



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

AUGUSTO PLÁCIDO CAVALCANTE MELO DE LIMA

**ASPECTOS DO VÁCUO ESCALAR EM COORDENADAS GENERALIZADAS:
ESTUDO DO EFEITO CASIMIR E EFEITO UNRUH.**

FORTALEZA

2020

AUGUSTO PLÁCIDO CAVALCANTE MELO DE LIMA

ASPECTOS DO VÁCUO ESCALAR EM COORDENADAS GENERALIZADAS: ESTUDO
DO EFEITO CASIMIR E EFEITO UNRUH.

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

Coorientador: Prof. Dr. Célio Rodrigues Muniz.

FORTALEZA
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- L696a Lima, Augusto Plácido Cavalcante Melo de.
Aspectos do Vácuo Escalar em Coordenadas Generalizadas: Estudo do efeito Casimir e efeito Unruh. /
Augusto Plácido Cavalcante Melo de Lima. – 2020.
73 f. : il. color.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2020.
Orientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.
Coorientação: Prof. Dr. Célio Rodrigues Muniz.
1. Teoria quântica de campos. 2. Gravitação. 3. Efeito Casimir. 4. Efeito Unruh. I. Título.
- CDD 530
-

AUGUSTO PLÁCIDO CAVALCANTE MELO DE LIMA

ASPECTOS DO VÁCUO ESCALAR EM COORDENADAS GENERALIZADAS: ESTUDO
DO EFEITO CASIMIR E EFEITO UNRUH.

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 15/10/2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Célio Rodrigues Muniz
Faculdade De Educação, Ciências e Letras de Iguatu
(UECE-FECLI)

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Prof. Dr. Daniel Augusto Turolla Vanzella
Instituto de Física de São Carlos (IFSC)

Aos Meus Pais

e

à Karine.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha noiva, melhor amiga e companheira Karine Carneiro Silva, que esteve comigo durante a maior parte do doutorado, sempre dando amor, carinho e apoio, sendo assim minha maior fonte de motivação e inspiração. Agradeço também aos meus pais, pelo suporte proporcionado por tantos anos.

Agradeço aos amigos e colegas do departamento de Física da UFC, que tornaram essa jornada muito mais divertida e interessante. Agradeço também aos professores Geová, Renan e Célio, pela orientação fundamental no desenvolvimento deste trabalho, bem como os demais membros da banca examinadora pelas observações e sugestões muito pertinentes. Expresso ainda minha gratidão a todos os professores e funcionários do departamento, sem os quais não apenas esse trabalho, como muitos outros não existiriam.

Agradeço a Alexandra Elbakyan e ao Sci-Hub, que mesmo sofrendo risco de retaliação do sistema, proporcionam aos cientistas de todo mundo a possibilidade de acesso livre à ciência. Num cenário de grande mercadorização da pesquisa científica, esse tipo de iniciativa é imprescindível ao avanço do conhecimento, que não deveria ser refém de um sistema econômico cruel e distorcido.

Agradeço, por fim, ao CNPQ pelo financiamento desta pesquisa, além da FUNCAP que também proporcionou financiamento parcial através do projeto PRONEM PNE0112-00085.01.00/16.

RESUMO

O presente trabalho se propõe a abordar duas discussões acerca da natureza do vácuo quântico quando analisado do ponto de vista de coordenadas gerais e espaço-tempo curvo. Por simplicidade, o modelo usado será o de um campo escalar real e sem massa. A primeira discussão consiste da análise do efeito Casimir em um campo gravitacional fraco, problema que foi abordado previamente na literatura por outros autores. Usando tanto o método canônico quanto o funcional, demonstramos que energia de Casimir obtida numa configuração de placas paralelas com condições de contorno de Dirichlet, não apresenta correção gravitacional em relação ao seu valor no espaço tempo plano até a ordem de $[M/R]^2$, tomada como a primeira ordem não trivial em trabalhos anteriores. Mostramos ainda que esse resultado é válido para uma determinada classe mais geral de métricas aproximadas, o que aponta incoerência em alguns resultados prévios da literatura. A segunda discussão aborda a distinguibilidade entre o efeito de termalização do estado de vácuo num referencial de aceleração própria uniforme, o efeito Unruh, e a influência de um banho térmico comum sobre um detector de Unruh-Dewitt. Usando o formalismo de sistema quântico aberto, em particular uma aproximação markoviana da equação mestra para a evolução da densidade de estados do detector, analisamos o efeitos da aceleração e temperatura de fundo no caso onde os dois efeitos estão presentes simultaneamente. Expomos uma abordagem numérica simplificada para obter os estados assintóticos de uma partícula e a formação de emaranhamento para duas partículas. As curvas obtidas indicam uma pequena assimetria nas dependências dessas grandezas com a temperatura de fundo e aceleração.

Palavras-chave: Teoria quântica de campos. Gravitação. Efeito Casimir. Efeito Unruh.

ABSTRACT

The present work proposes an approach for two discussions concerning the nature of the quantum vacuum in the perspective of generalized coordinates and curved space-times. For simplicity, we use a real massless scalar field for the models. The first consists of the discussion of the Casimir effect in a weak gravitational field, a problem that has been approached before in the literature by other authors. Using both the canonical and the functional formalism we demonstrate that the Casimir energy obtained for Dirichlet boundary conditions in parallel plates has no gravitational correction to order of $[M/R]^2$, taken as the first non-trivial order in previous works. We show that this result is valid for a wider class of geometries, indicating a discrepancy with these previous results from other authors. The second discussion approaches the distinguishability of the effects of thermalization of the vacuum in the frame of an accelerated observer, the Unruh effect, and the influence of a common thermal bath on a Unruh-Dewitt detector. Using the formalism of open quantum systems, specifically a Markovian approximation of the master equation for the detector's state density, we analyze the effects of temperature and acceleration in the case where both effects are simultaneously present. We implement a simplified numerical approach to obtain the asymptotical state density for one accelerated particle and entanglement formation for two particles. The obtained curves indicate a small asymmetry in the dependencies of the two quantities with the background temperature and the acceleration.

Keywords: Quantum Field Theory. Gravitation. Casimir effect. Unruh effect.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Perturbação das flutuações de vácuo na presença de placas condutoras. A diferença de pressão entre os modos em azul e vermelho gera uma força de atração entre as placas dependente da separação entre elas.	22
Figura 2 – Esquema de posicionamento das placas e do sistema de coordenadas do observador.	33
Figura 3 – Gráficos de $\Delta G_{\beta}^{+}(t, T_1, T_2)$ em função do tempo. As curvas lembram um formato gaussiano, com valor máximo $T_1^2/12$ em $t=0$	59
Figura 4 – Curvas de evolução R em função da aceleração e da frequência do detector. .	61
Figura 5 – Assimetria na dependência de R em α e β	61

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Efeito Casimir	11
1.2	O efeito Unruh	13
1.3	Estrutura do trabalho	14
2	A QUANTIZAÇÃO E O VÁCUO	16
2.1	Quantização canônica do campo escalar no espaço-tempo plano	16
2.2	Energia do vácuo: Efeito Casimir	20
2.3	Quantização do campo escalar em espaço-tempo curvo	22
2.3.1	Transformações de Bogoliubov e número de partículas	23
2.4	O Efeito Unruh	25
2.4.1	Espaço de Rindler	25
2.4.2	Relação entre os Coeficientes de Bogoliubov	26
2.4.3	O detector de Unruh-Dewitt	28
3	EFEITO CASIMIR EM CAMPO GRAVITACIONAL FRACO	32
3.1	Definição do problema	32
3.1.1	Exemplo: correção de “primeira ordem”	33
3.1.2	Obtenção dos modos em segunda ordem	35
3.2	Resultados anteriores	36
3.2.1	Geometria de campo fraco usual	36
3.2.2	Extensões na métrica	37
3.3	Revisitando o Efeito Casimir em Campo Gravitacional Fraco	38
3.3.1	Teste de consistência em primeira ordem	38
3.3.2	Expansão das soluções axiais	39
3.3.3	Espaço-tempo esfericamente simétrico geral	40
3.4	Solução alternativa: método de Schwinger	41
3.5	Princípio da equivalência e o peso do vácuo	44
4	EFEITO UNRUH E TEMPERATURA: DISTINGUÍVEIS?	47
4.1	Análise do Efeito Unruh pela dinâmica de sistema quântico aberto- Evolução da densidade de estados	47
4.1.1	Equação Mestra	48
4.1.1.1	Equação de Kossakowski-Lindblad	50
4.1.2	Evolução da densidade de estados para uma partícula	51

4.1.3	Caso com 2 partículas: Geração de emaranhamento	55
4.2	Densidade de estados assintótica com temperatura de fundo não-nula . .	58
5	CONCLUSÃO	63
	APÊNDICE A – OBTENÇÃO DA ENERGIA DE CASIMIR PELO MÉTODO	
	DE SCHWINGER	65
	REFERÊNCIAS	68

1 INTRODUÇÃO

O conhecimento fundamental acerca das interações físicas que conhecemos hoje é dado pela teoria quântica de campos e seu modelo padrão. Tal modelo unifica com sucesso a descrição quântica das forças eletromagnética, fraca e forte. No entanto, o mesmo êxito não é alcançado quando tentamos quantizar a gravidade por meios convencionais. Esse problema representa talvez a maior barreira no estudo atual da Física de altas energias, e sua discussão já perdura por várias décadas. Existem algumas teorias proeminentes que se propõem a resolver o problema, como a Teoria de Cordas ou a Gravitação Quântica de Laço, no entanto a ausência de evidências experimentais impede que um consenso e maior avanço sejam alcançados.

Uma proposta menos ambiciosa, que servirá como o formalismo base deste trabalho, consiste em considerar a quantização dos campos em uma geometria de fundo clássica. Ou seja, desconsideraremos os efeitos quânticos sobre o campo gravitacional, em vez disso iremos focar na influência da curvatura espaço-temporal nos outros campos. Esse direcionamento permite uma análise mais fundamental baseada nos princípios bem estabelecidos da quântica e relatividade geral, devendo representar uma aproximação válida para física fora da escala de Planck [1], onde uma teoria completa de Gravitação quântica seria mandatória para análise dos problemas.

Tal abordagem possui alguns problemas teóricos inerentes, como por exemplo, o fato de que pelo princípio da equivalência, o acoplamento da gravidade com o próprio graviton deve ser tão forte quanto entre o graviton e outras partículas, sugerindo que em qualquer processo quântico envolvendo a gravidade, não poderemos ignorar a auto-interação gravitacional[2]. Não nos aprofundaremos aqui nestes problemas e nos métodos propostos para contorná-los, em vez disso o leitor interessado numa abordagem mais detalhada pode consultar[3,4] .

O foco deste trabalho será o estado de vácuo, que por simplicidade tomaremos como sendo de um campo escalar real e sem massa. Iremos discutir dois fenômenos distintos, porém diretamente ligados a natureza do vácuo quântico: o efeito Casimir[5] e o efeito Davies-Unruh [6][7], ou simplesmente efeito Unruh. Discorreremos brevemente sobre esses efeitos a seguir, enquanto as descrições matemáticas e resultados propostos estarão nos próximos capítulos.

1.1 Efeito Casimir

O efeito Casimir consiste originalmente na geração de uma força de atração entre duas placas paralelas quando há um vácuo eletromagnético na região entre elas. A explicação do fenômeno se dá, de forma grosseira, pela perturbação das flutuações de vácuo devido as

condições de contorno nas superfícies condutoras. Devido ao caráter bastante geral do fenômeno[8], a configuração original pode ser estendida para outros tipos de campos, superfícies e tipos de condições de contorno.

Embora seja um fenômeno de origem puramente quântica, o efeito Casimir pode ser observado em escala macroscópica. No entanto, mesmo aparecendo num arranjo experimental aparentemente simples, existem várias complicações que tornam complexo o processo de obtenção de medidas precisas, como a deformações das superfícies nas pequenas escalas de separação usadas(da ordem de micrômetros). As primeiras medidas experimentais com boa sensibilidade foram obtidas em [9](~5%) e [10](~1%), enquanto avanços mais modernos podem ainda ser encontrados como em [10–15].

A discussão sobre o efeito Casimir proposta neste trabalho é baseada no modelo de F. Sorge[16], onde o efeito de um campo gravitacional fraco sobre a energia de vácuo é obtido perturbativamente em primeira e segunda ordem no parâmetro M/R (massa e coordenada radial da solução de Schwarzschild ou análogos). Em primeira ordem, a análise é trivial e corresponde apenas a termos constantes na métrica que podem ser eliminados por transformações de coordenadas, já em segunda ordem, uma pequena correção gravitacional é obtida. Esse cálculo serviu ainda de base para algumas extensões propostas por outros autores, como considerações de geometria de fundo com gravidade \mathcal{R}^2 [17], teorias de gravidade estendida[18], dentre outros[19–21].

Em [22] mostramos uma incoerência no cálculo original, levando a um resultado diferente e relativamente inesperado. Demonstramos que um truque de cálculo usado em [16] para simplificar o algebrismo em segunda ordem leva ao resultado errado se aplicado por exemplo na obtenção da energia de Casimir em primeira ordem. Realizando o cálculo de forma mais direta, sem o atalho mencionado, encontramos que a energia própria de Casimir definida em [16] não possui correção gravitacional em ordem de $[M/R]^2$, com um resultado análogo sendo válido para uma métrica mais geral equivalente as extensões propostas.

Em [23], o autor reobtem seu resultado original usando o método alternativo de Schwinger[24, 25]. Em [26] demonstramos que o cálculo foi realizado de forma não covariante, corrigindo esse problema encontramos novamente o resultado de [22], estendemos ainda a análise para uma classe mais geral de geometrias de fundo[27]. Uma observação pertinente¹ se dá no fato de que, apesar de na ordem de aproximação tomada as componentes da métrica dependerem das coordenadas, as componentes do tensor de Riemann são nulas se limitadas à mesma ordem de aproximação. No entanto, o fato desse tensor ser nulo não implica necessariamente na ausência de efeitos na energia do vácuo. Como contraexemplo podemos citar o próprio efeito Unruh, que acontece em um background plano. Portanto, maior estudo é ne-

¹contribuição de um referee anônimo.

cessário para esclarecer este ponto, bem como comparação com a vasta literatura já disponível sobre o estudo da energia de vácuo em geometrias não triviais, como [28–59] e aqueles citados anteriormente.

A discussão sobre a energia de vácuo em espaço-tempo curvo, em particular no caso de gravidade fraca, é de especial importância em possíveis futuros experimentos de “peso do vácuo”, como o descrito em [60]. Tal discussão concerne à maneira como flutuações de vácuo gravitam, obedecendo ao princípio da equivalência como usual (como discutido em [53–56]), ou de forma anômala (em §3.5 apontamos que nossos resultados de fato obedecem ao princípio da equivalência, estando de acordo com outros trabalhos na literatura). O experimento proposto em [60] também levanta a possibilidade de uma medição direta de efeitos gravitacionais sobre o campo quântico. Embora a influência gravitacional em sistemas quânticos já tenha sido observada no experimento de interferometria de nêutrons sob ação de um potencial gravitacional Newtoniano[61], uma medição direta no contexto de efeitos de vácuo será algo de fato admirável.

1.2 O efeito Unruh

O número de partículas em um determinado estado quântico é um invariante de Lorentz, por conseguinte, quaisquer observadores inerciais devem concordar, por exemplo, em relação ao estado de vácuo da teoria. Noções básicas de teoria de campos podem nos levar a pensar, portanto, que o número de partículas é uma grandeza fundamental e completamente independente de referencial, o que está equivocado.

Como mostrado por Unruh[7], um observador acelerado, mesmo em espaço-tempo plano, irá observar excitações no estado de vácuo definido em um referencial inercial. Especificamente, para um observador com aceleração própria constante, o vácuo inercial será percebido como uma distribuição termal de partículas, cuja temperatura será proporcional à aceleração.

O análogo gravitacional desse fenômeno, o efeito Hawking[62], explica a emissão térmica gerada em horizontes de Schwarzschild. Tal resultado formidável forneceu base à efeitos já esperados na termodinâmica de buracos negros, cuja coerência era questionada devido ao fato de classicamente não esperarmos qualquer tipo de emissão nos horizontes de eventos. O efeito Hawking, assim como o efeito Unruh, revelam uma conexão intrínseca entre a quântica, relatividade geral e termodinâmica. O estabelecimento desses resultados permanece até hoje como principal base e motivação para o estudo da propagação de campos em espaços curvos, sendo a compreensão dessa conexão fundamental uma esperança de se obter indícios mais concretos daquilo que seria uma teoria mais fundamental capaz de descrever fenômenos quânticos e gravitacionais.

O foco da nossa discussão sobre o efeito Unruh será a distinguibilidade entre a

termalização não inercial e um banho térmico comum. A motivação inicial se dá nas análises de [63–65], que apontam que não é possível distinguir os dois efeitos em um experimento puramente termodinâmico levando em consideração apenas valores esperados quadráticos no campo, que como veremos mais adiante, são os que influenciam no espectro de detecção para um detector de partículas acelerados do tipo Unruh-Dewitt. Já em [66], várias grandezas físicas são analisadas, com o resultado sugerido de que há fatores de distinção.

Usaremos como base uma reanálise moderna do efeito Unruh proposta por [67], onde o detector acelerado é descrito como um sistema quântico aberto, com a evolução de sua densidade de estados sendo regida por uma equação mestra markoviana[68, 69]. Esse formalismo permite uma análise mais detalhada do problema, bem como o estudo de geração de emaranhamento entre dois detectores viajando paralelamente. Devido à riqueza da análise da proposta várias extensões já foram feitas na literatura, como exemplos [70–79].

Trabalharemos com o caso onde o detector viaja imerso não no vácuo, mas sim num estado de equilíbrio térmico do campo[80], problema que foi abordado anteriormente fora do formalismo de sistema quântico aberto, em [65, 81, 82]. Como será mostrado, os gráficos obtidos sugerem uma pequena assimetria nas dependências entre a temperatura comum e de Unruh nos estados assintóticos obtidos. Resultados similares reforçando a diferença foram inferidos previamente na literatura no estudo dos casos alternativos onde considera-se, por exemplo, distância finita entre dois detectores com trajetórias paralelas[70] ou a presença de uma superfície refletora[71]. Vale ressaltar que embora o formalismo seja bastante diferente do usual, as quantidades obtidas ainda dependem de valores esperados quadráticos no campo, indo portanto contra os resultados de [63–65] citados anteriormente. O caso de temperatura finita é importante ainda do ponto de vista fenomenológico, visto que dada a pequena escala do efeito Unruh, a temperatura de fundo, mesmo quando muito baixa, deve dar uma contribuição de ordem similar ou superior à aceleração.

Não abordamos aqui a importância de considerar por exemplo, descrições mais precisas com efeitos não markovianos de memória como em [74], havendo assim ainda espaço para estender a discussão e obter um teste mais definitivo.

1.3 Estrutura do trabalho

O restante deste trabalho estará dividido em três capítulos além da conclusão. No capítulo §2 faremos uma exposição concisa dos conceitos por trás da quantização do campo escalar em espaço plano e curvo, bem como uma rápida introdução ao efeito Casimir e ao efeito Unruh. Já no capítulo 3 Trabalharemos com o efeito Casimir em campo gravitacional fraco. No capítulo §4 faremos a discussão de efeito Unruh em temperatura finita descrita previamente em §1.2, uma observação especial se deve sobre seu conteúdo pelo fato de que uma introdução

relativamente longa em comparação com os resultados originais é dada. Isto se deve pelo fato do formalismo ser bastante diferente do padrão utilizado em física de altas energias, portanto uma revisão um pouco mais extensa pode ser necessária para situar o leitor. Por fim, em §5 apresentaremos nossas conclusões e considerações finais. Apresentamos ainda um apêndice §A, explicitando a obtenção da energia de Casimir pelo método de Schwinger no caso usual de espaço-tempo plano.

2 A QUANTIZAÇÃO E O VÁCUO

Neste capítulo apresentaremos uma revisão concisa dos fundamentos da quantização canônica de um campo escalar real (por questão de instrutividade começaremos com o campo massivo mas depois descartaremos o termo de massa por praticidade nas aplicações), bem como uma introdução rápida aos efeitos Casimir e Unruh. Tal revisão tem por objetivo oferecer uma compreensão básica ao leitor menos familiarizado com os temas, assim como tornar mais completa a abordagem geral do trabalho.

