



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

MESTRADO EM ENGENHARIA CIVIL: ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

DIOGO RANIERE RAMOS E SILVA

ANÁLISE TERMOMECÂNICA DE MATERIAIS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL

FORTALEZA

2020

DIOGO RANIERE RAMOS E SILVA

ANÁLISE TERMOMECAÂNICA DE MATERIAIS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Evandro Parente Junior

Coorientador: Prof. Dr. Marcelo Silva Medeiros Júnior

FORTALEZA

2020

DIOGO RANIERE RAMOS E SILVA

ANÁLISE TERMOMECÂNICA DE MATERIAIS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Evandro Parente Junior (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcelo Silva Medeiros
Júnior (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Junior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Walnório Graça Ferreira
Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

Aos meus pais, Nestor e Maristela, pela dedicação, educação, companheirismo e por todo apoio.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Nestor e Maristela, pelo amor, dedicação, apoio transmitido a mim por todos esses anos.

À minhas irmãs , pelo apoio, preocupação e cuidado diário.

Aos meus avós, que sempre demonstraram extrema felicidade ao me receber e sempre desejaram a minha qualificação profissional.

À minha família, pelo carinho, preocupação e companheirismo por todos esses anos. Em especial, à minhas tias, Adusinda, Anita, Santana e Verônica.

Ao meu orientador, Evandro Parente Júnior, pela orientação dada em todos os momentos do mestrado, pelos conselhos, apoio, dedicação e pelo exímio profissionalismo que guia sua vida acadêmica.

Ao meu coorientador, Marcelo Silva Medeiros Júnior, pelas contribuições no trabalho, pela dedicação e pelos ensinamentos de sala.

Aos professores do corpo docente do PEC e aos professores que me ajudaram durante toda minha vida acadêmica.

Aos amigos que adquiri durante o mestrado e aos que andam ao meu lado a um bom tempo, mesmo que estejam em outros estados ou países.

À UFC, DEECC e LMCV pela estrutura e oportunidade dadas a mim.

Aos funcionários da UFC que mantêm a universidade funcionando.

RESUMO

Os Materiais com Gradação Funcional (MGF) (*Functionally Graded Materials* – FGM) foram propostos inicialmente para problemas envolvendo barreiras térmicas em estruturas aeroespaciais e reatores de fusão, sendo atualmente utilizados em diversas estruturas submetidas a altas temperaturas e gradientes térmicos. Sua principal característica é a variação contínua e suave de seus componentes ao longo de uma direção preferencial, evitando descontinuidades expressivas. Outras vantagens desses materiais são a melhor distribuição de tensões residuais e maior tenacidade à fratura. Este trabalho trata da análise termomecânica de estruturas com gradação funcional. Aspectos como a distribuição de temperatura, distribuição de tensões, carga crítica e caminho pós-crítico de placas e cascas com gradação funcional foram estudados. O problema térmico foi resolvido em regime permanente. No aspecto termomecânico, as estruturas foram analisadas considerando a metodologia parcialmente acoplada, onde realiza-se a análise térmica com independência em relação a termos mecânicos e em seguida realiza-se análise mecânica considerando a distribuição de temperatura obtida na análise térmica. A modelagem de estruturas com gradação funcional foi realizada utilizando o Método dos Elementos Finitos por meio do programa ABAQUS. Para este fim, foram desenvolvidas sub-rotinas do usuário para consideração de materiais com gradação funcional, já que estes não são originalmente disponíveis na biblioteca do software. A metodologia utilizada é baseada no uso de elementos sólidos tanto para análise térmica quanto mecânica. A verificação desta metodologia foi realizada por meio de comparação com exemplos da literatura, obtendo-se excelente concordância para os aspectos avaliados: distribuição de temperatura, distribuição de tensões, temperatura crítica e caminho não linear de equilíbrio. Os resultados obtidos mostram que as propriedades efetivas são altamente dependentes dos materiais utilizados e dos modelos de homogeneização adotados. Além disso, soluções simplificadas para a obtenção da distribuição de temperatura devem ser utilizadas de forma cuidadosa de forma a não introduzir erros na solução. No que diz respeito à estabilidade, verificou-se que as condições de contorno, variação da fração de volume e distribuição de temperatura têm grande influência sobre a flambagem térmica e comportamento pós-crítico de placas e cascas com gradação funcional.

Palavras-chave: Materiais com Gradação Funcional. Carregamento Termomecânico. Método dos Elementos Finitos. Estabilidade.

ABSTRACT

Functionally Graded Materials (FGM) were initially developed to solve problems related to thermal barriers for aerospace structures and fusion reactors and are currently used in structures subjected to high temperatures and thermal gradients. The main characteristic of this class of material is the continuous and smooth variation of its components along a given direction which avoids major discontinuities. Other advantages are the better distribution of residual stresses and greater fracture toughness. This work deals with thermomechanical analysis of structures with functional gradation. Aspects, such as, temperature distribution, stress distribution, critical load and post-critical path of functionally graded plates and shells were evaluated. Heat transfer problems were solved considering a steady state regime. From the thermomechanical standpoint, the structures were evaluated according to the partially coupled methodology. In this approach the thermal analysis is carried out independently from mechanical terms and then the mechanical analysis follows suit, considering the temperature distribution from the thermal analysis. The modeling of structures with functional gradation was performed using the Finite Element Method through the ABAQUS software. For this purpose, user subroutines were developed to account for the gradation in the properties, since this type of material is not available in the software library. Solid elements were employed for both thermal and mechanical analysis. The verification of the adopted methodology was carried out by comparison with examples from the literature. An excellent convergence was found for the aspects evaluated in this work, such as, temperature distribution, stress distribution, critical load, and non-linear equilibrium path. The results showed that the effective material properties are highly dependent on the materials used and homogenization models adopted. Besides that, simplified solutions for obtaining temperature distribution should be used advisedly to avoid errors in the final solution. Regarding stability aspects, it was observed that the boundary conditions, variation of the volume fraction and temperature distribution have a great influence on the thermal buckling and post-buckling behavior of functionally graded plates and shells.

Keywords: Finite Element Method. Subroutines. Functionally Graded Materials. Thermomechanical Load. Stability.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Materiais com gradação funcional.	16
Figura 2 – Materiais com gradação funcional - gradação contínua e descontínua.	17
Figura 3 – Fabricação de MGF utilizando metalurgia em pó.	17
Figura 4 – Distribuição das frações de volume.	18
Figura 5 – MGF com fases de fração de volume distribuídas em uma direção.	21
Figura 6 – Balanço energético.	26
Figura 7 – Balanço energético - Cilindro.	28
Figura 8 – Elemento DC3D20.	34
Figura 9 – Ponto de bifurcação	46
Figura 10 – Ponto de limite	47
Figura 11 – snap-through	49
Figura 12 – snap-back e snap-through	50
Figura 13 – Fluxograma de funcionamento (ABAQUS e UMAT)	54
Figura 14 – Distribuição de temperatura	59
Figura 15 – Deslocamentos devido à carga térmica	60
Figura 16 – Tensões devido à carga térmica	60
Figura 17 – Deslocamentos devido a carga mecânica	61
Figura 18 – Tensões devido a carga mecânica	62
Figura 19 – Condições de contorno	63
Figura 20 – Caminho de equilíbrio	64
Figura 21 – Configuração deformada- $N = 0$	64
Figura 22 – Configuração deformada- $N = 0,2$	65
Figura 23 – Geometria da placa	67
Figura 24 – Variação crítica de temperatura para aumento uniforme ($N = 1$).	69
Figura 25 – Modo de flambagem.	70
Figura 26 – Aumento uniforme de temperatura	71
Figura 27 – Configuração deformada - $N = 0,3$	71
Figura 28 – Aumento uniforme de temperatura para diferentes relações a/h	71
Figura 29 – Aumento linear de temperatura	72
Figura 30 – Distribuição das frações de volume e campo de temperatura	73
Figura 31 – Caminho pós crítico - distribuição não linear de temperatura	74

Figura 32 – Caminho pós crítico e distribuição não linear de temperatura para $N = 1$. . .	76
Figura 33 – Configuração deformada - placa simplesmente apoiada	76
Figura 34 – Condutividade térmica e distribuição de temperatura $N = 0,3$	78
Figura 35 – Condutividade térmica e distribuição de temperatura $N = 1,0$	79
Figura 36 – Módulo de Elasticidade.	80
Figura 37 – Caminho pós crítico.	80
Figura 38 – Geometria, carregamento e condições de contorno	82
Figura 39 – Estudo de malha - $N = 5$	82
Figura 40 – Caminho pós crítico ($h=12,7\text{mm}$)	83
Figura 41 – Caminho pós crítico ($6,35\text{mm}$)	84
Figura 42 – Geometria e condições de contorno da casca	86
Figura 43 – Caminho de equilíbrio - Espessura de $12,7\text{ mm}$	86
Figura 44 – Caminho de equilíbrio - Espessura de $6,35\text{ mm}$	87
Figura 45 – Configuração deformada - Pannel sob carga térmica- $12,7\text{mm}$	87
Figura 46 – Geometria da casca	88
Figura 47 – Estudo de malha	89
Figura 48 – Caminho pós-crítico	90
Figura 49 – Configuração deformada - $N = 1$	91

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Condutividade térmica (W/mK).	23
Tabela 2 – Coeficiente de expansão térmica (K^{-1}).	23
Tabela 3 – Coeficiente de Poisson.	24
Tabela 4 – Calor específico (J/kgK).	24
Tabela 5 – Módulo de elasticidade (Pa).	24
Tabela 6 – Propriedades da Zircônia e do Monel	58
Tabela 7 – Estudo de malha	58
Tabela 8 – Propriedades mecânicas dos materiais	63
Tabela 9 – Propriedades da Al_2O_3 e do Ni	66
Tabela 10 – Estudo de malha para deslocamento máximo	66
Tabela 11 – Temperatura crítica (placa quadrada, $a/h = 50$ e $N = 1$).	68
Tabela 12 – Temperatura crítica (placa quadrada e $a/h = 50$).	69
Tabela 13 – Temperatura crítica (placa quadrada e $N = 1$).	69
Tabela 14 – Propriedades da Al_2O_3 e do Al	75
Tabela 15 – Propriedades da alumina, do níquel e do alumínio	78
Tabela 16 – Propriedades mecânicas dos materiais	81
Tabela 17 – Propriedades mecânicas dos materiais - Alumina e Níquel	85
Tabela 18 – Propriedades mecânicas dos materiais - Alumina e Níquel	88

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Objetivos e contribuições	14
1.2	Organização da dissertação	14
2	MATERIAIS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL	16
2.1	Distribuição das frações de volume	18
2.2	Propriedades efetivas	19
2.2.1	<i>Lei das misturas</i>	20
2.2.2	<i>Mori-Tanaka</i>	21
2.3	Variação das propriedades com a temperatura	22
3	ANÁLISE TÉRMICA	25
3.1	Equação da condução de calor	25
3.2	Métodos aproximados para solução do problema térmico	29
3.3	Solução por Elementos Finitos	30
3.3.1	<i>Forma fraca e formulação do método de elementos finitos para regime transiente 1D</i>	30
3.3.2	<i>MEF para problemas 3D</i>	33
4	ANÁLISE TERMOMECAÂNICA	35
4.1	Termoelasticidade linear desacoplada	35
4.1.1	<i>Equação do movimento</i>	36
4.1.2	<i>Conservação de energia</i>	37
4.1.3	<i>Modelo constitutivo</i>	38
4.2	Considerações sobre o acoplamento	39
4.2.1	<i>Equação de condutividade considerando o acoplamento</i>	39
4.2.2	<i>Equações de problemas acoplados.</i>	41
4.3	Formulação numérica	41
4.3.1	<i>Forma fraca.</i>	41
4.3.2	<i>Formulação por elementos finitos.</i>	43
5	ESTABILIDADE	46
5.1	Traçado do caminho de equilíbrio.	48
5.1.1	<i>Métodos de traçado do caminho de equilíbrio</i>	48

5.2	Problema de autovalor na flambagem	51
6	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	53
6.1	Método das Lâminas Virtuais	55
7	EXEMPLOS NUMÉRICOS	57
7.1	Análise termomecânica de placas com gradação funcional	57
7.2	Estudo do caminho pós crítico em placas sob carregamento mecânico . .	62
7.3	Estudo do caminho pós crítico e carga crítica em placas sob carrega-	
	mento térmico	65
7.3.1	<i>Placas engastadas</i>	67
7.3.1.1	<i>Aumento uniforme de temperatura</i>	67
7.3.1.2	<i>Aumento linear de temperatura</i>	72
7.3.1.3	<i>Aumento não linear de temperatura</i>	72
7.3.2	<i>Placas apoiadas</i>	74
7.4	Estudo paramétrico de placas sob carregamento térmico	77
7.5	Análise não linear de cascas sob carregamento mecânico	81
7.6	Análise não linear de cascas sob carregamento térmico	84
7.6.1	<i>Painel cilíndrico sob aumento uniforme de temperatura</i>	85
7.6.2	<i>Cilindro sob aumento uniforme de temperatura</i>	87
8	CONCLUSÃO	92
8.1	Sugestões para trabalhos futuros	94
	REFERÊNCIAS	95
	APÊNDICES	101
	APÊNDICE A – Sub-rotina UMAT	101
	APÊNDICE B – Sub-rotina UMATHT	104

1 INTRODUÇÃO

O conceito de material com gradação funcional surgiu em 1984 no Japão, sendo o seu uso associado principalmente a barreiras térmicas. No ano de 1987, o desenvolvimento desse material prosseguiu sob a responsabilidade da Agência de Ciências e Tecnologia (STA), pertencente ao governo japonês, que tinha como intuito o estudo desses materiais para os programas aeroespaciais, visto que, essas estruturas têm temperaturas na superfície mais aquecida da ordem de 2100 K, além de diferença de temperatura de aproximadamente 1600 K. A ideia principal desse programa foi propor uma nova metodologia de compósitos com materiais cerâmicos e metais (KOIZUMI, 1997).

Segundo Shen (2016), Materiais com Gradação Funcional (MGF) são compósitos de alto desempenho com variação gradual de composição segundo uma direção preferencial. As propriedades desejáveis desses compósitos podem ser obtidas a partir da variação de frações de volume dos materiais constituintes. Um dos tipos de MGFs mais populares são compósitos de cerâmica e metal, o primeiro tendo qualidades relacionadas à exposição a altas temperaturas, o segundo tendo boa resistência mecânica (NODA, 1999; GUPTA; TALHA, 2015).

Esses materiais apresentam uma série de qualidades em relação aos compósitos laminados, tais como: eliminação de concentração de tensão na interface de lâminas; melhor distribuição de tensões residuais; maior tenacidade a fratura; melhor comportamento mecânico em altas temperaturas; entre outras (VEL; BATRA, 2002; GUPTA; TALHA, 2015).

Portanto, o uso de placas e cascas de MGFs apresenta várias vantagens. Contudo, como se trata de uma abordagem recente, faz-se necessário o desenvolvimento de pesquisas que busque ampliar e aprofundar o conhecimento sobre este assunto. Uma vez que os materiais com gradação funcional surgiram como barreiras térmicas, há a necessidade de analisá-los sob o ponto de vista termomecânico, ou seja, deve-se realizar uma análise térmica para obtenção do campo de temperatura e uma análise mecânica para determinação da resposta estrutural.

Para analisar esses materiais sob o âmbito termomecânico é preciso conhecer a teoria da termoelasticidade, bem como entender os problemas de transferência de calor, uma vez que a exposição a carga térmica gera um campo de temperatura que pode variar com o tempo, sendo transiente, ou não variar com o tempo e, portanto, sendo permanente.

Além disso, geralmente as cascas e placas de MGF apresentam elevada esbelteza, tornando-as estruturas sensíveis ao colapso por perda de estabilidade, sendo necessária uma investigação criteriosa sobre sua carga crítica, modos de flambagem e caminho pós-crítico. Para isso,

são imprescindíveis análises não-lineares, nas quais a consideração de grandes deslocamentos é fundamental.

Dentre as pesquisas realizadas a respeito de materiais com gradação funcional, destacam-se os trabalhos de Reddy e Chin (1998) que estudaram placas e cilindros de MGFs com propriedades variando com a temperatura. Reddy e Cheng (2001) e Vel e Batra (2002) desenvolveram soluções analíticas que podem servir como *benchmarks* para placas sob carregamento térmico ou mecânico. Abbas (2014) realizou uma análise não linear transiente considerando as propriedades dos materiais variando com a temperatura. Swaminathan e Sangeetha (2017) realizaram uma revisão bibliográfica a respeito da análise térmica de MGFs, onde há a citação de 248 trabalhos que abordam este tema.

Javaheri e Eslami (2002a), Na e Kim (2005), Na e Kim (2006a), Na e Kim (2006b) e Trabelsi *et al.* (2018) analisaram a flambagem e o traçado do caminho pós-crítico de placas de MGFs sob carregamento térmico. Tran *et al.* (2013) e Tran *et al.* (2016) analisaram a flambagem e o caminho de equilíbrio de placas de MGFs conforme uma formulação isogeométrica sob carregamento térmico. Moita *et al.* (2018) analisaram a carga crítica e caminho pós-crítico de placas sob carregamento termomecânico. Woo *et al.* (2005), Shen (2009), Babaei *et al.* (2018) e Rezaiee-Pajand *et al.* (2019) estudaram a estabilidade de cascas de MGF submetidas a carregamento térmico. Mars *et al.* (2017) estudaram a estabilidade de cascas de MGF submetidas a carregamento mecânico.

O interesse pelo tema cresceu de tal forma que levou a publicação de livros dedicados a este assunto. Shen (2016) trata de cascas e placas de MGFs, com discussões a respeito dos diferentes métodos de homogeneização e do traçado do caminho de equilíbrio para placas e cascas sob carregamento térmico e mecânico. Carrera *et al.* (2016) aborda análises termomecânicas de materiais compósitos incluindo MGFs.

O Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará (UFC) também vem realizando pesquisas a respeito de materiais compósitos com gradação funcional, destacam-se os trabalhos de Praciano (2018), Auad (2019), Ribeiro *et al.* (2020) e Maia (2020).

Praciano (2018) analisou a estabilidade de estruturas laminadas e de materiais com gradação funcional utilizando uma formulação isogeométrica baseada nas teorias de Reissner-Mindlin para placas considerando o cisalhamento transversal e de Marguerre para análise não linear de cascas abatidas. Auad (2019) analisou cascas cilíndricas de MGF sujeitas a

carregamentos mecânicos utilizando uma abordagem isogeométrica baseada na teoria não linear de Donnell. Ribeiro *et al.* (2020) estudaram a otimização, por meio de modelos substitutos, da carga crítica de flambagem e da frequência fundamental para placas de MGF. Maia (2020) estudou a otimização de estruturas de MGF assistida por modelos substitutos em problemas com comportamento não linear.

1.1 Objetivos e contribuições

Neste trabalho, o principal objetivo foi desenvolver uma metodologia baseada no Método dos Elementos Finitos para avaliar a distribuição de temperatura, a distribuição de tensões e a estabilidade em placas e cascas de MGFs. No caso de carregamento térmico, obtido pela solução da equação de condução, considerou-se uma análise parcialmente acoplada e transferência de calor em regime permanente.

Apesar do grande interesse nos MGFs, programas de elementos finitos muito utilizados, como o ABAQUS, não são capazes de tratar estes materiais de forma direta. Deste modo, neste trabalho optou-se por realizar a modelagem de Materiais com Gradação Funcional por meio de sub-rotinas do usuário (UMAT e UMATHT) implementadas no software ABAQUS.

Esta metodologia permitiu a avaliação da distribuição de temperatura, distribuição de tensão, avaliação da carga crítica e o estudo do comportamento pós-crítico. Estudos paramétricos no que se refere a diferentes métodos de homogeneização e materiais, também, foram realizados. Além disso, estudou-se soluções simplificadas para a obtenção da distribuição de temperatura.

Os estudos ocorreram com a utilização de elementos sólidos e foi realizado segundo diferentes carregamentos, tanto térmicos quanto mecânicos. Dessa forma, respostas precisas são obtidas independente das espessuras das estruturas avaliadas.

1.2 Organização da dissertação

O presente trabalho está organizado em capítulos. No Capítulo 2 são apresentados os principais conceitos sobre os materiais com gradação funcional, sua definição, modos de fabricação, vantagens e desvantagens. Atenção especial é dada aos tópicos de distribuição de frações de volume, propriedades efetivas e variação das propriedades com a temperatura.

O Capítulo 3 traz as ferramentas para obtenção do campo de temperatura. Nesse capítulo há conceitos importantes para o entendimento da equação da condução de calor. Discute-

se a utilização, também, de soluções aproximadas as quais consideram a expansão de termos em séries e a formulação à qual se baseia o Método dos Elementos Finitos.

O Capítulo 4 traz a teoria da termoelasticidade, nele há a abordagem de modelo constitutivo, equação de conservação de energia, equação de movimento, considerações sobre o acoplamento entre os campos térmico e mecânico. Nesse capítulo, também, discute-se as formulações numéricas utilizadas.

O Capítulo 5 aborda conceitos sobre a estabilidade, discutindo perda de estabilidade por ponto limite e bifurcação. Nesse capítulo há a discussão também dos diferentes métodos para traçado do caminho de equilíbrio e métodos para determinação da carga crítica.

No Capítulo 6 discute-se a implementação computacional dos modelos constitutivos, térmicos e mecânicos. Discute-se aspectos a respeito das sub-rotinas utilizadas e do software utilizado na análise.

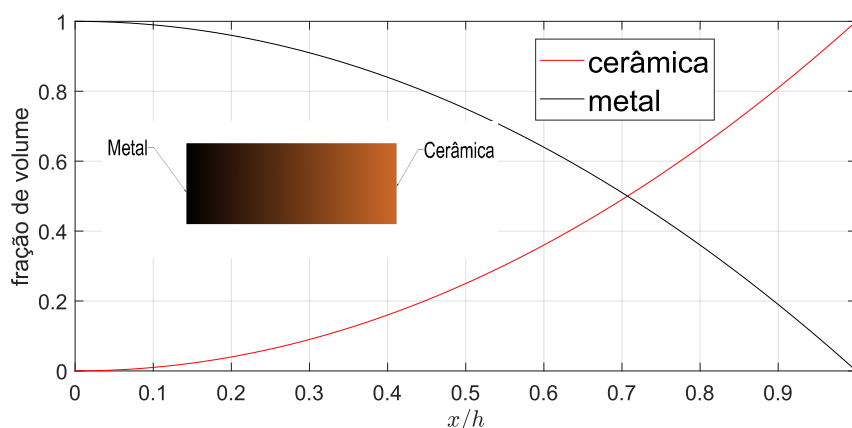
No Capítulo 7 são apresentados os exemplos numéricos desenvolvidos neste trabalho e os estudos realizados. Já no Capítulo 8 são apresentadas as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

2 MATERIAIS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL

Os materiais com gradação funcional (MGFs) são compósitos empregados principalmente em ambientes de temperaturas elevadas. Um dos MGFs mais comuns é feito pela associação de materiais cerâmicos que tem boa resistência térmica e metais que possuem bom comportamento mecânico (VEL; BATRA, 2002; SHEN, 2016). Dentro dessa filosofia, pode-se utilizar uma série de materiais, no caso dos metais, podemos citar como exemplo o magnésio, titânio, alumínio e aço inoxidável, enquanto na cerâmica podemos citar a zircônia, o carvão de silício e outros (SHEN, 2016). Além da combinação metal/cerâmica, os MGFs também podem ser compostos por cerâmica/cerâmica, cerâmica/plástico e outras combinações (UDUPA *et al.*, 2014).

A filosofia de composição de MGFs é dada pela variação gradual das frações de volume de cada constituinte, portanto as propriedades desses materiais mudam suavemente de uma superfície à outra (SHEN, 2016), conforme pode ser visualizado na Figura 1. Essa gradação, em uma ou mais direções, é feita com o intuito de obter uma otimização do desempenho do compósito, explorando melhor as características de cada material. Além disso, essa gradação suave mitiga problemas da mudança brusca de propriedades, tal como ocorre em materiais compósitos clássicos, evitando problemas de delaminação provocados por tensão entre lâminas (VEL; BATRA, 2002; GUPTA; TALHA, 2015).

Figura 1 – Materiais com gradação funcional.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os materiais compósitos com gradação funcional podem ser analisados segundo graduação contínua ou descontínua. Na graduação contínua há mudança suave da composição e da

microestrutura. Por outro lado, a microestrutura muda passo a passo na gradação descontínua, conforme é mostrado de forma aproximada na Figura 2 (UDUPA *et al.*, 2014; MIEDZIŃSKA, 2017).

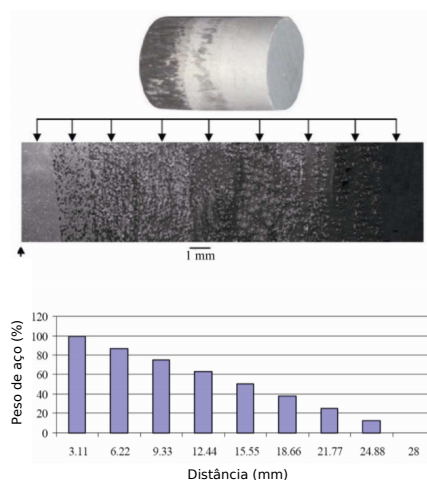
Figura 2 – Materiais com gradação funcional - gradação contínua e descontínua.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Essa diferença entre gradação contínua e descontínua torna-se importante quando se considera os diferentes métodos de fabricação. Dentre esses métodos, destaca-se a metalurgia em pó, que pode produzir MGF com aspecto contínuo ou em camadas. Por exemplo, metalurgia em pó com a compactação de camadas, *powder stacking*, produz MGF com aspecto de camada. Enquanto, MGF fabricado a partir de metalurgia em pó associado com sedimentação centrífuga produz material com gradação contínua (NEMAT-ALLA *et al.*, 2011). Um corpo de prova de MGF produzido por metalurgia em pó é mostrado na Figura 3. Detalhes sobre os diferentes processos de fabricação de materiais com gradação funcional podem ser encontrados nos trabalhos de Kieback *et al.* (2003), Nemat-Alla *et al.* (2011) e Udupa *et al.* (2014).

Figura 3 – Fabricação de MGF utilizando metalurgia em pó.



Fonte: adaptado de Nemat-Alla *et al.* (2011).

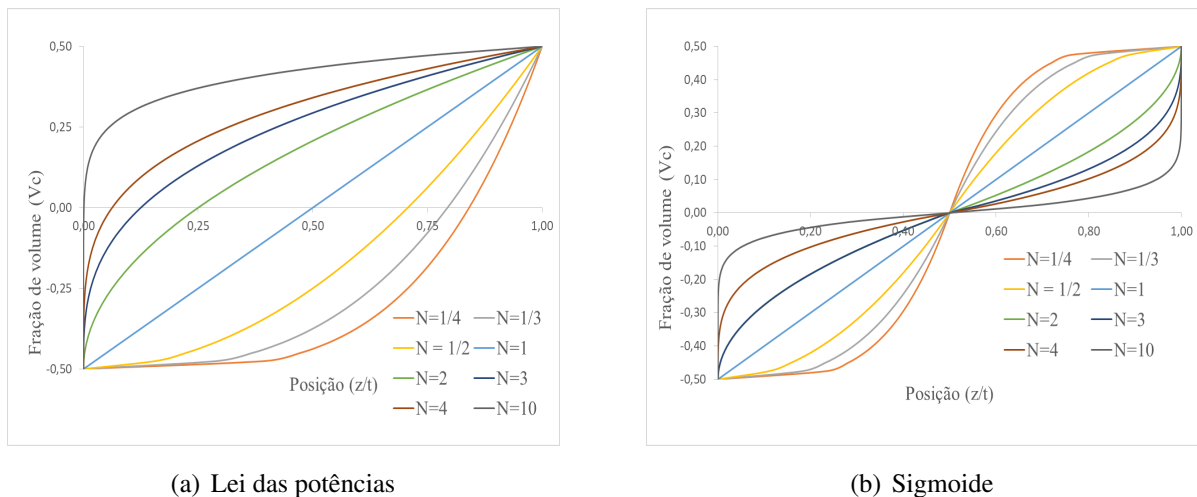
As aplicações dos MGFs se tornaram vastas desde sua primeira utilização na indústria aeroespacial. Destacando seu uso na área da saúde com implantes dentários e ortopédicos, na indústria automobilística com utilização em volantes de motor, em eixos de transmissão, em pistão de ignição, também há aplicação na área militar como em coletes à prova de balas, entre outros (SWAMINATHAN; SANGEETHA, 2017).

2.1 Distribuição das frações de volume

Os métodos de fabricação dos MGFs levam em consideração a distribuição espacial dos materiais constituintes. Como as propriedades de cada constituinte ou fase é diferente, as propriedades dos MGFs são influenciadas pela forma como ocorre a variação da composição do material ao longo de uma coordenada específica.

Dessa forma, é necessário determinar a distribuição dos constituintes, sendo alguns modelos muito citados na literatura, como a: lei das potências e sigmoide (SWAMINATHAN; SANGEETHA, 2017). A Figura 4 mostra a distribuição das frações de volume a partir da lei das potências e sigmoide.

Figura 4 – Distribuição das frações de volume.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O modo de distribuição a partir da lei das potências é dado por:

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N \quad (2.1)$$

onde z é a coordenada, h representa a espessura e N é o índice de fração de volume.

O modo de distribuição a partir da sigmoide é definida como:

$$V_{s1} = 1 + \left(\frac{z}{h} - \frac{1}{2} \right)^N, \quad 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (2.2)$$

$$V_{s2} = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N, \quad -h/2 \leq z \leq 0 \quad (2.3)$$

onde a variação de fração de volume dos constituintes do meio até o topo é V_{s1} e da parte inferior até o meio V_{s2} .

A distribuição dada pela lei das potências ou sigmoide é de fácil utilização para modelagem de MGFs, pois requer a definição de apenas um parâmetro. Entretanto, a literatura mostra que a distribuição real de frações de volume nem sempre é corretamente descrita por esses métodos. Desta forma, Medeiros Jr. e Parente Jr. (2020) realizaram análises com curvas *B-spline* que são capazes de representar com maior precisão as distribuições de fração de volume obtidas experimentalmente.

