UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

VINÍCIOS LOPES DA SILVA

UMA ABORDAGEM DO TEOREMA DE GAUSS-BONNET PARA SUPERFÍCIES COMPACTAS NO $\mathbb{R}^3$ VIA MÉTODO DO REFERENCIAL MÓVEL

FORTALEZA

2020

VINÍCIOS LOPES DA SILVA

UMA ABORDAGEM DO TEOREMA DE GAUSS-BONNET PARA SUPERFÍCIES COMPACTAS NO $\mathbb{R}^3$ VIA MÉTODO DO REFERENCIAL MÓVEL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

D11a da Silva, Vinícios Lopes.
Uma abordagem do Teorema de Gauss-Bonnet para superfícies compactas no R^3 via Método do Referencial Móvel / Vinícios Lopes da Silva. – 2020.
30 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Curso de Matemática, Fortaleza, 2020.
Orientação: Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva.

1. Referencial Móvel. 2. Geometria Diferencial. 3. Geometria Riemaniana. 4. Teorema de Gauss-Bonnet. I. Título.

CDD 510

VINÍCIOS LOPES DA SILVA

UMA ABORDAGEM DO TEOREMA DE GAUSS-BONNET PARA SUPERFÍCIES COMPACTAS NO $\mathbb{R}^3$ VIA MÉTODO DO REFERENCIAL MÓVEL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovada em: 31 de Agosto de 2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Frederico Vale Girão
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Aos meus avós maternos, Antônio e Nádia.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pelas graças recebidas durante todo esse período morando longe da minha cidade natal e da minha família.

Ao Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva, por ter me orientado em bolsas de iniciação científica desde meu segundo semestre da graduação até a minha formatura, em particular neste trabalho.

Aos meus avós maternos e primeiros professores, Antonio Silva Lopes e Nádia Cirqueira Lopes, por não terem medido esforços para a realização do meu sonho. Por terem, desde meu nascimento, me adotado como seu sexto filho. Por terem abdicado diversas vezes de viver momentos de lazer e descontração, para que eu pudesse me manter minimamente confortável longe de casa. E aos demais familiares que de alguma forma torceram junto de nós.

À Ivanira, a quem chamo carinhosamente de "tia", por ter me apadrinhado em Fortaleza, não medindo esforços para que eu me sentisse acolhido na capital cearense, e por ter servido de apoio em situações adversas.

Aos pais da minha amiga Ana Beatriz, Jorgelino e Ana Célia, e aos pais do meu amigo Davi Andrade, Milena e Rafael Cinoto, por terem me apadrinhado em Fortaleza, me proporcionando um pouco de dignidade em momentos de muita dificuldade.

Aos amigos do GUC - Grupo Unido em Cristo, da Paróquia São José do Egito, por terem contribuído com grande parte da minha formação social, além de demais companheiros de caminhada na fé.

Aos amigos da minha cidade natal, Imperatriz, no Maranhão, que tanto me incentivaram e acreditaram no meu potencial.

Aos amigos que conquistei no Departamento de Matemática, em especial meus amigos Allen Roossim, Ana Beatriz, Camila Sena, Davi Andrade, Davi de Andrade, Eric Luan, Hyago Alves, Massimo Antonioli, Matheus Fernandes, Perón Marques e Vinícius Prado, que muito me ajudaram durante minha graduação.

Aos meus ex-professores do ensino básico, do fundamental ao médio, em especial os professores Glauco Hebert, Marcelo Lira, Marco Aurélio e Paulo Jales, que tanto me incentivaram a seguir meu sonho de cursar Matemática, apesar da grande desvalorização da ciência no país.

À minha ex-professora de Inglês, Stéphanie Sousa, pela paciência e esforço em me ensinar não só o Inglês, mas em me ensinar que eu sou capaz de aprender Inglês (que foi meu maior desafio). Seus ensinamentos abriram um leque de possibilidades em referências bibliográficas.

Aos professores Antonio Caminha Muniz Neto e Florentiu Daniel Cibotaru, pelas palavras de apoio, conversas esclarecedoras à respeito da minha carreira, e pelos muitos conselhos pessoais em momentos de indecisões e dificuldades.

Ao professor Elzon César Jr., pelas boas conversas sobre matemática e sobre a nossa carreira.

Ao professor Vinícius Gripp Ramos, do IMPA, por ter me presenteado com um estudo sobre Formas Diferenciais e Variedades Diferenciáveis durante a Escola de Verão - 2020, algo que ajudou na escolha do tema deste trabalho, e pelas boas conversas sobre meu futuro no estudo da Matemática.

Aos cantores Alceu Valença, Alcione, Belchior (*in memorian*), Beth Carvalho (*in memorian*), Geraldo Azevedo, Ítalo Ribeiro, Jorge Aragão, Jessé Filho (*Zeca Pagodinho*) e Nando Reis que, dentre outros, com suas vozes e composições, tanto me acalmaram em momentos de desespero, dificuldade e crises de ansiedade.

Ao Cnpq e à FUNCAP, pelo fincanciamento das minhas bolsas de iniciação científica durante a graduação.

E a todos que a minha humana falibilidade deixou esquecer, deixo aqui os meus mais sinceros votos de estima e consideração.

“Só eu sei cada passo por mim dado
nessa estrada esburacada que é a vida,
passei coisas que até mesmo Deus duvida,
fiquei triste, capiongo, aperreado,
porém nunca me senti desmotivado,
me agarrava sempre numa mão amiga,
e de forças minha alma era munida
pois do céu a voz de Deus dizia assim:
-Suba o queixo, meta os pés, confie em mim,
vá pra luta que eu cuido das feridas.”

(Bráulio Bessa)

RESUMO

Neste trabalho apresentamos um método utilizado em Geometria Diferencial e Riemaniana, capaz de facilitar demonstrações e generalizações de teoremas que são de difícil acesso por outros métodos. Para que o leitor visualize a solidez do método apresentado, desenvolvemos os conceitos necessários e suficientes para as demonstrações. Como prova de que o Método do Referencial Móvel pode ser extremamente útil, abordamos o Teorema de Gauss-Bonnet para superfícies compactas no $\mathbb{R}^3$ na versão global.

Palavras-chave: Geometria Diferencial. Geometria Riemaniana. Referencial Móvel. Teorema de Gauss-Bonnet.

