



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE QUIXADÁ
CURSO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

MATEUS LIMA ALVES

ANÁLISE DA ORTOGONALIDADE IMPERFEITA COM UM MODELO DE SINAL
LORA

QUIXADÁ
2020

MATEUS LIMA ALVES

ANÁLISE DA ORTOGONALIDADE IMPERFEITA COM UM MODELO DE SINAL LORA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia de Computação do Campus de Quixadá da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Engenharia de Computação.

Orientador: Prof. Dr. Elvis Miguel Galeas Stancanelli

QUIXADÁ

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- A48a Alves, Mateus Lima.
Análise da ortogonalidade imperfeita com um modelo de sinal LoRa / Mateus Lima Alves. – 2020.
51 f. : il. color.
- Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Campus de Quixadá,
Curso de Engenharia de Computação, Quixadá, 2020.
Orientação: Prof. Dr. Elvis Miguel Galeas Stancanelli.
1. LoRa. 2. Ortogonalidade. 3. Internet das coisas. I. Título.

CDD 621.39

MATEUS LIMA ALVES

ANÁLISE DA ORTOGONALIDADE IMPERFEITA COM UM MODELO DE SINAL LORA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia de Computação do Campus de Quixadá da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Engenharia de Computação.

Aprovada em: ___/___/_____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Elvis Miguel Galeas
Stancanelli (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. André Ribeiro Braga
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Me. Francisco Helder Candido dos Santos Filho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me proporcionar tudo que vivi nessa jornada. Por me sustentar e ensinar em todos os momentos e estar sempre comigo.

Aos meu pais Marcos e Patrícia, por todo amor e dedicação na minha criação, por me ajudarem e incentivarem em todas as etapas da minha vida.

A minha noiva Karoline Gomes, por todo apoio ao longo da graduação. Por me ajudar e incentivar nos bons e maus momentos.

Aos amigos e colegas de graduação que foram essenciais no decorrer da caminhada: Matheus Fernandes, Robert Cabral, Lucas Cruz, André Luiz, Marianna Pinho e José Wesley.

A todos os professores que se dedicaram e ajudaram a me tornar o profissional que sou hoje. Gostaria de agradecer em especial aos professores: Joel Ramiro, Helder Candido, Cristiano Bacelar e Paulo Armando, por toda ajuda e conhecimentos passados.

Ao meu orientador, professor Dr. Elvis Stancanelli, por todos os ensinamentos, paciência e conselhos, sem a ajuda dele eu não teria aprendido tanto como nesse projeto.

A todos que compõem a Universidade Federal do Ceará - Campus Quixadá, por todo o auxílio nas mais diversas atividades acadêmicas e extracurriculares.

RESUMO

Com o crescente número de dispositivos conectados a IoT, surgem diversos padrões de rede para atender requisitos como: escalabilidade, eficiência energética, confiabilidade, entre outros. Com isso, surgem redes classificadas como LPWANs, são elas redes que conectam dispositivos a longas distâncias e baixa potência. Nessa classe de rede, destaca-se o padrão LoRaWAN, o qual utiliza uma modulação baseada na CSS, que além de espalhar o sinal em uma banda de frequência, transmite dados através de *chirps*. O presente trabalho analisa a modulação LoRa através de modelos presentes na literatura. São realizadas análises matemáticas e numéricas da correlação entre sinais LoRa, fator que implica diretamente na escalabilidade da rede, além de uma análise da rejeição entre símbolos. Por último, é realizada uma análise e uma campanha de simulação utilizando um demodulador presente na literatura. Foram encontradas fórmulas que apresentam a correlação entre todos os símbolos que podem ser transmitidos na rede. Também foi apresentada uma tabela com a rejeição entre símbolos de fatores de espalhamento iguais e distintos.

Palavras-chave: LoRa. Ortogonalidade. Internet das coisas.

ABSTRACT

With the growing number of devices connected to IoT, several network standards appear to attend requirements such as: scalability, energy efficiency, reliability, among others. With this, networks classified as LPWANs appear, they are networks that connect devices over long distances and low power. In this class of network, the LoRaWAN standard stands out, which uses a modulation based on CSS, which besides spreading the signal in a frequency band, transmits data through chirps. The present work analyzes LoRa modulation through models present in the literature. Mathematical and numerical analyzes of the correlation between LoRa signals are carried out, a factor that directly implies the scalability of the network, in addition to an analysis of the rejection between symbols. Finally, an analysis and a simulation campaign are performed using a demodulator in the literature. Formulas were found that show the correlation between all symbols that can be transmitted on the network. A table was also presented with the rejection between symbols of equal and distinct scattering factors.

Keywords: LoRa. Orthogonality. Internet of things.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Somatório da correlação entre os símbolos de mesmo fator de espalhamento.	31
Tabela 2 – Módulo das correlações máximas entre os símbolos de fatores de espalhamento.	39
Tabela 3 – Módulo das correlações médias entre os símbolos de fatores de espalhamento.	40
Tabela 4 – Rejeição entre canais (em dB).	41

LISTA DE ACRÔNIMOS

CSS	<i>Chirp Spread Spectrum</i>
H2H	<i>Human-to-Human</i>
IoT	<i>Internet-of-Things</i>
LoRa	<i>Long Range</i>
LoRaWAN	<i>Long Range Wide Area Network</i>
LPWAN	<i>Low Power Wide Area Network</i>
M2M	<i>Machine-to-Machine</i>
NB-IoT	<i>NarrowBand IoT</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
2.1	Internet das Coisas	14
2.2	Redes de Longo Alcance e Baixa Potência	15
2.2.1	<i>Características das Low Power Wide Area Network (LPWAN)s</i>	15
2.2.2	<i>Tecnologias Proprietárias</i>	17
2.3	Protocolo LoRaWAN	20
2.3.1	<i>Topologia e Arquitetura das redes LoRaWAN</i>	20
2.3.2	<i>Pilha de Protocolos LoRaWAN</i>	21
2.4	Modulação LoRa	23
3	TRABALHOS RELACIONADOS	25
3.1	<i>Frequency Shift Chirp Modulation: The LoRa Modulation</i>	25
3.2	<i>Impact of Spreading Factor Imperfect Orthogonality in LoRa Communications</i>	25
3.3	<i>LoRa Throughput Analysis with Imperfect Spreading Factor Orthogonality</i>	26
3.4	Trabalho Proposto	26
4	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	27
4.1	Definição do Modelo de Modulação LoRa	27
4.2	Analises das Correlações	27
4.3	Análise da Rejeição entre Canais	28
4.4	Análise da Demodulação do Sinal LoRa Com Ruído Gaussiano Branco	28
5	RESULTADOS	29
5.1	Definição do Modelo de Modulação LoRa	29
5.2	Análise das Correlações	30
5.2.1	<i>Símbolos de mesmo fator de espalhamento</i>	32
5.2.2	<i>Símbolos de fatores de espalhamento distintos</i>	36
5.2.2.1	<i>Símbolo desejado com fator de espalhamento menor que outro</i>	36
5.2.2.2	<i>Símbolo desejado com fator de espalhamento maior que outros</i>	38
5.3	Análise da Rejeição entre Canais	40

5.4	Análise da Demodulação do Sinal <i>Long Range</i> (LoRa) com Ruído Gaussiano Branco	41
6	CONCLUSÕES	47
6.1	Trabalhos Futuros	47
	REFERÊNCIAS	49

1 INTRODUÇÃO

A Internet é uma notável infraestrutura de comunicação, que tem como principal objetivo prover conectividade em qualquer lugar e a qualquer momento. Tradicionalmente, o principal foco dessa rede tem sido a comunicação do tipo *Human-to-Human* (H2H). Por esse motivo, a infraestrutura e os protocolos de rede definidos até então são otimizados para características de tráfego orientadas para o ser humano (ALI *et al.*, 2015).

Através da proposta de conectividade, a Internet modificou significativamente o estilo de vida da sociedade contemporânea. Alguns exemplos dessas mudanças estão no modo de fazer negócios, compras (FOROUZAN, 2009) e até mesmo no relacionamento entre os indivíduos da sociedade. Esta significativa mudança de hábitos da população se dá pelo crescimento de seu público ao longo dos anos estimando-se que, em 2008, 23,1% da população global estava usando a Internet, o que representava aproximadamente 1,5 bilhões de pessoas (ITU, 2019). Outro levantamento foi realizado em 2018, este por sua vez, mostrou que aproximadamente 3,9 bilhões de pessoas utilizavam a rede, número que representava 51,2% na população global e também um crescimento de cerca de 2,4 bilhões de pessoas em desde 2008 (ITU, 2019).

Arelado às mudanças de hábitos da sociedade, decorrentes do advento da Internet, houve um expressivo avanço tecnológico. Avanços estes que revolucionaram também os dispositivos e máquinas e culminou na criação de um paradigma de comunicação diferente do H2H, com a inserção das máquinas nos cenários da comunicação. Nessa nova linha evolucionária, máquinas e dispositivos que geralmente não possuem fios, como atuadores, sensores e medidores inteligentes, também podem se comunicar entre si, trocando dados sem auxílio humano (WAN *et al.*, 2012). Este modelo de comunicação é denominado *Machine-to-Machine* (M2M). E, de acordo com Ali *et al.* (2015), a *Internet-of-Things* (IoT) torna-se a nova geração da Internet, capaz de conectar humanos e máquinas, tratando quaisquer dispositivos finais da rede como objetos.

O segmento de mercado em que se enquadra a IoT cobre uma vasta gama de aplicações na indústria e sociedade, tais como transporte e logística, agricultura, monitoramento ambiental, monitoramento e controle de processos industriais, monitoramento médico, automação residencial. Previsões para o futuro da IoT mostram que o número de dispositivos conectados à rede ultrapassará o número de humanos já em 2021, e de acordo com a empresa Ericsson (2016), haverá por volta de 28 bilhões de dispositivos conectados já em 2021, sendo 15 bilhões no modelo M2M e dispositivos eletrônicos, além de 13 bilhões de celulares, computadores pessoais,

laptops e tablets.

Entretanto, o aumento significativo no número de dispositivos na rede requer planejamento e modelos de comunicação que deem suporte à mobilidade, segurança, confiabilidade, cobertura, taxa de transmissão suficiente para a aplicação, eficiência energética, escalabilidade e baixo custo (ALI *et al.*, 2015). De acordo com Lavric e Popa (2017), estes requisitos são sobretudo os principais desafios para desenvolvimento do conceito de IoT.

Frente a estes desafios, surge o padrão de comunicação denominado *Low Power Wide Area Network* (LPWAN). As LPWANs propõem oferecer uma grande área de cobertura, eficiência energética e baixas taxas de transmissão, características antes não ofertadas por outros padrões sem fio (RAZA *et al.*, 2017). De acordo com a empresa de telecomunicações Nokia (2016), em 2025, aproximadamente 5 bilhões de conexões esperadas de dispositivos no modelo M2M serão por meio das LPWANs, de um total de 30 bilhões previstos.

Algumas tecnologias LPWAN já estão presentes no mercado, como a SigFox, *NarrowBand IoT* (NB-IoT) e *Long Range Wide Area Network* (LoRaWAN). A proposta da tecnologia SigFox é oferecer cobertura global através de uma rede de operadores, em um espectro de frequência não licenciado, implementados em diferentes países, por várias empresas colaboradoras. Diferentemente da SigFox, a NB-IoT é uma alternativa de comunicação IoT para tecnologias LPWAN em espectro de frequência licenciada sub-GHz, o que oferece uma maior confiabilidade de tráfego. Ao contrário da SigFox e NB-IoT, o padrão de comunicação LoRaWAN, oferece a possibilidade de implementação de redes privadas e a fácil integração com outras plataformas de redes mundiais, como a *The Things Network* (HAXHIBEQIRI *et al.*, 2018).

Devido a suas características e ao acesso aberto a suas especificações, o padrão LoRaWAN ganhou espaço na comunidade de pesquisadores. De acordo com Haxhibeqiri *et al.* (2018), desde 2015 uma grande quantidade de trabalhos foram publicados em diferentes revistas e apresentados em conferências científicas ao redor do mundo. Até setembro de 2020, havia 379 artigos no banco de dados *IEEE Explore* que continham como palavra-chave LoRaWAN em seu título, destes 52 já haviam sido publicados em jornais e revistas do *IEEE*.

A camada física LoRa (SEMTECH CORPORATION, 2015) da pilha de protocolos LoRaWAN foi patenteada pela Semtech em 2014 (SELLER; SORNIN, 2014), sendo sua modulação é baseada na técnica *Chirp Spread Spectrum* (CSS) (REYNDERS; POLLIN, 2016), o que caracteriza a tecnologia LoRaWAN como banda larga. Alguns trabalhos analisam a modulação através de modelagens matemáticas e simulações em diferentes plataformas (REYNDERS;

POLLIN, 2016; VANGELISTA, 2017; OCHOA *et al.*, 2017; PETÄJÄJÄRVI *et al.*, 2017; WARET *et al.*, 2018; CROCE *et al.*, 2018). Dentre eles, Reynders e Pollin (2016), Croce *et al.* (2018), Brante *et al.* (2018) mostram imperfeições na ortogonalidade entre símbolos LoRa, o que compromete o requisito de confiabilidade da rede LoRaWAN.

O presente trabalho propõe realizar análises numéricas e matemáticas da modulação LoRa, de modo a explicar características da mesma. Para isso, serão analisados os modelos matemáticos para sistemas LoRaWAN existentes na literatura. Também serão realizados testes destes modelos em ambientes de simulação LoRaWAN para fins de comparação dos modelos.

O trabalho está organizado da seguinte forma, o Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica do projeto, que contém os principais conceitos abordados no trabalho. Já o Capítulo 3 apresenta os dois principais trabalhos que motivaram a pesquisa e uma breve comparação entre eles. No Capítulo 4 são apresentados os procedimentos metodológicos, para a execução do trabalho. O Capítulo 5 apresenta as análises numéricas e matemáticas dos modelos, análises de um demodulador da literatura e simulações comparativas. Por último, o Capítulo 6 apresenta as conclusões do trabalho e propostas de trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse capítulo serão apresentados os principais conceitos que fundamentam o trabalho. Conceitos estes que embasam teoricamente a pesquisa e são essenciais para o desenvolvimento da solução proposta.

