b_ix+c_i}$, para cada $i \in \{1,...,n\}$. Temos que

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} A_iF_i(x) + \sum_{i=1}^{n}(B_i + C_ix)G_i(x).$$

Perceba que, dado $i \in \{1,...,n\}$,

$$F_j(a_i) = 0, \quad \forall j \neq i, \quad \text{e} \quad G_j(a_i) = 0, \quad \forall j.$$

Assim, $P(a_i) = A_iF_i(a_i)$, isto é, $A_i = \frac{P(a_i)}{F_i(a_i)}$. Agora, dado $i \in \{1,\ldots,m\}$, sendo z_i é um raiz complexa de $x^2 + b_ix + c_i$,

$$F_j(z_i) = 0, \quad \forall j, \quad \text{e} \quad G_j(z_i) = 0, \quad \forall j \neq i.$$

Deste modo,

$$P(z_i) = (B_i + C_iz_i)G_i(z_i),$$

isto é,

$$B_i + C_iz_i = \frac{P(z_i)}{G_i(z_i)}.$$

Logo,

$$C_i = \frac{Im(\frac{P(z_i)}{G_i(z_i)})}{Im(z_i)} \quad \text{e} \quad B_i = \frac{P(z_i)}{G_i(z_i)} - C_iz_i.$$

Agora, se

$$A_i = \frac{P(a_i)}{F_i(a_i)}, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1,\ldots,m\},$$

$$C_i = \frac{Im(\frac{P(z_i)}{G_i(z_i)})}{Im(z_i)}, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1,\ldots,n\} \quad \text{e}$$

$$B_i = \frac{P(z_i)}{G_i(z_i)} - C_iz_i, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1,\ldots,n\},$$

então

$$A_i \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad P(a_i) = A_iF_i(a_i), \quad \text{para cada} \quad i \in \{1,\ldots,n\}, \quad \text{e}$$

$$B_i, C_i \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad P(z_i) = (B_i + C_iz_i)G_i(z_i), \quad \text{para cada} \quad i \in \{1,\ldots,m\}.$$

Portanto, pelo Corolário 3,

$$P(x)=\sum_{i=1}^{m}A_iF_i(x)+\sum_{i=1}^{n}(B_i+C_ix)G_i(x),$$

isto é,

$$P(x)=\sum_{i=1}^{m}A_i\frac{Q(x)}{x-a_i}+\sum_{i=1}^{n}(B_i+C_ix)\frac{Q(x)}{x^2+b_ix+c_i}.$$

Assim,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{x-a_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{B_i+C_ix}{x^2+b_ix+c_i}.$$

□

No exemplo a seguir será feita sua aplicação para o caso 3.

Exemplo 3. *Para calcularmos*

$$\int\frac{x^2-x-2}{x^6+2x^5-x^3+2x-4}dx,$$

devemos considerar $p(x)=x^2-x-2$ *e* $q(x)=x^6+2x^5-x^3+2x-4$*, onde*

$$q(x)=(x+2)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+2x+2),$$

portanto devemos determinar A_1*,* A_2*,* B_1*,* B_2*,* C_1 *e* C_2 *para que:*

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B_1+C_1x}{x^2-x+1}+\frac{B_2+C_2x}{x^2+2x+2}$$

Multiplicando a equação acima por $q(x)$ *obtemos*

$$p(x)=A_1\tfrac{q(x)}{x+2}+A_2\tfrac{q(x)}{x-1}+(B_1+C_1x)\tfrac{q(x)}{x^2-x+1}+(B_2+C_2x)\tfrac{q(x)}{x^2+2x+2}=x^2-x-2$$

Note que -2 *e* 1 *são as raízes reais de* $q(x)$ *e daí obtemos* $A_1=-\frac{2}{21}$ *e* $A_2=-\frac{2}{15}$

Agora sejam $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ *e* $-1+i$ *raízes complexas de* x^2-x+1 *e* x^2+2x+2*, respectivamente, então* $B_1=-\frac{10}{91}$*,* $C_1=\frac{1}{91}$*,* $B_2=\frac{11}{65}$ *e* $C_2=\frac{17}{65}$.

Portanto:

$$\int\tfrac{p(x)}{q(x)}dx=\int[\tfrac{-\frac{2}{21}}{x+2}+\tfrac{-\frac{2}{15}}{x-1}+\tfrac{\frac{-10}{91}+\frac{1}{91}x}{x^2-x+1}+\tfrac{\frac{11}{65}+\frac{17}{65}x}{x^2+2x+2}]dx$$

De onde concluimos que:

$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = -\frac{2}{21} ln|x+2| - \frac{2}{15} ln|x-1| - \frac{20}{91\sqrt{3}} \arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + \frac{1}{182} ln|4x^2 - 4x + 4| + \frac{1}{91\sqrt{3}} arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + \frac{11}{65} \arctan(x+1) + \frac{17}{130}(ln|x^2 + 2x + 2| - 2arctan(x+1)) + c$

