



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL
MESTRADO ACADÊMICO EM ENGENHARIA CIVIL

JULIANA CUNHA ALVES

**ANÁLISE DE VIGAS COM PROTENSÃO NÃO-ADERENTE SUBMETIDAS A
CARGAS DE CURTA E LONGA DURAÇÃO VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS**

FORTALEZA

2020

JULIANA CUNHA ALVES

ANÁLISE DE VIGAS COM PROTENSÃO NÃO-ADERENTE SUBMETIDAS A CARGAS
DE CURTA E LONGA DURAÇÃO VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Civil do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Evandro Parente Junior

Coorientador: Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Junior

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A479a Alves, Juliana Cunha.

Análise de vigas com protensão não-aderente submetidas a cargas de curta e longa duração via método dos elementos finitos / Juliana Cunha Alves. – 2020.

119 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, 2020.

Orientação: Prof. Dr. Evandro Parente Junior.

Coorientação: Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Junior.

1. Estruturas Protendidas. 2. Protensão não-aderente. 3. Análise não linear. I. Título.

CDD 624.1

JULIANA CUNHA ALVES

ANÁLISE DE VIGAS COM PROTENSÃO NÃO-ADERENTE SUBMETIDAS A CARGAS
DE CURTA E LONGA DURAÇÃO VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Civil do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Evandro Parente Junior (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa
Junior (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Antônio Macário Cartaxo de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Bernardo Hurowitz
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

À minha amada mãe.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha amada mãe, Vânia, pelo amor incondicional, pela educação, pelo apoio e pelo investimento.

Agradeço à minha querida irmã, Nájila, por quem tenho grande admiração e carinho. Pessoa que me ajudou bastante nesta jornada.

Agradeço a minha insubstituível avó, Francisca, pelo amor e por ter estado ao meu lado.

Agradeço ao meu orientador, professor Dr. Evandro Parente, pela grande quantidade de conhecimentos repassados durante os anos de graduação e pós-graduação.

Agradeço aos meus amigos do LMCV, pessoas incríveis e prestativas, que trouxeram aprendizados e leveza a esses vários anos de graduação e pós-graduação.

Agradeço àqueles que, de forma direta ou indireta, puderam contribuir para que esta fase da minha vida fosse finalizada.

RESUMO

A utilização da protensão não aderente tem se apresentado como uma excelente solução estrutural. Suas aplicações são diversas, desde vigas, lajes, silos e, mais recentemente, vigas mistas. Dentre suas principais vantagens, podemos citar a possibilidade de manter os elementos esbeltos, capazes de vencer grandes vãos e, ainda assim, apresentarem pequenos deslocamentos. No sistema de pós-tração não aderente os cabos são tensionados após a peça de concreto ter atingido uma resistência necessária. A transferência da tensão é realizada pelos pontos de ancoragem dos cabos. Considerando a vasta aplicação deste sistema, é necessário o desenvolvimento de modelos capazes de representar o comportamento destas estruturas considerando os mais variados aspectos do sistema de protensão utilizado bem como a capacidade de realizar análise que considere a situação de ruptura e a situação em serviço. Neste trabalho, um modelo simples e robusto, baseado no Método dos Elementos Finitos, é proposto para a análise de vigas com protensão não aderente interna e externa submetidas a cargas de curta duração. A viga é discretizada em elementos de pórtico plano e o cabo é considerado como um único elemento finito composto por um número variável de segmentos retos. A não linearidade física e geométrica é considerada e ambos os elementos apresentam uma abordagem Lagrangiana Total. A forma linear de ambos os elementos é apresentada com o objetivo de avaliar o efeito da não linearidade geométrica no comportamento global da estrutura. A análise estrutural apresenta duas etapas. A primeira etapa consiste na aplicação da força de protensão utilizando iterações de Newton-Raphson e a segunda etapa consiste na aplicação do carregamento externo, onde as equações não lineares de equilíbrio são solucionadas utilizando o Método do Controle de Deslocamento. Excelentes resultados foram obtidos para vigas biapoiadas e contínuas com diferentes traçados de cabo. O efeito da não linearidade geométrica e da utilização de diferentes modelos para simular o concreto foram avaliados. Adicionalmente, é proposto um modelo de elementos finitos para a consideração de cargas de longa duração. Esta etapa da análise considera que os materiais se comportam em regime linear e a não linearidade geométrica é desprezada. Os efeitos da retração e fluência do concreto são considerados utilizando o Método do Módulo Efetivo Ajustado e a relaxação do cabo é considerada utilizando relação apresentada na literatura. Excelentes resultados foram obtidos quando comparados com resultados disponíveis na literatura.

Palavras-chave: Estruturas Protendidas. Protensão não-aderente. Análise não linear.

ABSTRACT

The unbonded prestressed system is an excellent structural alternative. Its applications are diverse, from beams, slabs, silos and, more recently, composite beams. Prestressed members are able to be designed as slender elements, capable of overcoming large spans while keeping small displacements. In the post-tensioning system, the unbonded tendons are tensioned after the concrete is cast and the stress is transferred to the concrete element at the anchorage points. Therefore, it is necessary to develop computer models able to simulate those structures considering the particularities of the prestressing system with unbonded tendons. Also, those models must be able to simulate not only the behavior of the structure at the ultimate conditions but also at service situation. In this work, a simple but robust Finite Element based model is proposed for the short-term analysis of unbonded prestressed concrete beams with internal and external tendons. The reinforced concrete beam is discretized using frame elements and the unbonded tendon is considered as a single element with a variable number of straight segments. Material and geometrical nonlinearities are considered where both elements are formulated using the Total Lagrangian approach. The geometrically linear form of both elements is presented to evaluate the effects of the geometric nonlinearity. The structural analysis is performed in two steps. The first step consists of the prestressing force application using Newton-Raphson iterations. The second step consists of the external loading application where the nonlinear equilibrium equations are solved using the Displacement Control Method. Excellent results were obtained for simply supported and continuous beams with different tendon profiles. Also, the effect of nonlinear strain-displacements terms and the use of different models to simulate the concrete behavior are assessed. Additionally, a Finite Element based model for the consideration of long-term loading is presented. This procedure considers that the materials are in a linear range and geometrical nonlinear terms are neglected. Shrinkage and creep of concrete are considered using the Age-Adjusted Effective Modulus and the tendon relaxation is considered using the model available in literature. Very good results were obtained against available data for simply supported and continuous beams under sustained loads.