ABSTRACT

In this work we show a method used in Differential and Riemanian Geometry, capable of facilitating demonstrations and generalizations of theorems that are difficult to access by other methods. In order for the reader to be able to visualize the solidity of the method presented, we have developed the necessary and sufficient concepts for the demonstrations. As proof that the Moving Frame Method can be extremely useful, we approach the Gauss-Bonnet Theorem for compact surfaces in $\mathbb{R}^3$ in its global version.

Keywords: Differential Geometry. Riemanian Geometry. Moving Frame. Gauss-Bonnet Theorem.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}^n$	Espaço euclidiano n-dimensional
T_pM	Espaço tangente à M no ponto p
δ_{ij}	Delta de Dirac
d	Diferencial
$x\|_U$	Restrição da aplicação x ao subconjunto U
$\circ$	Composição de funções
x^*	Pull-back
$\wedge$	Produto exterior
K	Curvatura Gaussiana
σ	Elemento de área de uma superfície
∂	Bordo ou fronteira

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Preliminares

Antes de construírmos o referencial móvel, que é a ferramenta principal deste trabalho, introduziremos algumas definições importantes sobre o espaço em que iremos trabalhar, ou melhor, sobre alguns subconjuntos desse espaço.

Apesar de o nosso objetivo principal, que é provar o Teorema de Gauss-Bonnet para superfícies compactas, ser tratado em um ambiente euclidiano tridimensional ($\mathbb{R}^3$), traremos essas primeiras definições e a definição do referencial móvel no $\mathbb{R}^n$.

Ressaltamos de antemão que quando falarmos em diferenciabilidade de uma aplicação sempre consideraremos que tal aplicação tenha diferenciabilidade de todas as ordens (C^∞).

1.2 Variedade Riemanniana

Na presente seção, traremos algumas definições fundamentais para o nosso texto no sentido mais geral.

Definição 1.2.1 (Variedade diferenciável) *Um subconjunto M do $\mathbb{R}^m$ é uma n-variedade diferenciável se existem um conjunto de subconjuntos abertos, $\{U_i\} \subset \mathbb{R}^n$, e um conjunto de mapas diferenciáveis, $\{\phi_i : U_i \longrightarrow M\}$, tal que $\{\phi_i(U_i)\}$ cobrem M (i.e, para cada ponto $p \in M$ há um i e um ponto $q \in U_i$, tal que $\phi_i(q) = p$).*

Definição 1.2.2 (Espaço Tangente a uma Variedade Diferenciável) *Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade diferenciável de dimensão m ($m < n$) e seja $p \in M$. O espaço tangente a M é o conjunto T_pM formado por todos os vetores tangentes a M no ponto p.*

Definição 1.2.3 (Variedade Riemanniana) *Uma **variedade riemanniana** é uma variedade diferenciável M e uma escolha, para cada ponto $p \in M$, de um produto interno positivo $\langle , \rangle_p$ definido no espaço tangente $T_p(M)$ de M em p, que varia diferencialmente com p no seguinte sentido: se X e Y são campos diferenciáveis de vetores em M, então a função $p \longmapsto \langle X, Y \rangle_p$, com $p \in M$, é diferenciável em M. O produto interno $\langle , \rangle$ é conhecido como uma **métrica riemanniana** em M.*

Definição 1.2.4 *Seja um difeomorfismo $f: M \to M'$ entre variedades riemanianas M e M'. Tal difeomorfismo é uma* ***isometria*** *se para todo $p \in M$ e todo par $X, Y \in T_p(M)$, tem-se*

$$\langle X, Y \rangle_p = \langle df_p(X), df_p(Y) \rangle_{f(p)}.$$

1.3 Sobre o Método do Referencial Móvel no $\mathbb{R}^n$

Definiremos agora um referencial móvel, adiantando que o ponto-chave do uso desse método é o fato de serem satisfeitas as equações de estrutura de Elie Cartan, que serão inseridas no próximo capítulo.

Definição 1.3.1 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $e_1, ..., e_n$, n campos diferenciáveis de vetores em U de tal forma que para todo $p \in U$ tenhamos $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$, onde $\delta_{i,j}$ é o Delta de Dirac ($\delta_{i,j} = 1$, se $i = j$ e $\delta_{i,j} = 0$ caso contrário). A esse conjunto de campos de vetores é dado o nome de* ***referencial ortonormal móvel*** *em U.*

A partir do referencial $\{e_i\}$ podemos definir formas diferenciais lineares pela condição $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$. Mais precisamente, dado $p \in U$, a base $\{(\omega_i)_p\}$ é a base dual da base $\{(e_i)_p\}$. O conjunto $\{\omega_i\}$ é chamado *coreferencial associado* ao referencial ortonormal móvel $\{e_i\}$.

Pensando em cada campo e_i como uma aplicação diferenciável $e_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, temos que a diferencial $(de_i)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, em $p \in U$, é uma aplicação linear. Logo, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, podemos escrever

$$(de_i)_p(v) = \sum_j (\omega_{ij})_p(v) e_j.$$

Observe que as expressões $(\omega_{ij})_p(v)$ acima dependem linearmente do vetor v. Com efeito, tomemos dois vetores $u,\ v \in \mathbb{R}^n$, e um $\lambda \in \mathbb{R}$. Por um lado, temos

$$(de_i)_p(u + \lambda v) = \sum_j (\omega_{ij})_p(u + \lambda v) e_j.$$

Por outro lado, pela linearidade da diferencial,

$$\begin{aligned}(de_i)_p(u + \lambda v) &= (de_i)_p(u) + \lambda (de_i)_p(v) \\ &= \sum_j (\omega_{ij})_p(u) e_j + \lambda \sum_j (\omega_{ij})_p(v) e_j \\ &= \sum_j ((\omega_{ij})_p(u) + \lambda (\omega_{ij})_p(v)) e_j.\end{aligned}$$

Como $(de_i)_p(u+\lambda v) = \sum_j ((\omega_{ij})_p(u) + \lambda(\omega_{ij})_p(v))e_j$, concluímos que as expressões $(\omega_{ij})_p(v)$ dependem linearmente de v.

Logo, $(\omega_{ij})_p$ é uma forma linear no $\mathbb{R}^n$. Como e_i é um campo diferenciável, então ω_{ij} é uma forma diferenciável linear. Daí, escrevemos

$$de_i = \sum_j \omega_{ij} e_j \tag{1.3.1}$$

como definição das formas ω_{ij}, conhecidas como *formas de conexão* do $\mathbb{R}^n$ no referencial $\{e_i\}$.

Geometricamente, $(\omega_{ij})_p(v)$ significa a velocidade com que e_i gira em direção à e_j a medida que p se move na direção de v. Daí, as formas lineares ω_{ij} contém essas informações a respeito de todos os vetores tangentes no $\mathbb{R}^n$.