2.1 Internet das Coisas

A IoT é um paradigma de comunicação sem fio, que está em ascensão no atual cenário das telecomunicações. A proposta dessa tecnologia é a promoção de conectividade entre uma variedade de objetos. Dispositivos estes que podem estar distribuídos geograficamente, de modo pervasivo, com um único modelo de endereçamento, o que possibilita a interação e cooperação entre os nós para realizarem tarefas comuns (GIUSTO *et al.*, 2010).

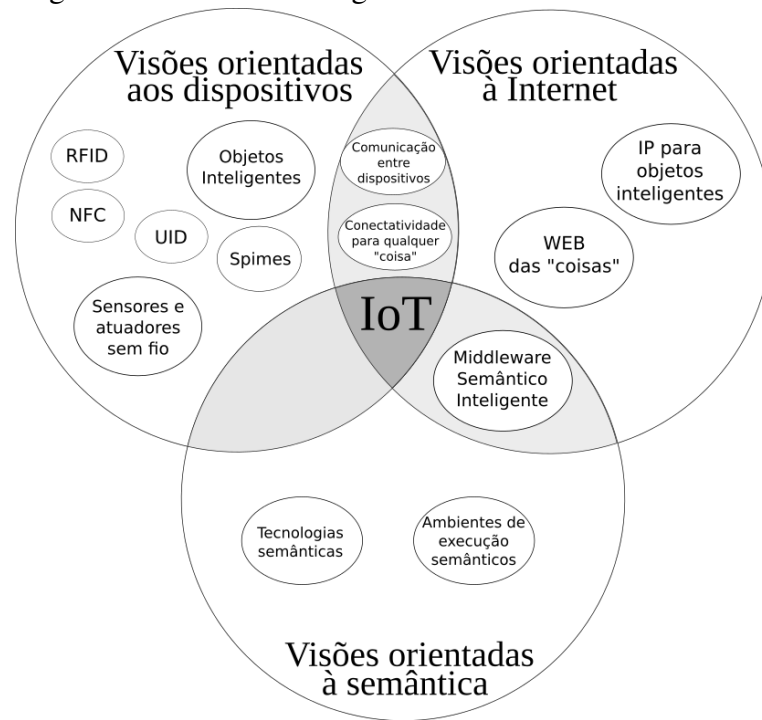
Na literatura existem diferentes perspectivas acerca deste paradigma. Uma das razões para os diferentes concepções da IoT se dá pela composição sintática do nome “Internet das Coisas”. O primeiro termo remete-se às perspectivas orientadas à Internet, através da conectividade e endereçamento único de dispositivos. Já o segundo, refere-se a visões dos objetos genéricos inteligentes capazes de coletar dados e controlar atuadores. Além destas, há ainda os pontos de vista orientados a semântica, que enfatiza a representação e o armazenamento das informações trocadas entre os dispositivos (ATZORI *et al.*, 2010).

Entretanto, as diferentes perspectivas da tecnologia se dão por partes como, alianças empresariais e organismos de investigação e normalização. E, sobretudo, a união dos termos “Internet” e “Coisas” molda sintaticamente o significado de uma rede de alcance global formada por objetos, com endereços únicos, baseada em protocolos de comunicação padrões (ATZORI *et al.*, 2010).

A Figura 1 sintetiza a ideia de convergência da tecnologia IoT a partir de diferentes visões presentes na literatura.

Graças a reduções em termos de tamanho, peso, consumo energético e custo das tecnologias de rádio, torna-se viável a inserção de tecnologias sem fio em quase todos os objetos, fortalecendo assim a perspectiva de conectividade para qualquer coisa, que é uma proposta da paradigma IoT (ATZORI *et al.*, 2010).

Figura 1 – O paradigma IoT como a convergência de diferentes visões.



Fonte: Adaptado de Atzori *et al.* (2010).

2.2 Redes de Longo Alcance e Baixa Potência

O termo LPWAN é atribuído a tecnologias que oferecem conexões de longa distância, pontos de baixo custo e baixos consumos energéticos. Essas características se tornam adequadas para diversas aplicações IoT que necessitam de envios esporádicos de informação por longas distâncias (SINHA *et al.*, 2017).

Para alcançar os objetivos de conectar dispositivos em uma rede de longo alcance e com baixo consumo energético, as LPWANs contam com características e técnicas de modulação, algumas destas serão descritas nas subseções a seguir.

2.2.1 Características das LPWANs

As LPWANs são projetadas para interligar dispositivos em longas distâncias e oferecer excelentes propagações de sinais em ambientes fechados e de difícil acesso (RAZA *et al.*, 2017).

Em comparação com as LPWANs, sistemas de redes celulares legados que requisitam um significativo ganho de potência no sinal transmitido, para que os dispositivos finais possam se conectar a estações base a distâncias próximas a 10 km, dependendo do ambiente de implantação. Diferentemente das redes celulares, grande parte das LPWANs utilizam a banda sub-GHz, o que

possibilita uma comunicação robusta e confiável com uma baixa potência (RAZA *et al.*, 2017).

De acordo com Raza *et al.* (2017) em comparação com tecnologias que utilizam a banda de frequência de 2,4 GHz, como a Wi-Fi, Bluetooth, ZigBee, os sinais em faixas de baixa frequência apresentam menos atenuações e desvanecimento por múltiplos percursos, ocasionados por obstáculos e superfícies densas. Além disso, o autor afirma que a banda sub-GHz é menos congestionada que a 2,4 GHz, que é comumente utilizada por outros dispositivos .

A camada física de uma rede LPWAN é projetada para aumentar a taxa de dados, ao passo de reduzir a taxa de modulação para aumentar a potência na transmissão de cada bit de informação (ou símbolo). Com isso os receptores podem decodificar sinais atenuados corretamente. Existem, sobretudo, duas classes de técnicas de modulação que estão sendo adotadas por diferentes tecnologias LPWAN, são elas as chamadas técnicas de modulações de banda estreita e as de espalhamento espectral (RAZA *et al.*, 2017).

As técnicas de modulação de banda estreita proveem um alto *link budget*, ou seja, uma boa relação entre as potências de recepção e de transmissão considerando perdas e ganhos no percurso, por possuir um sinal codificado em larguras de bandas estreitas (comumente menor que 25 kHz). Por utilizarem pequenas parcelas da largura de banda, o nível de ruídos em sinais de redes de banda estreita é mínimo. Além disso, técnicas de modulação derivadas dessa técnica compartilham o mesmo espectro de frequência com inúmeros enlaces de maneira muito eficiente. Redes como a NB-IoT e a Weightless-W são exemplos de redes que utilizam técnicas de modulação de banda estreita (RAZA *et al.*, 2017).

Existem ainda, as redes LPWANs que comprimem os sinais portadores em bandas ultra estreitas (do inglês *ultra narrowband*, UNB), bandas algumas vezes menores que 100 Hz, como na modulação utilizada na rede SigFox. Quanto menor a banda de frequência, maior a imunidade da rede a interferências e maior o número de dispositivos finais suportados. Redes como, a SigFox, Weightless-N e Telensa são alguns exemplos de tecnologias que utilizam modulação UNB (RAZA *et al.*, 2017).

Além destas, destacam-se também as técnicas de modulação por espalhamento espectral (do inglês *Spread Spectrum*, SS) sobre uma banda larga de frequência. A transmissão do sinal nesse tipo de modulação é semelhante à transmissão de um ruído, o que dificulta a interceptação do sinal por dispositivos terceiros, tornando a rede mais resistente a interferências e robusta a ataques do tipo *jamming* (RAZA *et al.*, 2017).

O espalhamento de um sinal em banda estreita sobre uma banda larga resulta em

um uso menos eficiente do espectro de frequência. Entretanto, esse problema é geralmente contornado com a utilização de múltiplas sequências ortogonais entre si. A eficiência desse tipo de técnica se dá quando, múltiplos dispositivos finais utilizam diferentes canais e/ou sequências ortogonais. Nesses casos, todos podem ser decodificados de modo concorrente por um dispositivo coerente, aproveitando-se assim a capacidade de processamento da rede (RAZA *et al.*, 2017).

Algumas variações das técnicas de modulação SS são utilizadas por padrões existentes no mercado, como o espalhamento espectral por *chirp* (do inglês, *Chirp Spread Spectrum*, CSS), que é utilizado na modulação LoRaWAN e o espalhamento espectral por sequência direta (do inglês, *Direct Sequence Spread Spectrum*, DSSS) utilizado pela técnica RPMA e amplamente utilizado nos sistemas celulares CDMA (RAZA *et al.*, 2017).

O baixo consumo das LPWANs é um dos principais requisitos para a utilização dessa tecnologia diversas aplicações, onde os dispositivos podem ser eletricamente alimentados por baterias. Para aplicações IoT/M2M alimentadas por baterias, é desejável uma vida útil da bateria de uma década ou mais (RAZA *et al.*, 2017).

A topologia da rede é um fator que influencia diretamente na vida útil da bateria dos dispositivos. Enquanto em uma topologia malha, alguns nós acabam se sobrecarregando de tráfego de rede, estes acabam por consumir mais intensamente suas baterias, limitando assim o tempo de vida dos mesmos na rede (RAZA *et al.*, 2017).

Para superar esse desafio, uma parte das LPWANs utiliza a topologia estrela. Topologia essa que conecta diretamente os nós finais às estações base. O que, ao contrário da abordagem em malha, os dispositivos não precisam desperdiçar energia recebendo mensagens de outros dispositivos da rede, economizando assim a bateria. Tornando a estação base sempre disponível para os dispositivos de rede, torna a resposta da rede mais rápida (RAZA *et al.*, 2017).

Além da topologia estrela, algumas tecnologias LPWANs dão suporte às topologias malha e árvore, mas com uma complexidade extra em seus protocolos (RAZA *et al.*, 2017).

2.2.2 Tecnologias Proprietárias

Atualmente existem algumas tecnologias LPWANs proprietárias que se destacam no mercado. Algumas utilizam técnicas de modulação de banda estreita, como a NB-IoT e a Weightless-W, outras utilizam técnicas UNB, como a SigFox e a Telensa. Já algumas outras utilizam técnicas de espalhamento espectral, como a LoRaWAN e a Ingenu RPMA. O Quadro 1 apresenta características de algumas tecnologias LPWANs diferentes.

No Quadro 1 são apresentados quatro padrões proprietários LPWANs. Sendo dois padrões que utilizam técnicas de modulação UNB, a SigFox e a Telensa, e os outros dois, LoRaWAN e Ingenu, que utilizam técnicas de modulação baseadas em espalhamento espectral.

As Redes SigFox, LoRaWAN, Ingenu e Telensa têm sua faixa de frequência em bandas reservadas internacionalmente, essas são chamadas ISM (acrônimo para *Industrial Scientific and Medical*). Destas quatro LPWANs, apenas a Ingenu não utiliza faixas Sub-GHz.

As taxas de transmissão de dados desses quatro padrões de LPWANs variam entre 78 kbps (Ingenu) e 65,5 bps (Telensa). As redes SigFox possuem taxas de transmissão que variam entre 100 e 600 bps, e o padrão LoRaWAN, possui taxas que variam entre 300 bps (com modulação Lora) e 50 kbps (com modulação FSK).

No quesito de alcance, as redes apresentam intervalos de cobertura que variam entre 1 a 50 km, com destaque para as redes SigFox em espaços abertos, que podem alcançar 50 quilômetros de distância, e Ingenu em ambientes urbanos, onde pode cobrir um raio de 15 km.

A escalabilidade das LPWANs é um fator importante. Para isso os padrões geralmente utilizam múltiplos canais de comunicação e/ou sinais ortogonais, para comportar múltiplos dispositivos finais. Na rede SigFox, por exemplo, pode-se utilizar 360 canais simultâneos. Enquanto no padrão LoRaWAN, além de múltiplos canais utiliza símbolos ortogonais para comportar mais dispositivos.

Quadro 1 – Especificações técnicas de tecnologias LPWAN

	SigFox	LoRaWAN	Ingenu	Telensa
Modulação	UNB DBPSK, GFSK	CSS	RPMA-DSSS, CDMA	UNB 2-FSK
Banda	Sub-GHz ISM:EU (868 MHz) USA (902 MHz)	Sub-GHz ISM:EU (433 MHz 868 MHz), USA (915 MHz), Asia (430 MHz)	ISM 2,4 GHz	Sub-GHz ISM:EU (433 MHz 868 MHz), USA (915 MHz), Asia (430 MHz)
Taxa de dados	100 bps, 600 bps	0,3-37,5 kbps (LoRa), 50 kbps (FSK)	78 kbps, 19,5 kbps	62,5 bps, 500 bps
Alcance	10 km (meio urbano) 50 km (meio rural)	5 km (meio urbano) 15 km (meio rural)	15 km (meio urbano)	1 km (meio urbano)
Número de canais / Sinais ortogonais	360 canais	10 nos EU, 64+8 (UL) e 8 (DL) em USA além de múltiplos SFs	40 canais de 1 MHz, que podem se tornar 1200 sinais por canal	múltiplos canais
Simetria de link	não possui	possui	não possui	não possui
Bit de erro de encaminhamento	não possui	possui	possui	possui
MAC	ALOHA desacoplado	ALOHA desacoplado	similar ao CDMA	não encontrado
Topologia	estrela	estrela de estrelas	estrela, árvore	estrela
Taxa de dados adaptativo	não possui	possui	possui	não possui
Tamanho do Payload	12 Bytes	até 250 Bytes (depende do SF e região)	10 kB	não encontrado
Handover	Um único nó não pode unir-se a uma única estação base	Um único nó não pode unir-se a uma única estação base	possui	não encontrado
Autenticação e criptografia	criptografia não suportada	AES 128 b	hash de 16 Bytes e AES 256 b	não encontrado
Atualizações via OTA	não possui	possui	possui	possui

Fonte: Adaptada de Raza *et al.* (2017).