Keywords: Prestressed structures. Unbonded tendon. Nonlinear analysis.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	Objetivos	13
1.2	Organização do Texto	13
2	SISTEMA DE PROTENSÃO	15
2.1	Protensão não aderente	18
2.2	Perdas de protensão	19
2.3	Perdas de imediatas	19
2.4	Perdas diferidas	21
3	ANÁLISE ESTRUTURAL PARA CARGAS DE CURTA DURAÇÃO	24
3.1	Elemento de pórtico plano	25
3.1.1	<i>Análise considerando pequenos deslocamentos</i>	29
3.2	Elemento de cabo de protensão não-aderente	30
3.2.1	<i>Análise considerando pequenos deslocamentos</i>	37
3.3	Modelagem dos materiais	38
3.3.1	<i>Concreto</i>	38
3.3.2	<i>Armadura passiva e de protensão</i>	41
3.4	Análise Estrutural	42
3.4.1	<i>Aplicação da Protensão</i>	42
3.4.2	<i>Aplicação do Carregamento Externo</i>	44
4	CARGAS DE LONGA DURAÇÃO	48
4.1	Retração	48
4.2	Fluência	53
4.3	Relaxação	63
4.4	Análise estrutural para cargas de longa duração	64
4.5	Consideração da fluência e retração no concreto	66
4.5.1	<i>Elementos Finitos</i>	70
4.6	Consideração da relaxação do cabo de protensão	71
4.6.1	<i>Elementos Finitos</i>	72
5	APLICAÇÕES	75
5.1	Análise de curta duração	75

5.1.1	<i>Viga com protensão não-aderente com cabo de perfil poligonal</i>	75
5.1.2	<i>Viga com protensão não-aderente com cabo reto</i>	83
5.1.3	<i>Viga contínua com protensão não-aderente com cabo curvo</i>	89
5.1.4	<i>Viga com protensão externa</i>	95
5.2	Análise de longa duração	101
5.2.1	<i>Viga de concreto armado submetida a um carregamento distribuído</i>	102
5.2.2	<i>Viga de concreto armado biapoiada</i>	104
5.2.3	<i>Viga contínua com protensão não aderente</i>	107
6	CONCLUSÃO	113
	REFERÊNCIAS	115

1 INTRODUÇÃO

Um dos principais fatores limitantes no dimensionamento de estruturas de concreto armado, em especial elementos submetidos a esforços de tração e flexão, é a formação de fissuras. Isto ocorre devido à baixa resistência à tração do concreto, cerca de 10% da resistência à compressão do mesmo, e da aderência existente entre os materiais concreto e aço. Estas fissuras, por sua vez, são responsáveis pela exposição da armadura passiva à corrosão, comprometendo a durabilidade da peça.

A protensão é uma alternativa ao concreto armado, onde tensões são aplicadas à peça, com o objetivo de comprimir e fletir a peça previamente (AALAMI, 2014). Essas tensões têm sentido oposto ao sentido das tensões geradas pelo carregamento da peça e previnem ou limitam o surgimento de tensões de tração no concreto. Este sistema permite o dimensionamento de peças mais esbeltas, que podem reduzir não só o peso próprio da estrutura como as dimensões dos seus elementos.

A aplicação dessas tensões no elemento de concreto é feita a partir de um alongamento prévio de cordoalhas de alta resistência, que são devidamente ancoradas na peça. Essa força aplicada tem o objetivo de contrabalancear as tensões geradas pelo carregamento externo. O aumento do nível de protensão aplicado nas estruturas acarreta em uma diminuição da ductilidade das peças (HUSSIEN *et al.*, 2012).

A limitação de formação de fissuras em estruturas de concreto é bastante vantajosa uma vez que a inércia da peça bruta é significativamente maior do que a inércia da seção fissurada. Este aspecto se reverte em redução das flechas e conseqüentemente na possibilidade de elementos estruturais com maiores vãos.

A utilização de estruturas protendidas como uma solução estrutural não se trata apenas de um sistema mais eficiente e econômico (RANZI *et al.*, 2013) como também proporciona uma maior durabilidade das estruturas, uma vez que a utilização deste sistema requer um concreto com uma resistência superior ao usual em estruturas de concreto armado. Desta forma, o aumento da resistência característica do concreto diminui os efeitos das deformações devido a carregamentos de curta e longa duração bem como a diminuição da relação água/cimento dificulta o contato de agentes corrosivos com a armadura. Ademais, há um crescente interesse no estudo da utilização de concreto de alta resistência juntamente com a utilização da protensão como solução estrutural para estruturas de pontes, edifícios altos, silos e construções marítimas (HUSSIEN *et al.*, 2012).

As aplicações da protensão são variadas. Encontram-se soluções estruturais para vigas, lajes, estruturas pré-moldadas, radiês, estruturas mistas, entre outros. Dessa forma, é necessário o desenvolvimento de ferramentas computacionais capazes de realizar a análise estrutural destas estruturas, englobando situações de ruptura (i.e. Estado Limite Último) bem como situações de serviço (i.e. Estado Limite de Serviço).

Diversos trabalhos foram publicados com objetivo de simular estruturas protendidas em seus diversos sistemas. Entre as abordagens que podem ser encontradas na literatura, podemos citar estudos com cabos externos onde o efeito da protensão é considerado como um carregamento externo equivalente (AALAMI, 1990; LOU; XIANG, 2006) e como elemento resistente para vigas de concreto (AALAMI, 2000; ZONA *et al.*, 2008) e também para vigas mistas (EL-ZOHAIRY *et al.*, 2015; SOUSA *et al.*, 2019).

A principal diferença entre considerar o cabo como carga equivalente e elemento resistente é que o cabo de protensão, quando considerado como elemento resistente, contribui para o vetor de forças internas e na matriz de rigidez, tornando a análise mais robusta e eficiente.

Zona *et al.* (2008) apresentaram um estudo mostrando o efeito da consideração da não linearidade geométrica do cabo para vigas com protensão externa. Em seu estudo, a incorporação da não linearidade geométrica no modelo apresentou resultados mais próximos aos resultados experimentais. Adicionalmente, foi mostrado que a desconsideração desses efeitos superestima a resistência da estrutura.

Para vigas com protensão interna, a protensão pode ser aderente ou não-aderente. A protensão não-aderente apresenta-se como a mais utilizada no caso de estruturas de edifícios, uma vez que permite a utilização de elementos mais esbeltos, apresentando maior simplicidade e rapidez de execução. Em um modelo de elementos finitos a condição não-aderente é simulada considerando-se que não há compatibilidade entre os deslocamentos do elemento de concreto e o cabo. Alguns trabalhos foram publicados com o objetivo de simular esta condição para cargas de curta duração (MOREIRA *et al.*, 2018). Enquanto outros trabalhos consideraram além da carga de curta duração, o comportamento ao longo do tempo de vigas com protensão não aderente (LOU *et al.*, 2013b; LOU; KARAVASILIS, 2018).