Agora, verificaremos que as formas de conexão são antissimétricas nos índices i e j. De fato, se derivarmos a expressão $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, obteremos

$$0 = \langle de_i, e_j \rangle + \langle e_i, de_j \rangle = \langle \sum_k \omega_{ik} e_k, e_j \rangle + \langle e_i, \sum_k \omega_{jk} e_k \rangle = \omega_{ij} + \omega_{ji},$$

ou seja, temos $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, como queríamos.

Passemos agora para o primeiro teorema fundamental deste trabalho e ponto fundamental da utilidade do método do referencial móvel, como comentamos anteriormente.

1.4 Equações de Estrutura do $\mathbb{R}^n$

Neste tópico iremos inserir as equações de estrutura do $\mathbb{R}^n$, que irão ser fundamentais para o prosseguimento do nosso estudo. Ficará claro no próximo capítulo.

Teorema 1.4.1 (equações de estrutura do $\mathbb{R}^n$) *Seja $\{e_i\}$ um referencial ortonormal móvel em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Sejam $\{\omega_i\}$ o coreferencial associado a $\{e_i\}$ e ω_{ij} as formas de conexão de U no referencial $\{e_i\}$. Então,*

$$d\omega_i = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki}, \tag{1.4.1}$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj},\ k = 1, ..., n. \tag{1.4.2}$$

Demonstração: Seja $a_1 = (1, 0, ..., 0)$, $a_2 = (0, 1, ..., 0)$,..., $a_n = (0, 0, ..., 1)$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$ e $x_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ a função que leva cada ponto $p = (x_1, x_2, ..., x_n) \in U$ na sua i-ésima coordenada. Assim, dx_i é uma forma diferencial definida em U. Observe que na definição da diferencial, a linearearidade de x_i nos garante que $dx_i = x_i$, pois x_i é uma transformação linear. Mas isso implica que $dx_i(a_j) = \delta_{ij}$. Concluímos que $\{dx_i\}$ é o coreferencial associado de $\{a_i\}$.

O referencial que temos agora pode ser expressado em termos dos a_i's como

$$e_i = \sum_j \beta_{ij} a_j, \tag{1.4.3}$$

onde os nossos β_{ij} são funções diferenciáveis em U e, para cada $p \in U$, a matriz $(\beta_{ij}(p))$ é uma matriz ortogonal, escrevendo os $\{e_i\}$'s em termos dos a_i's por uma rotação. Mais ainda, como $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$, temos

$$\omega_i = \sum_j \beta_{ij} dx_j. \tag{1.4.4}$$

Com efeito, por $\{dx_j\}$ ser uma base dual, podemos escrever

$$\omega_i = \sum_j \lambda_{ij} dx_j,$$

onde $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$. Daí, aplicando ω_i no referencial e_k e usando a equação (1.4.3), temos

$$\omega_i(e_k) = \sum_j \lambda_{ij} dx_j(e_k) = \sum_j \lambda_{ij} dx_j \left(\sum_m \beta_{km} a_m \right) = \sum_j \lambda_{ij} \sum_m \beta_{km} \underbrace{dx_j(a_m)}_{\delta_{jm}}.$$

Visto que $\omega_i(e_k) = \delta_{ik}$, obtemos

$$\delta_{ik} = \sum_j \lambda_{ij} \beta_{kj} = \sum_j \lambda_{ij} \beta^T_{jk} \Rightarrow (\lambda_{ij}) \overbrace{=}^{(*)} \underbrace{(\beta^T_{ij})^{-1} = (\beta^{-1}_{ij})^{-1}}_{(\beta_{ij}) \text{ é ortogonal}} = \beta_{ij}.$$

Observe que a igualdade $(*)$ acima vem do fato de $\delta_{ik} = \sum\limits_j \lambda_{ij} \beta^T_{jk}$. Com isso, temos $\lambda_{ij} = \beta_{ij}$, o que prova nossa afirmação.

Por razões que ficarão claras posteriormente, iremos isolar o a_j em (1.4.3). Multiplicando ambos os lados da equação (1.4.3) por β^{-1}_{ki} e depois somando ambos os lados em i, temos

$$\sum_i \beta^{-1}_{ki} e_i = \sum_j \underbrace{\sum_i \beta^{-1}_{ki} \beta_{ij}}_{\delta_{kj}} a_j = \sum_j \delta_{kj} a_j = a_k.$$

$$\therefore a_k = \sum_i \beta^{-1}_{ki} e_i = \sum_i \beta^T_{ki} e_i = \sum_i \beta_{ik} e_i. \tag{1.4.5}$$

Agora, diferenciando a equação (1.4.3), temos

$$de_i = \sum_j d\beta_{ij} a_j \underbrace{=}_{(1.4.5)} \sum_j d\beta_{ij} \sum_k \beta_{kj} e_k = \sum_k \left(\sum_j d\beta_{ij} \beta_{kj} \right) e_k.$$

Pela equação (1.3.1), temos

$$\sum_k \omega_{ik} e_k = \sum_k \left(\sum_j d\beta_{ij}\beta_{kj} \right) e_k$$
$$\Rightarrow \omega_{ik} = \sum_j d\beta_{ij}\beta_{kj}. \tag{1.4.6}$$

Multiplicando ambos os lados dessa equação por β_{ks} e somando em k, temos

$$\sum_k \omega_{ik}\beta_{ks} = \sum_{j,k} d\beta_{ij}\beta_{kj}\beta_{ks} = \sum_{j,k} d\beta_{ij}\beta^{-1}_{jk}\beta_{ks} = \sum_j d\beta_{ij}\delta_{js} = d\beta_{is}.$$
$$\therefore d\beta_{is} = \sum_k \omega_{ik}\beta_{ks}, \tag{1.4.7}$$

com $s = 1, ..., n$. Agora, diferenciando a equação (1.4.5) e usando a equação (1.4.7), temos

$$\begin{aligned} d\omega_i &= \sum_j d\beta_{ij} \wedge dx_j = \sum_{j,k} \omega_{ik}\beta_{kj} \wedge dx_j = \sum_{j,k} \left(-\beta_{kj}dx_j \wedge \omega_{ik}\right) \\ &= \sum_{j,k} \left(-\beta_{kj}dx_j \wedge -\omega_{ki}\right) = \sum_{j,k} \beta_{kj}dx_j \wedge \omega_{ki} \underbrace{=}_{(1.4.4)} \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki}. \end{aligned}$$

que é a nossa primeira equação de estrutura (1.4.1).