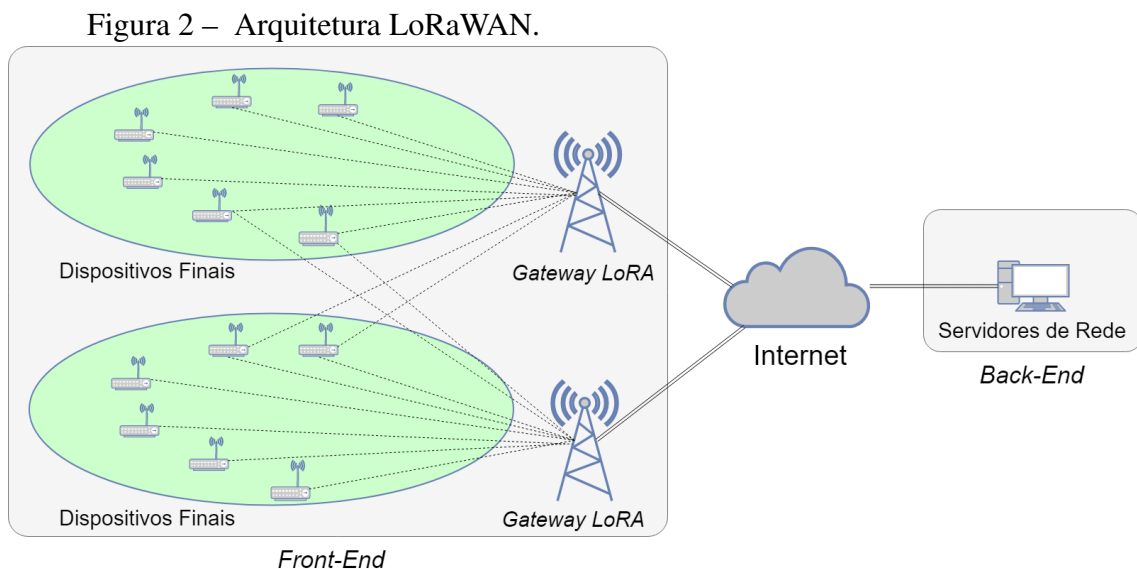
2.3 Protocolo LoRaWAN

O Protocolo LoRaWAN é um paradigma de rede LPWAN relativamente novo, que possui em sua pilha a técnica de modulação LoRa, que habilita transferências em longas distâncias com baixas taxas de transmissão (LAVRIC; POPA, 2017).

Uma rede LoRaWAN é um tipo de LPWAN que engloba dispositivos alimentados por baterias que se comunicam de modo bidirecional. As especificações do padrão LoRaWAN garantem a perfeita interoperabilidade entre os diversos objetos IoT, sem implementações complexas de rede (LAVRIC; POPA, 2017).

2.3.1 Topologia e Arquitetura das redes LoRaWAN

A topologia utilizada em redes LoRaWAN é a estrela de estrelas. A arquitetura pode ser separada em duas partes, denominadas *Back-End* e o *Front-End*. A Figura 2 ilustra a arquitetura de uma rede LoRaWAN.



O *Back-End* consiste no servidor de rede que recebe e armazena os dados recebidos pelos sensores. Já o *Front-End* consiste em módulos *Gateway* (ou estações base) e nos dispositivos finais da rede. Os módulos *Gateway* fazem a função de ponte que interconectam os dispositivos finais ao servidor de rede. Os nós finais podem se comunicar com um ou mais *gateways*, recebendo dados, por meio de um enlace direto ou enviando dados, através de um enlace reverso. A comunicação entre o servidor de rede e os módulos *Gateways* é consolidada

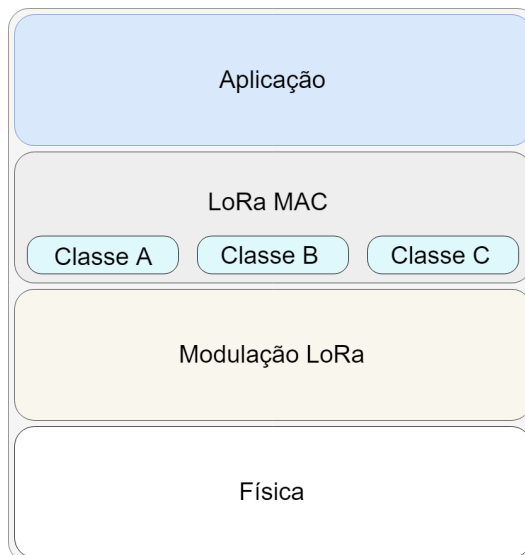
através do protocolo IP e pode utilizar a infraestrutura da Internet (LAVRIC; POPA, 2017).

Uma característica das redes LoRaWAN é que os nós finais da rede não repassam pacotes, com isso as mensagens são enviadas diretamente para os *Gateways* concentradores, através de enlaces únicos. Outra característica é que redes LoRaWAN transferem dados a taxas que variam entre 0,3 kbps e 50 kbps, maximizando assim a vida útil da bateria dos dispositivos, além de gerenciar a potência de comunicação e a taxa de transmissão através de um mecanismo de taxa de dados adaptativo (do inglês, *Adaptive Data Rate*, ADR) (LAVRIC; POPA, 2017).

2.3.2 Pilha de Protocolos LoRaWAN

A pilha de protocolos LoRaWAN possui basicamente 4 camadas, são elas: Aplicação, LoRa MAC, Modulação LoRa e a Física. A Figura 3 apresenta as camadas.

Figura 3 – Pilha de Protocolos LoRaWAN.



Fonte: Adaptado de Lavric e Popa (2017).

A camada de Aplicação aloca a aplicação escolhida pelo usuário. Nessa camada é aplicada uma rotina de criptografia, de modo a assegurar os dados enviados para a camada inferior, o passo de decifração desses dados é realizado no receptor.

A camada LoRa MAC foi definida pela Semtech, e nela é determinado o tipo de dispositivo final, dependendo do mecanismo de comunicação aplicado. A partir da definição da classe do dispositivo alguns parâmetros de eficiência energética são definidos (LAVRIC; POPA, 2017).

A classe A detém a configuração que mais economiza a bateria dos nós. Nela, o canal de enlace direto somente é habilitado após o envio de uma informação por parte do nó.

Após uma janela de tempo de transmissão, são utilizados duas janelas de tempo curtas para o nó receber dados do canal (LAVRIC; POPA, 2017). A maioria dos dispositivos que utilizam a pilha LoRaWAN suportam essa classe.

Já na classe B, as janelas de comunicação podem ser sincronizados através de um sinal *beacon* enviado pelos *Gateways* LoRaWAN. Nessa classe, os dispositivos mantêm o baixo consumo energético através do controle do enlace direto pela latência da comunicação (LAVRIC; POPA, 2017).

Por outro lado, a classe C permite a recepção contínua dos dados, por parte do nó receptor, o que desfavorece a economia de bateria. Nós que utilizam essa classe não recebem informações enquanto estão transmitindo (LAVRIC; POPA, 2017).

A camada de modulação LoRa é a responsável por traduzir os bits de informações, das camadas acima, para os sinais *chirps* que serão transmitidos pela camada de rede. Essa camada será discutida com detalhes na sessão 2.4.

A última camada do protocolo define as faixas ISM regionais, que por sua vez são regularizadas pelo comitê técnico da ISM. O Quadro 2 sumariza o espectro disponibilizado e os requisitos regulamentares para cada região. As especificações LoRaWAN estão especificadas para a Europa e América do Norte, já as outras regiões ainda estão sendo definidas pelo comitê técnico.

Quadro 2 – LoRaWAN - Espectro disponibilizado e requisitos regulamentares para Europa e América do Norte.

Características	Europa	América do Norte
Faixa de frequência	867-869 MHz	902-928 MHz
Canais	10	64 + 8 + 8
BW dos canais de enlace reverso	125/250 kHz	125/500 kHz
BW dos canais de enlace direto	125/250 kHz	500 kHz
Potência de transmissão de enlace reverso	+14 dBm	suporta até +30 dBm
Potência de transmissão de enlace direto	+14 dBm	+27 dBm
Fatores de espalhamento de enlace reverso	7 – 12	7 – 10
Taxa de dados	250 bps a 50 kbps	980 bps a 21.9 kbps

Fonte: Elaborado pelo autor.

No Quadro 2, BW é um acrônimo para *Band Width*, ou em português Largura de Banda.

2.4 Modulação LoRa

A camada física LoRa, da pilha LoRaWAN, foi patenteada em 2014 pela Semtech (SELLER; SORNIN, 2014). Sua modulação é baseada na técnica *Chirp Spread Spectrum* (CSS) (SFORZA, 2013), e produz sinais *chirps*, que portam símbolos, que por sua vez representam os dados a serem transmitidos pelos dispositivos do *Front-End* da rede (HAXHIBEQIRI *et al.*, 2018).

O padrão LoRaWAN utiliza uma técnica de largura de banda (do inglês, *Bandwidth*, BW) escalável de 125 kHz, 250 kHz ou 500 kHz. A rede se baseia na BW e na razão sinal ruído (do inglês, *Signal-to-noise ratio*, SNR), para escolher o fator espalhamento espectral (do inglês, *Spreading Factor*, SF), de modo a tornar o sinal mais robusto a ruídos (REYNDERS; POLLIN, 2016). Usualmente as redes LoRaWAN utilizam SFs entre 7 e 12 (VANGELISTA, 2017).

Os símbolos portadores são transmitidos em janelas temporais de duração T_s (tempo de símbolo), em segundos. Em modulações baseadas em DSSS, os símbolos são segmentados em *chips*; nas redes LoRaWAN os sinais são divididos em 2^{SF} *chips* de $T = \frac{1}{BW}$ segundos (GOURSAUD; GORCE, 2015). Cada símbolo carrega 2^{SF} bits de informação. Supondo um símbolo $s(nT_s)$, este é enviado em uma janela temporal de $T_s = 2^{SF} \cdot T$ segundos (VANGELISTA, 2017).

O Quadro 3 mostra a relação entre as larguras de banda, fatores de espalhamento, tempos de símbolo e os respectivos bits por segundo.

Quadro 3 – LoRa - Relação entre larguras de banda, fatores de espalhamento, tempos de símbolo e bits por segundo.

Largura de banda (kHz)	Fator de esp. (SF)	Tempo de s. (ms)	Bits por s. (Mb)
125	7	1,024	8
125	8	2,048	8
125	9	4,096	8
125	10	8,192	8
125	11	16,384	8
125	12	32,768	8
250	7	0,512	4
250	8	1,024	4
250	9	2,048	4
250	10	4,096	4
250	11	8,192	4
250	12	16,384	4

Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir do Quadro 3, nota-se que o fator de espalhamento é proporcional ao tempo de símbolo, que por sua vez é inversamente proporcional à largura de banda.

Os símbolos na rede LoRaWAN são dados de acordo com o SF, de modo que $s(nT_s)$ pode ser um inteiro do conjunto $\{0, 1, 2, \dots, 2^{SF} - 1\}$ (VANGELISTA, 2017).

De acordo com Vangelista (2017), o sinal LoRa é apresentado como.

$$c(nT_s + kT) = \frac{1}{\sqrt{2^{SF}}} e^{j2\pi[(s(nT_s)+k)_{\text{mod}2^{SF}}] \frac{k}{2^{SF}}}, \quad (2.1)$$

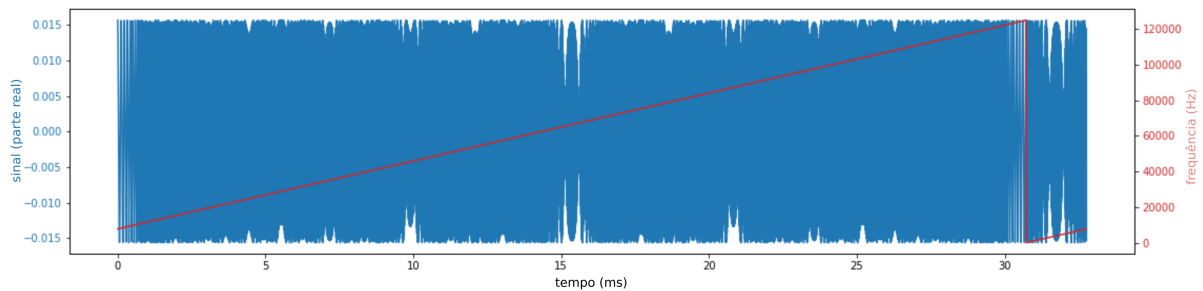
sendo $k = 0 \dots 2^{SF} - 1$.

Aplicando a fórmula de Euler,

$$c(nT_s + kT) = \frac{1}{\sqrt{2^{SF}}} \left(\cos \left(2\pi[(s(nT_s) + k)_{\text{mod}2^{SF}}] \frac{k}{2^{SF}} \right) - j \sin \left(2\pi[(s(nT_s) + k)_{\text{mod}2^{SF}}] \frac{k}{2^{SF}} \right) \right) \quad (2.2)$$

A partir da Equação 2.2 pode se visualizar a parte real do sinal que representa o símbolo 255, com $SF = 12$ e $BW = 125$ kHz, na Figura 4.

Figura 4 – Símbolo 255 - Largura de banda 125 kHz - SF 12.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 4, a curva em vermelho, que tem como valor mínimo e máximo 0 e 125000, respectivamente, representa o componente de espalhamento espectral $(s(nT_s) + k)_{\text{mod}2^{SF}}$. Já a curva em azul representa o sinal $c(nT_s + kT)$, que por sua vez possui o valor máximo e mínimo iguais à $\pm \frac{1}{\sqrt{2^{SF}}} = \pm 0,015$.

3 TRABALHOS RELACIONADOS

Alguns trabalhos presentes na literatura investigam a problemática da interferência inter-simbólica entre dispositivos LoRa. Entre esses estão, o trabalho de Vangelista (2017), Croce *et al.* (2018), Waret *et al.* (2018) e El Rachkidy *et al.* (2019).

3.1 *Frequency Shift Chirp Modulation: The LoRa Modulation*

Vangelista (2017) realiza em seu trabalho uma análise matemática sobre o processo de modulação e demodulação do sinal LoRa. O autor define a modulação LoRa como uma *Frequency Shift Chirp Modulation* (FSCM), ou uma técnica de modulação por Chirp com deslocamento de frequência.