As curvas *B-Spline* são funções polinomiais, elas são definidas como uma combinação linear das funções de forma e um conjunto de pontos de controle. Utilizando as curvas *B-Spline*, a distribuição das frações de volume ao longo de uma direção pré-determinada é descrita por:

$$V_f(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p} V_{fi} \quad (2.4)$$

onde V_{fi} é a fração de volume nos pontos de controle e $N_{i,p}$ são as funções de forma (MEDEIROS JR.; PARENTE JR., 2020).

2.2 Propriedades efetivas

Em uma escala microscópica os materiais reais revelam uma multiplicidade de heterogeneidades, ainda que aparentem ser homogêneos em escala macroscópica. Essa heterogeneidade pode ocorrer de várias formas, como fraturas, vazios, partículas, lâminas e fibras, entre outras. No caso dos MGFs, essa heterogeneidade ocorrer devido à presença da matriz e do reforço (COSTA, 2017).

Dessa forma, surge a necessidade de investigar como esses fatores interferem no comportamento dos materiais. O comportamento microscópico do material pode ser descrito por meio do estado mecânico de um ponto material a nível macroscópico pelas chamadas propriedades efetivas.

Existem vários modelos analíticos que buscam determinar essas propriedades a partir de técnicas de homogeneização. Dentre esses modelos, destaca-se a lei das misturas (*Voigt*), *Mori-Tanaka*, e outros, sendo que a escolha de um ou outro modelo influencia diretamente na resposta das estruturas.

2.2.1 Lei das misturas

O método da lei das misturas, modelo de *Voigt*, é um dos mais simples e que vem sendo bastante utilizada na literatura. Ele consiste em uma média ponderada das propriedades dos constituintes, onde cada um deles contribui com sua fração de volume (CARABALLO, University of South Florida, 2011).

De acordo com a lei das misturas, as propriedades dos materiais como função das coordenadas são dadas por:

$$E(z, T) = (E_c(T) - E_m(T)) \cdot V_c(z) + E_m(T) \quad (2.5)$$

$$\nu(z, T) = (\nu_c(T) - \nu_m(T)) \cdot V_c(z) + \nu_m(T) \quad (2.6)$$

$$\alpha(z, T) = (\alpha_c(T) - \alpha_m(T)) \cdot V_c(z) + \alpha_m(T) \quad (2.7)$$

$$k(z, T) = (k_c(T) - k_m(T)) \cdot V_c(z) + k_m(T) \quad (2.8)$$

$$\rho(z, T) = (\rho_c(T) - \rho_m(T)) \cdot V_c(z) + \rho_m(T) \quad (2.9)$$

$$c(z, T) = (c_c(T) - c_m(T)) \cdot V_c(z) + c_m(T) \quad (2.10)$$

onde E , ν , α , k , ρ e c são respectivamente o módulo de elasticidade, coeficiente de poisson, coeficiente de dilatação térmica, condutividade térmica, massa específica e calor específico. V_c representa a fração de volume da cerâmica e o subscrito c e m representa os constituintes de cerâmica e metal, respectivamente, z representa a coordenada considerada, tal como a coordenada referente a espessura e T é a temperatura considerada. Destaca-se que as propriedades além de serem função das coordenadas geométricas, também são função da temperatura.

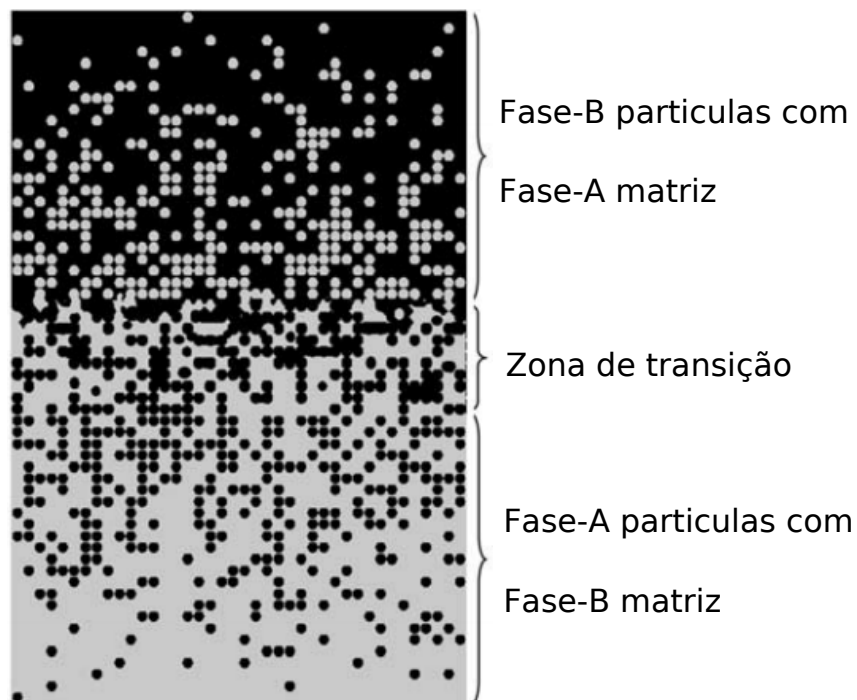
Apesar da lei das misturas ser amplamente utilizada para representação das propriedades efetivas de MGFs, ela nem sempre proporciona valores realistas para as propriedades em questão.

2.2.2 Mori-Tanaka

O método de Mori-Tanaka introduz uma avaliação da microestrutura na homogeneização, esse método é aplicável para materiais com gradação, cuja microestrutura possui matriz constitutiva bem definida e uma fase de partículas descontínuas, conforme mostra a Figura 5 (VEL; BATRA, 2002; SHEN, 2016).

Este método leva em consideração a interação do campo elástico entre inclusões vizinhas. Assume-se que a fase matriz é reforçada por partículas esféricas da fase particulada (REDDY; CHENG, 2001; SHEN, 2016).

Figura 5 – MGF com fases de fração de volume distribuídas em uma direção.



Fonte: adaptado de Yin *et al.* (2004).

De acordo com o método de Mori-Tanaka, os valores do módulo volumétrico efetivo

K e do módulo de cisalhamento efetivo G são calculados, respectivamente, por:

$$\frac{K - K_m}{K_c - K_m} = \frac{V_c}{1 + (1 - V_c) \frac{K_c - K_m}{K_m + \frac{4G_m}{3}}} \quad (2.11)$$

$$\frac{G - G_m}{G_c - G_m} = \frac{V_c}{1 + (1 - V_c) \frac{G_c - G_m}{G_m + f_m}} \quad (2.12)$$

$$f_m = \frac{G_m(9K_m + 8G_m)}{6(K_m + 2G_m)} \quad (2.13)$$

onde o coeficiente f_m é uma relação entre o módulo de cisalhamento e módulo volumétrico.

Os valores efetivos do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson são calculados, baseados no módulo volumétrico efetivo e no módulo de cisalhamento, respectivamente, por:

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \quad (2.14)$$

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \quad (2.15)$$

O coeficiente de condutividade térmico efetivo k e o coeficiente de expansão térmica α são determinados por (BRISCHETTO *et al.*, 2008; SHEN, 2016):

$$\frac{k - k_m}{k_c - k_m} = \frac{V_c}{1 + (1 - V_c) \left(\frac{k_c - k_m}{3k_m} \right)} \quad (2.16)$$

$$\frac{\alpha - \alpha_m}{\alpha_c - \alpha_m} = \frac{\frac{1}{k} - \frac{1}{k_m}}{\frac{1}{k_c} - \frac{1}{k_m}} \quad (2.17)$$

2.3 Variação das propriedades com a temperatura

Os materiais com gradação funcional são comumente usados sob condições severas de temperatura. Portanto, torna-se importante considerar a variação das propriedades mecânicas e térmicas com a temperatura (SHEN, 2016).

Além disso, Abbas (2014) acrescenta que os resultados das análises obtidas a partir da não consideração das propriedades em função da temperatura só são adequados para situações em que não ocorrem mudanças bruscas de temperatura, ou para materiais que não apresentam grande variação de suas propriedades com a temperatura. Portanto, para a obtenção de resultados precisos é necessário considerar essa variação.

Touloukian *et al.* (1970) apresentam um vasto estudo das propriedades variando com a temperatura, sendo o seu trabalho dividido em vários volumes, em que cada volume traz uma dada propriedade para uma classe de materiais.

Logo, as propriedades são calculadas como dependentes da temperatura como (TOULOUKIAN *et al.*, 1970):

$$P = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T^1 + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (2.18)$$

onde P_0 , P_1 , P_2 e P_3 são coeficientes que são únicos para cada material.

Reddy e Chin (1998) trazem os valores dos coeficientes para alguns metais e cerâmicas. Esses coeficientes permitem o cálculo das propriedades de forma dependente da temperatura, conforme pode ser visto nas Tabelas 1, 2, 3, 4 e 5.

Essas tabelas apresentam os coeficientes que definem a variação das propriedades (módulo de elasticidade, calor específico, coeficiente de Poisson, coeficiente de expansão térmica e condutividade térmica) com a temperatura para alguns materiais (Zircônia, óxido de alumínio, nitreto de silício, aço inoxidável, Níquel e a liga Ti-Al-4V). Tabelas com propriedades de outros materiais podem ser encontradas na literatura.

Tabela 1 – Condutividade térmica (W/mK).

Material	P0	P-1	P1	P2	P3
Zircônia	1,700	0.000	1.276e-4	-6,648e-8	0,000
Oxido de alumínio	-14,087	-1123,600	-6,227e-3	0.000	0,000
Nitreto de silício	13,723	0.000	-1,032e-3	5,466e-7	-7,876e-11
Ti-Al-4V	1,000	0.000	1,704e-2	0.000	0,000
Aço inoxidável	15,790	0.000	-1,264e-3	2,092e-6	-7,223e-11
Níquel _a	187,66	0.000	-2,869e-3	4,005e-6	-1,983e-9
Níquel _b	58,754	0.000	-4,614e-4	6.670e-7	-1,523e-10

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 2 – Coeficiente de expansão térmica (K^{-1}).

Material	P0	P-1	P1	P2	P3
Zircônia	12,76e-6	0,0	-1,45e-3	1,01e-5	-6,78e-11
Oxido de alumínio	6,83e-6	0,0	1.84e-4	0,0	0,0
Nitreto de silício	5,87e-6	0,0	9,04e-4	0,0	0,0
Ti-Al-4V	7,58e-6	0,0	6,64e-4	-3,15e-6	0,0
Aço inoxidável	12,33e-6	0,0	8,09e-4	0,0	0,0
Níquel	9,92e-6	0,0	8,71e-4	0,0	0,0

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 3 – Coeficiente de Poisson.

Material	P0	P-1	P1	P2	P3
Zircônia	0,29	0,0	-1,13e-4	0,0	0,0
Oxido de alumínio	0,26	0,0	0,0	0,0	0,0
Nitreto de silício	0,24	0,0	0,0	0,0	0,0
Ti-Al-4V	0,29	0,0	1,12e-4	0,0	0,0
Aço inoxidável	0,33	0,0	-2,00e-4	3,797e-7	0,0
Níquel	0,31	0,0	0,0	0,0	0,0

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 4 – Calor específico (J/kgK).

Material	P0	P-1	P1	P2	P3
Zircônia	487,34	0,0	3,049e-4	-6,037e-8	0,0
Oxido de alumínio	1471,97	-138,87	-2,241e-5	0,0	0,0
Nitreto de silício	555,11	0,0	1,016e-3	2,92e-7	-1,67e-10
Ti-Al-4V	625,30	0,0	-4,224e-4	7,179e-7	0,0
Aço inoxidável	496,56	0,0	-1,151e-3	1,636e-6	-5,863e-10
Níquel _a	-296,86	0,0	-1,712e-3	3,883e-5	3,123e-8
Níquel _b	637,38	0,0	-6.405e-4	6,52e-7	-1,542e-10

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 5 – Módulo de elasticidade (Pa).

Materia	P0	P-1	P1	P2	P3
Zircônia	244,27e9	0,0	-1,371e-3	1,214e-6	-3,681e-10
Oxido de alumínio	349,55e9	0,0	-3.853e-4	4,027e-7	-1,673e-10
Nitreto de silício	348,43e9	0,0	-3,07e-4	2,16e-7	-8,946e-11
Ti-Al-4V	122,56e9	0,0	-4,586e-4	0,0	0,0
Aço inoxidável	201,04e9	0,0	3,079e-4	-6,534e-7	0,0
Níquel	223,95e9	0,0	-2,794e-4	3,998e-9	0,0

Fonte: Elaborado pelo autor.

3 ANÁLISE TÉRMICA

Na realização da análise térmica faz-se necessário conhecer alguns conceitos a respeito da transferência de calor, tais como: leis da termodinâmica, processos de transferência de calor e condições de contorno dos problemas térmicos. A primeira lei da termodinâmica serve de base para a formulação e para a análise do problema térmico, pois fornece o balanço energético.

Os modos de transferência de calor conhecidos são a condução, convecção e radiação. Todos esses processos exigem a existência de diferença de temperatura e todos ocorrem do corpo de maior temperatura para o de menor temperatura. A condução é a transferência de energia das partículas mais energéticas de uma substância para as partículas vizinhas adjacentes menos energéticas, como resultado da interação entre elas. A convecção é o modo de transferência de energia entre uma superfície sólida e fluido (líquido ou gás) adjacente, que está em movimento e que envolve os efeitos combinados de condução e de movimento das partículas do fluido. Já a radiação é a energia emitida pela matéria sob a forma de ondas eletromagnéticas como resultado das mudanças nas configurações eletrônicas de átomos e moléculas (ÇENGEL; GHAJAR, 2012).

Nos problemas térmicos de materiais com gradação funcional o fenômeno da condução é o mais importante dos modos de transferência de calor, pois o objetivo primordial é a obtenção do perfil de temperatura ao longo do sólido. Por outro lado, os modos de transferência por convecção ou radiação podem ser tomados como condições de contorno para a solução do problema térmico.

3.1 Equação da condução de calor

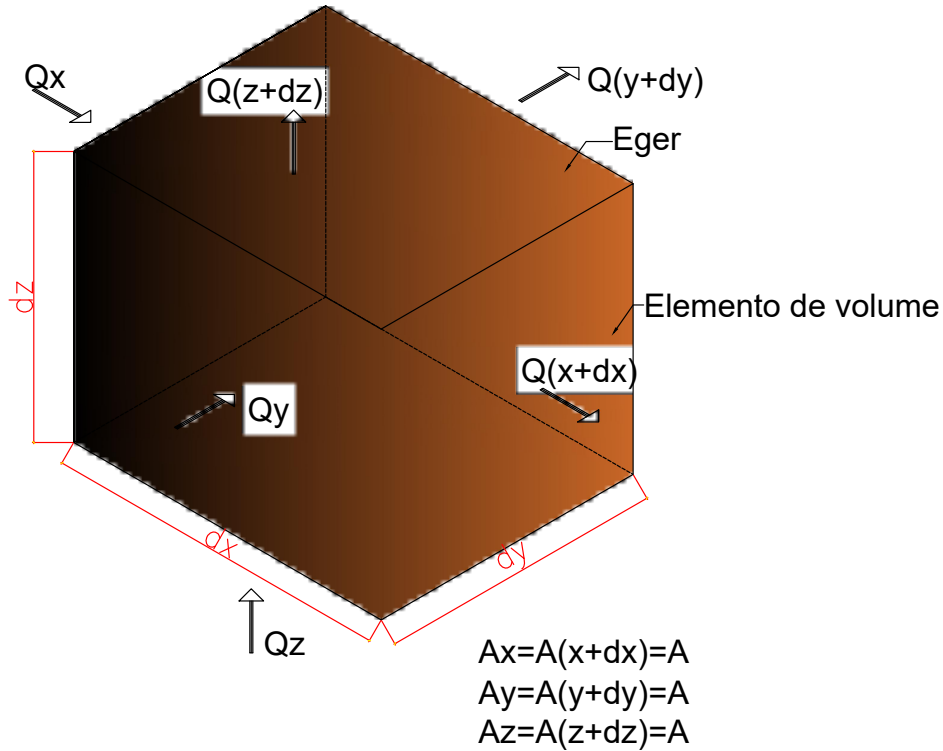
Segundo Çengel e Ghajar (2012), “a primeira lei da termodinâmica, também conhecida como princípio da conservação de energia, estabelece que a energia não pode ser criada nem destruída durante um processo, pode apenas mudar de forma”. Os mesmos autores definem o balanço energético como: a variação líquida da energia total de um sistema durante um processo é igual a diferença entre a energia total recebida e a energia total rejeitada pelo sistema durante o processo.

A Figura 6 representa o balanço energético para um elemento sólido, onde a variação da energia interna ΔE é dada a seguir:

$$Q_{entra} - Q_{sai} + E^{ger} = \Delta E \quad (3.1)$$

onde Q_{entra} representa a energia que entra no volume de controle, Q_{sai} é a energia que sai do volume de controle, E^{ger} é a energia gerada dentro do volume de controle e ΔE é a variação de energia no volume de controle.

Figura 6 – Balanço energético.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A lei de Fourier diz que a taxa de condução de calor de uma camada plana é proporcional à diferença de temperatura através da camada e à área de transferência de calor, mas inversamente proporcional à espessura da camada, onde a constante de proporcionalidade é a condutividade térmica do material (ÇENGEL; GHAJAR, 2012). Assim, a taxa de transferência de calor em um fluxo unidimensional pode ser calculada como:

$$Q_{cond} = -kA \frac{dT}{dx} \quad (3.2)$$

onde dT/dx é o gradiente térmico, k é a condutividade térmica (w/mK) e A é a área normal à direção de transferência. O sinal negativo indica que o fluxo se dá sempre da região de maior temperatura para a de menor temperatura.

A taxa de transferência de calor tem direção, sentido e magnitude, portanto é uma grandeza vetorial. Logo, para descrever a transferência de calor em um ponto deve-se indicar a direção, sentido e o módulo. A temperatura e a taxa de transferência de calor em qualquer

posição podem ser descritas pelo conjunto de três coordenadas: (x, y, z) para o sistema de coordenadas retangulares; (r, Φ, z) para o sistema de coordenadas cilíndricas; e (r, Φ, θ) para o sistema de coordenadas esféricas. Em coordenadas retangulares o vetor da taxa de transferência de calor pode ser descrito como (ÇENGEL; GHAJAR, 2012):

$$\mathbf{Q} = Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k} \quad (3.3)$$

onde \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} são os vetores unitários e Q_x , Q_y e Q_z são as magnitudes das taxas de transferência de calor nas direções x , y e z . Estas taxas são calculadas como:

$$Q_x = -kA_x \frac{\partial T}{\partial x} \quad Q_y = -kA_y \frac{\partial T}{\partial y} \quad Q_z = -kA_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.4)$$

onde A_x , A_y e A_z são áreas de condução de calor normais as direções x , y e z , respectivamente.

A variação da energia interna e a taxa de calor gerado por unidade de volume podem ser calculados como:

$$\Delta E = E_{t+\Delta t} - E_t = mc(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho c \Delta x \Delta y \Delta z (T_{t+\Delta t} - T_t) \quad (3.5)$$

$$E^{ger} = e^{ger} \Delta V = e^{ger} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (3.6)$$

onde ρ é a massa específica, m é a massa, c é o calor específico e e^{ger} é o calor gerado por unidade de volume, substituindo as Equações (3.5) e (3.6) na Equação (3.1), tem-se:

$$Q_x - Q_{x+dx} + Q_y - Q_{y+dy} + Q_z - Q_{z+dz} + e^{ger} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\rho c \Delta x \Delta y \Delta z (T_{t+\Delta t} - T_t)}{\Delta t} \quad (3.7)$$

dividindo por $\Delta x \Delta y \Delta z$ tem-se:

$$\frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{Q_x - Q_{x+dx}}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta x \Delta z} \frac{Q_y - Q_{y+dy}}{\Delta y} + \frac{1}{\Delta y \Delta x} \frac{Q_z - Q_{z+dz}}{\Delta z} + e^{ger} = \frac{\rho c (T_{t+\Delta t} - T_t)}{\Delta t} \quad (3.8)$$

sabe-se que $A_x = \Delta y \times \Delta z$, $A_y = \Delta x \times \Delta z$ e $A_z = \Delta x \times \Delta y$. Utilizando a Equação (3.4) e tomando o limite como Δx , Δy , Δz e $\Delta t \rightarrow 0$, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + e^{ger} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.9)$$

esta é a equação geral da condução de calor em coordenadas cartesianas para problemas transientes.

Em coordenadas cilíndricas, onde o balanço energético está representado na Figura 7, procedendo de maneira similar ao realizado na análise em coordenadas retangulares, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \Phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + e^{ger} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.10)$$

onde r e ϕ representam, respectivamente, as coordenadas radiais e angulares.

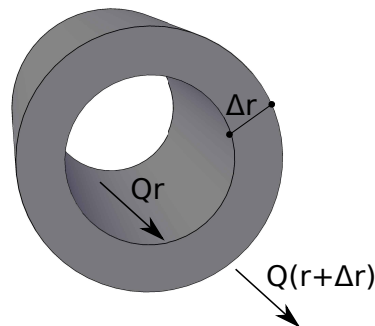
As Equações (3.9) e (3.10) representam o caso mais geral, ou seja, campo tridimensional com a temperatura variando em todas as três direções principais do meio. Entretanto, as placas e cascas podem ser consideradas como um problema de transferência de calor unidimensional, pois, geralmente o fluxo de calor e a graduação do material ocorrem apenas na direção da espessura. Nesse caso, a Equação (3.9) se reduz a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + e^{ger} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.11)$$

e a Equação (3.10) se reduz a:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(k r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + e^{ger} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.12)$$

Figura 7 – Balanço energético - Cilindro.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os problemas de transferência de calor podem ser classificados em de regime permanente e de regime transiente. Os de regime permanente são aqueles que não apresentam variação com o tempo, já os problemas que funcionam em regime transiente apresentam variação com o tempo (ÇENGEL; GHAJAR, 2012). As Equações (3.9) a (3.12) representam um fluxo transiente. Considerando o problema como sendo em regime permanente e sem geração interna de energia, a Equação (3.11) se reduz a:

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (3.13)$$

e a Equação (3.12) se reduz a:

$$\frac{d}{dr} \left(k r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (3.14)$$

As equações desta subseção foram obtidas a partir do balanço energético de um elemento diferencial no interior de um sólido, não considerando as condições térmicas da superfície deste meio sólido. Para descrever completamente a transferência de calor é necessário considerar as condições de contorno e as condições iniciais. As condições de contorno podem ser de temperatura especificada, fluxo de calor especificado, convecção, radiação e outros. As condições iniciais representam o campo de temperaturas no tempo inicial e devem ser especificadas no caso de regime transiente.

Destaca-se que para materiais com gradação funcional é necessário considerar a variação das propriedades com uma direção preestabelecida. Além disso, como esses materiais trabalham sob condições térmicas severas, também é recomendado considerar a variação destas propriedades com a temperatura. Então, a condutividade térmica, o calor específico e a massa específica devem ser considerados conforme discutido no Capítulo 2.

3.2 Métodos aproximados para solução do problema térmico

Na literatura existem uma série de soluções aproximadas para a determinação do campo de temperatura em placas e casca com gradação funcional. Uma alternativa muito utilizada é a solução por séries conforme exposto em Javaheri e Eslami (2002a), Javaheri e Eslami (2002b), Fazzolari e Carrera (2014), Tran *et al.* (2016) e Moita *et al.* (2018). Essa solução resolve problemas em regime permanente e com temperaturas prescritas nas faces superior e inferior, conforme descrito pela equação diferencial e pelas condições de contorno dadas por:

$$\frac{d}{dz} \left[k(z) \frac{dT}{dz} \right] = 0. \quad T = T_c \text{ em } z = \frac{h}{2} \quad e \quad T = T_m \text{ em } z = -\frac{h}{2} \quad (3.15)$$

onde $k(z)$ é o coeficiente de condutividade térmica, T_c e T_m são, respectivamente, a temperatura na cerâmica e no metal.

Essa solução considera que a condutividade térmica é dada pela lei das misturas, conforme:

$$k(z) = k_m + k_{cm} \left[\frac{2z + h}{2h} \right]^N \quad (3.16)$$

$$k_{cm} = k_c - k_m \quad (3.17)$$

onde k_c e k_m são as condutividades térmicas da cerâmica e do metal, respectivamente.

A solução utilizando a expansão de termos em série é dada por:

$$T(z) = T_m + \frac{\Delta T}{C} \left(\sum_{i=0}^n \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^{N \times i + 1} \left(\frac{-k_{cm}}{k_m} \right)^i \left(\frac{1}{N \times i + 1} \right) \right) \right) \quad (3.18)$$

onde n é o número de termos na série que para o caso de distribuição não uniforme de temperatura é obtida a partir de estudo de convergência e C é definido como:

$$C = \sum_{i=0}^n \left(\frac{\left(\frac{-k_{cm}}{k_m} \right)^i}{i \times N + 1} \right) \quad (3.19)$$

A precisão da solução da equação da condução de calor, sob regime permanente e com temperatura prescritas nas faces, a partir da expansão de termos em série é altamente influenciada pela quantidade de termos utilizada. Javaheri e Eslami (2002a), Javaheri e Eslami (2002b) e Moita *et al.* (2018) utilizam 5 termos para a solução com expansão de termos em série.

3.3 Solução por Elementos Finitos

A partir da forma forte representada pela equação diferencial e pelas condições de contorno do problema pode-se obter a forma fraca que serve de base para a formulação de métodos numéricos, em especial o Método dos Elementos Finitos (MEF). A forma fraca do problema de transferência de calor pode ser obtida pelo método de resíduos ponderados em que o método de Galerkin é o mais utilizado (COOK *et al.*, 2002).

Uma característica importante do método de Galerkin que o diferencia em relação aos outros métodos de resíduos ponderados, é que as funções de aproximação são iguais as funções peso (FISH; BELYTSCHKO, 2007).

A obtenção da forma fraca a partir da forma forte utiliza alguns teoremas matemáticos, tais como teorema de Green e teorema da divergência de Gauss. O teorema de Green associa integrais duplas com integrais de linha, já o teorema da divergência de Gauss associa integrais de superfície com integrais de volume (KREYSZIG, 2009).

3.3.1 Forma fraca e formulação do método de elementos finitos para regime transiente 1D

Problemas em regime transiente apresentam derivação no espaço e no tempo, admitindo-se que a forma forte segue as expressões do problema unidimensional a seguir:

$$\nabla^T Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{para } 0 \leq x \leq L \quad (3.20)$$

$$T(L, t) = \bar{T}, \quad T(0, t) = q_n \quad e \quad T(x, 0) = 0 \quad (3.21)$$

onde Q é dado pela lei de Fourier e é igual a $-Ak \nabla T$, as condições de contorno são temperatura prescrita em $x = 0$ e fluxo prescrito em $x = L$, a condição inicial é a temperatura ser igual a zero.

A Equação 3.20 descreve um problema de transferência de calor em regime transiente. A resolução de problemas de condução em regime transiente por meio do Método dos Elementos Finitos requerem a discretização no espaço e no tempo. Detalhes sobre a discretização no tempo podem ser encontrados em Lewis *et al.* (2004).

A forma fraca da Equação (3.20), com relação à discretização no espaço, pode ser obtida a partir da multiplicação por uma função peso e em seguida integrando sob esse domínio (LEWIS *et al.*, 2004):

$$\int_0^L v(x) \frac{\partial(Ak \frac{\partial T}{\partial x})}{\partial t} dx = \int_0^L \rho v(x) c \frac{\partial T}{\partial t} dx \quad (3.22)$$

utilizando integração por partes no primeiro termo da Equação (3.22) e rearranjando os termos, obtém-se:

$$\int_0^L \frac{\partial v(x)}{\partial x} Ak \frac{\partial T}{\partial x} dx + \int_0^L v(x) \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx = \left[v(x) Ak \frac{\partial T}{\partial x} \right]_0^L \quad (3.23)$$

sabendo que q representa fluxo e o substituindo em (3.23):

$$\int_0^L \frac{\partial v(x)}{\partial t} Ak \frac{\partial T}{\partial x} dx + \int_0^L v(x) \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx = - [v(x) Aq]_0^L \quad (3.24)$$

Na formulação de elementos finitos as funções de forma (\mathbf{N}) são usadas para interpolar a temperatura no elemento em função dos valores nodais \mathbf{T}_e . Conforme as equações a seguir:

$$T = \mathbf{N} \mathbf{T}_e \quad (3.25)$$

$$\partial T = \mathbf{B} \mathbf{T}_e \quad (3.26)$$

$$\mathbf{B} = \partial \mathbf{N} \quad (3.27)$$

$$\dot{T} = \mathbf{N} \dot{\mathbf{T}}_e \quad (3.28)$$

onde ∂ indica o gradiente, \mathbf{T}_e representa temperaturas nodais e \dot{T} é a derivada da temperatura em relação ao tempo.

A função peso é um escalar, então v é igual a v^T e a função peso pode ser aproximada por:

$$v(x) = \mathbf{N} \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \mathbf{N}^T = v^T \quad (3.29)$$

onde \mathbf{N} representa as funções de forma e \mathbf{a} é um vetor não nulo arbitrário.

