



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

VALESSA VALENTIM VIANA

TEORIA DA DISSIPATIVIDADE APLICADA À ESTABILIZAÇÃO ASSINTÓTICA
DE SISTEMAS RACIONAIS COM INCERTEZAS

FORTALEZA

2020

VALESSA VALENTIM VIANA

TEORIA DA DISSIPATIVIDADE APLICADA À ESTABILIZAÇÃO ASSINTÓTICA DE
SISTEMAS RACIONAIS COM INCERTEZAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Engenharia Elétrica do
Centro de Tecnologia da Universidade Federal
do Ceará, como requisito parcial à obtenção do
grau de bacharel em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Diego de Sousa
Madeira

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- V668t Viana, Vanessa Valentim.
Teoria da dissipatividade aplicada à estabilização assintótica de sistemas racionais com incertezas /
Vanessa Valentim Viana. – 2020.
72 f. : il. color.
- Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia,
Curso de Engenharia Elétrica, Fortaleza, 2020.
Orientação: Prof. Dr. Diego de Sousa Madeira.
1. Estabilidade. 2. Sistemas não-lineares. 3. Controle robusto. 4. Dissipatividade. I. Título.
CDD 621.3
-

VALESSA VALENTIM VIANA

TEORIA DA DISSIPATIVIDADE APLICADA À ESTABILIZAÇÃO ASSINTÓTICA DE
SISTEMAS RACIONAIS COM INCERTEZAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Engenharia Elétrica do
Centro de Tecnologia da Universidade Federal
do Ceará, como requisito parcial à obtenção do
grau de bacharel em Engenharia Elétrica.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Diego de Sousa Madeira (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Wilkley Bezerra Correia
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Guilherme de Alencar Barreto
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Ao meu pai e à minha mãe;

Aos meus irmãos;

A todos que me acompanham e se fazem presentes na minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por sempre ter me dado força e saúde.

Aos meus pais, Cézar e Márcia, a quem devo tudo, por todos os ensinamentos que me foram dados e todo o esforço feito durante suas vidas para que eu chegasse até aqui. Obrigada por me criarem com muito amor e cuidado, desejo um dia retribuir, à altura, tudo o que vocês fizeram por mim.

À minha irmã, Vanessa, e ao meu irmão, Cézar Filho, por me ajudarem quando necessário e serem pacientes em todos os momentos.

Ao meu namorado, Thiago Lima, por estar sempre ao meu lado, me apoiando em todos os momentos e me incentivando quando tive dúvidas da minha capacidade. Você foi um dos responsáveis pelo meu interesse na área de controle, me apresentou da melhor forma à área e foi sempre paciente em sanar as várias dúvidas. Obrigada por todo carinho, amor e atenção.

Ao meu orientador, Professor Dr. Diego de Sousa Madeira, por ter acreditado em mim e aceitado me orientar neste trabalho, sendo sempre paciente e solícito durante a orientação.

Aos meus amigos, Guilherme Lawrence e Rodrigo Tornisiello, por terem me acompanhado durante quase todo o curso, compartilhando momentos bons e ruins durante as disciplinas e trabalhos.

Ao PET Engenharia Elétrica, por ter me proporcionado uma das melhores experiências dentro do curso, e ter me acrescentado tanto profissionalmente quanto pessoalmente.

A todos os amigos que o PET Engenharia Elétrica me deu, por terem compartilhados vários momentos inesquecíveis durante o curso.

Às minhas amigas, Sabrina, Larissa, Deborah e Manu. Por serem amigas que posso contar em todos os momentos.

Ao Professor Dr. Fabrício Nogueira, por ter me dado a oportunidade de participar do programa de bolsa de monitoria.

À empresa H3 Solar, por todos os ensinamentos durante o período de estágio.

Ao doutorando em Engenharia Elétrica, Ednardo Moreira Rodrigues, e seu assistente, Alan Batista de Oliveira, aluno de graduação em Engenharia Elétrica, pela adequação do *template* utilizado neste trabalho para que o mesmo ficasse de acordo com as normas da biblioteca da Universidade Federal do Ceará (UFC).

Sonhos determinam o que você quer. Ação determina o que você conquista.

(Aldo Novak)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo realizar a aplicação de uma estratégia de estabilização assintótica robusta de sistemas não lineares polinomiais ou racionais. A técnica da estabilização se utiliza da teoria da dissipatividade juntamente com o Lema de Finsler e a definição de aniquiladores para desenvolver condições expressas na forma de desigualdades matriciais lineares, do inglês *Linear matrix inequalities (LMIs)*. Essas LMIs são utilizadas para determinar um ganho estático de realimentação que garanta a estabilidade assintótica robusta do sistema não linear em uma região politópica em torno do ponto de equilíbrio. Além disso, também é feita a estimativa da região em que quaisquer condições iniciais dentro dela resultam em trajetórias que convergem assintoticamente para o ponto de equilíbrio sem sair dessa região, chamada de domínio de atração do sistema. É importante ressaltar que, utilizando a mesma estratégia, é possível projetar tanto ganhos de realimentação de estados como ganhos de realimentação de saída. A estratégia foi aplicada em um sistema microeletromecânico, do inglês *Microelectromechanical system (MEMS)*, que apresenta não linearidades polinomiais em sua equação de estados, no qual uma realimentação estática de saída foi projetada para garantir a estabilidade local do sistema. Além disso, realizou-se a aplicação em um sistema teórico com não linearidades polinomiais, no qual também foi projetada uma realimentação estática de saída para garantir a estabilidade local do sistema. E por último, foi realizada a aplicação em um sistema de um pêndulo invertido, no qual as não linearidades trigonométricas presentes na equação diferencial que representa o sistema são transformadas em não linearidades racionais através de uma mudança de variável. Para este exemplo, foi projetada uma realimentação estática de estados para garantir a estabilidade local do sistema. Os resultados de simulação das aplicações apresentam a eficiência da estratégia.

Palavras-chave: Estabilidade. Sistemas não-lineares. Controle Robusto. Dissipatividade.

ABSTRACT

The present work aims to implement a robust asymptotic stabilization strategy for nonlinear systems, restricted to polynomial or rational nonlinearities. The stabilization technique uses the dissipation theory together with the Finsler's Lemma and the definition of annihilators to develop conditions expressed in the form of linear matrix inequalities (LMIs). These LMIs are used to determine a static feedback gain that ensures the asymptotic stability of the nonlinear system with uncertainties in a polytopic region around the equilibrium point. In addition, is also made an estimate of the region in which any initial conditions within it result in trajectories that asymptotically converge to the equilibrium point without leaving that region, called the system attraction domain. It is important to highlight that, using the same strategy, it is possible to design both state feedback gains and output feedback gains. The strategy was applied in a microelectromechanical system (MEMS), which presents polynomial nonlinearities in its state equation, a static output feedback was designed to ensure the local stability of the system. The application was also carried out in a theoretical system with polynomial nonlinearities and a static output feedback was designed to ensure the local stability of the system. Lastly, the application was carried out in a system of an inverted pendulum, in which the nonlinearity in the differential equation that represents the system are transformed into rational nonlinearities through a change of variable, a static state feedback was designed to guarantee the local stability of the system. The simulation results of the applications show the efficiency of the strategy.

Keywords: Stability. Nonlinear Systems. Robust Control. Dissipativity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistema de Controle em Malha Fechada.	15
Figura 2 – Diagrama de sistemas.	16
Figura 3 – Politopo \mathcal{X} no \mathbb{R}^2	19
Figura 4 – Ponto de Equilíbrio Estável.	22
Figura 5 – Ponto de Equilíbrio Assintoticamente Estável.	22
Figura 6 – Domínio de Atração.	24
Figura 7 – Sistema de Controle por Realimentação.	26
Figura 8 – Atuador eletrostático de placas paralelas.	34
Figura 9 – Trajetórias do sistema em malha aberta.	37
Figura 10 – Trajetórias do sistema em malha fechada.	41
Figura 11 – domínio de atração e trajetórias em malha aberta.	42
Figura 12 – Domínio de atração e trajetórias em malha fechada.	42
Figura 13 – Resposta no tempo do sistema em malha fechada.	43
Figura 14 – Trajetórias do sistema em malha aberta.	44
Figura 15 – Resposta no tempo do sistema em malha fechada.	47
Figura 16 – Trajetórias em malha fechada e domínio de atração do sistema.	47
Figura 17 – Esquemático do pêndulo invertido.	48
Figura 18 – Resposta no tempo do sistema em malha fechada.	55
Figura 19 – Trajetórias em malha fechada e domínio de atração do sistema.	55
Figura 20 – Diagrama do Exemplo 1.	60
Figura 21 – Diagrama do Exemplo 2.	65
Figura 22 – Diagrama do Exemplo 3.	69

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros do MEMS	36
Tabela 2 – Parâmetros do pêndulo invertido	51

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>DAR</i>	<i>Differential algebraic representation</i>
<i>LMIs</i>	<i>Linear matrix inequalities</i>
<i>LPV</i>	<i>Linear parameter varying</i>
<i>LTI</i>	<i>Linear time-invariant</i>
<i>LTV</i>	<i>Linear time varying</i>
<i>MEMS</i>	<i>Microelectromechanical system</i>
<i>SDP</i>	<i>Semidefinite programming</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

$x(t)$	Vetor de estados
$\dot{x}(t)$	Derivada do vetor x
$u(t)$	Sinal de controle
δ	Vetor de incertezas
\mathcal{X}	Conjunto politópico de $x(t)$
\mathcal{U}	Conjunto politópico de $u(t)$
\mathcal{D}	Conjunto politópico de δ
\mathbb{R}^n	Conjunto de vetores reais de dimensão n
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto de matrizes reais com n linhas e m colunas
$\ x\ $	Norma do vetor x , $\ x\ = \sqrt{x^\top x}$
P^\top	Transposta da matriz P
$P > 0$	Matriz definida positiva
$tr(P)$	Traço da matriz P
$det(P)$	Determinante da matriz P
$\mathcal{V}(\mathcal{X})$	Vértices do politopo \mathcal{X}
ζ	Taxa de amortecimento do MEMS.
r	Resistência do circuito de acionamento do MEMS.
M_0	Massa da esfera do pêndulo
l	Comprimento da haste do pêndulo
b_0	Coefficiente de atrito entre a haste e o mancal do pêndulo.
g	Aceleração da gravidade

SUMÁRIO

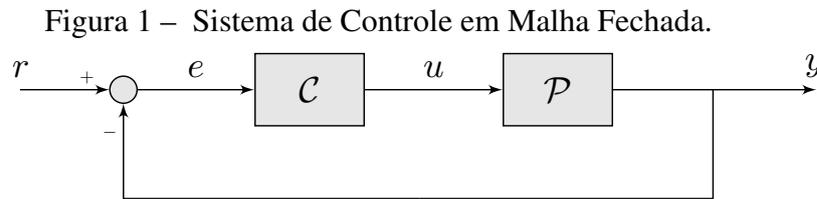
1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Objetivos	17
1.2	Organização do Trabalho	17
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	18
2.1	Sistema Dinâmico Não Linear com Incertezas	18
2.2	Representação Politópica	18
2.3	Representação Algébrico - Diferencial	19
2.4	Mudança de Variáveis para Não Linearidades Trigonômicas	21
2.5	Análise de Estabilidade	21
2.5.1	<i>Teoria de Estabilidade de Lyapunov</i>	21
2.5.2	<i>Domínio de Atração</i>	23
2.6	Teoria da Dissipatividade	24
3	ESTRATÉGIA DE ESTABILIZAÇÃO ASSINTÓTICA ROBUSTA	26
3.1	Formulação do Problema	26
3.2	Síntese do Controlador	30
3.2.1	<i>Algoritmo para a Síntese do Controlador</i>	32
4	EXEMPLOS NUMÉRICOS	34
4.1	Exemplo 1	34
4.1.1	<i>Projeto do Controlador</i>	36
4.2	Exemplo 2	43
4.2.1	<i>Projeto do Controlador</i>	43
4.3	Exemplo 3	48
4.3.1	<i>Linearização Aproximada por Realimentação</i>	49
4.3.2	<i>Projeto do Controlador</i>	51
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	56
5.1	Sugestões de Trabalhos Futuros	57
	REFERÊNCIAS	58
	APÊNDICES	60
	APÊNDICE A – Diagrama do Exemplo 1 no Simulink	60
	APÊNDICE B – Código do Exemplo 1 no MATLAB	61

APÊNDICE C – Modelo do Exemplo 2 no Simulink	65
APÊNDICE D – Código do Exemplo 2 no MATLAB	66
APÊNDICE E – Modelo do Exemplo 3 no Simulink	69
APÊNDICE F – Código do Exemplo 3 no MATLAB	70

1 INTRODUÇÃO

A engenharia de controle busca obter informações detalhadas de um processo e, com isso, desenvolver estratégias para que um resultado desejado seja atendido. As técnicas de controle de processos são muito utilizadas para controlar máquinas e processos industriais em busca de gerar benefícios para a sociedade. Os processos a serem controlados podem ser exemplificados como sistemas mecânicos, elétricos ou químicos (DORF; BISHOP, 2001).

Um sistema de controle pode ser caracterizado como a interconexão de componentes a um processo em busca de se obter uma resposta desejada. Muitos sistemas de controle fazem o uso da medida da saída real do sistema para comparar essa saída à resposta desejada, essa técnica é conhecida como retroalimentação ou controle em malha fechada (DORF; BISHOP, 2001). A Figura 1 exemplifica um sistema de controle em malha fechada, onde \mathcal{P} é o processo a ser controlado, \mathcal{C} é o controlador e (r, e, u, y) são a referência, o erro entre saída e a referência, o sinal de controle e a saída do sistema, respectivamente.

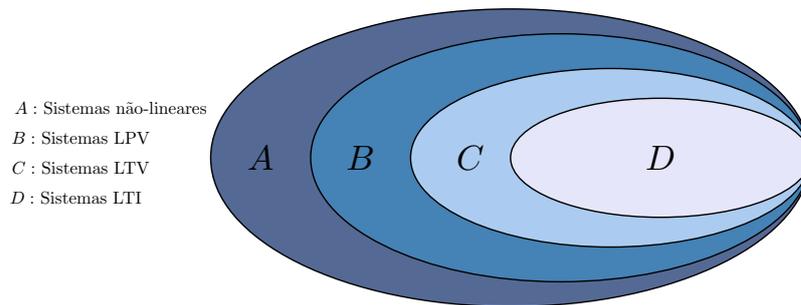


Fonte: Autora.

Para que um processo seja controlado de uma maneira efetiva é necessário que os sistemas que compõem esse processo sejam compreendidos e modelados (DORF; BISHOP, 2001). Por isso, foram desenvolvidas muitas técnicas de identificação e modelagem de diversos tipos de sistemas. Os modelos que representam um processo podem apresentar características não lineares, lineares com parâmetros variantes, do inglês *Linear parameter varying (LPV)*, lineares variantes no tempo, do inglês *Linear time varying (LTV)*, e lineares invariantes no tempo, do inglês *Linear time-invariant (LTI)*. Como mostrado na Figura 2, tem-se os sistemas não-lineares como um conjunto que abrange todos os tipos de sistemas e pode-se dizer que é possível modelar matematicamente qualquer processo como um sistema não-linear (DORF; BISHOP, 2001).

Todo modelo matemático é uma aproximação do sistema físico real, por isso podem apresentar incertezas decorrentes de erros na medição de parâmetros, dinâmicas não modeladas, ruídos, etc (TROFINO, 2000). Quando há uma discrepância muito grande entre o modelo

Figura 2 – Diagrama de sistemas.



Fonte: Autora.

e o sistema real, o controlador projetado para atingir uma resposta desejada pode não obter os resultados esperados, podendo ocasionar até a instabilidade do sistema. Devido a isso, é importante levar em consideração as incertezas que estão presentes no sistema durante o projeto de controle. A este processo dá-se o nome de controle robusto (HADDAD; CHELLABOINA, 2011). O objetivo do controle robusto é minimizar a influência dessas incertezas que atuam no sistema. Neste trabalho, consideram-se incertezas presentes nos parâmetros do modelo do sistema.

Um dos mais importantes conceitos na engenharia de controle é o conceito de estabilidade de um sistema dinâmico. A teoria da estabilidade tem como objetivo analisar o comportamento das trajetórias do sistema para condições iniciais próximas a um ponto de equilíbrio do sistema, podendo identificar a região em que o sistema é estável ou instável (HADDAD; CHELLABOINA, 2011). Para sistemas instáveis, busca-se projetar controladores para realizar a estabilização local do sistema em torno de um ponto de equilíbrio.

Na literatura, há diversas técnicas de estabilização a serem aplicadas, principalmente para sistema lineares. Por essa razão, muitos sistemas, apesar de apresentarem um comportamento não linear, acabam sendo linearizados em torno de um ponto de operação. Entretanto, modelos linearizados só representam bem o sistema original em uma região próxima ao ponto de operação. Devido a isso, é possível que as técnicas aplicadas para a estabilização do sistema não funcionem bem fora dessa região (KHALIL, 2002). Por isso, surge a necessidade de se trabalhar com o modelo não linear que representa o sistema, onde é possível saber como esse sistema se comporta em todo o seu domínio.

Os controladores a serem projetados para garantir a estabilidade de um sistema dinâmico podem ser estáticos ou dinâmicos. Neste trabalho, utiliza-se ganhos estáticos de

realimentação de estados, ou de saída, para garantir a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada em uma região em torno de um ponto de equilíbrio. Para o caso da realimentação de estados é necessário ter o conhecimento e realizar a medição de todos os estados do sistema. Porém, por questões físicas, pode não ser possível realizar a medição de todos os estados de um sistema. Então, a realimentação de saída aparece como uma alternativa a ser utilizada nesses casos.

A técnica utilizada neste trabalho para estabilização robusta de um sistema não linear, desenvolvida em Madeira e Viana (2020), faz o uso da teoria da dissipatividade. O conceito de dissipatividade foi introduzido há algumas décadas por Willems (1972) e vem sendo utilizado para análise e síntese da estabilidade de sistemas dinâmicos (BROGLIATO *et al.*, 2020).

Além disso, a representação algébrico-diferencial, do inglês *Differential algebraic representation (DAR)*, do sistema é utilizada, juntamente com o Lema de Finsler e a definição de aniquiladores, para que seja possível desenvolver uma formulação semidefinida, do inglês *Semidefinite programming (SDP)*, linear para a problemática.

1.1 Objetivos

De uma maneira geral, pretende-se fazer a aplicação de uma estratégia de estabilização assintótica de sistemas não lineares com incertezas, que faz o uso de algumas ferramentas matemáticas para desenvolver uma formulação semidefinida linear. Utilizando a estratégia, serão determinados ganhos estáticos de realimentação de estados, ou de saída, para a estabilização assintótica robusta de alguns sistemas. Além disso, também será feita a estimativa do domínio de atração desses sistemas.