Diferentemente dos próximos capítulos que apresentarão discussões mais modernas, o conteúdo deste consiste em uma revisão de temas mais antigos e de maior consenso literário. Dentro da vasta literatura, o leitor interessado em uma abordagem mais detalhada e geral, pode se referir por exemplo, às obras [83](para teoria quântica de campos), e [3, 4](para quantização de campos em espaços curvos e Efeito Unruh). Enquanto a abordagem mais direta fornecida aqui segue fortemente de [84], com alguns elementos baseados em [3, 85].

2.1 Quantização canônica do campo escalar no espaço-tempo plano

Seja denotado por $\phi(x)$ um campo escalar real definido no espaço-tempo com elemento de linha:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

Onde $\eta \equiv \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ (essa convenção de sinais será mantida durante a maior parte do trabalho) e $x \equiv (x^0 = t, x, y, z)$. Podemos construir uma ação invariante para este campo dada por

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) \right], \quad (2.2)$$

em que m é um parâmetro real e $V(\phi)$ uma função escalar do campo. O primeiro termo representa a dinâmica e garante soluções tipo onda para as equações de movimento, o segundo é o termo de massa que é identificada com o parâmetro m , por fim $V(\phi)$ é um potencial de interação que desconsideraremos neste trabalho.

Tomando $V(\phi)=0$, a aplicação do princípio variacional leva a equação de Klein-Gordon

$$(\square - m^2)\phi = 0, \quad (2.3)$$

Onde $\square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$.

É conveniente definir uma solução geral a partir de uma expansão em modos ortogonais. Sejam ϕ_1 e ϕ_2 duas soluções da equação 2.3, podemos definir o produto escalar como

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int d^3x (\phi_1 \partial_0 \phi_2^* - \phi_2^* \partial_0 \phi_1). \quad (2.4)$$

É fácil ver que o produto definido acima é conservado. Expressemos então os modos normais como

$$\phi_k = \frac{1}{2\omega(2\pi)^{3/2}} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \quad (2.5)$$

onde $\omega^2 - \mathbf{k}^2 = m^2$ e $\omega > 0$ (veremos que os valores de ω estão intrinsecamente ligados a energia das partículas, que no caso livre exigiremos que sejam positivas). Temos

$$(\phi_k, \phi_{k'}) = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (2.6)$$

Uma solução geral real (hermitiana) em termos destes modos pode ser escrita como

$$\phi(x) = \int d^3k (\hat{a}(k) \phi_k + \hat{a}^\dagger(k) \phi_k^*). \quad (2.7)$$

Seja $\Pi = \partial_0 \phi$, a quantização do campo se dará tomando as relações de comutação canônicas

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] &= 0, \\ [\Pi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{x}', t)] &= 0, \\ [\phi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{x}', t)] &= i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (2.8)$$

que para os operadores a_k e a_k^\dagger torna-se

$$\begin{aligned} [\hat{a}(k), \hat{a}(k')] &= 0, \\ [\hat{a}^\dagger(k), \hat{a}^\dagger(k')] &= 0, \\ [\hat{a}(k), \hat{a}^\dagger(k')] &= i\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Os operadores \hat{a}_k e \hat{a}_k^\dagger desempenham um papel análogo ao dos operadores criação e destruição do oscilador harmônico quântico. Para obter uma interpretação mais intuitiva da construção do espaço de estados consideraremos o caso da quantização em uma caixa cúbica de volume L^3 com condições de contorno periódicas nas faces. Assim, os modos ortonormais (2.5) serão reescritos como

$$\tilde{\phi}_k = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \quad (2.10)$$

onde os vetores de onda \vec{k} agora assumem valores discretos

$$k_i = \frac{n_i \pi}{L}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.11)$$

No caso discreto os operadores de criação e destruição obedecerão às condições análogas à (2.9),

com

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = i\delta_{k,k'} \quad (2.12)$$

e os outros comutadores nulos. Similarmente a expansão do campo se dará considerando um somatório no lugar da integral em (2.7).

Consideremos então o Hamiltoniano

$$H = \int d^3x (\dot{\phi}\Pi - \mathcal{L}) = \int d^3x \frac{1}{2} [\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2]. \quad (2.13)$$

Usando as expressões 2.7 (na forma discreta) e 2.12 podemos escrever o Hamiltoniano como (no caso $m = 0$)

$$H = \sum_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) \omega_k. \quad (2.14)$$

O operador $\hat{n}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ é denominado operador número, em analogia clara aos níveis de energia do oscilador harmônico. O segundo termo nos parênteses em 2.14 pode ser removido adicionando um termo de potencial constante. Assim, redefiniremos nosso hamiltoniano como

$$H = \sum_k (\hat{n}_k \omega_k). \quad (2.15)$$

Analogamente, componentes espaciais do quadrivetor momento-energia são dadas por

$$\mathbf{P} = \sum_k (\hat{n}_k \mathbf{k}). \quad (2.16)$$

Baseado nesses conceitos construiremos um espaço de estados quânticos descrito pelo conteúdo de energia-momento do campo. Seja $|0\rangle$ um vetor do espaço de estados tal que

$$H|0\rangle = \mathbf{P}|0\rangle = 0, \quad (2.17)$$

a esse estado denominaremos vácuo. Seja $|\Psi\rangle$ um auto-estado do Hamiltoniano com autovalor $E = \sum_k (n_k \omega_k)$, podemos mostrar que

$$H\hat{a}_{k'}|\Psi\rangle = (E - \omega_{k'})\hat{a}_{k'}|\Psi\rangle, \quad (2.18)$$

e similarmente

$$H\hat{a}_{k'}^\dagger|\Psi\rangle = (E + \omega_{k'})\hat{a}_{k'}^\dagger|\Psi\rangle. \quad (2.19)$$

A aplicação dos operadores \hat{a}_k e \hat{a}_k^\dagger em $|\Psi\rangle$ corresponde à destruição/criação de um quanta(partículas) com energia ω .

Representaremos então um ket caracterizado por conjuntos de n_{k_i} partículas com momentum \mathbf{k}_i por

$$|n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, n_{k_j}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{k_1}! n_{k_2}! \dots n_{k_j}!}} \hat{a}_{k_1}^\dagger \hat{a}_{k_2}^\dagger \dots \hat{a}_{k_j}^\dagger |0\rangle, \quad (2.20)$$

denominamos o espaço vetorial formado por esses estados como espaço de Fock. A aplicação dos operadores de criação e destruição nos vetores do espaço de Fock é dada por

$$\hat{a}_{k_i}|n_{k_i}\rangle = \sqrt{n-1}|(n-1)_{k_i}\rangle \quad , \quad \hat{a}_{k_i}^\dagger|n_{k_i}\rangle = \sqrt{n}|(n+1)_{k_i}\rangle. \quad (2.21)$$

O limite contínuo das expressões pode ser reobtido tomando

$$\begin{aligned} \sum_k &\rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k, \\ \hat{a}_k &\rightarrow V^{-1/2}(2\pi)^{3/2}\hat{a}(k), \end{aligned} \quad (2.22)$$

de modo que o (operador) número total de excitações $N = \sum_k \hat{n}_k$ é dado no contínuo por

$$N = \int d^3k(\hat{n}(k)). \quad (2.23)$$

Ou seja, os números de ocupação n são distribuições no espaço de Fourier, e a definição da ação dos operadores escada no espaço de estados se torna menos intuitiva nesse caso.

Devemos lembrar que fisicamente não faz sentido atribuir frequências exatas a partículas quânticas livres, mas sim descrevê-las por pacotes de onda. No entanto, as expressões (2.20,21) são usadas em alguns livros textos sem a introdução da notação discreta por questão de simplicidade.

Antes de passarmos para a discussão em espaços tempos curvos é importante notar um aspecto importante, consideremos o estado $|0\rangle$, temos que para qualquer k

$$\hat{a}_k|0\rangle = 0. \quad (2.24)$$

Definição para o vácuo análoga à 2.17. Suponhamos que em vez disso trabalhemos em um novo sistema de coordenadas relacionado ao anterior por uma transformação(ortocrona e própria) de lorentz Λ . Teríamos então modos definidos analogamente com

$$k_{\mu'} = \Lambda_{\mu'}^\mu k_\mu, \quad (2.25)$$

pelas propriedades do grupo(próprio e ortocrono) de Lorentz temos que se $\omega > 0$, então $\omega' > 0$.

Os modos 2.5 são denominados modos de frequência positiva por obedecerem a relação $\partial_t \phi_k = -i\omega_k \phi_k$, com $\omega_k > 0$. Analogamente ϕ_k^* são de "frequência negativa". A expressão 2.7 representa uma expansão do campo ϕ em modos de frequência positiva e negativa, tal separação influencia diretamente na definição dos operadores de criação e destruição, e portanto, na definição de vácuo. Observemos que

$$\phi'_{k'} = \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \phi_k, \quad (2.26)$$

Implica em

$$\hat{a}_k \propto \hat{a}'_{k'}, \quad (2.27)$$

E portanto os dois referenciais concordam no mesmo estado de vácuo

$$\hat{a}'_{k'}|0\rangle = \hat{a}_k|0\rangle = 0. \quad (2.28)$$

2.2 Energia do vácuo: Efeito Casimir

Voltemos a equação (2.14), consideremos o termo previamente descartado (em notação contínua)

$$E_{vac} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{\omega_k}{2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \int d^3k \frac{\omega_k}{2}. \quad (2.29)$$

Pela expressão anterior podemos interpretar esse termo como uma densidade constante de energia no espaço. Nota-se que o carácter oscilatório das soluções livres é mantido através da frequência ω_k , a energia de vácuo assemelha-se à soma de modos fundamentais de infinitos osciladores harmônicos. Tal comportamento é denotado por flutuações de vácuo.

Em geral, é esperado que tal termo não tenha influência no cálculo das grandezas físicas, sendo tratado como simples potencial constante de fundo que pode ser eliminado somando um termo constante ao Hamiltoniano do sistema. No entanto, na presença de condições de contorno não usuais, como por exemplo aquelas que uma superfície condutora impõe sobre um campo eletromagnético, o tratamento da energia das flutuações de vácuo torna-se não trivial.

Consideremos o caso de duas placas paralelas de superfície A e separação L , tal que $A \gg L^2$. Suponhamos que tais placas impõem condições de contorno de Dirichlet ($\phi = 0$ na superfície das placas) sobre o campo escalar.

Consideraremos que as placas estão dispostas ortogonalmente ao eixo z . As soluções normalizadas de 2.3 obedecendo as condições $\phi(z=L) = \phi(z=0) = 0$ são dadas por

$$\phi_{n,k} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\omega_{n,k}L}} \sin(\tilde{n}z) e^{i(\omega_{n,k}t - kx_{\perp})}, \quad (2.30)$$

onde k e x_{\perp} referem-se somente as coordenadas espaciais ortogonais ao eixo z , $\tilde{n} = n\pi/L$ e

$$\omega_{n,k}^2 = \tilde{n}^2 + k^2. \quad (2.31)$$

Com isso, a expressão (2.29) se torna:

$$E_{vac} = \frac{A}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int d^2k \frac{\omega_{n,k}}{2}, \quad (2.32)$$

onde restauramos parcialmente a notação contínua nas direções paralelas ao plano $\sum_{k_{x,y}} \rightarrow$

$A/(2\pi)^2 \int d^2k$, analogamente poderíamos obter o valor esperado do Hamiltoniano (2.13) à partir dos modos (2.30). Tanto a expressão anterior como a 2.29 são divergentes, no entanto veremos que pode ser dado sentido físico a 2.32 através de um processo de renormalização.

A grosso modo isso é feito ao subtrair-se da expressão os polos não físicos que correspondem à energia de fundo puramente divergente. Usaremos aqui um processo bastante simplificado chamado de regularização por função zeta de Riemann(veja [86]), onde a obtenção da energia finita se dá por meio de uma continuação analítica, não ficando explícito o processo de subtração (mais precisamente, no processo de regularização por função zeta o contratermo de energia extrínseca é nulo [83]).

Introduzamos no integrando da (2.32) um fator $\omega^{-\nu}$

$$E_{vac}^{(\nu)} = \frac{A}{2(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int d^2k \omega_{n,k}^{1-\nu}, \quad (2.33)$$

A integral acima pode ser facilmente resolvida expressando k em coordenadas polares

$$\begin{aligned} E_{vac}^{(\nu)} &= \frac{A}{8\pi^2} \sum_n \int dk dk_{\theta} k (k^2 + \tilde{n}^2)^{(1-\nu)/2} \\ &= \frac{A}{4\pi} \frac{1}{\nu-3} \sum_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^{3-\nu} \\ &\cong \frac{A}{4\pi} \frac{1}{\nu-3} \left(\frac{\pi}{L}\right)^{3-\nu} \zeta(2\nu-3). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Na passagem da segunda para a terceira linha devemos entender que é feita a continuação analítica do somatório para a função zeta. Para recuperarmos a energia do vácuo renormalizada basta restaurar o parâmetro original $\nu = 0$ e usar que

$$\zeta(-3) = \frac{1}{120}. \quad (2.35)$$

Também dividiremos o resultado obtido pelo volume espacial $V = AL$ obtendo a densidade volumétrica de energia(isso será mais intuitivo quando tratarmos do caso curvo)

$$\varepsilon = \frac{E_{vac}^{(0)}}{V} = -\frac{\pi^2}{1440L^4}. \quad (2.36)$$

A equação acima demonstra que há a geração de uma força atrativa entre as placas, que no caso escalar (para o caso eletromagnético o resultado é multiplicado por um fator de 2 referente às polarizações) tem magnitude por unidade de área das placas

$$p_{cas} = -A^{-1} \frac{\partial E_{cas}}{\partial L} = -\frac{\pi^2}{480L^4}. \quad (2.37)$$

Tal interação pode ser interpretada a grosso modo, como um gradiente das pressões geradas pelos modos fora e dentro da cavidade(figura 1), que vibram de forma diferente.

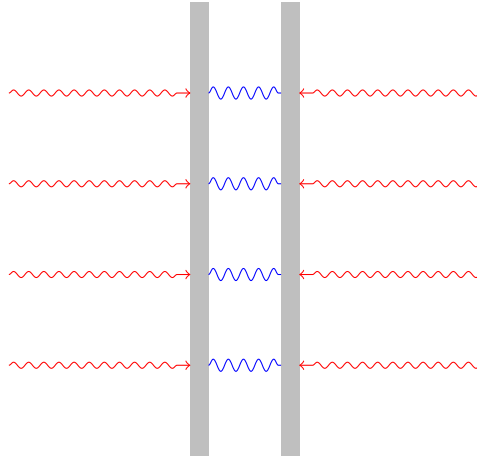


Figura 1: Perturbação das flutuações de vácuo na presença de placas condutoras. A diferença de pressão entre os modos em azul e vermelho gera uma força de atração entre as placas dependente da separação entre elas.

A exposição do efeito Casimir que fizemos nesta subseção é apenas uma introdução extremamente resumida e desprovida de maiores detalhes, mas será suficiente para entendimento inicial da abordagem do capítulo a seguir. Para uma rica análise de diversos aspectos mais profundos do efeito Casimir pode-se consultar por exemplo [87, 88].

2.3 Quantização do campo escalar em espaço-tempo curvo

A generalização do formalismo anterior se dá de maneira relativamente simples. A ação agora é dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} D_\mu \phi D_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \xi \mathcal{R} \phi^2 \right], \quad (2.38)$$

onde D_μ indica derivada covariante e ξ é a constante de acoplamento entre o campo e \mathcal{R} é o escalar de curvatura. No presente texto consideraremos o esquema de acoplamento mínimo $\xi = 0$. Variação da ação em relação ao campo ϕ . Temos então a equação de movimento

$$\square \phi - m^2 \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi] - m^2 \phi = 0. \quad (2.39)$$

Podemos definir soluções ortonormais f_i tais que

$$(f_i, f_j) = \delta_{ij} \quad , \quad (f_i^*, f_j^*) = -\delta_{ij}, \quad (f_i, f_j^*) = 0 \quad (2.40)$$

em relação ao produto interno

$$(f_i, f_j) = -i \int d\Sigma \sqrt{g_\Sigma} n^\mu (f_i \partial_\mu f_j^* - f_j^* \partial_\mu f_i), \quad (2.41)$$

onde Σ é uma hipersuperfície tipo espaço com métrica induzida g_Σ e vetor normal unitário n^μ . A solução geral pode então ser expressa (em notação compacta)

$$\phi = \sum_i (\hat{a}_i f_i + \hat{a}_i^\dagger f_i^*). \quad (2.42)$$

Note que os índices usados para especificar os modos estão expressos esquematicamente de forma discreta, mas podem ser facilmente generalizados para o caso contínuo.

Seja o momentum conjugado ao campo dado por

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_0 \phi)} = -\sqrt{-g} D^0 \phi. \quad (2.43)$$

As relações de comutações canônicas são idênticas à 2.8, assim como as relações de comutação para os operadores de criação e destruição. Deste modo podemos montar analogamente um espaço de Fock

$$|n_1, n_2 \dots n_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots n_j!}} \hat{a}_{k_1}^\dagger \hat{a}_{k_2}^\dagger \dots \hat{a}_{k_j}^\dagger |0\rangle_f, \quad (2.44)$$

onde o vácuo $|0\rangle_f$ é definido em relação aos modos f_i .

2.3.1 Transformações de Bogoliubov e número de partículas

Consideremos um segundo conjunto de modos ortonormais g_i tal que

$$\phi = \sum_i (\hat{b}_i g_i + \hat{b}_i^\dagger g_i^*) \quad (2.45)$$

Com vácuo e espaço de Fock definidos

$$\hat{b}_i |0\rangle_g = 0, \quad (2.46)$$

$$|n_1, n_2 \dots n_j\rangle_g = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots n_j!}} \hat{b}_{k_1}^\dagger \hat{b}_{k_2}^\dagger \dots \hat{b}_{k_j}^\dagger |0\rangle_g. \quad (2.47)$$

Denominam-se *transformações de Bogoliubov* a expansão de um conjunto de modos em relação ao outro

$$\begin{aligned} f_i &= \sum_j (\gamma_{ij} g_j + \lambda_{ij} g_j^*), \\ g_i &= \sum_j (a_{ij} f_j + \beta_{ij} f_j^*). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Usando as condições de ortonormalidade temos

$$\begin{aligned} a_{ij} &= (g_j, f_i) = \gamma_{ji}^*, \\ \beta_{ij} &= (g_j, f_i^*) = -\lambda_{ji}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

e

$$\sum_k (\gamma_{ik} \gamma_{jk}^* - \lambda_{ik} \lambda_{jk}^*) = \delta_{ij}, \quad (2.50)$$

$$\sum_k (\gamma_{ik} \lambda_{jk} - \lambda_{ik} \gamma_{jk}) = 0. \quad (2.51)$$

Equacionando 2.42 , 2.45 e notando que

$$\hat{a}_i = (\phi, f_i) \quad , \quad \hat{b}_i = (\phi, g_i), \quad (2.52)$$

temos

$$\hat{a}_i = \sum_j (a_{ji} \hat{b}_j + \beta_{ji}^* \hat{b}_j^\dagger), \quad (2.53)$$

e

$$\hat{b}_i = \sum_j (a_{ij}^* \hat{a}_j - \beta_{ij}^* \hat{a}_j^\dagger). \quad (2.54)$$

Em posse destas relações, calculemos por exemplo, o valor esperado do número de partículas $n_{i(g)}$ no estado $|0\rangle_f$:

$$\begin{aligned} \langle 0|_f n_{i(g)} |0\rangle_f &= \langle 0|_f \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i |0\rangle_f \\ &= \langle 0|_f \sum_j \sum_k (a_{ij} \hat{a}_{ij}^\dagger - \beta_{ij} \hat{a}_j) (a_{ik}^* \hat{a}_{ij} - \beta_{ik}^* \hat{a}_j^\dagger) |0\rangle_f \\ &= \sum_j |\beta_{ij}|^2. \end{aligned} \quad (2.55)$$

A expressão acima mostra que a não ser que os coeficientes β_{ij} sejam todos nulos, o vácuo definido a partir dos modos f apresenta partículas quando medido em relação aos modos g .