A derivada da função peso é dada por:

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x} = \mathbf{a}^T \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} = \mathbf{a}^T \mathbf{B}^T \quad (3.30)$$

substituindo T , ∂T , \dot{T} , v e $\partial v/\partial x$ em (3.24) gera a seguinte Equação:

$$\int_0^L \mathbf{a}^T \mathbf{B}^T A k \mathbf{B} \mathbf{T}_e dx + \int_0^L \mathbf{a}^T \mathbf{N}^T \rho c \mathbf{N} \dot{\mathbf{T}}_e dx = - \left[\mathbf{a}^T \mathbf{N}^T A k q \right]_0^L \quad (3.31)$$

eliminando \mathbf{a} da Equação (3.31), obtém-se:

$$\int_0^L \mathbf{B}^T A k \mathbf{B} \mathbf{T}_e dx + \int_0^L \mathbf{N}^T \rho c \mathbf{N} \dot{\mathbf{T}}_e dx = - \left[\mathbf{N}^T A k q \right]_0^L \quad (3.32)$$

a Equação (3.32) pode ser escrita de forma compacta como:

$$\mathbf{C} \dot{\mathbf{T}}_e + \mathbf{K} \mathbf{T}_e = \mathbf{f} \quad (3.33)$$

onde \mathbf{C} , \mathbf{K} e \mathbf{f} são respectivamente a matriz de capacidade térmica, a matriz de rigidez térmica e o vetor de forças (fluxo), dadas por:

$$\mathbf{C} = \int_0^h \mathbf{N}^T \rho c \mathbf{N} dx \quad (3.34)$$

$$\mathbf{K} = \int_0^h \mathbf{B}^T A k \mathbf{B} dx \quad (3.35)$$

$$[\mathbf{f}] = - \left[\mathbf{N}^T A k q \right]_0^L \quad (3.36)$$

Para os materiais com gradação funcional deve-se considerar a variação das propriedades com as coordenadas geométricas e com a temperatura, portanto, a matriz de condutividade, calor específico e densidade devem considerar essa variação a partir dos métodos mencionados no capítulo 2.

Problemas de condução de calor em regime permanente não apresentam variação da temperatura com o tempo, logo a equação matricial para este tipo de regime é dada por:

$$\mathbf{K} \mathbf{T}_e = \mathbf{f} \quad (3.37)$$

Detalhes sobre a formulação de problemas de transferência de calor 1D em regime permanente por meio do Método dos Elementos Finitos podem ser encontrados em Ottosen e Petersson (1992), Lewis *et al.* (2004), Cook *et al.* (2002) e Fish e Belytschko (2007).

3.3.2 MEF para problemas 3D

Problemas em duas ou três dimensões têm calor fluindo em várias direções, esse fluxo de calor em várias direções pode ser representado por meio do vetor de fluxo \mathbf{q} , dado por:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

onde q_x , q_y e q_z são, respectivamente, as componentes do vetor \mathbf{q} nas direções x , y e z .

O vetor de fluxo está relacionado com o gradiente de temperatura, de acordo com a lei constitutiva do material. Nesse sentido, para problemas em 3D tem-se:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{D}\nabla T \quad (3.39)$$

onde \mathbf{D} é a matriz constitutiva, para materiais isotrópicos e não homogêneos essa matriz é dada por:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k(z) & 0 & 0 \\ 0 & k(z) & 0 \\ 0 & 0 & k(z) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Nesse sentido, a solução por elementos finitos para problemas 3D de transferência de calor segue o mesmo procedimento dos problemas em uma dimensão. Entretanto, as matrizes \mathbf{C} , \mathbf{K} e \mathbf{f} são diferentes por causa das suas multi dimensões (LEWIS *et al.*, 2004).

Desta forma, problemas em regime permanente em três dimensões assumiriam a forma matricial, Equação 3.37:

$$\mathbf{K}\mathbf{T}_e = \mathbf{f} \quad (3.41)$$

onde:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (3.42)$$

e

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{q} d\Omega \quad (3.43)$$

Utilizando um elemento quadrático, como mostrado na Figura 8, a temperatura pode ser escrita como:

$$T = \sum_{i=1}^{20} N_i T_i \quad (3.44)$$

e o vetor gradiente é dada por:

$$\partial T = \mathbf{B}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_{20}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_{20}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial N_{20}}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{20} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

substituindo as matrizes \mathbf{D} e \mathbf{B} em (3.42) obtém-se a matriz de rigidez do elemento, de forma similar, o vetor de fluxo \mathbf{f} pode ser obtido. A partir dessas matrizes, segue-se o procedimento regular de resolução pelo Método dos Elementos Finitos.

Figura 8 – Elemento DC3D20.



Fonte: Simulia (2010)

4 ANÁLISE TERMOMECAÂNICA

A termomecânica é a ciência que estuda o comportamento de corpos submetidos a carregamentos térmicos e mecânicos. Os primeiros trabalhos sobre termomecânica partiram de Duhamel (1837), onde foi apresentado a teoria da termoelasticidade desacoplada. Posteriormente, em Biot (1956) foi apresentado a teoria da termoelasticidade acoplada.

Na prática, a natureza mecânica e térmica dos problemas que envolvem a termoelasticidade são acopladas, ou seja, termos de temperatura aparecem na equação do movimento e termos de origem mecânica aparecem na equação da condutividade térmica. Entretanto, para a maioria dos problemas correntes de engenharia, é possível fazer simplificações, sem causar erros significativos. A principal simplificação é omitir termos de origem decorrente do acoplamento mecânico da equação da energia, outra simplificação é descartar termos de inércia na equação de movimento (BOLEY; WEINER, 2012). Portanto, é possível classificar os problemas decorrentes da termoelasticidade em acoplados, desacoplados, estacionários, acoplados quase estacionários e desacoplados quase estacionários. Nessa classificação, os problemas desacoplados desconsideram termos de origem mecânica na equação da condução de calor e os problemas quase estacionários desconsideram os termos inerciais na equação de equilíbrio (CARRERA *et al.*, 2016).

Em termos práticos pode-se analisar problemas termoelásticos de forma desacoplada, ou seja, termos de inércia e termos de origem mecânica são descartados na equação da energia. Segundo Carrera *et al.* (2016) esse acoplamento é importante em situações de choque térmico, em que ocorrem deformações de maneira rápida e significativa quantidade de energia mecânica é convertida em energia térmica.

4.1 Termoelasticidade linear desacoplada

Em geral, a variação do campo de temperatura de um corpo contínuo resulta em tensão térmica. A lei da termoelasticidade linear inclui equações de movimento, equações de conservação de energia e leis constitutivas. A principal diferença da teoria linear da termoelasticidade em relação a da elasticidade está associada as equações constitutivas, uma vez que as equações de equilíbrio e de compatibilidade continuam as mesmas (HETNARSKI; ESLAMI, 2009).

4.1.1 Equação do movimento

Considerando um corpo elástico sob ação de uma força de corpo \mathbf{X} por unidade de volume e uma força de tração superficial arbitrária \mathbf{t}_i . No instante de tempo t , o corpo ocupa o volume V e a área superficial é A , a força resultante atuando no corpo é (HETNARSKI; ESLAMI, 2009):

$$\mathbf{F}_i = \int_A \mathbf{t}_i^n dA + \int_V \mathbf{X}_i dV \quad (4.1)$$

a partir da formula de Cauchy, sabe-se:

$$\mathbf{t}_i^n = \sigma_{ji} \mathbf{n}_j \quad (4.2)$$

utilizando o teorema da divergência de Gauss, a Equação (4.1) transforma-se em:

$$\mathbf{F}_i = \int_V (\sigma_{ji,j} + \mathbf{X}_i) dV \quad (4.3)$$

sabe-se que o momento linear é dado por:

$$\rho_i = \int_V \rho \dot{\mathbf{u}}_i dV \quad (4.4)$$

a lei de movimento de Newton requer que:

$$\mathbf{F}_i = \dot{\rho}_i \quad (4.5)$$

substituindo as Equações (4.3) e (4.4) em (4.5), tem-se:

$$\int_V \rho \ddot{\mathbf{u}}_i dV = \int_V (\sigma_{ji,j} + \mathbf{X}_i) dV \quad (4.6)$$

O volume V é arbitrário e pode-se reduzir a Equação (4.6) a:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_i = \sigma_{ji,j} + \mathbf{X}_i \quad (4.7)$$

A Equação (4.7) representa a equação de movimento, soluções dessa equação requerem a especificação de condições de contorno para avaliação das constantes de integração (HETNARSKI; ESLAMI, 2009). Em coordenadas retangulares a equação de movimento é expandida como:

$$\rho \begin{bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

4.1.2 Conservação de energia

O princípio da conservação de energia representa o balanço de todas as formas de energia possíveis decorrentes do comportamento térmico e mecânico, esse balanço assume a forma (CARRERA *et al.*, 2016):

$$\varepsilon_I + \varepsilon_G = \varepsilon_S + \varepsilon_O \quad (4.9)$$

onde ε_I é a taxa de energia que entra no volume de controle, ε_G é a taxa de geração de energia no volume de controle, ε_S taxa de energia armazenada no volume de controle e ε_O é a taxa de energia que deixa o volume de controle.

Considerando que não há energia entrando no volume de controle ε_I , a energia gerada no volume ε_G por aquecimento volumétrico e^{ger} gera uma contribuição energética de:

$$\varepsilon_G = \int_V e^{ger} dV \quad (4.10)$$

O desacoplamento ou desacoplamento parcial denota uma situação em que a mudança no estado de energia térmica causa mudança no estado de energia mecânica, mas o oposto não é verdadeiro. O acoplamento completo considera que uma mudança no estado energético térmico causa mudança no estado energético mecânico e vice-versa. Portanto, para o acoplamento parcial, é assumido que a energia interna é função da temperatura do material e da capacidade do material de armazenar energia a partir de sua capacidade térmica (CARRERA *et al.*, 2016):

$$\Delta u = \rho c(T) \Delta T \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.12)$$

a taxa de armazenamento de energia no volume inteiro é dada por:

$$\varepsilon_S = \int_V \rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} dV \quad (4.13)$$

a contribuição final é dada pela energia que deixa o volume de controle que pode ser obtida a partir da integração do vetor de fluxo de calor normal a superfície \mathbf{q}_i , conforme:

$$\varepsilon_O = \int_{\Omega} \mathbf{q}_i \mathbf{n}_i d\Omega \quad (4.14)$$

aplicando o teorema da divergência de Gauss na Equação (4.14), tem-se:

$$\dot{\varepsilon}_O = \int_V \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial \mathbf{x}_i} dV \quad (4.15)$$

substituindo as Equações (4.15), (4.13) e (4.10) em (4.9) e considerando que o volume V é arbitrário obtém-se:

$$\rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial \mathbf{x}_i} - E^{ger} = 0 \quad (4.16)$$

Percebe-se que a Equação (4.16) é análoga as equações do item 3.1 desse texto, pois adotou-se o desacoplamento parcial.

4.1.3 Modelo constitutivo

A teoria linear da termoelasticidade obtém os componentes do tensor de deformações e do tensor tensão a partir das considerações de que as deformações que ocorrem são pequenas e que não ocorre mudanças bruscas de temperatura. Nesta teoria linear, o tensor de deformações é baseado na soma dos tensores de deformações térmicas e mecânicas (princípio da superposição). O tensor de deformações mecânico e térmico são dados por (CARRERA *et al.*, 2016):

$$\epsilon_{ij}^M = \frac{1}{2G} (\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij}) \quad (4.17)$$

$$\epsilon_{ij}^T = \alpha (T_{abs} - T_{ref}) \delta_{kj} \quad (4.18)$$

onde α é o coeficiente de expansão térmica, G é o módulo de cisalhamento e ν é o coeficiente de Poisson.

A Equação (4.18) representa uma propriedade de materiais isotrópicos na qual mudança de temperatura não resulta em mudança de ângulo de cisalhamento. A partir de combinação das Equações (4.17) e (4.18), tem-se:

$$\epsilon_{ij} = \alpha (T_{abs} - T_{ref}) \delta_{kj} + \frac{1}{2G} (\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij}) \quad (4.19)$$

A Equação (4.19) é conhecida como lei constitutiva da termoelasticidade linear, resolvendo-a em termos do tensor tensão obtém-se:

$$\sigma_{ij} = 2G \left[\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\epsilon_{kk} - \frac{1-\nu}{\nu} \alpha (T_{abs} - T_{ref}) \right) \delta_{ij} \right] \quad (4.20)$$

As constantes de Lamé são definidas como:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.21)$$

rescrevendo as Equações (4.19) e (4.20) em termos das constantes de Lamé, obtém-se:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + \alpha (T_{abs} - T_{ref}) \delta_{ij} \quad (4.22)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \left[\lambda \epsilon_{kk} - \alpha (3\lambda + 2\mu) (T_{abs} - T_{ref}) \right] \delta_{ij} \quad (4.23)$$

4.2 Considerações sobre o acoplamento

Problemas acoplados levam em consideração a variação do primeiro invariante do tensor de deformações com o tempo na primeira lei da termodinâmica, isso causa dependência entre os campos de temperatura e deformação e, portanto, cria um acoplamento entre os campos elásticos e térmicos. A situação de acoplamento precisa ser levada em consideração quando o campo de variação das condições de contorno com o tempo, ou quando as cargas térmicas impostas, são grandes o suficiente para excitar a propagação de ondas de tensão térmica (HETNARSKI; ESLAMI, 2009).

4.2.1 Equação de condutividade considerando o acoplamento

O balanço de calor para um elemento relacionando os componentes do vetor de fluxo de calor com a taxa específica de calor entrando no corpo é dado por (HETNARSKI; ESLAMI, 2009):

$$Q = -\mathbf{q}_{i,i} \quad (4.24)$$

A lei de Fourier estabelece que o fluxo de calor através de uma área unitária é proporcional a distribuição de temperatura de acordo com:

$$\mathbf{q}_i = -\mathbf{k}_{ij} \mathbf{T}_{,j} \quad (4.25)$$

onde k_{ij} é o coeficiente de condutividade térmica de um material anisotrópico geral, a segunda lei da termodinâmica estabelece que:

$$\delta Q = T dS \quad (4.26)$$

$$\dot{Q} = T \dot{S} = T \frac{dS}{dt} \quad (4.27)$$

onde S representa a entropia. Da termodinâmica tem-se que a derivada parcial da entropia e o calor específico a deformação constante são:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + \frac{\partial S}{\partial T} \frac{dT}{dt} \quad (4.28)$$

$$c_e = \frac{T}{\rho} \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{-T}{\rho} \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \quad (4.29)$$

Considerando um material que obedece a seguinte lei constitutiva:

$$\sigma_{ij} = \mathbf{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} (T - T_{ref}) \quad (4.30)$$

onde β_{ij} e C_{ijkl} são constantes gerias de materiais anisotrópicos. Derivando-se a Equação (4.30) em relação a temperatura e considerando conceitos da termodinâmica, tem-se:

$$-\beta_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} = \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial \epsilon_{ij}} = -\frac{\partial S}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (4.31)$$

onde F representa a energia livre de Helmholtz. Considerando a relação dada na Equação (4.28) e substituindo as Equações (4.29) e (4.31) em (4.27), tem-se:

$$\dot{Q} = T \beta_{ij} \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} + c_e \rho \frac{dT}{dt} \quad (4.32)$$

substituindo as Equações (4.25) e (4.32) em (4.24)

$$c_e \rho \dot{T} = (\mathbf{k}_{ij} \mathbf{T}_{,j})_{,i} - T_{ref} \left(1 + \frac{\theta}{T_{ref}}\right) \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (4.33)$$

Na Equação (4.33) há o acoplamento entre os campos de temperatura e deformação, portanto, qualquer tentativa de definir a distribuição de temperatura no corpo deve considerar simultaneamente as equações da termoelasticidade (HETNARSKI; ESLAMI, 2009). A Equação (4.33) é a forma mais geral da primeira lei da termodinâmica, ela descreve o balanço energético de um corpo sólido em um meio contínuo heterogêneo e anisotrópico. Para o caso de MGFs, as propriedades não iriam variar em todas as direções, mas haveria variação constitutiva ao longo de uma determinada direção.

Boley e Weiner (2012) escrevem a equação da energia, considerando o acoplamento, da seguinte forma:

$$(\mathbf{KT}_{,i})_{,j} = \rho c_v \dot{T} \left[1 + \delta \left(\frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} \right) + \frac{\dot{\epsilon}_{kk}}{\alpha \dot{T}} \right] \quad (4.34)$$

onde o parâmetro δ é definido como:

$$\delta = \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 \alpha^2 T_{ref}}{\rho^2 c_v v_e^2} \quad (4.35)$$

onde v_e é a velocidade de propagação da onda de dilatação em um meio contínuo, ela é dada por:

$$v_e = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (4.36)$$

Segundo Boley e Weiner (2012), os termos de acoplamento na Equação (4.34) podem ser negligenciados se:

$$\frac{\epsilon_{kk}}{3 \alpha \dot{T}} \ll \left(\frac{\lambda + \frac{2\mu}{3}}{\lambda + 2\mu} \right) \frac{1}{\delta} \quad (4.37)$$

ainda segundo Boley e Weiner (2012), a possibilidade de omitir os termos de acoplamento ocorrem quando δ é muito menor que a unidade e quando a taxa de deformação é da mesma ordem de grandeza da taxa de variação da temperatura.

4.2.2 Equações de problemas acoplados.

Segundo Hetnarski e Eslami (2009) as equações do problema acoplados envolvem a equação de movimento, a relação entre deformação e deslocamento, a lei de Hooke para materiais termoelásticos e isotrópicos e a equação da energia.

A equação de movimento é:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_i = \sigma_{ji,j} + \mathbf{X}_i \quad (4.38)$$

a relação linear entre deformação e deslocamento:

$$\epsilon_{kj} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{k,j} + \mathbf{u}_{j,k} \quad (4.39)$$

a lei de Hooke para materiais termo-elásticos isotrópicos:

$$\sigma_{kj} = 2\mu \epsilon_{kj} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{kj} - (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_{ref}) \delta_{kj} \quad (4.40)$$

a equação de energia:

$$c_e \rho \dot{T} = (\mathbf{k}_{ij} \mathbf{T}_{,j})_{,i} - T_{ref} \left(1 + \frac{\theta}{T_{ref}}\right) \beta_{ij} \epsilon_{ij} \quad (4.41)$$

As três primeiras equações podem ser combinadas para dar a equação de movimento em termos dos componentes de deslocamentos como:

$$\mu \mathbf{u}_{i,kk} + (\lambda + \mu) \mathbf{u}_{k,ki} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \mathbf{T}_{,i} = \rho \ddot{\mathbf{u}}_i \quad (4.42)$$

As Equações (4.41) e (4.42) são equações de deslocamento-temperatura para problemas acoplados da termoelasticidade para um sólido contínuo. As condições iniciais e de contorno para cargas térmicas e mecânicas devem ser especificadas nas equações de movimento e energia para descrever completamente o problema.

4.3 Formulação numérica

4.3.1 Forma fraca.

Para problemas tridimensionais a equação de equilíbrio é dada por (4.8). Para problemas quase-estacionários ela é (OTTOSEN; PETERSSON, 1992):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

As condições de contorno devem ser satisfeitas na superfície do corpo, onde há atuação de forças de tração \mathbf{t} dadas por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_x \\ \mathbf{t}_y \\ \mathbf{t}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}n_x & \sigma_{xy}n_y & \sigma_{xz}n_z \\ \sigma_{yx}n_x & \sigma_{yy}n_y & \sigma_{yz}n_z \\ \sigma_{zx}n_x & \sigma_{zy}n_y & \sigma_{zz}n_z \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

considerando um vetor arbitrário \mathbf{v} :

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_x \\ \mathbf{v}_y \\ \mathbf{v}_z \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

em concordância com as relações cinemáticas, tem-se:

$$\tilde{\nabla} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

a partir da Equação (4.46), tem-se a relação:

$$(\tilde{\nabla} \mathbf{v})^T \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \sigma_{zz} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \sigma_{xy} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \sigma_{xz} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \sigma_{yz} \quad (4.47)$$

multiplicando a primeira linha da Equação (4.43) por uma função arbitrária v_x e integrando no volume, tem-se:

$$\int_v \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} v_x dV + \int_v \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} v_x dV + \int_v \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} v_x dV + \int_v X_x v_x dV \quad (4.48)$$

após manipulações matemáticas obtém-se:

$$\int_S v_x \sigma_{xx} n_x dS - \int_v \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} v_x dV + \int_S v_x \sigma_{xy} n_y dS - \int_v \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} v_x dV + \int_S v_x \sigma_{xz} n_z dS - \int_v \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} v_x dV + \int_v X_x v_x dV = 0 \quad (4.49)$$

substituindo a componente t_x do vetor \mathbf{t} na Equação (4.49) obtém-se:

$$\int_S v_x t_x dS - \int_v \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \sigma_{xz} \right) dV + \int_v X_x v_x dV = 0 \quad (4.50)$$

de maneira similar, a segunda e terceira linhas da Equação 4.8 são multiplicadas por funções arbitrárias v_y e v_z , respectivamente e obtém-se:

$$\int_S v_y t_y dS - \int_V \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \sigma_{yx} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \sigma_{yz} \right) dV + \int_V X_y v_y dV = 0 \quad (4.51)$$

$$\int_S v_z t_z dS - \int_V \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \sigma_{zx} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \sigma_{zy} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \sigma_{zz} \right) dV + \int_V X_z v_z dV = 0 \quad (4.52)$$

adicionando as Equações (4.50), (4.51) e (4.52):

$$\begin{aligned} \int_S (v_x t_x + v_y t_y + v_z t_z) dS - \int_V \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \sigma_{xz} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \sigma_{xy} + \right. \\ \left. \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \sigma_{xz} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \sigma_{zy} \right) dV + \int_V (X_x v_x + X_y v_y + X_z v_z) dV = 0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

utilizando a Equação (4.47) obtém-se:

$$\int_V (\tilde{\nabla} \mathbf{v})^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_S \mathbf{v}^T \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{v}^T \mathbf{X} dV \quad (4.54)$$

A Equação (4.54) representa a forma fraca da equação diferencial (4.43) submetida às condições de contorno (4.44).

4.3.2 Formulação por elementos finitos.

De posse da forma fraca, Equação (4.54), pode-se extrair a formulação de elementos finitos para a elasticidade. Nesta formulação os deslocamentos são aproximados por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{u}_e \quad (4.55)$$

onde \mathbf{u}_e são valores de deslocamentos nodais, \mathbf{u} é o deslocamento no elemento e \mathbf{N} são funções de forma.

$$\mathbf{v} = \mathbf{N} \mathbf{c} \quad (4.56)$$

$$\tilde{\nabla} \mathbf{v} = \mathbf{B} \mathbf{c} \quad (4.57)$$

$$\mathbf{B} = \tilde{\nabla} \mathbf{N} \quad (4.58)$$

onde \mathbf{v} e \mathbf{c} são vetores arbitrários e \mathbf{N} são funções de forma.

Inserindo (4.56), (4.57) e (4.58) em (4.54) e observando que \mathbf{c} é independente do sistema de coordenadas tem-se:

$$\mathbf{c} \left(\int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS - \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{X} dV \right) = 0 \quad (4.59)$$

como \mathbf{c} é uma matriz arbitraria, conclui-se:

$$\int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS - \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{X} dV = 0 \quad (4.60)$$

O lado direito da Equação (4.54) pode ser visto como forças atuando em pontos nodais. O modelo constitutivo da termoelasticidade pode ser definido de forma simplificada como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \mathbf{B} \boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}_0 \quad (4.61)$$

onde \mathbf{D} é a matriz constitutiva e $\boldsymbol{\epsilon}_0$ contém a deformação inicial. Em problemas termoelásticos, a deformação inicial é conhecida e assumida como sendo devida à temperatura, deformação térmica, onde a temperatura é definida previamente (OTTOSSEN; PETERSSON, 1992).

Da cinemática tem-se que:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \tilde{\nabla} \mathbf{u} \quad (4.62)$$

das Equações (4.55), (4.57) e (4.58) obtém-se:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B} \mathbf{u}_e \quad (4.63)$$

então, pode-se escrever (4.61) como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u}_e - \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}_0 \quad (4.64)$$

substituindo (4.64) em (4.60) e realizando alguns procedimentos matemáticos, obtém-se:

$$\mathbf{u}_e \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV - \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS - \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{X} dV - \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}_0 dV = 0 \quad (4.65)$$

Considerando as condições de contorno, as quais são ou tensão especificada na superfície, condições de contorno naturais, ou deslocamentos pre-estabelecidos (condições de contorno essenciais). Sendo que as condições de contorno podem ser escritas na forma:

$$\mathbf{t} = \mathbf{S}_n = \mathbf{h} \text{ em } S_h \quad (4.66)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ em } S_g \quad (4.67)$$

onde \mathbf{h} e \mathbf{g} são vetores conhecidos, isto significa que o vetor de tração \mathbf{t} é conhecido ao longo do contorno S_h e o deslocamento \mathbf{u} é conhecido em S_g . O contorno total S é formado por S_h e S_g . Com essa formulação (4.60) assume a forma:

$$\mathbf{u}_e \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV - \int_{S_g} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS - \int_{S_h} \mathbf{N}^T \mathbf{h} dS - \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{X} dV - \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}_0 dV = 0 \quad (4.68)$$

em forma compacta escreve-se:

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_e = \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_l \quad (4.69)$$

onde:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (4.70)$$

$$\mathbf{f}_b = \int_{S_g} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \int_{S_h} \mathbf{N}^T \mathbf{h} dS \quad (4.71)$$

$$\mathbf{f}_0 = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \epsilon_0 \quad (4.72)$$

$$\mathbf{f}_l = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{X} dV \quad (4.73)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez, \mathbf{f}_b é o vetor de superfície, \mathbf{f}_0 é o vetor de deformações iniciais e \mathbf{f}_l é o vetor de cargas, respectivamente.

De forma simplificada:

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_e = \mathbf{f} \quad (4.74)$$

onde $\mathbf{f} = \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_l + \mathbf{f}_0$

Na análise termomecânica desacoplada a deformação inicial ϵ_0 é a deformação térmica, logo, uma análise térmica deve ser realizada antes da análise mecânica com o intuito de obter a distribuição de temperatura. Com a temperatura T , a deformação inicial ϵ_0 é:

$$\epsilon_0 = \alpha (T_{abs} - T_{ref}) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (4.75)$$

onde α é o coeficiente de expansão térmica, T_{ref} é a temperatura inicial, T_{abs} é a temperatura final.

Portanto, com (4.75) e (4.69) obtém-se a resposta elástica de um corpo submetido a carregamento térmico e mecânico.

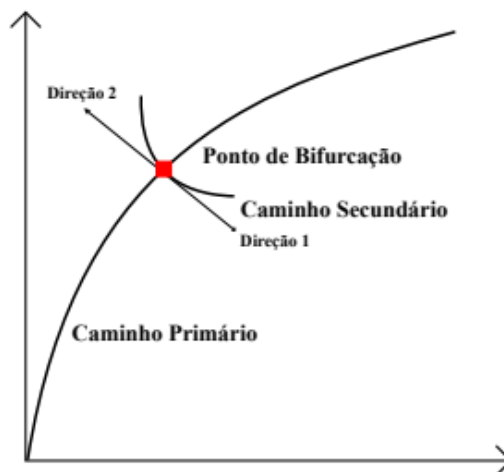
Materiais com gradação funcional possuem heterogeneidade ao longo de uma direção pré estabelecida, logo deve-se considerar essa mudança nas propriedades por meio dos métodos da seção 2, e considera-se essa mudança de propriedades na matriz constitutiva.

5 ESTABILIDADE

A falha por perda de estabilidade ocorre em elementos estruturais esbeltos e acontece quando uma pequena perturbação aplicada à estrutura faz com que essa passe de uma configuração de equilíbrio para outra. Essa perda de estabilidade pode ser caracterizada como uma grande variação no deslocamento de uma peça devido a uma pequena variação no carregamento aplicado (CHAJES, 1974; GALAMBOS; SUROVEK, 2008).

Existem dois tipos de perda de estabilidade: por bifurcação e por ponto limite. A perda de equilíbrio por bifurcação é representada por pontos que apresentam mudança brusca na trajetória de equilíbrio, conforme mostrado na Figura 9 (PEZZIN *et al.*, 2019).

Figura 9 – Ponto de bifurcação



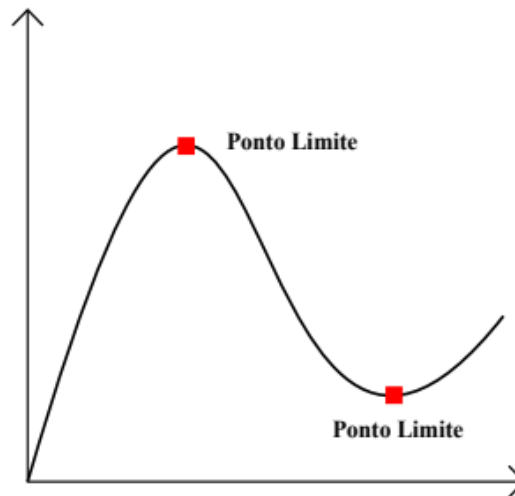
Fonte: Auad (2019)

A estrutura pode também perder sua estabilidade sem que ocorra bifurcação, nesse caso não existe uma configuração de equilíbrio alternativa e a perda de estabilidade dá-se por ponto limite, como mostrado na Figura 10. Nesta situação, o ponto limite ocorre onde a tangente à curva carga-deslocamento é nula. Destaca-se que os pontos limites podem ser de cargas, *snap through*, ou de deslocamento, *snap-back* (PEZZIN *et al.*, 2019).

Conforme visto a perda de estabilidade pode ocorrer por ponto limite ou por bifurcação, em ambos os casos de perda de estabilidade tem-se que a matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_t é singular nesses pontos, portanto:

$$\det \mathbf{K}_t(\mathbf{u}, \lambda) = 0 \quad (5.1)$$

Figura 10 – Ponto de limite



Fonte: Auad (2019)

Pode-se utilizar a condição de autovalor nulo para o cálculo da carga crítica, conforme:

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{u}, \lambda) \delta \mathbf{u}_{ref} = 0, \phi \mathbf{u}_{ref} = 1 \quad (5.2)$$

onde $\phi \mathbf{u}_{ref}$ é o modo de flambagem.

Nos problemas de estabilidade, a mudança na geometria tem efeito significativo nos esforços internos da estrutura. Portanto, é necessário levar em consideração a não linearidade geométrica. Nas equações formuladas até esta seção levou-se em consideração a linearidade geométrica, ou seja, assumiu-se que os deslocamentos são pequenos e as mudanças na configuração geométrica do sólido podem ser ignoradas no comportamento da estrutura. Por outro lado, o caso não linear geométrico considera grandes deslocamentos. Destaca-se que apesar da consideração de grandes deslocamentos, as deformações ainda são consideradas pequenas, devido às deformações impostas pelos materiais utilizados em engenharia (BONET; WOOD, 1997; BORST *et al.*, 2012).