3.4 Caso 4: Decomposição em fatores quadráticos com repetições

Seja $\frac{P(x)}{Q(x)}$ uma função racional irredutível tal que $Gr(P) < Gr(Q) = 2k$ em que $Q(x)$ possui somente raízes complexas não reais. Sejam $z_1, \ldots, z_n$ raízes de $Q(x)$, distintas duas a duas e não conjugadas, com multiplicidades $\beta_1, \ldots, \beta_n$, respectivamente onde $\beta_1 + \cdots + \beta_n = k$. Sejam $b_1, c_1, \ldots, b_n, c_n \in \mathbb{R}$ tais que $(x - z_i).(x - \overline{z_i}) = x^2 + b_i x + c_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Deste modo,

$$Q(x) = (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} . \cdots .(x^2 + b_n x + c_n)^{\beta_n}.$$

Queremos mostrar que existem

$$B_{11}, C_{11}, \ldots, B_{1\beta_1}, C_{1\beta_1}, \ldots, B_{n1}, C_{n1}, \ldots, B_{n\beta_n}, C_{n\beta_n} \in \mathbb{R},$$

tais que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_{11} + C_{11}x}{x^2 + b_1 x + c_1} + \ldots + \frac{B_{1\beta_1} + C_{1\beta_1}x}{(x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1}} + \\ \ldots + \frac{B_{n1} + C_{n1}x}{x^2 + b_n x + c_n} + \ldots + \frac{B_{n\beta_n} + C_{n\beta_n}x}{(x^2 + b_n x + c_n)^{\beta_n}}.$$

Proposição 17. *Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ funções polinomiais reais sem fatores quadráticos em comum com $Gr(P(x)) < Gr(Q(x)) = 2\beta$. Se $Q(x)$ possui uma raiz complexa não real z de multiplicidade β, isto é, $Q(x) = (x - z)^\beta .(x - \overline{z})^\beta$, e $b, c \in \mathbb{R}$ são tais que $(x - z).(x - \overline{z}) = x^2 + bx + c$, então existem $B_1, C_1 \ldots, B_\beta, C_\beta \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_1 + C_1 x}{x^2 + bx + c} + \cdots + \frac{B_\beta + C_\beta x}{(x^2 + bx + c)^\beta}.$$

Demonstração. Faremos a demonstração usando indução sobre β. O resultado mostra-se trivialmente verdadeiro para $\beta = 1$. Suponha o resultado verdadeiro para β. Se

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2 + bx + c)^{\beta+1}} \quad \text{e} \quad Gr(P) < 2(\beta + 1)$$

então existem um polinômio $F(x)$, com $Gr(F) < 2\beta$, e um polinômio $R(x)$, com $R \neq 0$ e $Gr(R) < 2$, tais que $P(x) = F(x).(x^2 + bx + c) + R$. Daí, temos que

$$\frac{P(x)}{(x^2 + bx + c)^{\beta+1}} = \frac{F(x)(x^2 + bx + c) + R(x)}{(x^2 + bx + c)^{\beta+1}} \\ = \frac{F(x)}{(x^2 + bx + c)^\beta} + \frac{R(x)}{(x^2 + bx + c)^{\beta+1}}.$$

Por hipótese de indução, existem $B_1, C_1, \ldots, B_\beta, C_\beta \in \mathbb{R}$, tais que

$$\frac{F(x)}{(x^2+bx+c)^\beta} = \frac{B_1+C_1x}{(x^2+b_x+c)} + \cdots + \frac{B_\beta+C_\beta x}{(x^2+bx+c)^\beta},$$

e assim, o resultado vale para $\beta+1$. Deste modo, o resultado vale para cada $\beta \geq 1$, $\beta \in \mathbb{N}$. $\square$

Proposição 18. *Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ funções polinomiais reais sem fatores quadráticos em comum, com $Gr(P(x)) < Gr(Q(x)) = 2k$, e Q possuindo somente raízes complexas não reais. Sejam $z_1, \ldots, z_n$ raízes de $Q(x)$, distintas duas a duas e não conjugadas, com multiplicidades $\beta_1, \ldots, \beta_n$, respectivamente, onde $\beta_1 + \cdots + \beta_n = k$. Sejam $b_1, c_1, \ldots, b_n, c_n \in \mathbb{R}$ tais que $(x-z_i).(x-\overline{z_i}) = x^2+b_ix+c_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, de tal modo que*

$$Q(x) = (x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}.\cdots.(x^2+b_nx+c_n)^{\beta_n}.$$

Então, existem

$$B_{11}, C_{11}, \ldots, B_{1\beta_1}, C_{1\beta_1}, \ldots, B_{n1}, C_{n1}, \ldots, B_{n\beta_n}, C_{n\beta_n} \in \mathbb{R},$$

tais que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_{11}+C_{11}x}{x^2+b_1x+c_1} + \ldots + \frac{B_{1\beta_1}+C_{1\beta_1}x}{(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}} + \\ \ldots + \frac{B_{n1}+C_{n1}x}{x^2+b_nx+c_n} + \ldots + \frac{B_{n\beta_n}+C_{n\beta_n}x}{(x^2+b_nx+c_n)^{\beta_n}}.$$