Nosso conceito intuitivo de partícula na teoria quântica está intrinsecamente ligado à dualidade onda-partícula. No espaço de minkowski temos um conjunto “natural” de modos(2.5) definidos globalmente e com frequências positivas obedecendo $\partial_t \phi_k = -i\omega_k \phi_k$ ($\omega > 0$), sendo t o tempo próprio do observador. assim como um conceito global de referenciais inerciais que, como discutido anteriormente, compartilham do mesmo vácuo e medidas de números de partículas(como veremos adiante, o mesmo não é válido para observadores não inerciais).

Em coordenadas generalizadas, não há motivo a priori para esperar que essas condições sejam satisfeitas. Em espaços-tempos estáticos, por exemplo, é possível separar soluções do

tipo $e^{-i\omega t} \phi_i(\mathbf{x})$ (com t proporcional ao tempo próprio), que servem ao nosso conceito intuitivo de número de partículas, mas em geral tais modos não serão definidos globalmente. Vemos então, que o número de partículas torna-se uma noção dependente de referencial (ou de quais modos “naturais” usamos para construir o espaço de Fock).

2.4 O Efeito Unruh

A seguir discutiremos a observação de partículas no vácuo de Minkowski por um observador acelerado: O Efeito Unruh.

2.4.1 Espaço de Rindler

Nosso objetivo é calcular o número de partículas medido por um observador acelerado num vácuo de Minkowski definido a partir dos modos 2.5. Inicialmente precisamos de um sistema de coordenadas natural para esse observador. Por simplicidade trabalharemos com um campo sem massa $m = 0$ e $(1 + 1)$ dimensões.

O elemento de linha é dado por:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 \quad (2.56)$$

enquanto a trajetória de um observador com aceleração própria uniforme a pode ser descrita por

$$t(\tau) = \frac{1}{a} \sinh(a\tau), \quad (2.57)$$

$$x(\tau) = \frac{1}{a} \cosh(a\tau), \quad (2.58)$$

que corresponde a uma trajetória hiperbólica no espaço-tempo. A estratégia é montar um sistema de coordenadas (χ, ρ) , tal que a coordenada tipo espaço ρ assuma valores constantes ao longo de trajetórias hiperbólicas e a coordenada tipo tempo χ seja proporcional ao tempo próprio. Uma escolha possível é dada por

$$t(\chi, \rho) = \frac{1}{a} e^{a\rho} \sinh(a\chi), \quad (2.59)$$

$$x(\chi, \rho) = \frac{1}{a} e^{a\rho} \cosh(a\chi), \quad (2.60)$$

onde χ, ρ são as coordenadas de Rindler, que assumem valores $-\infty < \chi, \rho < \infty$ e cobrem toda a região $x > |t|$ ou “Right Rindler Wedge”(RRW). O elemento de linha é dado então por

$$ds^2 = e^{2a\rho} (-d\chi^2 + d\rho^2). \quad (2.61)$$

Observemos que

$$\partial_\chi = a(t\partial_x + x\partial_t) \quad (2.62)$$

corresponde ao vetor de Killing referente a um boost na direção x . A “superfície” $x = |t|$ é um horizonte de Killing para o RRW. A equação de campo nas coordenadas de Rindler é dada por

$$\square\phi = e^{-2a\rho}(-\partial_\chi^2 + \partial_\rho^2)\phi = 0. \quad (2.63)$$

Enquanto os modos ortonormais são dados por

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}} e^{-i(\omega_k\chi - k\rho)}. \quad (2.64)$$

Na região RRW, os modos f_k e f_k^* formam um conjunto completo de soluções.

Similarmente podemos construir o “Left Rindler Wedge”:

$$t(\chi, \rho) = -\frac{1}{a} e^{a\rho} \sinh(a\chi), \quad (2.65)$$

$$x(\chi, \rho) = -\frac{1}{a} e^{a\rho} \cosh(a\chi). \quad (2.66)$$

Com elemento de linha idêntico a 2.61, cobrindo a região $x < -|t|$. E com modos ortonormais (note que ∂_n é dirigido ao passado no LRW, assim modos de frequência positiva devem obedecer $\partial_t g_k = i\omega g_k, \omega > 0$)

$$g_k = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}} e^{i(\omega_k\chi + k\rho)}. \quad (2.67)$$

Definindo $g_k = 0$ em RRW e $f_k = 0$ em LRW, os modos g, f, g^* e f^* formam um conjunto completo definido globalmente (é possível construir extensões analíticas para as regiões restantes).

2.4.2 Relação entre os Coeficientes de Bogoliubov

Expressemos os modos de Rindler 2.64 e Minkowski 2.5 em funções das mesmas coordenadas. Note que no RRW

$$\chi + \rho = \frac{1}{a} \ln[a(t+x)], \quad (2.68)$$

$$\rho - \chi = \frac{1}{a} \ln[a(-t+x)]. \quad (2.69)$$

Consideremos o caso $k, k' > 0$, temos para os modos Rindler e Minkowski respectivamente

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}} \exp\left[\frac{i\omega_k}{a} \ln(-au)\right], \quad (2.70)$$

$$\phi_k = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_{k'}}} \exp(-i\omega_{k'}u), \quad (2.71)$$

onde $u = t - x$. Similarmente para $k, k' < 0$

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}} \exp\left[\frac{i\omega_k}{a} \ln(av)\right], \quad (2.72)$$

$$\phi_{k'} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_{k'}}} \exp(-i\omega_{k'}v), \quad (2.73)$$

onde $v = t + x$. Expressando os dois conjuntos de modos em função das coordenadas u, v , vemos que modos “right-moving” ($k > 0$) e “left-moving” ($k < 0$) são independentes, já que u e v são coordenadas independentes.

Assim modos $f_{k>0}$ podem ser expressos em função apenas de modos $\phi_{k'>0}$ (e seus conjugados). Consideremos a expansão em frequências dos modos right-moving de Rindler em função dos modos de Minkowski

$$f_k = f_\omega = \int_0^\infty d\omega' (a_{\omega\omega'} \phi_{\omega'} + \beta_{\omega\omega'} \phi_{\omega'}^*), \quad (2.74)$$

A expansão assemelha-se a uma transformação de Fourier

$$\begin{aligned} f_\omega(u) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\omega' e^{-i\omega'u} \tilde{f}_\omega(\omega') \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega' e^{-i\omega'u} \tilde{f}_\omega(\omega') + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega' e^{i\omega'u} \tilde{f}_\omega(-\omega'). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Substituindo a forma explícita de $\phi_{\omega'}$ em 2.74 e equacionando com 2.75 temos

$$a_{\omega\omega'} \tilde{f}_\omega(\omega') = \beta_{\omega\omega'} \tilde{f}_\omega(-\omega'). \quad (2.76)$$

Seja

$$\begin{aligned} \tilde{f}_\omega(-\omega') &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega'}} \int_{-\infty}^0 du e^{-i\omega'u} \exp\left[\frac{i\omega}{a} \ln(-au)\right], \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega'}} \int_0^\infty du e^{i\omega'u} \exp\left[\frac{i\omega}{a} \ln(au)\right], \end{aligned} \quad (2.77)$$

relacionaremos essa expressão com $\tilde{f}_\omega(\omega')$. Consideremos a integral no plano complexo (considere um *branch cut* no semieixo real negativo para o logaritmo natural)

$$I = \int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} du e^{i\omega'u} \exp\left[\frac{i\omega}{a} \ln(au)\right], \quad (2.78)$$

onde γ_2 é o semieixo positivo, γ_1 é um contorno logo acima do semieixo positivo ($Re(u) + i\varepsilon$, com limite $\varepsilon \rightarrow 0$ implícito) e γ_3 é o semicírculo no plano complexo superior com $R \rightarrow \infty$. Como a função é analítica dentro do contorno e $\omega' > 0$ temos

$$I = 0, \quad I_{\gamma_3} = 0 \Rightarrow I_{\gamma_2} = -I_{\gamma_1}, \quad (2.79)$$

assim

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_\omega(-\omega') &= -\frac{1}{\sqrt{4\pi\omega'}} \int_{\gamma_1} du e^{i\omega'u} \exp\left[\frac{i\omega}{a} \ln(au)\right] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{4\pi\omega'}} \int_{-\infty+i\varepsilon}^{i\varepsilon} du e^{i\omega'u} \exp\left[\frac{i\omega}{a} \ln(au)\right] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{4\pi\omega'}} \int_{-\infty}^0 du e^{i\omega'u} \exp\left[\frac{i\omega}{a} (\ln|au| + i\pi)\right] \\
&= -e^{-\pi\omega/a} \tilde{f}_\omega(\omega').
\end{aligned} \tag{2.80}$$

O mesmo resultado pode ser obtido para os modos LM.

Podemos então calcular o número esperado de partículas com frequência ω no vácuo inercial

$$\langle 0|N_\omega^{(f)}|0\rangle = \int d\omega' |\beta_{\omega\omega'}|^2, \tag{2.81}$$

Usando que

$$\int d\omega' (|a_{\omega\omega'}|^2 - |\beta_{\omega\omega'}|^2) = \delta(0), \tag{2.82}$$

e aplicando 2.76 e 2.80, temos

$$\int d\omega' |\beta_{\omega\omega'}|^2 (e^{2\pi\omega/a} - 1) = \delta(0), \tag{2.83}$$

logo

$$\langle 0|N_\omega^{(f)}|0\rangle = \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1} \delta(0), \tag{2.84}$$

que indica um espectro termal com temperatura de Unruh

$$T_U = \frac{a}{2\pi}. \tag{2.85}$$

2.4.3 O detector de Unruh-Dewitt

Nesta seção analisaremos o fenômeno de um detector de partículas movendo-se em trajetória hiperbólica e em um estado descrito inicialmente como vácuo de Minkowski. O modelo proposto é de uma partícula com níveis de energia E não relativísticos.

Assumimos que a partícula(detector) interage com o campo escalar ϕ por meio de momento de monopolo $m(\tau)$ (com τ sendo o tempo próprio do detector) que obedece a evolução temporal(usaremos a *Interaction Picture*)

$$m(\tau) = e^{iH_p\tau} m(0) e^{-iH_p\tau}. \tag{2.86}$$

O Hamiltoniano de interação é

$$H_I = \lambda m(\tau) \phi(x(\tau)), \tag{2.87}$$

onde λ é uma constante de acoplamento pequena.

Suponha que o sistema está “inicialmente” ($\tau = -\infty$) no estado

$$|E_0, 0_M\rangle = |E_0\rangle \otimes |0_M\rangle, \quad (2.88)$$

onde $|E_0\rangle$ é o estado fundamental da partícula (assumiremos $E_0 = 0$ por simplicidade) e $|0_M\rangle$ é o vácuo inercial. Calcularemos a probabilidade de excitação do estado fundamental. A amplitude de transição para um estado genérico $|E, \psi\rangle$ é dado por

$$a_{E, \psi} = \langle E, \psi | e^{-i \int H_I d\tau} | E_0, 0_M \rangle, \quad (2.89)$$

que em primeira ordem no fator λ é dado por:

$$a_{E, \psi} = i\lambda \langle E, \psi | \int_{-\infty}^{\infty} d\tau m(\tau) \phi(x(\tau)) | E_0, 0_M \rangle. \quad (2.90)$$

A probabilidade total de transição é dada por

$$\begin{aligned} P &= \sum_{E, \psi \neq E_0, 0_M} |a_{E, \psi}|^2 \\ &= \lambda^2 \sum_E T(E) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' e^{-iE(\tau-\tau')} \langle 0_M | \phi(x(\tau)) \phi(x(\tau')) | 0_M \rangle, \end{aligned} \quad (2.91)$$

onde $T(E) = |\langle E | m(0) | E_0 \rangle|^2$ é uma quantidade dependente apenas da estrutura interna do detector.

Vamos calcular primeiro a função de Wightmann do campo escalar:

$$G^+(x, x') = \langle 0_M | \phi(x) \phi(x') | 0_M \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega} e^{-i[\omega(\Delta t + i\varepsilon) - \mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{x}]}, \quad (2.92)$$

com $\Delta t = t - t'$ e $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ e o fator $i\varepsilon$ é inserido de acordo com “prescrição” padrão, garantindo convergência da integral (o fator pode ser interpretado como um *cutoff* para altas frequências). Consideremos por simplicidade o caso de separações tipo tempo (o resultado para outros tipos de intervalo é o mesmo), podemos então trabalhar num referencial \bar{S} onde $\Delta \bar{x} = 0$, integrando em coordenadas “esféricas” (por simplicidade notacional as transformações no fator ε serão omitidas, note que transformações de Lorentz ortocronas próprias sempre preservarão seu sinal)

$$\begin{aligned} G^+(x, x') &= \frac{1}{4\pi^2} \int d\omega \omega e^{-i\omega(\Delta \bar{t} + i\varepsilon)} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(\Delta \bar{t} - i\varepsilon)^2} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\Delta t^2 - \Delta \mathbf{x}^2 - i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Seja a trajetória do detector dada por

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{a} \sinh(a\tau), \\ t &= \frac{1}{a} \cosh(a\tau), \\ x &= y = 0. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Então, em termos de $\Delta\tau = \tau - \tau'$, a função de Wightman é dada por

$$G^+(x(\tau), x(\tau')) = G^+(\Delta\tau) = -\frac{1}{16\pi^2} \frac{a^2}{\sinh^2[a(\Delta\tau - i\varepsilon)/2]}. \quad (2.95)$$

O fato de que G^+ depende de $\Delta\tau$ indica que P é invariante sob translações temporais no referencial da partícula. Logo o valor esperado médio de quanta absorvido pelo detector é constante temporal. Portanto, como definido em (2.91), P é uma quantidade divergente, assim como acontece no cálculo de G^+ , atribuição de valor físico requer um processo de regularização. Para simplificar a análise, podemos definir a probabilidade de excitação por unidade de tempo próprio $p \equiv P/\Delta\tau$

$$p = -\sum_E T(E) \frac{1}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\tau) e^{-iE\Delta\tau} \frac{a^2}{\sinh^2[a(\Delta\tau - i\varepsilon)/2]}. \quad (2.96)$$

Podemos resolver a integral considerando um contorno no plano complexo consistindo do eixo real e do semicírculo inferior ($R \rightarrow \infty$, $Im(\Delta\tau) < 0$). A integral no semicírculo é nula devido ao fator exponencial $e^{iEIm(\Delta\tau)}$. Usando que

$$\csc^2(\pi x) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x - n)^{-2}, \quad (2.97)$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sinh^2[a(\Delta\tau - i\varepsilon)/2]} &= -\operatorname{cosec}^2[i\pi a(\Delta\tau - i\varepsilon)/(2\pi)] \\ &= \frac{4}{a^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Delta\tau - i\varepsilon + \frac{2\pi in}{a} \right)^{-2}, \end{aligned} \quad (2.98)$$

logo

$$\begin{aligned}
p &= \sum_E T(E) \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-iEu}}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(u - i\epsilon + \frac{2\pi in}{a} \right)^{-2} \\
&= \frac{i}{2\pi^2} \sum_E T(E) \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res} \left[e^{-iEu} \left(u - i\epsilon + \frac{2\pi in}{a} \right)^{-2}, i\epsilon - \frac{2\pi in}{a} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \sum_E \sum_{n=1}^{\infty} T(E) E e^{-2\pi nE/a} \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \sum_E \frac{T(E) E}{e^{2\pi nE/a} - 1}. \tag{2.99}
\end{aligned}$$

Na segunda linha escluimos os valores $n \leq 0$ do somatório, pois para $n < 1$ os polos estão fora do contorno de integração. Vemos que novamente o fator de Planck com temperatura $T_u = \frac{a}{2\pi}$.

Vemos assim que há uma probabilidade não-nula de que o detector salte de nível. Devemos lembrar que o campo externo encontra-se no estado de vácuo, não podendo fornecer energia ao detector, no entanto, não há violação do princípio de conservação de energia, já que a partícula recebe energia externa para manter sua trajetória acelerada. Ao manter a trajetória hiperbólica com trabalho de fonte externa, a partícula emite quanta que excita o campo, e tal emissão é sentida como um *backreaction* no referencial do detector.

3 EFEITO CASIMIR EM CAMPO GRAVITACIONAL FRACO

Este capítulo se propõe a analisar o comportamento da energia de Casimir, introduzida brevemente no capítulo anterior, quando há a presença de uma métrica de fundo correspondente a ação de um campo gravitacional fraco. Antes de propor nossos resultados, faremos uma breve revisão das considerações tomadas e de resultados prévios encontrados na literatura.

3.1 Definição do problema

Serão tomadas como ponto de partida as definições propostas em [16] onde calcula-se a densidade média de energia de Casimir de um campo escalar real e sem massa, obedecendo condições de contorno similares as trabalhadas no capítulo anterior. No entanto, agora A e L devem ser compreendidos como parâmetros de coordenadas em vez de distâncias físicas.

A geometria de fundo inicialmente tomada é a solução usual para campo fraco

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)dl^2, \quad (3.1)$$

onde $\Phi = -M/r$ e dl é o elemento de linha euclideano. Consideraremos por simplicidade que as placas estão dispostas perpendicularmente à direção radial, a uma distância R da origem e são mantidas nessa configuração estática por uma força externa. Iremos supor que $R \gg \sqrt{S} \gg L$ e construir um sistema de coordenadas “quase retangulares”, com origem no centro da placa inferior e orientação do eixo z paralela a radial (figura 2). Assim, na região entre as placas podemos tomar a aproximação

$$\Phi \simeq -\frac{M}{R} + \frac{M}{R^2}z = \Phi_0 + \gamma z. \quad (3.2)$$

Sendo o elemento de linha agora expresso como

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi_0 + 2\gamma z)dt^2 + (1 - 2\Phi_0 - 2\gamma z)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (3.3)$$

Dada a geometria descrita acima, a quantidade que deverá ser obtida é a densidade média de energia de Casimir medida por um observador estático

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{V_p} \int d^3x \sqrt{h} (u^\mu u^\nu \langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle), \quad (3.4)$$

onde u^μ é a velocidade mundo do observador

$$u^\mu = |g_{00}|^{-1/2} \delta_0^\mu, \quad (3.5)$$

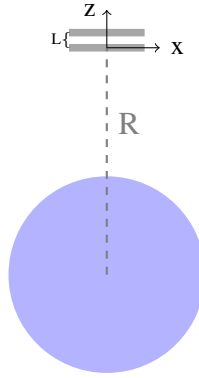


Figura 2: Esquema de posicionamento das placas e do sistema de coordenadas do observador.

h é a métrica induzida (no presente caso $h_{ij} = g_{ij}$) e V_p é o volume próprio da “cavidade”, dado por

$$V_p = \int d^3x \sqrt{h}. \quad (3.6)$$

Substituindo os valores de u^μ , das componentes do tensor de stress dado por

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (3.7)$$

e supondo um conjunto de modos ortonormais ϕ_n , (3.4) se reduz a

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{V_p} \sum_n \int d^3x \sqrt{h} (|g_{00}|^{-1} T_{00}[\phi_n, \phi_n^*]), \quad (3.8)$$

onde

$$T_{00}[\phi_n, \phi_n^*] = \partial_t \phi_n \partial_t \phi_n^* - \frac{1}{2} g_{00} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_n \partial_\nu \phi_n^* \quad (3.9)$$

Note que a quantidade (3.4) é um escalar. No contexto de espaços-tempos curvos é importante expressar as grandezas físicas deste modo a fim de eliminar, quando possível, ambiguidades relacionadas a diferentes escolhas de sistemas de coordenadas. Na expressão da energia de Casimir que encontraremos, estarão contidos termos do comprimento, no entanto L é apenas um parâmetro de coordenada, assim deveremos expressar os resultados finais em termos do comprimento próprio, o escalar que espera-se obter em medidas físicas, para uma separação ao longo do eixo z temos

$$L_p = \int dz \sqrt{|g_{zz}|}. \quad (3.10)$$

3.1.1 Exemplo: correção de “primeira ordem”

Um exemplo pertinente se dá quando consideremos apenas o primeiro termo da aproximação em (3.2), ou seja

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi_0) dt^2 + (1 - 2\Phi_0) dl^2, \quad (3.11)$$

que é referida como aproximação de primeira ordem em [16]. Esse elemento de linha é, na verdade, equivalente ao de Minkowski, que pode ser reobtido simplesmente fazendo a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} dt &\rightarrow dt' = (1 + 2\Phi_0)^{-1/2} dt, \\ dl &\rightarrow dl' = (1 - 2\Phi_0)^{-1/2} dl. \end{aligned} \quad (3.12)$$

No entanto, ao manter (3.11), teremos um modelo simples de aplicação do formalismo e que será útil na reanálise do caso de segunda ordem.