Agora, vamos diferenciar a equação (1.4.6) e usar a equação (1.4.7):

$$\begin{aligned} d\omega_{ij} &= \sum_k d(d\beta_{ik}) \wedge \beta_{jk} - d\beta_{ik} \wedge d\beta_{jk} = -\sum_k d\beta_{ik} \wedge d\beta_{jk} \\ &= -\sum_k \left\{ \left(\sum_l \omega_{il}\beta_{lk} \right) \wedge \left(\sum_s \omega_{js}\beta_{sk} \right) \right\} = -\sum_k \left\{ \left(\underbrace{\sum_l \beta_{lk}\beta^{-1}_{ks}}_{\delta_{ls}} \omega_{il} \right) \wedge \left(\sum_s \omega_{js} \right) \right\} \\ &= -\sum_k \left\{ (\omega_{is}) \wedge \left(\sum_s \omega_{js} \right) \right\} = -\sum_k \left(\sum_s \omega_{is} \wedge \omega_{js} \right) \\ &= -\sum_s \omega_{is} \wedge \omega_{js} = -\sum_s \omega_{is} \wedge -\omega_{sj} = \sum_s \omega_{is} \wedge \omega_{sj} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \end{aligned}$$

que é a nossa segunda equação de estrutura (1.4.2).

■

2 O MÉTODO DO REFERENCIAL MÓVEL

Veja que, até então, conseguimos desenvolver uma teoria capaz de nos dar um referencial móvel no contexto de um espaço euclidiano. Mas e se estivéssemos trabalhando com uma n-variedade qualquer? Haveria como estabelecer um referencial móvel com o qual pudéssemos trabalhar? Com as equações de estrutura em mãos, vamos agora apresentar a ideia por trás do método do referencial móvel, já no contexto de n-variedades, que é de fato mais interessante.

2.1 Sobre o Método do Referencial Móvel em uma n-variedade diferenciável

Seja $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+q}$ uma imersão de uma n-variedade diferenciável no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+q}$, i.e, x é diferenciável e a diferencial $dx_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}^{n+q}$ é injetiva para todo ponto p em M (em particular, dx_p é bijetiva sobre a imagem, que no caso é o espaço tangente a $x(p)$). Daí, pelo Teorema da Função Inversa, para todo $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $x|_U$ é injetiva. Seja agora $V \subset \mathbb{R}^{n+q}$, com $x(U) \subset V$ (em particular, V é uma vizinhança de $x(p)$). Aqui, tomemos V suficientemente pequeno, para que exista um referencial móvel $\{e_1, ..., e_n, e_{n+1}, ..., e_{n+q}\}$ em V com a propriedade de que, restritros a $x(U)$, os vetores $e_1, ..., e_n$ sejam tangentes a $x(U)$ e os vetores $e_{n+1}, ..., e_{n+q}$ sejam normais a $x(U)$. Um referencial com essa propriedades é chamado de *referencial adaptado* a x.

Tal referencial existe e pode ser provado a sua existência. Com efeito, se V for suficientemente pequeno, existe um difeomorfismo $g : V \longrightarrow V$ de tal forma que $g \circ x(U)$ é um aberto de uma subvariedade linear de dimensão n de $\mathbb{R}^{n+q}$. A partir disso, temos de imediato um referencial $\{f_1, ..., f_n, f_{n+1}, ..., f_{n+q}\}$ adaptado a $g \circ x(U)$ em $g(V)$. Agora surge um "problema": o que nos garante que a imagem inversa $dg^{-1}(f_1), ..., dg^{-1}(f_{n+q})$ do referencial é ortonormal? Ora, caso não seja, usamos o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt em cada ponto de V. Isso é extremamente vantajoso, pois os vetores obtidos desse processo variam diferencialmente com os vetores dados, e, por consequência, obtemos um referencial ortonormal adaptado a $x(U)$, em V.

Observe agora que em V estão definidas as formas ω_i do coreferencial de $\{e_i\}$ e as formas de conexão ω_{ij} que satisfazem as equações de estrutura (1.4.1) e (1.4.2). Eis a parte crucial para a formalização da ideia por trás do método do referencial móvel: a aplicação $x : U \subset M \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^{n+q}$ induz formas diferenciais $x^*(\omega_i)$ e $x^*(\omega_{ij})$ em U, onde x^* é o *pull-back*.

Daí, como o pull-back comuta com a derivação exterior e com o produto exterior, temos

$$d(x^*\omega_i) = x^*(d\omega_i) = \sum_k x^*(\omega_k \wedge \omega_{ki}) = \sum_k (x^*\omega_k) \wedge (x^*\omega_{ki}),$$

$$d(x^*\omega_{ij}) = x^*(d\omega_{ij}) = \sum_k x^*(\omega_{ik} \wedge \omega_{kj}) = \sum_k (x^*\omega_{ik}) \wedge (x^*\omega_{kj}),\ k = 1, \ldots, n,$$

i.e, as formas satisfazem as equações de estrutura (1.4.1) e (1.4.2).

2.2 O Lema de Cartan e a unicidade das formas de conexão

Com o referencial móvel em mãos, partiremos para a que talvez seja a parte mais interessante deste trabalho, que é ver tal método sendo aplicado. Mas antes de partirmos para esse ponto, de fato, precisamos estabelecer alguns resultados. O principal é mostrar a unicidade das formas de conexão (Lema 2.2.2), para que se evite ambiguidades. Todavia, a prova desse resultado depende do Lema de Cartan, que será enunciado e provado na presente seção.

Recordemos primeiramente que, se ω_1, ω_2 são formas lineares em um espaço vetorial V n-dimensional, então o *produto exterior* $\omega_1 \wedge \omega_2$ é uma forma bilinear alternada $\omega_1 \wedge \omega_2 : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, v_2) = \omega_1(v_1)\omega_2(v_2) - \omega_1(v_2)\omega_2(v_1),\ \ v_1, v_2 \in V.$$

Se $\omega_1, \ldots, \omega_n$ é uma base para o espaço de formas lineares V^*, então $\omega_i \wedge \omega_j,\ i \leq j,\ i, j = 1, \ldots, n$, formam uma base para o espaço $\Lambda^2 V^*$ das formas bilineares alternadas $V \times V$.