O autor inicia o trabalho apresentando conceitos como largura de banda, fator de espalhamento, símbolo, tempo de símbolo. Após isso, Vangelista (2017) modela o sinal LoRa e verifica a ortogonalidade entre símbolos de mesmo fator de espalhamento no domínio discreto. Em seguida, Vangelista (2017) apresenta uma versão mais eficiente de demodulador LoRa com ruído gaussiano branco, multiplicando o sinal recebido com um sinal *down-chirp*, correspondente ao fator de espalhamento, e então aplicando a transformada rápida de Fourier ao sinal resultante. Por fim o autor apresenta uma análise de desempenho em nível de enlace da modulação LoRa em comparação com a modulação FSK.

3.2 *Impact of Spreading Factor Imperfect Orthogonality in LoRa Communications*

No trabalho de Croce *et al.* (2018), os autores analisam o impacto da ortogonalidade entre símbolos LoRa de fatores de espalhamento distintos, através de simulações e experimentos.

Inicialmente, os autores realizam uma análise numérica da modulação LoRa e mostram que a perda de pacotes pode, de fato, ocorrer caso a potência da interferência seja grande (CROCE *et al.*, 2018). Após a análise matemática, Croce *et al.* (2018) utiliza dispositivos LoRa presentes no mercado para realizar inferências empíricas de perdas de pacotes. Em seguida, os autores utilizam um simulador, de código aberto, LoRaSim para mensurarem os impactos das colisões entre símbolos.

Os resultados deste trabalho mostram que, a não ortogonalidade entre símbolos de diferentes fatores de espalhamento pode, de fato, afetar significativamente o desempenho da rede LoRaWAN, principalmente para os maiores fatores de espalhamento.

3.3 LoRa Throughput Analysis with Imperfect Spreading Factor Orthogonality

O trabalho de Waret *et al.* (2018) propõe uma análise teórica da taxa de transmissão no enlace reverso de uma rede LoRaWAN, abrangendo os efeitos das interferências co e inter simbólicas.

Através das métricas de taxa de erros de bits (do inglês *Bit Error Rate*, BER) e relação sinal-ruído (do inglês *Signal to noise ratio*, SNR) os autores realizaram análises da taxa de transferência em enlaces reversos (WARET *et al.*, 2018).

Após a coleta das métricas, Waret *et al.* (2018) realizaram campanhas de simulação para comprovar os valores obtidos. Por fim os autores chegaram a aproximações da análise teórica no ambiente de simulação, comprovando assim, a quantização dos efeitos das interferências co e inter simbólicas.

3.4 Trabalho Proposto

Este trabalho se propõe a, assim como Vangelista (2017), Croce *et al.* (2018), Waret *et al.* (2018), realizar uma modelagem matemática do sistema de modulação LoRa, e, similarmente a Croce *et al.* (2018), realizar análises matemáticas da ortogonalidade entre símbolos em redes LoRaWAN. Além de uma análise de um processo de demodulação de um sinal LoRa diante de um canal AWGN, do mesmo modo que Vangelista (2017). Assim como no trabalho de Waret *et al.* (2018), propõe-se uma análise da taxa de erro de bits do enlace reverso de sistemas LoRa.

O Quadro 4 mostra as semelhanças e diferenças dos trabalhos citados neste capítulo com o trabalho proposto.

Quadro 4 – Comparação entre os trabalhos relacionados e o trabalho proposto.

	Croce <i>et al.</i> (2018)	Waret <i>et al.</i> (2018)	Vangelista (2017)	Trabalho Proposto
Modelagem do Sistema	Sim	Sim	Sim	Sim
Análise do BER por SNR	Não	Sim	Sim	Sim
Análise de Colisões	Sim	Não	Sim	Sim
Análise de Taxa de Transmi.	Não	Sim	Não	Sim

Fonte: Elaborado pelo autor.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Os procedimentos para a execução do trabalho são: modelar o sinal LoRa, simular o modelo de modulação, calcular a métrica de correlações por fator de espalhamento.

4.1 Definição do Modelo de Modulação LoRa

Os autores Reynders e Pollin (2016) e Vangelista (2017) utilizam modelos matemáticos para o sinal LoRa em seus trabalhos. Vangelista (2017) utiliza o modelo discreto do sinal, enquanto Reynders e Pollin (2016) utiliza o o modelo contínuo.

Assim como nos trabalhos de Reynders e Pollin (2016) e de Vangelista (2017), será escolhido um modelo sinal LoRa para a realização do trabalho. Esse modelo matemático será utilizado nas análises e simulações do realizados.

Também serão utilizadas ferramentas computacionais para os experimentos com os sinais. Uma dessas ferramentas é o Python que possui bibliotecas de análise de dados, algumas dessas serão utilizadas no trabalho, são elas: matplotlib, numpy e pandas. Outra ferramenta utilizada no trabalho é o Jupyter Notebook, que é uma ferramenta Python, que utiliza uma execução de trechos de códigos em células.

4.2 Análises das Correlações

Assim como nos trabalhos de Vangelista (2017), Reynders e Pollin (2016) e Goursaud e Gorce (2015) serão analisadas as correlações entre símbolos LoRa, para isso será calculado o produto interno entre os diversos sinais portadores de bits, para verificação dessa propriedade.

Serão levados em consideração símbolos de fatores de fatores de espalhamento iguais e diferentes, deste modo cobrindo todos os possíveis símbolos transmitidos em uma rede LoRaWAN.

Serão realizados cálculos do somatório dos módulos das correlações entre todos os sinais possíveis gerados pelo conjunto dos fatores de espalhamento (de 7 a 12) e entre símbolos de diferentes fatores de espalhamento, de forma exaustiva, utilizando a biblioteca numpy.

4.3 Análise da Rejeição entre Canais

As correlações entre símbolos remetem outra informação acerca dos canais (ou fatores de espalhamento, como é na modulação LoRa) em uma rede LoRa, essa informação é a rejeição entre canais.

De modo semelhante aos trabalhos de Goursaud e Gorce (2015) e Croce *et al.* (2017) será realizado um experimento com todos os símbolos LoRa dos fatores de espalhamento (de 7 a 12) para encontrar limiares de rejeição entre canais. Será apresentada uma tabela de rejeição entre canais LoRa, com base nos resultados do experimento.

4.4 Análise da Demodulação do Sinal LoRa Com Ruído Gaussiano Branco

Será apresentado o processo de demodulação do sinal LoRa, utilizando a biblioteca Python matplotlib, com o demodulador proposto por Vangelista (2017).

Além disso, realizada uma análise relação entre a razão sinal ruído (SNR) e a taxa de erro de bits na sobreposição do sinal LoRaWAN com um ruído gaussiano branco (AWGN). Para cada SNR serão analisados 500000 símbolos.

5 RESULTADOS

Para a realização das análises e experimentos, foram realizadas inicialmente as escolhas do modelo de modulação a ser utilizado e ferramenta computacional para a realização dos experimentos, como apresentado na seção 5.1. Após isso, na seção 5.2, serão apresentadas as análises numéricas e matemáticas das correlações entre símbolos. Em seguida, na seção 5.3, serão apresentadas explanações matemáticas das tabela de rejeição co-canal apresentadas em outros trabalhos. Por fim, na seção 5.4, será apresentado um modelo de demodulador LoRa e sua eficiência por meio de simulações computacionais.

5.1 Definição do Modelo de Modulação LoRa

O modelo de sinal LoRa escolhido para o desenvolvimento do presente trabalho foi definido no trabalho de Vangelista (2017). Nesse artigo o autor realiza uma análise matemática detalhada do sinal, incluindo uma prova da ortogonalidade dos símbolos LoRa de iguais fatores de espalhamento e um modelo eficiente de demodulador.

O sinal definido por Vangelista (2017) é apresentado na Equação 5.1, de modo que $f(k) = \frac{(s(nT_s)+k)_{\text{mod}2^{SF}}}{2^{SF}}$ é a função de deslocamento de frequência, e $k = 0, \dots, 2^{SF} - 1$:

$$c(nT_s + kT) = \frac{1}{\sqrt{2^{SF}}} e^{j2\pi f(k)k}. \quad (5.1)$$

Supondo um sinal $s(nT_s) = 0$, de largura de banda de 250 kHz e SF 12, obtém-se:

$$c(nT_s + kT) = \frac{1}{\sqrt{2^{12}}} e^{j2\pi \frac{k^2}{2^{12}}}. \quad (5.2)$$

A Figura 5 apresenta um exemplo de sinal descrito pela Equação 5.2, o qual varia entre $-\frac{1}{\sqrt{2^{SF}}}$ e $\frac{1}{\sqrt{2^{SF}}}$. O sinal apresentado na Equação 5.2 também é conhecido como *up-chirp*.

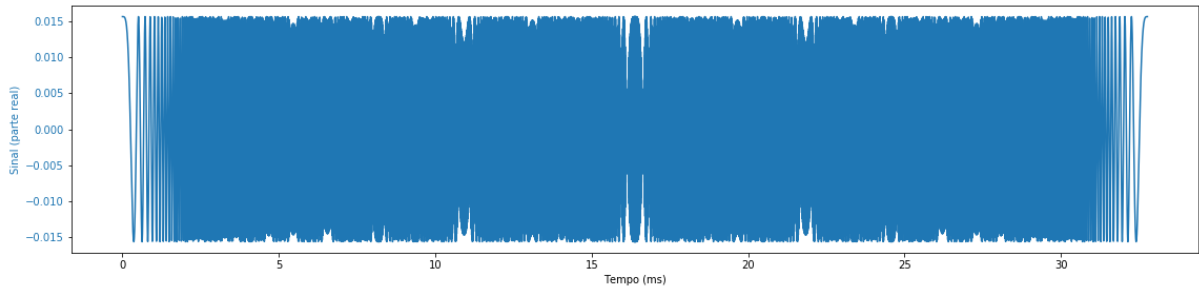
Com o auxílio das bibliotecas Python Numpy¹ e Matplotlib², é possível analisar algumas características do sinal, como a variação da frequência e fase do sinal, ilustradas nas Figuras 6 e 7, respectivamente.

Após a definição do modelo utilizado no trabalho, foi realizada uma análise acerca da correlação cruzada no conjunto de todas as possíveis combinações de símbolos LoRaWAN.

¹ numpy.org

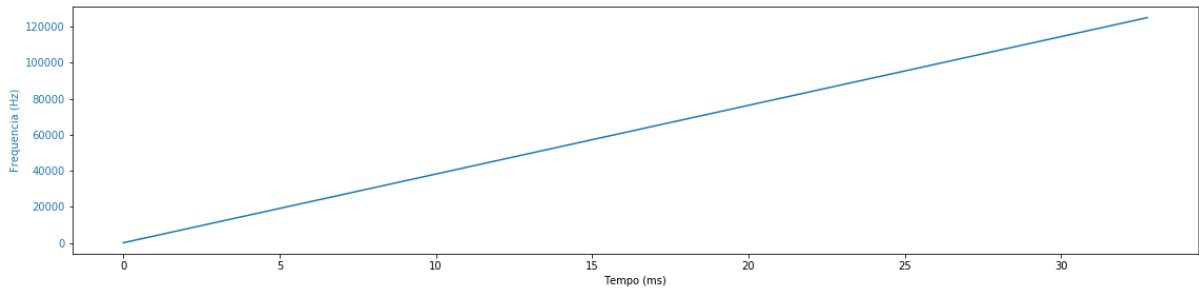
² matplotlib.org

Figura 5 – Sinal LoRa - *up-chirp* - Largura de banda 250 kHz - SF 12.



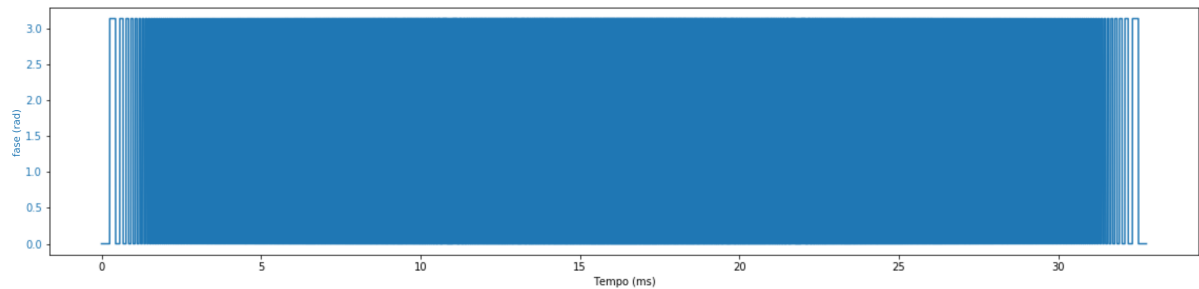
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 6 – Frequência do sinal LoRa - *up-chirp* - Largura de banda 250 kHz - SF 12.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 7 – Variação da fase do sinal LoRa - *up-chirp* - Largura de banda 250 kHz - SF 12.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5.2 Análise das Correlações

A propriedade de ortogonalidade entre símbolos, de mesmo fator de espalhamento, é uma característica utilizada pela rede LoRaWAN para dar suporte a uma maior quantidade de dispositivos. Com a ortogonalidade, mesmo símbolos sobrepostos podem ser detectados de forma independente. Essa propriedade permite que, dados dois símbolos LoRa i e q , o produto interno de i por q é:

$$\langle c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=i}, c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=q} \rangle = 0, \quad (5.3)$$

para i e $q = \{0, 1, 2, \dots, 2^{SF} - 1\}$, sendo $i \neq q$.

No trabalho de Vangelista (2017), prova-se que a propriedade de ortogonalidade entre diferentes símbolos de mesmo fator de espalhamento é garantida. Entretanto, Reynders e Pollin (2016) mostram, por meio do produto interno dos sinais que:

$$0 = e^{j2\pi \frac{i+q}{S} q} \left(e^{j2\pi \frac{(i-q)^2}{S}} - 1 \right), \quad (5.4)$$

e que essa propriedade é garantida se e somente se a diferença entre i e q for igual a raiz quadrada de um múltiplo do fator de espalhamento, ou seja

$$\frac{(i-q)^2}{SF} = r, \quad (5.5)$$

sendo $r \in \mathbb{Z}$.