Além de simulações computacionais, alguns testes experimentais foram realizados para se estudar o comportamento de vigas parcialmente protendidas (TAO; DU, 1985). Também foram realizados estudos experimentais em vigas para concretos de resistência normal e concretos de alta resistência (HUSSIEN *et al.*, 2012). Estes estudos são essenciais para a validação de

modelos cujo objetivo é simular o comportamento estrutural de elementos protendidos.

Tão importante quanto determinar a falha de estruturas protendidas é determinar o comportamento ao longo do tempo, uma vez que o concreto e o aço de protensão são materiais que apresentam comportamento dependente do tempo, como fluência e relaxação. Desta forma, é essencial a consideração destes efeitos em condições de serviço das estruturas, prevenindo a ocorrência de deformações excessivas que eventualmente podem chegar a deslocamentos quatro vezes maiores do que o inicial (GILBERT; RANZI, 2010).

A consideração destes efeitos pode ser realizada de diversas formas. Na prática da engenharia é usual considerar fatores que multiplicam as deflexões imediatas com o objetivo de considerar o efeito da retração e fluência no concreto. Estes coeficientes podem ser determinados via modelos recomendados por normas como o ACI209-R08 (2008), CEB-FIB (2010) e também a NBR 6118:2014. Da mesma forma pode ser considerado o efeito da relaxação, onde o fabricante é o responsável por fornecer o percentual de perda de tensão última do aço.

A consideração destes efeitos de maneira mais realista é complexa, uma vez que os fenômenos da retração e fluência são dependentes de muitas variáveis, que por muitas vezes são únicas para cada concreto. Ademais, a utilização de um modelo de predição destes fenômenos requer a utilização de modelos de análise sofisticados, com alto custo computacional, tornando esta prática pouco utilizada (BAŽANT; JIRÁSEK, 2018).

Uma vez que as tensões no concreto em situações de serviço geralmente não ultrapassam 50% de sua resistência, é possível adotar a hipótese de uma relação linear entre a tensão aplicada e a deformação por fluência. Diversos modelos são baseados nesta hipótese, e dentre estes podemos citar modelos baseados na superposição dos efeitos, capazes de considerar carregamentos variáveis ao longo do tempo a partir da soma individual e independente de efeitos que ocorrem ao longo do tempo.

Diversos métodos incrementais baseados no princípio da superposição que utilizam o MEF podem ser encontrados na literatura. Estes modelos foram aplicados para vigas de concreto armado (CRIEL *et al.*, 2015), vigas mistas de concreto-aço (LUIS; TAMAYO, 2011; DIAS, 2013), bem como para vigas com protensão não aderente simplesmente apoiadas (LOU *et al.*, 2014) e contínuas (LOU *et al.*, 2013b). Mais recentemente, Lou e Karavasilis (2018) utilizaram também um método incremental para uma comparação de deflexões de vigas com protensão não aderente utilizando cabos de aço e fibra de carbono.

Métodos baseados na superposição dos efeitos podem exigir um grande esforço

computacional pela quantidade de dados a serem armazenados. Desta forma, existem métodos mais simplificados como o Método do Módulo Efetivo e o Método do Módulo Efetivo Ajustado (*Age-Adjusted Effective Modulus*) (BAŽANT, 1961). O Método do Módulo Efetivo é mais simples, considerando o efeito da fluência do concreto de forma direta, porém desconsidera o efeito da idade do concreto em sua rigidez. Este efeito é considerado no Método do Módulo Efetivo Ajustado.

O Método do Módulo Efetivo Ajustado (MMEA) apresenta excelentes resultados na consideração da fluência do concreto (BAŽANT, 1961). Diversos trabalhos são encontrados na literatura que utilizam este método para a análise de vigas de concreto armado (REYBROUCK *et al.*, 2014) e vigas mistas de aço-concreto (SI; AU, 2011; AMADIO; FRAGIACOMO, 1997; BRADFORD; GILBERT, 1992), vigas com protensão externa (PISANI, 2018) e também em lajes de concreto armado (GILBERT, 2013) e lajes com protensão não aderente (GAYED; GHALI, 2019).

Este trabalho apresenta um modelo de elementos finitos para análise de vigas com protensão não aderente interna e externa com cargas de curta e longa duração. A viga é discretizada utilizando elementos de pórtico plano enquanto o cabo é discretizado em segmentos retos de cabo. A contribuição do cabo é considerada de forma consistente tanto no vetor de forças internas quanto na matriz de rigidez da estrutura.

A análise de curta duração consiste em um procedimento robusto em que o comportamento não linear físico e geométrico é considerado. Adicionalmente, a formulação considerando a hipótese de pequenas deformações é apresentada com o objetivo de avaliar o efeito da consideração da não linearidade geométrica no comportamento de vigas com protensão interna e externa.

Os resultados são validados utilizando dados experimentais disponíveis na literatura para vigas biapoiadas e contínuas com diferentes traçados de cabo para cargas de curta duração. Adicionalmente, será feita uma avaliação do efeito da consideração dos termos quadráticos na curva carga-deslocamento, tensão no cabo de protensão e curvatura. Também será realizado um estudo com o objetivo de verificar o efeito da relação tensão-deformação utilizada para modelar o comportamento do concreto, uma vez que vários modelos foram propostos na literatura. Serão apresentadas as respostas extraídas diretamente do modelo de EF para a curvatura e deformações ao longo da viga de forma a avaliar o complexo comportamento de vigas protendidas.

A análise de longa duração considera a situação de serviço, em que as tensões do

concreto não ultrapassam 50% de sua resistência. Esta análise é realizada no regime linear, utilizando a formulação para pequenos deslocamentos apresentada, e os efeitos da fluência são considerados utilizando o Método do Módulo Efetivo Ajustado, a retração é considerada utilizando recomendações normativas e a relaxação do cabo de protensão é considerada utilizando a relação constitutiva proposta por Magura *et al.* (1964). Os resultados obtidos serão validados com exemplos da literatura e avaliados em termos de deflexões e variação da tensão de protensão.

1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver uma formulação para a análise de vigas protendidas com cordoalhas não-aderentes submetidas a cargas de curta e longa duração. Esta formulação permite a análise de vigas com protensão externa e interna.

Os objetivos específicos são:

- a) Formulação, implementação e validação do elemento finito de cabo em uma abordagem Lagrangiana Total, considerando a não-linearidade geométrica e física dos materiais.
- b) Comparação do modelo de cabo de protensão não-aderente proposta por este trabalho e o modelo apresentado por Moreira *et al.* (2018).
- c) Avaliação dos efeitos da consideração da não-linearidade geométrica no comportamento de vigas com protensão interna e externa.
- d) Avaliação da presença de desviadores para vigas com protensão externa.
- e) Estudo dos efeitos da consideração de diferentes leis constitutivas para os materiais.
- f) Formulação, implementação e validação da consideração de cargas de longa duração na protensão não-aderente em vigas baseadas no Método do Módulo Efetivo Ajustado.