A equação de campo neste caso é dada por

$$(1 - 2\Phi_0)\partial_t^2\phi - (1 + 2\Phi_0)\delta^{ij}\partial_i\partial_j\phi = 0, \quad (3.13)$$

onde termos de ordem superior foram suprimidos. Podemos usar uma solução similar ao caso de espaço flat

$$\phi_n(x) = A_n \sin(\tilde{n}z) e^{i(k_\perp x_\perp - \omega_n t)}. \quad (3.14)$$

Substituição na equação (3.13) leva diretamente às novas frequências

$$\omega_n^2 = (1 + 4\Phi_0)(k_\perp^2 + \tilde{n}^2). \quad (3.15)$$

Enquanto o produto interno (2.41) define as constantes

$$A_n = [4\pi^2 \omega_n (1 - 4\Phi_0)L]^{-1/2}. \quad (3.16)$$

Substituição dos modos em (3.8) leva à expressão

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{8\pi^2 L} (1 + 4\Phi_0) \sum_n \int d^2 k_\perp (k_\perp^2 + \tilde{n}^2), \quad (3.17)$$

que é similar à sua versão de espaço-tempo plano (2.29), renormalizando obtemos

$$\bar{\epsilon} = -(1 - 4\Phi_0) \frac{\pi^2}{1440L^4}. \quad (3.18)$$

Lembrando que L deve ser substituído pelo comprimento próprio dado por

$$L_p = \int_0^L dz \sqrt{1 - 2\Phi_0} = L(1 - 4\Phi_0), \quad (3.19)$$

temos a expressão final para energia de Casimir calculada em primeira ordem no parâmetro gravitacional

$$\bar{\epsilon} = -\frac{\pi^2}{1440L_p^4}. \quad (3.20)$$

Ou seja, recuperamos a mesma energia do caso de Minkowski, o que já era esperado, visto que

as contribuições constantes na métrica em (3.11) não tem valor físico, podendo ser removidas através da transformação (3.12).

3.1.2 Obtenção dos modos em segunda ordem

Discutiremos agora alguns resultados obtidos previamente na literatura considerando o termo linear da métrica em (3.3) e aplicando as transformações (3.12) para remover as constantes, assim

$$ds^2 = -(1 + 2\gamma z)dt^2 + (1 - 2\gamma z)dl^2. \quad (3.21)$$

Temos para a equação de campo

$$\square\phi = (1 - 2\gamma z)\partial_t^2\phi - (1 - 2\gamma z)\nabla^2\phi = 0, \quad (3.22)$$

que com um ansatz da forma

$$\phi_n(x) = A_n\chi_n(z)e^{i(k_\perp x_\perp - \omega_n t)}, \quad (3.23)$$

pode ser reescrita como

$$[(1 - 2\gamma z)\omega_n^2 - (1 + 2\gamma z)(k_\perp^2 - \partial_z^2)]\chi_n(z) = 0. \quad (3.24)$$

Podemos rearranjar a expressão acima como

$$\partial_z^2\chi - az\chi + b\chi = 0, \quad (3.25)$$

onde

$$\begin{aligned} a &= 4\gamma\omega, \\ b &= \omega^2 - k_\perp^2, \end{aligned} \quad (3.26)$$

que pode ainda ser simplificada com a transformação

$$u(z) = a^{1/3}(b/a - z) \quad (3.27)$$

reduzindo-se a equação diferencial de Airy

$$\partial_u^2\chi - u\chi = 0. \quad (3.28)$$

Os modos normais e frequências são apresentados em [16], dados por

$$\chi_n(z) = A_n u^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3}u^{3/2} + \varphi\right), \quad (3.29)$$

$$\omega_n^2 = (1 + 2\gamma L)(k_\perp^2 + \tilde{n}^2). \quad (3.30)$$

Onde 3.30 é obtida a partir de $b - aL/2 \simeq \tilde{n}^2$, expressão que usaremos novamente mais adiante.

3.2 Resultados anteriores

Agora iremos exemplificar alguns resultados anteriores encontrados na literatura. Começaremos pelo cálculo de correções de segunda ordem de [16], seguido de algumas extensões propostas por outros autores. Tais resultados servem de motivação para o conteúdo seguinte, onde com as correções propostas, iremos deduzir que as correções no efeito Casimir para a ordem tomada são nulas.

3.2.1 Geometria de campo fraco usual

Em [16], o autor sugere um atalho para o cálculo da energia de Casimir, propondo uma decomposição dos modos acima como a solução no caso de Minkowski somada de um termo de correção

$$\phi_n = \phi_n^{(0)} + \delta\phi \quad (3.31)$$

onde $\phi_n^{(0)}$ é dado por (2.30). Analogamente

$$T_{00}[\phi_n, \phi_n^*] = T_{00}[\phi_n^{(0)}, \phi_n^{(0)*}] + \delta T_{00}[\phi_n, \phi_n^*] \quad (3.32)$$

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^{(0)} + \delta\bar{\epsilon}. \quad (3.33)$$

O primeiro termo de (3.33), obtido ao inserir a solução plana $\phi_n^{(0)}$ em 3.8 resulta em

$$\bar{\epsilon}^{(0)} = -V_p^{-1} \left(1 - \frac{3}{2}\gamma L\right) \frac{\pi^2}{1440L^4} = -(1 - 2\gamma L_p) \frac{\pi^2}{1440L_p^4}, \quad (3.34)$$

que pode ser interpretado como uma correção geométrica na energia de Casimir usual. O segundo termo de (3.33), é da ordem de γ , e pode ser interpretado como a energia gerada da interação entre o campo escalar e o campo gravitacional, o autor de [16] afirma que $\delta\bar{\epsilon}$ pode ser obtido em analogia à 2.32 considerando a variação das frequências

$$\delta\bar{\epsilon} = \sum_n \int d^2k_\perp \delta\omega_n = -\gamma L_p \frac{\pi^2}{1440L_p^4}. \quad (3.35)$$

Somando as duas contribuições tem-se

$$\bar{\epsilon} = -(1 - \gamma L_p) \frac{\pi^2}{1440 L_p^4}, \quad (3.36)$$

resultando em uma pequena correção na energia de Casimir.

3.2.2 Extensões na métrica

O método descrito anteriormente serviu de base para alguns outros trabalhos, onde foram propostas extensões na geometria de fundo e na teoria a serem consideradas. Partindo da métrica (3.21), que pode ser obtida como uma expansão local de (3.1), originalmente uma aproximação de campo fraco tipo Schwarzschild, é natural pensar no caso um pouco mais geral

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi_1(r))dt^2 + (1 - 2\Phi_2(r)), \quad (3.37)$$

que representaria uma geometria mais geral mantendo a simetria esférica. Um caso notável seria, por exemplo, a solução de buraco negro com matéria quintessencial de [89], que engloba várias possíveis extensões da métrica original de Schwarzschild, como carga elétrica e matéria tipo poeira. Alguns outros exemplos que remetem a esse tipo de geometria serão exemplificados brevemente a seguir, detalhes do cálculo serão omitidos, já que trataremos do problema de forma geral nas próximas seções deste capítulo.

Analogamente a (3.21), mas mantendo termos de primeira ordem, [21] propõe a métrica

$$ds^2 = (1 + 2\lambda_1 + 2\gamma_1 t)dt^2 - (1 + 2\lambda_2 + 2\gamma_2 z)dl^2, \quad (3.38)$$

para o qual a expressão para $\bar{\epsilon}$ é dado por

$$\bar{\epsilon}_{cas} = -(1 + \gamma_1 + \lambda_1 \frac{L_p}{2}) \frac{\pi^2}{1440 L^4}, \quad (3.39)$$

note que o fator apresentado no denominador é a distância coordenada L entre as placas.

Em [19] é tomada uma métrica com rotação lenta, com elemento de linha

$$ds^2 = (1 + 2\phi)dt^2 - (1 - 2\phi)dl^2 - 4adtd\phi, \quad ds^2 = (1 + 2\phi)dt^2 - (1 - 2\phi)dl^2 - 4adtd\phi, \quad (3.40)$$

onde $b = 1 - 2a\Omega$, representa a influência dos parâmetros de rotação na geometria. Com uma mudança de variáveis adequada o elemento de linha toma a forma

$$ds^2 = (1 + 2b\gamma z)dt^2 - (1 - 2\gamma z)dl^2, \quad (3.41)$$

efeitos não inerciais de backreaction são desconsiderados. A expressão para densidade própria

de energia é dada por

$$\bar{\epsilon}_{cas} = -[1 - \gamma L_p(1 + 3a\Omega)] \frac{\pi^2}{1440L_p^4}. \quad (3.42)$$

Outro exemplo é dado por [18], onde considera-se uma teoria de gravidade estendida, com geometria

$$ds^2 = (1 + 2\Phi_0 + 2\Lambda z)dt^2 - (1 - 2\Psi_0 - 2\Sigma z)dl^2, \quad (3.43)$$

com escalar de curvatura não nulo $\mathcal{R} \simeq \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 z$. Desta vez a energia média de Casimir é dada por

$$\bar{\epsilon}_{cas} = -[1 - 3(\Phi_0 + \Psi_0) - (2\Sigma - \Lambda)L_p] \frac{\pi^2}{1440L_p^4} + \frac{\epsilon \mathcal{R}_2}{192L_p}. \quad (3.44)$$

Outros exemplos similares podem ser dados por exemplo, pelo caso de “gravidade R^2 ” tomado em [17], e de violação de simetria de Lorentz em [20].

3.3 Revisitando o Efeito Casimir em Campo Gravitacional Fraco

Observe que alguns dos resultados exemplificados em §3.2.2 preveem correção de primeira ordem, mesmo que os termos em questão possam ser eliminados da métrica por transformações do tipo (3.12). O método base de [16] utiliza-se do truque de simplificação resumido na equação (3.35) para obter a densidade média de energia, o que permite evitar cálculos extensos envolvendo as soluções (3.29). Mostraremos a seguir que o truque não recupera o resultado fisicamente esperado (3.20) no caso de primeira ordem, um sinal de inconsistência no método. Em seguida iremos apresentar a obtenção de $\bar{\epsilon}$ de forma direta, explicitando as soluções $\chi_n(z)$ como expressões perturbativas.

3.3.1 Teste de consistência em primeira ordem

O método de cálculo da energia de Casimir aplicado para segunda ordem em §3.2.1 poderia ser aplicado também no caso de primeira ordem por argumentos análogos, o que não se faz necessário a princípio visto que os cálculos envolvidos são bastante similares ao caso minkowskiano.

Vejamos no entanto o que acontece quando inserimos as soluções usuais (2.5) em 3.8 para a métrica de primeira ordem (3.11)

$$\bar{\epsilon}^{(0)} = \frac{1}{V_p} \frac{1}{(2\pi)^2 2L} (1 - 3\Phi_0) \sum_n \int d^2k \sqrt{k^2 + \tilde{n}^2}, \quad (3.45)$$

que após renormalizada e expressa em termos de L_p retorna

$$\bar{\epsilon}^{(0)} = -(1 - 4\Phi_0) \frac{\pi^2}{1440L_p^4}. \quad (3.46)$$

Para o termo de variação análogo a (3.35), temos de (3.15) que $\delta\omega_n \simeq (1 + 2\Phi_0)\sqrt{k_\perp^2 + \tilde{n}^2}$, assim

$$\delta\bar{\varepsilon} = -2\Phi_0 \frac{\pi^2}{1440L_p^4}. \quad (3.47)$$

Somando as duas contribuições, temos um resultado diferente de (3.20), indicando uma possível inconsistência no método. Vejamos a seguir o que obtemos no caso de segunda ordem ao usar um tratamento mais direto.

3.3.2 Expansão das soluções axiais

Obteremos a energia de casimir na métrica de fundo 3.21 de modo direto, como proposto em [22], analogamente ao procedimento feito em §3.1.1. Para facilitar a análise, primeiro iremos escrever a parte axial $\chi_n(z)$ dos modos normais como uma expressão perturbativa em γ na forma

$$A_n\chi(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\omega_0 L}} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) + \gamma\chi^{(1)}(z) + O[M/R]^3. \quad (3.48)$$

Precisamos obter as constantes φ e A_n , a primeira pode ser encontrada trivialmente pela condição de contorno $\chi_n(z) = 0$

$$\varphi = -\frac{2}{3}u^{3/2}(0). \quad (3.49)$$

Para A_n empregaremos a condição de normalização dos modos 2.41, que no presente caso pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \langle \phi(n, k_1), \phi(n, k_2) \rangle = \\ (\omega_n + \omega_m)(A_n^* A_m) \int_V d^3x (1 - 4\gamma z) \chi_n \chi_m e^{i(k_{1\perp} - k_{2\perp})x_\perp} = \\ \delta^2(k_{1\perp} - k_{2\perp}) \delta_{nm}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

logo

$$A_n = \left[(2\pi)^2 2\omega \int_V d^3x (1 - 4\gamma z) \chi_n^2 \right]^{-1/2}. \quad (3.51)$$

Em posse das constantes, podemos expandir $\chi_n(z)$ em potência de γ com ajuda de um software apropriado para cálculo simbólico (ou de uma extensa álgebra). A expressão obtida é da forma (3.48) com

$$\begin{aligned} \chi^{(1)}(z) = [2n\pi\omega_0^2 L^2 (L - z) z \cos(n\pi z/L) \\ + L(2n^2\pi^2 z + 2k^2 L^2 z - k^2 L^3) \sin(n\pi z/L)] / (4Ln^2\pi^3 \sqrt{\omega_0 L}). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Prosseguindo, escrevemos a componente relevante do tensor de stress como

$$T_{00}[\psi_n^*, \psi_n] = \frac{1}{2}\omega_n^2 \chi_n^2 + \frac{1}{2}(1 + 4\gamma z)[k_\perp^2 \chi_n^2 + (\partial_z \chi_n)^2], \quad (3.53)$$

substituindo a forma completa de (3.48) e integrando em (3.8) obtemos

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{V_p} \frac{S}{8\pi^2 L} (1 + \gamma L/2) \sum_n \int d^2 k_\perp \omega_0. \quad (3.54)$$

Assim, a densidade média própria da energia de vácuo será dada por

$$\bar{\varepsilon}_{cas} = -\frac{\pi^2}{1440L^4} (1 + 2\gamma L) = -\frac{\pi^2}{1440L_p^4}. \quad (3.55)$$

O resultado sugerido em (3.55) é de que não há correção gravitacional na energia e Casimir para a ordem considerada. Antes de tentar discutir o resultado mais a fundo, iremos generalizá-lo para métricas da forma (3.38) e obtê-lo também pelo método de Schwinger.

3.3.3 Espaço-tempo esfericamente simétrico geral

A equação para o campo escalar na métrica (3.38) é dada por

$$-(1 - 2\gamma_1 z)\partial_t^2 \phi + (1 + 2\gamma_2 z)\nabla^2 \phi + (\gamma_1 - \gamma_2)\partial_z \phi = 0. \quad (3.56)$$

Usando novamente um ansatz da forma (3.23), obtemos

$$\partial_z^2 \chi + 2\gamma_- \partial_z \chi + (\omega^2 - k_\perp^2)\chi - 4\gamma_+ \omega^2 z \chi = 0, \quad (3.57)$$

onde $\gamma_+ = (\gamma_1 + \gamma_2)/2$ e $\gamma_- = (\gamma_1 - \gamma_2)/2$. Com a transformação

$$\chi(z) = A_n (1 - \gamma_- z) \Theta(z), \quad (3.58)$$

temos que $\Theta(z)$ obedece a

$$\partial_z^2 \Theta - a z \Theta + b \Theta = 0, \quad (3.59)$$

com $\gamma \rightarrow \gamma_+$. Assim, definimos $\Theta(u(z))$ em analogia a (3.29).

Reescreveremos as expressões para o produto interno e a densidade energia em termos dos fatores $\beta = (3\gamma_2 + \gamma_1)$ e $\gamma = \beta + \gamma_1$, isso nos ajudará a obter e analisar melhor o resultado e compará-lo com que foi obtido em §3.2.1. Temos para o produto

$$\langle \phi(n, k_1), \phi(n, k_2) \rangle = (\omega_n + \omega_m) (A_n A_m) \int_V d^3 x (1 - \beta z) \chi_n \chi_m e^{i(k_{1\perp} - k_{2\perp})x_\perp}, \quad (3.60)$$

e para a densidade de energia

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{V_p} \sum_n \int d^3 x \int d^2 k (1 - \lambda z) T_{00}[\psi_n^*, \psi_n]. \quad (3.61)$$

Procedendo analogamente a §3.3.2, obtemos

$$\bar{\varepsilon}_{ren} = -\frac{S\pi^2}{1440L^3} \frac{1}{V_p} \left[1 + \frac{1}{2}(\beta - \lambda + 2\gamma_+)L \right] = -\frac{\pi^2}{1440L_p^4}, \quad (3.62)$$

que corresponde novamente a mesma expressão obtida no espaço de Minkowski, mesmo para métricas da forma (3.38).

Por inspeção do resultado (3.62), podemos encontrar qual termo deveria substituir (3.35). Os fatores de γ_+ e λ são obtidos se inserirmos as soluções usuais (2.5) em (3.61), portanto

$$\delta\bar{\varepsilon}_{ren} = \frac{\beta}{2}L\varepsilon_0, \quad (3.63)$$

ou seja, a correção que deveria ser usada em (3.35) é na verdade um remanescente de um fator geométrico na normalização do campo.

3.4 Solução alternativa: método de Schwinger

Até agora trabalhamos exclusivamente com as ferramentas da quantização canônica do campo escalar, vejamos agora como obter a energia de Casimir em campo gravitacional fraco utilizando um método derivado da quantização por integrais de caminho.

Seguindo o impasse entre [16] e [22], foi proposto em [23] a obtenção da densidade média própria da energia de Casimir (3.4) através do formalismo de Schwinger[24, 25]. No entanto, argumentaremos que a construção é dada de forma não covariante, assim iremos sugerir uma modificação para tornar o resultado novamente coerente. Como veremos, a expressão (3.62) será obtida mais uma vez[26]. Faremos ainda um cálculo um pouco mais geral para a geometria aproximada (3.73), uma generalização de (3.38) proposta em [27].

O ponto de partida será a amplitude de persistência do vácuo na ausência de fontes externas

$${}_+\langle 0|0\rangle_- = Z[0] = e^{-iW[0]}. \quad (3.64)$$

O funcional $W[0] = W[J]|_{J=0}$, é comumente chamado de funcional de energia, ou ação efetiva¹. Como demonstrado originalmente por Schwinger, podemos escrever $W[0]$ a partir da representação de integral de tempo próprio (veja o apêndice §A)

$$W[0] = \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} Tr[e^{-is\hat{K}}], \quad (3.65)$$

¹Mais comum na literatura de teoria quântica de campos em espaços curvos, visto que no caso flat ação efetiva normalmente denota o funcional $\Gamma(\phi)$, para $J = 0$ seus valores coincidem, mas para evitar confusão usaremos a primeira denominação.

onde \hat{K} será definido através da ação para o campo

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x |g|^{-1/2} (\phi(x) \hat{K} \phi(x)). \quad (3.66)$$

Para o cálculo do traço usaremos uma representação de autofunções normalizadas $\phi_n(x)$

$$\hat{K} \phi_n(x) = \lambda_n \phi_n(x), \quad (3.67)$$

$$\int dv_x \phi_n^* \phi_m = \delta_{nm}, \quad (3.68)$$

onde $dv_x = d^4x |g|^{1/2}$ é o elemento de volume invariante do espaço-tempo. Assim o traço do operador em (3.65) pode ser expandido como

$$Tr[e^{-is\hat{K}}] = \int dv_x e^{-is\lambda_n} |\phi_n(x)|^2. \quad (3.69)$$

Logo 3.65 pode ser reescrita como

$$W[0] = \frac{i}{2} \sum_n \int dv_x \int \frac{ds}{s} |\phi_n(x)|^2 e^{-is\lambda_n}. \quad (3.70)$$

De forma simplificada, para o espaço-tempo plano o termo de fase em (3.64) pode ser interpretado como um termo de evolução temporal $Z[0] \sim e^{-iH\Delta t}$, de modo que

$$W[0] = E_{vac} \Delta t, \quad (3.71)$$

onde um processo apropriado de renormalização está implícito e Δt consiste em um intervalo de tempo muito grande no qual a medida é tomada.