A partir da equação 5.3 pode-se obter o somatório do módulo do produto interno entre todos os símbolos do conjunto de símbolos S , por fator de espalhamento:

$$\left(\sum_{i,q \in S} |\langle c(nT_s + kT) |_{s(nT_s)=i}, c(nT_s + kT) |_{s(nT_s)=q} \rangle| \right) = 0. \quad (5.6)$$

Dado $i \neq q$ e $S = \{0, \dots, 2^{SF} - 1\}$, para $i = q$ a correlação será máxima, ou seja, igual a 1.

A Tabela 1 mostra os resultados da análise empírica para todos os fatores de espalhamento.

Tabela 1 – Somatório da correlação entre os símbolos de mesmo fator de espalhamento.

Fator de Espalhamento	Correlação Mínima	Correlação Máxima	Correlação Média
2	$2,0 \times 10^{-16}$	$4,0 \times 10^{-16}$	$2,6 \times 10^{-16}$
3	$1,8 \times 10^{-15}$	$3,6 \times 10^{-15}$	$2,2 \times 10^{-15}$
4	$9,3 \times 10^{-15}$	$2,5 \times 10^{-14}$	$1,5 \times 10^{-14}$
5	$2,9 \times 10^{-14}$	$6,4 \times 10^{-14}$	$3,9 \times 10^{-14}$
6	$7,7 \times 10^{-14}$	$1,5 \times 10^{-13}$	$1,0 \times 10^{-13}$
7	$2,3 \times 10^{-13}$	$4,3 \times 10^{-13}$	$3,1 \times 10^{-13}$
8	$6,5 \times 10^{-13}$	$1,2 \times 10^{-12}$	$8,3 \times 10^{-13}$
9	$1,9 \times 10^{-12}$	$3,0 \times 10^{-12}$	$2,3 \times 10^{-12}$
10	$5,1 \times 10^{-12}$	$8,3 \times 10^{-12}$	$6,2 \times 10^{-12}$
11	$1,4 \times 10^{-11}$	$2,2 \times 10^{-11}$	$1,7 \times 10^{-11}$
12	$3,6 \times 10^{-11}$	$5,8 \times 10^{-11}$	$4,5 \times 10^{-11}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os resultados da análise empírica mostraram que a correlação mínima é apresentada pelo conjunto de símbolos do fator de espalhamento 2 e máxima pelo conjunto de símbolos do

fator de espalhamento 12. Entretanto, os resultados foram no máximo da ordem de 10^{-11} , o que se aproxima da equação 5.6.

A partir da tabela 1 e da equação 5.6, pode-se inferir a probabilidade de dois símbolos, $s(nT_s) = i$ e $s(nT_s) = q$, de mesmo fator de espalhamento, não serem ortogonais:

$$P_{nos}(\{S(nT_s) = i\}) = \frac{\sum_{q \in S} |\langle c(nT_s + kT) |_{s(nT_s)=i}, c(nT_s + kT) |_{s(nT_s)=q} \rangle|}{2^{SF}} \simeq \frac{1}{2^{SF}}. \quad (5.7)$$

A partir desse ponto pode-se conduzir um estudo analítico envolvendo todos os símbolos que podem ser transmitidos em uma rede LoRaWAN. Para isso, foi necessário dividir a análise em dois casos: símbolos de mesmo fator de espalhamento; e símbolos de fatores de espalhamento distintos.

5.2.1 Símbolos de mesmo fator de espalhamento

Supondo dois símbolos de mesmo fator de espalhamento

$$\begin{aligned} \langle c(nT_s + kT) |_{s(nT_s)=i}, c(nT_s + kT) |_{s(nT_s)=q} \rangle &= \sum_{k=0}^{2^{SF}-1} c(nT_s + kT) |_{s(nT_s)=i} \cdot c^*(nT_s + kT) |_{s(nT_s)=q} = \\ &= \frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=0}^{2^{SF}-1} e^{j2\pi[(i+k)_{\text{mod}2^{SF}}] \frac{k}{2^{SF}}} e^{-j2\pi[(q+k)_{\text{mod}2^{SF}}] \frac{k}{2^{SF}}}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

A equação 5.8 pode ser dividida em 3 casos, são eles: $i = q$, $i > q$ e $i < q$.

Para $i = q$,

$$\begin{aligned} \langle c(nT_s + kT) |_{s(nT_s)=i}, c(nT_s + kT) |_{s(nT_s)=q} \rangle &= \frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=0}^{2^{SF}-i-1} e^{j2\pi[(i+k)-(q+k)] \frac{k}{2^{SF}}} + \\ &= \frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=2^{SF}-i}^{2^{SF}-1} e^{j2\pi[(i+k-2^{SF})-(q+k-2^{SF})] \frac{k}{2^{SF}}} = \frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=0}^{2^{SF}-1} e^{j2\pi(i-q) \frac{k}{2^{SF}}} = 1. \end{aligned} \quad (5.9)$$

O que já era esperado dado o resultado da equação 5.6.

Para $i > q$,

$$\begin{aligned}
\langle c(nT_s + kT) |_{s(nT_s)=i}, c(nT_s + kT) |_{s(nT_s)=q} \rangle &= \frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=0}^{2^{SF}-i-1} e^{j2\pi[(i+k)-(q+k)]\frac{k}{2^{SF}}} + \\
&\frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=2^{SF}-i}^{2^{SF}-q-1} e^{j2\pi[(i+k-2^{SF})-(q+k)]\frac{k}{2^{SF}}} + \frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=2^{SF}-q}^{2^{SF}-1} e^{j2\pi[(i+k-2^{SF})-(q+k-2^{SF})]\frac{k}{2^{SF}}} = \\
&\frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=0}^{2^{SF}-i-1} e^{j2\pi[i-q]\frac{k}{2^{SF}}} + \frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=2^{SF}-i}^{2^{SF}-q-1} e^{j2\pi[i-q-2^{SF}]\frac{k}{2^{SF}}} + \frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=2^{SF}-q}^{2^{SF}-1} e^{j2\pi[i-q]\frac{k}{2^{SF}}} = \\
&\frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=0}^{2^{SF}-i-1} e^{j2\pi[i-q]\frac{k}{2^{SF}}} + \frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=2^{SF}-i}^{2^{SF}-q-1} e^{j2\pi[i-q]\frac{k}{2^{SF}}} e^{-j2\pi[2^{SF}]\frac{k}{2^{SF}}} + \frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=2^{SF}-q}^{2^{SF}-1} e^{j2\pi[i-q]\frac{k}{2^{SF}}} = \\
&\frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=0}^{2^{SF}-1} e^{j2\pi[i-q]\frac{k}{2^{SF}}}.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Antes de finalizar essa parte da análise foi expandido o último caso, em que $i < q$:

$$\begin{aligned}
\langle c(nT_s + kT) |_{s(nT_s)=i}, c(nT_s + kT) |_{s(nT_s)=q} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2^{SF}}} \sum_{k=0}^{2^{SF}-q-1} e^{j2\pi[(i+k)-(q+k)]\frac{k}{2^{SF}}} + \\
&\frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=2^{SF}-q}^{2^{SF}-i-1} e^{j2\pi[(i+k)-(q+k-2^{SF})]\frac{k}{2^{SF}}} + \frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=2^{SF}-i}^{2^{SF}-1} e^{j2\pi[(i+k-2^{SF})-(q+k-2^{SF})]\frac{k}{2^{SF}}} = \\
&\frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=0}^{2^{SF}-q-1} e^{j2\pi[i-q]\frac{k}{2^{SF}}} + \frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=2^{SF}-q}^{2^{SF}-i-1} e^{j2\pi[i-q+2^{SF}]\frac{k}{2^{SF}}} + \frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=2^{SF}-i}^{2^{SF}-1} e^{j2\pi[i-q]\frac{k}{2^{SF}}} = \\
&\frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=0}^{2^{SF}-q-1} e^{j2\pi[i-q]\frac{k}{2^{SF}}} + \frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=2^{SF}-q}^{2^{SF}-i-1} e^{j2\pi[i-q]\frac{k}{2^{SF}}} e^{j2\pi[2^{SF}]\frac{k}{2^{SF}}} + \frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=2^{SF}-i}^{2^{SF}-1} e^{j2\pi[i-q]\frac{k}{2^{SF}}} = \\
&\frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=0}^{2^{SF}-1} e^{j2\pi[i-q]\frac{k}{2^{SF}}}.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

O que coincide com o resultado da equação 5.10. Portanto, para os casos em que $i > q$ e $i < q$, aproveitando-se da identidade de Euler, em que $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi)$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=0}^{2^{SF}-1} e^{j2\pi[i-q]\frac{k}{2^{SF}}} &= \frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=0}^{2^{SF}-1} \left(\cos \left(2\pi[i-q]\frac{k}{2^{SF}} \right) + j \sin \left(2\pi[i-q]\frac{k}{2^{SF}} \right) \right) = \\
&\frac{1}{2^{SF}} \left(\sum_{k=0}^{2^{SF}-1} \cos \left(2\pi[i-q]\frac{k}{2^{SF}} \right) + j \sum_{k=0}^{2^{SF}-1} \sin \left(2\pi[i-q]\frac{k}{2^{SF}} \right) \right). \tag{5.12}
\end{aligned}$$

Para uma explanação da equação 5.12, tomando constantes:

$$a = 0 \quad (5.13)$$

e

$$b = 2\pi[i - q] \frac{1}{2^{SF}} \quad (5.14)$$

a equação 5.12 pode ser reescrita como,

$$\frac{1}{2^{SF}} \sum_{k=0}^{2^{SF}-1} e^{j2\pi[i-q]\frac{k}{2^{SF}}} = \frac{1}{2^{SF}} \left(\sum_{k=0}^{2^{SF}-1} \cos(a + bk) + j \sum_{k=0}^{2^{SF}-1} \sin(a + bk) \right). \quad (5.15)$$

Por partes

$$S_1 = \sum_{k=0}^{2^{SF}-1} \cos(a + bk) = \cos(a) + \cos(a + b) + \dots + \cos(a + (2^{SF} - 1)b) \quad (5.16)$$

e

$$S_2 = \sum_{k=0}^{2^{SF}-1} \sin(a + bk) = \sin(a) + \sin(a + b) + \dots + \sin(a + (2^{SF} - 1)b) \quad (5.17)$$

Multiplicando o primeiro termo de S_1 por

$$2 \sin\left(\frac{b}{2}\right) \quad (5.18)$$

obteremos

$$2 \cos(a) \sin\left(\frac{b}{2}\right) = \sin\left(a + \frac{b}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right). \quad (5.19)$$

Agora repetindo-se a multiplicação para todos os termos de S_1 , teremos

$$\begin{aligned} 2S_1 \sin\left(\frac{b}{2}\right) &= \sin\left(a + \frac{b}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right) + \sin\left(a + \frac{3b}{2}\right) - \\ &\sin\left(a + \frac{b}{2}\right) + \dots + \sin\left(a + \frac{(2 \cdot 2^{SF} - 1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(2 \cdot 2^{SF} - 3)b}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Nesse ponto, nota-se uma soma telescópica, que resulta em

$$2S_1 \sin\left(\frac{b}{2}\right) = \sin\left(a + \frac{(2 \cdot 2^{SF} - 1)b}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right) = 2 \cos\left(a + \frac{(2^{SF} - 1)b}{2}\right) \sin\left(\frac{2^{SF}b}{2}\right) \quad (5.21)$$

seja,

$$S_1 = \cos\left(a + \frac{(2^{SF} - 1)b}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{2^{SF}b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}. \quad (5.22)$$

Consequentemente a segunda série da Equação 5.15 resulta em

$$S_2 = \sin\left(a + \frac{(2^{SF} - 1)b}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{2^{SF}b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}. \quad (5.23)$$

Retornando para a Equação 5.15

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{SF}} \left(\sum_{k=0}^{2^{SF}-1} \cos\left(2\pi[i-q]\frac{k}{2^{SF}}\right) + j \sum_{k=0}^{2^{SF}-1} \sin\left(2\pi[i-q]\frac{k}{2^{SF}}\right) \right) = \\ \frac{1}{2^{SF}} \left(\cos\left(\frac{(2^{SF}-1)(\pi[i-q])}{2^{SF}}\right) \frac{\sin(\pi[i-q])}{\sin\left(\frac{\pi[i-q]}{2^{SF}}\right)} + \right. \\ \left. j \sin\left(\frac{(2^{SF}-1)(\pi[i-q])}{2^{SF}}\right) \frac{\sin(\pi[i-q])}{\sin\left(\frac{\pi[i-q]}{2^{SF}}\right)} \right). \quad (5.24) \end{aligned}$$

Por $[i-q] \in \mathbb{Z}$

$$\sin(\pi[i-q]) = 0 \quad (5.25)$$

Logo, para quaisquer símbolos i e q de mesmo fator de espalhamento SF

$$\langle c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=i}, c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=q} \rangle = 0. \quad (5.26)$$

As equações 5.9 e 5.26 mostram analiticamente o resultado da equação 5.6, e diverge da afirmação de Reynders e Pollin (2016) na equação 5.5.

5.2.2 Símbolos de fatores de espalhamento distintos

Para essa segunda parte da análise faz-se necessário dividir em outros 2 sub casos. São eles símbolo desejado com fator de espalhamento menor que outro, e o caso contrário.

5.2.2.1 Símbolo desejado com fator de espalhamento menor que outro

Supondo que o fator de espalhamento do símbolo desejado é SF e o fator de espalhamento do segundo símbolo é $SF + m$ (onde $m > 0$), então

$$\begin{aligned} \langle c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=i}, c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=q} \rangle &= \sum_{k=0}^{2^{SF}-1} c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=i} \cdot c^*(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=q} = \\ &= \frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=0}^{2^{SF}-1} e^{j2\pi[(i+k)_{\text{mod}2^{SF}}] \frac{k}{2^{SF}}} e^{-j2\pi[(q+k)_{\text{mod}2^{SF+m}}] \frac{k}{2^{SF+m}}}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Nesse ponto, nota-se que há três ramificações para a Equação 5.27, são elas quando $q < 2^{SF}(2^m - 1)$, $q > 2^{SF}(2^m - 1)$ e $(q + 2^{SF} - i) = 2^{SF+m}$.

