

UTILIZAÇÃO DE MODELOS RESILIENTES NA ANÁLISE DE PAVIMENTOS ASFÁLTICOS

Áurea Silva de Holanda

Departamento de Engenharia de Transportes
Universidade de Federal do Ceará

Evandro Parente Junior

Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil
Universidade de Federal do Ceará

Lucas Tadeu Barroso de Melo

Henrique Nogueira Silva

Sérgio Costa de Souza

Departamento de Engenharia de Transportes
Universidade de Federal do Ceará

RESUMO

Este artigo apresenta alguns aspectos fenomenológicos dos modelos resilientes usados em pavimentação e sua implementação computacional. As etapas de implementação, compreendendo a montagem do sistema de equações, a determinação das tensões e da matriz constitutiva tangente, são discutidas. Uma metodologia para a análise não-linear de pavimentos asfálticos baseada no Método de Newton-Raphson é apresentada e validada a partir de exemplos numéricos. Os resultados destes exemplos apresentaram boa concordância quando comparados com os calculados por programa existente já consolidado na literatura.

ABSTRACT

This paper presents some phenomenological aspects regarding the resilient models used in pavement analysis, as well as its computational implementation. The implementation stages, including the assembly of the equation system, definition of stresses and the tangent constitutive matrix are discussed. A methodology for a nonlinear analysis of asphaltic pavements based on the Newton-Raphson method is presented and validated from numerical examples. The results from the examples are in good agreement with the ones obtained by an existing computational program well referenced in the literature.

1. INTRODUÇÃO

O dimensionamento mecânico de pavimentos asfálticos passa pela análise tensão-deformação dos mesmos, e conseqüentemente pela definição da cinemática do problema, de modelos constitutivos para as diversas camadas, bem como de condições de carregamento mais próximas possíveis da realidade. Na quase totalidade das análises realizadas atualmente, as camadas do pavimento são consideradas elásticas, homogêneas e isotrópicas, e os carregamentos atuantes, estáticos. Isto ocorre a despeito de avanços significativos no desenvolvimento de modelos constitutivos mais compatíveis com o comportamento dos materiais de pavimentação, mas em parte justificado pela dificuldade de implementação computacional destes modelos mais avançados (e.g., viscoelásticos, viscoplásticos, elastoplásticos, etc).

A favor das análises elásticas, além da praticidade e rapidez devidas à simplificação, está o fato de estudos reportarem a consistência das respostas estruturais de pavimentos em simulações computacionais elásticas com medidas globais destes pavimentos em campo. Especificamente reporta-se a deflexão elástica obtida com equipamentos como viga Benkelman ou Falling Weight Deflectometer (FWD) (Soares *et al.*, 2000; Medina e Motta, 2005). A medição de deflexões, em particular de bacias deflectométricas, é de vital importância na Mecânica dos Pavimentos, onde a deformabilidade elástica é associada ao trincamento dos revestimentos. Além disso, as bacias deflectométricas medidas em campo

permitem, através da retroanálise, que sejam estimados os módulos de resiliência dos materiais das diferentes camadas do pavimento e comparados com os valores de projeto.

Vários sistemas computacionais têm sido desenvolvidos para a realização de análise de pavimentos asfálticos (Raad e Figueroa, 1980; Harichandran *et al.*, 1990, Aedo *et al.*, 1996; Farias e Monteiro, 1996; Huang, 2004). Medina e Motta (2005) descrevem três métodos de análise com os seus respectivos programas computacionais: (i) método dos elementos finitos, entre os quais se destaca o programa FEPAVE2 bastante utilizado no Brasil, e também os programas ILLIPAVE (Raad e Figueroa, 1980) e MICHPAVE (Harichandran *et al.*, 1990). Estes realizam análises bidimensionais de pavimentos (modelo axissimétrico) considerando materiais elástico lineares e não-lineares definidos através do Módulo de Resiliência (M_r); (ii) método das diferenças finitas, com destaque para o programa ELSYM5 que resolve as equações de Burmister e possibilita a análise de rodas múltiplas; (iii) método das camadas finitas (Booker e Small, 1982), destacando-se o programa MECAF3D (Rodrigues, 1991). O leitor pode encontrar em Medina e Motta (2005) um breve resumo de outros programas computacionais existentes. Huang (2004) apresenta uma descrição mais detalhada do programa KENLAYER que possibilita a consideração da viscoelasticidade.

No Brasil, a análise de tensões e deformações em pavimentos mais avançada vem sendo feita com a consideração da elasticidade não-linear das subcamadas, principalmente por meio do programa FEPAVE2. Este foi desenvolvido originalmente na Universidade da Califórnia – Berkeley (Duncan *et al.*, 1968), e posteriormente adaptado e melhorado por Motta (1991) e Silva (1995) na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). O FEPAVE2, assim como boa parte dos programas existentes, faz uso de modelos constitutivos resilientes para consideração da não-linearidade. Devido à importância destes modelos, neste artigo são apresentadas as suas principais características e discutidas algumas de suas deficiências, seja de capacidade de previsão de estados de tensão mais complexos, seja de dificuldades de implementação numérica. Uma metodologia para a análise não-linear de pavimentos asfálticos baseada no Método de Newton-Raphson é apresentada e validada a partir de exemplos numéricos.