1.2 Organização do Trabalho

O trabalho está dividido da seguinte forma:

- O capítulo 1 introduz o assunto abordado e os objetivos do trabalho.
- O capítulo 2 apresenta os preliminares teóricos relevantes para o trabalho.
- O capítulo 3 apresenta a estratégia de controle utilizada no trabalho.
- O capítulo 4 apresenta os exemplos numéricos e os resultados de simulação.
- O capítulo 5 apresenta as conclusões dos resultados obtidos e expõe ideias de trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, serão apresentados os principais conceitos matemáticos que foram utilizados na estratégia de controle a ser aplicada.

2.1 Sistema Dinâmico Não Linear com Incertezas

Ao longo deste trabalho, considera-se um sistema não linear com incertezas na forma (2.1)-(2.2), como em Azizi (2017),

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \delta(t)) + g(x(t), \delta(t))u(t), \quad (2.1)$$

$$y(t) = h(x(t)) = Cx(t), \quad (2.2)$$

com $t \geq 0$, onde $x(t) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, é o vetor de estados do sistema, $\delta(t) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^l$ é um vetor de incertezas paramétricas limitadas que representa os desvios em torno do modelo original, $x(0) = x_0$ é a condição inicial do sistema e $y(t)$ é a saída do sistema, onde nesse trabalho é restrita a ser linear. As funções $f: \mathcal{X} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g: \mathcal{X} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ são não lineares, podendo ser polinomiais ou racionais, tal que $(f, g) \in C^1$, $f(0, \delta) = 0$ para todo $\delta \in \mathcal{D}$. Além disso, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é uma matriz constante e o sinal de controle $u(t)$ é uma função mensurável, com $u(t) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ para todo $t \geq 0$ (HADDAD; CHELLABOINA, 2011).

2.2 Representação Politópica

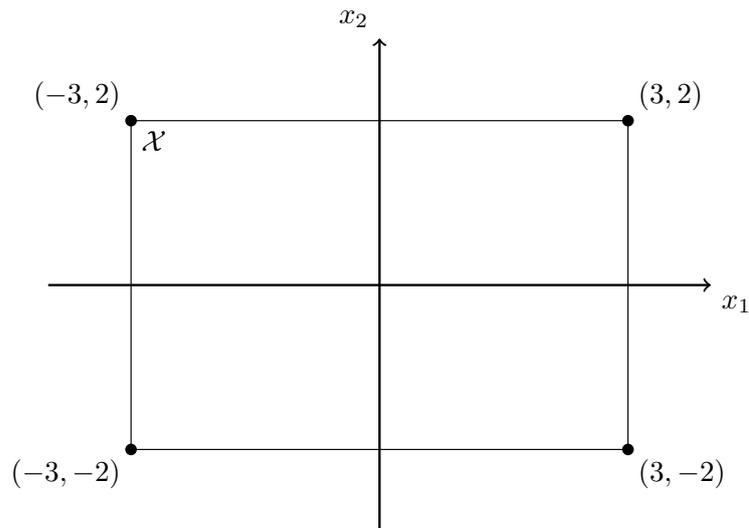
Um politopo pode ser definido como uma combinação convexa de seus vértices ou como a interseção de seus hiperplanos. Um politopo \mathcal{X} com n_x vértices e n_{xe} hiperplanos pode ser representado da seguinte forma (ROHR *et al.*, 2009),

$$\mathcal{X} = \{x \mid a_k^\top x \leq 1, k = 1, \dots, n_{xe}\}, \quad (2.3)$$

onde os vetores constantes $a_k \in \mathbb{R}^n$ podem ser determinados resolvendo a equação $a_k^\top x = 1$ para todos os grupos de vértices adjacentes do politopo.

Como exemplificado em Rohr *et al.* (2009), seja \mathcal{X} um politopo em \mathbb{R}^2 , como mostrado na Figura 3, com vértices definidos por $\mathcal{V} := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, onde

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Figura 3 – Polítopo \mathcal{X} no \mathbb{R}^2 .

Fonte: Autora.

Para cada par adjacente de vértices há um hiperplano definido pela inequação $\{x : a_k x \leq 1\}$. As equações dos quatro hiperplanos do polítopo $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^2$ são:

$$v_1, v_2 \in \{x : a_1 x = 1\}, \quad (2.4)$$

$$v_2, v_3 \in \{x : a_2 x = 1\}, \quad (2.5)$$

$$v_3, v_4 \in \{x : a_3 x = 1\}, \quad (2.6)$$

$$v_4, v_1 \in \{x : a_4 x = 1\}, \quad (2.7)$$

com isso, pode-se definir os sistemas lineares (2.8) para determinar os vetores a_k 's,

$$\begin{cases} a_1 v_1 = 1 \\ a_1 v_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 v_2 = 1 \\ a_2 v_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_3 v_3 = 1 \\ a_3 v_4 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_4 v_4 = 1 \\ a_4 v_1 = 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

resolvendo (2.8), tem-se

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0.33 \\ 0 \end{bmatrix}^\top, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \end{bmatrix}^\top, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -0.33 \\ 0 \end{bmatrix}^\top, \quad a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \end{bmatrix}^\top.$$

2.3 Representação Algébrico - Diferencial

Um sistema dinâmico não linear, polinomial ou racional, com incertezas, pode ser representado na forma algébrico-diferencial (2.9)-(2.10), como em Azizi (2017). Com isso, é possível separar as não linearidades do sistema em um único vetor,

$$\dot{x}(t) = A_1(x, \delta)x + A_2(x, \delta)\pi + A_3(x, \delta)u, \quad (2.9)$$

$$0 = \Pi_1(x, \delta)x + \Pi_2(x, \delta)\pi + \Pi_3(x, \delta)u, \quad (2.10)$$

onde $\pi(x, u, \delta)$ é um vetor contendo as não linearidades do sistema, $A_1(x, \delta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_2(x, \delta) \in \mathbb{R}^{n \times n_\pi}$, $A_3(x, \delta) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\Pi_1(x, \delta) \in \mathbb{R}^{n_\pi \times n}$, $\Pi_2(x, \delta) \in \mathbb{R}^{n_\pi \times n_\pi}$, $\Pi_3(x, \delta) \in \mathbb{R}^{n_\pi \times m}$ são funções matriciais afim em (x, δ) . A função matricial $\Pi_2(x, \delta)$ deve possuir posto completo para todo (x, δ) na região de interesse, de tal forma que o vetor das não linearidades possa ser representado da seguinte forma,

$$\pi(x, u, \delta) = \Pi_2^{-1}(x, \delta)[- \Pi_1(x, \delta)x - \Pi_3(x, \delta)u], \quad (2.11)$$

$$\dot{x}(t) = (A_1 - A_2 \Pi_2^{-1} \Pi_1)x(t) + (A_3 - A_2 \Pi_2^{-1} \Pi_3)u(t). \quad (2.12)$$

Como $\Pi_2(x, \delta)$ não é uma função de u , a seguinte relação pode substituir (2.10) (MADEIRA; VIANA, 2020),

$$0 = \Pi_d(x_d, \delta)x_d + \Pi_2(x, \delta)\pi, \quad (2.13)$$

com

$$x_d^\top = \begin{bmatrix} x^\top & u^\top \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

e $\Pi_1(x, \delta)$ pode ser substituída por uma nova função afim $\Pi_d(x_d, \delta) \in \mathbb{R}^{n_\pi \times n_d}$, com $x_d \in \mathcal{X}_d \subset \mathbb{R}^{n_d}$, $n_d = n + m$. \mathcal{X}_d é a união do politopo do vetor de estados com o politopo do sinal de controle ($\mathcal{X} \times \mathcal{U}$). A representação utilizada neste trabalho será do tipo (2.9)-(2.13)-(2.14), com isso, uma nova definição de $\Pi_2(x, \delta)$ pode ser necessária, de forma que a equação (2.13) seja atendida.

Como exemplo, considere o sistema (2.15)

$$\dot{x} = a_1x + a_2\delta x^2 + a_3x^3 + \frac{a_4x^2u}{1+x} \quad (2.15)$$

escolhendo o vetor π da seguinte forma,

$$\pi = \begin{bmatrix} \delta x & x^2 & \frac{xu}{1+x} \end{bmatrix}^T,$$

tem-se o sistema (2.15) na forma (2.9)-(2.13) com as matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_2x & a_3x & a_4x \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix},$$

$$\Pi_d = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -(1+x) \end{bmatrix}.$$

2.4 Mudança de Variáveis para Não Linearidades Trigonômicas

Através de uma mudança de variáveis pode-se representar não linearidades trigonométricas na forma racional (ROHR *et al.*, 2009). Aplicando a seguinte mudança de variável,

$$\theta = 2\arctan(r), \quad (2.16)$$

as relações (2.17)-(2.19) são válidas

$$\text{sen}\theta = \frac{2r}{1+r^2}, \quad (2.17)$$

$$\text{cos}\theta = \frac{1-r^2}{1+r^2}, \quad (2.18)$$

$$\text{tan}\theta = \frac{2r}{1-r^2}. \quad (2.19)$$

Como exemplo, considere a equação diferencial com não linearidades trigonométricas (2.20),

$$\dot{\theta} = \frac{\theta}{2} + \text{sen}\theta. \quad (2.20)$$

Aplicando a mudança de variável (2.16), o sistema (2.10) pode ser representado na forma (2.21)

$$\dot{r} = \frac{5r}{4} + \frac{r^3}{4}. \quad (2.21)$$

2.5 Análise de Estabilidade

Nesta seção, será apresentada a Teoria de Lyapunov, que é uma ferramenta utilizada para a análise de estabilidade de um sistema dinâmico linear ou não linear, bem como para a síntese de controladores que garantem a estabilidade de um sistema em malha fechada.

2.5.1 Teoria de Estabilidade de Lyapunov

Considere um sistema não linear autônomo,

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.22)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados do sistema e $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ é uma função contínua. Considera-se \bar{x} um ponto de equilíbrio do sistema se, $f(\bar{x}) = 0$, $\bar{x} \in \mathcal{X}$. A definição apresentada a seguir formaliza os conceitos de estabilidade e estabilidade assintótica em torno de um ponto de equilíbrio do sistema. Supõe-se que a origem é um ponto de equilíbrio do sistema ($\bar{x} = 0$),

visto que todo ponto de equilíbrio pode ser transladado para a origem com uma mudança de variáveis (KHALIL, 2002).

Definição 2.5.1 *O ponto de equilíbrio $\bar{x} = 0$ de (2.22) é*

1. *Estável se, para um $\varepsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$$

Como ilustrado na Figura 4.

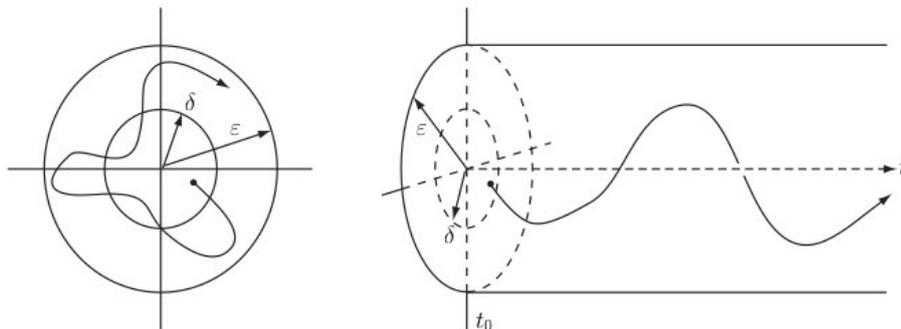
2. *Assintoticamente estável se é estável e δ pode ser escolhido tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Como ilustrado na Figura 5.

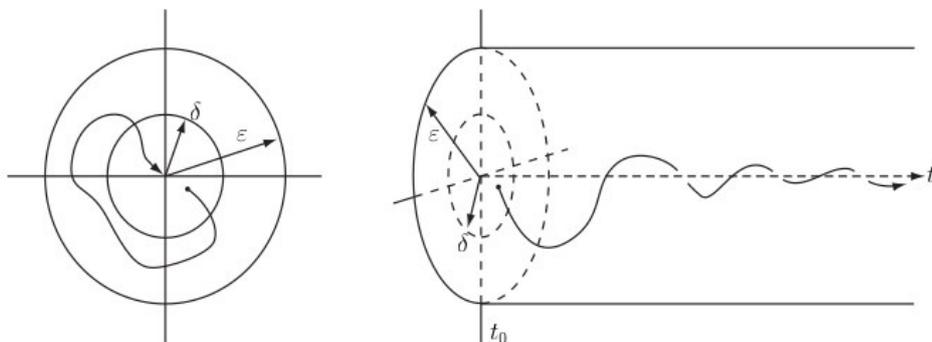
3. *Instável se não é estável.*

Figura 4 – Ponto de Equilíbrio Estável.



Fonte: (HADDAD; CHELLABOINA, 2011).

Figura 5 – Ponto de Equilíbrio Assintoticamente Estável.



Fonte: (HADDAD; CHELLABOINA, 2011).

O teorema a seguir, apresentado em Khalil (2002), desenvolve as condições para a análise de estabilidade do sistema (2.22).

Teorema 2.5.1 *Seja $\bar{x} = 0$ um ponto de equilíbrio de (2.22) e $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ um domínio contendo $\bar{x} = 0$. Seja $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável tal que*

$$V(0) = 0 \text{ e } V(x) > 0 \text{ em } \mathcal{X} - \{0\}, \quad (2.23)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ em } \mathcal{X}. \quad (2.24)$$

Então, $\bar{x} = 0$ é estável. Além disso, se

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ em } \mathcal{X} - \{0\} \quad (2.25)$$

então $\bar{x} = 0$ é assintoticamente estável.

Prova: (KHALIL, 2002).

As funções de Lyapunov podem ser escolhidas de forma arbitrária de acordo com cada sistema. Porém, a função quadrática $V(x) = x^T P x$, $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é bastante utilizada tanto em sistemas lineares como em sistemas não lineares devido à simplicidade no desenvolvimento das condições de estabilidade. Apesar disso, a utilização desse tipo de função pode gerar um conservadorismo nas condições (TROFINO; DEZUO, 2014).

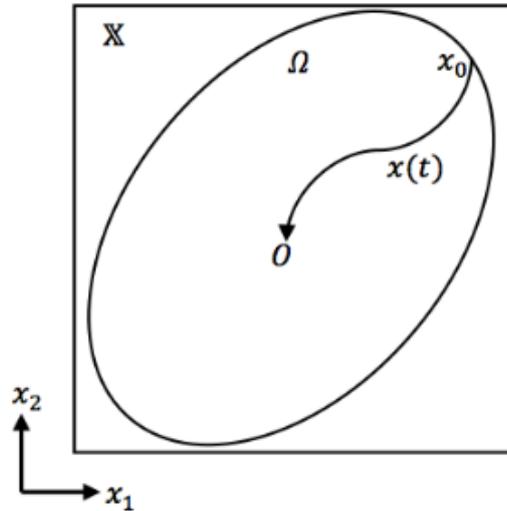
2.5.2 Domínio de Atração

O domínio de atração pode ser descrito como a região de um sistema no qual qualquer trajetória iniciando dentro dela irá convergir assintoticamente para a origem do sistema (ponto de equilíbrio) sem nunca sair dessa região. Utilizando o Teorema de Lyapunov, apresentado na seção 2.5.1, é possível obter estimativas da região correspondente ao domínio de atração de um sistema (KHALIL, 2002). Isto é, definindo a seguinte região,

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) \leq 1\} \subset \mathcal{X}, \quad (2.26)$$

onde $V(x)$ e \mathcal{X} são, respectivamente, a função e o domínio considerados no Teorema 2.5.1, e $\dot{V}(x) < 0$, $\forall x$ em $\mathcal{X} - \{0\}$, pode-se afirmar que a região Ω é uma estimativa do domínio de atração do sistema (2.22), ou seja, qualquer trajetória iniciando dentro de Ω irá convergir assintoticamente para a origem do sistema sem nunca sair de Ω , como mostrado na Figura 6.

Figura 6 – Domínio de Atração.



Fonte: (AZIZI, 2017).

2.6 Teoria da Dissipatividade

A teoria da dissipatividade investiga as propriedades de entrada-saída relacionadas à conservação, dissipação e transporte de massa e energia de um sistema dinâmico. Na engenharia de controle, a teoria da dissipatividade aparece como uma alternativa para realizar análises de estabilidade e projetos de controle de sistemas dinâmicos. Exemplos comuns de sistemas dissipativos são circuitos elétricos e sistemas mecânicos, estes tipos de sistema podem entregar uma fração da sua energia para seu exterior e podem armazenar uma fração da energia fornecida a eles. A definição formal da dissipatividade para sistemas dinâmicos é apresentada como uma inequação envolvendo duas funções (HADDAD; CHELLABOINA, 2011),

1. A taxa de suprimento $r(u(t), y(t))$, que é a entrada de energia do sistema via força externa.
2. A função energia $V(x)$, que mede a quantidade de energia armazenada no sistema.

A seguir, serão apresentadas algumas definições matemáticas envolvendo dissipatividade, de Brogliato *et al.* (2020), que serão utilizadas posteriormente neste trabalho. Considere o sistema (2.1)-(2.2), apresentado na seção 2.1, com $\delta = 0$

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t), \quad (2.27)$$

$$y(t) = h(x(t)) = Cx(t). \quad (2.28)$$

Definição 2.6.1 O sistema dinâmico (2.27)-(2.28) é dito dissipativo se existe uma função energia $V(x) \geq 0$ tal que a seguinte inequação da dissipatividade seja válida

$$\dot{V}(x) \leq r(u, y), \quad (2.29)$$

para todas as possíveis trajetórias de (2.27)-(2.28) iniciando em $x(0)$, para todo $x(0)$, $t \geq 0$.

Definição 2.6.2 O sistema dinâmico (2.27)-(2.28) é dito QSR-dissipativo se é dissipativo com a seguinte taxa de suprimento

$$\dot{V}(x) \leq r(u, y) = y^\top Qy + 2y^\top Su + u^\top Ru, \quad (2.30)$$

onde Q e R são simétricas.

Definição 2.6.3 O sistema dinâmico (2.27)-(2.28) é dito estritamente QSR-dissipativo se é QSR-dissipativo e existe uma função $T(x) > 0$ tal que

$$\dot{V}(x) + T(x) \leq y^\top Qy + 2y^\top Su + u^\top Ru, \quad (2.31)$$

onde Q e R são simétricas.