1.2 Organização do Texto

No Capítulo 1, foi apresentada uma introdução acerca do tema do trabalho, apresentando, ainda, alguns trabalhos já publicados e suas contribuições. Em seguida, ainda neste capítulo, apresentou-se o objetivo geral deste trabalho e os objetivos específicos.

No Capítulo 2, são apresentadas as características do sistema de protensão não-

aderente, em que são abordadas as suas principais vantagens, desvantagens e particularidades deste sistema construtivo para vigas com protensão interna e externa. Adicionalmente, aspectos como as perdas imediatas e diferidas de protensão também são abordadas.

No Capítulo 3, é apresentada a formulação do elemento de viga e do elemento de cabo de protensão. Ainda, o procedimento para a análise não linear de cargas de curta duração em vigas com protensão não aderente é apresentado e os modelos constitutivos para o concreto, aço da armadura passiva e aço da armadura ativa são discutidos.

No Capítulo 4, aspectos dos fenômenos de retração, fluência e relaxação são abordados. Em seguida, é apresentada a formulação baseada em elementos finitos para a consideração destes efeitos utilizando o Método do Módulo Efetivo Ajustado.

No Capítulo 5, a validação do modelo para cargas de curta e longa duração a partir da utilização de resultados experimentais disponíveis na literatura é apresentada. Também são realizados estudos para a avaliação dos efeitos da não linearidade geométrica e o efeito do uso de diferentes relações tensão-deformação para o concreto. Os resultados são avaliados em termos de curva carga-deslocamento, aumento da tensão no cabo, curvatura, momento fletor e deformações.

No Capítulo 6, são apresentadas as principais conclusões obtidas, bem como sugestões para trabalhos futuros.

2 SISTEMA DE PROTENSÃO

Em 1872, P. H. Jackson utilizou hastes de aço para realizar a pós-tensão de unidades de alvenaria utilizando um dispositivo em rosca em São Francisco (AALAMI, 2014). Apesar das tensões serem aplicadas de forma correta, o aço utilizado não permitia que as forças fossem mantidas ao longo do tempo, devido ao efeito da relaxação do aço.

Na Alemanha, no ano de 1888, C. W. Doehring utilizou a protensão em lajes utilizando fios de aço. A baixa tensão de escoamento do aço impossibilitou o sucesso desta tentativa de utilização da protensão. Apesar dos esforços, entre as causas do insucesso do sistema de protensão na podemos citar a desconsideração das perdas de protensão iniciais e ao longo do tempo (*e.g.* retração e fluência) e a baixa tensão de escoamento do aço disponível na época.

O aumento da tensão efetiva do aço, ainda que considerando as perdas de protensão, apresentou-se como um marco para a viabilidade da utilização da protensão no concreto. Houve significativa evolução da resistência à tração do aço, em que, mesmo considerando as perdas imediatas, o material ainda apresenta uma resistência bastante elevada, viabilizando sua utilização na protensão de elementos de concreto.

No ano de 1938 o engenheiro francês Eugene Freyssinet desenvolveu um sistema que utilizava fios de aço de alta resistência de 5mm, reconhecendo a presença das perdas de protensão, para a protensão de peças de concreto. A ancoragem desses fios foi realizada com cones macho e fêmea e com o auxílio de um macaco hidráulico. Outros engenheiros, como Magnel na Bélgica e Leonhardt na Alemanha, continuaram com o desenvolvimento e estudos acerca do sistema de protensão, com o foco de sua aplicação em pontes e estruturas especiais.

Inaugurada no ano de 1949, a ponte do Galeão (Figura 1) foi a primeira estrutura em concreto protendido no Brasil. Para esta obra, utilizou-se o sistema de protensão de Freyssinet e o projeto estrutural também é de sua autoria. Nesta obra, optou-se por utilizar a protensão completa aos elementos, ou seja, seus elementos não apresentavam tensões de tração para a combinação frequente. Além disso, o material do sistema de protensão, como ancoragens, bainhas e equipamentos, foram trazidos da França.

No início da segunda metade do século 20, houve uma popularização da utilização de lajes lisas em estruturas de edifício. Os Estados Unidos foram os pioneiros na utilização do sistema de pós-tração para eliminar a ocorrência de fissuras em lajes lisas. Dessa forma, a utilização do sistema de pós-tração cresceu 55%, não apenas em edifícios, mas também em pontes de concreto fabricado *in loco* como estruturas pré-fabricadas (TEJANI *et al.*, 2015).

Figura 1 – Ponte do Galeão.



Fonte: <http://oglobo.globo.com/rio/bairros/>.

No Brasil, no ano de 1954, a empresa Belgo Mineira passou a fabricar o aço de protensão. Como consequência direta, houve uma maior utilização da protensão no país. No entanto, essa utilização ainda encontrava-se bastante restrita a estruturas de grande porte, tais como pontes e viadutos, utilizando o sistema de protensão com aderência posterior. Finalmente, no ano de 1997, a Belgo Mineira passou a fabricar as cordoalhas engraxadas, como consequência, aumentou-se a acessibilidade de projetistas a esta solução estrutural, assim como a sua viabilidade financeira, então difundindo a sua utilização.

As aplicações de protensão no Brasil podem ser encontradas em suas mais diversas formas. Na Figura 2 apresenta-se um edifício residencial cuja solução estrutural adotada corresponde a um sistema de laje lisa protendida. Esta solução apresenta vantagens arquitetônicas, tais como a possibilidade de um pé-direito livre maior, maiores vãos livres e *layout* da edificação mais flexível. Ainda podemos citar a diminuição da quantidade de formas necessárias, uma vez que há a ausência de vigas.

A Figura 3 apresenta a aplicação da protensão em um radier de concreto. Na escolha desta solução, leva-se em consideração que as tensões transmitidas para o solo são menores, uma vez que a geometria do radier permite a transmissão dessas tensões em uma maior área. A utilização da protensão se pode ter como consequência o projeto de uma estrutura mais esbelta. Esta solução pode ser aplicada em estruturas de pequeno e grande porte.

A protensão também tem sido aplicada em outras estruturas. Na Figura 4, podemos ver a utilização desse sistema em torres eólicas, em que a protensão pode ser aderente ou não-

Figura 2 – Edifício residencial Oren.



Fonte: <http://www.procalc.com.br/blog/wp-content/uploads/2013/02/lajes-01.jpg>.

Figura 3 – Fundação em radier.



Fonte: <http://impactoprotensao.com.br/servicos/radier-protendido/>.

aderente, a depender do projeto. Além das vantagens já mencionadas, como a diminuição das dimensões das peças, a utilização neste tipo de estrutura apresenta a vantagem de diminuir o peso próprio, uma vez que apresentam grandes dimensões, facilitando o transporte e a montagem. Ademais, a utilização da protensão aliada ao uso de um concreto com alta resistência, confere à estrutura uma excelente durabilidade.