Lema 2.2.1 (Cartan) *Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e $\omega_1, \ldots, \omega_r : V \longrightarrow \mathbb{R},\ r \leq n$, formas lineares de V linearmente independentes. Suponhamos que existam formas lineares $\theta_1, \ldots, \theta_r : V \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $\sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \theta_i = 0$. Então, existem $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\theta_i = \sum_j a_{ij}\omega_j,\quad i, j = 1, \ldots, r,\ a_{ij} = a_{ji}.$$

Demonstração: Completemos a base $\omega_1, \ldots, \omega_r, \omega_{r+1}, \ldots, \omega_n$ de V^* e escrevamos

$$\theta_i = \sum_j a_{ij}\omega_j + \sum_l b_{il}\omega_l\ ,\ l = r+1, \ldots, n.$$

Como $\sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \theta_i = 0$, segue que

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \theta_i \\
&= \sum_i \omega_i \wedge \sum_j a_{ij}\omega_j + \sum_i \omega_i \wedge \sum_l b_{il}\omega_l \\
&= \sum_{ij} a_{ij}\omega_i \wedge \omega_j + \sum_{il} b_{il}\omega_i \wedge \omega_l \\
&= \sum_{i<j} a_{ij}\omega_i \wedge \omega_j + \underbrace{\sum_{i=j} a_{ij}\omega_i \wedge \omega_j}_{=0} + \sum_{i>j} a_{ij}\omega_i \wedge \omega_j + \sum_{il} b_{il}\omega_i \wedge \omega_l \\
&= \sum_{i<j} a_{ij}\omega_i \wedge \omega_j - \sum_{i>j} a_{ij}\omega_j \wedge \omega_i + \sum_{il} b_{il}\omega_i \wedge \omega_l \\
&= \sum_{i<j} a_{ij}\omega_i \wedge \omega_j - \sum_{i<j} a_{ji}\omega_i \wedge \omega_j + \sum_{il} b_{il}\omega_i \wedge \omega_l \\
&= \sum_{i<j} (a_{ij} - a_{ji})\omega_i \wedge \omega_j + \sum_{il} b_{il}\omega_i \wedge \omega_l
\end{aligned}$$

Como os $\omega_k \wedge \omega_s$, $k < s$, $k,s = 1,\ldots,n$ são linearmente independentes, temos $a_{ij} - a_{ji} = 0 \Rightarrow a_{ij} = a_{ji}$ e $b_{il} = 0$.

■

Lema 2.2.2 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $\omega_1,\ldots,\omega_n$ formas diferenciais linearmente independentes em U. Suponha que exista em U um conjunto de 1-formas diferenciais ω_{ij} satisfazendo as condições:*

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji},\ d\omega_j = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{kj}.$$

Então tal conjunto é único.

Demonstração: Suponha que existe um outro conjunto de formas $\overline{\omega}_{ij}$ com

$$\overline{\omega}_{ij} = -\overline{\omega}_{ji},\ d\omega_j = \sum_k \omega_k \wedge \overline{\omega}_{kj}.$$

Daí, temos que

$$0 = \sum_k \omega_k \wedge \overline{\omega}_{kj} - \sum_k \omega_k \wedge \omega_{kj} = \sum_k \omega_k \wedge (\overline{\omega}_{kj} - \omega_{kj}).$$

Pelo Lema de Cartan, segue que

$$\overline{\omega}_{kj} - \omega_{kj} = \sum_i b^j_{ki}\omega_i,\ \ \underbrace{b^j_{ki} = b^j_{ik}}_{\star}.$$

Observe agora que

$$\overline{\omega}_{kj} - \omega_{kj} = \sum_i b^j_{ki}\omega_i = -(\overline{\omega}_{jk} - \omega_{jk}) = -\sum_i b^k_{ji}\omega_i$$

e como os nossos ω_i's são linearmente independentes, segue que $\underbrace{b^j_{ki} = -b^k_{ji}}_{\bigstar\bigstar}$. Pelas simetrias $\bigstar$ e $\bigstar\bigstar$, temos

$$b^k_{ji} = -b^j_{ki} = -b^j_{ik} = b^i_{jk} = b^i_{kj} = -b^k_{ij} = -b^k_{ji} = 0.$$

Portanto, $\overline{\omega}_{kj} = \omega_{kj}$.

$\blacksquare$

2.3 Aplicações às Superfícies do $\mathbb{R}^3$

Estamos cada vez mais próximos do nosso objetivo principal, que é apresentar uma demonstração do Teorema de Gauss-Bonnet para superfícies compactas utilizando o método do referencial móvel. Para provar o teorema, precisamos construir alguns conceitos conhecidos da Geometria Diferencial, para então a aplicação do método na teoria de superfícies no $\mathbb{R}^3$.

Seja S uma variedade diferenciável 2-dimensional, e seja $x : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão. Para cada $p \in S$ fica definido um produto interno $\langle , \rangle_p$ em T_pS pelo seguinte: se $v_1, v_2 \in T_pS$, então

$$\langle v_1, v_2 \rangle_p = \langle dx_p(v_1), dx_p(v_2) \rangle,$$

onde o segundo termo é o produto interno usual do $\mathbb{R}^3$. Neste caso, temos que $\langle , \rangle_p$ é uma métrica riemaniana em S, e é chamada de *métrica induzida* pela imersão x.

Vamos agora fazer um estudo da geometria local de S em torno de $p \in S$. Posteriormente, teremos ferramentas para estudar a geometria de S de forma global. Por agora, seja $U \subset S$ uma vizinhança de p em S tal que $x|_U$ seja injetiva. Seja V uma vizinhança de $x(p)$ em $\mathbb{R}^3$ de tal forma que $V \supset x(U)$. Tomando V e U suficientemente pequenos, é possível escolher em V um referencial ortonormal móvel e_1, e_2, e_3 adaptado a x, i.e, quando restritos a $x(U)$, são e_1, e_2 tangentes a $x(U)$ e, por consequência, e_3 normal a $x(U)$.