De acordo com o sistema (2.27)-(2.28), (Q, S, R) são matrizes reais tais que $Q \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $S \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

A teoria da dissipatividade pode ser relacionada ao teorema de Lyapunov, apresentado na seção 2.5.1. Considerando a função energia ($V(x) > 0$) como uma função de Lyapunov, pode-se dizer que, se $Q \leq 0$ em (2.30), então a origem do sistema (2.27)-(2.28) não controlado ($u(t) \equiv 0$) é estável por Lyapunov. No caso da QSR-dissipatividade estrita, se $Q \leq 0$ em (2.31), então o sistema sem controle é assintoticamente estável (HADDAD; CHELLABOINA, 2011).

3 ESTRATÉGIA DE ESTABILIZAÇÃO ASSINTÓTICA ROBUSTA

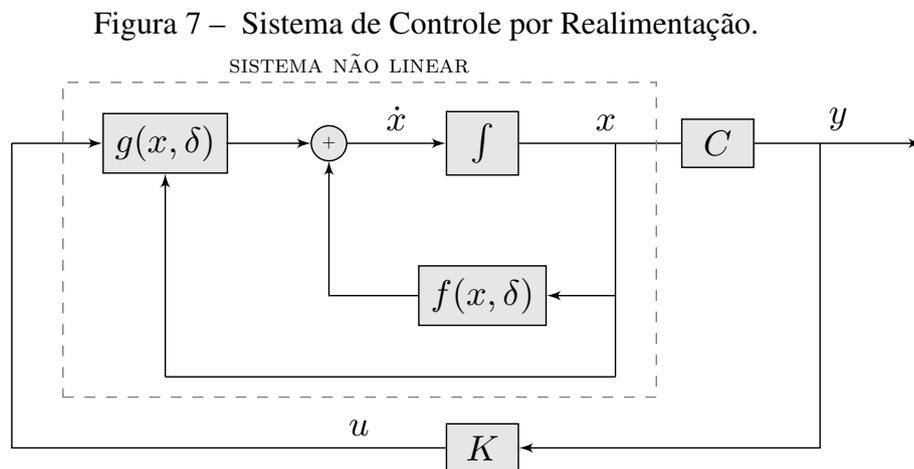
Neste capítulo, será apresentada a estratégia utilizada neste trabalho para a estabilização assintótica robusta de sistemas não lineares, polinomiais ou racionais, por meio de uma realimentação estática de estados, ou de saída. Essa técnica foi inicialmente desenvolvida em Madeira (2018) e estendida para o caso da estabilização robusta com a estimação do domínio de atração do sistema em Madeira e Viana (2020). São definidas condições LMIs utilizando a representação algébrico-diferencial do sistema não linear e a teoria da dissipatividade, atrelada ao Lema de Finsler e à definição de aniquiladores lineares, para a resolução da problemática.

3.1 Formulação do Problema

Considera-se o sistema dinâmico não linear (2.1)-(2.2), apresentado na seção 2.1, e posto novamente neste capítulo por questão de melhor entendimento. A Figura 7 apresenta a estrutura para estabilização do sistema (3.1)-(3.2) por meio de um ganho estático de realimentação.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \delta(t)) + g(x(t), \delta(t))u(t), \quad (3.1)$$

$$y(t) = h(x(t)) = Cx(t). \quad (3.2)$$



Considera-se, também, a equação da representação algébrico-diferencial do sistema (3.1)-(3.2), apresentada na seção 2.3 e posta novamente neste capítulo para melhor entendimento,

$$\dot{x}(t) = A_1(x, \delta)x + A_2(x, \delta)\pi + A_3(x, \delta)u, \quad (3.3)$$

$$0 = \Pi_d(x_d, \delta)x_d + \Pi_2(x, \delta)\pi, \quad (3.4)$$

com

$$x_d^\top = \begin{bmatrix} x^\top & u^\top \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

Durante a resolução da problemática, é preciso verificar se o sistema atende a condição de dissipatividade. Utilizando a definição de QSR-dissipatividade estrita, apresentada na seção 2.6, para o sistema (3.1)-(3.2), a condição da dissipatividade pode ser definida da seguinte forma,

$$t(x, u, \delta) = -\nabla V(x)^\top [f(x, \delta) + g(x, \delta)u] - T(x) + h(x)^\top Qh(x) + 2h(x)^\top Su + u^\top Ru \geq 0, \quad (3.6)$$

para todo $(x, u, \delta) \in (\mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{D})$.

O sistema 3.1-3.2 é *localmente estritamente QSR-dissipativo* (POTA; MOYLAN, 1993) se esta inequação for atendida para todo $(x, u, \delta) \in (\mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{D})$. São consideradas funções de Lyapunov quadráticas $V(x)$ na qual são independentes das incertezas δ ,

$$V(x) = x^\top Px, \quad P > 0, \quad (3.7)$$

onde a seguinte elipsoide pode ser definida (ROHR *et al.*, 2009)

$$\mathcal{E}(P, 1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n; x^\top Px \leq 1 \right\}, \quad (3.8)$$

que será usada para estimar o domínio de atração do sistema em malha fechada. A função $T(x)$ também é restrita a ser quadrada

$$T = x^\top Nx, \quad N > 0. \quad (3.9)$$

A condição da dissipatividade (3.6) será descrita na forma de desigualdade matricial linear, para isso, é utilizado o Lema de Finsler (Lema 3.1.1) e a definição de aniquiladores. De Trofino e Dezuo (2014), a seguinte versão do Lema de Finsler é apresentada.

Lema 3.1.1 *Considere $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^{n_s}$ um dado conjunto politópico, e sejam $Q_d : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$ e $C_d : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^{n_r \times n_q}$ funções matriciais, com Q_d simétrica. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras*

- (i) $\forall w \in \mathcal{W}$ a condição $z^\top Q_d(w)z > 0$ é satisfeita $\forall z \in \mathbb{R}^{n_q} : C_d(w)z = 0$.
- (ii) $\forall w \in \mathcal{W}$ existe uma certa função matricial $L : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^{n_q \times n_r}$ tal que $Q_d(w) + L(w)C_d(w) + C_d(w)^\top L^\top(w) > 0$.

Se Q_d e C_d são funções afim de w , e L é uma matriz constante a ser determinada, então (ii) se torna uma condição LMI politópica que é suficiente para (i). De acordo com a notação adotada neste trabalho, tem-se

$$w^\top = \begin{bmatrix} x_d^\top & \delta^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^\top & u^\top & \delta^\top \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\mathcal{X}_d = (\mathcal{X} \times \mathcal{U}), \quad \mathcal{W} = (\mathcal{X}_d \times \mathcal{D}), \quad (3.11)$$

$$n_s = n_d + l = n + m + l, \quad n_r = n_\pi, \quad (3.12)$$

$$n_q = n_d + n_\pi = n + m + n_\pi. \quad (3.13)$$

Também de Trofino e Dezuo (2014), a definição a seguir é essencial para o desenvolvimento da problemática.

Definição 3.1.1 *Dada uma função $\hat{l} : \mathbb{R}^{n_q} \rightarrow \mathbb{R}^{n_v}$ e um inteiro positivo n_r , uma função matricial $\mathcal{N}_{\hat{l}} : \mathbb{R}^{n_q} \rightarrow \mathbb{R}^{n_r \times n_v}$ é um aniquilador de \hat{l} se*

$$\mathcal{N}_{\hat{l}}(z) \hat{l}(z) = 0, \quad (3.14)$$

$\forall z \in \mathbb{R}^{n_q}$ de interesse. Em adição, se $\mathcal{N}_{\hat{l}}$ é uma função linear, então é chamada de aniquilador linear.

Como em Trofino e Dezuo (2014), suponha que $\hat{l}(z) = z = [z_1 \dots z_{n_q}]^\top \in \mathbb{R}^{n_q}$. Então, considerando todos os possíveis pares (z_i, z_j) para $i \neq j$ sem repetição, i.e. para todo admissível $\forall (i, j)$ ($j > i$), uma expressão geral para um aniquilador linear pode ser definida da seguinte forma

$$\mathcal{N}_{\hat{l}}(z) = \begin{bmatrix} \Phi_1(z) & Y_1(z) \\ \vdots & \vdots \\ \Phi_{(n_q-1)}(z) & Y_{(n_q-1)}(z) \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

onde

$$\begin{aligned} Y_i(z) &= -z_i I_{(n_q-i)}, \quad i \in \mathbb{I}_{(n_q-1)}, \\ \Phi_1(z) &= [z_2 \dots z_{n_q}]^\top, \\ \Phi_i(z) &= \begin{bmatrix} & z_{(i+1)} \\ & \vdots \\ 0_{(n_q-i) \times (i-1)} & z_{n_q} \end{bmatrix}, \quad i \in \{2, \dots, n_q - 1\}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$\mathcal{N}_{\hat{l}}(z) \in \mathbb{R}^{n_r \times n_q}$ com $n_r = \sum_{j=1}^{n_q-1} j$.

Percebe-se que $\hat{l}(z) = z$ é um vetor muito simples para o qual o aniquilador linear pode ser facilmente encontrado. Já para as equações da representação algébrica diferencial (3.3)-(3.4), deve-se determinar um $\mathcal{N}_{\hat{l}}$ para um vetor

$$\hat{l}(w) = \hat{l}(x_d, \delta) = \begin{bmatrix} x_d \\ \pi \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

contendo linearidades e não linearidades em x e δ que podem deixar o vetor $\hat{l}(w)$ mais complexo e, conseqüentemente, a definição do aniquilador linear pode se tornar mais desafiadora. Para mais detalhes, um procedimento sistemático para determinar aniquiladores lineares é apresentado em Trofino e Dezuo (2014).

A seguir, a condição da dissipatividade (3.6) pode ser decomposta da seguinte maneira

$$t(x_d, \delta) = \pi_d^\top Q_d \pi_d, \quad (3.18)$$

com

$$\pi_d = \begin{bmatrix} x_d \\ \pi \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

onde Q_d é simétrica, afim em (x, δ) , e linear em todos os coeficientes desconhecidos de (Q, S, R, P, N) para (x, δ) fixo. O vetor $\pi(x_d, \delta)$ é a base para que seja possível representar (3.1)-(3.2) na forma algébrica diferencial (3.3)-(3.4) e a condição da dissipatividade $t(x_d, \delta)$ como em (3.6). Percebe-se que a função matricial $Q_d(x, \delta)$ contém todas as variáveis a serem determinadas para garantir a dissipatividade local de (3.1)-(3.2) para todo $\delta \in \mathcal{D}$, e em $t(x_d, \delta)$, todos os termos polinomiais e racionais são restritos ao vetor π . Do Lema de Finsler, $C_d(x_d, \delta)$ é um aniquilador de π_d , que pode ser definido como

$$C_d(x_d, \delta) = \begin{bmatrix} \Pi_d(x_d, \delta) & \Pi_2(x, \delta) \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

As matrizes $\Pi_d(x_d, \delta)$ e $\Pi_2(x, \delta)$ não são únicas, o que significa que elas determinam somente uma em muitas soluções para o problema. Devido a isso, é definido um aniquilador extra de π_d , $R_{\pi_d}(x, \delta) \in \mathbb{R}^{s \times n_q}$, sendo um grau de liberdade a mais para aliviar o impacto da não unicidade das matrizes $\Pi_d(x_d, \delta)$ e $\Pi_2(x, \delta)$. Essa técnica é utilizada para diminuir o conservadorismo da condição (TROFINO; DEZUO, 2014). E um novo aniquilador pode ser

definido como:

$$Z_d(x_d, \delta) = \begin{bmatrix} C_d(x_d, \delta) \\ R_{\pi_d}(x, \delta) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

3.2 Síntese do Controlador

Nesta seção, é apresentado o teorema principal de Madeira e Viana (2020) que aborda a análise de dissipatividade local e o problema de síntese de controle para a estabilização assintótica local de um sistema não linear polinomial ou racional.

No teorema apresentado em Madeira e Viana (2020), é utilizado o aniquilador linear C_d . Já neste trabalho, em busca de diminuir o conservadorismo da condição e atingir resultados melhores, considerou-se um aniquilador diferente do utilizado em Madeira e Viana (2020). Foi considerado o aniquilador linear Z_d que contém tanto o aniquilador C_d quanto um aniquilador extra do vetor π_d .

Teorema 3.2.1 *Considere um sistema dinâmico incerto não linear (polinomial ou racional) (3.3)-(3.4)-(3.2) com o ponto de equilíbrio em $(x, u) = (0, 0)$. Sejam $(x, \delta) \in \mathcal{X} \times \mathcal{D}$ um politopo ao redor de $(x, \delta) = (0, 0)$, com \mathcal{X} descrito por (2.3). Para matrizes reais (Q, S, R) e funções positivas V e T dadas por (3.7) e (3.9), com P e N reais, tem-se uma decomposição adequada (3.18)-(3.19) da condição da dissipatividade (3.6). Com o aniquilador linear Z_d dado por (3.21), suponha que a seguinte LMI é factível para todo (x, δ) nos vértices de $\mathcal{X} \times \mathcal{D}$*

$$Q_d + L_d Z_d + Z_d^\top L_d^\top > 0, \quad (3.22)$$

para uma matriz real constante L_d , e para um conjunto de coeficientes reais (Q, S, R, P, N) com,

$$P > 0, \quad N > 0. \quad (3.23)$$

Se $\Delta \geq 0$, onde

$$\Delta = SR^{-1}S^\top - Q, \quad (3.24)$$

e ao mesmo tempo

$$\begin{bmatrix} P & a_k \\ a_k^\top & 1 \end{bmatrix} \geq 0, \text{ para todo } k = 1, \dots, n_{xe}, \quad (3.25)$$

Então o seguinte ganho de realimentação

$$u = Ky, \quad K = -R^{-1}S^\top, \quad (3.26)$$

estabiliza assintoticamente o sistema ao redor da origem, $\mathcal{E}(P,1) \subset \mathcal{X}$ e a elipsoide é uma estimativa do domínio de atração do sistema em malha fechada.

Prova: Primeiramente, para funções V e T de graus fixos (por exemplo, funções quadráticas), a condição da dissipatividade (3.6) pode ser sempre decomposta como em (3.19)-(3.20). Do Lema 3.1.1, $t(x_d, \delta) > 0$ para todo $(x_d, \delta) \in \mathcal{X}_d \times \mathcal{D}$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$, se a condição (3.22) é atendida em todos os vértices do politopo $\mathcal{X} \times \mathcal{D}$ para uma matriz constante L_d e para (Q, S, R, P, N) . Além disso, desde que $N > 0$, então o sistema é localmente estritamente QSR-dissipativo em $x_d \in \mathcal{X}_d$, para todo $\delta \in \mathcal{D}$. Com (3.26), $t(x_d, \delta) > 0$ significa que

$$\nabla V^\top [f - gR^{-1}S^\top h] < -T - h^\top \Delta h. \quad (3.27)$$

Se $\Delta \geq 0$, então a estabilidade assintótica é garantida para todo $(x, \delta) \in \mathcal{X} \times \mathcal{D}$, como pode-se verificar

$$\nabla V^\top [f - gR^{-1}S^\top h] = \nabla V^\top [f + gu] < 0. \quad (3.28)$$

De (3.25),

$$P - a_k a_k^\top \geq 0, \quad (3.29)$$

para todo $k = 1, \dots, n_{xe}$, e

$$(x^\top a_k)(a_k^\top x) \leq x^\top P x, \quad (3.30)$$

tal que se $x \in \mathcal{E}(P,1)$ então $x \in \mathcal{X}$, com $\dot{V} < 0$ dentro do politopo. Então, para todo $x(0) \in \mathcal{E}(P,1)$, a trajetória dos estados converge assintoticamente para a origem $x = 0$ sem deixar a região elipsoidal $\mathcal{E}(P,1)$.

Como o politopo \mathcal{X} tem n_x vértices e \mathcal{D} tem 2^l vértices, o politopo $\mathcal{X} \times \mathcal{D}$ tem $n_x \cdot 2^l$ vértices a serem testados.

Observação 3.2.1 Se Π_d não depende de u , a decomposição quadrática $\pi_d^\top Q_d \pi_d$ resulta em uma LMI politópica de (x, δ) que é factível para todo u , i.e. $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$.

Um programa linear SDP pode ser formulado para a síntese do ganho K que estabiliza a planta. De acordo com Madeira (2018), $\Delta \leq 0$ é uma condição necessária para estabilização nessa estrutura baseada em dissipatividade e é atendida se

$$M_d = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^\top & R \end{bmatrix} \geq 0. \quad (3.31)$$

Isto é equivalente a

$$\Delta = SR^{-1}S^\top - Q \leq 0, \quad (3.32)$$

onde $R = \beta I$, $\beta > 0$, pode ser adotado sem perda de generalidade. Por outro lado, a condição suficiente $\Delta \geq 0$ pode ser verificada se for definido um novo M_d da seguinte forma

$$M_d = \begin{bmatrix} Q + \alpha I & S \\ S^\top & R \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.33)$$

onde $\alpha > 0$ é um coeficiente real. Minimizando a função $tr(M_d)$ pode-se chegar a um $\Delta \geq 0$, como $tr(M_d) = 0 \Leftrightarrow M_d = 0$ (YANG, 1995) e (3.31) leva a

$$\Delta = SR^{-1}S^\top - Q \leq \alpha I. \quad (3.34)$$

3.2.1 Algoritmo para a Síntese do Controlador

1. Considere uma planta não linear dada por (3.1)-(3.2) e funções quadráticas V e T como em (3.7) e (3.9).
2. Após a substituição de (V, T) em (3.6), determine a decomposição (3.19)-(3.20) sujeita a (3.4)-(3.5), e aniquiladores lineares C_d e R_{π_d} .
3. Inicialize o politopo $\mathcal{X} \times \mathcal{D}$ em torno da origem e determine os n_{xe} vetores a_k que determinam o conjunto de hiperplanos.
4. Especifique um $\alpha > 0$ para a condição (3.33) e resolva o seguinte problema linear.

$$\text{minimize } tr(M_d), \quad (3.35)$$

$$\text{atendendo (3.22) para todos os vértices de } \mathcal{X} \times \mathcal{D}, \quad (3.36)$$

$$\text{e } M_d \geq 0, (3.23), (3.25). \quad (3.37)$$

Se factível, então (Q, S, R, P, N, L_p) é uma solução do problema.

5. Maiores domínios $\mathcal{X} \times \mathcal{D}$ podem ser obtidos retornando ao passo 3 e colocando maiores valores nos vértices do politopo até o passo 4 não ser factível.

Sendo este algoritmo factível, pode-se garantir que a planta é localmente estritamente QSR-dissipativa em um domínio $x \in \mathcal{X}$ para todo $\delta \in \mathcal{D}$. E caso seja atingido um $\Delta \geq 0$, também pode-se garantir a estabilidade assintótica da planta em malha fechada.