As análises considerando os deslocamentos moderados e grandes são realizadas por meio da incorporação de termos de deformações não lineares no tensor de deformação. Por exemplo pode-se levar em consideração a não-linearidade utilizando termos não lineares no tensor de deformações de Green (BORST *et al.*, 2012).

A resolução das equações de equilíbrio não lineares requerem a utilização de métodos apropriados, métodos capazes traçar o caminho de equilíbrio, determinar os pontos limites e

caminhos secundários. Os métodos para o traçado do caminho de equilíbrio serão apresentados no próximo Item.

5.1 Traçado do caminho de equilíbrio.

O estudo do comportamento pós-crítico é fundamental em diversas estruturas, pois é capaz de determinar fatores como: sensibilidade às imperfeições iniciais, reserva de carga no regime pós-crítico e o tipo de perda de estabilidade (AUAD, 2019). Essas curvas são obtidas pelos pares de solução (u, λ) do sistema de equação de equilíbrio da estrutura, dado por:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \lambda) - \lambda \mathbf{q}_{ref} \quad (5.3)$$

onde \mathbf{r} é o vetor de resíduos, \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos, \mathbf{q}_{ref} é a carga de referência e λ é o fator de carga, que controla o nível de carregamento aplicado à estrutura.

O caminho de equilíbrio é o conjunto de pontos (u, λ) que satisfazem a Equação (5.3). De posse desses pontos, é possível obter um gráfico de carga versus deslocamento e a partir dele é possível determinar se uma estrutura sofre perda de estabilidade por bifurcação ou por ponto limite (PARENTE JR. *et al.*, 2006).

O traçado do caminho de equilíbrio é um procedimento incremental e iterativo que a cada passo (incremento), começando a partir de um ponto conhecido $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\lambda})$, procura-se o próximo ponto da curva carga-deslocamento. Para a solução do sistema de equações, por serem não lineares, também é necessário um método apropriado, entre os métodos utilizados tem-se: controle de carga, controle de deslocamento, comprimento de arco e outros.

5.1.1 Métodos de traçado do caminho de equilíbrio

O sistema de equações não lineares, Equação (5.3) tem N+1 variáveis e apenas N equações, o método de controle de cargas supera essa limitação pela eliminação de uma variável, prescrevendo o fator de cargas no começo de cada passo e mantendo-o fixo durante o processo iterativo (PARENTE JR. *et al.*, 2006; AUAD, 2019). A linearização da Equação (5.3) fornece:

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{,u} \delta \mathbf{u} = \mathbf{r}_i + \mathbf{K} \delta \mathbf{u} \quad (5.4)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez tangente, i é o número de iteração e $\delta \mathbf{u}$ representa o fator de correção do vetor de deslocamento nodal.

O fator de correção δu pode ser computado a partir de $r_{i+1} = 0$, o que leva ao sistema linear:

$$\mathbf{k}\delta\mathbf{u} = -\mathbf{r}_i \quad (5.5)$$

$$\mathbf{K}\delta u = \lambda \mathbf{q}_{ref} - \mathbf{g}_i \quad (5.6)$$

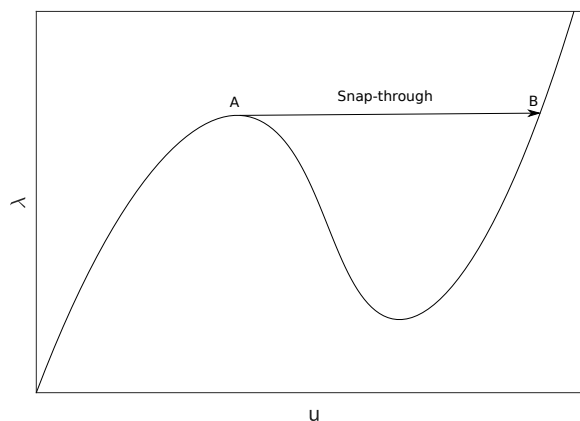
após calcular δu , o deslocamento nodal é atualizado por meio de:

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \delta\mathbf{u} \quad (5.7)$$

O processo iterativo continua até que a norma do vetor de resíduos se torne menor que uma tolerância preestabelecida.

O método de controle de cargas é muito utilizado para análises não linear, entretanto, ele não pode traçar o caminho de equilíbrio além de um certo ponto, ponto limite, fornecendo informações incompletas ou erradas a respeito de estabilidade de estruturas. Por exemplo, o método do controle de carga não é capaz de representar o comportamento apresentado na Figura 11 e na Figura 12. Nesses casos acontece um salto dinâmico, na Figuras 11 e 12 há um salto do ponto A ao ponto B.

Figura 11 – snap-through



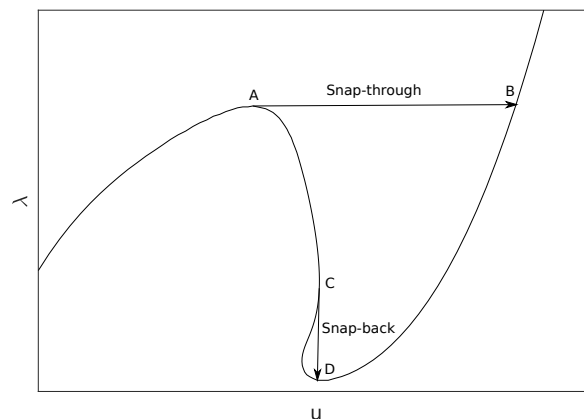
Fonte: Elaborado pelo autor

Em alternativa ao método de controle de cargas existe o método de controle de deslocamentos, ele funciona com a imposição de incrementos de deslocamento. Esse método causa o desenvolvimento de tensão na peça, que por sua vez resulta em forças nos nós em que os deslocamentos foram prescritos (BORST *et al.*, 2012).

O método de controle de deslocamentos apresenta algumas vantagens em relação ao método de controle de cargas, como: o método de controle de deslocamento tende a ter convergência mais rápida. Além disso, no método de controle de cargas, a matriz de rigidez torna-se singular nos pontos onde há um máximo local, não apenas nos pontos onde ocorre falha, isso não ocorre no método de controle de deslocamentos.

O método de controle de deslocamento é capaz de simular o comportamento dado por estruturas que sofrem o salto dinâmico, como mostrado na Figura 11. Entretanto, esse método não é capaz de representar completamente comportamentos complexos, os quais apresenta *snap-back*, nesses casos, como ocorre na Figura 12, há um salto do ponto C ao ponto D quando se utiliza o método de controle de deslocamentos (CRISFIELD, 1997).

Figura 12 – snap-back e snap-through



Fonte: Elaborado pelo autor

Para superar as limitações dos métodos de controle de cargas e deslocamentos pode-se utilizar o método de comprimento de arco. Este método foi inicialmente introduzido por Riks (1979) e Wempner (1971) e posteriormente recebeu modificações de Crisfield (1981), além da contribuição de outros autores.

A ideia utilizada no método do comprimento de arco é usar como parâmetro de controle o comprimento do arco entre dois pontos sucessivos ao longo da curva de equilíbrio. Portanto, os incrementos de carga e deslocamento variam ao longo das iterações, mas a distância entre o novo ponto de equilíbrio e o ponto de equilíbrio anterior é constante e corresponde ao comprimento de arco (PRACIANO, 2018).

Esse método apresenta como vantagem a possibilidade de traçar o caminho de equilíbrio de estruturas com comportamentos complexos, mesmo que essas estruturas apresentem

snap-through e *snap-back*, pois a matriz não torna-se singular nos pontos limites, nem nos pontos onde *snap-back* são encontrados. Apesar do poder desse método, há pontos onde ele não apresenta uma boa convergência. Por exemplo, onde há curvatura muito acentuada do caminho de equilíbrio, especialmente em situações onde ocorre *snap-back behavior*, o método pode não funcionar tão bem e uma possível solução seria a utilização de incrementos menores (BORST *et al.*, 2012).

5.2 Problema de autovalor na flambagem

A bifurcação ocorre quando um elemento ou estrutura converte a deformação de membrana em uma deformação de flexão sem mudança na carga aplicada. Na análise por elementos finitos, os efeitos da tensão de membrana na deflexão lateral são computados por uma matriz $[\mathbf{k}_g]$, matriz das tensões iniciais ou matriz geométrica, que é função da geometria do elemento, do campo de deslocamento e do estado da tensão de membrana, ela é independente das propriedades dos materiais, já a matriz $[\mathbf{k}]$ representa a matriz de rigidez do elemento (COOK *et al.*, 2002).

Quando os deslocamentos pré-críticos são pequenos, pode-se realizar uma análise linear, comumente usada para colunas retas e placas planas. Nessa análise, o primeiro passo é carregar a estrutura por um nível de carga de referência, q_{ref} , e realizar uma análise linear para determinar a tensão do elemento, tal como a tensão de membrana em uma placa. Para tensões associadas à carga de referência q_{ref} , tem-se a matriz de rigidez geométrica $[\mathbf{k}_g]_{ref}$. Para qualquer outro nível de carga, tendo λ como um multiplicador escalar, tem-se q e $[\mathbf{k}_g]$ dado por:

$$[\mathbf{k}_g] = \lambda [\mathbf{k}_g]_{ref} \text{ quando } q = \lambda q_{ref} \quad (5.8)$$

A Equação (5.8) implica que a multiplicação de todas as cargas q_i em \mathbf{q} por λ também multiplica a intensidade do campo de tensão por λ , mas não altera na distribuição de tensão. A partir da ideia que ações externas não são alteradas em um ponto de bifurcação e permitindo que ocorra um deslocamento de flambagem $\phi \mathbf{u}$ em relação a configuração indeformada u_{ref} , tem-se:

$$([\mathbf{k}] + \lambda_{cr} [\mathbf{k}_g]_{ref}) \mathbf{u}_{ref} = \lambda_{cr} [\mathbf{q}]_{ref} \quad (5.9)$$

$$([\mathbf{k}] + \lambda_{cr} [\mathbf{k}_g]_{ref}) (\mathbf{u}_{ref} + \phi \mathbf{u}) = \lambda_{cr} [\mathbf{q}]_{ref} \quad (5.10)$$

subtraindo (5.10) de (5.9), tem-se:

$$([\mathbf{k}] + \lambda_{cr} [\mathbf{k}_g]_{ref}) (\phi \mathbf{u}) = 0 \quad (5.11)$$

A Equação (5.11) é um problema de autovalor, no qual o valor da menor raiz fornece a carga crítica. O autovetor associado ao autovalor é o modo de flambagem, ele define a forma, mas não a amplitude da deformada (COOK *et al.*, 2002).

Uma interpretação física para (5.11) é que termos entre parênteses formam uma matriz de rigidez total. Uma vez que as forças $\mathbf{K}_t \phi \mathbf{u}$ são iguais a zero, pode-se dizer que a tensão de intensidade crítica reduz a rigidez a zero, matematicamente \mathbf{K}_t é singular e tem determinante igual a zero.

6 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Conforme exposto no corpo do texto, este trabalho tem como objetivo desenvolver uma metodologia para a realizar análises termomecânicas de estruturas constituídas de materiais com gradação funcional sob diferentes tipos de carregamento.

As análises foram desenvolvidas por meio do pacote computacional ABAQUS. Entretanto, uma vez que os MGFs representam uma classe de materiais que começou a ser estudada recentemente, os programas de análise, incluindo o ABAQUS, ainda não são formulados para modelar essa categoria de compósitos. Portanto, a modelagem desses materiais vem sendo realizada a partir de sub-rotinas do usuário (*user subroutines*) em FORTRAN que são chamadas pelo software ABAQUS. Essa metodologia já vem sendo empregada em alguns trabalhos, tais como em Burlayenko (2016), Burlayenko *et al.* (2017), SILVA *et al.* (2019), Jrad *et al.* (2019), Mao *et al.* (2013) e Medeiros Jr. e Parente Jr. (2020).

Essas sub-rotinas permitem a criação de modelos que não são nativamente implementados na biblioteca do software. Essas sub-rotinas podem ser usadas, por exemplo, para a criação de condições específicas de carregamento, descrição de formas de contato e interação entre partes do modelo, implementação de elementos com formulações específicas e também implementação de modelos constitutivos (SIMULIA, 2014).

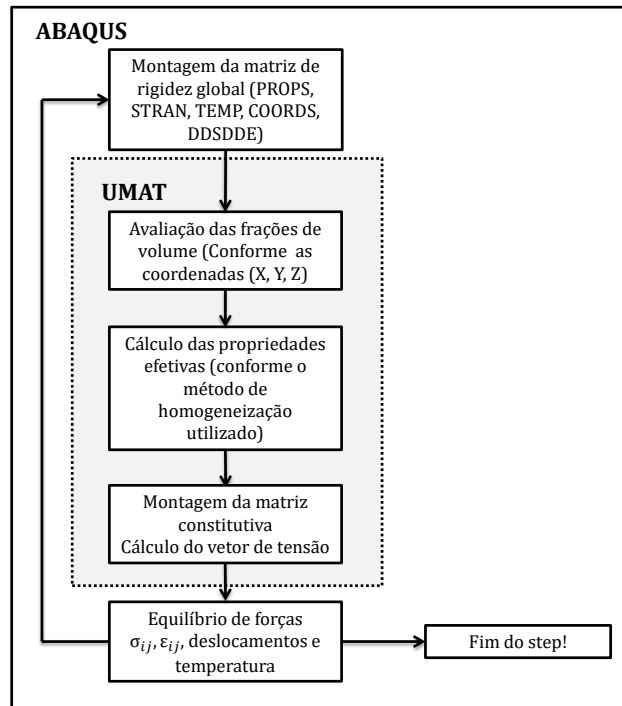
No caso deste trabalho, as sub-rotinas mais importantes são a UMAT e a UMATHT. A UMAT permite ao usuário programar um modelo constitutivo mecânico e a UMATHT possibilita a programação de modelos constitutivos térmicos. Deste modo, qualquer estrutura de MGF complexa sob carregamento térmico ou mecânico pode ser analisada.

Basicamente, a UMAT e a UMATHT devem interagir com os demais módulos do programa. Para a UMAT, deve-se realizar as seguintes tarefas: fornecer a matriz Jacobiana do material, atualizar as tensões no final de cada incremento de tempo e atualizar os valores das variáveis de estado dependentes de valores calculados em passos anteriores, como em análises não lineares. No caso do MGF, estas sub-rotinas consideram a variação da fração de volume dos constituintes.

Nas análises, as sub-rotinas são chamadas a cada incremento pelo ABAQUS para cada ponto de Gauss da malha de elementos finitos. Por exemplo, para a UMAT, em cada chamada é informado à sub-rotina o vetor de deformações, a temperatura, as propriedades dos constituintes de origem e as coordenadas dos pontos. A partir das coordenadas e das propriedades dos materiais de origem, calcula-se as frações de volume e em seguida as propriedades efetivas

dos materiais, conforme o método de homogeneização adotado. Em seguida as propriedades efetivas são usadas pela UMAT no cálculo da matriz constitutiva e do vetor de tensão. A Figura 13 exemplifica de forma esquemática o funcionamento da sub-rotina.

Figura 13 – Fluxograma de funcionamento (ABAQUS e UMAT)



Fonte: Adaptado de Medeiros Jr. e Parente Jr. (2020)

A Figura 13 mostra de forma detalhada o funcionamento da sub-rotina do usuário (UMAT). Nela a matriz Jacobiana do material é representada por DDSDDDE, COORDS representa as coordenadas dos pontos, TEMP é o campo de temperatura no início de cada incremento, STRAN representa uma matriz contendo as deformações totais no início do incremento e PROPS são constantes associadas ao material (SIMULIA, 2010).

Neste trabalho desenvolveu-se sub-rotinas tanto para análises lineares quanto para análises não lineares. A análise linear leva em consideração pequenos deslocamentos e a formulação do elemento leva em consideração a configuração indeformada, usa as coordenadas materiais. A análise não-linear inclui efeitos de grandes deslocamentos e rotações, neste caso os elementos são formulados com base na configuração deformada, e as coordenadas (COORS) são atualizadas durante a análise (SIMULIA, 2013). As propriedades efetivas são calculadas segundo a distribuição de frações de volume e o algoritmo escrito avalia as distribuições de

fração de volume baseado nas coordenadas iniciais, portanto deve-se ter cuidado na realização de análises não lineares geométricas, uma vez que neste caso o campo COORDS representa o campo de coordenadas atuais. Para esses casos pode-se alterar o algoritmo, conforme é mostrado no Apêndice A.

Nos problemas em que é necessário, também, a análise térmica realizada pela solução da equação da condução, usa-se a sub-rotina UMATHT. Ela tem funcionamento similar à UMAT e fornece o modelo constitutivo para problemas de transferência de calor, baseado na equação de Fourier. Nesse caso, é informado, a cada incremento, à UMATHT as coordenadas, a temperatura no início de cada incremento e as propriedades dos materiais de origem. Então, a UMATHT fornecerá meios para o cálculo das frações de volume e das propriedades efetivas. Por fim, a UMATHT calcula a matriz constitutiva e do vetor de fluxo. Ressalta-se que para os casos de aumento uniforme de temperatura não é necessário o uso da UMATHT, pois para essa carga térmica não há a necessidade de resolução da equação da condução.

Destaca-se que para problemas parcialmente acoplados em que a análise térmica está em regime estacionário, essas duas sub-rotinas são suficientes. Entretanto, para problemas termomecânicos em que o problema térmico é transiente, além da implementação da UMAT e UMATHT, também é necessário a implementação da USDFLD, que permite incorporar a gradação da densidade do material em função de uma dada coordenada e da temperatura. Como este trabalho se limitou a analisar problemas em regime estacionário, a USDFLD não foi implementada.

6.1 Método das Lâminas Virtuais

A modelagem de estruturas com gradação funcional realizada por meio de sub-rotinas do usuário é bastante vantajosa. Entretanto, há algumas restrições na utilização dessa metodologia. Por exemplo, variáveis de estado e campos de temperatura não podem ser lidos a partir de arquivos definidos pelo usuário quando se utiliza o método do comprimento de arco para análise não linear *modified Riks static analysis step*. Desse modo, o estudo do caminho pós-crítico sob carregamento térmico utilizando o método do comprimento de arco fica impossibilitado de ser realizado por meio de sub-rotinas (SIMULIA, 2010).

Uma alternativa a essas limitações é a utilização do Método das Lâminas Virtuais. Na análise com lâminas virtuais, a estrutura é dividida em subcamadas (lâminas), cada uma de material isotrópico e com as propriedades calculadas tendo como referência a coordenada

do centroide da lâmina. Modela-se a estrutura como um laminado em que várias lâminas são utilizadas para representar a graduação do material. Correia *et al.* (2018) e Correia *et al.* (2019) utilizam o método das lâminas virtuais em suas análises, Correia *et al.* (2019) afirma que usualmente um número de 30 lâminas virtuais garantem a convergência. Por outro lado, os resultados de Correia *et al.* (2018) mostram que 20 lâminas já trazem bons resultados.

7 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Este capítulo apresenta os resultados obtidos com a utilização de sub-rotinas implementadas no pacote computacional ABAQUS. O objetivo principal é validar a metodologia adotada e realizar análises numéricas por meio de estudos de transferência de calor, de tensões devido a cargas térmicas ou mecânicas e de estabilidade das estruturas. O estudo de estabilidade foi realizado para placas e cascas e se deu com a determinação do caminho pós-crítico.

Em especial estudou-se o comportamento dessas estruturas sob diferentes carregamentos, distribuição de fração de volume e métodos de homogeneização. Os resultados obtidos foram comparados tanto com a literatura quanto com modelagens por meio do MEF, dividindo a estrutura em várias lâminas, método das lâminas virtuais, usando o software ABAQUS.

7.1 Análise termomecânica de placas com gradação funcional

No primeiro exemplo deste trabalho, o qual tem como fim a validação dos modelos utilizados, é realizada a modelagem de placas de materiais com gradação funcional a partir de sub-rotinas (UMATHHT e UMAT) desenvolvidas e implementadas no software ABAQUS. Para este trabalho os resultados são comparados com os obtidos por Reddy e Cheng (2001). Neste exemplo foi realizada a modelagem de placas quadradas de largura L e espessura H , cuja a relação L/H é igual a 10, sob efeitos de carga mecânica ou carga térmica. Este exemplo já vem sendo adotado como *benchmark* por diferentes pesquisadores, como, Alibeigloo (2010) e Brischetto *et al.* (2008) que usaram os resultados de Reddy e Cheng (2001) para validar suas implementações.

Reddy e Cheng (2001) apresentaram análises tridimensionais de placas simplesmente apoiadas de MGF baseado em uma formulação assintótica. Os materiais utilizados foram Zircônia e o Monel, o método de homogeneização utilizado foi o de Mori-Tanaka. As propriedades dos constituintes estão descritas na Tabela 6. Vale ressaltar que neste exemplo as propriedades não variam com a temperatura.

A distribuição de fração de volume da cerâmica é dada por:

$$V_c = \left(\frac{x_3}{h}\right)^N \quad (7.1)$$

em que h representa a espessura da placa e N o índice da fração de volume. A origem de x_3 está localizada na face inferior de modo que o topo da placa é composta apenas por cerâmica.

Tabela 6 – Propriedades da Zircônia e do Monel

Propriedades	Zircônia	Monel
Módulo Volumétrico (GPa)	125,83	227,24
Módulo de Cisalhamento	58,08	65,55
Coefficiente de expansão (K^{-1})	10×10^{-6}	15×10^{-6}
Coefficiente de Condutibilidade Térmica (W/mK)	2,09	25,00

Fonte: Elaborado pelo autor

Inicialmente, modelou-se a placa com a presença apenas da carga térmica e com índice de fração de volume igual a 2. Como adotou-se o acoplamento parcial, resolveu-se primeiro o problema de distribuição de temperatura em que se tem a seguinte condição de contorno:

$$T = 0 \text{ em } x = 0, L \text{ e em } y = 0, L \quad (7.2)$$

A única carga de temperatura não nula é prescrita no topo da superfície, conforme:

$$T = \tilde{T} \sin\left(\frac{m_1 \pi}{L}\right) \sin\left(\frac{m_2 \pi}{L}\right) \quad (7.3)$$

em que \tilde{T} representa a amplitude da temperatura. Neste trabalho, assumiu-se que m_1 e m_2 são iguais à unidade.

Para resolver o problema de distribuição de temperatura utilizou-se o elemento DC3D20. A partir de um estudo de malha, no qual a temperatura é analisada no meio da placa, decidiu-se por utilizar uma malha de 10 x 10 elementos no plano e 10 elementos na espessura da placa. Os resultados para as diferentes malhas são comparadas com os resultados obtidos por Reddy e Cheng (2001), que obtiveram a temperatura de 0,2432, são mostrados na Tabela 7.

Tabela 7 – Estudo de malha

Malha	Temperatura	Diferença
10 x 10 x 6	0,2444	0,49%
10 x 10 x 10	0,2434	0,08%
20 x 20 x 10	0,2434	0,08%
10 x 10 x 20	0,2431	0,04%
20 x 20 x 20	0,2431	0,04%

Fonte: Elaborado pelo autor

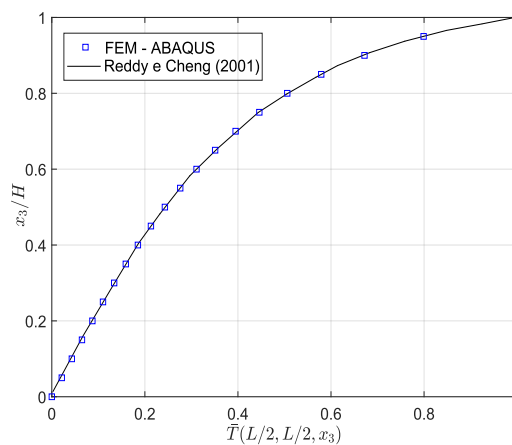
A Tabela 7 mostra que a convergência é rápida, a malha com 6 elementos na espessura apresenta diferença em relação ao valor analítico da ordem de menos de 1%. Entretanto, optou-se pela malha de 10 x 10 elementos no plano com 10 elementos na espessura que apresenta

diferença menor em relação ao valor analítico, o refinamento utilizando 20 elementos ao longo da espessura não representou melhora significativa. Reddy e Cheng (2001) normalizaram os valores de pico da temperatura da seguinte forma:

$$\bar{T} = \frac{T(x_3)}{\tilde{T}} \quad (7.4)$$

A Figura 14 demonstra que a distribuição de temperatura é não linear, devido o material ter coeficiente de condutividade térmica variando com a espessura.

Figura 14 – Distribuição de temperatura



Fonte: Elaborado pelo autor

O resultado apresentado na Figura 14 contradiz algumas simplificações de análise de MGF, as quais consideram a distribuição de temperatura como linear. Após a obtenção do campo de temperatura foi necessário realizar uma análise mecânica, na qual foi utilizado o elemento C3D20R e foram consideradas as seguintes condições de contorno e normalização dos deslocamentos e das tensões:

$$u_2 = u_3 = \sigma_{11} = 0 \text{ em } x = 0, L \quad (7.5)$$

$$u_1 = u_3 = \sigma_{22} = 0 \text{ em } y = 0, L \quad (7.6)$$

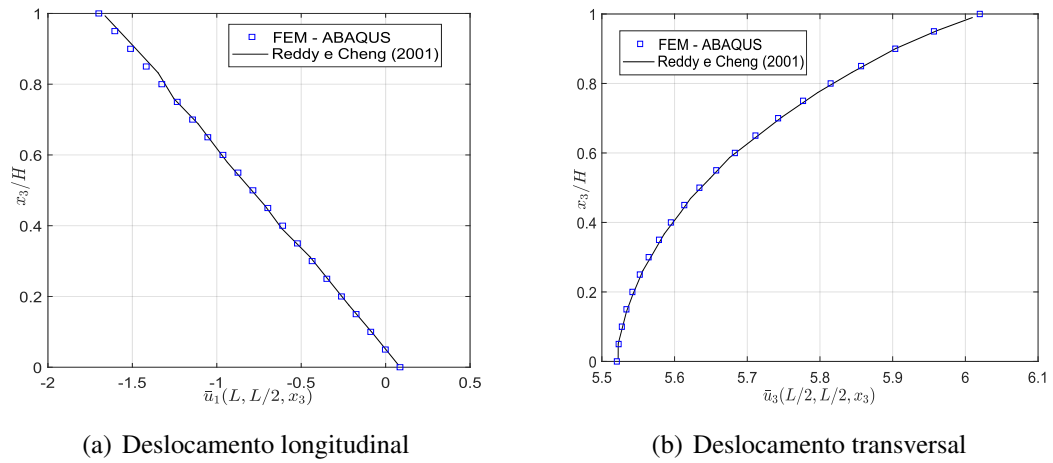
$$\bar{u}_i = \frac{u_i}{PL} \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{PB} \quad (7.7)$$

em que $P = \alpha \tilde{T}$, α é igual a 1×10^{-6} e $B = 1$ GPa.

Os deslocamentos obtidos são mostrados na Figura 15. Pode-se observar que os maiores deslocamentos ocorrem no topo da placa, onde a temperatura aplicada é máxima e a composição é rica em cerâmica. Por esse aspecto percebe-se que o uso da cerâmica no topo é

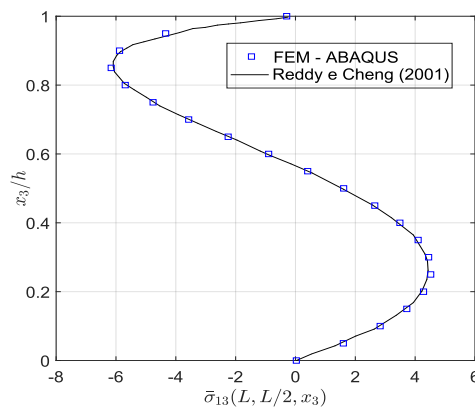
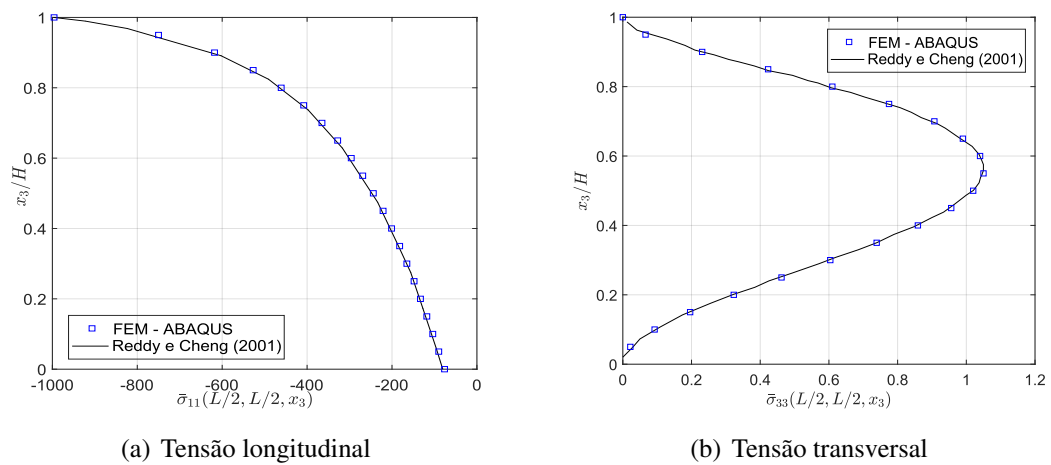
correto, visto que ela possui menor capacidade de conduzir o calor e apresenta menor expansão térmica. Dessa forma, a estrutura sofrerá deslocamentos menores e seu uso será otimizado.

Figura 15 – Deslocamentos devido à carga térmica



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 16 – Tensões devido à carga térmica



Fonte: Elaborado pelo autor

As tensões são mostradas na Figura 16. Pode-se observar que a tensão máxima de compressão ocorre na parte superior, devido a carga ser aplicada no topo. Além disso, percebe-se boa convergência dos resultados obtidos com os resultados de Reddy e Cheng (2001), assim como ocorreu para os resultados dos deslocamentos e da distribuição de temperatura.