Se quisermos ainda extrair a densidade volumétrica de energia ε , dividiremos por um fator volumétrico extra. De modo que a razão entre $W[0]$ e ε é dada pelo volume espaço-temporal. Para obter um análogo de (3.8) (um escalar) no presente formalismo construiremos outra quantidade similar a partir da amplitude de persistência do vácuo. Observe que (3.65) também é escalar, assim para obtermos a densidade própria de energia do vácuo usaremos

$$\tilde{W}[0] = V_p^{(4)} \bar{\varepsilon}. \quad (3.72)$$

onde $V_p^{(4)} = \int d^4x |g|^{1/2}$. Esta pequena consideração é responsável pelo desacordo entre os resultados de [23] e os encontrados aqui, onde explicitaremos que o uso de uma expressão não covariante é o que leva a obtenção de correções gravitacionais em ordem de γ .

Como forma de generalizar um pouco mais o resultado e prover um teste de con-

sistência maior a (3.62), consideraremos o seguinte elemento de linha

$$ds^2 = -(1 + 2\gamma_1 z)dt^2 + (1 - 2\gamma_2 z)dx^2 + (1 - 2\gamma_3 z)dy^2 + (1 - 2\gamma_4 z)dz^2. \quad (3.73)$$

Ou seja, requeremos que na ordem de aproximação considerada seja mantida apenas dependência na coordenada z , e que essa dependência seja linear. O primeiro requisito é imposto por uma questão de mera praticidade operacional, a métrica possui simetria planar, o que facilita encontrar as soluções estacionárias obedecendo às condições de contorno nas placas. O segundo é relacionado a ordem de aproximação e distância entre as placas, em geral tomada muito pequena em relação a superfície dos planos e aos comprimentos característicos da geometria de fundo. Observe no entanto que o parâmetro γ_4 pode ser facilmente removido por transformação de coordenadas, assim nos cálculos subsequentes tomaremos $\gamma_4 = 0$.

Precisamos agora resolver a equação de autovalores (3.67)

$$\hat{K}\phi_n = -|g|^{-1/2}\partial_\mu[|g|^{1/2}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi_n] = \lambda_n\phi_n, \quad (3.74)$$

que para o elemento de linha (3.73) é dada explicitamente por

$$[(1 - 2\gamma_1 z)\partial_t^2 - (1 + 2\gamma_2 z)\partial_x^2 - (1 + 2\gamma_3 z)\partial_y^2 - \partial_z^2 - \gamma_5\partial_z]\phi_n = \lambda_n\phi_n, \quad (3.75)$$

lembrando que $\lambda_4 = 0$. Tomaremos novamente um ansatz na forma (3.23), mas dessa vez deve ser compreendido que os valores de k_\perp, n e ω são independentes. Temos assim

$$[(1 - 2\gamma_1 z)\omega^2 - (1 + 2\gamma_2 z)k_x^2 - (1 + 2\gamma_3 z)k_y^2 + (1 + 2\gamma_4 z)\partial_z^2 + \gamma_5\partial_z]\chi = -\lambda_n\chi. \quad (3.76)$$

A equação acima pode ser rearranjada como

$$\chi'' + \gamma_5\chi' - az\chi + b\chi = 0, \quad (3.77)$$

analogamente aos modos usados em §3.3.2 e §3.3.3, onde

$$a = 2\gamma_1\omega^2 + 2\gamma_2k_x^2 + 2\gamma_3k_y^2, \quad (3.78)$$

$$b = \omega^2 - k_x^2 - k_y^2 + \lambda. \quad (3.79)$$

Deste modo, podemos facilmente obter os autovalores de

$$b - aL/2 = \tilde{n}^2, \quad (3.80)$$

que resulta em

$$\lambda = \tilde{n}^2 + k_x^2(1 + \gamma_2L) + k_y^2(1 + \gamma_3L) - \omega^2(1 - \gamma_1L). \quad (3.81)$$

De posse dos autovalores podemos agora facilmente calcular a energia de Casimir

com a relação (3.70)

$$W^{(\nu)}[0] = \frac{i}{2} \sum_n \int d^4x \sqrt{-g} \int d^2k_\perp d\omega \int ds s^{\nu-1} |\phi_{\omega, k_\perp, n}|^2 \times e^{-is[\bar{n}^2 + k_x^2(1+\gamma_2 L) + k_y^2(1+\gamma_3 L) - \omega^2(1-\gamma_1 L)]}. \quad (3.82)$$

O cálculo se dá de forma completamente análoga ao caso plano

$$\begin{aligned} W^{(\nu)}[0] &= [1 + (-\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)L]^{-1/2} \frac{\sqrt{iAT}}{2(2\pi)^3} \\ &\times \sum_n \int ds s^{\nu-1} \exp \left[\left(-is \frac{n^2}{\pi^2 L^2} \right) (1 + \gamma_4 L) \right] \left(\frac{\pi}{is} \right)^{3/2} \\ &= [1 + (-\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)L]^{-1/2} \frac{\sqrt{iAT}}{16\pi^{3/2}} \Gamma(\nu - 3/2) \sum_n \left[\left(i \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) (1 + \gamma_4 L) \right]^{3/2-\nu} \\ &= [1 + (-\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)L]^{-1/2} (1 + \gamma_4 L)^{3/2-\nu} \frac{\pi^{3/2} AT}{16L^{3-2\nu}} \Gamma(\nu - 3/2) \zeta(2\nu - 3), \end{aligned} \quad (3.83)$$

restaurando o valor original do regulador $\nu = 0$ obtemos

$$W^{(0)}[0] = - \left[1 + \frac{L}{2} (\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3) \right] \frac{AT \pi^2}{1440L^3}. \quad (3.84)$$

Para o volume próprio temos

$$V_p^{(4)} = \int d^4x \sqrt{-g} \simeq ALT \left[1 + \frac{L}{2} (\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3) \right], \quad (3.85)$$

o que indica que o coeficiente extra em (A.12) é apenas um fator de variação do volume do espaço-tempo. Lembrando da simplificação $\gamma_4 = 0$, temos que $L = L_p$, assim

$$\bar{\varepsilon} = \frac{W^{(0)}[0]}{V_p^{(4)}} = - \frac{\pi^2}{1440L_p^4}. \quad (3.86)$$

ou seja, reobtemos os resultados de §3.3.2 e §3.3.3 para o caso de (3.73).

3.5 Princípio da equivalência e o peso do vácuo

Nas seções anteriores demonstramos que a energia própria de Casimir como definida em (3.4), ou alternativamente (3.86), para um espaço-tempo descrito aproximadamente por (3.73) na região entre as placas não sofre alterações gravitacionais da ordem de $\gamma = M/R^2$. Esse resultado abrange a aproximação local de uma classe larga de geometrias de fundo e contesta diretamente resultados de trabalhos anteriores como [17–21].

Destacamos a importância dos resultados obtidos na correção na análise inicial de [16], mudando drasticamente a natureza das conclusões obtidas, assim como possíveis de-

corrências fenomenológicas. Como exemplo podemos citar [20], onde os autores especulam sobre um limite para um parâmetro de violação na simetria de Lorentz que seria inferior aos já encontrados na literatura, tal resultado pode ser modificado com o advento da nossa análise.

A discussão proposta aqui está diretamente relacionado ao experimento “Archimedes” descrito em [60], a ser realizado num futuro próximo. No manuscrito os autores discutem que segundo o princípio da equivalência é esperado que o aparato de Casimir experimente uma força extra equivalente ao “peso” da energia de vácuo

$$\vec{F}_g = \frac{E_{cas}}{c^2} \vec{g}. \quad (3.87)$$

Porque esse termo não aparece no gradiente de (3.55)? Na verdade trata-se de uma questão de como interpretar a definição (3.4). A expressão usada para cálculo da energia de Casimir representa na verdade a “massa” do sistema, onde a energia potencial gravitacional não é contabilizada. Como exposto em [60], trabalhos anteriores [57–59] (bem como [53–56] onde o princípio da incerteza para a energia de Casimir é foco da discussão) já apontavam essa ausência de “redshift” efetivo (não confundir com as frequências calculadas anteriormente que dependem diretamente de como escrevemos os modos normais) na medida da energia de Casimir. Desse ponto de vista, nossos resultados representam de certa maneira uma conciliação entre essas análises e a proposta de [16].

Podemos tornar essa afirmação mais clara se usarmos uma expressão alternativa para a energia de Casimir que leve em conta a energia potencial decorrente do “peso” do aparato. Lembrando o caso de uma partícula descrita por uma onda monocromática, onde podemos calcular a frequência própria pela relação $\omega_p = -u_\mu p^\mu$, enquanto sua energia total, contabilizando a parte gravitacional é dada por $E = -k_\mu p^\mu$ [84], onde $k^\mu = (1, 0, 0, 0)$ é o vetor de *killing* tipo tempo.

Definamos uma energia própria “total” a partir da expressão

$$\tilde{\epsilon} = \frac{1}{V_p} \int d^3x \sqrt{h} u^\mu k^\nu \langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle. \quad (3.88)$$

É fácil ver que

$$\tilde{\epsilon} - \bar{\epsilon} \simeq V^{-1} \int d^3x (\gamma_{1z}) \langle T_{00} \rangle_{vac}, \quad (3.89)$$

e logo

$$\tilde{\epsilon} = -\frac{\pi^2}{1440L_p^4} \left(1 + \frac{\gamma_1 L_p}{2} \right) = \epsilon_c \left(1 + \frac{\gamma_1 L_p}{2} \right). \quad (3.90)$$

Podemos interpretar mais facilmente o resultado anterior se redefinirmos a origem do sistema local pela transformação $z \rightarrow z' = z + l_0$ nas componentes da métrica, onde l_0 é uma

pequena altura da placa inferior em relação ao ponto de referência. Obteríamos assim

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_c \left[1 + \gamma_1 \left(l_0 + \frac{L_p}{2} \right) \right]. \quad (3.91)$$

onde o termo extra pode ser identificado com uma densidade de potencial gravitacional

$$\varepsilon_G = \gamma_1 \varepsilon_c z_{cm} \quad (3.92)$$

em que z_{cm} é a altura do centro de massa do sistema. Explicitando assim que o resultado está de acordo com o princípio da incerteza (observe que $\gamma_1 \propto g$).

Por último, é pertinente salientar que no entanto, outros efeitos possivelmente necessitem ser levados em consideração, visto que (3.4) possui correções gravitacionais em ordens maiores. Em [27] usamos uma métrica de teste escrita como

$$ds^2 = (1 + 2\gamma z + \alpha z^2) dt^2 - dl^2 \quad (3.93)$$

para testar se tais correções de ordem maior são decorrem diretamente da curvatura espaço-temporal, onde encontramos que mesmo no caso $\alpha = \gamma^2$ onde o espaço é plano, obtemos uma diferença de energia usando o método de Schwinger. Conclusões similares podem ser obtidas analisando o caso simples do espaço de Rindler em (1+1) dimensões no formalismo canônico.

4 EFEITO UNRUH E TEMPERATURA: DISTINGUÍVEIS?

Em §2.4 introduzimos o conceito básico do Efeito Unruh, que afirma que um estado de vácuo inercial é visto como um estado térmico em um referencial acelerado. Um questionamento que emerge naturalmente consiste na distinguibilidade entre esse efeito e um banho térmico comum. Neste capítulo abordaremos de forma simplificada o que acontece quando ambos (aceleração e temperatura) estão presentes.

Como discussões recentes podemos citar [63–65], onde os autores afirmam que é impossível distinguir a temperatura de Unruh da temperatura de fundo inercial em experimentos que considerem apenas quantidades do tipo $\langle \phi^2 \rangle$. Já uma análise mais extensa em [66] afirma que os valores esperados de algumas grandezas podem variar entre os dois fenômenos.

Usaremos como ferramenta chave o tratamento do efeito Unruh proposto originalmente por [67], onde um detector do tipo Unruh-Dewitt (§2.4.3) é analisado a partir da dinâmica de sistema quântico aberto. Faremos uma revisão do método para em seguida propor uma extensão dos resultados para o caso de temperatura de fundo não nula. Realizaremos isso implementando uma análise numérica para obtenção dos estados assintóticos obtidos por uma partícula acelerada imersa num estado térmico do campo, bem como a geração de emaranhamento no caso de dois detectores.

Como veremos, os resultados obtidos sugerem uma pequena assimetria entre efeitos gerados pela aceleração e temperatura de fundo. Conclusões similares a cerca da distinguibilidade entre as temperaturas também foram obtidas previamente na literatura ao considerar por exemplo, a comparação entre os casos estático e acelerado na presença de uma superfície refletora [71], ou considerando dois detectores viajando separadamente em trajetórias paralelas [70].

Antes de prosseguirmos é importante destacar que testes como o proposto aqui não se dispõem a questionar de forma alguma a validade do efeito Unruh. O que é analisado é apenas a possível detectabilidade da diferença entre dois fenômenos fundamentalmente distintos, um banho térmico comum e o efeito da aceleração constante do observador sobre o espectro de detecção de partículas.

4.1 Análise do Efeito Unruh pela dinâmica de sistema quântico aberto- Evolução da densidade de estados

Como explicado anteriormente, faremos agora uma revisão do desenvolvimento de [67], onde um detector acelerado de Unruh-Dewitt com 2 níveis de energia encontra-se imerso no vácuo de Minkowski. Consideraremos a evolução da densidade de estados quânticos do detector através de uma dinâmica reduzida, onde uma operação de traço elimina os graus de

liberdade não observados no experimento, ou seja do campo vácuo escalar que interage com a partícula.

O Hamiltoniano da partícula H_p será representado com uso das matrizes de Pauli e do produto tensorial

$$H_p = \frac{\omega}{2} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{\omega}{2} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes I, \quad (4.1)$$

onde \mathbf{n} um vetor unitário arbitrário e ω a diferença entre os níveis de energia. Note que poderíamos escolher a orientação de n sem perda de generalidade, mas iremos manter aqui a notação de [67]. O detector é acoplado fracamente ao campo externo por meio do Hamiltoniano de interação

$$H_I = \sum_{\mu=0}^3 \sigma_{\mu} \otimes \Phi_{\mu}(x(\tau)), \quad (4.2)$$

onde

$$\Phi_{\mu} = \chi_{\mu} \phi^{-} + \chi_{\mu}^* \phi^{+}. \quad (4.3)$$

Na expressão acima ϕ^{\pm} são as partes de frequência positiva e negativa da expansão usual do campo escalar(2.7) e χ_{μ} são constantes de acoplamento generalizadas entre o campo e as matrizes de Pauli. Iremos descrever o sistema total(partícula e campo externo) à partir do operador densidade de estados ρ_T

$$\rho_T(t) = \rho_p(\tau) \otimes \rho_f(\tau), \quad (4.4)$$

que evolui segundo

$$\dot{\rho}_T = -i[H, \rho_T], \quad (4.5)$$

em que o Hamiltoniano H é dado por $H = H_p + H_I + H_f$, a soma dos Hamiltonianos da partícula/detector(4.1), o Hamiltoniano de interação(4.2), e o Hamiltoniano usual do campo H_f .

Para um observador, os resultados serão aferidos baseado na evolução de estado do detector, portanto apenas a densidade ρ_p é de interesse. Como descrito no início da seção, precisamos definir uma dinâmica reduzida que elimine os graus de liberdade irrelevantes. A seguir daremos um tratamento intuitivo e sem objetivo de grande formalidade da derivação da equação que descreverá a evolução temporal de $\rho_p(t)$.

4.1.1 Equação Mestra

Para excluir os graus de liberdade do campo externo em (4.4) definiremos um operador projeção que leve ρ_T em ρ_p . Seja $W = w_p \otimes w_f$ um elemento genérico no espaço $h_p \otimes h_f$, definimos o traço parcial implicitamente em[90]

$$Tr_p[Tr_f[W]A] = Tr_{p+f}[W(A \otimes I)], \quad (4.6)$$

onde A é um elemento de h_s . Define-se a amplificação como

$$\mathcal{A}w_p = w_p \otimes a_R \quad (4.7)$$

Em que a_R é um elemento de referência de h_f . Com essas duas operações podemos definir uma projeção idempotente

$$P \equiv \mathcal{A}Tr_f, \quad P^2 = P. \quad (4.8)$$

O operador P leva um elemento do espaço $W = w_p \otimes w_f$ em um elemento de $h_p \otimes a_R$, isomórfico a h_p .

Suponha que em (4.4) tenhamos $\rho_f(0) = |0\rangle\langle 0|$, com $|0\rangle$ sendo o vácuo inercial, escolheremos então $a_R = \rho_f(0) = |0\rangle\langle 0|$. Teremos assim

$$\begin{aligned} PL_{H_p} &= L_{H_p}P \\ PL_{H_I}P &= 0 \\ PL_{H_f}P &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Onde $L_H \equiv [H, \]$ é o operador de Liouville. A primeira e terceira relações são triviais devido ao fato da operação de traço ser apenas nos graus de liberdade do campo e de que $\rho_f(0)$ comuta com H_f . Para a segunda vemos que o comutador de H_I , que é linear em ϕ , com $|0\rangle\langle 0|$ produz apenas elementos fora da diagonal.

Sejam então a densidade reduzida (de interesse, equivalente à ρ_p) dada por

$$\rho = P\rho_T, \quad (4.10)$$

e a densidade complementar

$$\rho_c = Q\rho_T = (1 - P)\rho_T. \quad (4.11)$$

Temos então

$$\rho_T = P\rho_T + Q\rho_T = \rho + \rho_c. \quad (4.12)$$

A equação que governa a evolução temporal da densidade de estados é dada por

$$\dot{\rho}_T = -iL_H\rho_T = -iL_H(\rho + \rho_c), \quad (4.13)$$

onde $H = H_I + H_p + H_f$. Aplicando o operador Q dos dois lados obtemos

$$\dot{\rho}_c = -iQL_H\rho_c - iQL_h\rho. \quad (4.14)$$

Note que $\dot{\rho}_c(0) = 0$. A solução da equação acima pode ser encontrada usando um fator de

integração, o resultado é

$$\rho_c(\tau) = -iQL_H e^{-iQL_H\tau} \int_0^\tau d\tau' e^{iQL_H\tau'} \rho(\tau'). \quad (4.15)$$

Similarmente

$$\dot{\rho} = -iPL_H\rho_c - iPL_h\rho. \quad (4.16)$$

Substituindo a solução para ρ_c

$$\dot{\rho} = -iPL_H\rho - PL_HQL_H \int_0^\tau d\tau' e^{iQL_H(\tau'-\tau)} \rho(\tau'). \quad (4.17)$$

Usando as relações (4.9) e que P e Q são idempotentes, podemos escrever a *Equação Mestra*

$$\dot{\rho} = -iL_{H_p}\rho + \int_0^\tau ds \mathcal{K}(s)\rho(\tau-s), \quad (4.18)$$

onde o $\mathcal{K}(s) = PL_{H_t}Qe^{-iQL_Hs}QL_{H_t}P$.

4.1.1.1 Equação de Kossakowski-Lindblad

A integral no segundo membro equação (4.18) aponta a presença dos chamados efeitos de memória na evolução da densidade de estados, sendo de difícil tratamento. Uma série de simplificações podem ser aplicadas para obter uma equação local. Não iremos apresentar aqui a derivação que envolve uma álgebra extensiva e algumas considerações complexas acerca da dinâmica reduzida.