Figura 4 – Torre eólica.



Fonte: <http://impactoprotensao.com.br/servicos/protensao/torres-eolicas/>.

2.1 Protensão não aderente

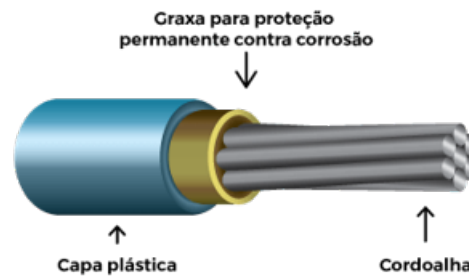
O sistema de protensão em que a força de protensão é aplicada posteriormente ao endurecimento do concreto, é chamado de pós-tração. Esse sistema é formado a partir do posicionamento das armaduras passivas e dos cabos de protensão no interior da bainha. É realizada a concretagem da peça, e após atingir uma resistência especificada em projeto, o aço de protensão é então tracionado utilizando macacos hidráulicos.

Esse sistema apresenta sua utilização em dois tipos: com aderência posterior e sem aderência. No sistema de protensão com aderência posterior, uma nata de cimento é injetada após a protensão dos cabos, garantindo a aderência entre a bainha e o cabo. Uma vez que a bainha está aderida ao concreto, a força de protensão é transferida para a peça via aderência entre o aço de protensão e o concreto e via ancoragens.

No sistema de protensão não-aderente, a fase de injeção da nata de cimento não ocorre. Dessa forma, a transferência da força de protensão para a peça de concreto é feita por meio dos pontos de ancoragem. Este sistema apresenta-se em crescente utilização, por conta da agilidade de execução, simplicidade e menor custo. Utiliza-se, na protensão não-aderente, cordoalhas engraxadas e plastificadas. A presença da graxa (Figura 5) diminui o atrito entre a bainha (capa plástica) e o cabo, além de se apresentar como um inibidor de corrosão da armadura.

No sistema de protensão não aderente não existe compatibilidade de deformações entre o cabo de protensão e o concreto, uma vez que não existe aderência entre os dois materiais. A compatibilidade entre o cabo de protensão e o concreto existe somente nos pontos de ancoragem da peça. No entanto, considera-se que a capa plástica é completamente aderida ao concreto, havendo compatibilidade de deformações ao longo de todo o seu comprimento.

Figura 5 – Cordoalha engraxada.



Fonte: <http://impactoprotensao.com.br>.

A inexistência da fase de aplicação da nata de cimento e a eficiência em vencer grandes vãos mantendo a estrutura esbelta tornaram o sistema de protensão não aderente competitivo, sendo bastante utilizado em construção de edifícios. Adicionalmente, a protensão não aderente também é bastante utilizada em elementos com protensão externa em vigas de concreto armado e vigas mistas com o objetivo de recuperar ou aumentar a capacidade existente destes elementos.

2.2 Perdas de protensão

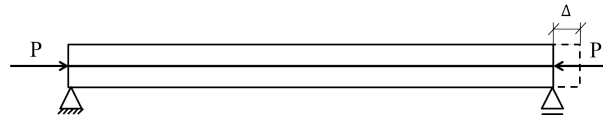
A falha de estruturas de concreto protendido, no início da utilização desse sistema construtivo, deu-se à imprecisão na determinação das perdas de protensão. Sabe-se que a tensão aplicada pelo macaco hidráulico não corresponde à tensão real no cabo de protensão, isto ocorre devido às perdas imediatas de protensão. Ainda, com o passar do tempo, a força de protensão também diminui, essa variação é denominada perda progressiva de protensão.

As perdas imediatas de protensão ocorrem imediatamente após a aplicação da protensão. São ocasionadas pelo encurtamento elástico da peça, pelo atrito entre a cordoalha e a bainha e pela acomodação da ancoragem. Enquanto que as perdas progressivas ocorrem devido ao comportamento ao longo do tempo dos materiais: retração e fluência do concreto e relaxação do aço.

2.3 Perdas de imediatas

Imediatamente após a aplicação da protensão, o elemento de concreto sofre um encurtamento devido à força de compressão aplicada. Juntamente ao concreto, o cabo de protensão também se deforma, perdendo força de protensão. A Figura 6 apresenta um esquema desse fenômeno.

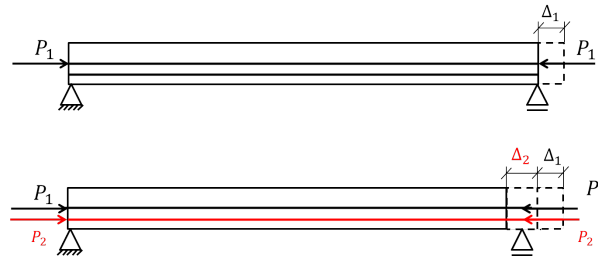
Figura 6 – Encurtamento elástico.



Fonte: Elaborada pela autora.

No sistema de pós-tração, a aplicação da protensão na peça de concreto ocorre simultaneamente ao seu encurtamento. Dessa forma, em um sistema em que somente é utilizado uma cordoalha, pode-se considerar que a perda por encurtamento elástico é nula. No entanto, em muitas aplicações de protensão, há mais de um cabo a ser tracionado. Por consequência, deve-se considerar o encurtamento da peça devido ao encurtamento gerado pela protensão sucessiva de cabos, como apresentado na Figura 7.

Figura 7 – Protensão sucessiva.



Fonte: Elaborada pela autora.

A segunda fonte de perda de protensão imediata é a perda por atrito. Quando o cabo é alongado, surge o atrito entre a bainha e a cordoalha, devido à curvatura do cabo. Esses aspectos geram mudanças na força de protensão ao longo do comprimento do cabo. As perdas por atrito dependem do comprimento do cabo e, para estruturas de grande comprimento, a consideração desta perda é essencial.

Além das perdas ocasionadas pelo traçado curvo do cabo, a presença de sinuosidades ocasionadas por imperfeições na execução do traçado do cabo também geram perdas de protensão. Estas perdas também podem ser chamadas de perdas parasitas. Esta pode ser calculada via utilização de um coeficiente aplicado à perda de protensão por atrito (MOREIRA *et al.*, 2018).