Ficam definidas em V as formas ω_i do coreferencial de $\{e_i\}$, $i = 1,2,3$, e as formas de conexão $\omega_{12} = -\omega_{21}$, $\omega_{32} = -\omega_{23}$ e $\omega_{13} = -\omega_{31}$. Tais formas satisfazem em V as equações de estrutura (Teorema 1.4.1) que seguem:

$$\begin{aligned}
d\omega_1 &= \omega_2 \wedge \omega_{21} + \omega_3 \wedge \omega_{31};\\
d\omega_2 &= \omega_1 \wedge \omega_{12} + \omega_3 \wedge \omega_{32};\\
d\omega_3 &= \omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23};\\
d\omega_{12} &= \omega_{13} \wedge \omega_{32};\\
d\omega_{13} &= \omega_{12} \wedge \omega_{23};\\
d\omega_{23} &= \omega_{21} \wedge \omega_{13}.
\end{aligned}$$

A imersão $x : U \subset S \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^3$ induz formas $x^*(\omega_i)$, $x^*(\omega_{ij})$, $i, j = 1,2,3$, em U e, como já vimos no caso geral, satisfazem as equações de estrutura dadas acima. Veja que $x^*(\omega_3) = 0$, pois, para todo $q \in U$ e para todo $v \in T_qS$ teremos $dx(v) = a_1e_1 + a_2e_2$, logo,

$$(x^*\omega_3)(v) = \omega_3(dx(v)) = \omega_3(a_1e_1 + a_2e_2) = 0.$$

Pensando em U como um subconjunto do $\mathbb{R}^3$ pela inclusão x (pois $x|_U$ é injetiva) e nas formas ω_i, ω_{ij} como restritas a $U \subset V \subset \mathbb{R}^3$, doravante escreveremos

$$x^*\omega_i = \omega_i \quad e \quad x^*\omega_{ij} = \omega_{ij},$$

afim de "enxugar"a notação. (Adicionando, é claro, a relação $\omega_3 = 0$).

Com todas essas adaptações, iremos de fato estudar a geometria local de S. Primeiro veja que, como $\omega_3 = 0$, temos

$$d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} = 0.$$

Do lema de Cartan (Lema 2.2.1), temos

$$\omega_{13} = h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2, \tag{2.1}$$

$$\omega_{23} = h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2, \tag{2.2}$$

onde $h_{ij} = h_{ji}$, $i, j = 1,2$, são funções diferenciáveis em U. Agora, veja que por um lado temos

$$\begin{aligned}
\omega_{13}(e_1) &= h_{11}\omega_1(e_1) + h_{12}\omega_2(e_1) = h_{11},\\
\omega_{13}(e_2) &= h_{11}\omega_1(e_2) + h_{12}\omega_2(e_2) = h_{12},\\
\omega_{23}(e_1) &= h_{21}\omega_1(e_1) + h_{22}\omega_2(e_1) = h_{21},\\
\omega_{23}(e_2) &= h_{21}\omega_1(e_2) + h_{22}\omega_2(e_2) = h_{22}
\end{aligned}$$

e, por outro lado, como $de_i = \sum_j \omega_{ij} e_j$, temos

$$de_3(v) = \omega_{31}(v)e_1 + \omega_{32}(v)e_2,$$

para todo $q \in U$ e todo $v \in T_qS$. Logo, escrevendo $v = a_1e_1 + a_2e_2$, teremos

$$\begin{aligned}
de_3(a_1e_1+a_2e_2) &= \omega_{31}(a_1e_1+a_2e_2)e_1 + \omega_{32}(a_1e_1+a_2e_2)e_2 \\
&= \omega_{31}(a_1e_1)e_1 + \omega_{31}(a_2e_2)e_1 + \omega_{32}(a_1e_1)e_2 + \omega_{32}(a_2e_2)e_2 \\
&= \omega_{31}(e_1)a_1e_1 + \omega_{31}(e_2)a_2e_1 + \omega_{32}(e_1)a_1e_2 + \omega_{32}(e_2)a_2e_2 \\
&= (-\omega_{13}(e_1))a_1e_1 + (-\omega_{13}(e_2))a_2e_1 + (-\omega_{23}(e_1))a_1e_2 + (-\omega_{23}(e_2))a_2e_2 \\
&= (-h_{11})a_1e_1 + (-h_{12})a_2e_1 + (-h_{21})a_1e_2 + (-h_{22})a_2e_2.
\end{aligned}$$

Em representação matricial, temos (lembrando que $de_3(a_1e_1+a_2e_2) = a_1e_1+a_2e_2$)

$$de_3(v) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_{11} & -h_{12} \\ -h_{21} & -h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

i.e, $(-h_{ij})$ é a matriz da diferencial da aplicação $e_3 : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ na base $\{e_1, e_2\}$. Note que, como $|e_3| = 1$, a aplicação toma valores na esfera unitária $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Agora, fixemos orientações em U e $\mathbb{R}^3$ e escolhamos o referencial $\{e_1, e_2, e_3\}$ de tal forma que, para todo ponto $q \in U$, $(e_1)_q, (e_2)_q$ seja uma base de T_qS na orientação escolhida e $(e_1)_q, (e_2)_q, (e_3)_q$ seja uma base positiva de $\mathbb{R}^3$. Tal referencial é dito *compatível com as orientações* de U e $\mathbb{R}^3$. Com isso, a aplicação $e_3 : U \longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ está bem definida e é chamada de *aplicação normal de Gauss* em U. Logo, $(-h_{ij})$ é a matriz da diferencial da aplicação normal de Gauss na base $\{e_1, e_2\}$.

Temos que (h_{ij}) é uma matriz simétrica, donde concluímos que a diferencial da aplicação normal de Gauss é auto-adjunta. Com isso, tal aplicação pode ser diagonalizada, com valores próprios $-\lambda_1, -\lambda_2 \in \mathbb{R}$ e vetores próprios ortogonais.

A curtavura Gaussiana K de S em p é dada por

$$K = det(de_3)_p = \lambda_1\lambda_2 = h_{11}h_{22} - h_{12}^2, \tag{2.3}$$

com todos os termos calculados em p. Daí, temos, usando as equações (2.1), (2.2) e (2.3),

$$\begin{aligned}
d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32} = \omega_{13} \wedge (-\omega_{23}) &= -\omega_{13} \wedge \omega_{23} \\
&= -(h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2) \wedge (h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2) \\
&= -(h_{11}h_{22} - h_{12}^2)\omega_1 \wedge \omega_2 \\
&= -K\omega_1 \wedge \omega_2.
\end{aligned}$$

Esse resultado merece uma atenção especial nesse momento, pois a igualdade $d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$ permite demonstrar resultados importantes na teoria de superfícies. De imediato, isso se aplica a um dos teoremas mais importantes da teoria de superfícies, descoberto por Gauss.