De forma grosseira, o processo se resume a tomar uma aproximação de interação fraca, de modo que a razão entre os tempos característicos de transição dos estados do detector e do meio é muito grande, e requerer também que o estado inicial do campo seja estático na evolução temporal gerada pelo Hamiltoniano. Tal processo resulta na aproximação Markoviana da equação mestra[68, 69], que com uma álgebra extensa[67], pode ainda ser escrita na forma de Kossakowski-Lindblad

$$\dot{\rho} = -iL_{H_{eff}}\rho + \mathcal{L}[\rho(\tau)], \quad (4.19)$$

onde

$$\mathcal{L}[\rho] = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} (2\sigma_j\rho\sigma_i - \sigma_i\sigma_j\rho - \rho\sigma_i\sigma_j) \quad (4.20)$$

e

$$H_{eff} = \frac{1}{2} \sum_i (\omega n_i + b_i) \sigma_i. \quad (4.21)$$

Considerando, por simplicidade, a condição extra

$$\chi_\mu \chi_\nu^* = \delta_{\mu\nu} \quad (4.22)$$

que implica na diagonalização das funções de correlação $\langle 0|\Phi_\mu\Phi_\nu|0\rangle$, os coeficientes a_{ij} e b_i assumem as formas

$$a_{ij} = A\delta_{ij} - iB\varepsilon_{ijk}n_k + Cn_in_j, \quad (4.23)$$

$$b_i = in_iD. \quad (4.24)$$

As constantes A, B, C e D são dadas em função das transformadas de Fourier e de Hilbert das funções de Wightman. Considere que a partícula segue a mesma trajetória descrita em (2.94) para tempos maiores que zero (em [67] considera-se que a partícula está parada para tempos menores), temos então:

$$\mathcal{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} G^+(x(\tau), x(0)) = \frac{\omega}{2\pi} \frac{1}{1 - e^{\beta_U\omega}}, \quad (4.25)$$

$$\kappa(\omega) = \frac{P}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{\mathcal{G}(\lambda)}{\lambda - \omega}, \quad (4.26)$$

em que P denota valor principal (não confundir com o operador de projeção definido em (4.1.1)). Não iremos obter o valor explícito de $\kappa(\omega)$, no entanto é importante notar que deve haver um processo de renormalização implícito para remover a divergência logarítmica. Finalmente, com as simplificações consideradas, as constantes introduzidas anteriormente são dadas explicitamente por

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}[\mathcal{G}(\omega) + \mathcal{G}(-\omega)] = \frac{\omega}{4\pi} \left(\frac{1 + e^{-\beta_U\omega}}{1 - e^{-\beta_U\omega}} \right), \\ B &= \frac{1}{2}[\mathcal{G}(\omega) - \mathcal{G}(-\omega)] = \frac{\omega}{4\pi}, \\ C &= \frac{1}{2}[2\mathcal{G}(0) - \mathcal{G}(\omega) - \mathcal{G}(-\omega)] = \frac{\omega}{4\pi} \left(\frac{2}{\beta_U\omega} - \frac{1 + e^{-\beta_U\omega}}{1 - e^{-\beta_U\omega}} \right), \\ D &= \kappa(-\omega) - \kappa(\omega). \end{aligned} \quad (4.27)$$

4.1.2 Evolução da densidade de estados para uma partícula

Devemos então resolver a equação (4.19) para encontrar a densidade de estados $\rho(\tau)$. Sabendo que as matrizes de Pauli juntamente com a identidade formam uma base para o espaço bidimensional de operadores hermitianos, consideremos a expansão

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \rho_\mu \sigma_\mu. \quad (4.28)$$

Sabendo que uma matriz densidade arbitrária satisfaz $Tr[\rho] = 1$ e como as matrizes σ_i tem traço nulo, temos $\rho_0 = 1$. Assim, os graus de liberdade na densidade de estados podem ser expressos

a partir de um vetor $|\rho\rangle$, denominado vetor de coerência ou vetor de Bloch:

$$|\rho\rangle = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Substituindo a expansão 4.28) no segundo membro de (4.19) temos os termos

$$-i[H_{eff}, \rho] = - \sum_{i,j,k} \rho_i \Omega_j \varepsilon_{ijk} \sigma_k \quad (4.30)$$

e

$$\mathcal{L}[\rho] = -2A \sum_i \rho_i \sigma_i - 2B \sum_i \sigma_i n_i + \frac{C}{2} \sum_{i,j} (n_i n_j \rho_j \sigma_i - n_j^2 \rho_i \sigma_i), \quad (4.31)$$

em que $\Omega_i = \frac{1}{2} n_i (\omega + iD)$. Podemos agrupar os coeficientes das matrizes de Pauli e rearranjar a equação na forma matricial

$$\frac{\partial}{\partial t} |\rho(\tau)\rangle = -2\mathcal{H} |\rho(\tau)\rangle + |\eta\rangle, \quad (4.32)$$

onde $\eta_i = -4Bn_i$ e

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} a & \alpha + \Omega_3 & \beta - \Omega_2 \\ \alpha - \Omega_3 & c & \gamma + \Omega_1 \\ \beta + \Omega_2 & \gamma - \Omega_1 & b \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

em que

$$\begin{aligned} a &= 2A + C(n_2^2 + n_3^2), & \alpha &= -Cn_1 n_2, \\ b &= 2A + C(n_1^2 + n_3^2), & \beta &= -Cn_1 n_3, \\ c &= 2A + C(n_1^2 + n_2^2), & \gamma &= -Cn_1 n_2. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Podemos simplificar mais ainda considerando o caso $n_3 = 1$ (sem perda de generalidade como comentado anteriormente). Assim \mathcal{H} se reduz à

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 2A + C & \Omega/2 & 0 \\ -\Omega/2 & 2A + C & 0 \\ 0 & 0 & 2A \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

De onde podemos facilmente extrair os autovalores:

$$\lambda_0 = 2A, \quad \lambda_{\pm} = 2A + C \pm i\Omega/2. \quad (4.36)$$

A equação (4.32) pode ser resolvida usando um fator de integração, sua solução é dada por

$$|\rho(\tau)\rangle = e^{-2\mathcal{H}\tau}|\rho(0)\rangle + (1 - e^{-2\mathcal{H}\tau})\frac{1}{2}\mathcal{H}^{-1}|\eta\rangle. \quad (4.37)$$

O comportamento assintótico pode ser extraído notando que podemos expandir $|\rho(0)\rangle$ em termos dos autovetores de \mathcal{H} , como a parte real dos autovalores é positiva, o primeiro termo do segundo membro de (4.37) é nulo, logo, no limite $\tau \rightarrow \infty$ temos

$$|\rho_\infty\rangle = \frac{1}{2}\mathcal{H}^{-1}|\eta\rangle = -\frac{B}{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Substituindo de volta em (4.28) temos

$$\rho_\infty = \frac{1}{2}[1 - \tanh(\beta\omega/2)\sigma_z] \quad (4.39)$$

Lembrando que $H_s = \omega\sigma_z/2$, temos:

$$\begin{aligned} e^{-\beta H_s} &= \sum_n \frac{1}{n!} \left(-\frac{\beta\omega\sigma_z}{2}\right)^n \\ &= \sum_n \frac{1}{(2n)!} \left(-\frac{\beta\omega\sigma_z}{2}\right)^{2n} + \sum_n \frac{1}{(2n+1)!} \left(-\frac{\beta\omega\sigma_z}{2}\right)^{2n+1} \sigma_z \\ &= \cosh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) - \sinh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right)\sigma. \end{aligned} \quad (4.40)$$

De onde inferimos que

$$\rho_\infty = \frac{e^{-\beta_U H_s}}{\text{Tr}[e^{-\beta_U H_s}]}. \quad (4.41)$$

A densidade de estados da partícula para $\tau \rightarrow \infty$ corresponde a um estado de equilíbrio térmico com temperatura $T_U = \frac{\alpha}{2\pi}$ independente da configuração inicial. Esta é mais uma manifestação do efeito de termalização trabalhado nos exemplos anteriores.

Na análise que leva ao resultado (2.99), trabalhamos com a taxa de excitação espontânea do detector, podemos obter esse índice para o sistema descrito pelo Hamiltoniano(4.1) analisando a evolução do sistema para tempo finito. Seja

$$e^{-2\mathcal{H}\tau} = \mathcal{M}(\tau), \quad (4.42)$$

começemos por simplificar a exponencial matricial. A matriz \mathcal{H} pode ser expandida em termos de seus autovalores como

$$\mathcal{H} = \lambda_0 M_0 + \lambda_+ M_+ + \lambda_- M_-, \quad (4.43)$$

onde

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

$$A_+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

$$A_- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

Observe que as matrizes acima satisfazem $A_0 A_+ = A_0 A_- = A_+ A_- = 0$, $A_0 + A_+ + A_- = I$ e são idempotentes, logo

$$\mathcal{M}(\tau) = A_0 e^{-4A\tau} A_0 + e^{-2\tau(2A+C+i\Omega/2)} A_+ + e^{-2\tau(2A+C-i\Omega/2)} A_-. \quad (4.47)$$

Agrupando os termos de expoente real e imaginário temos finalmente

$$\mathcal{M}(\tau) = e^{-4A\tau} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + e^{-2\tau(2A+C)} \begin{pmatrix} \cos(\Omega\tau) & -\sin(\Omega\tau) & 0 \\ \sin(\Omega\tau) & \cos(\Omega\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

A probabilidade de transição para um estado descrito por $\rho_f = \frac{1}{2} \sum_j \rho_{fj} \sigma_j$ é dada por

$$P(\tau) = Tr[\rho_f \rho(\tau)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_i \rho_{fi} \rho_i(\tau). \quad (4.49)$$

Seja $\rho_i(0) = (0, 0, -1)$ o estado fundamental, e $\rho_{fi} = (0, 0, 1)$, temos

$$\begin{aligned} P(\tau) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (0, 0, 1) \mathcal{M} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (0, 0, 1) (1 - \mathcal{M}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -B/A \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1 + e^{\beta_U \omega}} (1 - 4e^{-4A\tau}). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Tomando a derivada em relação ao tempo próprio para $\tau = 0$, temos

$$p = \left. \frac{dP}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \frac{\omega}{\pi} e^{\beta_U \omega} - 1 \quad (4.51)$$

demonstrando que a amplitude de excitação é proporcional ao fator de Planck.

4.1.3 Caso com 2 partículas: Geração de emaranhamento

Consideremos que o sistema cuja evolução queremos analisar consista de duas partículas não interagentes com Hamiltonianos individuais idênticos à (4.1) e Hamiltoniano de interação com o campo escalar

$$H_I = H_{I_1} + H_{I_2} = \sum_{\mu} (\sigma_0 \otimes \sigma_{\mu} + \sigma_{\mu} \otimes \sigma_0) \otimes \Phi_{\mu}. \quad (4.52)$$

Nesse caso teremos uma equação análoga a (4.19), com

$$H_{eff} = H_{eff}^{(1)} + H_{eff}^{(2)} + H_{eff}^{(1,2)}. \quad (4.53)$$

Onde $H_{eff}^{(1,2)}$ é um termo de interação efetiva gerada pelo acoplamento com o campo, dado por

$$H_{eff}^{(1,2)} = i \sum_{ij} \{ [\kappa(\omega) + \kappa(-\omega)] \delta_{ij} + [\kappa(0) - \kappa(\omega) - \kappa(-\omega)] n_i n_j \}. \quad (4.54)$$

Observe no entanto que $\kappa(\omega)$ pode ser fatorado como

$$\kappa(\omega) = \frac{P}{2\pi^2 i} \int_0^{\infty} dz \frac{z}{z - \omega} + \frac{P}{2\pi^2 i} \int_0^{\infty} dz \frac{z}{1 - e^{-\beta_U z}} \left[\frac{1}{z - \omega} - \frac{1}{z - \omega} \right], \quad (4.55)$$

cuja parte dependente de aceleração é ímpar em ω , de modo que $H_{eff}^{(1,2)}$ é independente de aceleração e será desconsiderado nos cálculos a seguir. Em adição, assumiremos que analogamente ao caso de 1 partícula, o efeito de H_{eff} é de gerar um desvio efetivo na frequência $\omega \rightarrow \Omega$. A atenção será concentrada então na dinâmica gerada por $\mathcal{L}[\rho]$, os termos de precessão presentes em (4.48) serão omitidos.

Para simplificar mais ainda, será considerado o regime de altas acelerações, assim os coeficientes A, B e C em (4.23) assumem os valores:

$$A \approx \frac{1}{2\pi\beta_U}, \quad B \approx \frac{\omega}{4\pi}, \quad C \approx 0 \quad (4.56)$$

Deve ser observada a condição de positividade a_{ij} , que implica em $B \leq A$. A expressão para $\mathcal{L}[\rho]$ no presente caso é dada por[67]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\rho] = & \sum_{i,j} a_{ij} \left(\left[(\sigma_j \otimes \sigma_0) \rho (\sigma_i \otimes \sigma_0) - \frac{1}{2} \{ \sigma_i \sigma_j \otimes \sigma_0, \rho \} \right] \right. \\
& + \left[(\sigma_0 \otimes \sigma_j) \rho (\sigma_0 \otimes \sigma_i) - \frac{1}{2} \{ \sigma_0 \otimes \sigma_i \sigma_j, \rho \} \right] \\
& + \left[(\sigma_j \otimes \sigma_0) \rho (\sigma_0 \otimes \sigma_i) - \frac{1}{2} \{ \sigma_i \otimes \sigma_j, \rho \} \right] \\
& \left. + \left[(\sigma_0 \otimes \sigma_j) \rho (\sigma_i \otimes \sigma_0) - \frac{1}{2} \{ \sigma_j \otimes \sigma_i, \rho \} \right] \right). \tag{4.57}
\end{aligned}$$

Seja ρ decomposto como

$$\rho(t) = \frac{1}{4} [\sigma_0 \otimes \sigma_0 + \sum_i \rho_{0i}(t) \sigma_0 \otimes \sigma_i + \sum_i \rho_{i0}(t) \sigma_i \otimes \sigma_0 + \sum_{i,j} \rho_{ij}(t) \sigma_i \otimes \sigma_j]. \tag{4.58}$$

Usando novamente a independência linear das matrizes σ_μ , podemos equacionar as componentes de $\rho(t)$ em (4.19)

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{0i} &= -4A\rho_{0i} + 2B(2+T)n_i - 2B \sum_k n_k \rho_{ik} \\
\dot{\rho}_{i0} &= -4A\rho_{i0} + 2B(2+T)n_i - 2B \sum_k n_k \rho_{ki} \\
\dot{\rho}_{ij} &= -4A[2\rho_{ij} + \rho_{ji} - T\delta_{ij}] \\
&+ 2B[n_i(2\rho_{0j} + \rho_{j0}) + n_j(2\rho_{i0} + \rho_{0i}) - \delta_{ij} \sum_k n_k (\rho_{k0} + \rho_{0k})], \tag{4.59}
\end{aligned}$$

onde $T = \sum_i \rho_{ii}$ é uma constante de movimento ($\dot{\rho}_{ii} = 0$ como pode ser facilmente verificado na equação acima) e também limitado pela condição de hermiticidade da densidade de estados ($-3 \leq T \leq 1$). Podemos ainda facilitar a análise separando as partes simétrica e antissimétrica. Para as componentes antissimétricas temos

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{[0i]} &= -4A\rho_{[0i]} - 2B \sum_k n_k \rho_{[ik]}, \\
\dot{\rho}_{[ij]} &= -4A\rho_{[ij]} + 2B(n_i \rho_{[0j]} + n_j \rho_{[0i]}). \tag{4.60}
\end{aligned}$$

A solução das equações acima envolve apenas fatores de expoentes reais negativos, como não há termos inomogêneos, pode-se inferir que as componentes AS são assintoticamente nulas.

Para as componentes simétricas temos

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{(0i)} &= -4A\rho_{(0i)} + 2B(T+2)n_i - 2B \sum_k n_k \rho_{(ik)}, \\
\dot{\rho}_{(ij)} &= -4A(3\rho_{(ij)} - T\delta_{ij}) + 3B[n_j \rho_{(i0)} + n_i \rho_{(j0)}] - 4B\delta_{ij} \sum_k n_k \rho_{(k0)}. \tag{4.61}
\end{aligned}$$

Similarmente ao caso AS a evolução temporal pode ser expressa em termos de exponenciais reais assintoticamente nulas, admitindo solução estática para tempos muito grandes. Assim, em (4.61), para $\tau \rightarrow \infty$ podemos tomar $\dot{\rho}_{(i0)} = \dot{\rho}_{(ij)} = 0$ obtendo

$$\hat{\rho}_{i0} = \frac{R}{2}[(T+2)n_i - \sum_k n_k \hat{\rho}_{ki}] \quad (4.62)$$

e

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{T}{3}\delta_{ij} + \frac{R}{2}(n_j \hat{\rho}_{i0} n_i \hat{\rho}_{j0}) - R\delta_{ij} \sum_k n_k \hat{\rho}_{k0}, \quad (4.63)$$

onde $R = B/A \leq 1$. Substituindo (4.63) em (4.62), temos

$$\hat{\rho}_{i0} \left(1 + \frac{R^2}{4}\right) + \frac{R^2}{12} n_i \sum_k n_k \hat{\rho}_{k0} = \frac{R}{3}(T+3)n_i \quad (4.64)$$

Que pode ser escrita em forma matricial e invertida, obtendo

$$\hat{\rho}_{i0} = \frac{R(T+3)}{3+R^2} n_i. \quad (4.65)$$

Substituindo de volta em (4.63) obtemos imediatamente

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{1}{3+R^2} [n_i n_j (T+3) + (T-R^2)\delta_{ij}]. \quad (4.66)$$

Analisemos agora o emaranhamento gerado, que pode ser expresso através da *concorrência*[91]. Considere a matriz

$$\rho_C = \rho(\sigma_2 \otimes \sigma_2) \rho^T (\sigma_2 \otimes \sigma_2), \quad (4.67)$$

que possui apenas autovalores reais e positivos. Sejam $\lambda_{1,2,3,4}$ as raízes quadradas desses autovalores dispostas em ordem decrescente, a concorrência será definida por:

$$\mathcal{C}[\rho] = \max\{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0\} \quad (4.68)$$

Sendo $1 \geq \mathcal{C} \leq 0$, onde um valor nulo representa um estado separável e 1 um estado totalmente emaranhado. Para a matriz de equilíbrio $\hat{\rho}$ os valores de λ são dados por:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{(1-T)}{4}, \\ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 &= \frac{(1-R^2)(3+T)}{4(3+R^2)}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Observe que, dependendo dos valores R e T a ordem pode mudar, no entanto o único caso em \mathcal{C} é não nula acontece para

$$(1-T) > 3 \frac{(1-R^2)(3+T)}{(3+R^2)} \Rightarrow T < \frac{5R^2-3}{3-R^2}, \quad (4.70)$$

onde, neste caso:

$$\mathcal{C}[\hat{\rho}] = \frac{3 - R^2}{2(3 + R^2)} \left[\frac{5R^2 - 3}{3 - R^2} - T \right]. \quad (4.71)$$

O resultado acima indica que o movimento acelerado das duas partículas gera emaranhamento, mesmo que elas não interajam entre si, devido ao acoplamento com o campo externo. Observe que este emaranhamento decresce linearmente com T , sendo máximo para $T = -3$ e nulo em $T = 1$.

Uma aplicação simples é o caso de duas partículas preparadas em um estado inicial separável:

$$\rho(0) = (1 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \otimes (1 + \vec{q} \cdot \vec{\sigma}), \quad (4.72)$$

para o qual temos $\mathcal{C} = 0$. O emaranhamento final máximo se dá para $\tau = \vec{p} \cdot \vec{q} = -1$, sendo expresso por

$$\mathcal{C}[\hat{\rho}] = \frac{2R^2}{3 + R^2}. \quad (4.73)$$

Observe que para $0 \leq R \leq 1$, \mathcal{C} é monotonicamente crescente em R , e portanto decresce com a aceleração ou temperatura.

Isto conclui a revisão do desenvolvimento de [67]. Apresentaremos a seguir uma proposta simples de extensão para o caso com temperatura de fundo não nula. Nosso objetivo primário é verificar se há simetria nos efeitos do banho térmico e da aceleração própria, quantificando a diferença caso haja.

4.2 Densidade de estados assintótica com temperatura de fundo não-nula

Usaremos agora o formalismo descrito na seção anterior para o analisar o caso onde o campo de fundo encontra-se num estado de equilíbrio térmico[80] descrito pela densidade

$$\rho_f(0) = \frac{e^{-\beta H_f}}{Tr[e^{-\beta H_f}]}. \quad (4.74)$$

Usaremos a aproximação markoviana para descrever os estados assintóticos das partículas aceleradas e a formação de emaranhamento.