A perda de protensão por atrito pode ser estimada considerando o somatório da perda de cada trecho do traçado do cabo, utilizando a expressão:

$$\Delta P = P_0(1 - e^{-\sum \mu \alpha + \kappa L}) \quad (1)$$

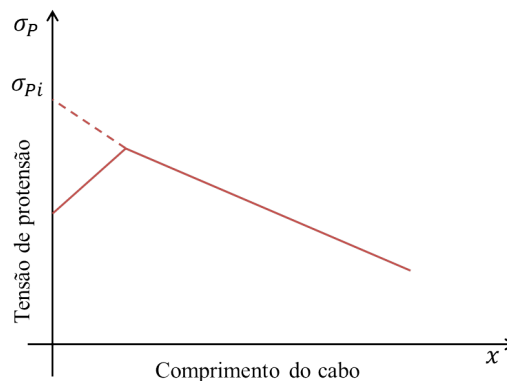
em que P_0 é a força inicial de protensão, μ é o coeficiente de atrito entre o cabo e a bainha, α é o ângulo entre o ponto inicial e final do trecho do cabo, κ é o coeficiente de atrito parasita e L é o comprimento do trecho.

Os valores dos coeficientes de atrito podem ser encontrados em normas. Adicionalmente, a perda por atrito parasita depende diretamente do comprimento da viga e pode ser significativa para vigas com grandes vãos, ainda que se utilize protensão não aderente. Neste trabalho, as perdas de protensão por atrito serão desconsideradas, esta abordagem é similar a outros trabalhos apresentados na literatura ((ZONA *et al.*, 2008; LOU *et al.*, 2013; MOREIRA *et al.*, 2018)).

Na realização da ancoragem dos cabos, a acomodação da ancoragem gera um deslizamento do cabo no sentido oposto ao sentido de aplicação da protensão. Este deslizamento diminui o alongamento do cabo, isto é, gera perda de protensão. Ainda, o atrito que ocorre entre a bainha e o cabo gera uma força de atrito cujo sentido é oposto ao movimento do cabo, cujo valor torna-se nulo em um ponto distante do ponto de ancoragem. Portanto, esta perda de protensão decresce com o distanciamento do ponto de ancoragem ativa da peça de concreto.

Na Figura 8, é ilustrada a perda de protensão no cabo por acomodação da ancoragem, em que a tensão inicial no cabo σ_i decresce no ponto de ancoragem ativa quando ocorre a sua acomodação. Essa perda de protensão se estende até um dado comprimento do cabo.

Figura 8 – Perda de protensão por acomodação da ancoragem.



Fonte: Elaborada pela autora.

2.4 Perdas diferidas

As perdas de protensão ao longo do tempo ocorrem como consequência do comportamento dependente do tempo dos materiais que constituem o sistema de protensão. Primeiramente, podemos citar os efeitos da fluência e retração do concreto.

Quando um elemento de concreto é submetido a um carregamento externo, há uma resposta imediata e uma resposta dependente do tempo. Quando essa peça é mantida sob

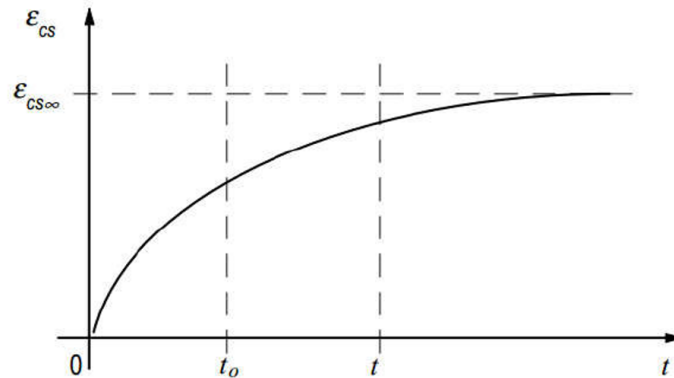
compressão constante, a sua deformação aumenta ao longo do tempo, de forma mais rápida em pequenas idades estabilizando-se após alguns anos (RANZI; OSTINELLI, 2017). Este comportamento é denominado fluência do concreto. O aumento dessa deformação do concreto causa o encurtamento do elemento, fazendo com que haja um alívio de tensões no cabo de protensão ao longo do tempo.

A fluência do concreto depende de muitas variáveis, dentre elas podemos citar a intensidade da carga aplicada, a composição química do concreto, as condições de cura e da idade do concreto quando o elemento é carregado. Por se tratar de um fenômeno dependente de muitas variáveis, é usual se determinar a deformação lenta do concreto via fatores de majoração dessas deformações ou expressões presentes em códigos normativos, métodos mais refinados serão comentados no Capítulo 4.

Além da fluência, durante sua vida útil, o concreto perde a água de sua composição, que, por consequência, ocasiona uma diminuição do seu volume, este fenômeno é denominado retração. O efeito da retração do concreto é semelhante ao efeito do encurtamento elástico, diminuindo o comprimento da peça, logo diminuindo o alongamento da cordoalha, conseqüentemente gerando perda na força de protensão aplicada inicialmente.

A intensidade da retração do concreto, de forma semelhante à fluência, depende primordialmente de algumas variáveis como o tempo, a composição do concreto, a forma da peça, a umidade do ar e seu tempo de cura (BAŽANT; JIRÁSEK, 2018). Na Figura 9, podemos observar o comportamento da deformação do concreto devido à retração, em que o tempo t_0 corresponde ao tempo entre o final da cura da peça de concreto e o a data de aplicação da protensão. Verificamos que um maior tempo de cura acarreta em um menor impacto da retração na peça, uma vez que maior parte desta retração já deverá ter ocorrido. Portanto, há uma maior deformação por retração nas idades menores do concreto.

Figura 9 – Encurtamento do concreto devido à retração em função do tempo.



Fonte: César e Veríssimo (1998)

Segundo Gilbert e Ranzi (2010), para uma estimativa eficiente e precisa dos efeitos de fluência e retração do concreto ao longo do tempo, são necessários dois requisitos básicos:

1. Dados concisos sobre a fluência e retração para o concreto em particular estudado.
2. Um procedimento analítico ou numérico que inclua esses efeitos do tempo na análise e projeto da estrutura.

De forma análoga à fluência do concreto, o aço apresenta uma perda de tensão quando mantido sob deformação constante. Este efeito se intensifica com o aumento da relação entre a tensão inicial aplicada ao aço e sua tensão de escoamento. Este fenômeno também deve ser considerado no cálculo das perdas de protensão.

O encurtamento apresentado pelo concreto ao longo do tempo, em virtude de efeitos da fluência e retração do mesmo, geram, também, um encurtamento nas cordoalhas de protensão. Este efeito é transferido via aderência existente entre os dois materiais ou via pontos de ancoragem. Juntamente a este efeito, a relaxação do aço também causa perdas de deformação. Estas perdas de protensão ao longo do tempo podem resultar em perdas de tensão nas cordoalhas em torno de 2.5% a 7% da tensão inicial aplicada à estrutura Gilbert e Ranzi (2010). Esses efeitos, aliados às perdas de protensão imediatas, são essenciais para o correto dimensionamento de estruturas de concreto protendido visando garantir sua resistência e durabilidade.