Demonstração. Se $B_{11}, C_{11}, \ldots, B_{1\beta_1}, C_{1\beta_1}, \ldots, B_{n1}, C_{n1}, \ldots, B_{n\beta_n}, C_{n\beta_n} \in \mathbb{R}$ são tais que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\beta_i} \frac{B_{ij}+C_{ij}x}{(x^2+b_ix+c_i)^j},$$

então

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\beta_i} (B_{ij}+C_{ij}x)\frac{Q(x)}{(x^2+b_ix+c_i)^j},$$

com $G_{ij}(x) = \frac{Q(x)}{(x^2+b_ix+c_i)^j}$. Daí

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\beta_i} (B_{ij}+C_{ij}x)G_{ij}(x).$$

Dado $i \in \{1, \ldots, m\}$,

$$G_{sj}(z_i) = 0,\ \forall s \neq i,\ \text{e}\ G_{ij}(z_i) = 0,\ \forall j \in \{1, \ldots, \beta_i - 1\},$$

$$P(z_i) = (B_{i\beta_i} + C_{i\beta_i}.z_i)G_{i\beta_i}(z_i),$$

isto é,

$$B_{i\beta_i} + C_{i\beta_i}.z_i = \frac{P(z_i)}{G_{i\beta_i}(z_i)}.$$

Portanto,

$$C_{i\beta_i} = \frac{Im(\frac{P(z_i)}{G_{i\beta_i}(z_i)})}{Im(z_i)} \text{ e } B_{i\beta_i} = \frac{P(z_i)}{G_{i\beta_i}(z_i)} - C_{i\beta_i}.z_i.$$

Agora, dado $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $r \in \{1, \ldots, \beta_i - 1\}$,

$$G_{sj}^{(r)}(z_i) = 0, \quad \forall\ s \neq i, \quad \text{e} \quad G_{ij}^{(r)}(z_i) = 0, \quad \text{se} \quad j < \beta_i - r,$$

então

$$P^{(r)}(z_i) = \sum_{j=0}^{r} [(B_{i,\beta_i-j} + C_{i,\beta_i-j}z_i)G_{i,\beta_i-j}(z_i)]^{(r)},$$

isto é,

$$P^{(r)}(z_i) = \sum_{j=0}^{r} [rC_{i,\beta_i-j}G_{i,\beta_i-j}^{(r-1)}(z_i) + (B_{i,\beta_i-j} + C_{i,\beta_i-j}z_i)G_{i,\beta_i-j}^{(r)}(z_i)],$$

de onde

$$P^{(r)}(z_i) = rC_{i,\beta_i-r}G_{i,\beta_i-r}^{(r-1)}(z_i) + (B_{i,\beta_i-r} + C_{i,\beta_i-r}z_i)G_{i,\beta_i-r}^{(r)}(z_i) + \\ \sum_{j=0}^{r-1} [rC_{i,\beta_i-j}G_{i,\beta_i-j}^{(r-1)} + (B_{i,\beta_i-j} + C_{i,\beta_i-j}z_i)G_{i,\beta_i-j}^{(r)}(z_i)].$$

Como $G_{i,\beta_i-r}^{(r-1)}(z_i) = 0$,

$$P^{(r)}(z_i) = (B_{i,\beta_i-r} + C_{i,\beta_i-r}z_i)G_{i,\beta_i-r}^{(r)}(z_i) + \\ \sum_{j=0}^{r-1} [rC_{i,\beta_i-j}G_{i,\beta_i-j}^{(r-1)} + (B_{i,\beta_i-j} + C_{i,\beta_i-j}z_i)G_{i,\beta_i-j}^{(r)}(z_i)]$$

e, assim,

$$B_{i,\beta_i-r} + C_{i,\beta_i-r}z_i = \frac{1}{G_{i,\beta_i-r}^{(r)}(z_i)}. \\ (P^{(r)}(z_i) - \sum_{j=0}^{r-1} [rC_{i,\beta_i-j}G_{i,\beta_i-j}^{(r-1)} + (B_{i,\beta_i-j} + C_{i,\beta_i-j}z_i)G_{i,\beta_i-j}^{(r)}(z_i)]).$$

Deste modo,

$$C_{i,\beta_i-r} = \frac{1}{Im(z_i)}.Im(\frac{1}{G^{(r)}_{i,\beta_i-r}(z_i)}.$$
$$(P^{(r)}(z_i) - \sum_{j=0}^{r-1}[rC_{i,\beta_i-j}G^{(r-1)}_{i,\beta_i-j} + (B_{i,\beta_i-j} + C_{i,\beta_i-j}z_i)G^{(r)}_{i,\beta_i-j}(z_i)])).$$

e

$$B_{i,\beta_i-r} = \frac{1}{G^{(r)}_{i,\beta_i-r}(z_i)}.(P^{(r)}(z_i)-$$
$$\sum_{j=0}^{r-1}[rC_{i,\beta_i-j}G^{(r-1)}_{i,\beta_i-j} + (B_{i,\beta_i-j} + C_{i,\beta_i-j}z_i)G^{(r)}_{i,\beta_i-j}(z_i)]) - C_{i,\beta_i-r}z_i.$$