2. MODELOS CONSTITUTIVOS

2.1. Introdução

Os modelos constitutivos, geralmente referenciados como modelos resilientes, são na verdade modelos de Hooke, onde o módulo de elasticidade é substituído por um módulo de resiliência (M_r) dependente do estado de tensão. No caso do modelo elástico linear (lei de Hooke generalizada), as tensões correntes podem ser calculadas a partir das deformações totais dadas:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_0$ representa as tensões iniciais (*e.g.* tensões geostáticas em um pavimento). A forma da matriz \mathbf{C} depende do modelo de análise escolhido e das propriedades do material, como o Módulo de Elasticidade (E) e o coeficiente de Poisson (ν). Como um exemplo, a matriz constitutiva para o modelo axissimétrico e um material isotrópico é dada por:

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Uma expressão análoga pode ser escrita para problemas tridimensionais (Bathe, 1996). Assim, os modelos constitutivos baseados na utilização do módulo de resiliência normalmente assumem uma relação não-linear elástica na forma da Equação 1 com uma matriz constitutiva similar à Equação 2, porém com o M_r substituindo o módulo de elasticidade convencional (E). Normalmente considera-se constante o valor do coeficiente de Poisson (Hjelmstad e Taciroglu, 2000; Huang, 2004; NCHRP/TRB, 2004).

Apesar de existirem muitos modelos elásticos não-lineares, os modelos resilientes têm se mostrado uma escolha comum na análise do comportamento tensão-deformação de pavimentos asfálticos (Harichandran *et al.*, 1990). O uso destes modelos foi fortalecido pela *American Association of State Highway and Transportation Officials* (AASHTO), que introduziu em 1986 um método de projeto de pavimento baseado neste tipo de modelo (revisado em 1993). O M_r do subleito substituiu o Índice de Suporte Califórnia na expressão do dimensionamento. A idéia central era se utilizar um módulo elástico capaz de simular as cargas repetidas devido à ação do tráfego, aproximando os ensaios de laboratório do carregamento existente no campo. Para determinação do M_r tem-se usado equipamentos de carga repetida em laboratório, especificamente o chamado ensaio triaxial dinâmico (Medina e Motta, 2005).

Os modelos resilientes são baseados na consideração de que as camadas granulares do pavimento atingem o *shakedown* e, conseqüentemente, um estado resiliente ou elástico com a aplicação de cargas repetidas presentes neste tipo de estrutura. O Módulo de Resiliência é definido como o módulo de descarregamento obtido após vários ciclos de carga. Como pode ser verificado na Figura 1, há um decréscimo de deformações plásticas à medida que se aumenta o número de ciclos.

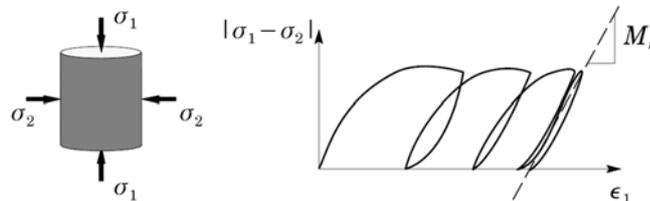


Figura 1: Esquema do ensaio triaxial dinâmico para determinar o módulo de resiliência (Taciroglu, 1998).

O Módulo de Resiliência não corresponde às tradicionais definições de módulos tangentes nem de módulos secantes. Na verdade, ele representa o que foi denominado em NCHRP/TRB (2004) de “módulo de corda”. Desta maneira, o Módulo de Resiliência é definido como:

$$M_r = \Delta\sigma / \Delta\epsilon \quad (3)$$

Existem na literatura diversas formas de se realizar o ajuste de curvas no processo de obtenção do M_r . Um dos modelos mais antigos é o modelo conhecido como modelo K- θ (Hicks e Monismith, 1971) no qual para o caso de solos arenosos, o M_r é dado por:

$$M_r = K_1 \theta^{K_2} \quad (4)$$

onde $\theta = |\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3|/3$. Esta equação pode ser adaptada para solos coesivos substituindo-se a pressão hidrostática (θ) pela tensão desviadora ($\sigma_d = \sigma_1 - \sigma_2$). Assim, pode-se escrever:

$$M_r = K_3 \sigma_d^{K_4} \quad (5)$$

Outra alternativa, utilizada em programas como o MICHPAVE e o ILLIPAVE, consiste em adotar uma variação bilinear para o Módulo de Resiliência de solos coesivos:

$$M_r = K_1 + K_3(K_2 - \sigma_d) \text{ quando } \sigma_d < K_2 \quad (6)$$

$$M_r = K_1 - K_4(\sigma_d - K_2) \text{ quando } \sigma_d > K_2 \quad (7)$$

As constantes K_i que aparecem nas equações acima são determinadas a partir do ajuste das curvas de resultados obtidas nos ensaios triaxiais dinâmicos.

Uma formulação geral foi apresentada por Andrei (1999) e adotada pelo NHCRP (2004), com a intenção de unificar em uma única equação diversas formas de representar o Módulo de Resiliência:

$$M_r = k_1 p_a \left(\frac{\theta - 3k_6}{p_a} \right)^{k_2} \left(\frac{\tau_{oct}}{p_a} + k_7 \right)^{k_3} \quad (8)$$