Teorema 2.3.1 (Gauss) *K depende apenas da métrica induzida de S, i.e, se $x, x' : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ são duas imersões de S tais que as métricas induzidas em S por x e x' coincidem, então $K(p) = K'(p)$, $p \in S$, onde K e K' indicam as curvaturas Gaussianas de x e x', respectivamente.*

Demonstração: Tomemos um referencial $\{e_1, e_2\}$ em um aberto $U \subset S$, ortonormal na métrica induzida. Então, $\{dx(e_1), dx(e_2)\}$ pode ser estendido a um referencial adaptado a $V \supset x(U)$. Da mesma forma, $\{dx'(e_1), dx'(e_2)\}$ pode ser estendido a um referencial adaptado em $V \supset x(U)$. Indicaremos por $'$ o que for relacionado à imersão x'. Como as métricas induzidas por x e x' coincidem, então $\omega_1 = \omega_1'$ e $\omega_2 = \omega_2'$, já que a métrica se comporta igualmente no referencial móvel e o correferencial associado está diretamente ligado a isso. Pelo lema da unicidade das formas de conexão (Lema 2.2.2), devemos ter $\omega_{12} = \omega_{12}'$. Daí,

$$-K\omega_1 \wedge \omega_2 = d\omega_{12} = d\omega_{12}' = -K'\omega_1' \wedge \omega_2'$$

o que nos dá $-K = -K' \implies K = K'$.

$\blacksquare$

Observe que, no Teorema de Gauss, a curvatura Gaussiana, embora tenha sido definida usando o espaço ambiente $\mathbb{R}^3$, depende apenas da métrica induzida. Esse fato é interessante pois fez Gauss, em 1827, imaginar que haveria uma geometria que não dependesse do espaço ambiente. Por falta de ferramentas (em particular a ideia de variedade diferenciável), essa ideia só veio a ser desenvolvida por Riemann em 1852, o que deu origem ao que conhecemos hoje por Geometria Riemaniana.

3 TEOREMA DE GAUSS-BONNET PARA SUPERFÍCIES COMPACTAS DO $\mathbb{R}^3$

Finalmente chegamos à nossa principal aplicação do método do referencial móvel nesse trabalho. Iremos demonstrar o teorema de Gauss-Bonnet para superfícies compactas do $\mathbb{R}^3$, mostrando um dos aspectos mais interessantes do referente método, que é a possibilidade de se demonstrar teoremas globais de difícil acesso por outros métodos, pois não é preciso recorrer a conceitos topológicos específicos e nem é preciso passar pela teoria de curvas numa superfície.

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta orientada do $\mathbb{R}^3$ (como prevenção às possíveis confusões, observe que estamos tratando de uma variedade diferenciável de dimensão 2 que possui um atlas coerente). Seja $p \in S$ e $V \subset \mathbb{R}^3$ uma vizinhança de p em $\mathbb{R}^3$, de tal forma que exista em V um referencial e_1, e_2, e_3 adaptado a S e compatível com as orientações de S e $\mathbb{R}^3$. Sejam também ω_i, ω_{ij} as restrições a $V \cap S$ das formas do coreferencial associado a $\{e_i\}$ e das formas de conexão, respectivamente.

Afirmamos que a forma $\omega_1 \wedge \omega_2$ não depende do referencial escolhido (é claro, na classe dos referenciais compatíveis com a orientação de S), e assim, mostra-se definida globalmente em S. Com efeito, a forma $\omega_1 \wedge \omega_2$ aplicada a um par de vetores $u = u_1e_1 + u_2e_2$, $v = v_1e_1 + v_2e_2$ de T_pS, linearmente independentes e na orientação de T_pS, nos dá

$$\omega_1 \wedge \omega_2(u,v) = \omega_1(u)\omega_2(v) - \omega_2(u)\omega_1(v) = u_1v_2 - u_2v_1$$

que é a área do paralelogramo estendido por u e v. Por este motivo, $\omega_1 \wedge \omega_2 = \sigma$ é chamado de *elemento de área* de S.

Por S ser compacta, permite-se considerar a integral

$$\int_S K\omega_1 \wedge \omega_2 = \int_S K\sigma,$$

conhecida por *integral de K estendida a S*. O que o teorema de Gauss-Bonnet afirma é que esse número só depende da topologia de S.

Para mostrar isso, vamos tentar integrar $d\omega_{12}$ em S, levando em conta a expressão $d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$. Mas observe que ω_{12} não está definida de forma global em S, então iremos entender como muda tal forma por uma mudança de referencial.

Sejam e_1, e_2, e_3 e $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3 = e_3$ referenciais compatíveis com a orientação de S, e relacionados pela matriz de rotação, i.e,

$$\begin{aligned} \overline{e}_1 &= cos\theta e_1 + sen\theta e_2, \quad (*) \\ \overline{e}_2 &= -sen\theta e_1 + cos\theta e_2 \quad (**) \end{aligned}$$

Das equações acimas, temos que

$$\begin{aligned}\overline{\omega}_1 &= cos\theta\,\omega_1 + sen\theta\,\omega_2, \quad (***)\\ \overline{\omega}_2 &= -sen\theta\,\omega_1 + cos\theta\,\omega_2 \quad (****)\end{aligned}$$

Agora, diferenciando as equações acima e ultilizando as equações de estruturas, temos

$$\begin{aligned}d\overline{\omega}_1 &= -sen\theta d\theta\wedge\omega_1 + cos\theta d\theta\wedge\omega_2 + cos\theta d\omega_1 + sen\theta d\omega_2\\ &= -sen\theta d\theta\wedge\omega_1 + cos\theta d\theta\wedge\omega_2\\ &+ cos\theta(\omega_2\wedge\omega_{21} + \underbrace{\omega_3\wedge\omega_{31}}_{=0}) + sen\theta(\omega_1\wedge\omega_{12} + \underbrace{\omega_3\wedge\omega_{32}}_{=0})\\ &= d\theta\wedge\overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_2\wedge\omega_{21}\\ &= \overline{\omega}_2\wedge(-d\theta) + \overline{\omega}_2\wedge\omega_{21}\\ &= \overline{\omega}_2\wedge(\omega_{21} - d\theta). \qquad (1)\end{aligned}$$

Temos também

$$\begin{aligned}d\overline{\omega}_2 &= -cos\theta d\theta\wedge\omega_1 - sen\theta d\theta\wedge\omega_2 - sen\theta d\omega_1 + cos\theta d\omega_2\\ &= -cos\theta d\theta\wedge\omega_1 - sen\theta d\theta\wedge\omega_2\\ &- sen\theta(\omega_2\wedge\omega_{21} + \underbrace{\omega_3\wedge\omega_{31}}_{=0}) + cos\theta(\omega_1\wedge\omega_{12} + \underbrace{\omega_3\wedge\omega_{32}}_{=0})\\ &= -d\theta\wedge\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_1\wedge\omega_{12}\\ &= \overline{\omega}_1\wedge d\theta + \overline{\omega}_1\wedge\omega_{12}\\ &= \overline{\omega}_1\wedge(\omega_{12} + d\theta). \qquad (2)\end{aligned}$$

Portanto, das equações de estrutura $d\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2\wedge\overline{\omega}_{21}$ e $d\overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_1\wedge\overline{\omega}_{12}$, as formas

$$\overline{\omega}_{12} = \omega_{12} + d\theta,\ \ \overline{\omega}_{21} = \omega_{21} - d\theta = -\overline{\omega}_{12}$$

são antissimétricas e satisfazem as equações (1) e (2). Pelo lema da unicidade das formas de conexão (Lema 2.2.2), essas são as formas de conexão de S no referencial $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$.