Agora, se

$$C_{i\beta_i} = \frac{Im(\frac{P(z_i)}{G_{i\beta_i}(z_i)})}{Im(z_i)} \text{ e } B_{i\beta_i} = \frac{P(z_i)}{G_{i\beta_i}(z_i)} - C_{i\beta_i}.z_i$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, e

$$C_{i,\beta_i-r} = \frac{1}{Im(z_i)}.Im(\frac{1}{G^{(r)}_{i,\beta_i-r}(z_i)}.$$
$$(P^{(r)}(z_i) - \sum_{j=0}^{r-1}[rC_{i,\beta_i-j}G^{(r-1)}_{i,\beta_i-j} + (B_{i,\beta_i-j} + C_{i,\beta_i-j}z_i)G^{(r)}_{i,\beta_i-j}(z_i)])).$$

e

$$B_{i,\beta_i-r} = \frac{1}{G^{(r)}_{i,\beta_i-r}(z_i)}.(P^{(r)}(z_i)-$$
$$\sum_{j=0}^{r-1}[rC_{i,\beta_i-j}G^{(r-1)}_{i,\beta_i-j} + (B_{i,\beta_i-j} + C_{i,\beta_i-j}z_i)G^{(r)}_{i,\beta_i-j}(z_i)]) - C_{i,\beta_i-r}z_i.$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ e cada $r \in \{1, \ldots, \beta_i - 1\}$, então

$$P(z_i) = (B_{i\beta_i} + C_{i\beta_i}.z_i)G_{i\beta_i}(z_i) \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\},$$

e

$$P^{(r)}(z_i) = \sum_{j=0}^{r}[(B_{i,\beta_i-j} + C_{i,\beta_i-j}z_i)G_{i,\beta_i-j}(z_i)]^{(r)},$$

para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ e cada $r \in \{1,\ldots,\beta_i - 1\}$. Daí, pelo Corolário 4,

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\beta_i}(B_{ij} + C_{ij}x)G_{ij}(x),$$

isto é,

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\beta_i}(B_{ij} + C_{ij}x)\frac{Q(x)}{(x^2+b_ix+c_i)^j},$$

e, portanto,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\beta_i}\frac{B_{ij}+C_{ij}x}{(x^2+b_ix+c_i)^j}.$$

$\square$

No exemplo a seguir, será feita sua aplicação para o caso 4.

Exemplo 4. *Para calcularmos* $\int \frac{P(x)}{Q(x)}$ *com* $P(x) = x^2+3x-10$ *e* $Q(x) = x^8-12x^7+72x^6-276x^5+734x^4-1380x^3+1800x^2-1500x+625$ *devemos observar que* $Q(x) = (x^2-2x+5)^2(x^2-4x+5)^2$.

Assim, devemos obter B_{11}, C_{11}, B_{12}, C_{12}, B_{21}, C_{21}, B_{22}, C_{22} *tais que*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_{11}+C_{11}x}{x^2-2x+5} + \frac{B_{12}+C_{12}x}{(x^2-2x+5)^2} + \frac{B_{21}+C_{21}x}{x^2-4x+5} + \frac{B_{22}+C_{22}x}{(x^2-4x+5)^2}.$$

Como temos $(1-2i)$ *e* $(1+2i)$ *como raízes de* x^2-2x+5 *e* $(2+i)$ *e* $(2-i)$ *como raízes de* (x^2-4x+5), *fazendo* $P(1+2i)$ *e* $P(2+i)$ *obtemos* $B_{12} = \frac{13}{20}$, $C_{12} = \frac{1}{20}$, $B_{22} = -\frac{1}{4}$ *e* $C_{22} = \frac{1}{4}$

Calculando $P'(1+2i)$ *e* $P'(2+i)$ *obtemos* $B_{11} = \frac{31}{100}$, $C_{11} = -\frac{2}{25}$,$B_{21} = -\frac{47}{100}$ *e* $C_{11} = \frac{2}{25}$

Daí segue que:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int(\frac{\frac{31}{100}-\frac{2}{25}x}{x^2-2x+5} + \frac{\frac{13}{20}+\frac{1}{20}x}{(x^2-2x+5)^2} + \frac{-\frac{47}{100}+\frac{2}{25}x}{x^2-4x+5} + \frac{-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x}{(x^2-4x+5)^2})dx$$

e, portanto,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{349}{1600}arctan(\frac{x-1}{2} + sen(2arctan(\frac{x-1}{2})) - \frac{1}{25}ln|x^2-2x+5| - \frac{1}{40(x^2-2x+5)} - \frac{37}{200}arctan(x-2) + \frac{1}{16}sen(2arctan(x-2)) + \frac{1}{25}ln|x^2-4x+5| - \frac{1}{8(x^2-4x+5)} + C$$