A extensão pode ser feita de forma imediata, sendo que agora as funções de Wightman em (4.27) devem ser substituídas pela sua versão termal

$$G^+(x + \Delta x, x) = -\frac{1}{4\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\Delta x^0 - i\varepsilon)^2 - \vec{\Delta x}^2 + in\beta}. \quad (4.75)$$

Tomando a trajetória (2.94)(usaremos por praticidade $a = 2\pi\alpha^{-1}$) e fazendo o somatório obte-

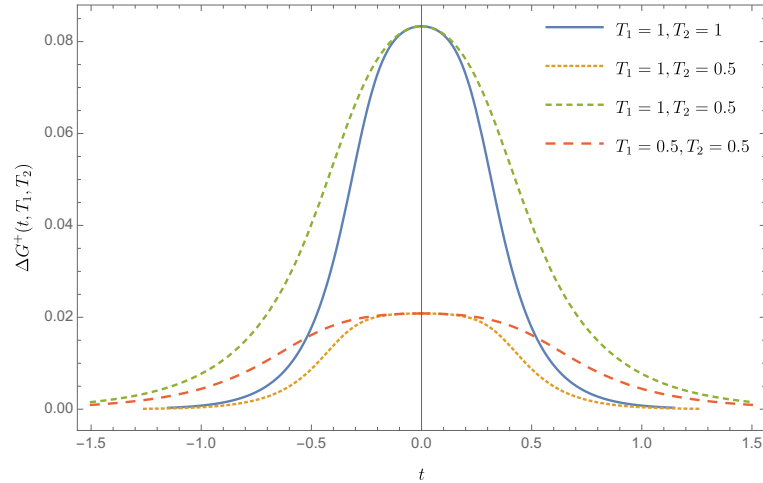


Figura 3: Gráficos de $\Delta G_{\beta}^{+}(t, T_1, T_2)$ em função do tempo. As curvas lembram um formato gaussiano, com valor máximo $T_1^2/12$ em $t=0$.

mos[81,92]

$$G^{+}(t, 0) = \frac{1}{8\beta\alpha} \operatorname{csch}^2\left(\frac{\pi t}{\alpha}\right) \left\{ \coth\left[\frac{\alpha}{\beta}(e^{2\pi t/\alpha} - 1)\right] - \coth\left[\frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-2\pi t/\alpha})\right] \right\}, \quad (4.76)$$

Temos uma dificuldade algébrica na obtenção das transformadas de Fourier para (4.76), a integral (4.25) não possui uma expressão analítica. Para contornar essa dificuldade usaremos o truque proposto em [81], decompondo a função de Wightmann da seguinte forma

$$G^{+}(t, 0) = -\frac{1}{4\alpha^2} \operatorname{csch}^2(\pi t/\alpha) + \Delta G_{\alpha\beta}^{+}. \quad (4.77)$$

O primeiro termo representa claramente o caso da partícula acelerada sem temperatura de fundo e o segundo é a correção que dependerá tanto de α quanto β

$$\Delta G_{\alpha\beta}^{+} = \frac{1}{4\alpha^2} \operatorname{csch}^2(\pi t/\alpha) + G^{+}(t, 0). \quad (4.78)$$

Na figura 3 podemos observar o comportamento de (4.78) para alguns valores fictícios de temperatura de fundo e aceleração. Tanto estes quanto os valores que usaremos a seguir são escolhidos por praticidade na análise e comparação dos efeitos. No final deste capítulo faremos algumas considerações breves sobre valores mais realísticos.

Precisamos então obter a quantidade $R = B/A$, das equações (4.27) e (4.77). Por inspeção vemos que a transformada de $\Delta G_{\alpha\beta}^{+}$ é ímpar nas frequências, de modo que não há alteração em $B(\omega)$, para A temos

$$A \rightarrow A + \int_{-\infty}^{\infty} dt \cos(\omega t) \Delta G_{\alpha\beta}^{+}. \quad (4.79)$$

Definindo, por praticidade

$$\gamma(\omega, \alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \cos(\omega t) \Delta G_{\alpha\beta}^+, \quad (4.80)$$

podemos escrever os novos valores de R como

$$R(\omega, \beta^{-1}, \alpha^{-1}) = \left[\coth\left(\frac{\alpha\omega}{2}\right) + \frac{4\pi}{\omega} \gamma(\omega, \alpha, \beta) \right]^{-1}. \quad (4.81)$$

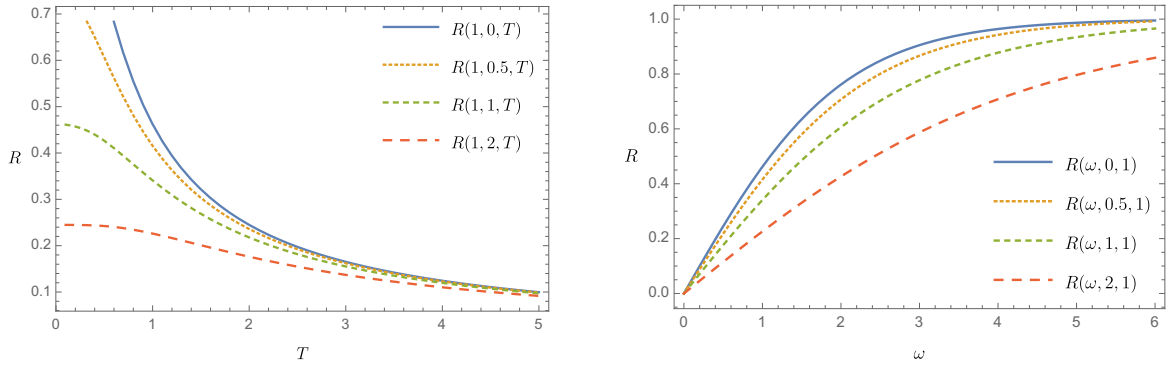
Observe que a análise da quantidade (4.81) é suficiente para inferir sobre o estado final de uma partícula (4.38) e a máxima geração de emaranhamento para partículas em estado inicial separável (4.73)(monotônica em R). Assim, iremos analisar e quantificar a diferença entre os efeitos da temperatura de fundo β^{-1} e temperatura de Unruh $a/(2\pi) = \alpha^{-1}$ através de uma análise numérica dos valores de (4.81).

Na figura 4 temos o comportamento geral de R em função da variação da temperatura de Unruh $T = \alpha^{-1}$ (item a) e da frequência(energia) do detector(item b) para diferentes temperaturas de fundo. Tanto em (a) quanto (b) podemos notar que tal comportamento é bastante similar ao caso do efeito Unruh comum($\beta^{-1} \rightarrow 0$), o efeito da temperatura de fundo é de diminuir os valores de R que no caso de (4.73), diminui o emaranhamento gerado.

Já na figura 5 comparamos as evoluções ao trocar as temperaturas de Unruh e do banho térmico(a), e plotamos a diferença do fator de assimetria $s(\omega, T', T) = R(\omega, T', T) - R(\omega, T, T')$. Podemos ver que o comportamento é não monotônico e embora a distinguibilidade seja perceptível, a diferença relativa em geral é bem pequena. Em primeira análise, poderíamos crer que a diferença seria bem mais aparente se olhássemos apenas para a forma da função (4.77), mas a análise quantitativa apresentada revela que os efeitos são na verdade muito próximos.

Portanto, a presente abordagem aponta uma discordância dos resultados de [63–65] e reforça os argumentos de [70, 71]. No entanto, vale ressaltar que dada a pequena diferença prevista, é necessário checar se a discrepância não decorre da aproximação markoviana aplicada. Uma abordagem não markoviana do efeito Unruh é apresentada em [74], no entanto os efeitos de memória encontrados são expressivos apenas para tempos pequenos, o que justifica em parte nossa escolha de analisar apenas os estados assintóticos.

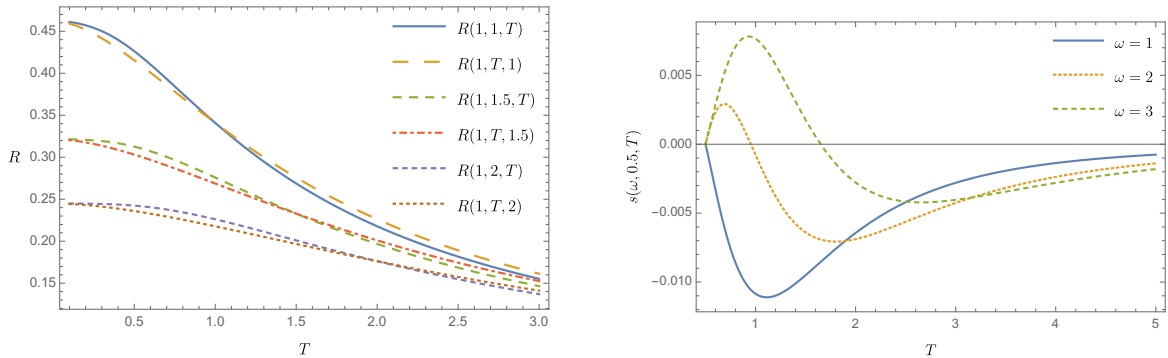
Como comentado previamente os valores usados na construção dos gráficos 3-5 são fictícios. De fato, é complicado trabalhar com valores realizáveis para o efeito Unruh, devido a magnitude da aceleração necessária para gerar uma termalização observável ser extremamente grande. Podemos no entanto ter uma visão um pouco mais clara da ordem de grandeza trabalhada anteriormente notando que $R(\omega, T, T') = R(\lambda\omega, \lambda T, \lambda T')$, o que equivale a ajustar as escalas características de tempo sobre a qual a correção térmica age(figura 3). Deste modo de-



(a) Evolução dos valores de R em função da temperatura de unruh para diferentes temperaturas de fundo.

(b) Evolução de R em função da frequência do detector para $\alpha^{-1} = 1$ e diferentes valores da temperatura de fundo.

Figura 4: Curvas de evolução R em função da aceleração e da frequência do detector.



(a) Comparação da evolução de R na temperatura e aceleração

(b) Valores de $s(\omega, T', T) = R(\omega, T', T) - R(\omega, T, T')$ para $T' = 0.5$ e $\omega = 1, 2, 3$.

Figura 5: Assimetria na dependência de R em α e β .

vemos nos atentar apenas para a proporção entre os parâmetros de temperatura e a frequência do detector. Em particular, para valores da ordem de $\alpha^{-1} \sim \beta^{-1} \sim 1K$, a frequência unitária usada por exemplo em 5(a) é da ordem da estrutura fina do hidrogênio. No entanto acelerações dessa ordem, ou mesmo bem menores, ainda são inviáveis experimentalmente. Uma proposta um pouco mais realista no entanto envolve o uso de trajetórias circulares, que já foi trabalhada previamente no contexto de sistema quântico aberto[79].

Em geral, é plausível esperar que em experimentos futuros os efeitos de temperatura de fundo sejam comparáveis, ou mesmo bem maiores que o de aceleração. Por isso, a inclusão da temperatura é de grande importância. Vale notar que de forma análoga poderíamos em (4.78) ter separado o efeito térmico de fundo da “correção” de aceleração

$$G^+(t, 0) = -\frac{1}{4\beta^2} \operatorname{csch}^2(\pi t/\beta) + \Delta G_{\beta\alpha}^+ \quad (4.82)$$

que seria mais adequada por exemplo, em uma análise fenomenológica focada em obter pequenos desvios na termalização inercial decorrentes do efeito Unruh. Embora matematicamente

idêntico, a separação do efeito de maior ordem facilita a análise numérica. A utilização dessa abordagem em uma configuração mais realizável como o caso de trajetória circular poderia a princípio ser usada para obter previsões em experimentos mais sensíveis num futuro próximo.

5 CONCLUSÃO

No presente trabalho nos propomos a abordar dois fenômenos ligados a natureza do vácuo quântico, quando na presença de efeitos gravitacionais ou não inerciais. Especificamente, trabalhamos com o efeito Casimir em campo gravitacional fraco e com a análise markoviana do efeito Unruh em temperatura finita. Tais análises foram apresentadas separadamente nos capítulos §3 e §4 desta tese. Usamos o modelo de um campo escalar real e sem massa, a escolha se justifica pela simplificação dos cálculos envolvidos, enquanto da ausência de grandes prejuízos na obtenção dos aspectos fundamentais da teoria.

No capítulo §3 demonstramos que a energia de Casimir como definida em (3.4) para o vácuo confinado entre placas paralelas obedecendo condições de contorno de Dirichlet não sofre alteração devido a presença de um campo gravitacional fraco do tipo (3.21), pelo menos até ordem de $\gamma \sim [M/R]^2$, mostramos ainda que o resultado é analogamente válido para um elemento de linha mais geral do tipo (3.73). A demonstração foi feita utilizando tanto o método de expansão em modos normais[22], quanto pelo método de Schwinger[26, 27]. Esses resultados contrariam o que é mostrado em alguns artigos anteriores[16–21, 23]. Tal discrepância foi abordada diretamente em [22] onde demonstramos inconsistências dos resultados prévios.

Uma hipótese levantada para a ausência de correção gravitacional, como comentado em §1.1, é a de que o elemento de linha do tipo (3.73) possui componentes do tensor de Riemann trivialmente nulas em ordem de γ . Embora o resultado possa parecer inicialmente estranho, em §3.5 discutimos que ele está na verdade de acordo com o princípio da equivalência, conciliando o método aplicado em [16] com outras discussões como [53–59]. Argumentamos que a expressão obtida em (3.55) trata-se na verdade da energia “inercial” do sistema, enquanto sua energia total pode ser obtida à partir de (3.88), de onde podemos extrair um termo associado ao “peso do vácuo”. No entanto, em um resultado recente [27] testamos a hipótese da curvatura, mostrando que a densidade de energia definida à partir de (3.72), que supomos análoga à (3.4) recebe correções em ordens maiores, mesmo para o caso de espaço-tempo plano (em referencial acelerado). Este último resultado indica que uma maior investigação pode ser necessária ainda no contexto de campos gravitacionais estáticos fracos.

O resultado apresentado é de importância direta em experimentos de peso do vácuo como o experimento de “Archimedes” descrito em [60], onde as discussões propostas poderão finalmente ser testadas. É importante ressaltar no entanto que em um experimento de alta precisão visando observar efeitos gravitacionais, será importante incorporar outras correções fundamentais como efeitos de temperatura, que não são abordados aqui. Em geral, vista a abundância de resultados apresentados por outros autores e a possibilidade de teste experimen-

tal num futuro próximo, é importante que seja alcançado um consenso nas previsões teóricas, o que torna a análise apresentada aqui de relevância na possível revisão dos resultados anteriores citados.

No capítulo §4 propomos uma análise numérica para estudo da densidade de estados e geração de emaranhamento obtidas em tempos muito grandes para um ou dois detectores de partículas regidos por uma equação mestra markoviana[80]. Os resultados são sintetizados nas figuras 4 e 5, onde podemos observar uma clara, porém pequena assimetria nos efeitos da aceleração e temperatura de fundo, indicando uma possível distinguibilidade. O segundo gráfico em 5 revela ainda que essa diferença é não monotônica, sendo mais pronunciada para algumas combinações específicas de parâmetros. No entanto, vemos que efeitos como a geração de emaranhamento são monotonicamente decrescentes na temperatura e aceleração independentemente da combinação desses parâmetros e dos níveis de energia do detector.

Uma inspeção superficial da função de Green (4.76) poderia por exemplo, induzir o leitor a esperar uma assimetria maior nos efeitos, mas como visto nos gráficos apresentados a diferença entre as curvas obtidas é de fato muito pequena. É importante ainda lembrar que a análise proposta aqui possui algumas limitações, visto que ignoramos efeitos de memória, um possível estudo futuro mais completo usando uma evolução não markoviana como em [74] pode esclarecer melhor a dúvida e prover uma comparação mais definitiva com trabalhos anteriores que afirmam indistinguibilidade[63–65].

Um dos grandes desafios do efeito Unruh é a sua mensurabilidade. Efeitos de aceleração no espectro de detecção são em geral pequenos demais, o que torna mais importante a análise em temperaturas finitas, visto que os efeitos dessa temperatura de fundo serão possivelmente muito maiores que os não inerciais. Uma possível aplicação mais realista seria aplicar a presente análise para o caso de uma trajetória circular, mais realizável experimentalmente, tal proposta já foi trabalhada no caso de temperatura zero para a abordagem de sistema quântico aberto em [79].

Apesar das limitações descritas, esperamos que o tratamento do efeito Unruh dado aqui possa servir de base para futuros trabalhos com uma análise um pouco mais completa. Que essas generalizações possam prover uma maior compreensão da analogia entre efeitos térmicos e não-inerciais/gravitacionais, assim como fornecer uma base fenomenológica para experimentos que esperamos poder ser realizáveis em um futuro próximo. Por último relembramos que os testes teóricos propostos não tratam da validade do efeito Unruh, mas apenas da detectabilidade da distinção entre este efeito e aquele gerado por um banho térmico comum.

APÊNDICE A – OBTENÇÃO DA ENERGIA DE CASIMIR PELO MÉTODO DE SCHWINGER

Partiremos do funcional gerador para o campo escalar e obteremos a expressão (3.65) para o funcional $W[0]$ no espaço plano (no caso curvo a derivação se dá de forma análoga), assim como a energia de Casimir. Seja o funcional gerador

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x (\phi \hat{K} \phi - 2J\phi) \right], \quad (\text{A.1})$$

onde $\hat{K} \equiv -\square + m^2$ (por uma questão prática que logo ficará clara manteremos o termo de massa). Expandiremos o campo ϕ em autofunções do operador diferencial \hat{K} , obedecendo $\hat{K}\phi_n = \lambda_n\phi_n$, com o índice n representando um coletivo de parâmetros contínuos e discretos

$$\phi = \sum_n a_n \phi_n, \quad (\text{A.2})$$

analogamente expandiremos também a corrente

$$J = \sum_n b_n \phi_n. \quad (\text{A.3})$$

As componentes ϕ_n satisfazem a condição de ortonormalização

$$\int d^4x [\phi_n^*(x) \phi_m(x)] = \delta_{nm}. \quad (\text{A.4})$$

Assim temos

$$\mathcal{D}\phi = \prod_n da_n, \quad (\text{A.5})$$

e para o funcional gerador

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \prod_n da_n \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x \sum_{n,m} (a_n a_m \phi_n \phi_m \lambda_m - 2a_n b_n \phi_n \phi_m) \right] \\ &= \prod_n \left\{ \int da_n \exp \left[-\frac{i}{2} (a_n^2 \lambda_n - 2a_n b_n) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

A integral acima é gaussiana e pode ser resolvida completando o quadrado perfeito no expoente,

o que resulta na expressão

$$\begin{aligned} Z[J] &= \prod_n \left[\sqrt{\frac{2\pi}{i\lambda}} \exp\left(\frac{ib_n^2}{2\lambda_n}\right) \right] \\ &= N(\det \hat{K})^{-1/2} \exp\left(\frac{i}{2} \int d^4x J \hat{K}^{-1} J\right). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

A constante divergente N e o termo exponencial não são de interesse no cálculo de $W[0]$. Apenas o termo dependente de $\det \hat{K} = \prod_n \lambda_n$ que é dependente das condições de contorno será mantido. Temos então de (3.64)

$$\begin{aligned} W[0] &= i \ln(Z[0]) = i \ln[(\det \hat{K})^{-1/2}] \\ &= -\frac{i}{2} \text{Tr}[\ln(-\square + m^2)]. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Podemos chegar mais facilmente ao resultando diferenciando $W[0]$ em relação à m^2

$$\frac{dW}{dm^2} = -\frac{i}{2} \text{Tr} \left(\frac{1}{-\square + m^2} \right). \quad (\text{A.9})$$

A expressão acima pode ser escrita de forma conveniente usando a integral de tempo próprio de Schwinger, dada por ([83])

$$\frac{i}{A} = \int_0^\infty e^{iAs} ds, \quad (\text{A.10})$$

onde uma pequena constante imaginária necessária para convergência foi omitida. Assim temos

$$\frac{dW}{dm^2} = \frac{1}{2} \int ds \text{Tr}[e^{-i\hat{K}s}]. \quad (\text{A.11})$$

Integrando em relação a m^2 e descartando a constante infinita, obtemos finalmente

$$W[0] = \frac{i}{2} \int \frac{ds}{s} \text{Tr}[e^{-i\hat{K}s}]. \quad (\text{A.12})$$

Mantivemos o termo de massa pela praticidade do truque anterior, podemos agora tomar o limite $m = 0$ (analogamente poderíamos partir de um Lagrangeano sem massa e introduzir um pequeno parâmetro auxiliar para realização do truque anterior).