Onde k_1 a k_7 são parâmetros do modelo, p_a é a pressão atmosférica, e neste caso $\theta = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ e τ_{oct} é a tensão octaédrica. Nesta equação, a pressão atmosférica representa apenas um fator de adimensionalização. Os valores dos parâmetros devem obedecer a algumas restrições ($k_1 > 0$; $k_2 \geq 0$; $k_3 \leq 0$; $k_6 \leq 0$ e $k_7 \geq 1$), mas mesmo assim alguns estados de tensões podem acarretar módulos negativos. Ignorando a pressão atmosférica e fazendo $k_6 = k_7 = 0$ a equação acima se reduz ao conhecido modelo de Uzan-Witczak, também conhecido como modelo universal (Uzan, 1985; Witczak e Uzan, 1988):

$$M_r = K_1 \theta^{K_2} \tau_{oct}^{K_3} \quad (9)$$

Verifica-se que os ensaios de obtenção do M_r fornecem uma trajetória de tensão única para atingir cada valor de pico (θ , τ_{oct}), o que, na verdade, corresponde a estados de tensão bem mais simples do que os presentes em pavimentos reais. Em particular, estes modelos prevêm módulos nulos para problemas sem tensões iniciais e não podem ser utilizados para estados de tensão de tração que ocorrem nos pavimentos devido às deformações de flexão. Vários procedimentos *ad-doc* têm sido propostos e utilizados para resolver este problema nos programas de análise, mas nenhum deles pode ser considerado satisfatório.

É importante ressaltar que as Equações 4 a 9 representam formas convenientes de organizar os resultados obtidos a partir de ensaios triaxiais dinâmicos, mas não se constituem em um modelo constitutivo passível de ser utilizado em análises de tensão-deformação, pois não indicam como as tensões se relacionam com as deformações. Como o Módulo de Resiliência (M_r) depende do estado de tensões final, os modelos constitutivos resilientes assumem uma relação secante entre tensões e deformações (Tacioglu, 1998). Assim, as tensões são efetivamente calculadas como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{C}_s(M_r) \boldsymbol{\varepsilon}, \text{ onde } \mathbf{C}_s = M_r \bar{\mathbf{C}} \quad (10)$$

Nesta equação $\bar{\mathbf{C}}$ é uma matriz, definida a partir da Equação 2, que depende apenas do coeficiente de Poisson (ν) e do problema (axissimétrico ou tridimensional) considerado.

3. IMPLEMENTAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (MEF) consiste em dividir um domínio complexo em subdomínios (elementos) de geometria simples, como triângulos e quadriláteros (Bathe, 1996; Cook, 2002). Estes elementos são conectados uns aos outros através de pontos (nós) compartilhados formando a malha de elementos finitos. No interior de cada elemento os deslocamentos são então interpolados a partir dos deslocamentos nodais (\mathbf{u}), garantindo a continuidade do campo de deslocamentos. As deformações ($\boldsymbol{\varepsilon}$) no interior dos elementos são calculadas a partir dos deslocamentos utilizando relações cinemáticas apropriadas a cada

problema (e.g. estado plano de tensões, axissimetria, sólido). Estas relações podem ser escritas na forma matricial como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (11)$$

onde \mathbf{B} é a matriz deformação-deslocamento que é independente dos deslocamentos nodais para problemas geometricamente lineares (pequenas deformações e deslocamentos). Conhecidas as deformações, as tensões ($\boldsymbol{\sigma}$) podem ser calculadas utilizando a relação constitutiva do material:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, t) \quad (12)$$

Esta relação pode ser linear ou não-linear, como no caso dos modelos resilientes. A dependência do tempo ocorre no caso de viscoelasticidade entre outros (Evangelista Jr. *et al.*, 2006).

Utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais e considerando pequenas deformações, como é usual em problemas de pavimentos, o vetor de forças internas de um elemento finito (\mathbf{g}) pode ser calculado a partir de:

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{u}'_v \mathbf{g} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}'_v \boldsymbol{\sigma} dV \Rightarrow \mathbf{g} = \int_V \mathbf{B}' \boldsymbol{\sigma} dV \quad (13)$$

onde $\delta \mathbf{u}'_v$ é o campo de deslocamentos virtuais e $\delta \boldsymbol{\varepsilon}'_v$ as deformações virtuais associadas. Em uma implementação real a integração indicada acima é realizada numericamente através da Quadratura de Gauss (Bathe, 1996; Cook, 2002). Assim, o vetor das forças internas de um elemento é calculado através da expressão:

$$\mathbf{g} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} c |\mathbf{J}| d\Omega = \sum_{i=1}^n (\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} c |\mathbf{J}|)_i W_i \quad (14)$$

onde $|\mathbf{J}|$ é o determinante da matriz Jacobiana, c é um coeficiente relacionado com o volume diferencial do elemento ($dV = c |\mathbf{J}| d\Omega$), n é o número de pontos de integração e W é o peso do ponto de integração. É importante notar que esta expressão é válida tanto para materiais lineares quanto não-lineares, uma vez que ela não depende da lei constitutiva adotada, mas apenas das tensões atuantes. Deve-se ainda observar que o vetor global das forças internas é calculado através da soma das contribuições dos elementos através de procedimento padrão do MEF (Bathe, 1996).

As equações de equilíbrio do modelo de elementos finitos podem ser escritas como:

$$\mathbf{r} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, t) - \mathbf{f}(t) = \mathbf{0} \quad (15)$$

onde \mathbf{f} é o vetor das forças externas, \mathbf{r} é o resíduo das equações de equilíbrio e t representa o tempo decorrido desde o início do carregamento. No caso de problemas onde o comportamento dos materiais não depende do tempo e os efeitos das forças de inércia podem ser desprezados, a variável t funciona apenas como um parâmetro de controle do carregamento (fator de carga). Em problemas fortemente não-lineares pode ser necessário dividir a aplicação do carregamento em vários incrementos de carga (passos) para evitar problemas de convergência.