Todo o procedimento de projeto do controlador pode ser implementado no software MATLAB utilizando a ferramenta SDP chamada YALMIP (LOFBERG, 2004) e o resolvidor SeDuMi (STURM, 1999). Além disso, utilizando o Simulink é possível obter a simulação das respostas do sistema.

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

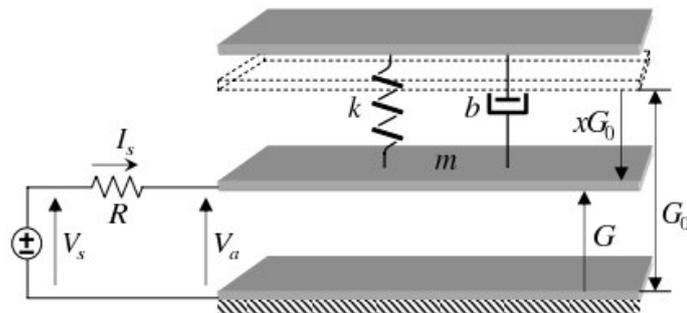
Neste capítulo, serão apresentados os resultados de simulação correspondentes à aplicação da metodologia de Madeira e Viana (2020) para a estabilização assintótica robusta de três sistemas não lineares, sendo dois sistemas reais e um teórico.

Na seção 4.1 será apresentado o primeiro exemplo que consiste em um sistema microeletromecânico que apresenta não linearidades polinomiais no seu modelo. Já na seção 4.2 será apresentado o segundo exemplo que consiste em um sistema teórico apresentando não linearidades polinomiais. E por fim, na seção 4.3 será apresentado o terceiro exemplo que consiste em um sistema de um pêndulo invertido, neste caso, o modelo apresenta não linearidades racionais.

4.1 Exemplo 1

O primeiro exemplo deste trabalho consiste na aplicação da estratégia em um sistema microeletromecânico, mostrado na Figura 8, conhecido como o atuador eletrostático de placas paralelas, onde o eletrodo superior é móvel e o inferior é fixo. Na Figura 8, m é a massa do eletrodo móvel, b é o coeficiente de amortecimento, k é constante elástica, A é a área entre dos eletrodos, G é o espaçamento entre as placas, G_0 é o espaçamento com a tensão zero, x é a deflexão normalizada e R é a resistência do loop.

Figura 8 – Atuador eletrostático de placas paralelas.



Fonte: (ZHU *et al.*, 2007).

Os sistemas microeletromecânicos (MEMS) são compostos por estruturas elétricas e mecânicas e são utilizados no desenvolvimento de sensores e atuadores com estruturas de tamanhos variando entre $1\mu m$ a $1mm$. As aplicações dos MEMS estão presentes em várias áreas, como por exemplo, no desenvolvimento de acelerômetros para airbags automotivos, sensores

de pressão arterial para cuidados de saúde, interruptores ópticos e matrizes para displays de comunicação e projeção (BRONSON, 2007).

De acordo com Edwards (2009), como exemplo de aplicação do sistema mostrado na Figura 8, pode-se citar o dispositivo de micro espelho digital utilizado em projeção de imagem. Esse dispositivo contém centenas de milhares de espelhos microscópicos que correspondem aos pixels da imagem. Os microespelhos funcionam com um processo de reflexão ou desvio de luz na direção da imagem, através da rotação do espelho, e utilizam o atuador eletrostático de placas paralelas para auxiliar na rotação dessas microestruturas. Os microespelhos acionados eletrostaticamente também podem ser utilizados em interruptores ópticos.

De acordo com Bronson (2007), muitos atuadores eletrostáticos apresentam uma instabilidade de pull-in que ocorre quando a força eletrostática gerada pelo atuador excede a força de restauração mecânica da estrutura e faz com que os membros mecânicos com carga oposta se juntem. Além disso, uma vez que os membros de carga oposta se juntam, esse efeito só vai ser revertido quando a tensão for menor que uma tensão de pull-in, o que é um obstáculo para a operação adequada do dispositivo.

Considera-se o modelo dinâmico em coordenadas normalizadas encontrado em Zhu *et al.* (2007)

$$\dot{x} = v, \quad (4.1)$$

$$\dot{v} = -2\zeta v - x + \frac{1}{3}q^2, \quad (4.2)$$

$$\dot{q} = -\frac{1}{r}q(1-x) + \frac{2}{3r}u_s, \quad (4.3)$$

onde x é a deflexão da placa, v é a velocidade da deflexão, q é a carga, u_s é a tensão do atuador (o sinal de controle), $\zeta > 0$ é a taxa de amortecimento, e r é a resistência do circuito de atuação. As equações (4.1)-(4.3) constituem o modelo normalizado do MEMS, i.e. todas as variáveis são normalizadas. Fisicamente, o movimento do atuador é limitado pelo eletrodo fixo, então o sistema (4.1)-(4.3) é definido no espaço de estados

$$\bar{\mathcal{X}} = \{(x, v, q) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq 1\}. \quad (4.4)$$

Para determinar os pontos de equilíbrio do sistema $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{q}, \bar{u}_s)$, primeiramente tem-se $\bar{v} = 0$, após isso, percebe-se que não há equilíbrio para $x < 0$ visto que a força eletrostática é sempre atrativa, então $\bar{x} \in [0, 1]$ e $\bar{q} = \pm\sqrt{3\bar{x}}$.

Erros nas medições da resistência do circuito de atuação e da taxa de amortecimento são passíveis de ocorrer, fazendo com que o modelo não seja uma representação fiel da realidade.

Por isso, foram adicionadas incertezas reais δ_1 e δ_2 nos parâmetros $\frac{1}{r}$ e ζ , respectivamente. Além disso, definindo $x_1 = x - \bar{x}$, $x_2 = v - \bar{v}$, $x_3 = q - \bar{q}$ e $u = u_s - \bar{u}_s$, obtém-se (4.5)-(4.7), que é uma versão transladada para a origem do modelo (4.1)-(4.3) com incertezas,

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (4.5)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2\zeta(1 + \delta_1)x_2 + \frac{2\bar{q}}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_3^2, \quad (4.6)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{r}(1 + \delta_2)\left(\bar{q}x_1 + x_1x_3 + (\bar{x} - 1)x_3 + \frac{2}{3}u\right), \quad (4.7)$$

$$y = x_3. \quad (4.8)$$

Considerou-se a carga no dispositivo como a saída do sistema ($y = x_3$) visto que facilmente o valor da carga pode ser deduzido com as informações de corrente de entrada, tensão no dispositivo e capacitância.

Neste trabalho, considera-se $\bar{x} = 0,2$ e $\bar{q} = +\sqrt{3\bar{x}} = 0,77$, então $-0,2 < x_1 < 0,8$. E os parâmetros físicos do sistema são iguais aos utilizados em Zhu *et al.* (2007), como na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros do MEMS

Parâmetro	Valor
r	1
ζ	0,1

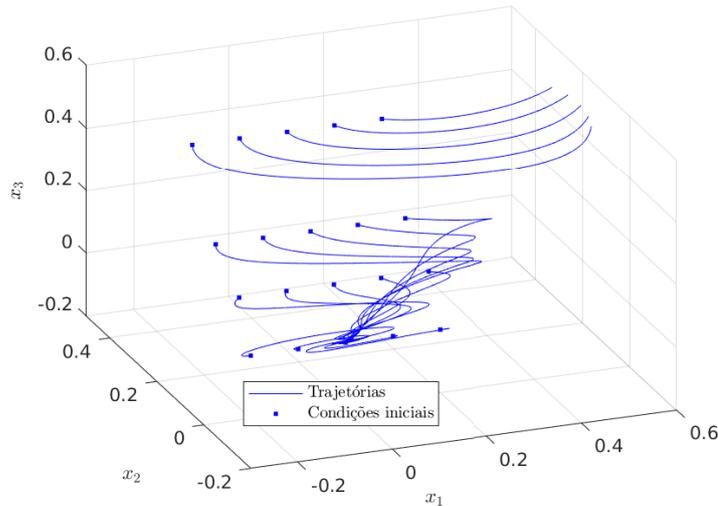
Fonte: (ZHU *et al.*, 2007)

Uma maneira de analisar o comportamento do sistema se dá através da análise das trajetórias dos estados para um conjunto de condições iniciais. A Figura 9 apresenta as trajetórias do sistema (4.5)-(4.8) em malha aberta, para condições iniciais próximas ao ponto de equilíbrio e incertezas $\delta_1 = 0,02$, $\delta_2 = 0,02$. Pode-se observar que para algumas condições iniciais, mesmo próximas do ponto de equilíbrio, o sistema se torna instável.

4.1.1 Projeto do Controlador

Aplicando uma realimentação de saída de acordo com o Teorema 3.2.1, pretende-se estabilizar o sistema (4.5)-(4.8) em torno da origem, i.e. $(x, u) = (0, 0)$, o que significa que o sistema nas coordenadas originais (x, v, q, u_s) é estabilizado em $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{q}, \bar{u}_s)$.

Figura 9 – Trajetórias do sistema em malha aberta.



Fonte: Autora.

Primeiramente, suponha que $V = x^\top P x$ e $T = x^\top N x$ são funções polinomiais tais que

$$V(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_4 & p_5 \\ p_3 & p_5 & p_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

$$T(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

onde $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$, (n_1, n_2, n_3) e (Q, S, R) são parâmetros reais a serem determinados. Substituindo (V, T, Q, S, R) e as equações (4.5)-(4.7) em (3.6), obtém-se a seguinte função na qual a não negatividade em um domínio politópico $\mathcal{X} \times \mathcal{D}$ tem que ser investigada, sendo $x_d = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ u]^T$ e $\delta = [\delta_1 \ \delta_2]^T$,

$$\begin{aligned} t(x_d, \delta) = & t_1 x_1^2 + t_2 x_1 x_2 + t_3 x_2^2 + t_4 x_1 x_3 + t_5 x_2 x_3 + t_6 x_3^2 + t_7 x_1 x_3^2 + t_8 x_2 x_3^2 \\ & + t_9 x_3^3 + t_{10}(1 + \delta_2)x_1 u + t_{11}(1 + \delta_2)x_2 u + t_{12}x_3 u + t_{13}\delta_2 x_3 u + t_{14}(1 + \delta_2)x_1^2 x_3 \\ & + t_{15}(1 + \delta_2)x_1 x_2 x_3 + t_{16}\delta_1 x_1 x_2 + t_{17}\delta_1 x_2^2 + t_{18}\delta_1 x_2 x_3 + t_{19}\delta_2 x_1^2 + t_{20}\delta_2 x_1 x_2 \\ & + t_{21}\delta_2 x_1 x_3 + t_{22}\delta_2 x_2 x_3 + t_{23}\delta_2 x_1 x_3^2 + t_{24}\delta_2 x_3^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

com

$$\begin{aligned}
t_1 &= 2p_2 - n_1 - \frac{2p_3\bar{q}}{r}, \quad t_2 = -2p_1 + 4\zeta p_2 + 2p_4 - \frac{2p_5\bar{q}}{r}, \quad t_3 = 4\zeta p_4 - 2p_2 - n_2, \\
t_4 &= 2p_5 - \frac{4p_2\bar{q}}{3} + \frac{2p_3}{r} - \frac{2p_6\bar{q}}{r} - \frac{2p_3\bar{x}}{r}, \quad t_5 = -2p_3 + 4\zeta p_5 + \frac{2p_5}{r} - \frac{4p_4\bar{q}}{3} - \frac{2p_5\bar{x}}{r} \\
t_6 &= Q - n_3 - \frac{4p_5\bar{q}}{3} + \frac{2p_6}{r} - \frac{2p_6\bar{x}}{r}, \quad t_7 = -\frac{2p_2}{3} - \frac{2p_6}{r}, \quad t_8 = -\frac{2p_4}{3}, \quad t_9 = -\frac{2p_5}{3}, \\
t_{10} &= -\frac{4p_3}{3r}, \quad t_{11} = -\frac{4p_5}{3r}, \quad t_{12} = -\frac{4p_6}{3r} + 2S, \quad t_{13} = -\frac{4p_6}{3r}, \quad t_{14} = -\frac{2p_3}{r}, \\
t_{15} &= -\frac{2p_5}{r}, \quad t_{16} = 4\zeta p_2, \quad t_{17} = 4\zeta p_4, \quad t_{18} = 4\zeta p_5, \quad t_{19} = -\frac{2p_3\bar{q}}{r}, \quad t_{20} = -\frac{2p_5\bar{q}}{r} \\
t_{21} &= -\frac{2p_6\bar{q}}{r} - \frac{2p_3\bar{x}}{r} + \frac{2p_3}{r}, \quad t_{22} = \frac{2p_5}{r} - \frac{2p_5\bar{x}}{r}, \quad t_{23} = -\frac{2p_6}{r}, \quad t_{24} = \frac{2p_6}{r} - \frac{2p_6\bar{x}}{r}.
\end{aligned}$$

Para a equação $\Pi_d x_d + \Pi_2 \pi = 0$, pode-se determinar vetor base π e as matrizes Π_d, Π_2 . O vetor π é dado por

$$\pi = \left[x_1 x_2 \quad x_1 x_3 \quad x_3^2 \quad \delta_2 x_1 \right]^\top,$$

e a seguinte combinação (Π_d, Π_2) é obtida

$$\Pi_d = \begin{bmatrix} x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ \delta_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

onde $\det(\Pi_2) \neq 0, \forall (x, \delta) \in \mathcal{X} \times \mathcal{D}$.

Com a determinação do vetor π , tem-se o seguinte vetor π_d de (3.19)

$$\pi_d = \left[x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad u \quad x_1 x_2 \quad x_1 x_3 \quad x_3^2 \quad \delta_2 x_1 \right]^\top,$$

então a matrix Q_d é dada por

$$Q_d = \begin{bmatrix} t_1 & \frac{t_2 + t_{16}\delta_1}{2} & \frac{t_4}{2} & \frac{t_{10}\Phi_3}{2} & 0 & \frac{t_{14}\Phi_3}{2} & \frac{t_7}{2} & \frac{t_{19}}{2} \\ \frac{t_2 + t_{16}\delta_1}{2} & t_3 + t_{17}\delta_1 & \Phi_1 & \frac{t_{11}\Phi_3}{2} & 0 & 0 & \frac{t_8}{2} & \frac{t_{20}}{2} \\ \frac{t_4}{2} & \Phi_1 & t_6 + t_{24}\delta_2 & \frac{t_{12} + t_{13}\delta_2}{2} & \frac{t_{15}\Phi_3}{2} & \frac{t_{23}\delta_2}{2} & \frac{t_9}{2} & \frac{t_{21}}{2} \\ \frac{t_{10}\Phi_2}{2} & \frac{t_{11}\Phi_2}{2} & \frac{t_{12} + t_{13}\delta_1}{2} & R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t_{15}\Phi_2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t_{14}\Phi_3}{2} & 0 & \frac{t_{23}\delta_2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t_7}{2} & \frac{t_8}{2} & \frac{t_9}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t_{19}}{2} & \frac{t_{20}}{2} & \frac{t_{21}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com

$$\Phi_1 = \frac{t_5 + t_{18}\delta_1 + t_{22}\delta_2}{2},$$

$$\Phi_2 = 1 + \delta_1,$$

$$\Phi_3 = 1 + \delta_2.$$

E o aniquilador linear R_{π_d} de π_d é dado por

$$R_{\pi_d} = \begin{bmatrix} -x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O problema SDP linear (3.35)-(3.36) envolve uma condição LMI politópica independente do sinal de controle (u) e será testado em uma região definida por

$$(\mathcal{X} \times \mathcal{D}) = \{(x, \delta) \mid |x_1| \leq 0,2, |x_2| \leq 1, |x_3| \leq 0,5, |\delta_1| \leq 0,02, |\delta_2| \leq 0,02\}, \quad (4.12)$$

para este politopo \mathcal{X} , tem-se os seguintes a_k em (3.33):

$$a_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo o algoritmo apresentado na seção 3.2.1 é possível determinar matrizes (Q, S, R, P, N, L_d) que garantem a factibilidade do problema e são necessárias para determinar o

ganho que estabiliza assintoticamente o sistema em um domínio $\mathcal{X} \times \mathcal{D}$. Então, fazendo $\alpha = 0.1$ em (3.33) e aplicando o algoritmo, obtém-se os seguintes valores

$$Q = 26,1231,$$

$$R = 0,3600,$$

$$S = 3,0672,$$

$$V(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 25,1374 & 0,3190 & -0,7248 \\ 0,3190 & 27,7048 & 0,7334 \\ -0,7248 & 0,7334 & 4,0408 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

$$T(x) = 10^{-7} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0,0677 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0875 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1491 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

$$L_d = \begin{bmatrix} -0,0371 & 0,5309 & -3,8532 & 0,6166 & -0,0268 & -0,6803 \\ 0,4838 & 0,4662 & -8,3805 & -0,8370 & 0,4935 & 0,0373 \\ -0,6181 & -0,2517 & 0,6343 & -3,6675 & -1,3470 & -0,1357 \\ 0,0558 & -0,0182 & -0,0019 & 0,0567 & 0,0593 & 0,0027 \\ -3,5500 & 0,8545 & -0,0108 & 0,7426 & -3,4874 & 0,0113 \\ 0,8163 & -4,3999 & 0,0879 & 0,4066 & 0,8958 & 0,1905 \\ 0,0528 & -0,0668 & -4,8826 & 0,0308 & 0,0529 & 0,0016 \\ 0,6490 & 0,2277 & -0,0367 & -4,2305 & 0,6486 & 0,0626 \end{bmatrix}$$

Com esses valores de (Q, S, R) obtém-se

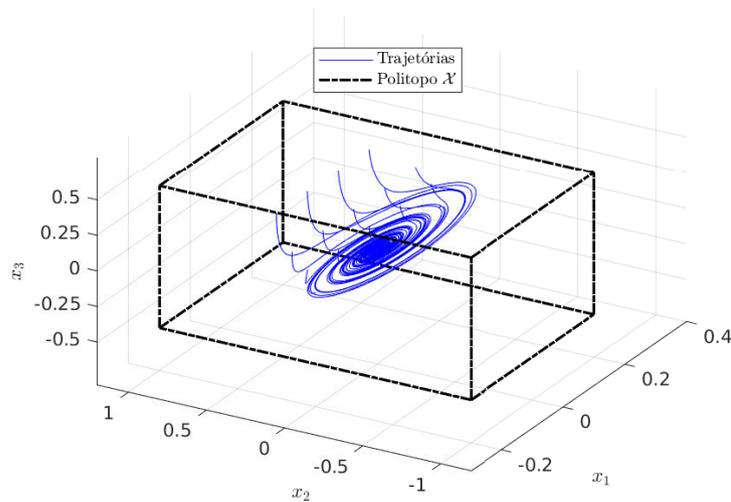
$$\Delta = SR^{-1}S^T - Q = 0,0099 > 0,$$

e a origem é assintoticamente estabilizável por uma realimentação linear de saída, onde

$$K = -R^{-1}S^T = -8,5201 \Rightarrow u = -8,5201x_3.$$

A Figura 10 apresenta as trajetórias do sistema (4.5)-(4.8) em malha fechada, ou seja, após a aplicação da realimentação de saída. As condições iniciais utilizadas nesta simulação são as mesmas utilizadas na Figura 9, e as incertezas são $\delta_1 = 0,02$, $\delta_2 = 0,02$. Percebe-se que o sistema foi estabilizado na região correspondente ao politopo \mathcal{X} . Visto que, no sistema em malha aberta, para algumas condições iniciais a trajetória do sistema não convergia. Já no sistema em malha fechada, para essas mesmas condições iniciais, o sistema converge para o ponto de equilíbrio.