Agora demonstraremos o Teorema de Gauss-Bonnet com auxílio do referencial móvel.

Definição: O número I_i é chamado de *índice do campo v no ponto singular p_i* e mede, intuitivamente, o número de "voltas"que v dá ao longo de ∂B_i (Omitiremos neste trabalho a prova de que é possível definir o índice de forma com que ele não dependa simultaneamente da curva ∂B_i, do referencial $\{e_i\}$ escolhido e da imersão. O leitor curioso pode verificar essa demonstração no livro "Formas diferenciais e aplicações", de autoria do Manfredo do Carmo).

Teorema 3.0.1 (Gauss-Bonnet) *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta em $\mathbb{R}^3$ e seja K a sua curvatura Gaussiana. Seja v um campo diferenciável de vetores tangentes a S com um número finito de pontos singulares $p_1,...,p_k$. Então a integral de K estendida a S é igual a 2π vezes a soma dos índices de v nos pontos p_i, $i=1,...,k$, i.e,*

$$\int_S K\sigma = 2\pi\chi(S),$$

onde $\chi(S) = \sum I_i$. ($\chi(S)$ é um conceito topológico conhecido como ***característica de Euler-Poincaré*** *da variedade S (ou, neste caso, da superfície S)).*

Demonstração: Seja v um campo diferenciável de vetores tangentes a S com um número finito de pontos singulares $p_1,...,p_k$, ou seja, $v(p_i)=0,\ i=1,...,k.$ Para cada p_i, seja $B_i \subset S$ uma vizinhança de p_i de tal forma que B_i não contenha outro ponto singular além de p_i, e, além disso, que ∂B_i seja uma curva fechada regular orientada positivamente. Em $S - \bigcup_i \{p_i\}$ podemos escrever $\overline{e}_1 = \frac{v}{|v|}$. Como S é orientável, é possível escolher em $S - \bigcup_i \{p_i\}$ um referencial adaptado $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ compatível com a orientação de S. Pelo teorema de Stokes, temos

$$\int_{S-\bigcup_i B_i} K\overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2 = -\int_{S-\bigcup_i B_i} d\overline{\omega}_{12} = \sum_i \int_{\partial B_i} \overline{\omega}_{12}. \tag{3.1}$$

Quando B_i se aproxima de p_i, a integral do primeiro membro tende para a integral de K estendida a S (veja que $\overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2$ não depende do referencial). Todavia, nessas mesmas condições, a integral do segundo membro depende do referencial $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$, que não está definido em p_i. Logo, introduziremos em uma vizinhança $U_i \supset B_i$ um referencial adaptado $e_1, e_2, e_3 = \overline{e}_3$ compatível com a orientação de S e dado pelas equações (*) e (**). Em $U_i - \{p_i\}$, $\overline{\omega}_{12} = \omega_{12} + d\theta$ e daí, pelo teorema de Stokes

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_i} \overline{\omega}_{12} &= \int_{\partial B_i} \omega_{12} + \int_{\partial B_i} d\theta = \int_{B_i} d\omega_{12} + \int_{\partial B_i} d\theta \\ &= -\int_{B_i} K\omega_1 \wedge \omega_2 + \int_{\partial B_i} d\theta\end{aligned}$$

pois e_1, e_2, e_3 está definido em B_i. Observe que, quando B_i tende a p_i, a integral $-\int_{B_i} K\omega_1 \wedge \omega_2$ tende para uma integral sobre pontos, ou seja, tende à zero. Portanto,

$$\lim_{B_i \to p_i} \int_{\partial B_i} \overline{\omega}_{12} = \lim_{B_i \to p_i} \int_{\partial B_i} d\theta. \tag{3.2}$$

Veja que $\int\limits_{\partial B_i} d\theta$ é a integral sobre uma curva fechada da variação do ângulo θ que o campo $v = |v|\bar{e}_1$ faz com o vetor e_1. Como ambos (v e e_1) voltam a sua posição inicial, pois a curva é fechada, então esta integral é um múltiplo inteiro I_i de 2π, i.e,

$$\int\limits_{\partial B_i} d\theta = 2\pi I_i.$$

Logo,

$$\lim_{B_i \to p_i} \int\limits_{\partial B_i} d\theta = 2\pi I_i. \tag{3.3}$$

Das equações (3.1), (3.2) e (3.3) o resultado segue.

■

Observe que o primeiro membro da equação não depende do campo v e o segundo membro independe da métrica induzida. Logo, ambos os membros dependem apenas da variedade S e o mesmo se dará para todas que lhe sejam difeomorfas.

4 CONCLUSÃO

O Método do Referencial Móvel é muito útil, e esperamos que isso tenha ficado claro para o leitor. Caso não tenha ficado claro a grande utilidade, o leitor é convidado a tentar usar este método e a teoria por trás de sua construção para chegar a resultados conhecidos da Geometria Diferencial, como a primeira e a segunda forma fundamental. Infelizmente o número limite de páginas permitido para este trabalho nos impediu de enriquecer ainda mais a teoria.

REFERÊNCIAS

BACHMAN, D. **A Geometric Approach to Differential Forms**. Boston: Birkhäuser, 2006.

CARMO, M. P. do. **O Método do Referencial Móvel**. Rio de Janeiro: (Publicações Matemáticas), IMPA, 2009.

CARMO, M. P. do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: (Coleção Textos Universitários), IMPA, 2014.

LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: (Coleção Matemática Universitária), IMPA, 2018.

O'NEILL, B. **Elementary differential geometry**. Londres: Academic Press, 1997.

TARGINO, R. O. **A curvatura de Gauss-Kronecker de hipersuperfícies mínimas em formas espaciais 4-dimensionais**. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Fortaleza, 2011.