3.1. Solução do sistema de equações

No caso de materiais elásticos lineares, as forças internas dependem linearmente dos deslocamentos e todo o carregamento pode ser aplicado de uma única vez. Assim, os deslocamentos nodais podem ser calculados a partir da expressão:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (16)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez global do modelo que é determinada a partir da soma das contribuições dos elementos (Bathe, 1996). Utilizando a Quadratura de Gauss, a matriz de cada elemento é calculada a partir da expressão:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}' \mathbf{C} \mathbf{B} c |\mathbf{J}| d\Omega = \sum_{i=1}^n (\mathbf{B}' \mathbf{C} \mathbf{B} c |\mathbf{J}|)_i W_i \quad (17)$$

O efeito das tensões iniciais é incluído no vetor \mathbf{f} através das forças equivalentes nodais (Bathe, 1996).

No caso dos modelos resilientes, as tensões podem ser calculadas a partir dos deslocamentos totais utilizando as Equações 10 e 11. Portanto, as equações de equilíbrio podem ser escritas como:

$$\mathbf{K}_s(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (18)$$

onde \mathbf{K}_s representa a matriz de rigidez secante que é função dos deslocamentos nodais (\mathbf{u}). A forma mais utilizada para resolver este problema é através de procedimentos iterativos de ponto fixo (*fixed point methods*), cuja forma mais simples é dada pela equação:

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{K}_s(\mathbf{u}_i)^{-1} \mathbf{f} \quad (19)$$

onde o subscrito i indica o número da iteração. Este procedimento, conhecido como Método Secante, requer um vetor inicial de deslocamentos e uma distribuição inicial de M_r . À medida que novos deslocamentos são calculados, determinam-se novas deformações, tensões e Módulos de Resiliência. O processo continua até que não haja variação significativa do M_r entre duas iterações subseqüentes.

Este procedimento de análise é utilizado pelos programas ILLIPAVE e MICHPAVE baseados no MEF e também pelos programas EVERSTRESS e KENLAYER baseados na Teoria das Camadas Elásticas. Contudo, uma série de problemas de convergência e procedimentos de estabilização tem sido reportada na literatura (Tacioglu, 1998). Além disso, estes métodos não permitem a utilização simultânea de outros modelos constitutivos como o elastoplástico, viscoelástico e viscoplástico.

Assim, neste trabalho propõe-se a utilização do Método de Newton-Raphson para resolução das equações de equilíbrio. Este método é obtido através da linearização da Equação 15 em um instante t fixo, levando ao sistema linear:

$$\mathbf{K}_t \delta \mathbf{u} = -\mathbf{r} \quad (20)$$

onde \mathbf{K}_t é a matriz de rigidez tangente e $\delta \mathbf{u}$ é o incremento de deslocamentos utilizados para atualizar os deslocamentos totais

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u} + \delta \mathbf{u} \quad (21)$$

onde o subscrito n indica o novo vetor dos deslocamento nodais. Este processo iterativo deve continuar até que o módulo do resíduo (\mathbf{r}) seja menor que uma dada tolerância. Uma característica importante do Método de Newton-Raphson é que o mesmo apresenta convergência quadrática na vizinhança da solução. Esta alta taxa de convergência o tornou o método mais popular para análise não-linear de sólidos e estruturas.

É importante notar que a matriz de rigidez tangente, obtida a partir da linearização do resíduo \mathbf{r} , leva a uma forma análoga a Equação 17 substituindo-se a matriz (\mathbf{C}) pela matriz constitutiva tangente (\mathbf{C}_t) definida como a matriz que relaciona os incrementos de deformação com os incrementos de deformação, ou seja:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_t d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (21)$$

A partir das Equações 14 e 17 verifica-se que a implementação de um modelo constitutivo em um programa de elementos finitos para análise através do Método de Newton-Raphson requer basicamente dois procedimentos: o cálculo das tensões a partir das deformações e o cálculo da matriz constitutiva tangente. Devido à utilização da integração numérica, estas duas tarefas devem ser realizadas para todos os pontos de Gauss da malha de elementos finitos.

3.2. Determinação das tensões

Como o M_r é função das tensões, a Equação 10 representa na verdade um sistema de equações não-lineares, uma vez que o vetor das tensões ($\boldsymbol{\sigma}$) aparece dos dois lados da igualdade. Assim, para um modelo resiliente genérico, o cálculo das tensões em cada ponto de integração requer a solução do sistema de equações não-lineares:

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0 - \mathbf{C}_s \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \quad (22)$$

no qual $\boldsymbol{\varepsilon}$ corresponde ao vetor das deformações correntes e \mathbf{h} representa o resíduo das tensões. Este sistema de equações não-lineares também pode ser resolvido através do Método de Newton-Raphson. Neste procedimento parte-se de uma estimativa inicial das tensões que vai sendo iterativamente corrigida através da expressão:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma} + \delta\boldsymbol{\sigma} \quad (23)$$

onde o subscrito n indica o novo vetor das tensões e $\delta\boldsymbol{\sigma}$ é a correção iterativa. Expandindo o resíduo \mathbf{h} em série de Taylor chega-se a

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma} + \delta\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{h} + \mathbf{J} \delta\boldsymbol{\sigma} + O(\delta\boldsymbol{\sigma}^2), \quad \text{onde } \mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (24)$$

A correção das tensões ($\delta\boldsymbol{\sigma}$) é obtida desprezando os termos de ordem $\delta\boldsymbol{\sigma}^2$ ou superior e fazendo $\mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma} + \delta\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}$, o que leva ao sistema de equações lineares:

$$\mathbf{J} \delta\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{h} \quad (25)$$

Como os termos desprezados da série de Taylor são $O(\delta\boldsymbol{\sigma}^2)$, então o método apresenta convergência quadrática. Contudo, a fim de obter esta taxa de convergência é necessário que a matriz Jacobiana (\mathbf{J}) seja calculada de maneira exata e atualizada a cada iteração.