O outro exemplo modelado por Reddy e Cheng (2001) e utilizado neste trabalho para validar o modelo, considera a aplicação de apenas carga mecânica no topo da estrutura, com índice de fração de volume N igual a 1. Na modelagem desse exemplo, utilizou-se uma malha de 10×10 , com 10 elementos na espessura, e elementos do tipo C3D20R. Obteve-se os resultados mostrados nas Figuras 17 e 18. No exemplo foi considerado a relação L/H igual a 10 com carga, condições de contorno e normalização representados a seguir:

$$q = \bar{q} \sin\left(\frac{m_1 \pi}{a}\right) \sin\left(\frac{m_2 \pi}{a}\right) \quad (7.8)$$

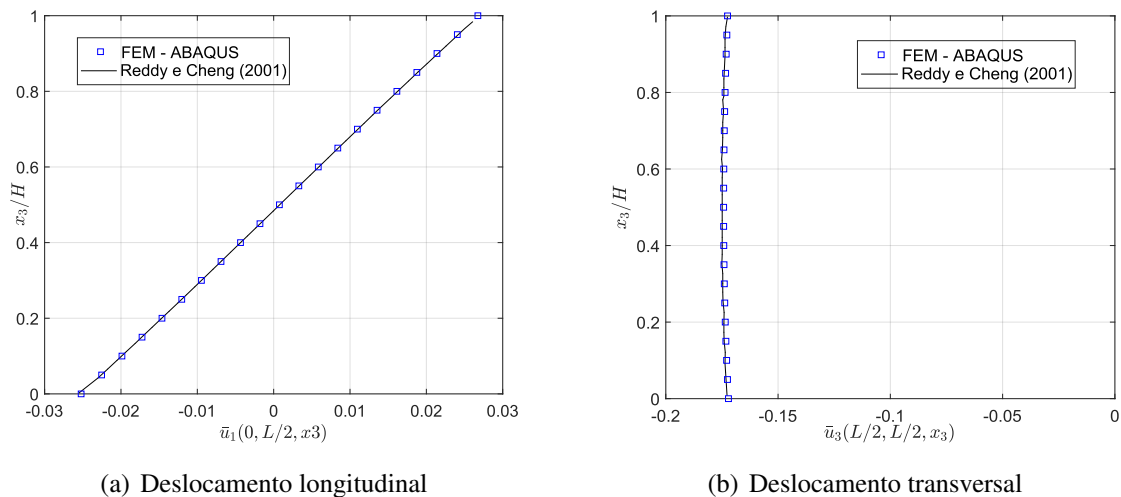
$$u_2 = u_3 = \sigma_{11} = 0 \text{ em } x = 0, L \quad (7.9)$$

$$u_1 = u_3 = \sigma_{22} = 0 \text{ em } y = 0, L \quad (7.10)$$

$$\bar{u}_i = \frac{u_i}{PL} \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{PB} \quad (7.11)$$

em que $P = \frac{\bar{q}}{B}$ e $B = 1$ GPa.

Figura 17 – Deslocamentos devido a carga mecânica

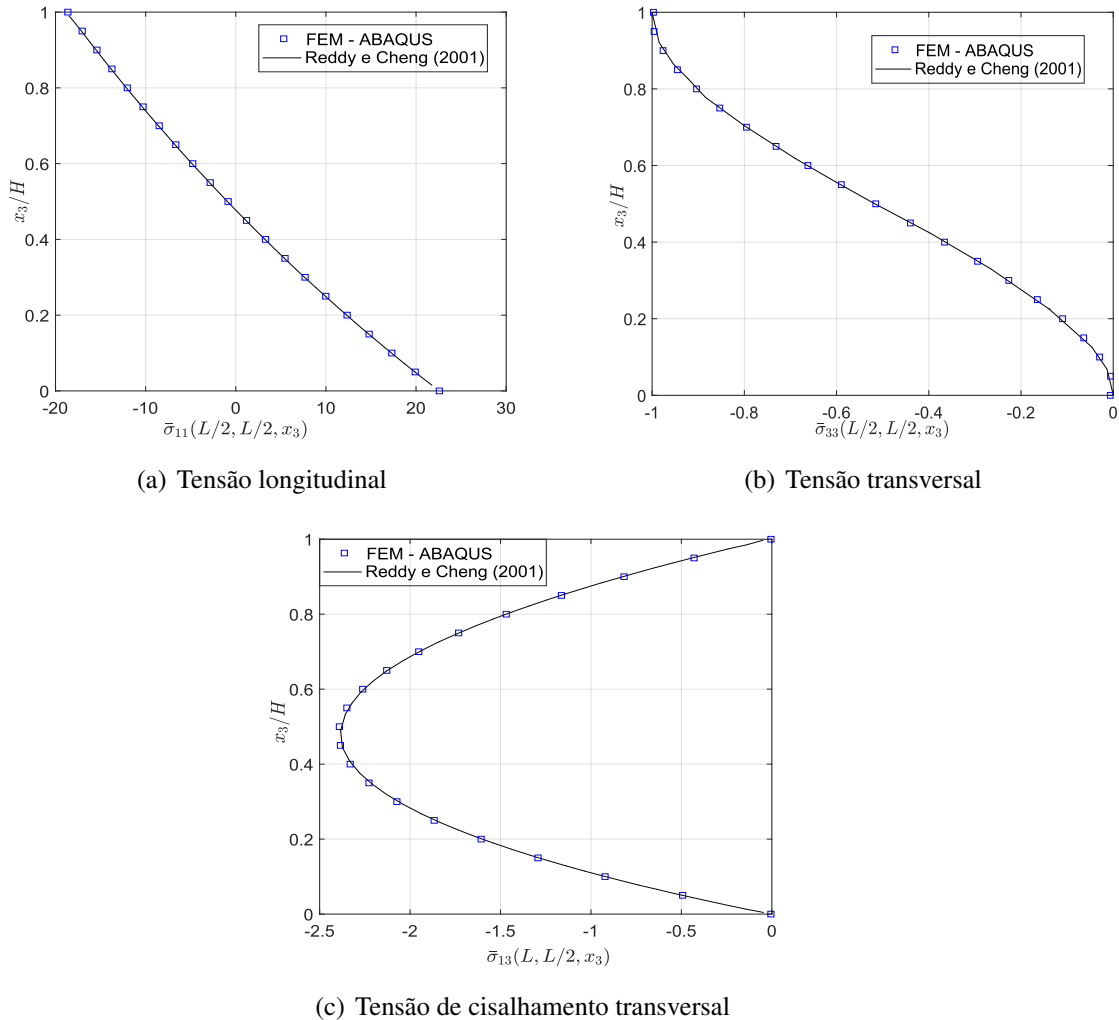


Fonte: Elaborado pelo autor

A partir da Figura 17, percebe-se que o deslocamento transversal não muda muito ao longo da espessura quando o carregamento é puramente mecânico. As Figuras 14, 15, 16, 17 e 18 demonstram excelente convergência entre os resultados propostos por Reddy e Cheng (2001) e os resultados obtidos a partir de sub-rotinas implementadas neste trabalho. A boa convergência

obtida permite-nos validar os modelos constitutivos adotados e implementados por meio das sub-rotinas do usuário no software ABAQUS.

Figura 18 – Tensões devido a carga mecânica



Fonte: Elaborado pelo autor

7.2 Estudo do caminho pós crítico em placas sob carregamento mecânico

Este exemplo trata do estudo do caminho pós-crítico para placas sob carregamento mecânico. Para isso, foi analisada uma placa com relação $L/h = 100$, em que L é a largura da placa e h a espessura. A placa foi submetida a um carregamento de compressão uniaxial, suas propriedades mecânicas estão representadas na Tabela 8 e as condições de contorno (aplicadas na superfície média da placa) estão representadas na Figura 19.

O método de homogeneização adotado foi a lei das misturas e a distribuição de

fração de volume foi dada por:

$$V_c = \left(\frac{x_3}{h}\right)^N \quad (7.12)$$

onde h é a espessura da placa e x_3 varia de 0 a h . Desta forma, tem-se cerâmica no topo e metal na superfície inferior.

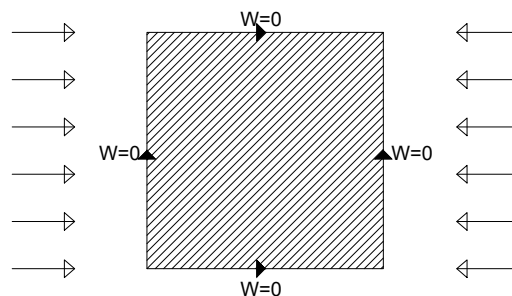
Neste exemplo, estuda-se o caminho pós-crítico de placas de materiais com gradação funcional sob diferentes metodologias de análise. A primeira, já utilizada neste trabalho, corresponde a uma gradação suave e foi implementada no software ABAQUS a partir de sub-rotinas do usuário. A segunda metodologia trata-se de uma análise, também realizada no ABAQUS, a partir da subdivisão do material em várias lâminas (método das lâminas virtuais), conforme representado na Figura 2, contudo sem a implementação de sub-rotina. Correia *et al.* (2018) e Correia *et al.* (2019) utilizam o método das lâminas virtuais, Correia *et al.* (2019) afirma que usualmente um número de 30 lâminas virtuais garantem a convergência. Neste trabalho utilizou-se apenas 10 lâminas.

Tabela 8 – Propriedades mecânicas dos materiais

Propriedades	Alumina	Alumínio
Modulo de Elasticidade (GPa)	380	70
Coefficiente de Poisson	0,30	0,30

Fonte: Elaborado pelo autor.

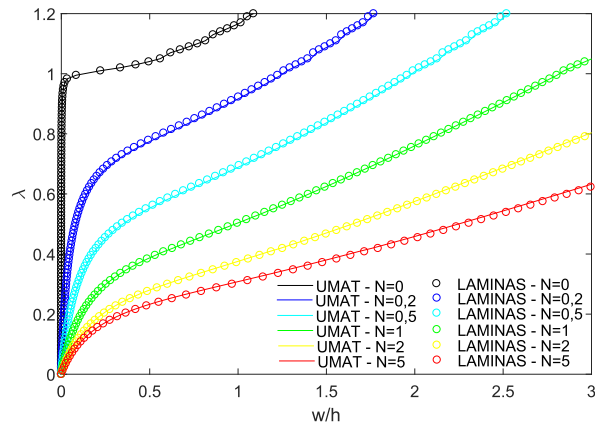
Figura 19 – Condições de contorno



Fonte: Elaborado pelo autor.

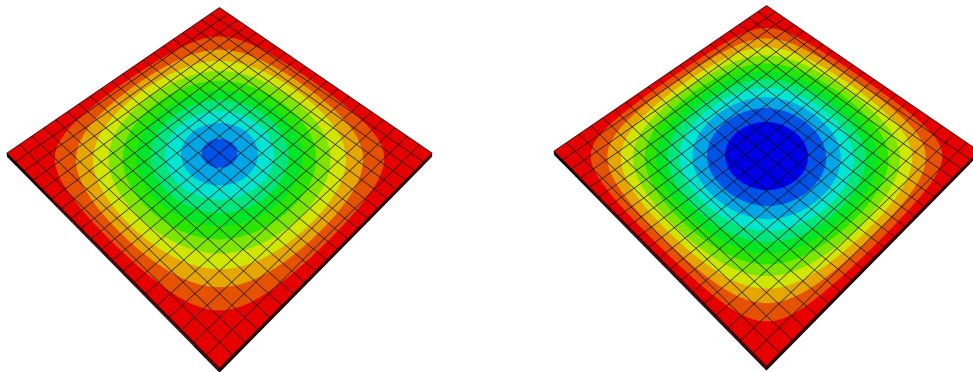
Na análise com lâminas virtuais, a estrutura foi dividida em 10 subcamadas, cada uma de material isotrópico e com as propriedades calculadas tendo como referência a coordenada do centroide da lâmina. Nas análises foram utilizados os elementos C3D20R, este na análise com gradação suave a partir de sub-rotinas, e o S8R na análise por meio da subdivisão da placa em lâminas.

Figura 20 – Caminho de equilíbrio



Fonte: Elaborado pelo autor

Os resultados obtidos são mostrados na Figura 20, onde o fator de carga é normalizado como $\lambda = N/N_{cr}$. N_{cr} é a carga crítica de flambagem da placa cerâmica. As Figuras 20 e 22 mostram que desde os primeiros incrementos de carga, a placa de MGF já apresentam pequenos deslocamentos na parte central, os deslocamentos nessa região aumentam a medida que os incrementos aumentam; portanto, não há bifurcação. Já a placa homogênea não apresenta essa tendência, há na verdade pequenos deslocamentos na parte central devido à imperfeição de carga, assim como mostra a Figura 21, mas os resultados mostrados na Figura 20 deixam claro que há bifurcação. Esses resultados estão de acordo com o que defende Shen (2016), logo a avaliação da carga crítica por meio de problemas de auto-valor não se aplica para placas de MGFs simplesmente apoiadas sob carga mecânica. Além disso, pode-se perceber a excelente concordância entre os resultados obtidos por meio das duas metodologias de análise.

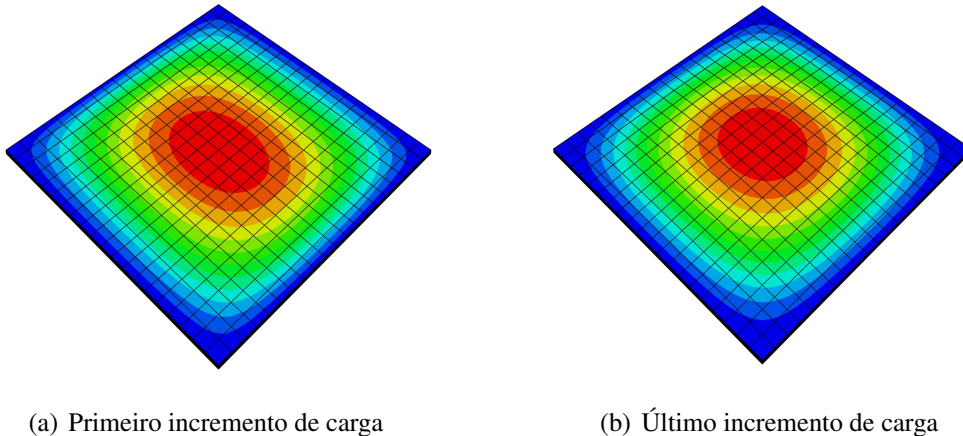
Figura 21 – Configuração deformada- $N = 0$ 

(a) Primeiro incremento de carga

(b) Último incremento de carga

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 22 – Configuração deformada- $N = 0,2$



Fonte: Elaborado pelo autor.

7.3 Estudo do caminho pós crítico e carga crítica em placas sob carregamento térmico

Os exemplos desta seção consideram o traçado do caminho de equilíbrio de placas submetidas a diferentes gradientes de temperatura e a avaliação da variação crítica de temperatura sob aumento uniforme de temperatura. Esses exemplos foram obtidos nos trabalhos de Na e Kim (2005), Na e Kim (2006b), Tran *et al.* (2016), Trabelsi *et al.* (2018) e Moita *et al.* (2018).

Na e Kim (2005) investigaram a variação crítica de temperatura considerando aumento uniforme, linear e senoidal ao longo da espessura da placa. Na e Kim (2006b) investigaram o caminho de equilíbrio de placas sob aumento uniforme, linear e senoidal de temperatura. Trabelsi *et al.* (2018) investigaram o caminho de equilíbrio de placas sob aumento uniforme, linear e não linear (perfil de temperatura obtido resolvendo a equação da condução) de temperatura. Trabelsi *et al.* (2018) utilizaram na validação de seu trabalho alguns dos problemas analisados por Na e Kim (2006b). Tran *et al.* (2016) estudaram placas sob carregamento térmico submetidas a aumento não linear de temperatura. Moita *et al.* (2018) estudaram o caminho de equilíbrio para placas sob carregamento térmico e mecânico.

Os elementos utilizados nos exemplos deste Item foram o C3D20R e o DC3D20R. A partir de um estudo de malha, decidiu-se por utilizar uma malha de 10 x 10 elementos no plano e 6 elementos na espessura da placa.

O estudo de malha foi realizado comparando o deslocamento máximo de placas quadradas, com índice de fração de volume igual a 5. A placa foi submetida a um aumento não linear de temperatura em que ao final a parte superior da placa sofreu uma variação de temperatura de 250 K e a temperatura na parte inferior manteve-se constante.

O estudo de malha foi realizado considerando o método de homogeneização dado pela lei das misturas e a distribuição de frações de volume dada por:

$$V_m = \left(\frac{x_3}{h}\right)^N \quad (7.13)$$

onde a origem de x_3 está localizada na face inferior. Essa distribuição é a mesma utilizada no trabalho de Trabelsi *et al.* (2018).

Os materiais utilizados nesse estudo foram a Alumina (Al_2O_3) e o Níquel (Ni), as propriedades desses materiais são mostradas na Tabela 9, ressalta-se que as propriedades desses materiais são consideradas como independentes em relação a temperatura.

Tabela 9 – Propriedades da Al_2O_3 e do Ni

Propriedades	Al_2O_3	Ni
Modulo de Elasticidade (GPa)	393	199,5
Coefficiente de Poisson	0,25	0,30
Coefficiente de expansão térmica ($C \times 10^{-6}$)	8,8	13,3
Condutividade térmica (w/mK)	30,1	90,7

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os resultados são mostrados na Tabela 10, onde a diferença de uma malha para outra toma como referência o valor da malha imediatamente mais grosseira. Percebe-se que a malha constituída de elementos sólidos quadráticos é muito eficaz e não necessita de um grande refinamento. A malha de 10 x 10 x 4 apresenta pouca diferença em relação à malha 20 x 20 x 10, já a malha de 10 x 10 x 6 apresenta diferença ainda menor. Decidiu-se por utilizar a malha 10 x 10 x 6 devido ao melhor resultado que ela apresentou e porque a diferença de tempo de processamento não foi tão grande quando comparada com a malha 10 x 10 x 4.

Tabela 10 – Estudo de malha para deslocamento máximo

Malha	w/h	Diferença
10 x 10 x 4	2,3478	-
10 x 10 x 6	2,3465	0,055%
10 x 10 x 10	2,3458	0,0298%
20 x 20 x 10	2,3455	0,0128%

Fonte: Elaborado pelo autor

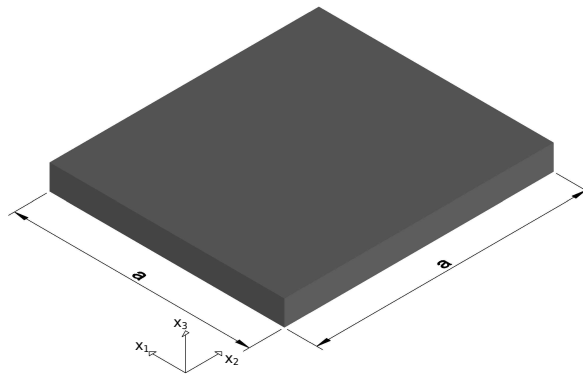
7.3.1 Placas engastadas

Os estudos realizados em placas engastadas foram baseados nos trabalhos de Na e Kim (2005), Na e Kim (2006b) e Trabelsi *et al.* (2018). Na e Kim (2006b) e Trabelsi *et al.* (2018) investigaram o caminho de equilíbrio de placas sob carregamento térmico.

Na e Kim (2006b) utilizaram o MEF para o traçado do caminho pós-crítico e avaliação crítica de temperatura, as análises foram realizadas com elemento sólido com 18 nós. Trabelsi *et al.* (2018) utilizaram nas análises uma formulação baseada na modificação da FSDT (*first order shear deformation theory*), em que o fator de correção do cisalhamento gera uma distribuição parabólica da deformação de cisalhamento transversal ao longo da espessura e permite que a tensão de cisalhamento seja zero na superfície inferior e superior da placa.

As placas analisadas nesse Item tem as características geométricas mostradas na Figura 23 e são engastadas em todas as bordas. Na e Kim (2005) e Na e Kim (2006b) utilizaram a alumina Al_2O_3 e o níquel Ni em suas análises, as propriedades dos materiais utilizados nesse item estão listadas na Tabela 9.

Figura 23 – Geometria da placa



Fonte: Elaborado pelo autor

Nestes exemplos utilizaram-se a seguinte distribuição de fração de volume:

$$V_m = \left(1 - \frac{x_3}{h}\right)^N \quad (7.14)$$

em que h representa a espessura da placa e N é o índice da fração de volume.

7.3.1.1 Aumento uniforme de temperatura

Neste item investiga-se a temperatura crítica, temperatura que causa perda de estabilidade da peça, sob diferentes aspectos, considerando o aumento uniforme de temperatura. Além

disso, estuda-se o caminho pós-crítico considerando este tipo de carregamento.

A temperatura na placa considerando o aumento de temperatura uniforme é avaliada conforme:

$$T = \Delta T + T_{ref} \quad (7.15)$$

onde T_{ref} é a temperatura de referência. Na e Kim (2005) e Na e Kim (2006b) consideraram que a temperatura de referência é de 290K e o mesmo foi realizado neste trabalho.

A avaliação da carga crítica neste item foi realizada a partir da subdivisão da placa em várias lâminas virtuais. Nas análises utilizou-se o elemento C3D20R, os resultados estão mostrados nas Tabelas 11, 12 e 13 e na Figura 24. A Figura 25 mostra os modos de flambagem. A Tabela 11 mostra que a adoção de 10 lâminas virtuais utilizando elemento sólido já trazem resultados satisfatórios, uma vez que a adoção de mais camadas não surtiu um efeito prático na avaliação da carga crítica. Por exemplo, Na e Kim (2005) apresentou o valor de 121,53 e Na e Kim (2006b) apresentou o valor de 121,48 para a temperatura crítica, esses valores apresentam boa concordância com o valor de 121,66 obtido a partir do uso de 10 lâminas virtuais.

Tabela 11 – Temperatura crítica (placa quadrada, $a/h = 50$ e $N = 1$).

Número de lâminas	Variação crítica de temperatura
4	105,1
10	121,66
16	121,64

Fonte: Elaborado pelo autor

Outro aspecto avaliado foi a variação da temperatura crítica sob aumento uniforme de temperatura com diferentes valores de índice de fração de volume. A Tabela 12 apresenta a variação crítica de temperatura de acordo com o índice de fração de volume. Pode-se observar que a variação crítica de temperatura aumenta à medida que o índice de fração de volume aumenta. Isso ocorre pois na proporção que o índice aumenta, a quantidade de cerâmica na placa também aumenta.

A Tabela 13 e a Figura 24 descrevem a variação de temperatura crítica de acordo com o parâmetro geométrico a/h , percebe-se que a variação crítica de temperatura cai rapidamente quando o valor do parâmetro geométrico a/h aumenta.

A Figura 25 mostra os modos de flambagem considerando um aumento uniforme de temperatura. O segundo e o terceiro modo são simétricos e apresentam o mesmo valor de

Tabela 12 – Temperatura crítica (placa quadrada e $a/h = 50$).

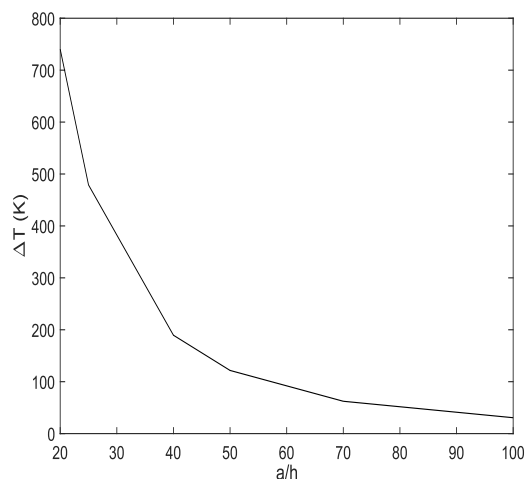
Índice de fração de volume	Este trabalho	Na e Kim (2006b)	Na e Kim (2005)
0,3	111,75	112,02	112,15
1	121,66	121,48	121,53
5	136,79	135,88	135,93

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 13 – Temperatura crítica (placa quadrada e $N = 1$).

Relação a/h	Este trabalho	Na e Kim (2006b)
20	740,37	729,67
50	121,66	121,53
100	30,605	30,56

Fonte: Elaborado pelo autor

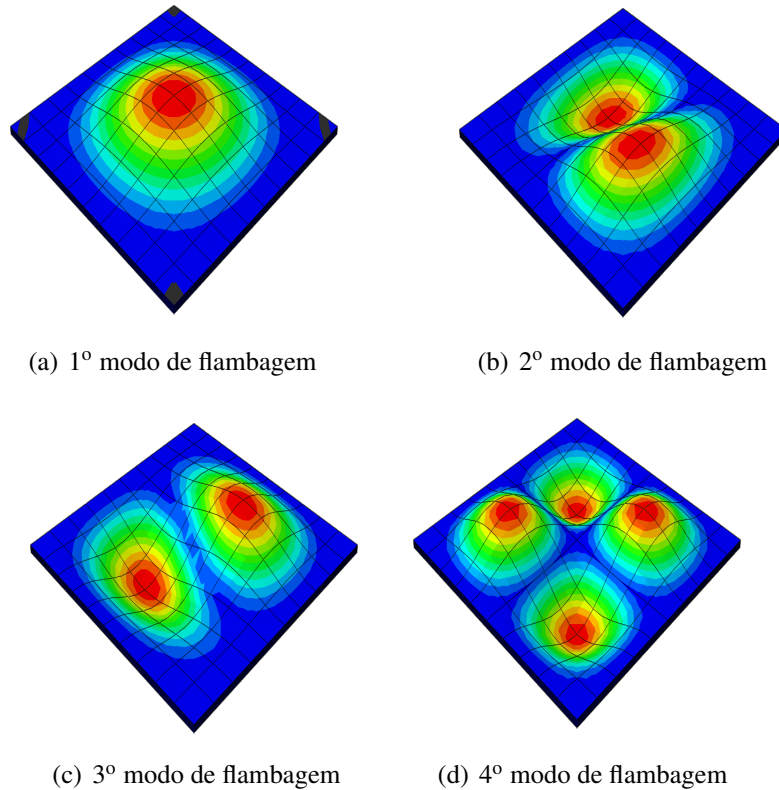
Figura 24 – Variação crítica de temperatura para aumento uniforme ($N = 1$).

Fonte: Elaborado pelo autor

variação crítica de temperatura. O primeiro modo de flambagem está associado à variação crítica de temperatura que representa a variação de temperatura que causa a perda de estabilidade.

Para o traçado do caminho pós-crítico, de placas engastadas, foi necessário colocar uma pequena imperfeição a partir da aplicação de uma carga pontual no meio da placa. Esse procedimento é necessário quando a placa é totalmente homogênea e sofre aumento uniforme de temperatura. Por outro lado, esse procedimento não é necessário quando a placa é de MGF ou tem crescimento de temperatura não uniforme. Pois, nessas situações a distribuição do material ocorre de forma heterogênea ou aumento não uniforme de temperatura criam distribuição de tensão térmica não uniforme em uma superfície em relação à outra e há a tendência natural de flambagem, esses casos podem ser considerados como imperfeições.

Figura 25 – Modo de flambagem.



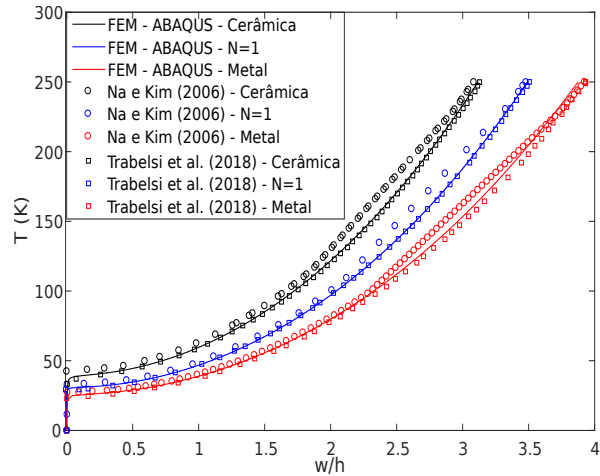
Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 26 mostra os resultados do caminho de equilíbrio para aumento uniforme de temperatura, considerando a relação a/h igual a 100. A Figura 27 apresenta as configurações deformadas no início da análise e no final. As Figuras 26 e 27 mostram que a mudança na configuração de equilíbrio ocorre por bifurcação. A partir da Figura 26, nota-se que a placa de MGF apresenta maiores deslocamentos do que a placa composta totalmente por cerâmica, entretanto apresenta deslocamentos menores do que a placa puramente metálica. A carga crítica decresce à medida que o material diminui a porcentagem de cerâmica em sua constituição.

Trabelsi *et al.* (2018) compararam também os resultados segundo diferentes relações a/h , os resultados estão representados na Figura 28. A partir desta figura observa-se que quando a relação a/h aumenta, há a redução da temperatura crítica. Contudo, o comportamento pós-crítico após a bifurcação não muda, continuando a ser estável, como na Figura 26.

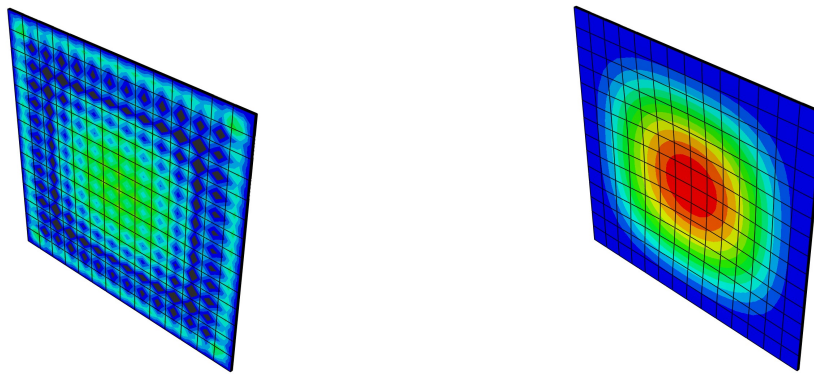
As Figuras 26 e 28 também demonstram boa concordância entre os resultados deste trabalho e os da literatura para o aumento uniforme de temperatura. Os resultados estão bem próximos aos resultados de Trabelsi *et al.* (2018), mas apresentaram uma pequena diferença em relação aos resultados de Na e Kim (2006b), mas provavelmente devido à malha utilizada, ou ao elemento utilizado.