3.5 Caso 5: Decomposição em fatores lineares e quadráticos com repetições

Seja $\frac{P(x)}{Q(x)}$ uma função racional irredutível tal que $Q(x)$ é uma função polinômial de grau t. Sejam $a_1,\ldots,a_m$ as raízes reais de $Q(x)$, duas a duas distintas, com multiplicidades $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{N}^*$ e $z_1,\ldots,z_n$ raízes complexas de $Q(x)$, duas a duas distintas, não conjugadas e com multiplicidades $\beta_1,\ldots,\beta_n \in \mathbb{N}^*$, de modo que $\alpha_1+\cdots+\alpha_m+2\beta_1+\cdots+2\beta_n=t$. Deste modo,

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}.\cdots.(x-a_m)^{\alpha_m}.\\ (x-z_1)^{\beta_1}.(x-\overline{z_1})^{\beta_1}.\cdots.(x-z_n)^{\beta_n}.(x-\overline{z_n})^{\beta_n},$$

e, portanto,

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}.\cdots.(x-a_m)^{\alpha_m}.\\ (x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}.\cdots.(x^2+b_nx+c_n)^{\beta_n},$$

onde $(x-z_i)(x-\overline{z_i})=x^2+b_ix+c_i$ para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$. Queremos mostrar que existem

$$A_{11},\ldots,A_{1\alpha_1},\ldots,A_{m1},\ldots,A_{m\alpha_m}\in\mathbb{R}$$

e

$$B_{11},C_{11},\ldots,B_{1\beta_1},C_{1\beta_1},\ldots,B_{n1},C_{n1},\ldots,B_{n\beta_n},C_{n\beta_n}\in\mathbb{R}$$

tais que

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_{11}}{x-a_1}+\ldots+\frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\ldots+\frac{A_{m1}}{x-a_m}+\ldots+\frac{A_{m\alpha_m}}{(x-a_m)^{\alpha_m}}+\\ \frac{B_{11}+C_{11}x}{x^2+b_1x+c_1}+\ldots+\frac{B_{1\beta_1}+C_{1\beta_1}x}{(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}}+\ldots+\frac{B_{n1}+C_{n1}x}{x^2+b_nx+c_n}+\ldots+\frac{B_{n\beta_n}+C_{n\beta_n}x}{(x^2+b_nx+c_n)^{\beta_n}}.$$

Proposição 19. *Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ polinômios mônicos com coeficientes reais primos entre si, tais que $Gr(P)<Gr(Q)=t$. Se $a_1,\ldots,a_m$ são as raízes reais de $Q(x)$, duas a duas distintas, com multiplicidades $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{N}^*$, $z_1,\ldots,z_n$ são raízes complexas de $Q(x)$ não reais, duas a duas distintas e não conjugadas, e com multiplicidades $\beta_1,\ldots,\beta_n\in\mathbb{N}^*$, de modo que $\alpha_1+\cdots+\alpha_m+2\beta_1+\cdots+2\beta_n=t$, então existem*

$$A_{11},\ldots,A_{1\alpha_1},\ldots,A_{m1},\ldots,A_{m\alpha_m}\in\mathbb{R}$$

e

$$B_{11},C_{11},\ldots,B_{1\beta_1},C_{1\beta_1},\ldots,B_{n1},C_{n1},\ldots,B_{n\beta_n},C_{n\beta_n}\in\mathbb{R}$$

tais que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-a_1} + ... + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + ... + \frac{A_{m1}}{x-a_m} + ... + \frac{A_{m\alpha_m}}{(x-a_m)^{\alpha_m}} +$$
$$\frac{B_{11}+C_{11}x}{x^2+b_1x+c_1} + ... + \frac{B_{1\beta_1}+C_{1\beta_1}x}{(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}} + ... + \frac{B_{n1}+C_{n1}x}{x^2+b_nx+c_n} + ... + \frac{B_{n\beta_n}+C_{n\beta_n}x}{(x^2+b_nx+c_n)^{\beta_n}}.$$

Demonstração. Se $A_{11},\ldots,A_{1\alpha_1},\ldots,A_{m1},\ldots,A_{m\alpha_m}$,

e $B_{11},C_{11},\ldots,B_{1\beta_1},C_{1\beta_1},\ldots,B_{n1},C_{n1},\ldots,B_{n\beta_n},C_{n\beta_n} \in \mathbb{R}$ são tais que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-a_1} + ... + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + ... + \frac{A_{m1}}{x-a_m} + ... + \frac{A_{m\alpha_m}}{(x-a_m)^{\alpha_m}} +$$
$$\frac{B_{11}+C_{11}x}{x^2+b_1x+c_1} + ... + \frac{B_{1\beta_1}+C_{1\beta_1}x}{(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}} + ...+$$
$$\frac{B_{n1}+C_{n1}x}{x^2+b_nx+c_n} + ... + \frac{B_{n\beta_n}+C_{n\beta_n}x}{(x^2+b_nx+c_n)^{\beta_n}},$$