Derivando-se a Equação 22 e utilizando a notação indicial (Malvern, 1969) chega-se a expressão genérica da matriz Jacobiana:

$$J_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial \sigma_j} = \delta_{ij} - n_j \bar{C}_{ik} \varepsilon_k \Rightarrow \mathbf{J} = \mathbf{I} - (\bar{\mathbf{C}}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{n}^t, \quad \text{onde } \mathbf{n} = \frac{\partial M_r}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (26)$$

Nesta equação o vetor \mathbf{n} representa o gradiente do Módulo de Resiliência em relação às tensões correntes. A Equação acima representa a matriz Jacobiana para qualquer modelo resiliente dependente unicamente das tensões. Contudo, a expressão final utilizada para implementação computacional depende do gradiente do Módulo de Resiliência e deve ser determinada para cada modelo considerado. No caso do Modelo de Uzan-Witczak (Equação 9), tem-se que

$$\mathbf{n} = \frac{\partial M_r}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial M_r}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Rightarrow \mathbf{n} = \frac{M_r K_2}{I_1} \mathbf{n}_1 + \frac{M_r K_3}{3\tau_{oct}^2} \mathbf{n}_2 \quad (27)$$

onde \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 representam os gradientes dos invariantes I_1 e J_2 , respectivamente. De acordo com as Equações 26 e 27, o gradiente do Módulo de Resiliência e a matriz Jacobiana são indefinidos apenas quando I_1 ou τ_{oct} forem nulos, ou seja, quando M_r se anular. Observa-se que a expressão do vetor \mathbf{n} para o modelo $K\theta$ pode ser obtida apenas desprezando-se o termo

que multiplica K_3 na Equação 27.

As Equações 26 e 27 são muito convenientes para implementação computacional, pois elas podem ser utilizadas tanto para problemas tridimensionais quanto axissimétricos, desde que se utilizem as expressões apropriadas dos gradientes dos invariantes (\mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2). Esta forma de tratar o problema é inspirada pelo procedimento clássico utilizado na definição das funções de escoamento em plasticidade (Zienkiewicz e Taylor, 2005).

Apesar da sua alta taxa de convergência, o Método de Newton-Raphson não tem garantia de convergência global. Portanto, é muito importante definir uma solução inicial ($\boldsymbol{\sigma}$) próxima da solução exata. Uma maneira simples de obter esta estimativa inicial da solução é utilizar a matriz constitutiva tangente, definida pela Equação 21, para estimar o incremento inicial de tensões:

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_t \delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (28)$$

onde $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ é o incremento das deformações devido ao incremento de deslocamentos ($\delta\mathbf{u}$).

3.3. Matriz constitutiva tangente

Como discutido anteriormente, a utilização do Método de Newton-Raphson para solução das equações de equilíbrio global requer a determinação da matriz de rigidez tangente (\mathbf{K}), que por sua vez requer a determinação da matriz constitutiva tangente (\mathbf{C}_t) em cada ponto de integração. De acordo com a Equação 21, esta matriz é definida como a derivada das tensões em relação às deformações. Contudo, esta derivação não pode ser efetuada diretamente, uma vez que o M_r é função das tensões e não das deformações. Assim, é mais simples determinar a matriz constitutiva tangente a partir de:

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{D}_t^{-1}, \text{ onde } \mathbf{D}_t = \frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \quad (29)$$

Assim, a matriz de flexibilidade tangente \mathbf{D}_t , também conhecida na literatura como *compliance matrix*, relaciona incrementos de deformação com os incrementos de tensão. A fim de obter esta matriz inverte-se a Equação 10, o que leva à matriz de flexibilidade secante (\mathbf{D}_s) do material:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_s (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0) \Rightarrow \mathbf{D}_s = \mathbf{C}_s^{-1} = \frac{1}{M_r} \bar{\mathbf{C}}^{-1} = \frac{1}{M_r} \bar{\mathbf{D}} \quad (30)$$

É importante notar que a matriz \mathbf{D}_s é simétrica e tem uma forma analítica conhecida para cada modelo de análise (axissimetria, sólido tridimensional, etc.), podendo ser computada sem necessidade de inversão da matriz constitutiva. Observa-se ainda que $\bar{\mathbf{D}}$ depende apenas do coeficiente de Poisson e permanece constante durante o processo de análise.

Utilizando a notação indicial, a derivada do vetor das deformações em relação às tensões pode ser escrita como:

$$D_{tij} = \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\sigma_j} = D_{sij} - \frac{1}{M_r^2} \frac{\partial M_r}{\partial\sigma_j} \bar{D}_{ik} (\sigma_k - \sigma_{0k}) = D_{sij} - \frac{\varepsilon_i n_j}{M_r} \quad (31)$$

Esta expressão acima pode ser escrita na forma matricial como

$$\mathbf{D}_t = \mathbf{D}_s - \frac{\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n}^t}{M_r} \quad (32)$$

Esta expressão é válida para qualquer modelo resiliente desde que o M_r dependa apenas do

estado de tensões. A particularização para cada modelo específico é feita utilizando o vetor \mathbf{n} (gradiente do Módulo de Resiliência) correspondente. Outro aspecto importante é que esta equação pode ser utilizada tanto para modelos axissimétricos como tridimensionais, o que a torna muito conveniente para implementação computacional.