Para $q < 2^{SF}(2^m - 1)$

$$\begin{aligned} \langle c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=i}, c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=q} \rangle &= \frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=0}^{2^{SF}-i-1} e^{j2\pi[2^m(i+k)-(q+k)] \frac{k}{2^{SF+m}}} + \\ &= \frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=2^{SF}-i}^{2^{SF}-1} e^{j2\pi[2^m(i+k-2^{SF})-(q+k-2^{SF+m})] \frac{k}{2^{SF+m}}} = \\ &= \langle c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=i}, c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=q} \rangle = \\ &= \frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=0}^{2^{SF}-i-1} e^{j2\pi[2^m(i+k)-(q+k)] \frac{k}{2^{SF+m}}} + \\ &= \frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=2^{SF}-i}^{2^{SF}-1} e^{j2\pi[2^m(i+k)-(q+k)] \frac{k}{2^{SF+m}}} e^{-j2\pi[2^{SF+m}] \frac{k}{2^{SF+m}}} e^{j2\pi[2^{SF+m}] \frac{k}{2^{SF+m}}}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Logo, para o sub caso $q < 2^{SF}(2^m - 1)$

$$\langle c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=i}, c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=q} \rangle = \frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=0}^{2^{SF}-1} e^{j2\pi(i+k) \frac{k}{2^{SF}}} e^{-j2\pi(q+k) \frac{k}{2^{SF+m}}}. \quad (5.29)$$

Para $q > 2^{SF}(2^m - 1)$,

$$\begin{aligned}
\langle c(nT_s + kT) |_{s(nT_s)=i}, c(nT_s + kT) |_{s(nT_s)=q} \rangle &= \frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=0}^{2^{SF+m}-q-1} e^{j2\pi[2^m(i+k)-(q+k)] \frac{k}{2^{SF+m}}} + \\
&\frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=2^{SF+m}-q}^{2^{SF}-i-1} e^{j2\pi[2^m(i+k)-(q+k-2^{SF+m})] \frac{k}{2^{SF+m}}} + \\
&\frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=2^{SF}-i}^{2^{SF}-1} e^{j2\pi[2^m(i+k-2^{SF})-(q+k-2^{SF+m})] \frac{k}{2^{SF+m}}} = \\
&\frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=0}^{2^{SF+m}-q-1} e^{j2\pi[2^m(i+k)-(q+k)] \frac{k}{2^{SF+m}}} + \\
&\frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=2^{SF+m}-q}^{2^{SF}-i-1} e^{j2\pi[2^m(i+k)-(q+k)] \frac{k}{2^{SF+m}}} e^{j2\pi[2^{SF+m}] \frac{k}{2^{SF+m}}} \xrightarrow{1} \\
&\frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=2^{SF}-i}^{2^{SF}-1} e^{j2\pi[2^m(i+k)-(q+k)] \frac{k}{2^{SF+m}}} e^{-j2\pi[2^{SF+m}] \frac{k}{2^{SF+m}}} e^{j2\pi[2^{SF+m}] \frac{k}{2^{SF+m}}} \xrightarrow{1}
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Então, assim como o sub caso 5.29, para $q > 2^{SF}(2^m - 1)$

$$\langle c(nT_s + kT) |_{s(nT_s)=i}, c(nT_s + kT) |_{s(nT_s)=q} \rangle = \frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=0}^{2^{SF}-1} e^{j2\pi(i+k) \frac{k}{2^{SF}}} e^{-j2\pi(q+k) \frac{k}{2^{SF+m}}}. \tag{5.31}$$

Por último, para o sub caso $(q + 2^{SF} - i) = 2^{SF+m}$

$$\begin{aligned}
\langle c(nT_s + kT) |_{s(nT_s)=i}, c(nT_s + kT) |_{s(nT_s)=q} \rangle &= \frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=0}^{2^{SF}-i-1} e^{j2\pi[2^m(i+k)-(q+k)] \frac{k}{2^{SF+m}}} + \\
&\frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=2^{SF}-i}^{2^{SF}-1} e^{j2\pi[2^m(i+k-2^{SF})-(q+k-2^{SF+m})] \frac{k}{2^{SF+m}}} = \\
&\frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=0}^{2^{SF}-i-1} e^{j2\pi[2^m(i+k)-(q+k)] \frac{k}{2^{SF+m}}} + \\
&\frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=2^{SF}-i}^{2^{SF}-1} e^{j2\pi[2^m(i+k)-(q+k)] \frac{k}{2^{SF+m}}} e^{-j2\pi[2^{SF+m}] \frac{k}{2^{SF+m}}} e^{j2\pi[2^{SF+m}] \frac{k}{2^{SF+m}}} \xrightarrow{1}
\end{aligned} \tag{5.32}$$

De maneira semelhante às Equações 5.29 e 5.31, tem-se

$$\langle c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=i}, c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=q} \rangle = \frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=0}^{2^{SF}-1} e^{j2\pi(i+k)\frac{k}{2^{SF}}} e^{-j2\pi(q+k)\frac{k}{2^{SF+m}}}. \quad (5.33)$$

Portanto, para qualquer símbolo de interesse com fator de espalhamento menor que outro

$$\begin{aligned} \langle c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=i}, c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=q} \rangle &= \frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=0}^{2^{SF}-1} e^{j2\pi(i+k)\frac{k}{2^{SF}}} e^{-j2\pi(q+k)\frac{k}{2^{SF+m}}} = \\ &= \frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=0}^{2^{SF}-1} e^{j2\pi([2^m i - q] + [k(2^m - 1)])\frac{k}{2^{SF+m}}}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

A Equação 5.34 será discutida a seguir.

5.2.2.2 Símbolo desejado com fator de espalhamento maior que outros

Supondo que o fator de espalhamento do símbolo desejado é SF e o fator de espalhamento dos outros símbolos é $SF - m$ (onde $m > 0$). Onde,

$$c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=q} = \begin{cases} c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=q_0}, & \text{se } 0 \leq k \leq 2^{SF-m} - 1 \\ c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=q_1}, & \text{se } 2^{SF-m} \leq k \leq 2^{SF-m+1} - 1 \\ c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=q_2}, & \text{se } 2^{SF-m+1} \leq k \leq 2^{SF-m+2} - 1 \\ c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=q_3}, & \text{se } 2^{SF-m+2} \leq k \leq 2^{SF-m+3} - 1 \\ \dots & \\ c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=q_{(2^{SF-m}-1)}}, & \text{se } 2^{SF-1} \leq k \leq 2^{SF} - 1 \end{cases} \quad (5.35)$$

para cada $q_0, q_1, q_2, q_3, \dots, q_{(2^{SF-m}-1)} \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 2^{SF-m} - 1\}$. Com isso,

$$\begin{aligned}
& \langle c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=i}, c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=q} \rangle = \\
& \frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=0}^{2^{SF-m}-1} (c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=i} \cdot c^*(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=q_0}) + \\
& \frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=0}^{2^{SF-m}-1} (c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=(i+2^{SF-m})_{\text{mod}2^{SF}}} \cdot c^*(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=q_1}) + \dots + \\
& \frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=0}^{2^{SF-m}-1} (c(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=(i+(2^{SF-m}-1)2^{SF-m})_{\text{mod}2^{SF}}} \cdot c^*(nT_s + kT)|_{s(nT_s)=q_{(2^{SF-m}-1)}}) = \\
& \frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=0}^{2^{SF-m}-1} e^{j2\pi(i+k)\frac{k}{2^{SF}}} e^{-j2\pi(q_0+k)\frac{k}{2^{SF-m}}} + \\
& \frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=0}^{2^{SF-m}-1} e^{j2\pi((i+2^{SF-m})_{\text{mod}2^{SF}}+k)\frac{k}{2^{SF}}} e^{-j2\pi(q_1+k)\frac{k}{2^{SF-m}}} + \dots + \\
& \frac{1}{2^{SF} \sqrt{2^m}} \sum_{k=0}^{2^{SF-m}-1} e^{j2\pi((i+(2^{SF-m}-1)2^{SF-m})_{\text{mod}2^{SF}}+k)\frac{k}{2^{SF}}} e^{-j2\pi(q_{(2^{SF-m}-1)}+k)\frac{k}{2^{SF-m}}}
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Nota-se que esse caso é uma sobreposição da Equação 5.34, de modo que o símbolo de interesse é dividido em 2^n parcelas iguais. Para resolver a Equação 5.34 foi utilizado um script³ em Python. Foram computados pares de sinais SFs entre 7 e 12. As tabelas 2 e 3, mostram respectivamente o módulo das correlações máximas e médias dos símbolos desses fatores de espalhamento.

Tabela 2 – Módulo das correlações máximas entre os símbolos de fatores de espalhamento.

Fatores de Espalhamento	7	8	9	10	11	12
7	1	$8,4 \times 10^{-2}$	$7,5 \times 10^{-2}$	$7,5 \times 10^{-2}$	$7,4 \times 10^{-2}$	$7,4 \times 10^{-2}$
8	$8,4 \times 10^{-2}$	1	$6,0 \times 10^{-2}$	$5,3 \times 10^{-2}$	$5,3 \times 10^{-2}$	$5,3 \times 10^{-2}$
9	$8,4 \times 10^{-2}$	$5,9 \times 10^{-2}$	1	$4,2 \times 10^{-2}$	$3,7 \times 10^{-2}$	$3,7 \times 10^{-2}$
10	$8,4 \times 10^{-2}$	$5,9 \times 10^{-2}$	$4,2 \times 10^{-2}$	1	$3,0 \times 10^{-2}$	$2,6 \times 10^{-2}$
11	$8,4 \times 10^{-2}$	$5,9 \times 10^{-2}$	$4,2 \times 10^{-2}$	$2,9 \times 10^{-2}$	1	$2,1 \times 10^{-2}$
12	$8,4 \times 10^{-2}$	$5,9 \times 10^{-2}$	$4,2 \times 10^{-2}$	$2,9 \times 10^{-2}$	$2,1 \times 10^{-2}$	1

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os elementos da diagonal principal das tabelas 2 e 3 apresentam os valores referentes a equação 5.6, enquanto os acima das diagonais principais representam as métricas da equação 5.34, já os elementos abaixo das diagonais principais da equação 5.36.

Assim como nos casos em que os símbolos possuem o mesmo fator de espalhamento, nos casos de fatores distintos há símbolos com correlação igual a zero.

³ gist do script

Tabela 3 – Módulo das correlações médias entre os símbolos de fatores de espalhamento.

Fatores de Espalhamento	7	8	9	10	11	12
7	$7,8 \times 10^{-3}$	$6,2 \times 10^{-2}$	$3,5 \times 10^{-2}$	$1,9 \times 10^{-2}$	$1,0 \times 10^{-2}$	$6,0 \times 10^{-3}$
8	$5,8 \times 10^{-2}$	$3,9 \times 10^{-3}$	$4,4 \times 10^{-2}$	$2,4 \times 10^{-2}$	$1,3 \times 10^{-2}$	$7,0 \times 10^{-3}$
9	$5,8 \times 10^{-2}$	$4,4 \times 10^{-2}$	$1,9 \times 10^{-3}$	$3,1 \times 10^{-2}$	$1,7 \times 10^{-2}$	$9,0 \times 10^{-3}$
10	$5,8 \times 10^{-2}$	$4,4 \times 10^{-2}$	$3,1 \times 10^{-2}$	$9,8 \times 10^{-4}$	$2,2 \times 10^{-2}$	$1,2 \times 10^{-2}$
11	$5,8 \times 10^{-2}$	$4,4 \times 10^{-2}$	$3,1 \times 10^{-2}$	$2,2 \times 10^{-2}$	$4,9 \times 10^{-4}$	$1,5 \times 10^{-2}$
12	$5,8 \times 10^{-2}$	$4,4 \times 10^{-2}$	$3,1 \times 10^{-2}$	$2,2 \times 10^{-2}$	$1,5 \times 10^{-2}$	$2,4 \times 10^{-4}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Entretanto, analisando as tabelas 2 e 3 nota-se que para símbolos desejados com fatores de espalhamento maiores que outros, quaisquer símbolos de fatores de espalhamento maiores que 7 possuem maior correlação (em módulo), e isso é inversamente proporcional ao fator do símbolo em destaque. Essa análise remete a afirmativa de que: quanto maior a diferença entre fatores de espalhamento, menores serão as correlações e os símbolos, tornando-os mais próximos da ortogonalidade.

Por outro lado, para símbolos desejados de fatores de espalhamento menores que outros, quanto maior a diferença entre os fatores menor o módulo da correlação. Com destaque para os símbolos de fatores 7 com outros de SF 12, que apresentaram uma correlação média (em módulo) de $6,0 \times 10^{-3}$.

Esse resultado mostra que diferentemente dos símbolos de mesmo fator de espalhamento, há o que Croce *et al.* (2018) denomina ortogonalidade imperfeita na modulação LoRa, ou seja, uma correlação não nula para fatores de espalhamento distintos, o que leva os demoduladores a interpretarem erroneamente símbolos.

5.3 Análise da Rejeição entre Canais

O conceito de ortogonalidade imperfeita traz a métrica de rejeição entre canais para a literatura e documentações sobre o modelo LoRa, como é apresentado nos trabalhos de Goursaud e Gorce (2015) e Croce *et al.* (2018).

Goursaud e Gorce (2015) e Croce *et al.* (2018) apresentam em seus trabalhos uma tabelas que trazem limiares de SIR para assegurar uma transmissão minimamente aceitável em uma transmissão simultânea de dois dispositivos LoRa. Tais tabelas apresentam limiares de rejeição para pares de combinação de símbolos para todas as combinações de fatores de espalhamento de 7 a 12.

Também foi realizada uma simulação⁴ com todos os símbolos dos fatores de espa-

⁴ gist do script

lhamento de 7 a 12 de modo a verificar a partir de qual potência os sinais interferem em outro, tomando um BER de 10^{-4} como critério.

Tabela 4 – Rejeição entre canais (em dB).

Fatores de Espalhamento	7	8	9	10	11	12
7	0	-7	-7	-8	-9	-10
8	-7	0	-8	-9	-9	-11
9	-8	-7	0	-11	-12	-13
10	-8	-8	-6	0	-12	-15
11	-9	-7	-7	-6	0	-17
12	-9	-8	-7	-6	-6	0

Fonte: Elaborado pelo autor.