Figura 10 – Trajetórias do sistema em malha fechada.

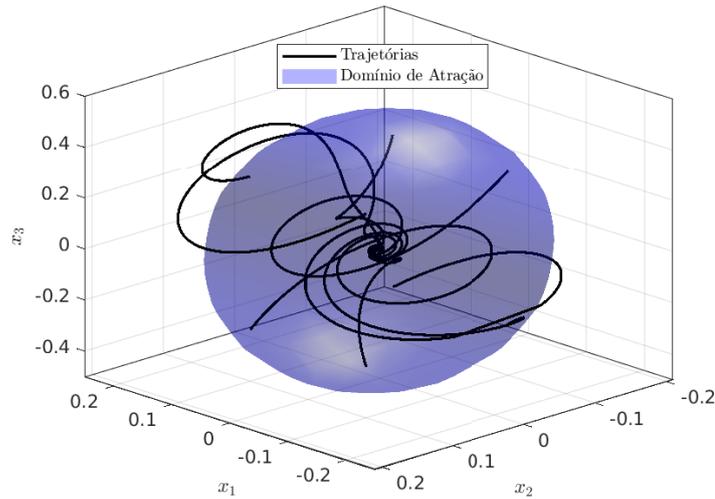


Fonte: Autora.

Outro ponto importante de se observar é o domínio de atração do sistema em malha fechada obtido através da metodologia. Qualquer trajetória iniciando dentro da região correspondente a esse domínio deverá convergir para a origem sem sair dessa região. A Figura 11, mostra a elipsoide da estimativa do domínio de atração do sistema ($x^T P x \leq 1$) e as trajetórias do sistema em malha aberta para algumas condições iniciais dentro da elipsoide. Percebe-se que, para o conjunto de condições iniciais o sistema permanece estável. Entretanto, as trajetórias deixam a região correspondente ao domínio de atração.

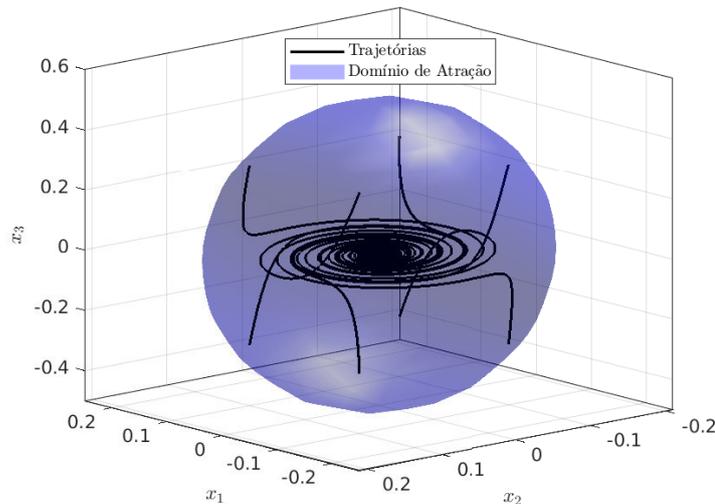
Já a Figura 12 apresenta, também, a estimativa do domínio de atração do sistema em malha fechada e as trajetórias do sistema em malha fechada para algumas condições iniciais dentro do domínio de atração. Pode-se observar que todas as trajetórias convergiram para a origem do sistema sem deixar a região correspondente ao domínio de atração. Com isso, pode-se afirmar que o domínio de atração do sistema em malha fechada, é maior que o domínio de atração do sistema em malha aberta.

Figura 11 – domínio de atração e trajetórias em malha aberta.



Fonte: Autora.

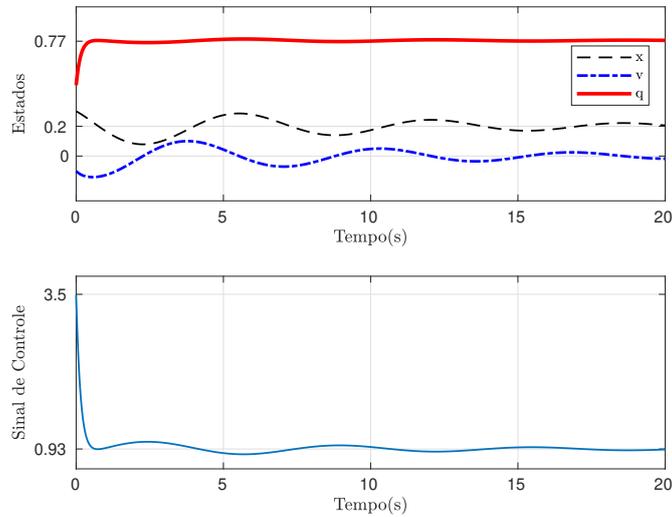
Figura 12 – Domínio de atração e trajetórias em malha fechada.



Fonte: Autora.

Uma outra maneira de analisar a resposta de um sistema é através da resposta no tempo de cada estado e do sinal de controle. A Figura 13 apresenta a resposta no tempo do sistema em malha fechada para $x_1 = 0,1, x_2 = -0,1, x_3 = 0,3, \delta_1 = 0,02, \delta_2 = 0,02$, ou seja, $x = 0,3, v = -0,1, q = 1,07, \delta_1 = 0,02, \delta_2 = 0,02$ no sistema de coordenadas original. Pode-se observar que os três estados e o sinal de controle convergiram para o ponto de equilíbrio do sistema original $(0,2, 0, 0,77, 0,93)$.

Figura 13 – Resposta no tempo do sistema em malha fechada.



Fonte: Autora.

4.2 Exemplo 2

O segundo exemplo deste trabalho consiste na estabilização assintótica local de um sistema teórico analisado em Baldi (2016). Em busca de tratar a estabilização robusta, foram adicionadas duas incertezas reais no sistema. As equações de estado do sistema são dadas por,

$$\dot{x}_1 = -x_1 + (1 + \delta_1)x_1x_2 + x_2u, \quad (4.13)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 + (1 + \delta_2)x_1^2 + x_1^2x_2 + u, \quad (4.14)$$

$$y = x_2, \quad (4.15)$$

A Figura 14 apresenta as trajetórias do sistema em malha aberta do sistema (4.13)-(4.14) para algumas condições iniciais próximas ao ponto de equilíbrio ($x = 0, u = 0$). Percebe-se que o sistema é bastante instável.

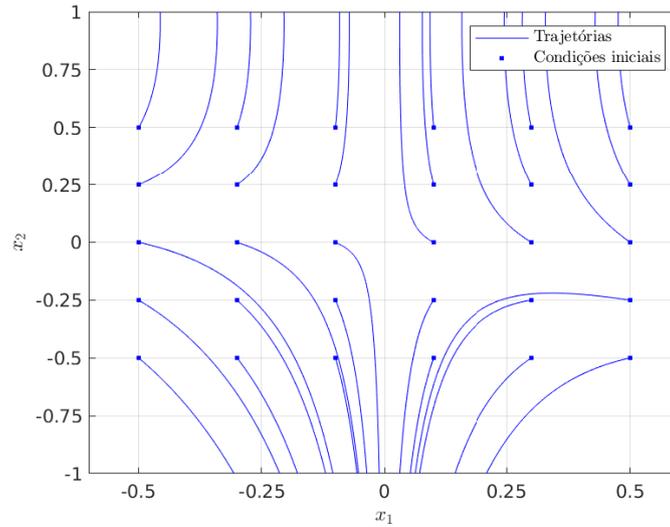
4.2.1 Projeto do Controlador

Aplicando uma realimentação de saída, de acordo com o Teorema 3.2.1, pretende-se estabilizar o sistema (4.13)-(4.15) em torno da origem, i.e. $(x, u) = (0, 0)$.

Primeiramente, suponha que $V = x^\top Px$ e $T = x^\top Nx$ são funções polinomiais tais que

$$V(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

Figura 14 – Trajetórias do sistema em malha aberta.



Fonte: Autora.

$$T(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

onde (p_1, p_2, p_3) , (n_1, n_2, n_3) e (Q, S, R) são parâmetros reais a serem determinados. Substituindo (V, T, Q, S, R) e as equações (4.13)-(4.15) em (3.6), obtém-se a seguinte função na qual a não negatividade em um domínio politópico $\mathcal{X} \times \mathcal{D}$ tem que ser investigada, sendo $x_d = [x_1 \ x_2 \ u]^T$ e $\delta = [\delta_1 \ \delta_2]^T$

$$\begin{aligned} t(x_d, \delta) = & t_1 x_1^2 + t_2 x_1 x_2 + t_3 x_2^2 + t_4 x_2 u \\ & + t_5 x_1 u + R u^2 + t_6 x_1^2 x_2 + t_5 x_1 x_2^2 + t_5 x_1^3 \\ & + t_5 x_1^3 x_2 + t_7 x_1^2 x_2^2 + t_8 x_1 x_2 u + t_5 x_2^2 u \\ & + t_8 \delta_1 x_1^2 x_2 + t_5 \delta_1 x_1 x_2^2 + t_5 \delta_2 x_1^3 + t_7 \delta_2 x_1^2 x_2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

com

$$t_1 = -2p_2 - n_1 + 2p_1, t_2 = 2p_2 - 2n_2 - 2p_3 - 4p_2$$

$$t_3 = -n_3 - 4p_3 + Q, t_4 = 2S - 2p_3, t_5 = -2p_2,$$

$$t_6 = -2p_1 - 2p_3, t_7 = -2p_3, t_8 = -2p_1.$$

Para a equação $\Pi_d x_d + \Pi_2 \pi = 0$, pode-se determinar vetor base π e as matrizes Π_d, Π_2 . O vetor π é dado por

$$\pi = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_2 u \end{bmatrix}^\top, \quad (4.19)$$

e a seguinte combinação (Π_d, Π_2) é obtida

$$\Pi_d = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{bmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

onde $\det(\Pi_2) \neq 0, \forall (x, \delta) \in \mathcal{X} \times \mathcal{D}$.

Com a determinação do vetor π , tem-se o seguinte vetor π_d de (3.19)

$$\pi_d = [x_1 \quad x_2 \quad u \quad x_1^2 \quad x_1x_2 \quad x_2u]^\top, \quad (4.20)$$

então a matrix Q_d é dada por

$$Q_d = \begin{bmatrix} t_1 & \frac{t_2}{2} & \frac{t_5}{2} & \frac{t_5(1+\delta_2)}{2} & \Phi & \frac{t_8}{2} \\ \frac{t_2}{2} & t_3 & \frac{t_4}{2} & \frac{t_6+t_7x_2}{2} & \frac{t_5(1+\delta_1)}{2} & \frac{t_5}{2} \\ \frac{t_5}{2} & \frac{t_4}{2} & R & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t_5(1+\delta_2)}{2} & \frac{t_6+t_7x_2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi & \frac{t_5(1+\delta_1)}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t_8}{2} & \frac{t_5}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com

$$\Phi = \frac{t_5x_1 + t_8\delta_1 + t_7\delta_2}{2}.$$

E o aniquilador linear R_{π_d} de π_d é dado por

$$R_{\pi_d} = \begin{bmatrix} -x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x_2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

O problema SDP linear (3.35)-(3.36) envolve uma condição LMI politópica independente do sinal de controle (u) e será testado em uma região definida por

$$(\mathcal{X} \times \mathcal{D}) = \{(x, \delta) \mid |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1, |\delta_1| \leq 0,1, |\delta_2| \leq 0,1\}, \quad (4.21)$$

para este politopo \mathcal{X} , tem-se os seguintes a_k em (3.33):

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} -0,625 \\ 0 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} 0,625 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo o algoritmo apresentado na seção 3.2.1 é possível determinar matrizes (Q, S, R, P, N, L_d) que garantem a factibilidade do problema e são necessárias para determinar o ganho que estabiliza assintoticamente o sistema em um domínio $\mathcal{X} \times \mathcal{D}$. Então, fazendo $\alpha = 0,01$ em (3.33) e aplicando o algoritmo, obtém-se os seguinte valores

$$Q = 20,2819,$$

$$R = 0,045,$$

$$S = 0,9556,$$

$$V(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0,4028 & -0,1122 \\ -0,1122 & 1,0312 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$T(x) = 10^{-7} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0,0346 & 0,0132 \\ 0,0132 & 0,2075 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$L_d = \begin{bmatrix} -0,0371 & 0,5309 & -3,8532 & 0,6166 & -0,0268 & -0,6803 \\ 0,4838 & 0,4662 & -8,3805 & -0,8370 & 0,4935 & 0,0373 \\ -0,6181 & -0,2517 & 0,6343 & -3,6675 & -1,3470 & -0,1357 \\ 0,0558 & -0,0182 & -0,0019 & 0,0567 & 0,0593 & 0,0027 \\ -3,5500 & 0,8545 & -0,0108 & 0,7426 & -3,4874 & 0,0113 \\ 0,8163 & -4,3999 & 0,0879 & 0,4066 & 0,8958 & 0,1905 \\ 0,0528 & -0,0668 & -4,8826 & 0,0308 & 0,0529 & 0,0016 \\ 0,6490 & 0,2277 & -0,0367 & -4,2305 & 0,6486 & 0,0626 \end{bmatrix}.$$

Com esses valores de (Q, S, R) obtém-se

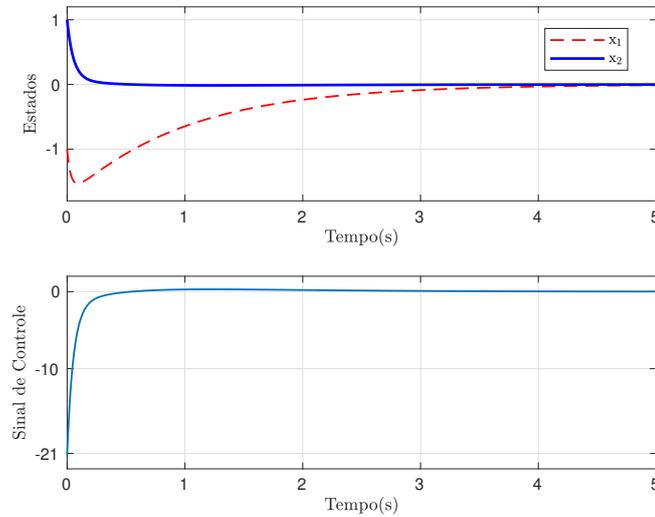
$$\Delta = SR^{-1}S^T - Q = 0,01 > 0,$$

e a origem é assintoticamente estabilizável por uma realimentação linear de saída, onde

$$K = -R^{-1}S^T = -21,2352 \Rightarrow u = -21,2352x_2.$$

A Figura 15 apresenta a resposta no tempo do sistema em malha fechada para $x_1 = -1, x_2 = 1, \delta_1 = 0,05, \delta_2 = -0,08$. Pode-se observar que os dois estados e o sinal de controle convergiram para a origem do sistema (ponto de equilíbrio).

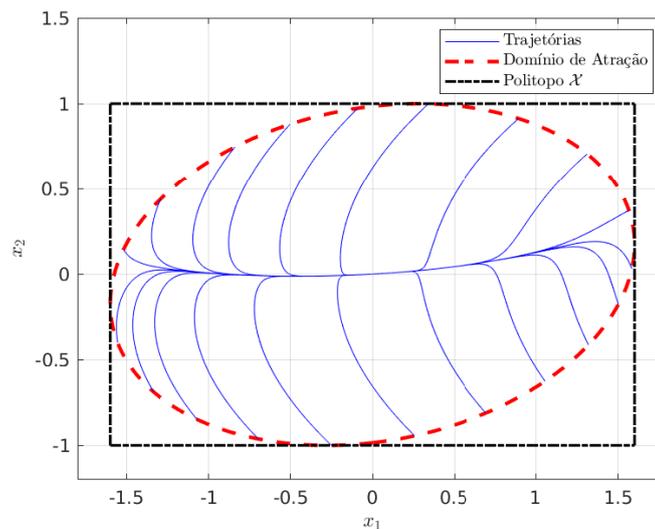
Figura 15 – Resposta no tempo do sistema em malha fechada.



Fonte: Autora.

A Figura 16 mostra as trajetórias em malha fechada do sistema (4.13)-(4.15). Com isso, percebe-se que o sistema foi estabilizado assintoticamente em uma região em torno do ponto de equilíbrio por uma realimentação estática de saída. Além disso, o domínio de atração do sistema foi estimado e todas as trajetórias iniciando dentro dessa região convergem para o ponto de equilíbrio sem sair dela. Nessa simulação, considerou-se $\delta_1 = 0,05$ e $\delta_2 = 0,05$.

Figura 16 – Trajetórias em malha fechada e domínio de atração do sistema.

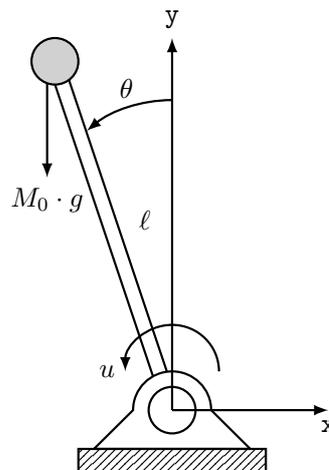


Fonte: Autora.