então

$$P(x) = A_{11}\frac{Q(x)}{x-a_1} + ... + A_{1\alpha_1}\frac{Q(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + ...+$$
$$A_{m1}\frac{Q(x)}{x-a_m} + ... + A_{m\alpha_m}\frac{Q(x)}{(x-a_m)^{\alpha_m}} +$$
$$(B_{11}+C_{11}x)\frac{Q(x)}{x^2+b_1x+c_1} + ... + (B_{1\beta_1}+C_{1\beta_1}x)\frac{Q(x)}{(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}} + ...$$
$$+ (B_{n1}+C_{n1}x)\frac{Q(x)}{x^2+b_nx+c_n} + ... + (B_{n\beta_n}+C_{n\beta_n}x)\frac{Q(x)}{(x^2+b_nx+c_n)^{\beta_n}},$$

com $F_{ij}(x) = \frac{Q(x)}{(x-a_i)^j}$, para cada $i \in \{1,...,m\}$ e para cada $j \in \{1,...,\alpha_i\}$, e $G_{ij}(x) = \frac{Q(x)}{(x^2+b_ix+c_i)^j}$, para cada $i \in \{1,...,n\}$ e para cada $j \in \{1,...,\alpha_i\}$. Temos, assim,

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\alpha_i} A_{ij}F_{ij}(x) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\beta_i}(B_{ij}+C_{ij}x)G_{ij}(x).$$

Dado $i \in \{1,...,m\}$,

$$F_{sj}(a_i) = 0, \quad \forall\ s \neq i, \quad F_{ij}(a_i) = 0, \quad \forall j \in \{1,...,\alpha_i - 1\}, \quad \text{e} \quad G_{sj}(a_i) = 0,\ \forall s.$$

Assim,

$$P(a_i) = A_{i\alpha_i}F_{i\alpha_i}(a_i), \quad \text{isto é,} \quad A_{i\alpha_i} = \frac{P(a_i)}{F_{i\alpha_i}(a_i)}.$$

Agora, dado $i \in \{1,...,n\}$ e $r \in \{1,\ldots,\alpha_i - 1\}$,

$$F_{sj}^{(r)}(a_i) = 0,\ \forall\ s \neq i, F_{ij}^{(r)}(a_i) = 0 \ \text{ se } j < \alpha_i - r \ \text{ e } G_{sj}^{(r)}(a_i) = 0,\ \forall s.$$

Daí,

$$P^{(r)}(a_i) = \sum_{j=0}^{r} A_{i,\alpha_i-j} F^{(r)}_{i,\alpha_i-j}(a_i),$$

isto é,

$$P^{(r)}(a_i) = A_{i,\alpha_i-r} F^{(r)}_{i,\alpha_i-r}(a_i) + \sum_{j=0}^{r-1} A_{i,\alpha_i-j} F^{(r)}_{i,\alpha_i-j}(a_i).$$

Portanto

$$A_{i,\alpha_i-r} = \frac{P^{(r)}(a_i) - \sum_{j=0}^{r-1} A_{i,\alpha_i-j} F^{(r)}_{i,\alpha_i-j}(a_i)}{F^{(r)}_{i,\alpha_i-j}(a_i)}.$$

Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$F_{sj}(z_i) = 0,\ \forall s,\ G_{sj}(z_i) = 0,\ \forall s \neq i,\ \text{e } G_{ij}(z_i) = 0,\ \forall j \in \{1, \ldots, \beta_i - 1\}.$$

Deste modo,

$$P(z_i) = (B_{i\beta_i} + C_{i\beta_i}.z_i) G_{i\beta_i}(z_i),$$

isto é,

$$B_{i\beta_i} + C_{i\beta_i}.z_i = \frac{P(z_i)}{G_{i\beta_i}(z_i)}.$$

Portanto,

$$C_{i\beta_i} = \frac{Im(\frac{P(z_i)}{G_{i\beta_i}(z_i)})}{Im(z_i)} \text{ e } B_{i\beta_i} = \frac{P(z_i)}{G_{i\beta_i}(z_i)} - C_{i\beta_i}.z_i.$$

Agora, dado $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $r \in \{1, ..., \beta_i - 1\}$,

$$F^{(r)}_{sj}(z_i) = 0\ \forall s,\ G^{(r)}_{sj}(z_i) = 0,\ \forall s \neq i,\ \text{e } G^{(r)}_{ij}(z_i) = 0,\ \text{e } j < \beta_i - r.$$