Figura 26 – Aumento uniforme de temperatura



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 27 – Configuração deformada - $N = 0,3$

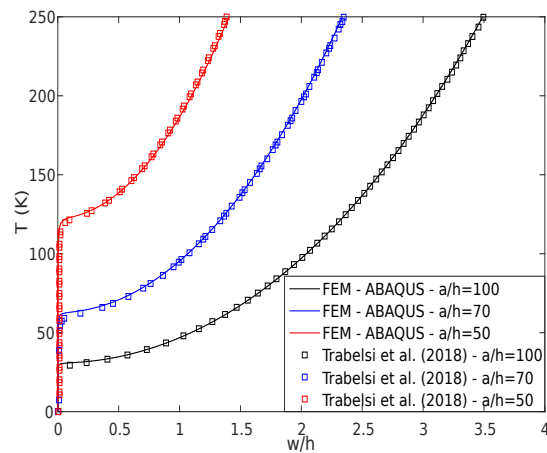


(a) Primeiro incremento de carga

(b) Último incremento de carga

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 28 – Aumento uniforme de temperatura para diferentes relações a/h



Fonte: Elaborado pelo autor

7.3.1.2 Aumento linear de temperatura

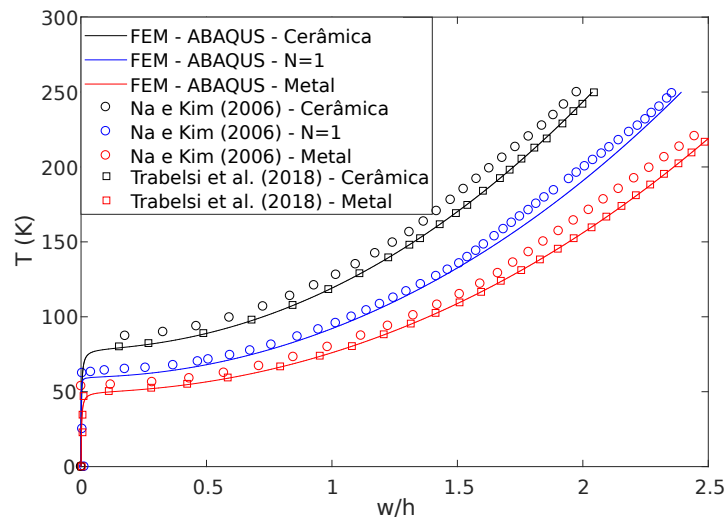
O estudo de validação também foi realizado considerando o aumento linear de temperatura, assim como foi realizado por Na e Kim (2006b) e Trabelsi *et al.* (2018). O campo de temperatura ao longo da espessura é dado por:

$$T = T_{ref} + \Delta T = T_{ref} + T_2 \left(\frac{x_3}{h} \right) \quad (7.16)$$

onde T_2 corresponde a um coeficiente de aumento da temperatura.

Os resultados para o aumento linear de temperatura são mostrados na Figura 29. Observa-se que as temperaturas críticas considerando as diferentes frações de volume são maiores no aumento linear de temperatura do que no aumento uniforme.

Figura 29 – Aumento linear de temperatura



Fonte: Elaborado pelo autor

7.3.1.3 Aumento não linear de temperatura

O aumento não linear de temperatura considera a distribuição de temperatura obtida por meio da resolução da equação da condução. Neste item realiza-se análises parcialmente acopladas, conforme discutido no Item 4.

Na e Kim (2006b) estudaram o caminho de equilíbrio para o aumento uniforme, linear e senoidal de temperatura. Entretanto, não realizaram o estudo para o gradiente de temperatura não linear dado pela equação da condução.

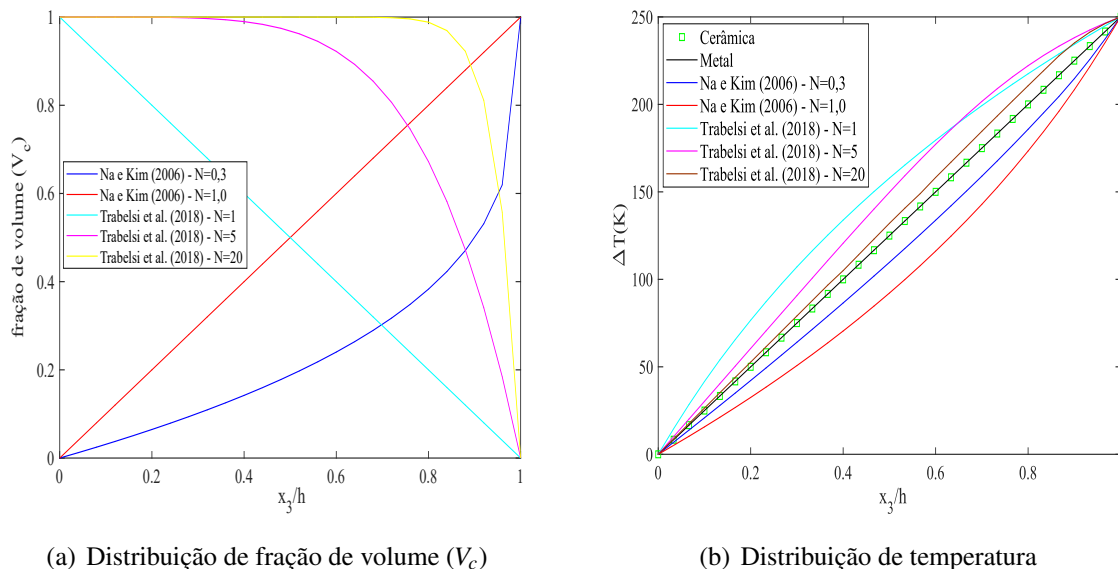
Trabelsi *et al.* (2018) realizaram análises para o aumento não linear de temperatura. Porém, os resultados mostram que ele expôs o níquel (metal) ao gradiente de temperatura ao invés da alumina (cerâmica). Geralmente, o que é mais conveniente é expor o material cerâmico à maior temperatura, uma vez que os MGFs são formulados para resistir à altas temperaturas e as cerâmicas oferecem melhor comportamento nessas condições.

Na análise comparativa com Trabelsi *et al.* (2018) utilizou-se a homogeneização dada pela lei das misturas e distribuição de fração dada por:

$$V_m = \left(\frac{x_3}{h}\right)^N \quad (7.17)$$

A Figura 30 apresenta a distribuição de fração de volume e o campo de temperatura para as placas de Na e Kim (2006b) e Trabelsi *et al.* (2018) sob diferentes índices de fração de volume. Percebe-se que a distribuição de fração de volume adotado por Na e Kim (2006b) gera perfis com temperatura sempre menores que a distribuição dada para materiais isotrópicos. Já a distribuição de fração de volume utilizada por Trabelsi *et al.* (2018), a qual expõe o metal ao aumento de temperatura, obtém um campo de temperatura sempre superior ao do material isotrópico.

Figura 30 – Distribuição das frações de volume e campo de temperatura



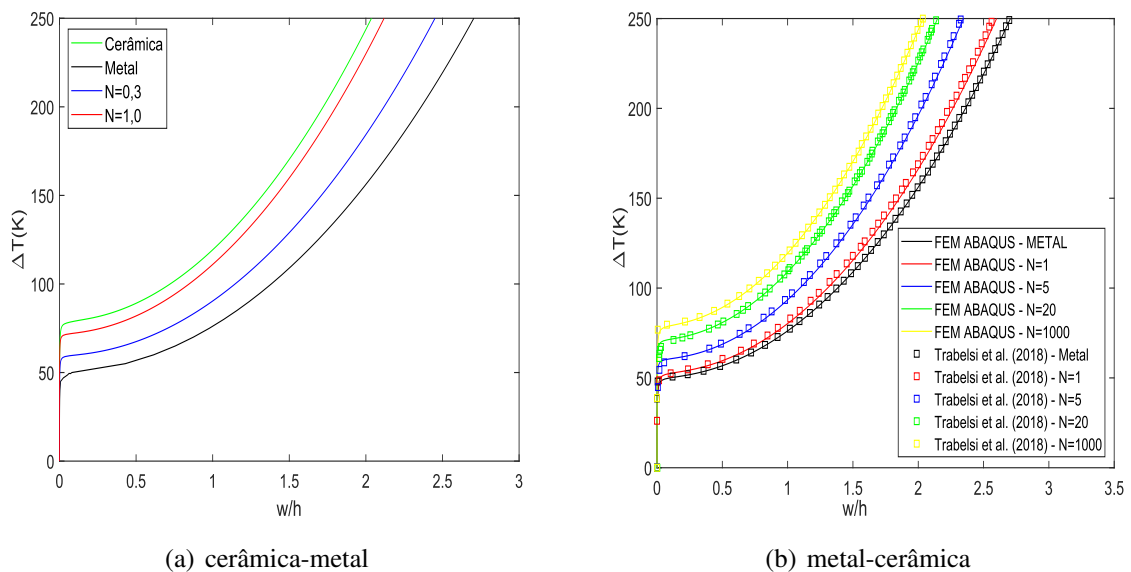
Fonte: Elaborado pelo autor

As Figuras 31a e 31b apresentam os caminhos pós-críticos para as distribuições de frações de volume obtidas por meio das Equações (7.14) e (7.17), respectivamente. Percebe-se que em ambas a curva dos materiais com gradação funcional estão entre as curvas do material

cerâmico e metálico, mas isso não demonstra uma tendência, visto que a curva com índice de fração de volume igual a 1, na Figura 31a, já se aproxima da curva de material cerâmico. Pode-se verificar também que o comportamento pós-crítico obtido a partir das duas distribuições são similares.

Na Figura 31b há maior porcentagem de material cerâmico, fornecendo à estrutura maior rigidez. Porém, a maior porcentagem de cerâmica pode gerar um comportamento frágil.

Figura 31 – Caminho pós crítico - distribuição não linear de temperatura



Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 31 mostra novamente boa concordância entre os resultados obtidos neste trabalho e os obtidos por Trabelsi *et al.* (2018). Além disso, mostra que há ganho de resistência pós-crítica para o crescimento não linear de temperatura, assim como ocorreu para os casos de placas sob aumento uniforme e linear de temperatura.

7.3.2 Placas apoiadas

Outros pesquisadores também se dedicaram ao estudo do caminho de equilíbrio sob carregamento térmico, entre eles destacam-se: Tran *et al.* (2016) e Moita *et al.* (2018). No estudo desenvolvido por Tran *et al.* (2016), utilizou-se a análise isogeométrica em combinação com a teoria de primeira ordem de deformação por cisalhamento (*FSDT*) para placas de MGFs. Moita *et al.* (2018) implementaram um modelo de elementos finitos baseado em um elemento triangular de placa/casca não conforme, com três nós e oito graus de liberdade por nó, associado com a teoria de alta ordem de deformação por cisalhamento (*HSDT*).

Moita *et al.* (2018) validaram seus resultados com uma das placas do trabalho de Tran *et al.* (2016). A placa apresenta distribuição das frações de volume dada pela lei das potências e métodos de homogeneização dada pela lei das misturas. Os materiais utilizados foram a alumina e o alumínio, cujas propriedades são mostradas na Tabela 14, ressalta-se que neste exemplo considerou-se que as propriedades não variam com a temperatura. A placa apresenta todas as bordas simplesmente apoiadas e índice de esbeltes (a/h) igual a 100. Ela está submetida a carregamento térmico sob distribuição de temperatura determinada pela equação da condução de calor, onde a superfície cerâmica esta exposta à maior temperatura.

Tabela 14 – Propriedades da Al_2O_3 e do Al

Propriedades	Al_2O_3	Al
Modulo de Elasticidade (GPa)	393	70
Coefficiente de Poisson	0,25	0,30
Coefficiente de expansão térmica ($^{\circ}C \times 10^{-6}$)	8,8	23
Condutividade térmica (w/mK)	30,1	204

Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim como realizado por Tran *et al.* (2016) e Moita *et al.* (2018), neste exemplo foi considerado a distribuição de temperatura obtida a partir da expansão de termos em série, assunto abordado no item 3.2 deste trabalho. O resultado pode ser observado na Figura 32a. Ressalta-se que Tran *et al.* (2016) e Moita *et al.* (2018) utilizaram 5 termos em série.

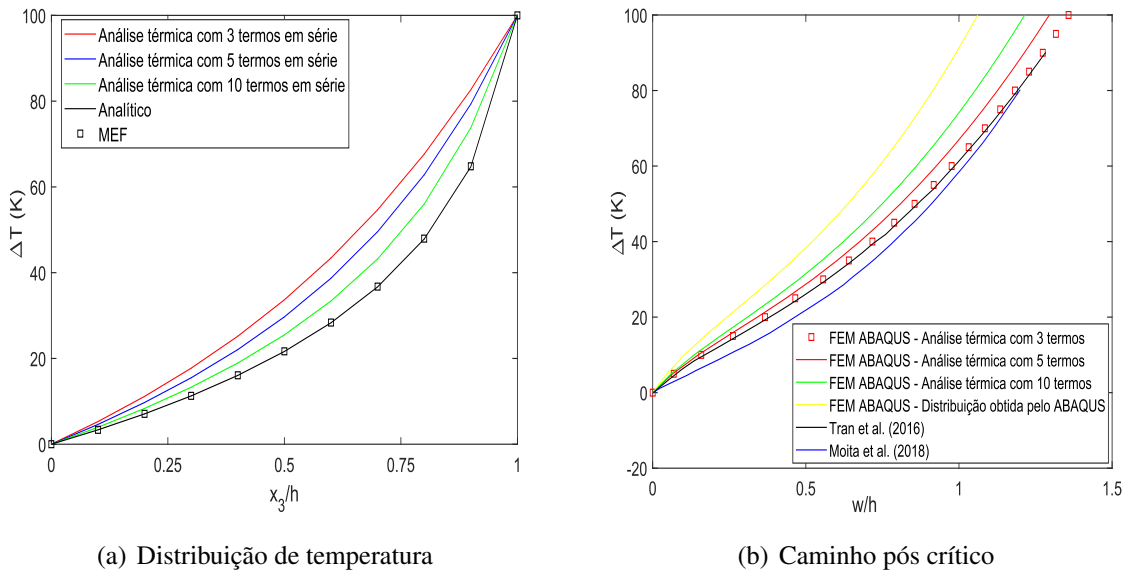
A solução da equação da condução de calor a partir da expansão de termos em série é um método de fácil utilização. Entretanto, na literatura estudada não foi encontrado uma discussão a respeito do nível de acurácia que esse método pode trazer. Com base na Figura 32, percebe-se que a solução dada pela expansão de termos em séries requer a utilização de muitos termos para que uma boa acurácia seja obtida. Sendo que mesmo utilizando 10 termos a diferença é visível na Figura 32a.

A Figura 32 deixa claro que resultados obtidos a partir da consideração de poucos termos em série para o cálculo da distribuição de temperatura pode gerar resultados imprecisos. Essa imprecisão na distribuição de temperatura pode levar a diferenças significativas no caminho de equilíbrio, como mostra a Figura 32b.

As Figuras 32 e 31 mostram o caminho pós-crítico para placas de material com gradação funcional sob carga térmica não linear. A partir delas, pode-se perceber a perda da bifurcação para placas simplesmente apoiadas com gradação funcional. Ou seja, placas

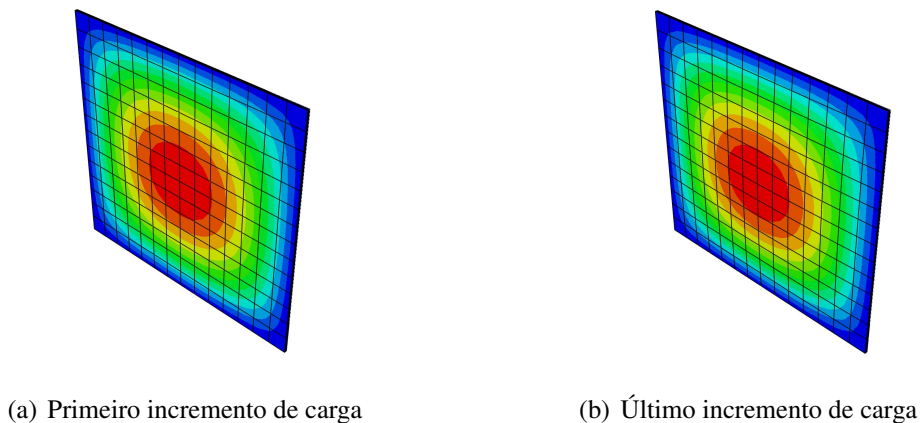
engastadas apresentam bifurcação, o que não ocorre para placas simplesmente apoiadas. Isso se torna mais claro a partir das análises das Figuras 27 e 33, onde a placa apoiada já apresenta pequenos deslocamentos na parte central desde os primeiros incrementos, o que não ocorre na placa engastada.

Figura 32 – Caminho pós crítico e distribuição não linear de temperatura para $N = 1$



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 33 – Configuração deformada - placa simplesmente apoiada



Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir dos exemplos modelados nas Figuras 26, 28, 29, 31 e 32 pode-se perceber boa concordância entre os resultados obtidos neste trabalho e os propostos por Na e Kim (2005), Na e Kim (2006b), Trabelsi *et al.* (2018), Moita *et al.* (2018) e Tran *et al.* (2016). A boa concordância obtida permite-nos validar os modelos constitutivos conforme já havia sido feito

nos exemplos anteriores, assim como validar a implementação para análises do caminho pós crítico de placas sob carregamento térmico.

7.4 Estudo paramétrico de placas sob carregamento térmico

O presente exemplo consiste em um estudo paramétrico da estabilidade de placas com gradação funcional considerando diferentes combinações de materiais e diferentes métodos de homogeneização. Estudos nesse sentido foram realizados por diferentes pesquisadores, como: Akbarzadeh *et al.* (2015), Medeiros Jr *et al.* (2019) e Nemati e Mahmoodabadi (2019).

Akbarzadeh *et al.* (2015) estudou os efeitos dos modelos micromecânicos no comportamento de placas de MGF. O estudo incluiu análises de deflexão estática e dinâmica, carga crítica e avaliação da frequência fundamental. Nemati e Mahmoodabadi (2019) realizou uma aproximação analítica para investigar a flambagem de painéis cônicos cilíndricos em fundações do tipo Winkler–Pasternak exposto à ambiente térmico conforme diferentes métodos de homogeneização. Medeiros Jr *et al.* (2019) estudou os efeitos dos diferentes métodos de homogeneização na distribuição de tensões e deformações nas paredes de um cilindro oco pressurizado. Este exemplo, diferentemente dos citados foca em análises do caminho pós-crítico para diferentes métodos de homogeneização e conforme diferentes materiais.

A malha utilizada neste exemplo foi de 10 x 10 no plano, com 6 elementos na espessura, mesma malha utilizada no Item 7.3. O elemento utilizado na análise térmica foi o DC3D20R e na análise mecânica utilizou-se o C3D20R. Os métodos de homogeneização utilizados foram a lei das misturas e o Mori-Tanaka. A distribuição de fração de volume é dada por:

$$V_m = \left(1 - \frac{x_3}{h}\right)^N \quad (7.18)$$

Modelou-se placas quadradas de relação largura/espessura igual a 100. Os materiais utilizados neste estudo foram a Alumina, o Níquel e o Alumínio. As propriedades dos materiais utilizados estão discriminadas na Tabela 15, considera-se que as propriedades não variam com a temperatura.

Neste exemplo considerou-se que a placa encontra-se engastada em todas as bordas e submetida à aumento de temperatura não linear. A temperatura de referência considerada foi de 290K, resolveu-se o problema térmico segundo a equação de Fourier por meio do ABAQUS com adição de sub-rotinas do usuário. As condições de contorno consideradas na análise térmica

são temperaturas prescritas de 290K na superfície puramente metálica e 540K na superfície rica em cerâmica. A análise mecânica foi realizada em sequência considerando a distribuição de temperatura como carregamento.

Tabela 15 – Propriedades da alumina, do níquel e do alumínio

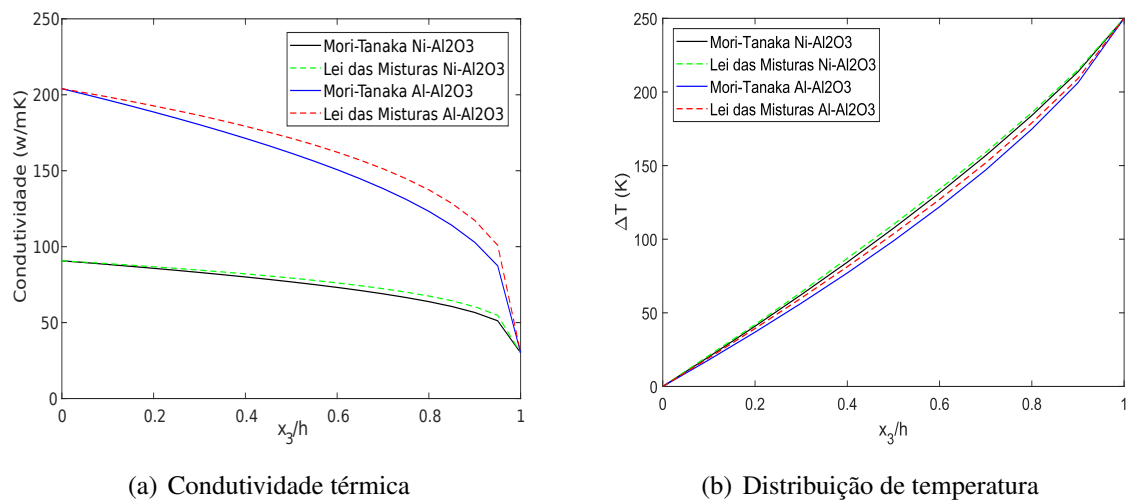
Propriedades	Al_2O_3	Ni	Al
Modulo de Elasticidade (GPa)	393	199,5	70
Coefficiente de Poisson	0,25	0,30	0,30
Coefficiente de expansão térmica ($^{\circ}C \times 10^{-6}$)	8,8	13,3	23
Condutividade térmica (w/mK)	30,1	90,7	204

Fonte: Elaborado pelo autor

As Figuras 34 e 35 mostram a condutividade térmica e o perfil de temperatura considerando, respectivamente, o índice de fração de volume igual à 0,3 e 1,0. A partir das Figura 34a e 35a pode-se observar a diferença gerada pela utilização de diferentes métodos de homogeneização para o compósito de Alumínio-Alumina (Al_2O_3-Al). O método de Mori-Tanaka fornece valores um pouco menores para a condutividade térmica quando comparado ao método da lei das misturas.

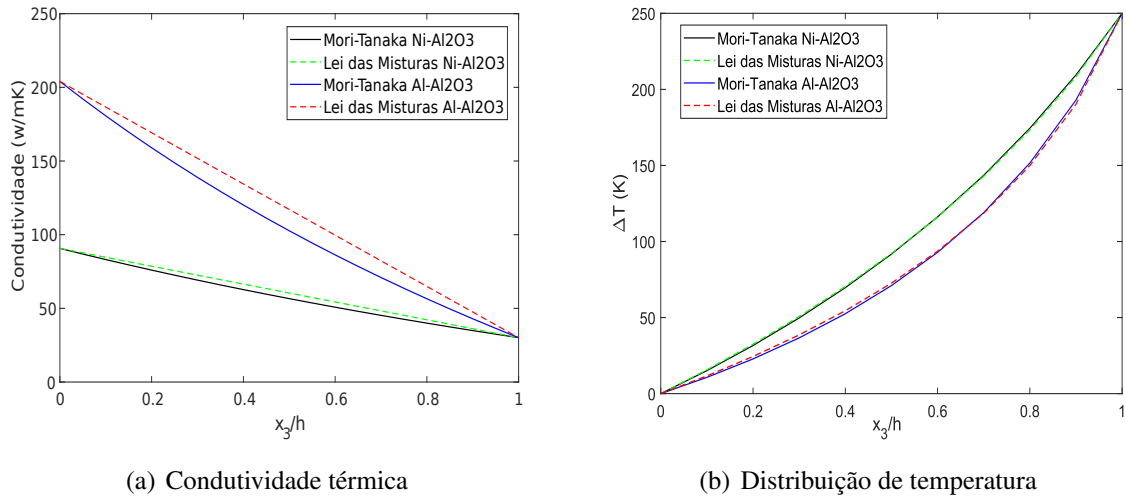
O compósito formado pela combinação de Níquel e Alumina ($Ni-Al_2O_3$) apresentaram diferença menos expressiva para a condutividade térmica, segundo os diferentes métodos de homogeneização, quando comparado ao compósito Alumínio-Alumina. Os perfis de temperatura obtidos por meio dos diferentes métodos de homogeneização apresentaram uma ligeira diferença, a distribuição de temperatura obtida com a lei das misturas possuem valores um pouco maiores.

Figura 34 – Condutividade térmica e distribuição de temperatura $N = 0,3$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 35 – Condutividade térmica e distribuição de temperatura $N = 1, 0$.



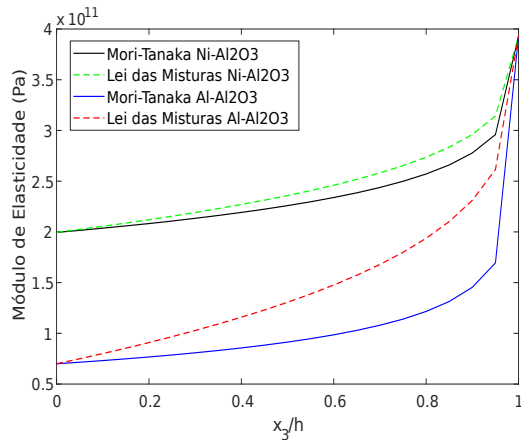
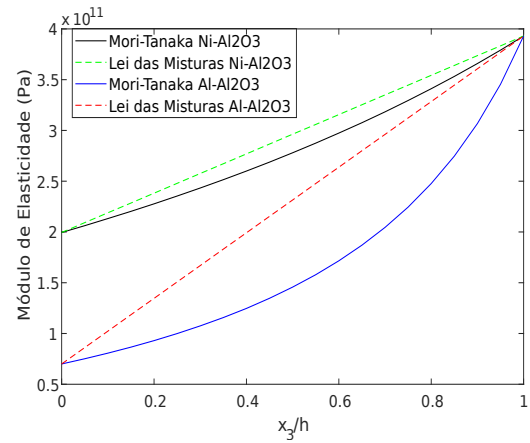
Fonte: Elaborado pelo autor.

Modelou-se também placas considerando o índice de fração de volume como sendo iguais a 0 e 1000, apesar de os resultados do coeficiente de condutividade térmica e módulo de elasticidade ao longo da espessura não estarem sendo mostradas neste trabalho. Nesses casos tem-se placas com material homogêneo, portanto não houve variação de condutividade térmica ao longo da espessura. A distribuição de temperatura para $N = 0$ e $N = 1000$ foi linear, uma vez que as condições de contorno são temperatura especificadas e o material é isotrópico.

A Figura 36 apresenta a variação do módulo de elasticidade ao longo da espessura da placa para os dois compósitos analisados para os índices de fração de volume de 0,3 e 1. A diferença no módulo de elasticidade obtido pelos diferentes métodos de homogeneização é significativa e bem maior que da condutividade térmica, principalmente para o MGF de alumínio com alumina, enquanto a diferença para o níquel com alumina foi menos acentuada. Além disso, observa-se que o módulo de elasticidade efetivo obtido por meio do método da lei das misturas tiveram valores sempre maiores que os obtidos pelo método de Mori-Tanaka.

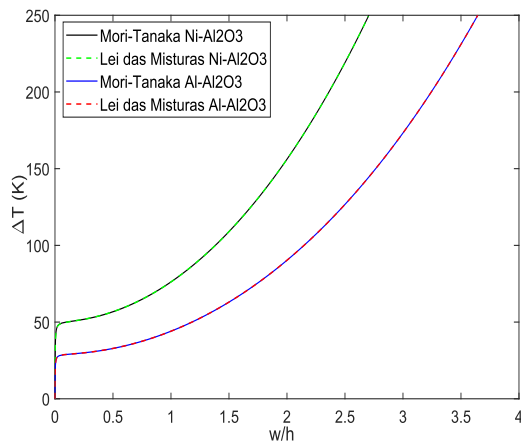
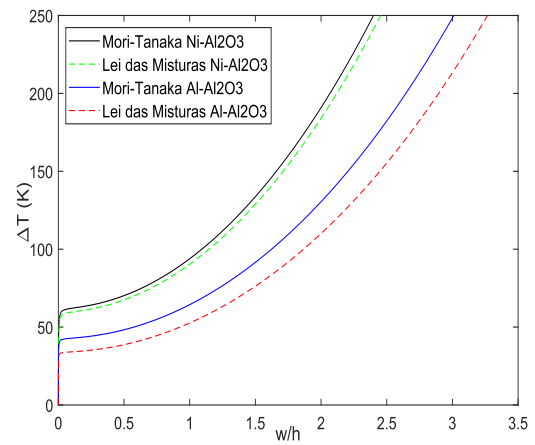
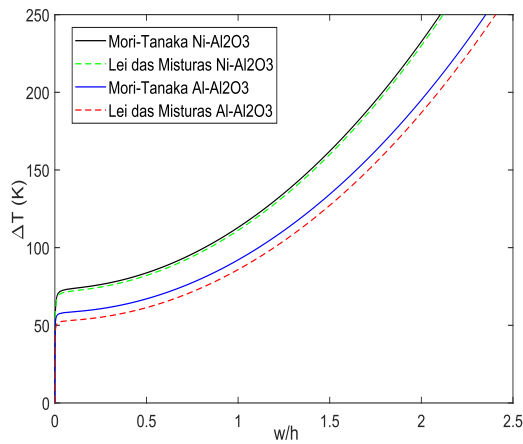
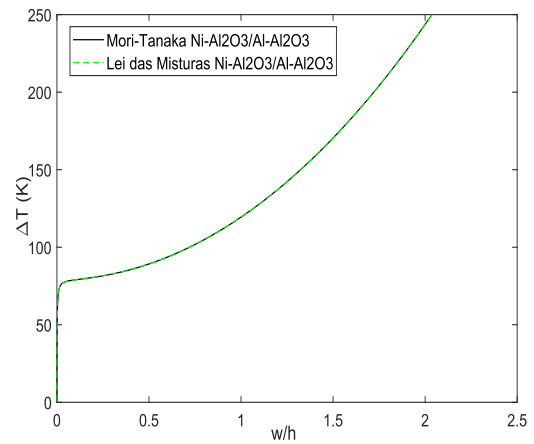
A Figura 37 mostra o caminho pós-crítico para os diferentes compósitos considerando os dois métodos de homogeneização. Observa-se a perda de equilíbrio por bifurcação, conforme abordado no Item 7.3. Outro aspecto observado é a diferença no caminho pós-crítico quando avalia-se as propriedades efetivas por meio dos métodos de Mori-Tanaka e lei das misturas. Quando se utiliza a lei das misturas obtém-se valores de variação crítica de temperatura ligeiramente menores, quando avalia-se esse aspecto é necessário levar em consideração não somente as propriedades efetivas do material, mas também a distribuição de temperatura obtida na análise térmica.