A Equação 32 mostra claramente que a matriz de flexibilidade tangente é não-simétrica. Como a matriz constitutiva tangente (\mathbf{C}_t) é obtida através da inversão de \mathbf{D}_t , verifica-se que a matriz constitutiva tangente é não-simétrica. Em consequência, a matriz de rigidez tangente (\mathbf{K}) também é não-simétrica. Este aspecto é muito importante para a utilização prática dos modelos de resiliência uma vez que acarreta tanto um aumento da quantidade de memória utilizada (praticamente o dobro) para armazenar a matriz de rigidez global quanto um aumento do esforço computacional para resolução do sistema de equações a cada iteração.

3.4. Implementação computacional

O Laboratório de Mecânica dos Pavimentos (LMP) da Universidade Federal do Ceará (UFC) vem desenvolvendo, desde 2005, o programa CAP3D para realização de análises de pavimentos (Holanda *et al.*, 2006a, 2006b). O programa utiliza a filosofia de Programação Orientada a Objetos (POO) de maneira a criar um sistema facilmente extensível, aumentando o reuso de código e permitindo o desenvolvimento incremental, típico de grandes sistemas computacionais para análise por elementos finitos.

O sistema CAP3D considera diversos tipos de carga (concentrada nos nós, distribuídas nas arestas e forças de corpo) que podem ser constantes ou dependentes do tempo. Possui ainda elementos lineares (T3, Q4 e Brick8) e quadráticos (T6, Q8, Q9 e Brick20) e apresenta os modelos de análise 2D (estado plano de tensões, estado plano de deformações, axissimétrico) e 3D. O programa apresenta três tipos de modelos constitutivos: linear elástico, viscoelástico para modelar a camada de revestimento e o modelo resiliente apresentado anteriormente para representar as camadas de material granular.

4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

4.1. Exemplo 1

Este exemplo considera um único elemento axissimétrico tipo Q4 (quatro pontos de integração) de dimensões unitárias de maneira a simular um ensaio triaxial. Os parâmetros empregados foram: $k_1 = 2000$, $k_2 = 0,5$, $k_3 = 0,0$, $\nu = 0,0$ e pressão atmosférica $P_a = 100$ kPa. Foram considerados dois casos: *caso 1* - sem consideração de tensão inicial ($p_0 = 0$); e *caso 2* - com consideração de tensão inicial ($p_0 = 100$ kPa). A descrição do carregamento e condições de contorno está indicada na Figura 2(a), enquanto a Figura 2(b) mostra a curva pressão (p) x deformação vertical para o caso com tensões iniciais. Verifica-se que para este exemplo simples, a metodologia proposta reproduz exatamente a resposta analítica esperada.

Na Figura 3, segue a avaliação do número de iterações em função (i) do número de incrementos (passo) da carga (11, 5 e 2 passos) e (ii) da consideração da tensão inicial. Em ambos os casos o fator de carga (λ) varia de 0 a 1. Como pode-se verificar, a consideração de um estado de tensão inicial implicou em uma redução considerável na quantidade de iterações, tanto globais (equilíbrio) como locais (cálculo das tensões em cada ponto de Gauss). Verificou-se ainda que à medida que o número de incrementos na carga decresce, a quantidade de iterações aumenta, mostrando que não é necessário dividir o carregamento em muitos incrementos.

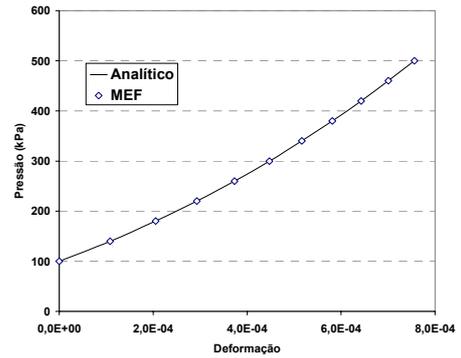
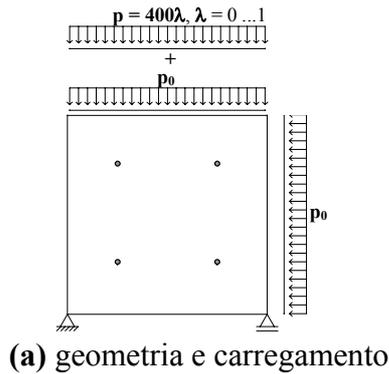


Figura 2: Exemplo 1.

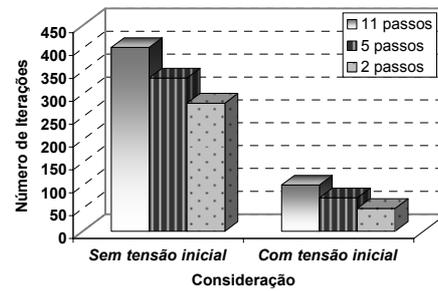
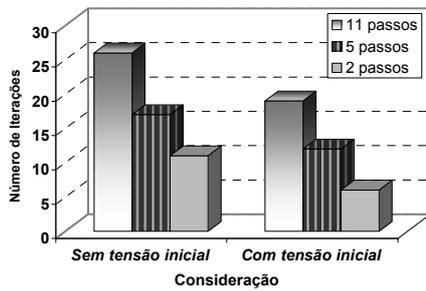


Figura 3: Número de iteração globais e locais.