A tabela 4 apresenta algumas similaridades em relação à tabela de Croce *et al.* (2018), principalmente entre os valores da diagonal principal, que possuem os mesmos fatores de espalhamento, e os acima da diagonal principal que são os que possuem fatores maiores que os outros. Entretanto os símbolos abaixo da diagonal principal apresentam potências de rejeição que divergem do resultado de Croce *et al.* (2018), principalmente os de maiores fatores de espalhamento.

Por outro lado, em comparação ao trabalho de Goursaud e Gorce (2015), apenas a relação entre sinais é invertida, mas assim como na comparação entre o trabalho de Croce *et al.* (2018), os símbolos abaixo da diagonal principal são diferentes dos apresentados na tabela 4.

5.4 Análise da Demodulação do Sinal LoRa com Ruído Gaussiano Branco

De acordo com Reynders e Pollin (2016), pela propriedade da ortogonalidade entre símbolos, o decodificador LoRa utiliza as correlações para decodificar os sinais, ou seja, cada sinal recebido no enlace reverso ($r(nT_s + kT)$) é correlacionado com a base de símbolos CSS, e então, o sinal decodificado ($s(nT_s + kT)$) é tomado com base na correlação máxima, como mostra a equação 5.37,

$$\hat{s}(nT_s) = \underset{q \in Q}{\operatorname{argmax}} \left(\langle r(nT_s + kT) |_{s(nT_s)=i}, c(nT_s + kT) |_{s(nT_s)=q} \rangle \right), \quad (5.37)$$

sendo Q o conjunto de todos os símbolos do fator de espalhamento SF , ou seja $Q = \{0, 1, 2, \dots, 2^{SF} - 1\}$.

Entretanto, Vangelista (2017), aplicando algumas propriedades algébricas no cálculo da ortogonalidade, apresenta um demodulador LoRa computacionalmente eficiente.

$$\begin{aligned}
\langle r(nT_s + kT), c(nT_s + kT) |_{s(nT_s)=q} \rangle &= \sum_{q=0}^{2^{SF}-1} r(nT_s + kT) \cdot \frac{1}{\sqrt{2^{SF}}} e^{-j2\pi[(q+k)_{\text{mod}2^{SF}}] \frac{k}{2^{SF}}} = \\
&= \sum_{q=0}^{2^{SF}-1} r(nT_s + kT) \cdot \frac{1}{\sqrt{2^{SF}}} e^{-j2\pi[(q+k)_{\text{mod}2^{SF}} + k - k] \frac{k}{2^{SF}}} = \\
&= \sum_{q=0}^{2^{SF}-1} r(nT_s + kT) \cdot \underbrace{e^{-j2\pi \frac{k^2}{2^{SF}}}}_{d(nT_s + kT)} \cdot \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2^{SF}}} e^{-j2\pi[(q+k)_{\text{mod}2^{SF}} - k] \frac{k}{2^{SF}}}}^{\varphi(q+k)}. \quad (5.38)
\end{aligned}$$

De modo que, $d(nT_s + kT)$ é o sinal LoRa conhecido como *down-chirp* e $\varphi(q+k)$ é simplificado como

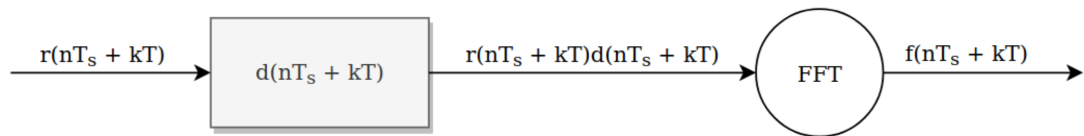
$$\varphi(q+k) = \frac{1}{\sqrt{2^{SF}}} e^{-j2\pi q \cdot k \frac{1}{2^{SF}}} \quad (5.39)$$

Com isso, Vangelista (2017) define os passos de demodulação do sinal LoRa como:

- I Produto escalar entre os sinais $r(nT_s + kT)$ e o *down-chirp* $d(nT_s + kT)$ correspondente à base do símbolo;
- II Aplicar a Transformada Rápida de Fourier no resultado do produto escalar; e
- III Coletar o maior componente harmônico da transformada anterior.

A Figura 8 ilustra parte do demodulador LoRa proposto por Vangelista (2017).

Figura 8 – Parte do demodulador proposto por Vangelista (2017)

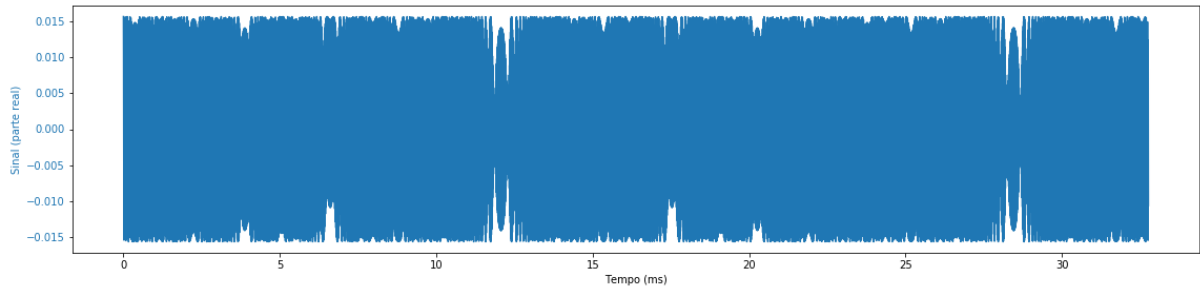


Fonte: Elaborado pelo autor.

Supondo um símbolo LoRa, $r(nT_s + kT) |_{s(nT_s)=1078}$, recebido pelo *Gateway*, com $SF = 12$ e $BW = 125$ kHz, o sinal LoRa é ilustrado na Figura 9. Na Figura 10 é ilustrada a variação da frequência do sinal $r(nT_s + kT)$ e na Figura 11 é mostrado o resultado do produto escalar aplicado entre o sinal $r(nT_s + kT)$ e seu respectivo *down-chirp*.

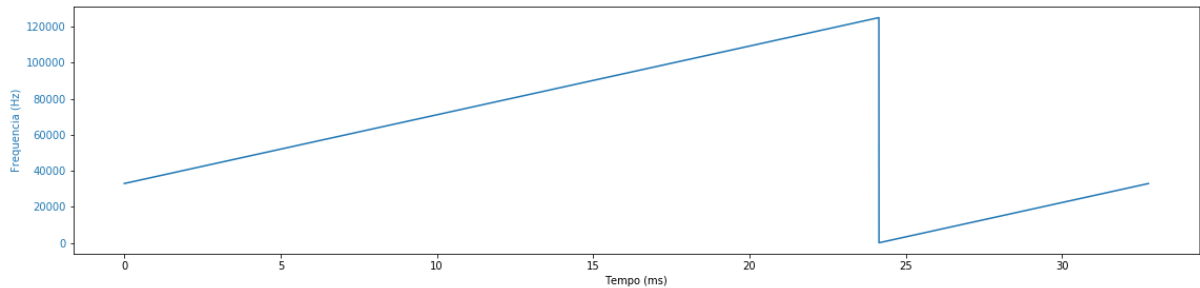
Tal sinal possui frequência constante igual a $s(nT_s)$. A Figura 12 ilustra os componentes harmônicos que compõem o sinal resultante do produto entre $r(nT_s + kT)$ e $d(nT_s + kT)$.

Figura 9 – Sinal LoRa - Símbolo 1078 - Largura de banda 125 kHz - SF 12.



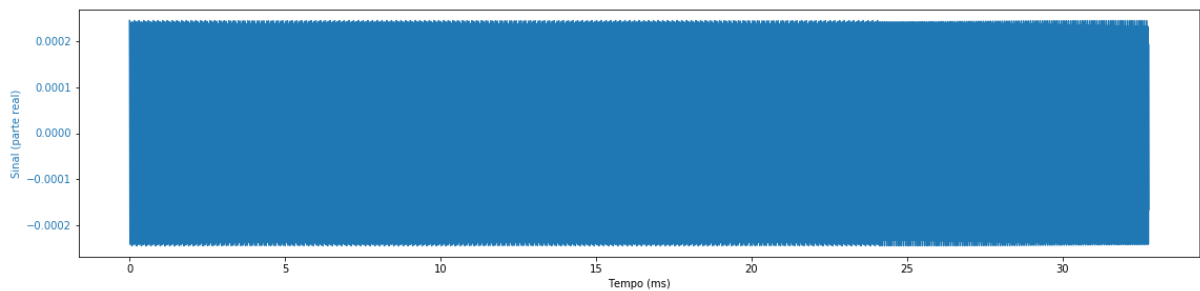
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 10 – Frequência do sinal LoRa - Símbolo 1078 - Largura de banda 125 kHz - SF 12.



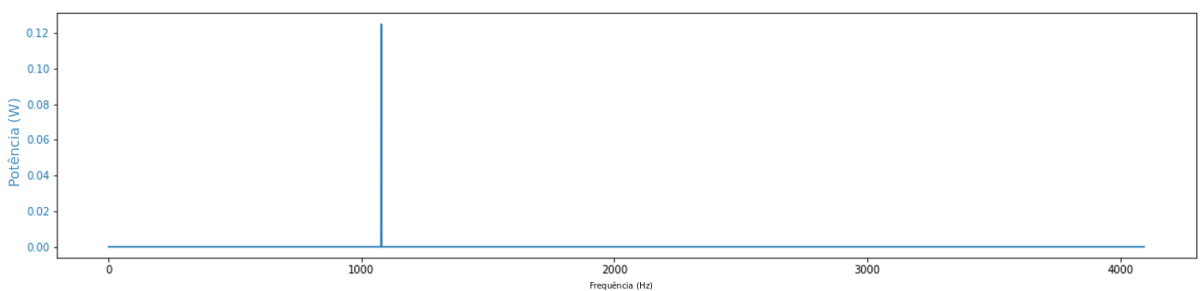
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 11 – Sinal resultante do produto escalar entre $r(nT_s + kT)$ e $d(nT_s + kT)$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 12 – Análise da frequência do produto entre $r(nT_s + kT)$ e $d(nT_s + kT)$

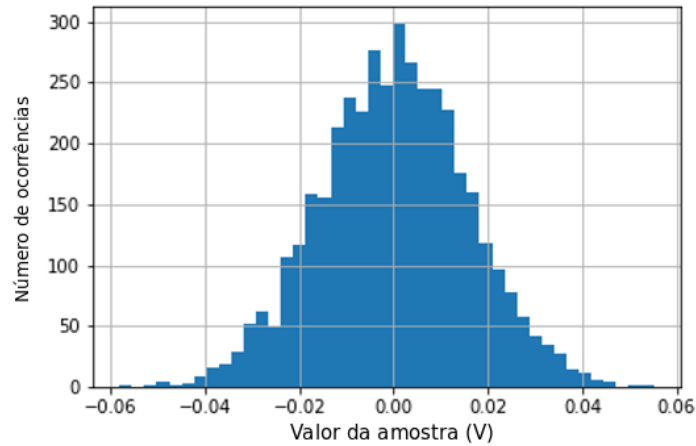


Fonte: Elaborado pelo autor.

Tomando-se o argumento máximo do sinal $f(nT_s + kT)$, tem-se o valor 1078, que de fato foi o símbolo modulado.

Considerando o ruído gaussiano branco, de desvio padrão $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2SF}}$ e média $\mu = 0$, com distribuição normal, como ilustra a Figura 13.

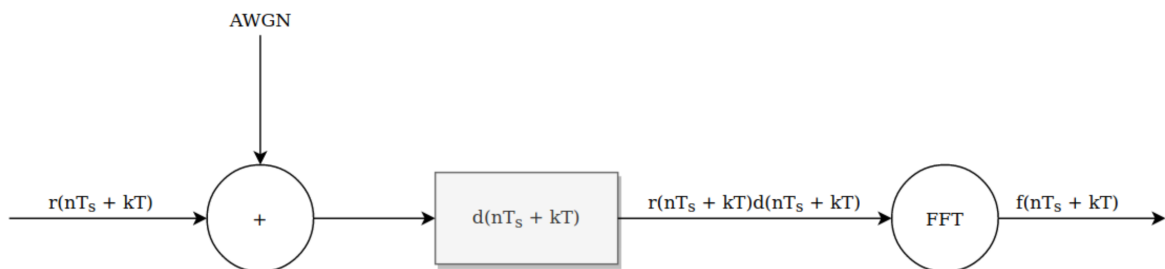
Figura 13 – Histograma do ruído Gaussiano branco inserido no enlace reverso



Fonte: Elaborado pelo autor.

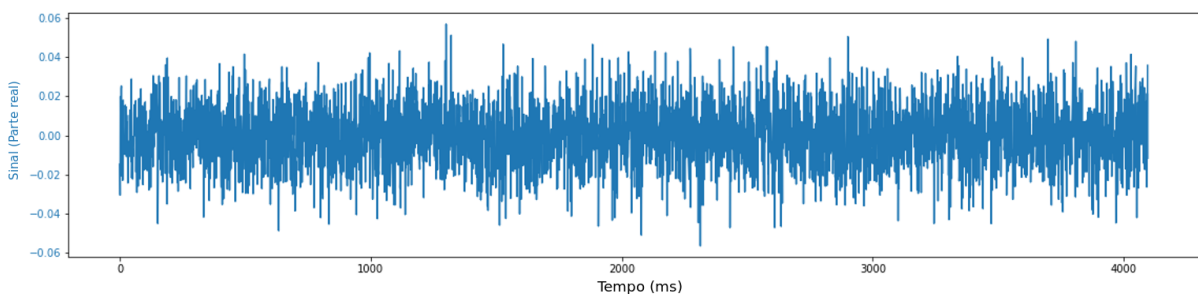
O ruído é então adicionado ao sinal de interesse $r(nT_s + kT)$ que foi recebido, de modo que a Figura 14 representa o modelo do esquema de recepção. O sinal resultante da sobreposição do ruído pelo sinal $r(nT_s + kT)$ pode ser visualizado na Figura 15. Já o sinal resultante do demodulador presente no sistema da Figura 14, pode ser visualizado na Figura 16.