Figura 36 – Módulo de Elasticidade.

(a) $N=0,3$ (b) $N=1,0$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 37 – Caminho pós crítico.

(a) $N=0$ (b) $N=0,3$ (c) $N=1$ (d) $N=1000$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Este exemplo mostra a diferença numérica obtida quando se utiliza diferentes métodos de homogeneização. Percebe-se que a diferença é maior para o compósito $AL-Al_2O_3$ do que no compósito $Ni-Al_2O_3$. Essa diferença pode ser explicada por causa das propriedades dos materiais de origem. Por exemplo, o módulo de elasticidade do Alumínio é 70 GPa e da Alumina é 380 GPa, diferença maior que no caso de compósito de Níquel e Alumina. Logo, percebe-se que quanto maior é a diferença numérica entre as propriedades dos materiais de origem, maior será a diferença nas propriedades efetivas obtidas pelos métodos de Mori-Tanaka e lei das misturas. Portanto, deve-se escolher os materiais que irão compor os MGFs levando em consideração suas propriedades de origem e a função pretendida para o MGF em questão.

7.5 Análise não linear de cascas sob carregamento mecânico

O presente exemplo foi obtido nos trabalhos de Auad (2019) e Mars *et al.* (2017). Ele também foi modelado por vários autores como: Kim *et al.* (2008), Frikha e Dammak (2017), Payette e Reddy (2014) e Arciniega e Reddy (2007). Auad (2019) realizou análises de materiais com gradação funcional a partir de uma formulação isogeométrica. Mars *et al.* (2017) investigaram o comportamento não linear de cascas de MGF utilizando o software ABAQUS e sub-rotinas do usuário do próprio software.

A geometria e condições de contorno são mostradas na Figura 38, onde o comprimento L é igual à 504 mm, o ângulo θ é 0,1 rad e o raio R é 2540 mm. As propriedades dos constituintes são mostradas na Tabela 16 e a distribuição de fração de volume é dada por:

$$V_c(x_2) = \left[1 - a \left(\frac{1}{2} - \frac{x_2}{h} \right) + b \left(\frac{1}{2} - \frac{x_2}{h} \right)^c \right]^N \quad (7.19)$$

onde os coeficientes a , b e c são respectivamente iguais a 1, $\frac{1}{2}$ e 2. x_2 é medido ao longo da espessura e sua origem está na superfície média da casca.

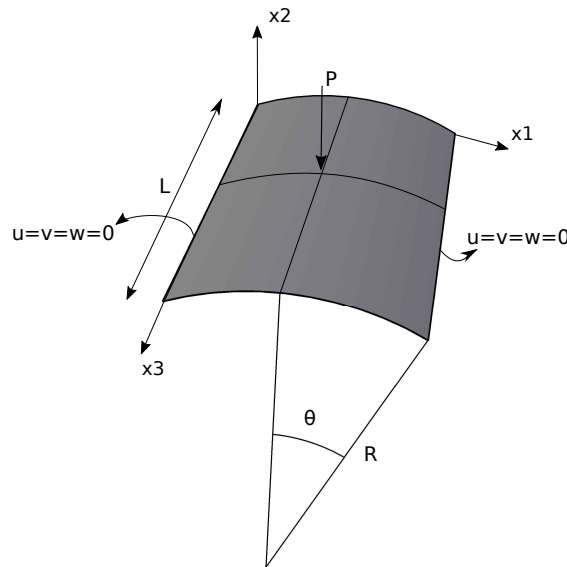
Tabela 16 – Propriedades mecânicas dos materiais

Propriedades	Cerâmica	Metal
Módulo de Elasticidade (GPa)	168	70
Coefficiente de Poisson	0,30	0,30

Fonte: Elaborado pelo autor

Mars *et al.* (2017) realizaram modelagem de cascas de 12,7 mm de espessura. Auad (2019) expandiu o trabalho e modelou também cascas com 6,35 mm de espessura.

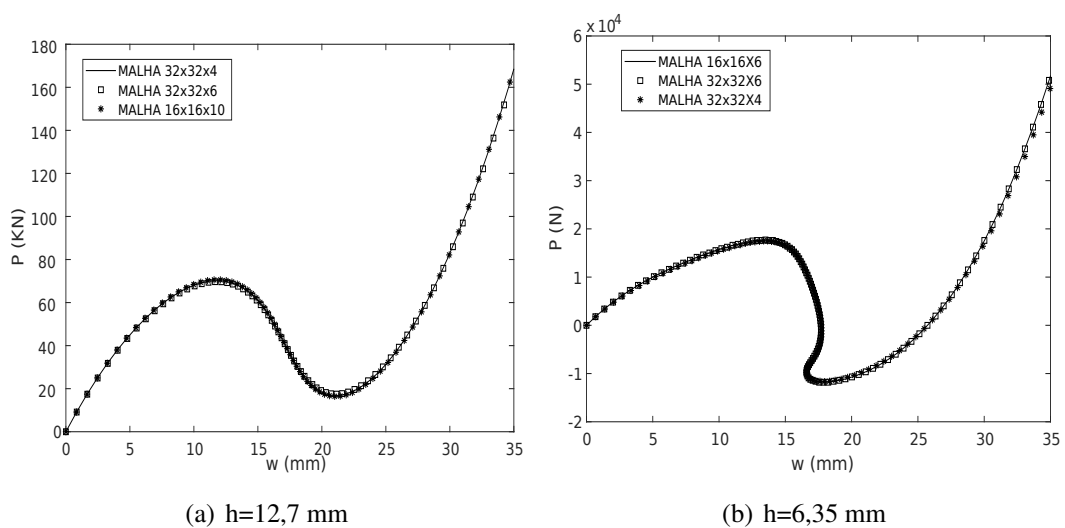
Figura 38 – Geometria, carregamento e condições de contorno



Fonte: Elaborado pelo autor

O elemento utilizado na análise foi o C3D20, a partir de um estudo de malha escolheu-se utilizar uma malha 32 x 32 com 6 elementos na espessura. O estudo de malha foi realizado para distribuição de fração de volume igual a 5 e consiste no caminho de equilíbrio considerando as diferentes malhas, como é mostrado na Figura 39. Percebe-se que a convergência é obtida rapidamente com elementos sólidos e que os caminhos de equilíbrio não diferem muito, considerando as diferentes malhas analisadas.

Figura 39 – Estudo de malha - $N = 5$

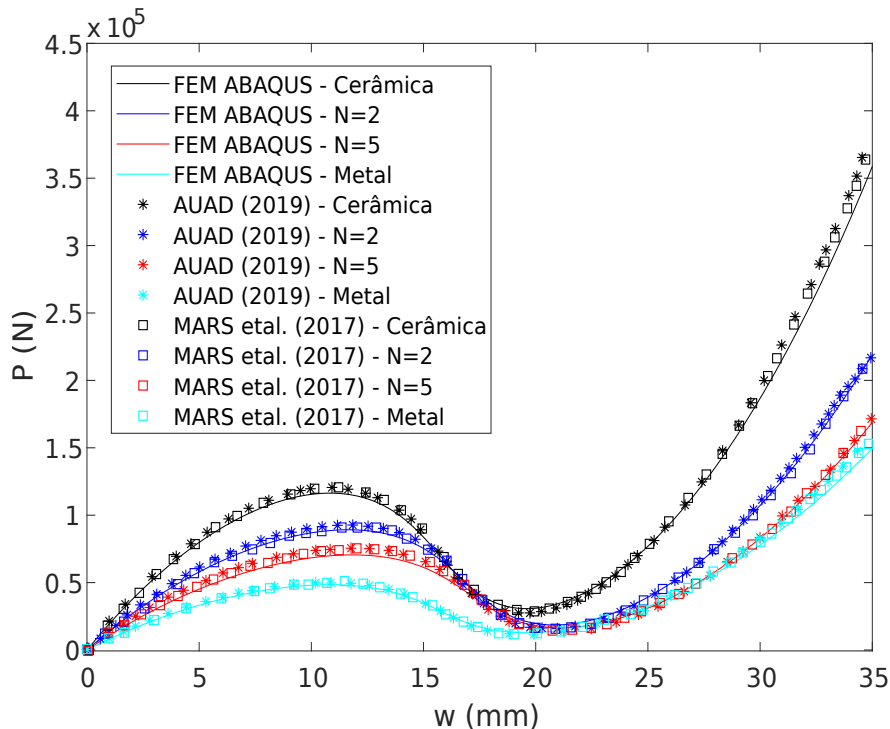


Fonte: Elaborado pelo autor

As Figuras 39, 40 e 41 apresentam os resultados obtidos. Destaca-se que diferen-

temente dos exemplos modelados nos Itens 7.2, 7.3 e 7.4 em que se utilizaram o método de controle de carga para o traçado do caminho pós-crítico. Neste exemplo, foi utilizado o método de comprimento de arco para o traçado do caminho pós-crítico devido a presença de *snap-back* e *snap-through*. Nota-se que os valores obtidos apresentaram excelente concordância com os obtidos por Mars *et al.* (2017) e Auad (2019).

Figura 40 – Caminho pós crítico (h=12,7mm)



Fonte: Elaborado pelo autor

A partir da Figura 40 também observa-se que a curva carga-deslocamento para os MGFs com índice de fração de volume iguais a 2 e 5 estão entre as curvas do material puramente cerâmico e o material puramente metálico, além disso, nota-se a presença do salto dinâmico, *snap-through*.

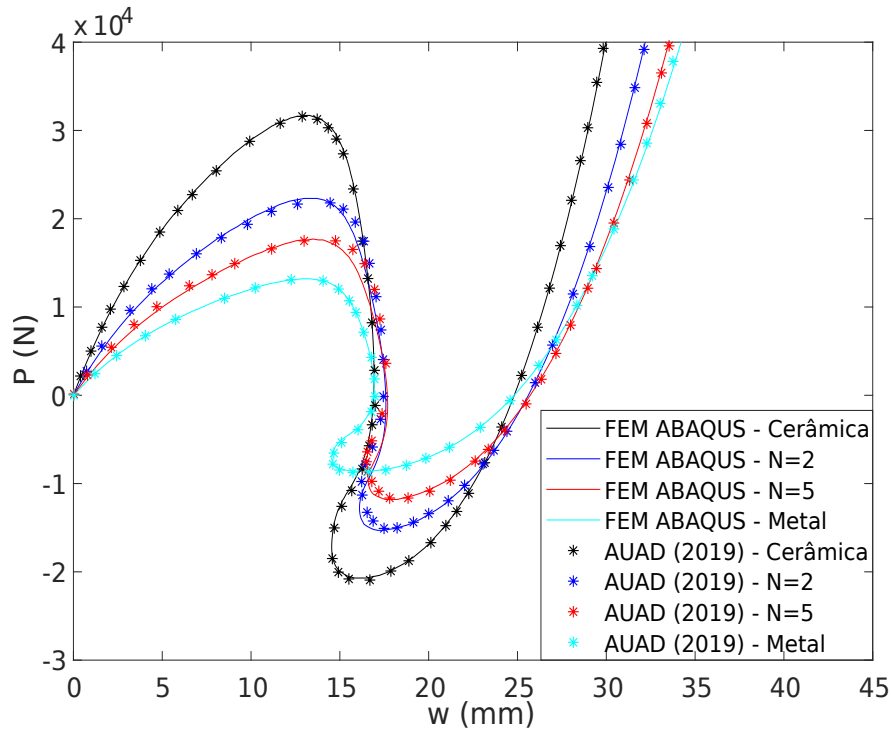
Neste trabalho também realizou-se o traçado da curva carga-deslocamento para cascas de 6,35 mm de espessura, conforme pode ser observado na Figura 41.

A Figura 41 apresenta o caminho de equilíbrio para cascas com espessura de 6,35 mm. Destaca-se que Wardle (2008) e Praciano (2018) constataram a existência uma bifurcação no caminho primário dessa estrutura. Fato não discutido profundamente neste trabalho por não ser o foco de investigação.

Novamente obtém-se resultados em conformidade com os da literatura. Observa-se

também que os MGFs apresentaram curvas entre os materiais de origem (cerâmica e metal). Mais uma vez foi possível constatar a boa resposta que a modelagem realizada a partir de sub-rotinas do usuário proporciona para análises de estruturas de materiais com gradação funcional. Foi possível observar, também, que cascas com 6,35 mm de espessura possuem o *snap-back*, fato que não ocorreu nas cascas que possuíam 12,7 mm de espessura.

Figura 41 – Caminho pós crítico (6,35mm)



Fonte: Elaborado pelo autor

7.6 Análise não linear de cascas sob carregamento térmico

Os exemplos deste item tratam de cascas submetidas a carregamento térmico. O primeiro exemplo aborda a análise não linear de uma casca cilíndrica abatida, mesma casca estudada no Item 7.5, submetida a um carregamento térmico. O segundo exemplo consiste no traçado do caminho de equilíbrio de um cilindro submetido a carregamento térmico e à ação de uma carga mecânica de perturbação, exemplo anteriormente estudado por Rezaiee-Pajand *et al.* (2019).

7.6.1 Painel cilíndrico sob aumento uniforme de temperatura

Este exemplo aborda um painel cilíndrico perfeito submetido a aumento uniforme de temperatura. A geometria e condições de contorno do problema são mostrados na Figura 42, onde o comprimento L é igual à 504 mm, o ângulo θ é 0,1 radianos e o raio R é 2540 mm. Foram analisadas duas cascas, uma com espessura de 6,35 mm e outra com espessura de 12,7 mm. Aplicou-se carga térmica, onde a temperatura de referência considerada foi de 290 K, variando de maneira uniforme na casca até atingir 790 K. Os materiais utilizados na análise foram a Alumina e o Níquel, cujas propriedades são mostradas na Tabela 17. Ressalta-se que não foi levado em consideração a variação das propriedades dos materiais com a temperatura.

Tabela 17 – Propriedades mecânicas dos materiais - Alumina e Níquel

Propriedades	Alumina	Níquel
Módulo de Elasticidade (N/cm^2)	380×10^5	205×10^5
Coefficiente de Poisson	0,3	0,3
Coef. de expansão térmica (K^{-1})	$7,4 \times 10^{-6}$	$12,5 \times 10^{-5}$

Fonte: Elaborado pelo autor

O elemento utilizado na análise foi o C3D20R, optou-se por utilizar a malha 32 x 32 com 6 elementos na espessura, mesma malha utilizada no Item 7.5. O método de homogeneização foi a lei das misturas e a distribuição de frações de volume foi realizada conforme:

$$V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{x_3}{h} \right)^N \quad (7.20)$$

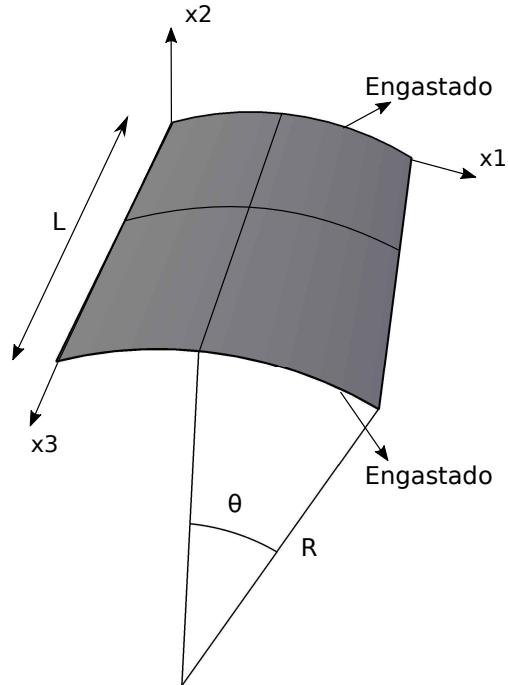
onde x_3 é medido ao longo da espessura e sua origem está na superfície média da casca.

Os resultados são mostrados nas Figuras 43 e 44. A Figura 43 mostra que não houve bifurcação, a estrutura apenas seguiu a curvatura original da casca para expandir. Observa-se também que à medida que a quantidade de metal aumenta no compósito, há um aumento de deslocamentos da casca, pois, o módulo de elasticidade da cerâmica é maior e o coeficiente de expansão térmica é menor que no metal. A Figura 44 mostra resultados similares, maiores deslocamentos para compósitos com maior proporção de metal. Entretanto, pode-se observar que devido a menor rigidez da casca de 6,35 mm de espessura, ela apresenta deslocamentos maiores em relação à casca de 12,7 mm.

A Figura 45 mostra a configuração deformada para a casca de 12,7 mm de espessura, a casca de 6,35 mm teve comportamento similar. Percebe-se que desde o primeiro incremento

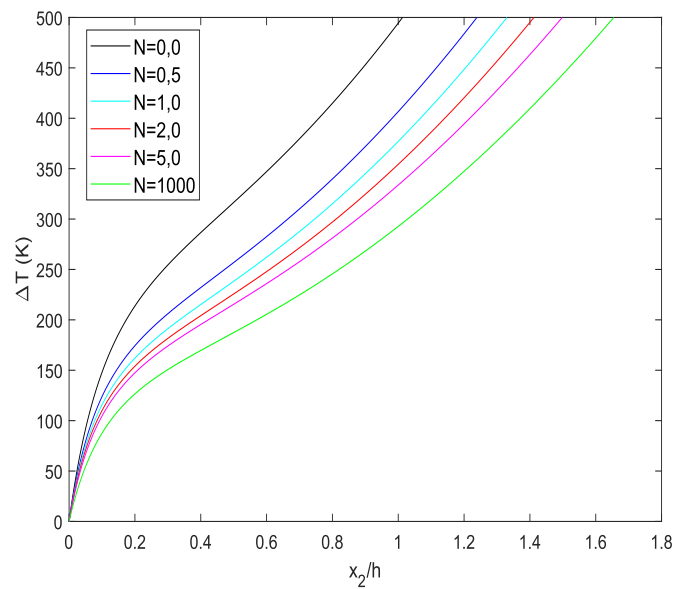
já há deslocamentos, apesar do engaste. Isso corrobora o fato de que não há bifurcação neste exemplo.

Figura 42 – Geometria e condições de contorno da casca



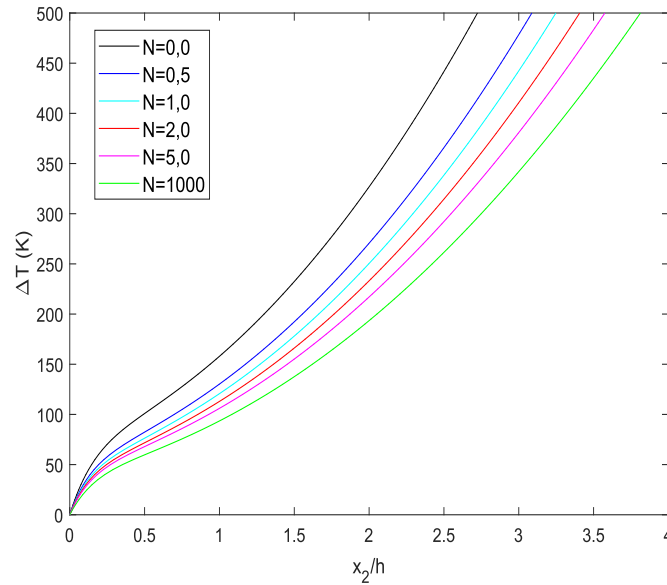
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 43 – Caminho de equilíbrio - Espessura de 12,7 mm



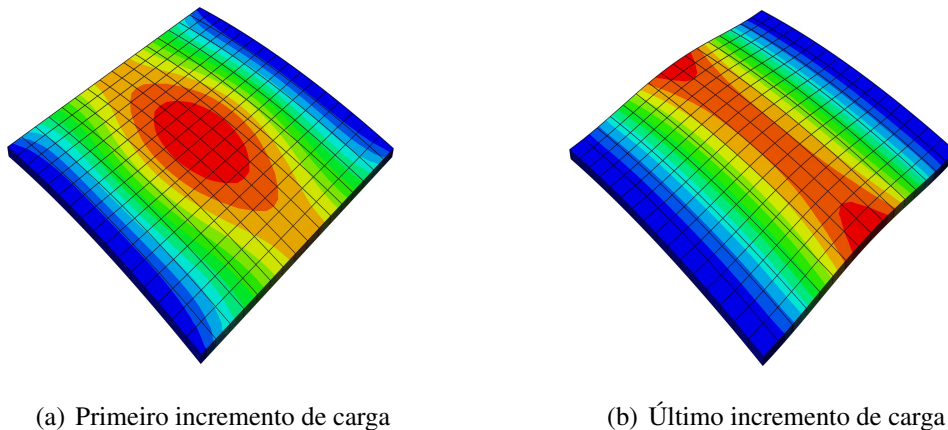
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 44 – Caminho de equilíbrio - Espessura de 6,35 mm



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 45 – Configuração deformada - Painel sob carga térmica- 12,7mm



(a) Primeiro incremento de carga

(b) Último incremento de carga

Fonte: Elaborado pelo autor.

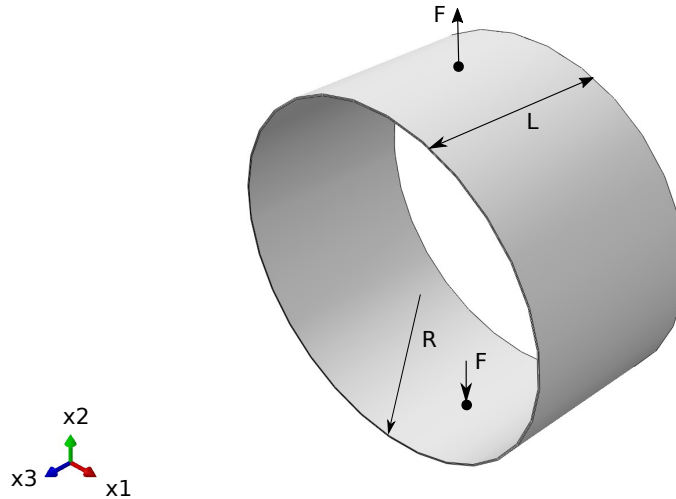
7.6.2 Cilindro sob aumento uniforme de temperatura

O presente exemplo foi estudado anteriormente por Rezaiee-Pajand *et al.* (2019) e consiste no traçado do caminho de equilíbrio de cascas sob carregamento térmico com aplicação de cargas mecânicas como imperfeição. Rezaiee-Pajand *et al.* (2019) utilizaram no estudo elementos de casca triangulares baseado na teoria de primeira ordem de deformação por cisalhamento.

A geometria do exemplo é mostrada na Figura 46, trata-se de uma casca de raio (R) de 100 cm, largura (L) de 100 cm e espessura (h) de 1 cm. Ela encontra-se engastada nas suas bordas e os materiais constituintes apresentam as propriedades mecânicas mostradas na

Tabela 18. Ressalta-se que as propriedades são consideradas de forma independente em relação à temperatura.

Figura 46 – Geometria da casca



Fonte: Elaborado pelo autor

O método de homogeneização foi o da lei das misturas e a distribuição das frações de volume utilizada obedeceu a lei das potências, conforme:

$$V_c = \left(\frac{R}{h}\right)^N \quad (7.21)$$

onde $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 99,5$

Tabela 18 – Propriedades mecânicas dos materiais - Alumina e Níquel

Propriedades	Alumina	Níquel
Módulo de Elasticidade (N/cm^2)	380×10^5	205×10^5
Coefficiente de Poisson	0,3	0,3
Coef. de expansão térmica (K^{-1})	$7,4 \times 10^{-6}$	$12,5 \times 10^{-5}$

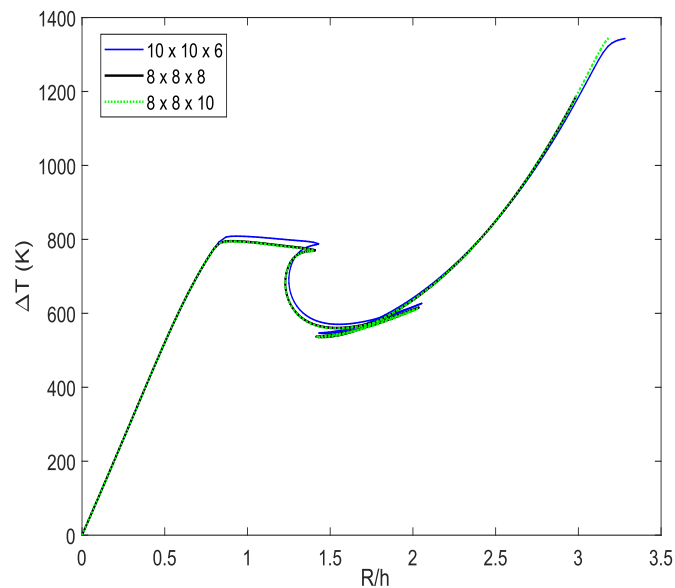
Fonte: Elaborado pelo autor

O elemento utilizado foi o C3D20R, a malha foi definida a partir de um estudo convergência cujos os resultados são mostrados na Figura 47. Neste estudo, traçou-se o caminho pós-crítico de uma casca cilíndrica com índice de fração de volume igual a zero (material puramente cerâmico), submetida a aumento uniforme de temperatura até o valor de 2000 K, com uma imperfeição de carga no valor de 4000N. A Figura 47 mostra que a malha de 8 x 8 x 8 traz bons resultados e maiores refinamentos de malha não trazem melhoras numéricas significativas. Considerando esses, decidiu-se utilizar a malha 8 x 8 x 8.

As análises foram realizadas para três composição de materiais, uma rica em cerâmica, outra rica em metal e uma considerando o índice de fração de volume igual a 1,0. O carregamento considerado foi o aumento uniforme de temperatura de 2000 K e uma imperfeição de carga no valor de 4000 N, carga representada por F na Figura 46. Deve-se ressaltar que sob esses carregamentos extremos o ideal é que se considere a variação das propriedades com a temperatura. Entretanto, o artigo de origem deste exemplo não fez essa consideração e o mesmo foi realizado neste trabalho.

O método do comprimento de arco foi utilizado para o traçado do caminho pós-crítico, ou seja, *Static Riks Step* no ABAQUS. Conforme mencionado no Item 6, campos de temperatura não podem ser lidos a partir de arquivos definidos pelo usuário quando se utiliza o *Static Riks* no ABAQUS. Logo, a solução para contornar este problema foi a utilização do Método das Lâminas Virtuais. A Figura 48b mostra que a adoção de 10 lâminas já trazem resultados satisfatórios, uma vez que a adoção de 16 lâminas não gerou melhores resultados numéricos.

Figura 47 – Estudo de malha



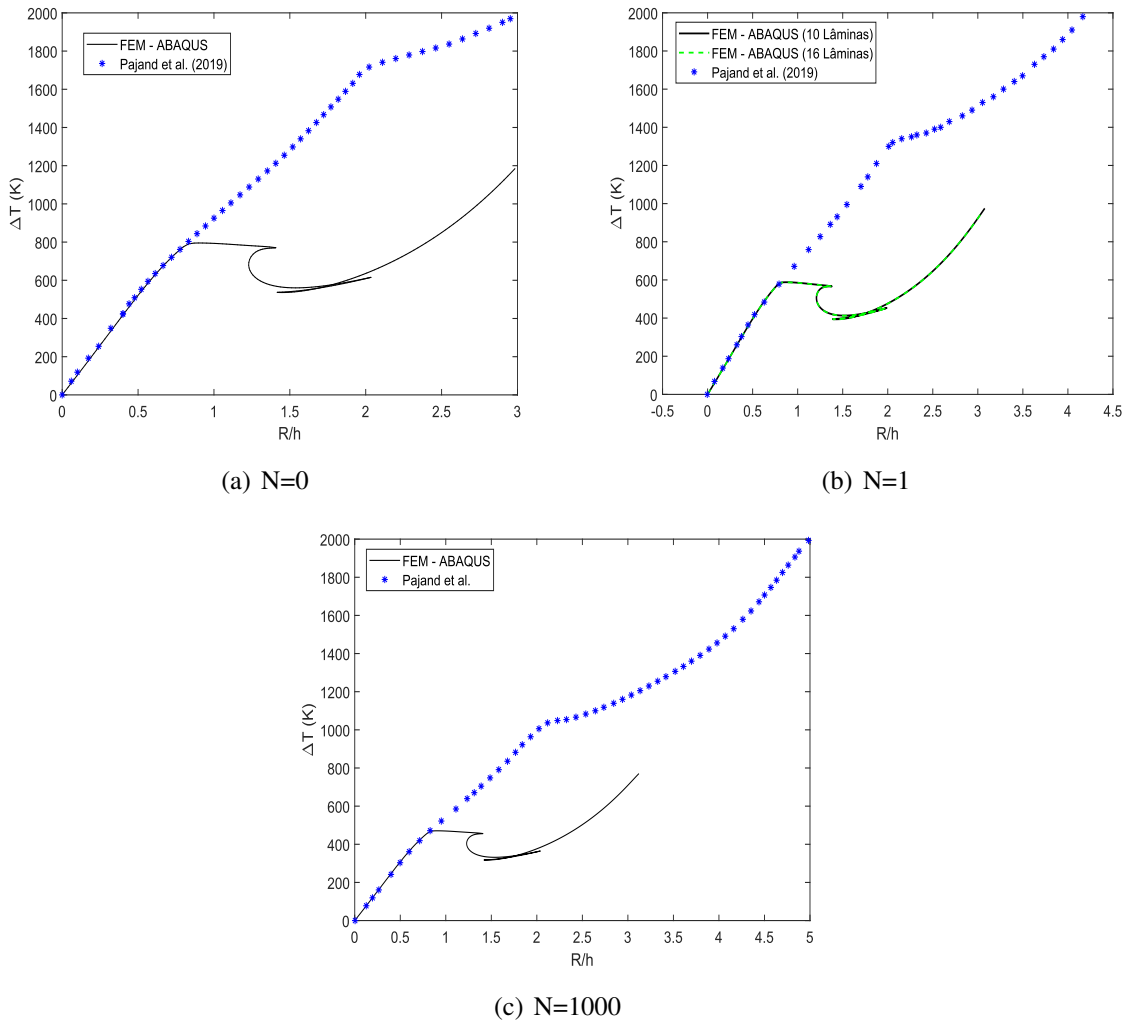
Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 48 mostra que, diferentemente dos resultados de Rezaiee-Pajand *et al.* (2019), há bifurcação no caminho pós-crítico. A bifurcação ocorreu tanto para materiais homogêneos quanto para materiais com gradação funcional. Além da bifurcação a estrutura apresentou comportamento complexo com a presença de *snap through* e *snap back*.