Daí,

$$P^{(r)}(z_i) = \sum_{j=0}^{r} [(B_{i,\beta_i-j} + C_{i,\beta_i-j} z_i) G_{i,\beta_i-j}(z_i)]^{(r)},$$

isto é,

$$P^{(r)}(z_i) = \sum_{j=0}^{r} [r C_{i,\beta_i-j} G^{(r-1)}_{i,\beta_i-j}(z_i) + (B_{i,\beta_i-j} + C_{i,\beta_i-j} z_i) G^{(r)}_{i,\beta_i-j}(z_i)],$$

de onde

$$P^{(r)}(z_i) = rC_{i,\beta_i-r}G^{(r-1)}_{i,\beta_i-r}(z_i) + (B_{i,\beta_i-r} + C_{i,\beta_i-r}z_i)G^{(r)}_{i,\beta_i-r}(z_i) + \sum_{j=0}^{r-1}[rC_{i,\beta_i-j}G^{(r-1)}_{i,\beta_i-j} + (B_{i,\beta_i-j} + C_{i,\beta_i-j}z_i)G^{(r)}_{i,\beta_i-j}(z_i)].$$

Como $G^{(r-1)}_{i,\beta_i-r}(z_i) = 0$,

$$P^{(r)}(z_i) = (B_{i,\beta_i-r} + C_{i,\beta_i-r}z_i)G^{(r)}_{i,\beta_i-r}(z_i) + \sum_{j=0}^{r-1}[rC_{i,\beta_i-j}G^{(r-1)}_{i,\beta_i-j} + (B_{i,\beta_i-j} + C_{i,\beta_i-j}z_i)G^{(r)}_{i,\beta_i-j}(z_i)]$$

e, assim,

$$B_{i,\beta_i-r} + C_{i,\beta_i-r}z_i = \frac{1}{G^{(r)}_{i,\beta_i-r}(z_i)}.(P^{(r)}(z_i) - \sum_{j=0}^{r-1}[rC_{i,\beta_i-j}G^{(r-1)}_{i,\beta_i-j} + (B_{i,\beta_i-j} + C_{i,\beta_i-j}z_i)G^{(r)}_{i,\beta_i-j}(z_i)]).$$

Deste modo,

$$C_{i,\beta_i-r} = \frac{1}{Im(z_i)}.Im(\frac{1}{G^{(r)}_{i,\beta_i-r}(z_i)}.(P^{(r)}(z_i) - \sum_{j=0}^{r-1}[rC_{i,\beta_i-j}G^{(r-1)}_{i,\beta_i-j} + (B_{i,\beta_i-j} + C_{i,\beta_i-j}z_i)G^{(r)}_{i,\beta_i-j}(z_i)]))$$

e

$$B_{i,\beta_i-r} = \frac{1}{G^{(r)}_{i,\beta_i-r}(z_i)}.(P^{(r)}(z_i) - \sum_{j=0}^{r-1}[rC_{i,\beta_i-j}G^{(r-1)}_{i,\beta_i-j} + (B_{i,\beta_i-j} + C_{i,\beta_i-j}z_i)G^{(r)}_{i,\beta_i-j}(z_i)]) - C_{i,\beta_i-r}z_i.$$

Agora, se $A_{i\alpha_i} = \frac{P(a_i)}{F_{i\alpha_i}(a_i)}$ para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, $A_{i,\alpha_i-r} = \frac{P^{(r)}(a_i) - \sum_{j=0}^{r-1} A_{i,\alpha_i-j}F^{(r)}_{i,\alpha_i-j}(a_i)}{F^{(r)}_{i,\alpha_i-j}(a_i)}$ para cada $i \in \{1,...,m\}$ e para cada $r \in \{1,\ldots,\alpha_i - 1\}$,

$$C_{i\beta_i} = \frac{Im(\frac{P(z_i)}{G_{i\beta_i}(z_i)})}{Im(z_i)} \text{ e } B_{i\beta_i} = \frac{P(z_i)}{G_{i\beta_i}(z_i)} - C_{i\beta_i}.z_i$$

para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$ e

$$C_{i,\beta_i-r} = \frac{1}{Im(z_i)}.Im(\frac{1}{G^{(r)}_{i,\beta_i-r}(z_i)}.(P^{(r)}(z_i) - \sum_{j=0}^{r-1}[rC_{i,\beta_i-j}G^{(r-1)}_{i,\beta_i-j} + (B_{i,\beta_i-j} + C_{i,\beta_i-j}z_i)G^{(r)}_{i,\beta_i-j}(z_i)]))$$

e

$$B_{i,\beta_i-r} = \frac{1}{G^{(r)}_{i,\beta_i-r}(z_i)}.(P^{(r)}(z_i) - \sum_{j=0}^{r-1}[rC_{i,\beta_i-j}G^{(r-1)}_{i,\beta_i-j} + (B_{i,\beta_i-j} + C_{i,\beta_i-j}z_i)G^{(r)}_{i,\beta_i-j}(z_i)]) - C_{i,\beta_i-r}z_i,$$

para cada $i \in \{1,...,n\}$ e para cada $r \in \{1,\ldots,\beta_i - 1\}$, então

$$P(a_i) = A_{i\alpha_i}F_{i\alpha_i}(a_i) \text{ para cada } i \in \{1,\ldots,n\},$$