Figura 14 – Ruído Gaussiano branco inserido na entrada do demodulador proposto por Vangelista (2017)



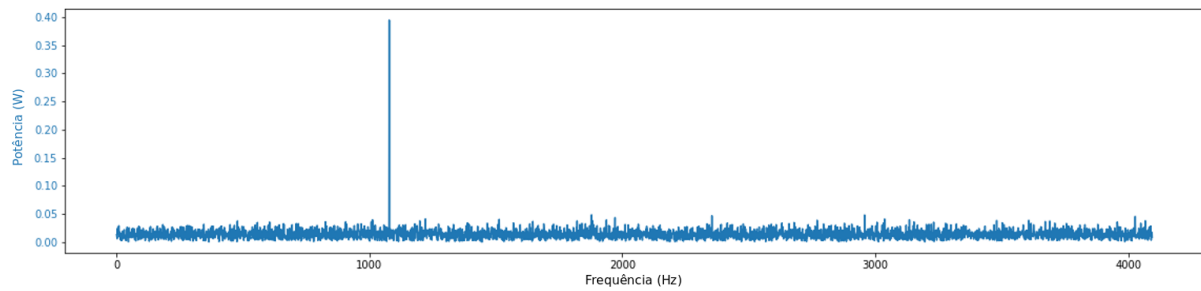
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 15 – Sinal resultante da sobreposição do sinal ruidoso ao sinal de interesse



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 16 – Sinal resultante do demodulador proposto por Vangelista (2017)



Fonte: Elaborado pelo autor.

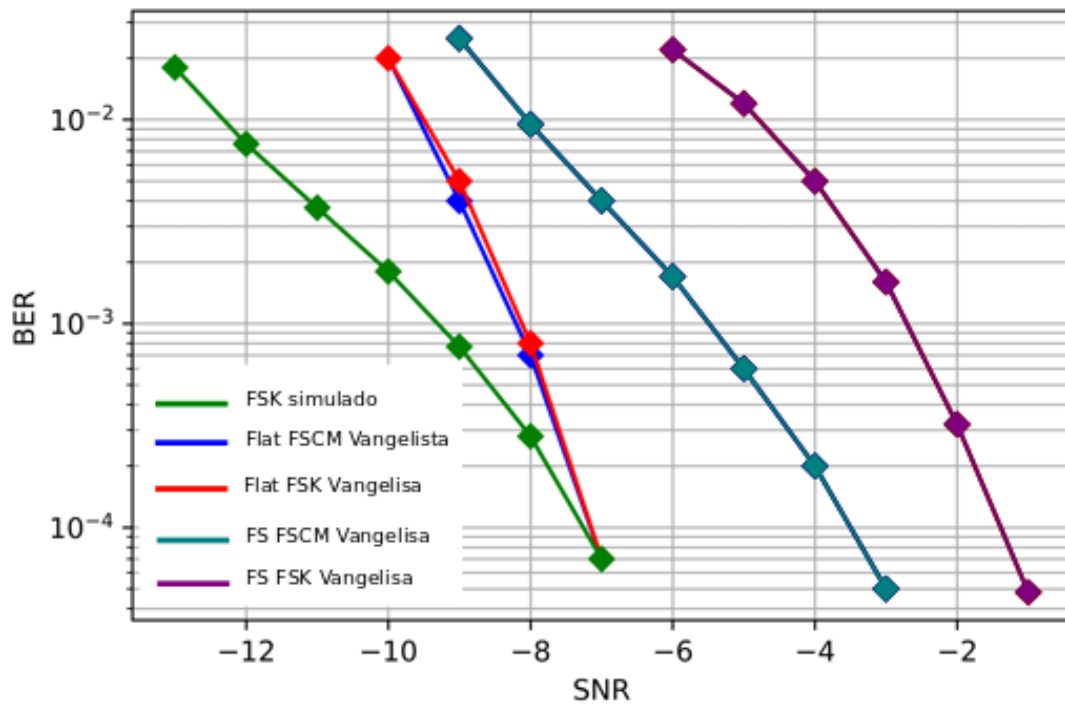
Nota-se pela Figura 16 que o componente harmônico está posicionado na frequência inicial do sinal $r(nT_s + kT)$.

Foram realizadas⁵ análises com sinais modelados $r(nT_s + kT)$, dados seguintes parâmetros: diferentes potências, símbolos pertencentes aos fatores de espalhamento de 7 a 12 e ruído com potência (em dB) igual a $10\log_{10}(BW) + NF - 174$, onde NF é o fator de ruído que por padrão é 6 dB, baseado em Semtech (2015). Foi levantada a métrica de taxa de erro de bits em função da SNR em dB, a qual pode ser visualizada nos gráficos abaixo. Para cada valor de SNR foram analisados 500000 de amostras de sinais.

Nota-se que, a partir de uma SNR de aproximadamente -10 dB, 1 a cada 100 bits é interpretado como errado na simulação de Vangelista (2017), enquanto na realizada no corrente trabalho aproximadamente 1 a cada 100 bits só são errados com SNR da ordem de -12 dB. Entretanto, nota-se a divergência da curva apresentada por Vangelista (2017), isso deve-se ao fato do autor utilizar um canal flat para AWGN, divergindo da utilização do ruído na simulação.

⁵ gist do script

Figura 17 – Comparação entre o BER das simulações da literatura e do presente trabalho.



Fonte: Elaborado pelo autor.

6 CONCLUSÕES

Foi apresentado um conjunto de análises com base no modelo discreto de sinal LoRa proposto por Vangelista (2017), todas feitas com auxílio da ferramenta computacional Python. As análises foram iniciadas com as métricas referentes ao cálculo da ortogonalidade entre símbolos, realizadas com todos os símbolos de mesmo fator de espalhamento que podem ser transmitidos em uma rede LoRaWAN. Tais análises nos levaram a um resultado probabilístico.

Após isso, foi realizada uma análise matemática entre todos os símbolos de mesmo fator de espalhamento e também foram analisados matematicamente os símbolos de fatores de espalhamento distintos. A obtenção de uma expressão fechada foi umas das maiores dificuldades deste trabalho, nos levando à implementação de um método numérico. Através disso pode-se obter métricas que mostram que quanto maior a diferença dos fatores de espalhamento, menor a correlação entre os símbolos.

Verificamos ainda a propriedade de rejeição entre canais, que é apresentada nos trabalhos de Goursaud e Gorce (2015) e Croce *et al.* (2018). Novamente, por meio de métodos numéricos, obtivemos resultados similares em termos de potências limiaries, de interferência entre símbolos e entre fatores de espalhamento.

Por fim, foi apresentado uma análise do demodulador apresentado por Vangelista (2017), em seguida foi feita uma simulação exaustiva do demodulador diante de um canal contaminado por ruído gaussiano branco. Por haver uma divergência entre a curva apresentada por Vangelista (2017), é necessário refazer tal simulação com a inclusão de outros parâmetros utilizados pelo autor, como canal flat e uma potência de ruído diferente da utilizada.

A principal contribuição alcançada no trabalho foi o desenvolvimento da fórmula fechada da ortogonalidade entre símbolos da rede LoRaWAN, pois diversos trabalhos como os de Vangelista (2017), Croce *et al.* (2018), Goursaud e Gorce (2015) e Reynders e Pollin (2016) apontam a ortogonalidade imperfeita e até desenvolvem fórmulas para símbolos de fatores de espalhamento iguais, mas nenhum desses apresenta tal fórmula para fatores distintos.

6.1 Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros, propõe-se desenvolver a equação 5.34 para o obter uma relação exata entre fatores de espalhamento para projetos de rede LoRaWAN. Além disso, consideramos também importante analisar o sinal na forma contínua, para compreender os

trabalhos que utilizam essa notação.

Propõe-se também, o aprofundamento em uma modelagem mais realista do cenário de comunicação, levando em consideração fenômenos físicos, como desvanecimento seletivo em frequência, perda de percursos, entre outros, bem como a adoção de cadeias de transmissão mais condizentes com os dispositivos LoRa comercializados, tais como codificação de canal, limitações de sincronismo etc. Além de uma análise sobre a taxa de erro de símbolos.

REFERÊNCIAS

- ALI, A.; HAMOUDA, W.; UYSAL, M. Next generation M2M cellular networks: Challenges and practical considerations. **IEEE Communications Magazine**, IEEE, v. 53, n. 9, p. 18–24, 2015. ISSN 01636804.
- ATZORI, L.; IERA, A.; MORABITO, G. The internet of things: A survey. **Computer networks**, Elsevier, v. 54, n. 15, p. 2787–2805, 2010.
- BRANTE, G.; SOUZA, R. D.; de Noronha Neto, M.; HOELLER, A.; ALVES, H.; Alcaraz Lopez, O. L. Analysis and Performance Optimization of LoRa Networks With Time and Antenna Diversity. **IEEE Access**, 2018.
- CROCE, D.; GUCCIARDO, M.; MANGIONE, S.; SANTAROMITA, G.; TINNIRELLO, I. Impact of LoRa Imperfect Orthogonality: Analysis of Link-Level Performance. **IEEE Communications Letters**, IEEE, v. 22, n. 4, p. 796–799, 2018. ISSN 10897798.
- CROCE, D.; GUCCIARDO, M.; TINNIRELLO, I.; GARLISI, D.; MANGIONE, S. Impact of spreading factor imperfect orthogonality in lora communications. In: PIVA, A.; TINNIRELLO, I.; MOROSI, S. (Ed.). **Digital Communication. Towards a Smart and Secure Future Internet**. Cham: Springer International Publishing, 2017. p. 165–179. ISBN 978-3-319-67639-5.
- El Rachkidy, N.; GUITTON, A.; KANEKO, M. Decoding Superposed LoRa Signals. **Proceedings - Conference on Local Computer Networks, LCN**, v. 2018-Octob, n. October, p. 184–190, 2019.
- ERICSSON. **Cellular networks for massive IoT: Enabling low power wide area applications**. 2016. Disponível em: https://www.ericsson.com/assets/local/publications/white-papers/wp_iot.pdf. Acesso em 17 abr. 2019.
- FOROUZAN, B. A. **Comunicação de dados e redes de computadores**. [S.l.]: AMGH Editora, 2009.
- GIUSTO, D.; IERA, A.; MORABITO, G.; ATZORI, L. **The Internet of Things 20th Tyrrhenian Workshop on Digital Communications**. [S.l.: s.n.], 2010. v–xviii p. ISSN 1098-6596. ISBN 9781441916730.
- GOURSAUD, C.; GORCE, J. M. Dedicated networks for IoT: PHY / MAC state of the art and challenges. **EAI Endorsed Transactions on Internet of Things**, v. 1, n. 1, p. 150597, 2015.
- HAXHIBEQIRI, J.; De Poorter, E.; MOERMAN, I.; HOEBEKE, J. A Survey of LoRaWAN for IoT: From Technology to Application. **Sensors (Basel, Switzerland)**, v. 18, n. 11, 2018. ISSN 14248220.
- ITU. **Mobile-cellular subscriptions (2000-2018)**. 2019. Disponível em: <http://www.itu.int/ITU-D/ict/statistics/>. Acesso em 14 abr. 2019.
- LAVRIC, A.; POPA, V. Internet of Things and LoRa™ Low-Power Wide-Area Networks: A survey. **ISSCS 2017 - International Symposium on Signals, Circuits and Systems**, 2017. ISSN 13596454.
- NOKIA. **LTE evolution for IoT connectivity**. 2016. Disponível em: <https://onestore.nokia.com/asset/200178>. Acesso em 17 abr. 2019.

- OCHOA, M. N.; GUIZAR, A.; MAMAN, M.; DUDA, A. Evaluating LoRa energy efficiency for adaptive networks: From star to mesh topologies. **International Conference on Wireless and Mobile Computing, Networking and Communications**, v. 2017-Octob, 2017. ISSN 21619654.
- PETÄJÄJÄRVI, J.; MIKHAYLOV, K.; PETTISSALO, M.; JANHUNEN, J.; IINATTI, J. Performance of a low-power wide-area network based on lora technology: Doppler robustness, scalability, and coverage. **International Journal of Distributed Sensor Networks**, v. 13, n. 3, 2017. ISSN 15501477.
- RAZA, U.; KULKARNI, P.; SOORIYABANDARA, M. Low Power Wide Area Networks: An Overview. **IEEE Communications Surveys and Tutorials**, 2017. ISSN 1553877X.
- REYNDERS, B.; POLLIN, S. Chirp spread spectrum as a modulation technique for long range communication. In: IEEE. **2016 Symposium on Communications and Vehicular Technologies (SCVT)**. [S.l.], 2016. p. 1–5.
- SELLER, O. B.; SORNIN, N. **Low power long range transmitter**. [S.l.]: Google Patents, 2014. US Patent 9,252,834.
- SEMTECH. **LoRa™ Modulation Basics Semtech**. [S.l.], 2015. AN1200.22, n. May, 1–26 p.
- SEMTECH CORPORATION. **LoRa™ Modulation Basics**. [S.l.], 2015.
- SFORZA, F. **Communications system**. [S.l.]: Google Patents, 2013. US Patent 8,406,275.
- SINHA, R. S.; WEI, Y.; HWANG, S. H. A survey on LPWA technology: LoRa and NB-IoT. **ICT Express**, Elsevier B.V., v. 3, n. 1, p. 14–21, 2017. ISSN 24059595. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ict.2017.03.004>.
- VANGELISTA, L. Frequency Shift Chirp Modulation: The LoRa Modulation. **IEEE Signal Processing Letters**, v. 24, n. 12, p. 1818–1821, 2017. ISSN 10709908.
- WAN, J.; LI, D.; ZOU, C.; ZHOU, K. M2M communications for smart city: An event-based architecture. **Proceedings - 2012 IEEE 12th International Conference on Computer and Information Technology, CIT 2012**, p. 895–900, 2012.
- WARET, A.; KANEKO, M.; GUITTON, A.; El Rachkidy, N. LoRa Throughput Analysis with Imperfect Spreading Factor Orthogonality. **IEEE Wireless Communications Letters**, IEEE, PP, n. c, p. 1, 2018. ISSN 21622345.