A Figura 48 mostra também que a variação crítica de temperatura é maior para a

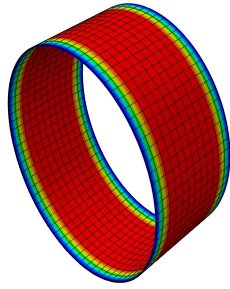
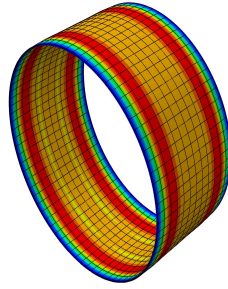
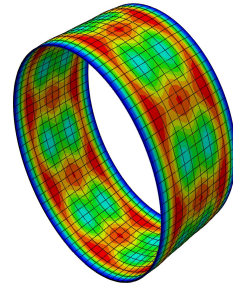
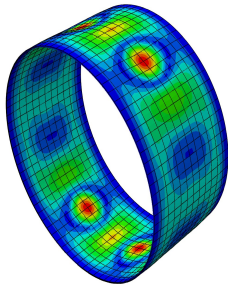
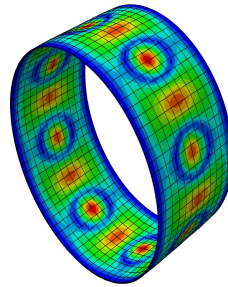
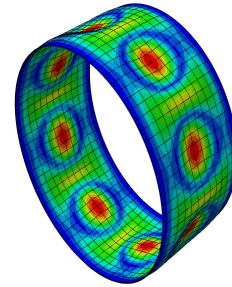
casca composta puramente por cerâmica. Esse valor vai diminuindo à medida que a proporção de metal vai aumentando na composição da estrutura. É interessante notar que o comportamento não linear desta casca com gradação é qualitativamente similar ao caso de material homogêneo.

Figura 48 – Caminho pós-crítico



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 49 mostra a configuração deformada da estrutura. Inicialmente observa-se que a estrutura apenas expande, seguindo a curvatura natural da estrutura. Entretanto, por volta de uma variação de temperatura de 585 K ocorre a bifurcação, considerando a casca com índice de fração de volume igual a 1. A partir deste ponto, a estrutura passa a apresentar comportamento complexo com a presença de efeitos não lineares. Por fim, à medida que a temperatura continua a aumentar novamente, a configuração deformada da estrutura passa a se assemelhar cada vez mais com a configuração do primeiro modo de flambagem da estrutura, Figura 49f.

Figura 49 – Configuração deformada - $N = 1$ (a) $\Delta T = 29,9K$ (b) $\Delta T = 444K$ (c) $\Delta T = 584,5K$ (d) $\Delta T = 424K$ (e) $\Delta T = 350K$ (f) $\Delta T = 975K$

Fonte: Elaborado pelo autor.

8 CONCLUSÃO

Este trabalho tratou da análise termomecânica de materiais com gradação funcional por meio de sub-rotinas implementadas no software ABAQUS. Avaliou-se as placas e cascas de MGFs no que diz respeito a transferência de calor, quando a estrutura está submetida à carga térmica. Além disso, estudou-se a distribuição de tensão e a estabilidade tanto em condição de carregamento mecânico quanto na condição de carga térmica. No estudo de estabilidade foi realizada a avaliação da carga crítica e a avaliação do traçado do caminho pós-crítico.

Primeiramente, foram analisadas placas submetidas a carregamento térmico ou a carregamento mecânico. A partir desse exemplo pôde-se verificar a não linearidade da distribuição de temperatura, quando se utiliza a equação da condução, quando o material tem gradação funcional. Além disso, pôde-se observar a boa concordância dos resultados obtidos neste trabalho com os resultados da literatura, tanto para a distribuição de tensões e valores de deslocamento para a placa submetida à carga térmica ou à carga mecânica.

Este trabalho tratou também do traçado do caminho pós-crítico para placas sob carregamento mecânico. Os exemplos de placas sob carregamento mecânico mostraram a comparação de duas metodologias de modelagem de MGFs, uma por meio de sub-rotinas implementadas no software ABAQUS e outra por meio de lâminas virtuais isotrópicas para levar em consideração a gradação na direção da espessura. Observou-se que placas de MGFs sob carregamento mecânico não apresentaram bifurcação quando simplesmente apoiadas. Além disso, foi observada uma boa concordância entre os dois métodos de modelagem, desde que utilizado um número adequado de lâminas virtuais.

A avaliação da estabilidade de placas sob carregamento térmico foi realizada por meio do cálculo da variação crítica de temperatura e pelo traçado do caminho pós-crítico. Para variação crítica de temperatura sob aumento uniforme de temperatura observou-se que à medida que a porcentagem de cerâmica presente no MGF aumenta, tem-se conseqüentemente um aumento da variação crítica de temperatura. Avaliou-se, também, a variação crítica de temperatura de acordo com o parâmetro geométrico a/h , notou-se que a variação crítica de temperatura caiu rapidamente quando o valor do parâmetro geométrico largura/espessura aumentou.

O traçado do caminho pós-crítico para placas de MGF sob carga térmica demonstrou ganho de resistência pós-crítica. Além disso, foi observada queda da variação crítica de temperatura com o aumento da relação largura/espessura e aumento desse valor à medida que a proporção de material cerâmico no compósito aumentou. No estudo do caminho pós-crítico

para aumento linear de temperatura, foi observado que as temperaturas críticas considerando as diferentes frações de volume são maiores no aumento linear de temperatura em relação ao aumento uniforme.

O traçado do caminho de equilíbrio para placas sob aumento não linear de temperatura mostraram a importância de se realizar o dimensionamento correto de placas de MGFs, otimizando o uso dessas placas e expondo a face com predominância de cerâmica à carga térmica. Além disso, foi observado que placas engastadas sob carga térmica apresentaram bifurcação, o que não ocorre para placas simplesmente apoiadas.

Este trabalho também mostrou que certos critérios devem ser avaliados para a obtenção da distribuição de temperatura a partir de soluções simplificadas. Destaca-se a obtenção da distribuição de temperatura por meio de expansão de termos em série, para que certo nível de acurácia seja atingido é necessária a utilização de muitos termos em série. Contudo, na literatura são apresentadas diversas soluções usando um pequeno número de termos levando a resultados inadequados.

Os diferentes métodos de homogeneização também foram avaliados. Observou-se que a obtenção das propriedades efetivas a partir do método da lei das misturas podem ser bem diferentes das obtidas por meio do método de Mori-Tanaka. Verificou-se que essa diferença depende dos materiais constituintes de origem e do índice de fração de volume.

Neste trabalho foram avaliadas cascas cilíndricas de espessura diferentes sob carregamento mecânico. Observou-se que as cascas mais finas possuem comportamento de *snap-back* e *snap-through*, as cascas mais espessas possuem comportamento mais simples, apresentando apenas *snap-through*. Essas cascas demonstraram a importância do método de comprimento de arco para o traçado do caminho de equilíbrio, uma vez que o método do controle de carga e o método de controle de deslocamentos não seriam capazes de traçar o caminho pós-crítico de forma completa.

O estudo de estruturas de MGFs seguiu com a avaliação de cascas submetidas a carregamento térmico. Podê-se observar que o painel cilíndrico não apresenta bifurcação quando submetido a aumento uniforme de temperatura. Observou-se também que a casca de maior rigidez possui menor deslocabilidade, assim como esperado. Por último, foi estudado cascas cilíndricas que possuem comportamento complexo pós-flambagem, estas cascas apresentaram bifurcação e pontos de *snap back* e *snap through*.

8.1 Sugestões para trabalhos futuros

A análise de materiais com gradação funcional ainda consiste em uma área relativamente nova com inúmeras possibilidades de desenvolvimento de trabalhos. Pode-se estudar a implementação de modelos constitutivos que considerem a plasticidade. Além disso, pode-se aprofundar o estudo das distribuições de frações de volume a depender do método de fabricação do MGF.

Quanto às análises termomecânicas, pode estudar a transferência de calor em regime transiente e levar em consideração o acoplamento entre os campos térmicos e mecânicos realizando análises de forma acoplada.

REFERÊNCIAS

- ABBAS, I. A. Nonlinear transient thermal stress analysis of thick-walled FGM cylinder with temperature-dependent material properties. **Meccanica**, Springer, v. 49, n. 7, p. 1697–1708, 2014.
- AKBARZADEH, A.; ABEDINI, A.; CHEN, Z. Effect of micromechanical models on structural responses of functionally graded plates. **Composite Structures**, Elsevier, v. 119, p. 598–609, 2015.
- ALIBEIGLOO, A. Exact solution for thermo-elastic response of functionally graded rectangular plates. **Composite Structures**, Elsevier BV, v. 92, n. 1, p. 113–121, jan. 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.07.003>>.
- ARCINIEGA, R.; REDDY, J. Tensor-based finite element formulation for geometrically nonlinear analysis of shell structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 196, n. 4-6, p. 1048–1073, 2007.
- AUAD, S. P. **Análise isogeométrica de cascas cilíndricas de material com gradação funcional**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.
- BABAEI, H.; KIANI, Y.; ESLAMI, M. Geometrically nonlinear analysis of functionally graded shallow curved tubes in thermal environment. **Thin-walled structures**, Elsevier, v. 132, p. 48–57, 2018.
- BIOT, M. A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics. **Journal of Applied Physics**, AIP Publishing, v. 27, n. 3, p. 240–253, mar. 1956. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1722351>>.
- BOLEY, B. A.; WEINER, J. H. **Theory of thermal stresses**. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.
- BONET, J.; WOOD, R. D. **Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis**. [S.l.]: Cambridge university press, 1997.
- BORST, R. D.; CRISFIELD, M. A.; REMMERS, J. J.; VERHOOSSEL, C. V. **Nonlinear finite element analysis of solids and structures**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012.
- BRISCHETTO, S.; LEETSCH, R.; CARRERA, E.; WALLMERSPERGER, T.; KRÖPLIN, B. Thermo-mechanical bending of functionally graded plates. **Journal of Thermal Stresses**, Informa UK Limited, v. 31, n. 3, p. 286–308, fev. 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/01495730701876775>>.
- BURLAYENKO, V.; ALTENBACH, H.; SADOWSKI, T.; DIMITROVA, S.; BHASKAR, A. Modelling functionally graded materials in heat transfer and thermal stress analysis by means of graded finite elements. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier BV, v. 45, p. 422–438, maio 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.01.005>>.
- BURLAYENKO, V. N. Modelling thermal shock in functionally graded plates with finite element method. **Advances in Materials Science and Engineering**, Hindawi Limited, v. 2016, p. 1–12, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/2016/7514638>>.

- CARABALLO, S. Thermo-mechanical beam element for analyzing stresses in functionally graded materials. Graduate Theses. University of South Florida, 2011.
- CARRERA, E.; FAZZOLARI, F. A.; CINEFRA, M. **Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications**. [S.l.]: Academic Press, 2016.
- ÇENGEL, Y.; GHAJAR, A. adaptado por kanoglu, m.; tradução: Lino, fam; revisão técnica: Ismail, kar transferência de calor e massa: uma abordagem prática. **4th edição. Porto Alegre, AMGH**, 2012.
- CHAJES, A. **Principles of structural stability theory**. [S.l.]: Prentice Hall, 1974.
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and applications of finite element analysis**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2002.
- CORREIA, V. M. F.; MADEIRA, J. A.; ARAÚJO, A. L.; SOARES, C. M. M. Multiobjective optimization of ceramic-metal functionally graded plates using a higher order model. **Composite Structures**, Elsevier, v. 183, p. 146–160, 2018.
- CORREIA, V. M. F.; MADEIRA, J. A.; ARAÚJO, A. L.; SOARES, C. M. M. Multiobjective optimization of functionally graded material plates with thermo-mechanical loading. **Composite Structures**, Elsevier, v. 207, p. 845–857, 2019.
- COSTA, E. J. H. **Homogeneização de compósitos reforçados por fibras considerando efeitos de interfaces**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2017.
- CRISFIELD, M. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Advanced Topics. Bol. 2**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1997.
- CRISFIELD, M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”. In: **Computational Methods in Nonlinear Structural and Solid Mechanics**. [S.l.]: Elsevier, 1981. p. 55–62.
- DUHAMEL, J. M. Second memoire sur les phenomenes thermo-mecaniques. **Journal de l'École polytechnique**, v. 15, n. 25, p. 1–57, 1837.
- FAZZOLARI, F.; CARRERA, E. Thermal stability of fgm sandwich plates under various through-the-thickness temperature distributions. **Journal of Thermal Stresses**, Taylor & Francis, v. 37, n. 12, p. 1449–1481, 2014.
- FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **A first course in finite elements**. [S.l.]: Wiley, 2007.
- FRIKHA, A.; DAMMAK, F. Geometrically non-linear static analysis of functionally graded material shells with a discrete double directors shell element. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 315, p. 1–24, 2017.
- GALAMBOS, T. V.; SUROVEK, A. E. **Structural stability of steel: concepts and applications for structural engineers**. [S.l.]: Wiley Online Library, 2008.
- GUPTA, A.; TALHA, M. Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures. **Progress in Aerospace Sciences**, Elsevier BV, v. 79, p. 1–14, nov. 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2015.07.001>>.

HETNARSKI, R. B.; ESLAMI, M. R. **Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications (Solid Mechanics and Its Applications)**. [S.l.]: Springer, 2009. ISBN 1402092466.

JAVAHERI, R.; ESLAMI, M. Thermal buckling of functionally graded plates. **AIAA journal**, v. 40, n. 1, p. 162–169, 2002.

JAVAHERI, R.; ESLAMI, M. Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory. **Journal of thermal stresses**, Taylor & Francis, v. 25, n. 7, p. 603–625, 2002.

JRAD, H.; MARS, J.; WALI, M.; DAMMAK, F. Geometrically nonlinear analysis of elastoplastic behavior of functionally graded shells. **Engineering with Computers**, Springer, v. 35, n. 3, p. 833–847, 2019.

KIEBACK, B.; NEUBRAND, A.; RIEDEL, H. Processing techniques for functionally graded materials. **Materials Science and Engineering: A**, Elsevier, v. 362, n. 1-2, p. 81–106, 2003.

KIM, K.-D.; LOMBOY, G. R.; HAN, S.-C. Geometrically non-linear analysis of functionally graded material (fgm) plates and shells using a four-node quasi-conforming shell element. **Journal of composite materials**, Sage Publications Sage UK: London, England, v. 42, n. 5, p. 485–511, 2008.

KOIZUMI, M. Fgm activities in japan. **Composites Part B: Engineering**, Elsevier, v. 28, n. 1-2, p. 1–4, 1997.

KREYSZIG, E. **Matemática superior para engenharia**. [S.l.]: Livros Tecnicos e Cientificos, 2009.

LEWIS, R. W.; NITHIARASU, P.; SEETHARAMU, K. N. **Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004.

MAIA, M. A. **Sequential Approximate Optimization of Composite Structures**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2020.

MAO, Y.; AI, S.; FANG, D.; FU, Y.; CHEN, C. Elasto-plastic analysis of micro fgm beam basing on mechanism-based strain gradient plasticity theory. **Composite Structures**, Elsevier, v. 101, p. 168–179, 2013.

MARS, J.; KOUBAA, S.; WALI, M.; DAMMAK, F. Numerical analysis of geometrically non-linear behavior of functionally graded shells. **Latin American Journal of Solids and Structures**, SciELO Brasil, v. 14, n. 11, p. 1952–1978, 2017.

MEDEIROS JR., M. S.; PARENTE JR., E. Microfea 1.0—a software package for finite element analysis of functionally graded materials. **SoftwareX**, Elsevier, v. 11, p. 100481, 2020.

MEDEIROS JR, M. S.; PARENTE JR, E.; MELO, A. M. C. d. Influence of the micromechanics models and volume fraction distribution on the overall behavior of sic/al functionally graded pressurized cylinders. **Latin American Journal of Solids and Structures**, SciELO Brasil, v. 16, n. 4, 2019.

MIEDZIŃSKA, D. New method of numerical homogenization of functionally graded materials. **Procedia Structural Integrity**, Elsevier, v. 5, p. 484–491, 2017.

MOITA, J. S.; ARAÚJO, A. L.; CORREIA, V. F.; SOARES, C. M. M.; HERSKOVITS, J. Buckling and nonlinear response of functionally graded plates under thermo-mechanical loading. **Composite Structures**, Elsevier, v. 202, p. 719–730, 2018.

NA, K.-S.; KIM, J.-H. Three-dimensional thermomechanical buckling of functionally graded materials. **AIAA journal**, v. 43, n. 7, p. 1605–1612, 2005.

NA, K.-S.; KIM, J.-H. Nonlinear bending response of functionally graded plates under thermal loads. **Journal of Thermal Stresses**, Taylor & Francis, v. 29, n. 3, p. 245–261, 2006.

NA, K.-S.; KIM, J.-H. Thermal postbuckling investigations of functionally graded plates using 3-d finite element method. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 42, n. 8-9, p. 749–756, 2006.

NEMAT-ALLA, M. M.; ATA, M. H.; BAYOUMI, M. R.; KHAIR-ELDEEN, W. *et al.* Powder metallurgical fabrication and microstructural investigations of aluminum/steel functionally graded material. **Materials Sciences and Applications**, Scientific Research Publishing, v. 2, n. 12, p. 1708, 2011.

NEMATI, A.; MAHMOODABADI, M. Effect of micromechanical models on stability of functionally graded conical panels resting on winkler–pasternak foundation in various thermal environments. **Archive of Applied Mechanics**, Springer, p. 1–33, 2019.

NODA, N. Thermal stresses in functionally graded materials. **Journal of Thermal Stresses**, Taylor & Francis, v. 22, n. 4-5, p. 477–512, 1999.

OTTOSEN, N. S.; PETERSSON, H. **Introduction to the Finite Element Method**. [S.l.]: Prentice-Hall, 1992. 422 p. ISBN 0-13-473877-2.

PARENTE JR., E.; JUNIOR, A. S. de; SILVA, S. M. B. A. D. Tracing nonlinear equilibrium paths of structures subjected to thermal loading. **Computational Mechanics**, Springer, v. 38, n. 6, p. 505–520, 2006.

PAYETTE, G.; REDDY, J. A seven-parameter spectral/hp finite element formulation for isotropic, laminated composite and functionally graded shell structures. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 278, p. 664–704, 2014.

PEZZIN, S. Y.; GRAÇA, F. W.; DEPOLLO, F. L.; FOLADOR, G. V.; SILVEIRA, C. R.; BADKE, N. A.; BORTOLI, L. L. D. **Introdução à teoria da estabilidade elástica**. [S.l.]: LBF, 2019.

PRACIANO, J. S. **Análise de estabilidade de estruturas laminadas e de Material com Gradação Funcional Utilizando uma Formulação Isogeométrica**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.

REDDY, J.; CHENG, Z.-Q. Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates. **European Journal of Mechanics - A/Solids**, Elsevier BV, v. 20, n. 5, p. 841–855, set. 2001. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/s0997-7538\(01\)01174-3](https://doi.org/10.1016/s0997-7538(01)01174-3)>.

REDDY, J.; CHIN, C. Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. **Journal of thermal Stresses**, Taylor & Francis, v. 21, n. 6, p. 593–626, 1998.

- REZAIEE-PAJAND, M.; POURHEKMAT, D.; ARABI, E. Thermo-mechanical stability analysis of functionally graded shells. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 178, p. 1–11, 2019.
- RIBEIRO, L. G.; MAIA, M. A.; JR, E. P.; MELO, A. M. C. de. Surrogate based optimization of functionally graded plates using radial basis functions. **Composite Structures**, Elsevier, v. 252, p. 112677, 2020.
- RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. **International journal of solids and structures**, Elsevier, v. 15, n. 7, p. 529–551, 1979.
- SHEN, H.-S. Postbuckling of shear deformable fgm cylindrical shells surrounded by an elastic medium. **International Journal of Mechanical Sciences**, Elsevier, v. 51, n. 5, p. 372–383, 2009.
- SHEN, H.-S. Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells. Taylor & Francis, 2016.
- SILVA, D. R. R.; Parente Jr., E.; Medeiros Jr., M. S. **Análise termomecânica de materiais com gradação funcional**. XL Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. Natal/RN, Brazil, v. 1, 2019.
- SIMULIA. Abaqus standard user's manual, version 6.10. **Dassault Systèmes Simulia Corp., Providence, Rhode Island, USA**, 2010.
- SIMULIA. Abaqus standard user's manual, version 6.13. **Dassault Systèmes Simulia Corp., Providence, Rhode Island, USA**, 2013.
- SIMULIA. Abaqus user subroutines reference guide, version 6.14. **Dassault Systemes Simulia Corp., Providence, RI, USA**, 2014.
- SWAMINATHAN, K.; SANGEETHA, D. Thermal analysis of FGM plates – a critical review of various modeling techniques and solution methods. **Composite Structures**, Elsevier BV, v. 160, p. 43–60, jan. 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.047>>.
- TOULOUKIAN, Y. S.; POWELL, R.; HO, C.; KLEMENS, P. **Thermophysical properties of matter-the tprc data series**. [S.l.], 1970.
- TRABELSI, S.; FRIKHA, A.; ZGHAL, S.; DAMMAK, F. Thermal post-buckling analysis of functionally graded material structures using a modified fsdt. **International Journal of Mechanical Sciences**, Elsevier, v. 144, p. 74–89, 2018.
- TRAN, L. V.; PHUNG-VAN, P.; LEE, J.; WAHAB, M. A.; NGUYEN-XUAN, H. Isogeometric analysis for nonlinear thermomechanical stability of functionally graded plates. **Composite Structures**, Elsevier, v. 140, p. 655–667, 2016.
- TRAN, L. V.; THAI, C. H.; NGUYEN-XUAN, H. An isogeometric finite element formulation for thermal buckling analysis of functionally graded plates. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 73, p. 65–76, 2013.
- UDUPA, G.; RAO, S. S.; GANGADHARAN, K. Functionally graded composite materials: an overview. **Procedia Materials Science**, Elsevier, v. 5, p. 1291–1299, 2014.

VEL, S. S.; BATRA, R. C. Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates. **AIAA Journal**, American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), v. 40, n. 7, p. 1421–1433, jul. 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/2.1805>>.

WARDLE, B. L. Solution to the incorrect benchmark shell-buckling problem. **AIAA journal**, v. 46, n. 2, p. 381–387, 2008.

WEMPNER, G. A. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 7, n. 11, p. 1581–1599, 1971.

WOO, J.; MEGUID, S.; STRANART, J.; LIEW, K. Thermomechanical postbuckling analysis of moderately thick functionally graded plates and shallow shells. **International Journal of Mechanical Sciences**, Elsevier, v. 47, n. 8, p. 1147–1171, 2005.

YIN, H.; SUN, L.; PAULINO, G. H. Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions. **Acta Materialia**, Elsevier, v. 52, n. 12, p. 3535–3543, 2004.

APÊNDICE A – SUB-ROTINA UMAT

Esta sub-rotina do usuário foi utilizada especificamente para cascas de 6,35 mm de espessura, utilizada no exemplo do Item 7.6.1. Ela considera o método da lei das misturas para homogeneização das propriedades e a fração de volume por meio da lei das potências.

```

SUBROUTINE UMAT(STRESS, STATEV, DDSDE, SSE, SPD, SCD, RPL,      &
& DDSDDT, DRPLDE, DRPLDT, STRAN, DSTRAN, TIME, DTIME, TEMP,    &
& DTEMP,PREDEF, DPRED, CMNAME, NDI, NSHR, NTENS, NSTATV, PROPS, &
& NPROPS, COORDS, DROT, PNEWDT, CELENT, DFGRD0, DFGRD1, NOEL,   &
& NPT, LAYER, KSPT, KSTEP, KINC)

```

```

INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

```

```

CHARACTER*8 CMNAME

```

```

DIMENSION STRESS(NTENS), STATEV(NSTATV), DDSDE(NTENS, NTENS),  &
& DDSDDT(NTENS), DRPLDE(NTENS), STRAN(NTENS), DSTRAN(NTENS),  &
& PREDEF(1), DPRED(1), PROPS(NPROPS), COORDS(3), DROT(3, 3),  &
& DFGRD0(3, 3), DFGRD1(3, 3), ETHERM(6), DTHERM(6), EELAS(6)

```

```

PARAMETER(ZERO=0.D0, ONE=1.D0, TWO=2.D0, THREE=3.D0, SIX=6.D0)

```

```

!Propriedades dos materiais de origem

```

```

Ec=PROPS(1)

```

```

Em=PROPS(2)

```

```

EAc=PROPS(3)

```

```

EAm=PROPS(4)

```

```

T_IN=PROPS(5)

```

```

!Consideração de coordenadas no primeiro incremento

```

```

!para cálculo das

```

```

!frações de volume

```

```

IF (KSTEP == 1 .AND. KINC == 1) THEN

```

```

X = COORDS(1)

```

```

        Y = COORDS(2)
        RAI0 = ((X**TWO)+(Y**TWO))**0.5D0
        R = RAI0 - 2.54D0
STATEV(1) = R
STATEV(2) = RAI0
    ELSE
        R = STATEV(1)
        RAI0 = STATEV(2)
    END IF
    !cálculo das frações de volume
    V = (0.5D0+R/(6.35D-3))**0.5D0
    Vm=1.0D0-V
    !cálculo das propriedades efetivas
    EALPHA=EAm*Vm+V*EAc
    EMOD=V*(Ec-Em)+Em
    ENU=PROPS(6)
    EG = EMOD/(TWO*(ONE+ENU))
    ELAM=(EMOD*ENU)/((ONE+ENU)*(ONE-TWO*ENU))
    !montagem da matriz constitutiva
    DO K1=1, NDI
        DO K2=1, NDI
            DDSDE(K2, K1)=ELAM
        END DO
        DDSDE(K1, K1)=TWO*EG+ELAM
    END DO
    DO K1=NDI+1, NTENS
        DDSDE(K1 ,K1)=EG
    END DO
    !cálculo da deformação térmica
    DO K1=1,NDI
        D THERM(K1)=EALPHA*DTEMP
        E THERM(K1)=EALPHA*(TEMP-T_IN)
    END DO

```

```
END DO

DO K1=NDI+1,NTENS
  DTERM(K1)=ZERO
  ETERM(K1)=ZERO
END DO

!cálculo da tensão ao final de cada incremento
DO K1=1, NTENS
  DO K2=1, NTENS
    STRESS(K2)=STRESS(K2)+DDSDDE(K2, K1)*(DSTRAN(K1)-DTERM(K1))
  END DO
  ETERM(K1)=ETERM(K1)+DTERM(K1)
  EELAS(K1)=STRAN(K1)+DSTRAN(K1)-ETERM(K1)
END DO

!Cálculo das variaveis de estado
STATEV(3)=V
STATEV(4)=EMOD
STATEV(5)=ENU
STATEV(6)=EALPHA
RETURN
END
```


APÊNDICE B – SUB-ROTINA UMATHT

Esta sub-rotina do usuário foi utilizada no no Item 7.3.1.3. Por meio dela, as propriedades efetivas foram obtidas utilizando a lei das misturas e as frações de volume utilizando a lei das potências.

```

SUBROUTINE UMATHT(U,DUDT,DUDG,FLUX,DFDT,DFDG, &
& STATEV,TEMP,DTEMP,DTEM DX,TIME,DTIME,PREDEF,DPRED, &
& CMNAME,NTGRD,NSTATV,PROPS,NPROPS,COORDS,PNEWDT, &
& NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC)

INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

CHARACTER*80 CMNAME

DIMENSION DUDG(NTGRD),FLUX(NTGRD),DFDT(NTGRD), &
& DFDG(NTGRD,NTGRD),STATEV(NSTATV),DTEM DX(NTGRD), &
& TIME(2),PREDEF(1),DPRED(1),PROPS(NPROPS),COORDS(3)
! Propriedade dos materiais de origem
CD_C = PROPS(1)
CD_M = PROPS(2)
S_C = PROPS(3)
S_M = PROPS(4)
!coordenadas
Z = COORDS(3)
!cálculo das frações de volume
V = (1-Z/0.002D0)**0.3D0
!Cálculo das propriedades efetivas
SPECHT = S_C+(S_M-S_C)*V
cond = CD_C+(CD_M-CD_C)*V
!Variação da energia térmica interna por unidade de massa
DUDT = SPECHT
DU = DUDT*DTEMP

```

```
!Energia térmica interna por unidade de massa
U = U+DU
! Cálculo do fluxo e cálculo da variação do fluxo com
!a temperatura
do i=1, ntgrd
FLUX(i) = -cond*DTEM DX(i)
dfdg(i,i) = -cond
end do
! Contabiliza as variáveis de estado
STATEV(1)=cond
return
end
```