3 ANÁLISE ESTRUTURAL PARA CARGAS DE CURTA DURAÇÃO

Diversos estudos experimentais foram realizados com o objetivo de caracterizar e avaliar o comportamento de estruturas com protensão não aderente interna (TAO; DU, 1985; HEO *et al.*, 2013) e externa (LIN, 1955; TAN; TJANDRA, 2007) submetidas a cargas de curta duração. Dentre estes, podemos ainda citar estudos para avaliar a utilização de concreto de alta resistência (HUSSIEN *et al.*, 2012) e concreto de baixo peso específico (KWON *et al.*, 2018).

Diversos modelos analíticos simplificados (ALKHAIRI; NAAMAN, 1993; HARAJLI *et al.*, 1999; ASTA *et al.*, 2007; PENG; XUE, 2019) e modelos baseados em elementos finitos (LOU *et al.*, 2013a; DALL'ASTA; ZONA, 2005) foram propostos para simular o comportamento de vigas de concreto protendido. O Método dos Elementos Finitos (MEF) é largamente utilizado para a análise de estruturas. Este método permite facilmente incorporar a não linearidade geométrica no campo de deformações e bem como a não linearidade física. A validação do modelo então é realizada utilizando dados de ensaios experimentais, e uma vez que o modelo é validado, é possível realizar estudos numéricos para avaliar o efeito de diversos aspectos como a utilização de diferentes materiais, condições de apoio, carregamento e geometria do cabo de protensão.

Dall'Asta e Zona (2005) propuseram um modelo capaz de simular vigas com protensão externa com conexão deformável, em que o atrito nos desviadores foi desprezado. Posteriormente, Zona *et al.* (2008) desenvolveram um modelo de elementos finitos também para a análise de vigas com protensão externa, baseado em um modelo analítico previamente desenvolvido (ASTA *et al.*, 2007), incorporando a não linearidade física e geométrica. O modelo proposto considera o cabo como um elemento ancorado nas extremidades da viga, desprezando o atrito.

Lou *et al.* (2013b) propuseram um modelo baseado em elementos finitos para a análise de vigas com protensão interna em que o efeito da protensão é considerado como uma força nodal equivalente (AALAMI, 1990). O modelo também inclui a não linearidade geométrica e física, além de avaliar os efeitos de longa duração. Esta mesma formulação foi utilizada para simular vigas com protensão externa (LOU *et al.*, 2013a), para um estudo comparativo da utilização de cabos de fibras poliméricas e aço (LOU *et al.*, 2015; LOU; KARAVASILIS, 2018) além de vigas mistas de aço e concreto (LOU; KARAVASILIS, 2019). Recentemente, esta formulação foi utilizada para avaliar o comportamento de vigas com protensão externa, utilizando cabos poliméricos, em que o concreto apresentava resistência normal (LOU *et al.*, 2019) e alta resistência (LOU *et al.*, 2020).

Moreira *et al.* (2018) propôs um robusto modelo baseado em elementos finitos em que a viga de concreto armado é discretizada em elementos de pórtico plano e o cabo de protensão é simulado como um único elemento com um número variável de segmentos retos. O modelo do cabo é baseado na deformação de engenharia e considera os efeitos da não linearidade física e geométrica. O modelo foi validado utilizando dados de ensaios experimentais em vigas com protensão interna, apresentando excelentes resultados e uma alta taxa de convergência. Esta formulação foi adaptada, de forma a ser capaz de simular vigas mistas de aço-concreto com interação parcial (SOUSA *et al.*, 2019).

Neste capítulo é apresentada uma formulação baseada em elementos finitos para a simulação de vigas com protensão não aderente interna e externa que considera os efeitos da não linearidade física e geométrica. Este modelo desconsidera o atrito entre o cabo e a bainha. A viga de concreto armado é simulada por elementos de pórtico plano e o cabo de protensão não aderente é considerado como um elemento único com um número variável de segmentos. Este elemento não aumenta o número de graus de liberdade do modelo, uma vez que cada segmento de cabo é associado a elementos de viga.

A formulação de ambos os elementos é Lagrangiana Total, sendo mais simples do que a formulação baseada na deformação de engenharia (MOREIRA *et al.*, 2018). O modelo proposto também é apresentado em sua forma para a análise considerando pequenos deslocamentos em relação às dimensões da viga com o objetivo de avaliar os efeitos da consideração dos termos geometricamente não lineares no comportamento de vigas com protensão interna e externa. O vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente são obtidas de forma consistente, garantindo a convergência quadrática e consistência do modelo.

A análise estrutural para cargas de curta duração é composta por duas etapas: aplicação da protensão e aplicação do carregamento externo. A aplicação da protensão é realizada solucionando-se a equação de equilíbrio não linear e uma equação adicional que considera a força de protensão aplicada. O sistema é linearizado e solucionado utilizando as iterações de Newton-Raphson. Finalmente, a aplicação do carregamento externo é realizada utilizando o Método do Controle de Deslocamentos (BATOZ; DHATT, 1979).

3.1 Elemento de pórtico plano

A viga de concreto armado, neste trabalho, é modelada como um elemento de pórtico plano de Euler-Bernoulli para grandes deslocamentos e rotações moderadas em uma abordagem

Lagrangiana Total. O campo de deslocamentos em um ponto (X, Y) do interior do elemento é dado por:

$$\begin{aligned} u(X, Y) &= u_0(X) - Y v_0' \\ v(X, Y) &= v_0(X) \end{aligned} \quad (2)$$

em que u_0 e v_0 correspondem aos deslocamentos axial e transversal de membrana e (X, Y) correspondem às coordenadas da geometria inicial.

Para rotações moderadas, o campo de deformação é escrito em função da deformação de membrana ε_0 e da curvatura κ :

$$\varepsilon = u_0' + \frac{1}{2} v_0'^2 - Y v_0'' = \varepsilon_0 - Y \kappa \quad (3)$$

A deformação de membrana e a curvatura são chamadas de deformações generalizadas e podem ser escritas na forma matricial:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0' \\ v_0'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} v_0'^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_0 + \varepsilon_L \quad (4)$$

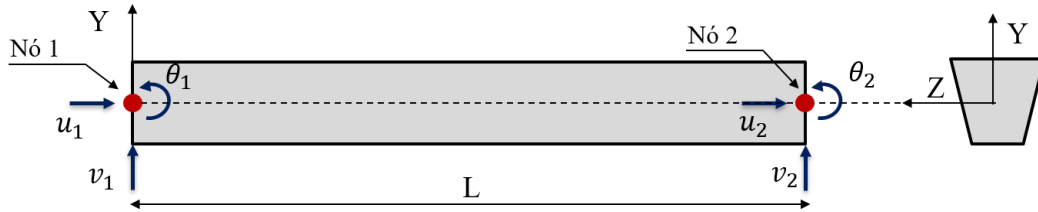
O vetor de deformações generalizadas, dado pela Eq. (4), apresenta uma parcela linear ε_0 , relativa a pequenas deformações, e uma parcela não linear ε_L , relativa a grandes deformações. A consideração da parcela quadrática das deformações é responsável por acrescentar os efeitos da não linearidade geométrica no modelo.