$$P^{(r)}(a_i) = \sum_{j=0}^{r} A_{i,\alpha_i-j}F^{(r)}_{i,\alpha_i-j}(a_i),$$

para cada $i \in \{1,...,m\}$ e para cada $r \in \{1,\ldots,\alpha_i - 1\}$,

$$P(z_i) = (B_{i\beta_i} + C_{i\beta_i}.z_i)G_{i\beta_i}(z_i) \text{ para cada } i \in \{1,\ldots,n\},$$

e

$$P^{(r)}(z_i) = \sum_{j=0}^{r}[(B_{i,\beta_i-j} + C_{i,\beta_i-j}z_i)G_{i,\beta_i-j}(z_i)]^{(r)}$$

para cada $i \in \{1,...,n\}$ e para cada $r \in \{1,\ldots,\beta_i - 1\}$. Portanto, pelo Corolário 4,

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\alpha_i} A_{ij}F_{ij}(x) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\beta_i}(B_{ij} + C_{ij}x)G_{ij}(x),$$

isto é,

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\alpha_i} A_{ij}\frac{Q(x)}{(x-a_i)^j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\beta_i}(B_{ij} + C_{ij}x)\frac{Q(x)}{(x^2+b_ix+c_i)^j}$$

e, assim,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\beta_i}\frac{B_{ij} + C_{ij}x}{(x^2+b_ix+c_i)^j}.$$

□

Vejamos agora um exemplo para o caso 5.

Exemplo 5. *Seja* $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ *e* $q(x) = x^6 - 12x^5 + 62x^4 - 176x^3 + 289x^2 - 260x + 100$, *podemos fatorar* $q(x)$ *de forma irredutível da seguinte forma* $q(x) = (x^2 - 4x + 5)^2(x-2)^2$. *Assim temos:*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{(x^2-4x+5)^2(x-2)^2}$$

Logo $\frac{p(x)}{q(x)}$ *pode ser decomposto em uma soma frações da seguinte forma:*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{B_1+C_1x}{x^2-4x+5} + \frac{B_2+C_2x}{(x^2-4x+5)^2}.$$

Multiplicando a equação por q(x) obtemos:

$p(x) = q(x)\frac{A_1}{x-2} + q(x)\frac{A_2}{(x-2)^2} + q(x)\frac{B_1+C_1x}{x^2-4x+5} + q(x)\frac{B_2+C_2x}{(x^2-4x+5)^2}.$

Para encontrarmos o valor de A_2 *calculemos* $p(2)$ *e obtemos* $A_2 = 12$.

Para encontrarmos o valor de B_2 *e* C_2 *basta calcularmos* $p(2+i)$, *pois* $2+i$ *é raíz de* x^2-4x+5 *e pela igualdade de números complexos obtemos* $B_2 = 32$ *e* $C_2 = -18$.

Para obtermos A_1, B_1 *e* C_1 *precisamos calcular* $p'(2)$ *de onde obtemos* $A_1 = 19$.

Para obtermos B_1 *e* C_1 *basta fazermos* $p'(2+i)$, *de onde temos:* $C_1 = -19$ *e* $B_1 = 26$.

Daí temos:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{19}{x-2} + \frac{12}{(x-2)^2} + \frac{26-19x}{x^2-4x+5} + \frac{32-18x}{(x^2-4x+5)^2}$$

Para calcularmos $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ *basta fazermos:*

$$\int \frac{19}{x-2}dx + \int \frac{12}{(x-2)^2}dx + \int \frac{26-19x}{x^2-4x+5}dx + \int \frac{32-18x}{(x^2-4x+5)^2}dx.$$

Efetuando separadamente cada integral obtemos:

$\int \frac{p(x)}{q(x)} = 19ln|x-2| - \frac{12}{x-2} - \frac{19}{2}ln|x^2-4x+5| - 12arctan(x-2) + \frac{19}{2(x^2-4x+5)} - 6arctan(x-2) - 3sen(2arctan(x-2)).$

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Assim, concluímos a demontração do *Teorema 1*, demonstrando que para cada caso a decomposição é eficaz e ainda a forma de cada termo da decomposiçao das funções racionais em frações parciais mais simples. Observe, a partir das demonstrações, que as decomposições obtidas são únicas e que obedecem a um padrão.

O fato deste método ser eficaz para todos os casos permite que a decomposição de uma função racional em frações parciais apresentada aqui seja utilizada para a construção de algoritmos computacionais que tornam mais simples a obtenção dos resultados esperados.

Tendo concluído este trabalho, esperamos que as demonstrações aqui apresentadas sejam úteis ao leitor, a fim de que este se beneficie deste material no estudo de Cálculo Diferencial em Integral nos mais diversos cursos que o requisitem.

REFERÊNCIAS

HEFEZ ABRAMO; VILELA, M. L. T. **Polinômios e Equações Algébricas**. [*S. l.*]: SBM.Coleção Profmat, 2012.