4.2. Exemplo 2

Neste exemplo, considera-se um pavimento composto por uma camada de 10 cm de revestimento asfáltico que está sobre uma camada de 20 cm de base que, por sua vez, está apoiada no subleito. Os materiais do revestimento e do subleito são considerados elástico lineares, enquanto o material da base é elástico não-linear, sendo representado pelo modelo resiliente descrito pela Equação (3). A carga de uma roda foi modelada como uma pressão uniforme de 550 kPa sobre uma área circular de 15 cm de raio (Figura 4). Deve-se ressaltar que a pressão atmosférica é dada por $P_a = 101,325$ kPa, o parâmetro γ mostrado na figura a seguir representa o peso específico do material e k_0 é o coeficiente de empuxo no repouso.

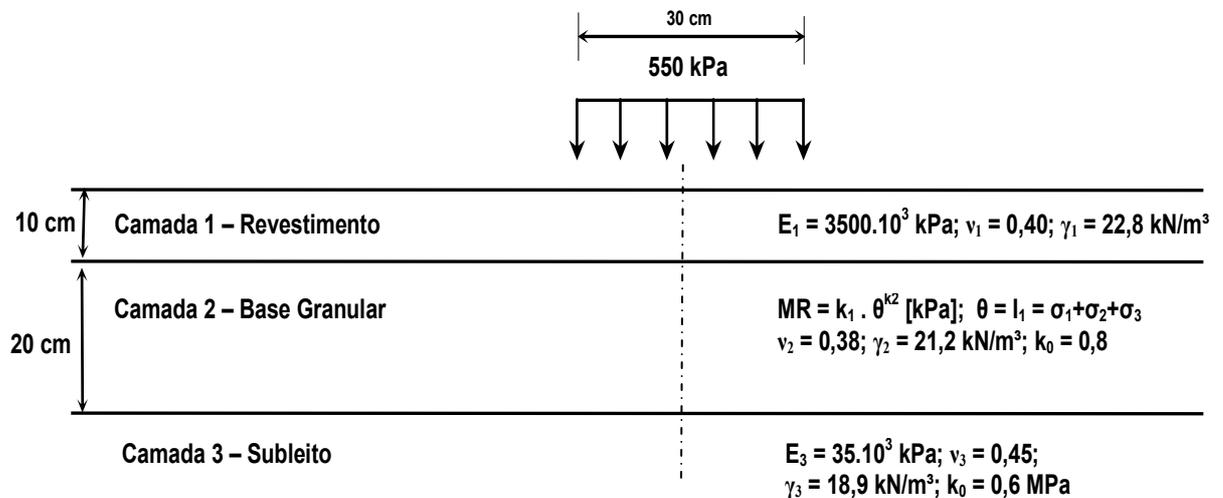


Figura 4: Seção-tipo, carregamento e relações constitutivas dos materiais.

Na realidade, três análises diferentes foram executadas, considerando em cada uma delas valores distintos dos parâmetros k_1 e k_2 (Tabela 1). Em cada caso, os deslocamentos verticais no topo (geralmente d ou δ), as tensões de compressão no topo do subleito (σ_{yy}) e as tensões de tração no fundo do revestimento (σ_{xx}) são obtidas e os resultados comparados com os calculados pelo programa MICHPAVE (Harichandran *et al.*, 1990).

Tabela 1: Valores de k_1 e k_2 para as três análises (Fonte: Huang, 2004).

Base	k_1		k_2
	(kPa) ^{1-k₂}	Adimensional	
Areia Siltosa	3374	583	0,62
Pedregulho arenoso	11102	1267	0,53
Agregado arenoso	8304	1250	0,59

O modelo axissimétrico e elementos quadráticos de 8 nós (Q8) foram adotados nas análises pelo MEF. Deve-se ressaltar que a mesma malha de elementos finitos foi utilizada em todos os casos, estando os resultados obtidos mostrados na Tabela 2. Nota-se a boa concordância entre os dois programas, principalmente no que diz respeito aos deslocamentos verticais e às tensões de compressão no subleito.

Tabela 2: Comparação de resultados – deslocamentos e tensões.

Base	Parâmetro					
	σ_{yy} (kPa)		σ_{xx} (kPa)		d ou δ v (mm)	
	CAP3D	MICHPAVE	CAP3D	MICHPAVE	CAP3D	MICHPAVE
Areia Siltosa	-59,30	-60,90	2,267	2,701	-1,134	-1,124
Pedregulho arenoso	-50,47	-55,29	1,582	2,349	-0,9921	-1,006
Agregado arenoso	-50,75	-54,84	1,539	2,358	-0,9936	-1,015

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo discutiu aspectos relacionados à aplicação de modelos resilientes para representar o comportamento mecânico das camadas granulares e sua utilização juntamente com o Método dos Elementos Finitos. Enquanto é comum a utilização de métodos secantes na análise de pavimentos asfálticos, o sistema CAP3D utiliza um método incremental-iterativo baseado em uma formulação tangente (Método de Newton-Raphson). Além de apresentar convergência quadrática, esta estratégia, ao contrário dos métodos secantes, permite a utilização simultânea de outros modelos constitutivos como o elastoplástico, viscoelástico, viscoplástico. Os resultados obtidos nos exemplos numéricos foram encorajadores. Deve-se ressaltar que o programa CAP3D é um sistema em desenvolvimento e, assim, outros aspectos importantes relacionados à consideração de modelos resilientes ainda serão incorporados, como, por exemplo, o tratamento de estados de tensão de tração que ocorrem na análise de pavimentos asfálticos e a utilização de matrizes tangentes aproximadas (simétricas). Outros modelos alternativos também serão estudados e implementados no referido sistema.