Expandiremos ainda o traço usando um conjunto completo de autofunções, de modo que

$$W[0] = \frac{i}{2} \sum_n \int d^4x |\phi_n|^2 \int \frac{ds}{s} e^{-is\lambda_n} \quad (\text{A.13})$$

Para as condições de contorno usuais nas placas paralelas, temos as autofunções normalizadas

$$\phi_{n,k,\omega}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(n\pi z/L) \exp[i(\omega t - k_\perp \cdot \vec{x}_\perp)], \quad (\text{A.14})$$

com autovalores

$$\lambda = k_{\perp}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} - \omega^2. \quad (\text{A.15})$$

Note que n, k_{\perp} e ω não obedecem a uma relação dispersão, são apenas parâmetros de autovalores do D'Alembertiano. Assumem valores em todo o eixo real para ω , no \mathbb{R}^2 para k_{\perp} e conjunto dos naturais para n , de modo que as funções (A.14) formem um conjunto ortonormal completo na região entre as placas dadas as condições de contorno. Portanto

$$W[0] = \frac{i}{2} \int d^4x \sum_n \int d^2k \int d\omega \int ds s^{-1} |\phi_{n,k,\omega}(x)|^2 \exp \left[-is \left(k_{\perp}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} - \omega^2 \right) \right]. \quad (\text{A.16})$$

A integral acima é divergente, para obter um valor finito usaremos o processo de regularização apresentado em [93], inserindo um parâmetro ν no expoente de s na expressão anterior. Assim temos

$$W^{(\nu)}[0] = \frac{i}{2} \int d^4x \sum_n \int d^2k \int d\omega \int ds s^{\nu-1} |\phi_{n,k,\omega}(x)|^2 \exp \left[-is \left(k_{\perp}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} - \omega^2 \right) \right]. \quad (\text{A.17})$$

Resolvendo a parte espacial da integral temos (consideraremos uma superfície transversal muito grande A e tempo T)

$$\begin{aligned} W^{(\nu)}[0] &= \frac{iAT}{2(2\pi)^3} \sum_n \int ds \int d^2k \int d\omega s^{\nu-1} \exp \left[-is \left(k_{\perp}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} - \omega^2 \right) \right] \\ &= \frac{iAT}{2(2\pi)^3} \sum_n \int ds s^{\nu-1} \exp \left(-is \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) \left(\frac{\pi}{s} \right)^{3/2} \frac{1}{i\sqrt{-i}}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

A integral em s corresponde (após uma rotação de Wick) a uma representação da função Gamma. Calcularemos em vez da energia de Casimir total, sua densidade volumétrica $\bar{\epsilon} = W^{(0)}[0]/(ALT)$, assim

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}(\nu) &= \frac{i^{1/2}}{16\pi^3 L} \sum_n \left(i \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right)^{-(\nu-3/2)} \Gamma(\nu-3/2) \\ &\cong \frac{i^{2-\nu}}{16L^4} \pi^{-2\nu+3/2} \Gamma(\nu-3/2) \zeta(2\nu-3). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Aqui fica clara a escolha do regularizador, permitindo que façamos a continuação analítica do somatório para $\zeta(2\nu-3)$ (implícita no símbolo \cong entre as equações acima). Restaurando o valor original $\nu = 0$ temos finalmente

$$\bar{\epsilon} = -\frac{\pi^2}{1440L^4}, \quad (\text{A.20})$$

a expressão conhecida para a densidade volumétrica da energia de Casimir no espaço de Minkowski.

REFERÊNCIAS

- [1] PLANCK, M. Über irreversible strahlungsvorgänge. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, v. 5, n. 1, p. 440–480, 1899.
- [2] DUFF, M. *Quantum Gravity 2 ed CJ Isham, R Penrose and DW Sciama*. [S.l.]: Oxford: Clarendon, 1981.
- [3] BIRRELL, N. D.; BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. *Quantum fields in curved space*. [S.l.]: Cambridge university press, 1984.
- [4] PARKER, L.; TOMS, D. *Quantum field theory in curved spacetime: quantized fields and gravity*. [S.l.]: Cambridge university press, 2009.
- [5] CASIMIR, H. B. On the attraction between two perfectly conducting plates. In: *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* [S.l.: s.n.], 1948. v. 51, p. 793.
- [6] DAVIES, P. Scalar particle production in Schwarzschild and Rindler metrics. *J. Phys. A*, v. 8, p. 609–616, 1975.
- [7] UNRUH, W. Notes on black hole evaporation. *Phys. Rev. D*, v. 14, p. 870, 1976.
- [8] VISSER, M. Regularization versus Renormalization: Why Are Casimir Energy Differences So Often Finite? *Particles*, v. 2, n. 1, p. 14–31, 2018.
- [9] LAMOREAUX, S. K. Demonstration of the casimir force in the 0.6 to 6 μm range. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 78, p. 5–8, Jan 1997. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.5>.
- [10] MOHIDEEN, U.; ROY, A. Precision measurement of the casimir force from 0.1 to 0.9 μm . *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 81, p. 4549–4552, Nov 1998. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.4549>.
- [11] CHANG, C.-C. et al. Reduction of the casimir force from indium tin oxide film by uv treatment. *Physical review letters*, APS, v. 107, n. 9, p. 090403, 2011.
- [12] BANISHEV, A. A. et al. Modifying the casimir force between indium tin oxide film and au sphere. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 85, p. 045436, Jan 2012. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.85.045436>.
- [13] CHANG, C.-C. et al. Gradient of the casimir force between au surfaces of a sphere and a plate measured using an atomic force microscope in a frequency-shift technique. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 85, p. 165443, Apr 2012. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.85.165443>.
- [14] BANISHEV, A. A. et al. Measurement of the gradient of the casimir force between a nonmagnetic gold sphere and a magnetic nickel plate. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 85, p. 195422, May 2012. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.85.195422>.

- [15] BANISHEV, A. A. et al. Demonstration of the casimir force between ferromagnetic surfaces of a ni-coated sphere and a ni-coated plate. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 110, p. 137401, Mar 2013. Disponível em: [⟨https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.137401⟩](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.137401).
- [16] SORGE, F. Casimir effect in a weak gravitational field. *Classical and Quantum Gravity*, v. 22, n. 23, p. 5109, 2005. Disponível em: [⟨http://stacks.iop.org/0264-9381/22/i=23/a=012⟩](http://stacks.iop.org/0264-9381/22/i=23/a=012).
- [17] BUONINFANTE, L. et al. Casimir effect in quadratic theories of gravity. *Eur. Phys. J. C*, v. 79, n. 1, p. 41, 2019.
- [18] LAMBIASE, G.; STABILE, A.; STABILE, A. Casimir effect in Extended Theories of Gravity. *Phys. Rev.*, D95, n. 8, p. 084019, 2017.
- [19] BEZERRA, V.; MOTA, H.; MUNIZ, C. Casimir effect due to a slowly rotating source in the weak field approximation. *Phys. Rev. D*, v. 89, n. 4, p. 044015, 2014.
- [20] BLASONE, M. et al. Casimir effect in Post-Newtonian Gravity with Lorentz-violation. *Eur. Phys. J. C*, v. 78, n. 11, p. 976, 2018.
- [21] NAZARI, B. Casimir effect of two conducting parallel plates in a general weak gravitational field. *Eur. Phys. J.*, C75, n. 10, p. 501, 2015.
- [22] LIMA, A. et al. Null Second Order Corrections to Casimir Energy in Weak Gravitational Field. *JCAP*, v. 07, p. 011, 2019.
- [23] SORGE, F. Casimir effect in a weak gravitational field: Schwinger's approach. *Class. Quant. Grav.*, v. 36, n. 23, p. 235006, 2019.
- [24] SCHWINGER, J. Casimir effect in source theory. *Letters in Mathematical Physics*, Springer, v. 1, n. 1, p. 43–47, 1975.
- [25] SCHWINGER, J. Casimir effect in source theory ii. *letters in mathematical physics*, Springer, v. 24, n. 1, p. 59–61, 1992.
- [26] LIMA, A.; ALENCAR, G.; LANDIM, R. Comment on "casimir effect in a weak gravitational field: Schwinger's approach". 7 2020.
- [27] LIMA, A.; ALENCAR, G.; LANDIM, R. Null second order corrections to Casimir energy in weak gravitational field: The Schwinger's approach. 7 2020. (Aceito para publicação no JCAP).
- [28] BIMONTE, G.; ESPOSITO, G.; ROSA, L. From rindler space to the electromagnetic energy-momentum tensor of a casimir apparatus in a weak gravitational field. *Physical Review D*, v. 78, p. 024010, 07 2008.
- [29] DOWKER, J. S.; CRITCHLEY, R. Covariant casimir calculations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 9, n. 4, p. 535–540, apr 1976. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.1088%2F0305-4470%2F9%2F4%2F009⟩](https://doi.org/10.1088%2F0305-4470%2F9%2F4%2F009).
- [30] FORD, L. H. Quantum vacuum energy in a closed universe. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 14, p. 3304–3313, Dec 1976. Disponível em: [⟨https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.14.3304⟩](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.14.3304).

- [31] ALTAIE, M. B.; DOWKER, J. S. Spinor fields in an einstein universe: Finite-temperature effects. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 18, p. 3557–3564, Nov 1978. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.18.3557>.
- [32] BAYIN, S. m. c. i. m. c.; ÖZCAN, M. Casimir energy in a curved background with a spherical boundary: An exactly solvable case. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 48, p. 2806–2812, Sep 1993. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.48.2806>.
- [33] KARIM, M.; BOKHARI, A. H.; AHMEDOV, B. J. The casimir force in the schwarzschild metric. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 17, n. 12, p. 2459–2462, jun 2000. Disponível em: <https://doi.org/10.1088%2F0264-9381%2F17%2F12%2F318>.
- [34] SETARE, M. R. Casimir stress for concentric spheres in de sitter space. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 18, n. 22, p. 4823–4829, nov 2001. Disponível em: <https://doi.org/10.1088%2F0264-9381%2F18%2F22%2F308>.
- [35] ELIZALDE, E. et al. Casimir effect in de sitter and anti–de sitter braneworlds. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 67, p. 063515, Mar 2003. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.67.063515>.
- [36] ALIEV, A. N. Casimir effect in the spacetime of multiple cosmic strings. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 55, p. 3903–3906, Mar 1997. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.55.3903>.
- [37] ELIZALDE, E. Uses of zeta regularization in QFT with boundary conditions: a cosmo-topological casimir effect. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 39, n. 21, p. 6299–6307, may 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1088%2F0305-4470%2F39%2F21%2Fs21>.
- [38] ELIZALDE, E.; ODINTSOV, S. D.; SAHARIAN, A. A. Repulsive casimir effect from extra dimensions and robin boundary conditions: From branes to pistons. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 79, p. 065023, Mar 2009. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.79.065023>.
- [39] NOURI-ZONOZ, M.; NAZARI, B. Vacuum energy and the spacetime index of refraction: A new synthesis. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 82, p. 044047, Aug 2010. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.82.044047>.
- [40] NAZARI, B.; NOURI-ZONOZ, M. Electromagnetic casimir effect and the spacetime index of refraction. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 85, p. 044060, Feb 2012. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.044060>.
- [41] SAHARIAN, A. A.; SETARE, M. R. Casimir effect for curved boundaries in robertson–walker spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 27, n. 22, p. 225009, oct 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1088%2F0264-9381%2F27%2F22%2F225009>.
- [42] BEZERRA, V. B. et al. Thermal casimir effect in closed friedmann universe revisited. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 83, p. 104042, May 2011. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.104042>.

- [43] BEZERRA, V. B. et al. Thermal casimir effect for neutrino and electromagnetic fields in the closed friedmann cosmological model. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 84, p. 104025, Nov 2011. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.84.104025>).
- [44] MILTON, K. A.; SAHARIAN, A. A. Casimir densities for a spherical boundary in de sitter spacetime. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 85, p. 064005, Mar 2012. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.064005>).
- [45] SORGE, F. Casimir Effect and Free Fall in a Schwarzschild Black Hole. In: *15th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics, and Relativistic Field Theories (MG15) Rome, Italy, July 1-7, 2018*. [S.l.: s.n.], 2018.
- [46] ZHANG, A. Theoretical analysis of casimir and thermal casimir effect in stationary space–time. *Physics Letters B*, v. 773, p. 125 – 128, 2017. ISSN 0370-2693. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269317306330>).
- [47] BEZERRA, V.; MOTA, H.; MUNIZ, C. Remarks on a gravitational analogue of the Casimir effect. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 25, n. 09, p. 1641018, 2016.
- [48] KLIMCHITSKAYA, G.; MOSTEPANENKO, V. New constraints on Yukawa-type corrections to Newtonian gravity at short separations. *Grav. Cosmol.*, v. 20, p. 3–9, 2014.
- [49] KLIMCHITSKAYA, G.; MOSTEPANENKO, V. Constraints on axion and corrections to Newtonian gravity from the Casimir effect. *Grav. Cosmol.*, v. 21, n. 1, p. 1–12, 2015.
- [50] SORGE, F. Casimir energy in Kerr space-time. *Phys. Rev. D*, v. 90, n. 8, p. 084050, 2014.
- [51] MUNIZ, C.; BEZERRA, V.; CUNHA, M. Hořava-Lifshitz gravity effects on Casimir energy in weak field approximation and infrared regime. *Phys. Rev. D*, v. 88, p. 104035, 2013.
- [52] QUACH, J. Q. Gravitational Casimir effect. *Phys. Rev. Lett.*, v. 114, n. 8, p. 081104, 2015. [Erratum: *Phys.Rev.Lett.* 118, 139901 (2017)].
- [53] FULLING, S. A. et al. How Does Casimir Energy Fall? *Phys. Rev. D*, v. 76, p. 025004, 2007.
- [54] MILTON, K. A. et al. How does Casimir energy fall? II. Gravitational acceleration of quantum vacuum energy. *J. Phys. A*, v. 40, p. 10935–10943, 2007.
- [55] SHAJESH, K. et al. How does Casimir energy fall? III. Inertial forces on vacuum energy. *J. Phys. A*, v. 41, p. 164058, 2008.
- [56] MILTON, K. et al. How does Casimir energy fall? IV. Gravitational interaction of regularized quantum vacuum energy. *Phys. Rev. D*, v. 89, n. 6, p. 064027, 2014.
- [57] CALLONI, E. et al. Towards weighing the condensation energy to ascertain the Archimedes force of vacuum. *Phys. Rev. D*, v. 90, n. 2, p. 022002, 2014.
- [58] BIMONTE, G. et al. Energy-momentum tensor for a Casimir apparatus in a weak gravitational field. *Phys. Rev. D*, v. 74, p. 085011, 2006. [Erratum: *Phys.Rev.D* 75, 049904 (2007), Erratum: *Phys.Rev.D* 75, 089901 (2007), Erratum: *Phys.Rev.D* 77, 109903 (2008)].

- [59] SHEVCHENKO, V.; SHEVRIN, E. Archimedes Force on Casimir Apparatus. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 31, n. 29, p. 1650166, 2016.
- [60] AVINO, S. et al. Progress in a Vacuum Weight Search Experiment. *MDPI Physics*, v. 2, n. 1, p. 1–13, 2020.
- [61] COLELLA, R.; OVERHAUSER, A. W.; WERNER, S. A. Observation of gravitationally induced quantum interference. *Physical Review Letters*, APS, v. 34, n. 23, p. 1472, 1975.
- [62] HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. *Communications in mathematical physics*, Springer, v. 43, n. 3, p. 199–220, 1975.
- [63] KOLEKAR, S.; PADMANABHAN, T. Indistinguishability of thermal and quantum fluctuations. *Class. Quant. Grav.*, v. 32, n. 20, p. 202001, 2015.
- [64] KOLEKAR, S.; PADMANABHAN, T. Quantum field theory in the Rindler-Rindler spacetime. *Phys. Rev. D*, v. 89, n. 6, p. 064055, 2014.
- [65] KOLEKAR, S. Uniformly accelerated observer in a thermal bath. *Phys. Rev. D*, v. 89, n. 4, p. 044036, 2014.
- [66] CHOWDHURY, C. et al. How robust is the indistinguishability between quantum fluctuation seen from noninertial frame and real thermal bath. *Phys. Rev. D*, v. 99, n. 4, p. 045021, 2019.
- [67] BENATTI, F.; FLOREANINI, R. Entanglement generation in uniformly accelerating atoms: Reexamination of the unruh effect. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 70, p. 012112, Jul 2004. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.70.012112>.
- [68] DAVIES, E. B. Markovian master equations. *Communications in Mathematical Physics*, v. 39, p. 91–110, 1974.
- [69] DAVIES, E. B. Markovian master equations II. *Math. Ann.*, v. 219, p. 147–158, 1976.
- [70] HU, J.; YU, H. Entanglement dynamics for uniformly accelerated two-level atoms. *Phys. Rev. A*, v. 91, n. 1, p. 012327, 2015.
- [71] ZHANG, J.; YU, H. W. The Unruh effect and entanglement generation for accelerated atoms near a reflecting boundary. *Phys. Rev. D*, v. 75, p. 104014, 2007.
- [72] ZHANG, J.; YU, H. W. Entanglement generation in atoms immersed in a thermal bath of external quantum scalar fields with a boundary. *Phys. Rev. A*, v. 75, p. 012101, 2007.
- [73] YANG, Y.; HU, J.; YU, H. Entanglement dynamics for uniformly accelerated two-level atoms coupled with electromagnetic vacuum fluctuations. *Phys. Rev. A*, v. 94, n. 3, p. 032337, 2016.
- [74] MOUSTOS, D.; ANASTOPOULOS, C. Non-Markovian time evolution of an accelerated qubit. *Phys. Rev. D*, v. 95, n. 2, p. 025020, 2017.
- [75] HU, J.; YU, H. Quantum entanglement generation in de Sitter spacetime. *Phys. Rev. D*, v. 88, p. 104003, 2013.

- [76] MENEZES, G.; SVAITER, N.; ZARRO, C. Entanglement dynamics in random media. *Phys. Rev. A*, v. 96, n. 6, p. 062119, 2017.
- [77] SOKOLOV, B. et al. Unruh effect and information flow. *Phys. Rev. D*, v. 101, n. 2, p. 024047, 2020.
- [78] DOUKAS, J.; CARSON, B. Entanglement of two qubits in a relativistic orbit. *Phys. Rev. A*, v. 81, p. 062320, 2010.
- [79] SHE, J.; HU, J.; YU, H. Entanglement dynamics for circularly accelerated two-level atoms coupled with electromagnetic vacuum fluctuations. *Phys. Rev. D*, v. 99, n. 10, p. 105009, 2019.
- [80] LIMA, A. C.; ALENCAR, G.; LANDIM, R. Asymptotic states of accelerated qubits in nonzero background temperature. *Phys. Rev. D*, v. 101, n. 12, p. 125008, 2020.
- [81] COSTA, S. S.; MATSAS, G. E. Background thermal contributions in testing the Unruh effect. *Phys. Rev. D*, v. 52, p. 3466–3471, 1995.
- [82] PADMANABHAN, T.; SINGH, T. P. Response of accelerated detectors in coherent states and the semiclassical limit. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 38, p. 2457–2463, Oct 1988. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.38.2457>.
- [83] SCHWARTZ, M. D. *Quantum field theory and the standard model*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014.
- [84] CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019.
- [85] DOWKER, F. Black holes. *Imperial College London, MSc Quantum Fields and Fundamental Forces, Lecture Notes*, 2013.
- [86] ROBLES, N. M. *Zeta Function Regularization*. Tese (Doutorado) — Imperial College London, 2009.
- [87] BRITTO, T. d. M. *The Casimir effect at one and two loops*. Dissertação (Other thesis), 7 2006.
- [88] MILTON, K. *The Casimir effect: Physical manifestations of zero-point energy*. [S.l.: s.n.], 2001. ISBN 978-981-02-4397-5, 978-1-281-95620-0, 978-981-4492-50-8, 978-981-281-052-6.
- [89] KISELEV, V. Quintessence and black holes. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 20, n. 6, p. 1187, 2003.
- [90] GORINI, V. et al. Properties of quantum markovian master equations. *Reports on Mathematical Physics*, Elsevier, v. 13, n. 2, p. 149–173, 1978.
- [91] WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, v. 80, p. 2245–2248, 1998.
- [92] WELDON, H. A. Thermal Green functions in coordinate space for massless particles of any spin. *Phys. Rev. D*, v. 62, p. 056010, 2000.

[93] COUGO-PINTO, M.; FARINA, C.; SEGUÍ-SANTONJA, A. J. On schwinger's method for obtaining the casimir effect. *letters in mathematical physics*, Kluwer Academic Publishers, v. 30, n. 2, p. 169–171, 1994.