4.3 Exemplo 3

O terceiro exemplo deste trabalho consiste na estabilização de um pêndulo invertido, mostrado na Figura 17. O sistema do pêndulo invertido consiste em uma haste, com uma massa em uma das extremidades, que pode ser rotacionada tanto para a direita quanto para a esquerda. Ao se trabalhar com esse sistema, o objetivo é fazer com que a haste fique na posição vertical, fazendo um ângulo de 90° com o eixo horizontal. Entretanto, essa posição do sistema é extremamente instável, ou seja, se a haste for liberada de qualquer posição que não seja precisamente para cima, então o pêndulo cairá e oscilará tendendo para a posição verticalmente para baixo. Além disso, é importante ressaltar que mesmo a haste sendo posicionada precisamente na vertical, qualquer mínimo distúrbio irá fazer com que ela caia. Portanto, apesar de se tratar de um sistema mecânico simples, o pêndulo invertido é um sistema que possui uma dinâmica não linear bastante instável (BOUBAKER; IRIARTE, 2017).

Figura 17 – Esquemático do pêndulo invertido.



Fonte: Autora.

Existem várias aplicações práticas que podem ser analisadas a partir dos conceitos envolvidos nos estudos do pêndulo, como por exemplo, modelos biomecânicos do modo de caminhar dos seres humanos, visto que a posição ereta de um ser humano ao caminhar se aproxima muito do comportamento de um pêndulo invertido. Outro exemplo, consiste no controle da oscilação de arranha-céus, que por serem estruturas muito altas sofrem com as oscilações provocados pela ação dos ventos (RIBEIRO, 2007).

A equação diferencial (4.22) representa o modelo do pêndulo invertido estudado em Azizi (2017), que também será utilizado neste trabalho,

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{g}{l} \text{sen}(\theta(t)) - \frac{b_0 \dot{\theta}(t)}{M_0} + \frac{u(t)}{M_0 l^2}, \quad (4.22)$$

onde M_0 é a massa da esfera do topo da haste do pêndulo, l é o comprimento da haste, g é a aceleração da gravidade, b_0 é o coeficiente de atrito entre a haste e o mancal, θ é o ângulo do pêndulo com o eixo vertical e u é o sinal de controle.

Como em Azizi (2017), é utilizada a mudança de variáveis de funções trigonométricas para funções racionais, apresentada na seção 2.4. Assim, aplicando essa técnica no sistema (4.22), obtém-se a seguinte representação racional,

$$\ddot{r} = \frac{2r\dot{r}^2}{1+r^2} - \frac{b_0\dot{r}}{M_0} + \frac{gr}{l} + \frac{u(1+r^2)}{2M_0l^2}. \quad (4.23)$$

Sabe-se que muitas vezes podem ocorrer erros nas medições dos parâmetros do problema, como a massa da esfera e o coeficiente de atrito, fazendo com que o modelo não seja uma representação fiel da realidade. Por isso, foram adicionadas incertezas reais δ_1 e δ_2 nos parâmetros M_0 e b_0 , respectivamente. Então, considerando $x_1 = r$ e $x_2 = \dot{r}$, obtém-se a representação do sistema (4.23) em espaço de estados,

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.24)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{2x_1x_2^2}{1+x_1^2} + \frac{g}{l}x_1 - \frac{b_0(1+\delta_2)}{M_0(1+\delta_1)}x_2 + \frac{1+x_1^2}{2M_0l^2(1+\delta_1)}u, \quad (4.25)$$

$$y = x_1. \quad (4.26)$$

4.3.1 Linearização Aproximada por Realimentação

Em busca de reduzir as não linearidades do sistema (4.24)-(4.26), utilizou-se a técnica da linearização aproximada por realimentação de estados. A técnica da linearização por realimentação de estados se utiliza de uma mudança de coordenadas junto com uma transformação da entrada do sistema para linearizar sistemas dinâmicos via cancelamento das suas não linearidades. Entretanto, essa técnica pode ser falha para sistemas com incertezas, visto que é necessário ter o conhecimento do sistema completo e a medição exata dos seus estados para o cancelamento completo das não linearidades do sistema (AZIZI, 2017). A partir da técnica citada, o sistema aproximadamente linearizado por realimentação é dado por,

$$\dot{z}(t) = A_c z(t) + b_c v(t) + W(z, u, \delta), \quad (4.27)$$

onde $z(t)$ é o novo vetor de estados do sistema, $v(t)$ é o sinal de controle e W é o vetor com as não linearidades remanescentes.

O mesmo procedimento de linearização aproximada realizado em Azizi (2017), para o sistema (4.24)-(4.26), será utilizado aqui. Então, separando esse sistema em uma parte nominal e uma parte com incertezas, obtém-se,

$$f_0(x, p_0) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{2x_1x_2^2}{1+x_1^2} + \frac{g}{l}x_1 - \frac{b_0}{M_0}x_2 \end{bmatrix}, \quad g_0(x, p_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1+x_1^2}{2M_0l^2} \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

$$\Delta f(x, \delta) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{b_0(\delta_2 - \delta_1)}{M_0(1+\delta_1)}x_2 \end{bmatrix}, \quad \Delta g(x, \delta) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{(1+x_1^2)\delta_1}{2M_0l^2(1+\delta_1)} \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

O sinal de controle (u) aparece quando a saída (y) do sistema (4.24)-(4.26) é derivada duas vezes, devido à isso, pode-se dizer que o sistema tem grau relativo igual a 2 ($r = n = 2$). Então, o sistema aproximadamente linearizado por realimentação, pode ser obtido considerando-se o mapeamento $z = [x_1 \ x_2]^\top$ e a seguinte lei de controle,

$$u(t) = (L_{g_0}L_{f_0}x_1)^{-1}(v - L_{f_0}^2x_1), \quad (4.30)$$

onde $L_{g_0}L_{f_0}x_1 = \frac{1+x_1^2}{2M_0l^2}$ e $L_{f_0}^2x_1 = \frac{2x_1x_2^2}{1+x_1^2} + \frac{g}{l}x_1 - \frac{b_0}{M_0}x_2$.

As matrizes que compõem o sistema aproximadamente linearizado são dadas a seguir,

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e

$$W(z, u, \delta) = \begin{bmatrix} L_{\Delta_f}x_1 \\ L_{\Delta_f}L_{f_0}x_1 + L_{\Delta_g}L_{f_0}x_1u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{b_0(\delta_2 - \delta_1)}{M_0(1+\delta_1)}z_2 - \frac{(1+z_1^2)\delta_1}{2M_0l^2(1+\delta_1)}u \end{bmatrix}.$$

De acordo com (4.27), substitui-se u com v no vetor W , e como $z = [x_1 \ x_2]^\top$, o sistema pode ser reescrito da seguinte forma,

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (4.31)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{b_0\delta_2x_2}{M_0(1+\delta_1)} + \frac{2\delta_1x_1x_2^2}{(1+\delta_1)(1+x_1^2)} + \frac{g\delta_1x_1}{l(1+\delta_1)} - \frac{\delta_1v}{(1+\delta_1)} + v. \quad (4.32)$$

Observação 4.3.1 *Os conceitos da linearização por realimentação de estados e o procedimento da linearização aproximada do sistema do pêndulo invertido foram desenvolvidos detalhadamente em Azizi (2017). Como essa técnica é utilizada apenas neste exemplo durante o presente trabalho, foram apresentados apenas os pontos principais do procedimento.*

4.3.2 Projeto do Controlador

Aplicando uma realimentação de estados, de acordo com o Teorema 3.2.1, no sistema (4.31)-(4.32), pretende-se estabilizar o sistema racional original (4.24)-(4.26) em torno da origem, i.e. $(x, u) = (0, 0)$, que é um ponto de equilíbrio instável do sistema. Considera-se os valores dos parâmetros físicos do problema iguais aos utilizados em Azizi (2017), como na Tabela 2.

Tabela 2 – Parâmetros do pêndulo invertido

Parâmetro	Valor
M_0	2 Kg
g	$9.8 \frac{m}{s^2}$
l	1 m
b_0	$0.5 \frac{N.s}{m}$

Fonte: (AZIZI, 2017)

Primeiramente, suponha que $V = x^\top P x$ e $T = x^\top N x$ são funções polinomiais tais que

$$V(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

$$T(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

e Q e S matrizes tais que

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

onde (p_1, p_2, p_3) , (n_1, n_2, n_3) , (q_1, q_2, q_3) , (s_1, s_2) e R são parâmetros reais a serem determinados. Substituindo (V, T, Q, S, R) e as equações (4.31)-(4.32) em (3.6), obtém-se a seguinte função na qual a não negatividade em um domínio politópico $\mathcal{X} \times \mathcal{D}$ tem que ser investigada, sendo $x_d = [x_1 \ x_2 \ v]^T$ e $\delta = [\delta_1 \ \delta_2]^T$

$$\begin{aligned}
t(x_d, \delta) = & t_1 x_1^2 + t_2 x_1 x_2 + t_3 x_2^2 + t_4 x_1 v + t_5 x_2 v + Rv^2 + t_6 \frac{\delta_2 x_1 x_2}{(1 + \delta_1)} + t_7 \frac{\delta_2 x_2^2}{(1 + \delta_1)} \\
& + t_8 \frac{\delta_1 x_1^2 x_2^2}{(1 + \delta_1)(1 + x_1^2)} + t_9 \frac{\delta_1 x_1 x_2^3}{(1 + \delta_1)(1 + x_1^2)} + t_{10} \frac{\delta_1 x_1^2}{(1 + \delta_1)} + t_{11} \frac{\delta_1 x_1 x_2}{(1 + \delta_1)} \\
& + t_{12} \frac{\delta_1 x_1 u}{(1 + \delta_1)} + t_{13} \frac{\delta_1 x_2 u}{(1 + \delta_1)}.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

com

$$\begin{aligned}
t_1 = -n_1 + q_1, \quad t_2 = -2n_2 + 2q_2 - 2p_1, \quad t_3 = -n_3 + q_3 - 2p_2, \\
t_4 = 2s_1 - 2p_2, \quad t_5 = 2s_2 - 2p_3, \quad t_6 = \frac{2p_2 b_0}{M_0}, \quad t_7 = \frac{2p_3 b_0}{M_0} \\
t_8 = -4p_2, \quad t_9 = -4p_3, \quad t_{10} = \frac{-2gp_2}{l}, \quad t_{11} = \frac{-2gp_3}{l} \\
t_{12} = 2p_2, \quad t_{13} = 2p_3.
\end{aligned}$$

Para a equação $\Pi_d x_d + \Pi_2 \pi = 0$, pode-se determinar o vetor base π e as matrizes Π_d, Π_2 . O vetor π é dado por

$$\pi = \left[\frac{x_1}{1 + \delta_1} \quad \frac{x_2}{1 + \delta_1} \quad \frac{x_1 x_2 \delta_1}{(1 + \delta_1)(1 + x_1^2)} \quad \frac{x_1 \delta_1}{1 + x_1^2} \quad \frac{x_1^2 \delta_1}{1 + x_1^2} \quad \frac{v}{1 + \delta_1} \right]^\top,$$

e a seguinte combinação (Π_d, Π_2) é obtida

$$\Pi_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{bmatrix} -(1 + \delta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 + \delta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1 + \delta_1) & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 + \delta_1) \end{bmatrix},$$

onde $\det(\Pi_2) \neq 0, \forall (x, \delta) \in \mathcal{X} \times \mathcal{D}$.

Com a determinação do vetor π , tem-se o seguinte vetor π_d de (3.19)

$$\pi_d = \left[x_1 \quad x_2 \quad v \quad \frac{x_1}{1 + \delta_1} \quad \frac{x_2}{1 + \delta_1} \quad \frac{x_1 x_2 \delta_1}{(1 + \delta_1)(1 + x_1^2)} \quad \frac{x_1 \delta_1}{1 + x_1^2} \quad \frac{x_1^2 \delta_1}{1 + x_1^2} \quad \frac{v}{1 + \delta_1} \right]^\top,$$

então a matriz Q_d é dada por

$$Q_d = \begin{bmatrix} t_1 & \frac{t_2}{2} & \frac{t_4}{2} & \frac{t_{10}\delta_1}{2} & \frac{t_{11}\delta_1}{2} & \frac{t_8x_2}{2} & 0 & 0 & \frac{t_{12}\delta_1}{2} \\ \frac{t_2}{2} & t_3 & \frac{t_5}{2} & \frac{t_6\delta_2}{2} & \frac{t_7\delta_2}{2} & \frac{t_9x_2}{2} & 0 & 0 & \frac{t_{13}\delta_1}{2} \\ \frac{t_4}{2} & \frac{t_5}{2} & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t_{10}\delta_1}{2} & \frac{t_6\delta_2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t_{11}\delta_1}{2} & \frac{t_7\delta_2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t_8x_2}{2} & \frac{t_9x_2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t_{12}\delta_1}{2} & \frac{t_{13}\delta_1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

E o aniquilador linear (R_{π_d}) de π_d é dado por

$$R_{\pi_d} = \begin{bmatrix} -x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1+\delta_1) & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

O problema SDP linear (3.35)-(3.36) envolve uma condição LMI politópica independente do sinal de controle (v) e será testado em uma região definida por

$$(\mathcal{X} \times \mathcal{D}) = \{(x, \delta) \mid |x_1| \leq 0,2, |x_2| \leq 0,2, |\delta_1| \leq 0,01, |\delta_2| \leq 0,7\}, \quad (4.37)$$

para este politopo \mathcal{X} , tem-se os seguintes a_k em (3.33):

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad a_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo o algoritmo apresentado na seção 3.2.1 é possível determinar matrizes (Q, S, R, P, N, L_d) que garantem a factibilidade do problema e são necessárias para determinar o ganho que estabiliza assintoticamente o sistema em um domínio $\mathcal{X} \times \mathcal{D}$. Então, fazendo $\alpha = 0, 1$ em (3.33) e aplicando o algoritmo, obtém-se os seguintes valores

$$R = 39,2128, \quad S = \begin{bmatrix} 40,0000 \\ 23,7651 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 40,7851 & 24,2482 \\ 24,2482 & 14,3127 \end{bmatrix},$$

$$V(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 25,2336 & 1,3345 \\ 1,3345 & 25,0723 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$T(x) = 10^{-3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0,5090 & -0,0011 \\ -0,0011 & 0,5349 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$L_d = 10^3 \begin{bmatrix} 0,1138 & -0,1173 & 0,0000 & 0,0027 & -0,0000 & -0,0112 & 0,0000 & -0,0000 & -0,0000 & 0,0000 \\ 0,1166 & 0,1361 & 0,0000 & -0,0119 & 0,0000 & 0,0165 & -0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,0173 & -0,0149 & 0,0000 & -0,0012 & 0,0000 & 0,1092 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 & -0,0000 \\ -0,1344 & 0,1172 & -0,0000 & -0,0024 & 0,0000 & -0,0081 & -0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0000 \\ -0,1182 & -0,1416 & -0,0000 & 0,0133 & -0,0000 & -0,0146 & 0,0000 & -0,0000 & -0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & -0,0000 & -1,2207 & 0,0000 & 0,1314 & 0,0000 & -0,7864 & 0,7829 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,0153 & -0,0178 & -0,0000 & -0,2604 & 0,0000 & -0,0001 & 0,0000 & -0,0000 & -0,0000 & -0,0000 \\ -0,0000 & 0,0000 & -0,1927 & -0,0000 & -0,2409 & 0,0000 & -0,0299 & 0,0302 & 0,0000 & -0,0000 \\ -0,0021 & 0,0156 & -0,0000 & 0,0012 & -0,0000 & -0,1287 & -0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & -0,0000 \end{bmatrix}.$$

Com esses valores de (Q, S, R) obtém-se

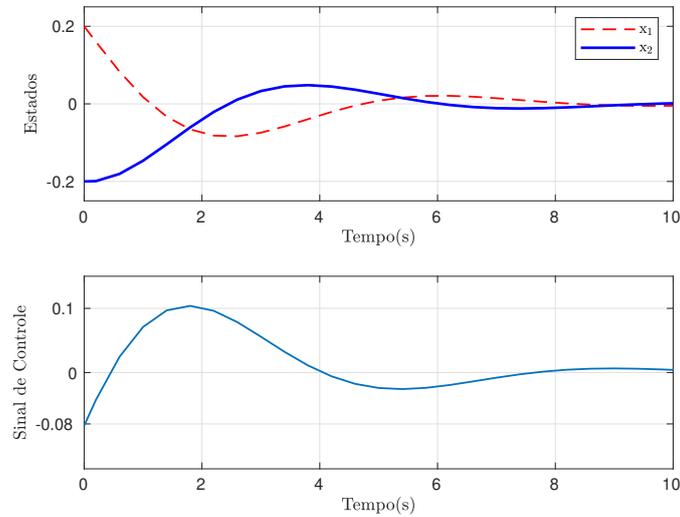
$$\Delta = SR^{-1}S^T - Q = \begin{bmatrix} 0,0169 & -0,0066 \\ -0,0066 & 0,0899 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores da matriz Δ são $[0,0163 \quad 0,0905]^T > 0$, sendo assim, a origem é assintoticamente estabilizável por uma realimentação linear de estados, onde

$$K = -R^{-1}S^T = \begin{bmatrix} -1,0200 & -0,6060 \end{bmatrix} \Rightarrow v = \begin{bmatrix} -1,0200 & -0,6060 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

A Figura 18 apresenta a resposta no tempo do sistema em malha fechada para $x_1 = 0,2, x_2 = -0,2, \delta_1 = 0,01, \delta_2 = 0,5$. Pode-se observar que os dois estados e o sinal de controle convergiram para a origem do sistema (ponto de equilíbrio).

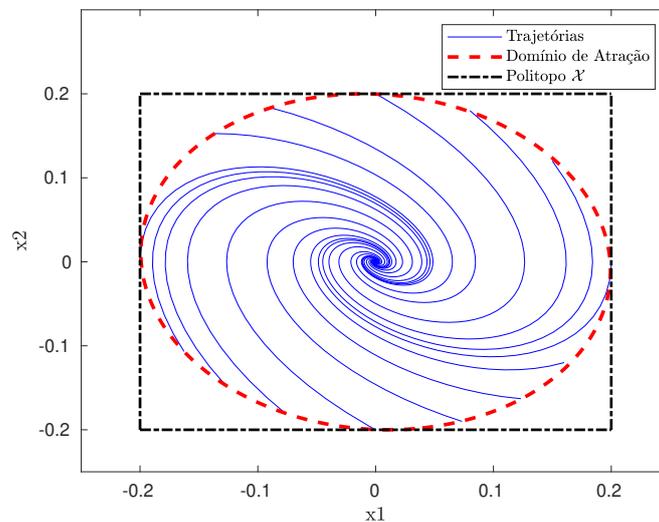
Figura 18 – Resposta no tempo do sistema em malha fechada.



Fonte: Autora.