Agradecimentos

Os autores agradecem à FINEP/CTPETRO e à Petrobras pelo apoio financeiro aportado na REDE ASFALTO N/NE, Projeto Cooperativo 03 – Análise de Pavimentos Asfálticos para desenvolvimento do CAP3D.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AASHTO *Guide for Design of Pavement* (1986) American Association of State Highway and Transportation Officials. Washington DC, Estados Unidos.
- Aedo, J. L. C., Romanel, C., Motta, L. G. (1996) Um Programa de Computador para Análise Tridimensional Não-Linear de Pavimentos Flexíveis pelo Método dos Elementos Finitos. 30ª. Reunião Anual de Pavimentação, Bahia, p. 986-1009.
- Andrei, D. (1999) Development of a Harmonized Test Protocol for the Resilient Modulus of Unbound Materials used in Pavement Design. Tese de Mestrado, University of Maryland, apud NCHRP/TRB (2004).
- Bathe, K. J. (1996) *Finite Element Procedures*. Prentice Hall.
- Booker, J.R. e Small, J.C. (1982) Finite element analysis of consolidation. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, John Wiley & Sons, Vol. 6, pp.151-194.
- Cook, R., Malkus, D., Plesha, M. (2002) *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. (2nd Edition). John Wiley & Sons.
- Crisfield, M. A. (1991) *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, vol. 1, John Wiley & Sons.
- Duncan, J.M., Monismith, C.L. e Wilson, E.L. (1968) Finite Element Analysis of Pavements. *Highway Research Record*, n. 228, p. 18-33.
- Evangelista JR, F., Parente JR, E., Holanda, A.S., Araujo, T.D.P. e Soares, J.B. (2006) Análise quase-estática e dinâmica de pavimentos asfálticos. ANPET, Brasília-DF.
- Farias, M.M. e Monteiro, S.A. (1996) Comparação entre Análises Bidimensionais Axissimétricas com Superposição de Efeitos e Análise Tridimensionais Aplicadas ao Cálculo de Tensões em Pavimentos. 30ª. Reunião Anual de Pavimentação, Bahia, p. 1011-1040.
- Harichandran, R. S., Yeh, M. S. and Baladi, G. Y. (1990) MICH-PAVE: A nonlinear finite element program for the analysis of flexible pavements. *Transportation Research Record*, 1286, p. 123-131.
- Hicks, R.G. e Monismith, C.L. (1971). Factors influencing the resilient properties of granular materials. *Transportation Research Record*, 345, pp. 15-31.
- Hjelmstad, K. D. e Taciroglu, E. (2000) Analysis and Implementation of Resilient Modulus Models for Granular, *Journal of Engineering Mechanics - ASCE*, v.126 n.8, p. 821-830.
- Holanda, A. S., Parente Jr., E., Araújo, T. D. P., Melo, L. T. B., Evangelista Jr., F., Soares, J. B. (2006a) An Object-Oriented System for Finite Element Analysis of Pavements, *European Conference on Computational Mechanics (ECCM)*, p. 1-17, Lisboa.
- Holanda, A. S., Parente Jr., E., Araújo, T. D. P., Melo, L. T. B., Evangelista Jr., F., Soares, J. B. (2006b) Finite Element Modeling of Flexible Pavements, *XXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE)*, p. 1-14, Belém-PA, Brasil.
- Huang, Y. H. (2004) *Pavement Analysis and Design* (2nd Edition). Pearson Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, USA.
- Malvern, L. E. (1969) *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice Hall.
- Medina, J. e Motta, L.M.G. (2005) *Mecânica dos Pavimentos*. 2ª Edição, Rio de Janeiro.
- Motta, L.M.G. (1991) Método de Dimensionamento de Pavimentos Flexíveis; Critério de Confiabilidade e Ensaio de Cargas Repetidas. Tese de Doutorado. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- NCHRP/TRB (2004) *Guide for Mechanistic-Empirical Design of New and Rehabilitated Pavement Structures*, Appendix RR: Finite Element Procedures for Flexible Pavement Analysis.
- Raad, L., and Figueroa, J. L. (1980) Load response of transportation support system, *Journal of Transportation Engineering*, ASCE, v. 106, pp. 111-128.
- Rodrigues, R.M. (1991) Estudo do trincamento dos pavimentos. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- Silva, P.D.E.A (1995) Contribuição para o Aperfeiçoamento do Emprego do Programa FEPAVE2 em Estudos e Projetos de Pavimentos Flexíveis. Dissertação de Mestrado. COPPE / UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- Soares, J.B.; Motta, L.M.G.; e Soares, R.F. (2000) Análise de bacias deflectométricas para o controle de construção de pavimentos asfálticos. ANPET, Gramado-RS.
- Taciroglu, E., (1998) *Constitutive Modeling of the Resilient Response of Granular Solids*. Tese de Doutorado. University of Illinois, Urbana-Champaign, Estados Unidos.
- Uzan, J. (1985) *Characterization of Granular Material*. *Transportation Research Record* 1022, pp.52-59.
- Witzak, M. W., and Uzan, J. (1988) The universal airport pavement design system. Report I of V: Granular Material Characterization, Dept. of Civ. Engrg., University of Maryland, College Park, Md.
- Zaman, M., Chen, D. e Laguros, J. (1994) Resiliente Moduli of Granular Materials. *Journal of Transportation Engineering*, ASCE, v. 120, pp. 967-988.
- Zienkiewicz, O. C, Taylor, R. L. (2005) *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics* (6th. Edition). Elsevier.