Já a Figura 19 apresenta as trajetórias do sistema em malha fechada, ou seja, após a aplicação da realimentação de estados, para condições iniciais dentro do polítopo \mathcal{X} e incertezas $\delta_1 = 0,01$, $\delta_2 = 0,5$, dentro do polítopo \mathcal{D} . Pode-se observar que todas as trajetórias convergiram para a origem do sistema, mostrando que o sistema foi assintoticamente estabilizado por uma realimentação de estados. Além disso, o círculo com linha pontilhada corresponde à estimativa do domínio de atração do sistema ($x^T P x \leq 1$), ou seja, qualquer trajetória iniciando dentro da região delimitada por esse círculo, irá convergir para a origem, sem sair dessa região.

Figura 19 – Trajetórias em malha fechada e domínio de atração do sistema.



Fonte: Autora.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi desenvolvida a aplicação de uma metodologia de estabilização assintótica robusta de sistemas com não linearidades polinomiais ou racionais por meio de uma realimentação estática de estados, ou de saída. Não linearidades trigonométricas também podem ser tratadas utilizando uma mudança de variável para que sejam transformadas em não linearidades racionais.

A metodologia utilizada permite projetar ganhos, via resolução de LMIs e programação semidefinida, para regular a resposta do sistema em torno de um ponto de equilíbrio, garantindo a estabilidade local do sistema com incertezas. Além disso, é feita a estimativa da região na qual as trajetórias dos estados do sistema convergem diretamente para o ponto de equilíbrio sem sair dessa região.

Foram apresentados três exemplos de aplicação da metodologia. O primeiro exemplo consistiu no projeto de um ganho de realimentação de saída para a estabilização de um sistema microeletromecânico com incertezas, apresentando não linearidades polinomiais, em torno de um ponto de equilíbrio do sistema. O ganho de realimentação garantiu a estabilidade do sistema em uma região politópica em torno do ponto de equilíbrio. O segundo exemplo também consistiu no projeto de um ganho de realimentação de saída para a estabilização de um sistema não linear polinomial. Como no primeiro exemplo, o ganho também garantiu a estabilidade do sistema em uma região politópica em torno do ponto de equilíbrio.

Já o terceiro exemplo consistiu no projeto de um ganho de realimentação de estados para a estabilização de um sistema de um pêndulo invertido com incertezas, apresentando não linearidades racionais, em torno de um ponto de equilíbrio instável do sistema. O modelo utilizado para o projeto foi o do sistema aproximadamente linearizado e o ganho de realimentação de estados projetado era uma parte da lei de controle total. E como nos outros dois exemplos, o sistema foi estabilizado em uma região politópica em torno do ponto de equilíbrio.

Com o auxílio do software de simulação, para cada exemplo, foi possível apresentar figuras correspondentes às respostas do sistema, tanto em malha aberta como em malha fechada, para diferentes condições iniciais, com o objetivo de mostrar a eficácia da metodologia. Além disso, também foi possível apresentar uma figura correspondente à região na qual as trajetórias dos estados do sistema convergem diretamente para o ponto de equilíbrio, conhecida como o domínio de atração do sistema.

5.1 Sugestões de Trabalhos Futuros

A metodologia utilizada neste trabalho pode ser estendida para abordar diversos outros problemas. Alguns trabalhos que podem ser desenvolvidos a partir desta metodologia estão listados a seguir.

- Inclusão do problema da saturação do sinal de controle à metodologia, para que a estabilidade seja garantida mesmo que a saturação ocorra;
- Consideração de funções de Lyapunov mais complexas, como funções racionais, para diminuir o conservadorismo das condições e encontrar regiões de estabilidade maiores;
- Desenvolvimento da problemática para o caso de sistemas lineares com parâmetros variantes, do inglês *LPV*;
- Inclusão do problema de distúrbio para tratar o caso da norma \mathcal{H}_∞ ;
- Apresentação de um método automático para gerar a mais simples representação algébrica diferencial que pode descrever o sistema;

REFERÊNCIAS

- AZIZI, S. **Robust stabilization of uncertain nonlinear systems using differential algebraic representations**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2017.
- BALDI, S. An iterative sum-of-squares optimization for static output feedback of polynomial systems. In: IEEE. **2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)**. [S.l.], 2016. p. 3892–3897.
- BOUBAKER, O.; IRIARTE, R. **The inverted pendulum in control theory and robotics: from theory to new innovations**. [S.l.]: IET, 2017. v. 111.
- BROGLIATO, B.; LOZANO, R.; MASCHKE, B.; EGELAND, O. **Dissipative Systems Analysis and Control - Theory and Applications**. [S.l.]: Springer-Verlag, London, UK, 2020.
- BRONSON, J. R. **Modeling and Control of MEMS Micromirror Arrays with Nonlinearities and Parametric Uncertainties**. Tese (Doutorado) — University of Florida, 2007.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de controle modernos**, 8ª edição. Editora LTC, Rio de Janeiro, 2001.
- EDWARDS, J. **Modeling and feedback control of a mems electrostatic actuator**. Dissertação (Mestrado) — Cleveland State University, 2009.
- HADDAD, W. M.; CHELLABOINA, V. **Nonlinear dynamical systems and control: a Lyapunov-based approach**. [S.l.]: Princeton university press, 2011.
- KHALIL, H. K. **Nonlinear systems**. [S.l.]: Prentice-Hall Upper Saddle River, NJ, USA, 2002.
- LOFBERG, J. Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab. In: IEEE. **2004 IEEE international conference on robotics and automation (IEEE Cat. No. 04CH37508)**. [S.l.], 2004. p. 284–289.
- MADEIRA, D. de S. **Contributions to Passivity Theory and Dissipative Control Synthesis**. Tese (Doutorado) — Technische Universität Darmstadt, 2018.
- MADEIRA, D. de S.; VIANA, V. V. An application of QSR-dissipativity to the problem of static output feedback robust stabilization of nonlinear systems. In: SBA. **2020 Congresso Brasileiro de Automatica**. [S.l.], 2020. (Aceito para Publicação).
- POTA, H. R.; MOYLAN, P. J. Stability of locally dissipative interconnected systems. **IEEE transactions on automatic control**, IEEE, v. 38, n. 2, p. 308–312, 1993.
- RIBEIRO, R. **Implementação de um Sistema de Controle de um Pêndulo Invertido**. Dissertação (Mestrado) — Itajubá, MG: UNIFEI, 2007.
- ROHR, E. R.; PEREIRA, L. F. A.; COUTINHO, D. F. Robustness analysis of nonlinear systems subject to state feedback linearization. **Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica**, SciELO Brasil, v. 20, n. 4, p. 482–489, 2009.
- STURM, J. F. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization methods and software**, Taylor & Francis, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999.

TROFINO, A. Apostila de controle robusto. **Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis**, 2000.

TROFINO, A.; DEZUO, T. Lmi stability conditions for uncertain rational nonlinear systems. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, Wiley Online Library, v. 24, n. 18, p. 3124–3169, 2014.

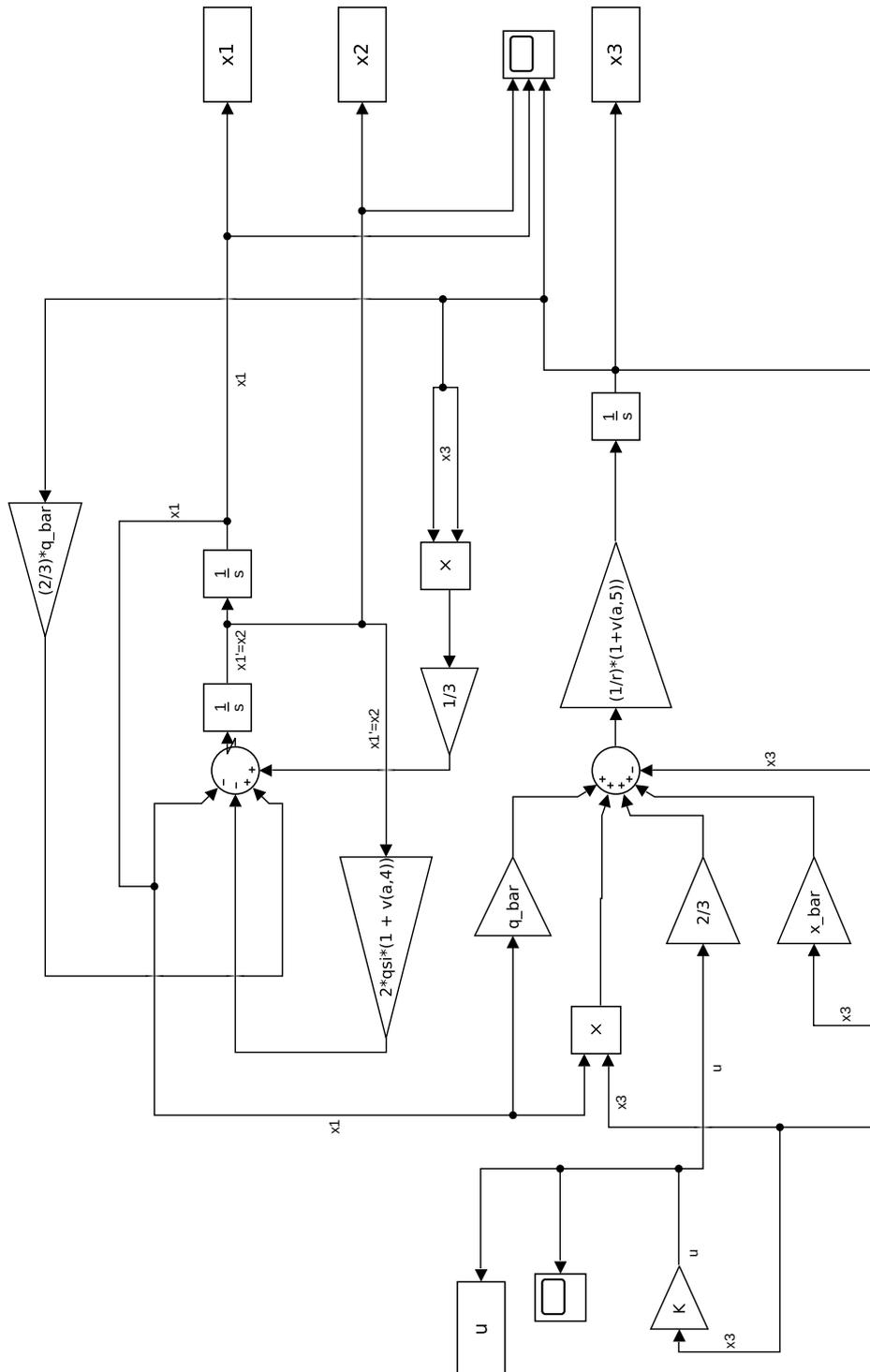
WILLEMS, J. A system theory approach to unified electrical machine analysis. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 15, n. 3, p. 401–418, 1972.

YANG, X.-M. A generalization of a matrix trace inequality. **Journal of mathematical analysis and applications**, Elsevier, v. 189, n. 3, p. 897–900, 1995.

ZHU, G.; LÉVINE, J.; PRALY, L. Stabilization of an electrostatic mems including uncontrollable linearization. In: IEEE. **2007 46th IEEE Conference on Decision and Control**. [S.l.], 2007. p. 2433–2438.

APÊNDICE A – DIAGRAMA DO EXEMPLO 1 NO SIMULINK

Figura 20 – Diagrama do Exemplo 1.



Fonte: Autora.

APÊNDICE B – CÓDIGO DO EXEMPLO 1 NO MATLAB

Código-fonte 1 – Implementação do Exemplo 1

```

1  %Trabalho de Conclusao de Curso
2
3  % Valessa Valentim Viana - 390273
4
5  %-----Modelo do MEMS-----%
6
7  clc , clear all , close all;
8
9  zeta=0.1;  r=1;
10 x_bar=0.2; q_bar=sqrt(3*x_bar); %parametros do problema
11
12 %matrizes a serem descobertas
13 P=sdpvar(3,3);
14 N=diag(sdpvar(3,1));
15 Q=sdpvar(1,1);
16 S=sdpvar(1,1);
17 R=sdpvar(1,1);
18 L=sdpvar(8,6,'full');
19
20 %coeficientes da equacao t(xd)
21
22 t1=2*P(1,2) - N(1,1) - (2*q_bar*P(1,3))/r;
23 t2=2*P(2,2)+ 4*zeta*P(1,2)- 2*P(1,1) - (2*q_bar*P(2,3))/r;
24 t3=4*zeta*P(2,2) - N(2,2) - 2*P(1,2);
25 t5=-2*P(1,3) + (4*zeta*P(2,3)) + 2*P(2,3)/r
26 - 2*x_bar*P(2,3)/r - (4*q_bar*P(2,2))/3;
27 t4=2*P(2,3) - (4*q_bar*P(1,2))/3 + 2*P(1,3)/r
28 - 2*x_bar*P(1,3)/r - (2*q_bar*P(3,3))/r;
29 t6=-N(3,3) - (4*q_bar*P(2,3))/3 + 2*P(3,3)/r
30 - 2*x_bar*P(3,3)/r + Q;
31 t7=-2*P(1,2)/3 - 2*P(3,3)/r;
32 t8=-2*P(2,2)/3;
33 t9=-2*P(2,3)/3;
34 t10=-4*P(1,3)/(3*r);
35 t11=-4*P(2,3)/(3*r);
36 t12=-4*P(3,3)/(3*r) + 2*S;
37 t13=-4*P(3,3)/(3*r);
38 t14=(-2*P(1,3))/r;
39 t15=(-2*P(2,3))/r;
40 t16=4*zeta*P(1,2);
41 t17=4*zeta*P(2,2);
42 t18=4*zeta*P(2,3);
43 t19=-2*q_bar*P(1,3)/(r);
44 t20=-2*q_bar*P(2,3)/(r);

```

```

45 t21=-(2*P(3,3)*q_bar)/r + (2*P(1,3))/r - (2*x_bar*P(1,3))/r;
46 t22=(2*P(2,3))/r - (2*x_bar*P(2,3))/r;
47 t23=(-2*P(3,3))/r;
48 t24=(2*P(3,3))/r - (2*P(3,3)*x_bar)/r;
49
50 %limites das variaveis de estado e de incertezas
51 x1_lim=[-0.2 0.2];
52 x2_lim=[-1 1];
53 x3_lim=[-0.5 0.5];
54 d1_lim=[-0.02 0.02];
55 d2_lim=[-0.02 0.02];
56
57 a=0;
58 PI1=cell(32,1);
59 PI2=cell(32,1);
60 Zd=cell(32,1);
61 Qp=cell(32,1);
62 R_pi=cell(32,1);
63 SS=[];
64 RR=[];
65
66 % construcao do politopo (X x D)
67 for i=1:2
68     for j=1:2
69         for k=1:2
70             for w=1:2
71                 for l=1:2
72 a=a+1;
73 xp(a,:)=[x1_lim(i) x2_lim(j) x3_lim(k) d1_lim(w) d2_lim(l)]; %vertices do politopo
74
75                 end
76             end
77         end
78     end
79 end
80
81 % construcao das LMIs em todos os vertices do politopo
82 for h = 1:a
83
84 PI1{h}=[ xp(h,2)    0    0    0;
85          0    0    xp(h,1)    0;
86          0    0    xp(h,3)    0;
87          xp(h,5)    0    0    0];
88
89 PI2{h}=[-1 0 0 0;
90          0 -1 0 0;
91          0 0 -1 0;
92          0 0 0 -1];
93

```

```

94 %aniquilador extra
95 R_pi{h}=[-xp(h,2)  xp(h,1)  0  0  0  0  0  0  0;
96             0  -xp(h,3)  xp(h,2)  0  0  0  0  0  0];
97
98 Zd{h}=[PI1{h}  PI2{h};R_pi{h}];
99
100 Qp{h}=[  t1             (t2+t16*xp(h,4))/2             t4/2
101          t10*(1+xp(h,5))/2             0  t14*(1+xp(h,5))/2
102          t7/2             t19/2;
103
104          (t2+t16*xp(h,4))/2             t3+t17*xp(h,4)
105          (t5+t18*xp(h,4)+t22*xp(h,5))/2  t11*(1+xp(h,5))/2
106          0             0             t8/2             t20/2;
107
108          t4/2             (t5+t18*xp(h,4)+t22*xp(h,5))/2
109          t6+t24*xp(h,5)             (t12+t13*xp(h,5))/2
110          t15*(1+xp(h,5))/2  t23*xp(h,5)/2  t9/2  t21/2;
111
112          t10*(1+xp(h,5))/2  t11*(1+xp(h,5))/2
113          (t12+t13*xp(h,5))/2  R  0  0  0  0;
114
115          0  0  t15*(1+xp(h,5))/2  0
116          0  0             0  0;
117
118          t14*(1+xp(h,5))/2  0  t23*xp(h,5)/2
119          0  0             0  0  0;
120
121          t7/2  t8/2  t9/2  0  0  0  0  0;
122
123          t19/2  t20/2  t21/2  0  0  0  0  0];
124
125 SS=SS+ ((Qp{h)+L*Zd{h}+Zd{h}'*L') >=0);
126
127 end
128
129 % construcao do politopo X
130 a=0;
131 for i=1:2
132     for j=1:2
133         for k=1:2
134             a=a+1;
135             xd(a,:)=[x1_lim(i)  x2_lim(j)  x3_lim(k)]; %vertices do politopo
136
137         end
138     end
139 end
140
141
142 % sistema linear para determinar os vetores ak's do politopo X

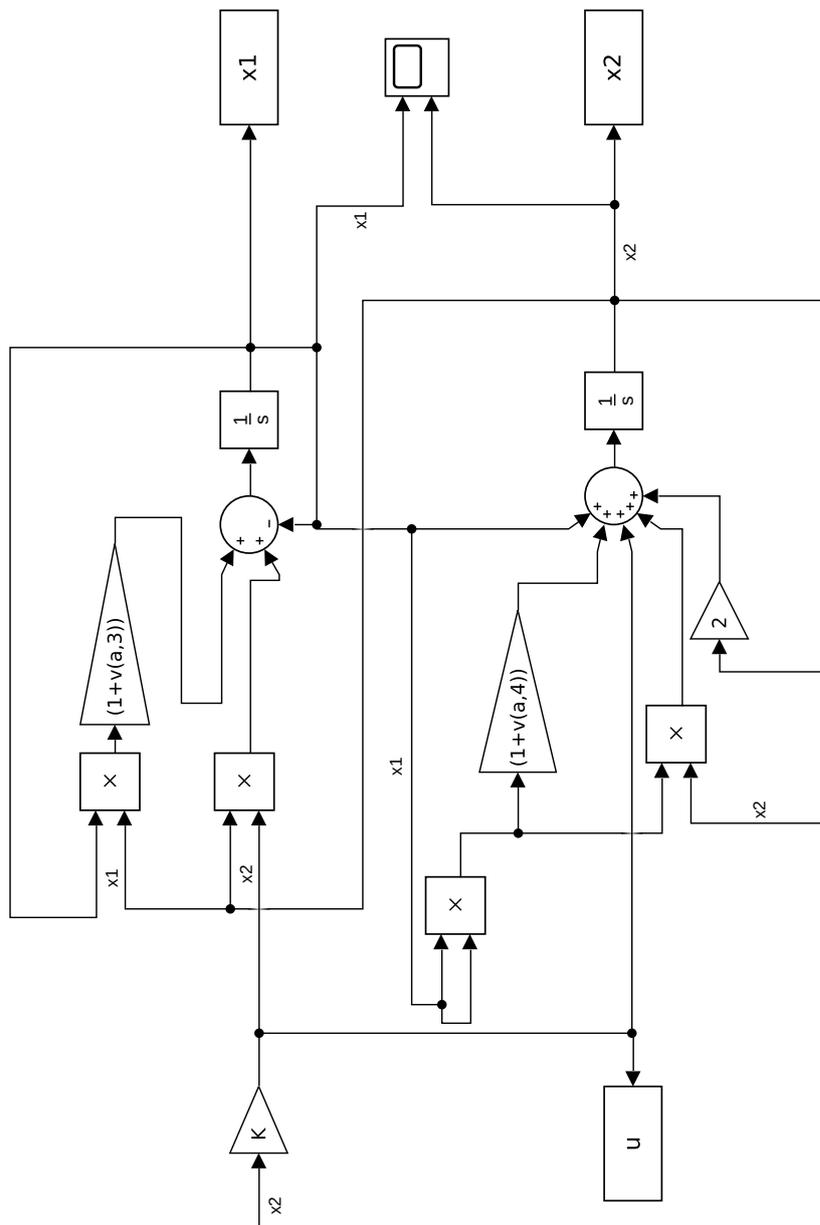
```

```

143 va=[xd(1,:);xd(2,:);xd(3,:);xd(4,:)];
144 vb=[xd(3,:);xd(4,:);xd(7,:);xd(8,:)];
145 vc=[xd(5,:);xd(6,:);xd(7,:);xd(8,:)];
146 vd=[xd(1,:);xd(2,:);xd(5,:);xd(6,:)];
147 ve=[xd(2,:);xd(4,:);xd(6,:);xd(8,:)];
148 vf=[xd(1,:);xd(3,:);xd(5,:);xd(7,:)];
149
150 a1=inv(va'*va)*va'*ones(4,1);
151 a2=inv(vb'*vb)*vb'*ones(4,1);
152 a3=inv(vc'*vc)*vc'*ones(4,1);
153 a4=inv(vd'*vd)*vd'*ones(4,1);
154 a5=inv(ve'*ve)*ve'*ones(4,1);
155 a6=inv(vf'*vf)*vf'*ones(4,1);
156
157 ak=[a1 a2 a3 a4 a5 a6];
158
159 for p=1:6
160     Td{p}=[P ak(:,p);ak(:,p)' 1];
161
162     RR=RR + ((Td{p})>=0);
163 end
164
165 %----- Resolvendo a LMI politopica -----%
166 options=sdpsettings('solver','sedumi','verbose',0);
167
168
169 % programa SDP linear para a determinacao do ganho
170 alfa=0.1;
171 M2=[Q+alfa*S;S'R];
172 LMIs=[SS,RR,P>=0,N>=0,M2>=0];
173
174 sol = optimize(LMIs,0.0001*(trace(M2)),options);
175
176 S=value(S);
177 R=value(R);
178 Q=value(Q);
179 L=value(L);
180 P=value(P);
181 N=value(N);
182
183 delta=S*inv(R)*S'-Q
184 K=-inv(R)*S'
```

APÊNDICE C – MODELO DO EXEMPLO 2 NO SIMULINK

Figura 21 – Diagrama do Exemplo 2.



Fonte: Autora.

APÊNDICE D – CÓDIGO DO EXEMPLO 2 NO MATLAB

Código-fonte 2 – Implementação do Exemplo 2

```

1  %Trabalho de Conclusao de Curso
2  % Valessa Valentim Viana - 390273
3  %-----Modelo do Exemplo 2-----%
4
5  clc; clear all; close all;
6
7  %matrizes a serem descobertas
8  P=sdpvar(2,2);
9  N=sdpvar(2,2);
10 Q=sdpvar(1,1);
11 S=sdpvar(1,1);
12 R=sdpvar(1,1);
13 L=sdpvar(6,6,'full');
14 R=0.045;
15
16 %coeficientes da equacao t(xd)
17 t1=-N(1,1) + 2*P(1,1) - 2*P(1,2);
18 t2=-2*P(2,2)-2*N(1,2)+ 2*P(1,2)-4*P(1,2);
19 t3=-4*P(2,2)- N(2,2)+Q;
20 t4=2*S-2*P(2,2);
21 t5=-2*P(1,2);
22 t6=-2*P(1,1)-2*P(2,2);
23 t7=-2*P(2,2);
24 t8=-2*P(1,1);
25
26 %limites das variaveis de estado e de incertezas
27 x1_lim=[-1.6 1.6];
28 x2_lim=[-1 1];
29 d1_lim=[-0.1 0.1];
30 d2_lim=[-0.1 0.1];
31
32 a=0;
33 PI2=cell(16,1);
34 PI1=cell(16,1);
35 Zd=cell(16,1);
36 Qd=cell(16,1);
37 R_pi=cell(16,1);
38 SS=[];
39 RR=[];
40
41 % constru o do politopo (X x D)
42 for i=1:2
43     for j=1:2
44         for k=1:2

```

```

45         for r=1:2
46 a=a+1;
47 xp(a,:)=[x1_lim(i) x2_lim(j) d1_lim(k) d2_lim(r)]; %vertices do politopo
48         end
49     end
50 end
51 end
52
53 % construcao das LMIs em todos os vertices do politopo
54 for h = 1:a
55 PI1{h}=[ xp(h,1) 0 0;
56          0 xp(h,1) 0;
57          0 0 xp(h,2)];
58
59 PI2{h}=[ -1 0 0;
60          0 -1 0;
61          0 0 -1];
62
63 %aniquilador extra
64 R_pi{h}=[-xp(h,2) xp(h,1) 0 0 0 0;
65          0 -xp(h,1) 0 0 1 0;
66          0 0 -xp(h,2) 0 0 1];
67
68 Zd{h}=[PI1{h} PI2{h};R_pi{h}]; %aniquilador
69
70 phi=((t5*xp(h,1)) + (t8*xp(h,3)) + (t7*xp(h,4)))/2;
71
72 Qp{h}=[t1 t2/2 t5/2 (t5*(1+xp(h,4)))/2 phi t8/2;
73
74         t2/2 t3 t4/2 (t6+t7*xp(h,2))/2 (t5*(1+xp(h,3)))/2 t5/2;
75
76         t5/2 t4/2 R 0 0 0;
77
78         (t5*(1+xp(h,4)))/2 (t6+t7*xp(h,2))/2 0 0 0 0;
79
80         phi (t5*(1+xp(h,3)))/2 0 0 0 0;
81
82         t8/2 t5/2 0 0 0 0];
83
84 SS=SS + ((Qp{h}+L*Zd{h}+Zd{h}'*L')>=0);
85 end
86 % construcao do politopo X
87 a=0;
88 for i=1:2
89     for j=1:2
90 a=a+1;
91 xd(a,:)=[x1_lim(i) x2_lim(j)]; %vertices do politopo
92     end
93 end

```

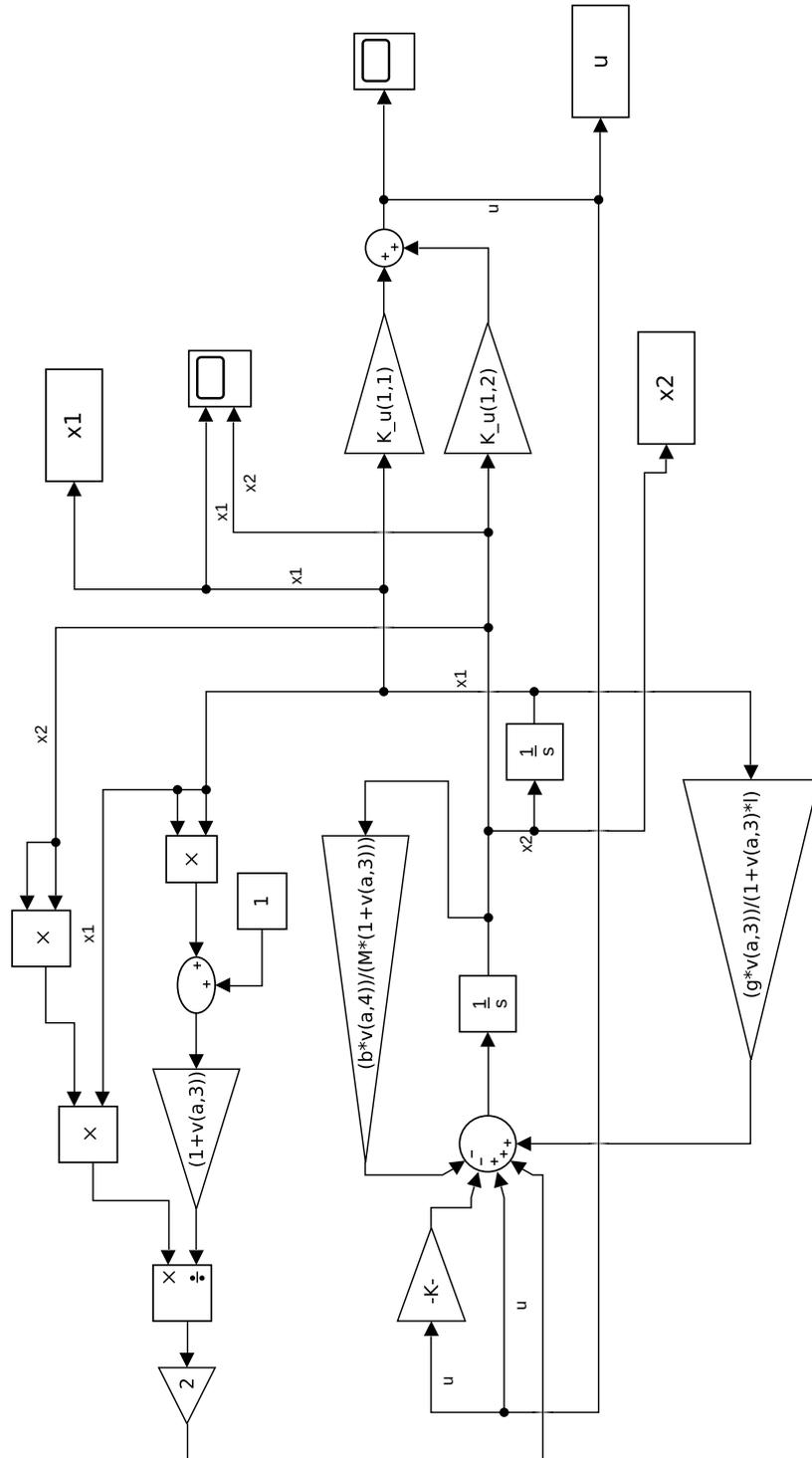
```

94 % sistema linear para determinar os vetores ak's do politopo X
95 va=[xd(4,:);xd(2,:)];
96 vb=[xd(2,:);xd(1,:)];
97 vc=[xd(1,:);xd(3,:)];
98 vd=[xd(3,:);xd(4,:)];
99
100 a1=inv(va)*ones(2,1);
101 a2=inv(vb)*ones(2,1);
102 a3=inv(vc)*ones(2,1);
103 a4=inv(vd)*ones(2,1);
104 ak=[a1 a2 a3 a4];
105 for p=1:4
106     Td{p}=[P ak(:,p);ak(:,p)' 1];
107     RR=RR + ((Td{p})>=0);
108 end
109 % programa SDP linear para a determinacao do ganho
110 alfa=0.01;
111 M2=[Q+alfa*eye(1,1) S;S' R];
112 LMIs=[SS,RR,P>0,N>0,M2>=0];
113 options=sdpssettings('solver','sedumi','verbose',0);
114 sol = optimize(LMIs,0.00001*(trace(M2)),options);
115
116 S=value(S);
117 R=value(R);
118 Q=value(Q);
119 %Verificacao do ganho K
120 delta=S*inv(R)*S'-Q
121 K=-inv(R)*S'

```

APÊNDICE E – MODELO DO EXEMPLO 3 NO SIMULINK

Figura 22 – Diagrama do Exemplo 3.



Fonte: Autora.

APÊNDICE F – CÓDIGO DO EXEMPLO 3 NO MATLAB

Código-fonte 3 – Implementação do Exemplo 3

```

1  %Trabalho de Conclusao de Curso
2
3  % Valessa Valentim Viana - 390273
4
5  %-----Modelo do Pendulo Invertido-----%
6
7  clc; close all; clear all;
8
9  b=0.5; M=2; l=1; g=9.8; %parametros do problema
10
11 %matrizes a serem descobertas
12 P=sdpvar(2,2);
13 N=sdpvar(2,2);
14 Q=sdpvar(2,2);
15 S=sdpvar(2,1);
16 R=sdpvar(1,1);
17 L=sdpvar(9,10,'full');
18 S(1,1)=40;
19
20 %coeficientes da equacao t(xd)
21 t1=-N(1,1) + Q(1,1);
22 t2=-2*P(1,1)-2*N(1,2)+ 2*Q(1,2);
23 t3=-2*P(1,2)- N(2,2)+Q(2,2);
24 t4=2*S(1,1)-2*P(1,2);
25 t5=2*S(2,1)-2*P(2,2);
26 t6=(2*P(1,2)*b)/M;
27 t7=(2*P(2,2)*b)/M;
28 t8=-4*P(1,2);
29 t9=-4*P(2,2);
30 t10=(-2*P(1,2)*g)/l;
31 t11=(-2*P(2,2)*g)/l;
32 t12=2*P(1,2);
33 t13=2*P(2,2);
34
35 %limites das variaveis de estado e de incertezas
36 x1_lim=[-0.2 0.2];
37 x2_lim=[-0.2 0.2];
38 d1_lim=[-0.01 0.01];
39 d2_lim=[-0.7 0.7];
40
41 a=0;
42 PI2=cell(16,1);
43 PI1=cell(16,1);
44 Zd=cell(16,1);

```

```

45 Qd=cell(16,1);
46 R_pi=cell(16,1);
47 SS=[];
48 RR=[];
49
50 % construcao do politopo (X x D)
51 for i=1:2
52     for j=1:2
53         for k=1:2
54             for r=1:2
55 a=a+1;
56 xp(a,:)= [x1_lim(i) x2_lim(j) d1_lim(k) d2_lim(r)]; %vertices do politopo
57
58             end
59         end
60     end
61 end
62
63 % construcao das LMIs em todos os vertices do politopo
64
65 for h = 1:a
66 P11{h}=[ 1      0      0;
67          0      1      0;
68          0      0      0;
69          xp(h,3) 0      0;
70          0      0      0;
71          0      0      1];
72
73 P12{h}=[ -(1+xp(h,3))    0    0    0    0    0;
74
75          0 -(1+xp(h,3))    0    0    0    0;
76
77          0    0 -(1+xp(h,3)) xp(h,2)    0    0;
78
79          0    0    0    -1    -xp(h,1)    0;
80
81          0    0    0    xp(h,1)    -1    0;
82
83          0    0    0    0    0 -(1+xp(h,3)) ];
84
85 %aniquilador extra
86 R_pi{h}=[ -xp(h,2) xp(h,1) 0 0 0 0 0 0 0;
87
88          0    0    0    -xp(h,2) xp(h,1)
89          0    0    0    0;
90
91          0    0    0    0    0 -(1+xp(h,3))
92          xp(h,2)    0    0;
93

```

```

94         0 0 0 0 0 0 xp(h,1) -1 0];
95
96 Zd{h}=[PI1{h} PI2{h};R_pi{h}]; %aniquilador
97
98 Qp{h}=[ t1 t2/2 t4/2 (t10*xp(h,3))/2
99         (t11*xp(h,3))/2 (t8*xp(h,2))/2 0
100         0 (t12*xp(h,3))/2 ;
101
102         t2/2 t3 t5/2 (t6*xp(h,4))/2
103         (t7*xp(h,4))/2 (t9*xp(h,2))/2 0
104         0 (t13*xp(h,3))/2 ;
105
106         t4/2 t5/2 R 0 0 0 0 0 0;
107
108         (t10*xp(h,3))/2 (t6*xp(h,4))/2 0
109         0 0 0 0 0 0;
110
111         (t11*xp(h,3))/2 (t7*xp(h,4))/2 0
112         0 0 0 0 0 0;
113
114         (t8*xp(h,2))/2 (t9*xp(h,2))/2 0
115         0 0 0 0 0 0;
116
117         0 0 0 0 0 0 0 0 0;
118
119         0 0 0 0 0 0 0 0 0;
120
121         (t12*xp(h,3))/2 (t13*xp(h,3))/2 0
122         0 0 0 0 0 0];
123
124 SS=SS + ((Qp{h}+L*Zd{h}+Zd{h}'*L') >=0);
125
126 end
127
128 % construcao do politopo X
129 a=0;
130 for i=1:2
131     for j=1:2
132         a=a+1;
133         xd(a,:)=[x1_lim(i) x2_lim(j)]; %vertices do politopo
134     end
135 end
136
137 % sistema linear para determinar os vetores ak's do politopo X
138 va=[xd(4,:);xd(2,:)];
139 vb=[xd(2,:);xd(1,:)];
140 vc=[xd(1,:);xd(3,:)];
141 vd=[xd(3,:);xd(4,:)];
142

```

```

143 a1=inv(va)*ones(2,1);
144 a2=inv(vb)*ones(2,1);
145 a3=inv(vc)*ones(2,1);
146 a4=inv(vd)*ones(2,1);
147
148 ak=[a1 a2 a3 a4];
149
150 for p=1:4
151     Td{p}=[P ak(:,p);ak(:,p)' 1];
152     RR=RR + ((Td{p})>=0);
153 end
154
155 % programa SDP linear para a determinacao do ganho
156 alfa=0.1;
157 M2=[Q+alfa*eye(2,2) S;S' R];
158
159 LMIs=[SS,RR,P>0,N>0,M2>=0];
160
161 options=sdpsettings('solver','sedumi','verbose',0);
162
163 sol = optimize(LMIs,0.00001*(trace(M2)),options);
164
165 S=value(S);
166 R=value(R);
167 Q=value(Q);
168 P=value(P);
169 N=value(N);
170
171 %Verificacao do ganho K
172
173 delta=S*inv(R)*S'-Q
174
175 eig(delta)
176
177 K_u=-inv(R)*S'

```