A partir das deformações axiais da viga, é possível calcular o vetor de tensões generalizadas (σ) ao longo de uma seção da viga a partir das relações constitutivas dos materiais apresentados na Seção 3.3. Desta forma, a força normal (N) e o momento fletor (M) podem ser determinadas a partir da integração ao longo da seção:

$$\sigma = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_A \sigma dA \\ - \int_A Y \sigma dA \end{bmatrix} \quad (5)$$

A utilização das funções de interpolação são responsáveis pela representação das deformações ao longo de cada elemento em função dos seus deslocamentos. A continuidade das funções de interpolação necessárias para interpolar os deslocamentos axiais e transversais

Figura 10 – Elemento de pórtico plano e seus graus de liberdade.



Fonte: Elaborada pela autora.

ao longo da viga, apresentada na Figura 10, é a continuidade C^0 e C^1 , respectivamente. Neste trabalho, utilizaram-se funções de interpolação lineares para o deslocamento axial:

$$u_0 = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_e \quad (6)$$

em que \mathbf{u}_e são os deslocamentos nodais no elemento de viga e

$$L_1 = 1 - \frac{X}{L} \quad L_2 = \frac{X}{L} \quad (7)$$

em que X e L correspondem à coordenada ao longo do comprimento do elemento e ao comprimento total do elemento, respectivamente. Para os deslocamentos transversais utilizam-se os polinômios cúbicos de Hermite:

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 & H_1 & H_2 & 0 & H_3 & H_4 \end{bmatrix} \mathbf{u}_e \quad (8)$$

em que:

$$H_1 = 1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3} \quad H_2 = x - \frac{2X^2}{L} + \frac{X^3}{L^2} \quad H_3 = \frac{3X^2}{L^2} - \frac{2X^3}{L^3} \quad H_4 = -\frac{X^2}{L} + \frac{X^3}{L^2} \quad (9)$$

Assim, é possível representar o vetor de deformações em função da matriz \mathbf{B} de deformação-deslocamento:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{u}_e = \left(\mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L \right) \mathbf{u}_e \quad (10)$$

em que \mathbf{B}_0 e \mathbf{B}_L representam as matrizes de deformação-deslocamento linear e não linear, respectivamente. É possível escrever v_0' na forma:

$$v_0' = \begin{bmatrix} 0 & H_1' & H_2' & 0 & H_3' & H_4' \end{bmatrix} \mathbf{u}_e = \mathbf{G} \mathbf{u}_e \quad (11)$$

Assim, o termo não linear da deformação de membrana pode ser escrito na forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L = \frac{1}{2} v_0' = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{u}_e \quad (12)$$

Uma vez que essa expressão contém termos de quarto grau e a parcela da deformação relacionada ao deslocamento axial é constante, há um desbalanceamento entre esses termos. Este aspecto pode gerar o travamento de membrana, e para evitar esse problema, a Eq. (12) é substituída pela deformação de membrana média (CRISFIELD, 1991):

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2} \frac{1}{L} \int_0^L v_0'^2 dX = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{A} \mathbf{u}_e \quad (13)$$

em que \mathbf{A} é uma matriz constante e simétrica:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{L} \int_0^L \mathbf{G}^T \mathbf{G} dX \quad (14)$$

Desta forma, o vetor de deformação não linear pode ser escrito como:

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e^T \mathbf{A} \mathbf{u}_e \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_e = \mathbf{B}_L \mathbf{u}_e \quad (15)$$

O incremento de deformação $\delta\varepsilon$ pode ser determinado:

$$\delta\varepsilon = \left(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L \right) \delta\mathbf{u}_e = \bar{\mathbf{B}} \delta\mathbf{u}_e \quad (16)$$

onde $\bar{\mathbf{B}}$ é a matriz de deformação-deslocamento virtual. A partir disto, é possível determinar o vetor de forças internas \mathbf{g}_e , via princípio do trabalho virtual:

$$\delta U_e = \int_0^L \delta\varepsilon^T \sigma dX = \delta\mathbf{u}_e^T \int_0^L \bar{\mathbf{B}}^T \sigma dX = \delta\mathbf{u}_e^T \mathbf{g}_e \quad (17)$$

Portanto:

$$\mathbf{g}_e = \int_0^L \bar{\mathbf{B}}^T \sigma dX \quad (18)$$

A matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_{T_e} é obtida a partir da diferenciação do vetor de forças internas em função do vetor de deslocamentos:

$$\mathbf{K}_{T_e} = \frac{\partial \mathbf{g}_e}{\partial \mathbf{u}_e} = \mathbf{K}_{E_e} + \mathbf{K}_{G_e} \quad (19)$$

onde \mathbf{K}_{E_e} e \mathbf{K}_{G_e} correspondem à matriz de rigidez elástica e à matriz de rigidez geométrica do elemento, respectivamente. A expressão da matriz de rigidez elástica do elemento é dada por:

$$\mathbf{K}_{E_e} = \int_0^L \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_T \bar{\mathbf{B}} dX \quad (20)$$

onde \mathbf{C}_T é a matriz constitutiva tangente obtida por meio da derivação do vetor de tensões generalizadas:

$$\mathbf{C}_T = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial N}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial M}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial M}{\partial \kappa} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Finalmente, determina-se a expressão da matriz de rigidez geométrica:

$$\mathbf{K}_{Ge} = \int_0^L N \mathbf{A} dX \quad (22)$$

Nota-se que o concreto e a armadura passiva apresentam comportamento não linear. Desta forma, os esforços internos e a matriz \mathbf{C}_T são calculados utilizando o método das fatias. Para a integração ao longo de cada elemento, utiliza-se a quadratura de Gauss com 2 pontos de integração. Mais detalhes da formulação deste elemento são apresentadas por Moreira *et al.* (2018).

3.1.1 Análise considerando pequenos deslocamentos

Com o objetivo de se avaliar a influência dos termos não lineares geométricos, neste trabalho, apresenta-se a formulação para uma análise considerando a hipótese de pequenas deformações. Desta forma, o termo não linear de deformação-deslocamento (ε_L) é desconsiderado e, por consequência, a matriz \mathbf{B} pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} u_0' \\ v_0'' \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{u}_e \quad (23)$$

em que a matriz \mathbf{B} é idêntica à matriz \mathbf{B}_0 . O incremento de deformação é então determinado:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{u}_e \quad (24)$$

Utilizando o trabalho virtual interno, podemos determinar o vetor de forças interno linear:

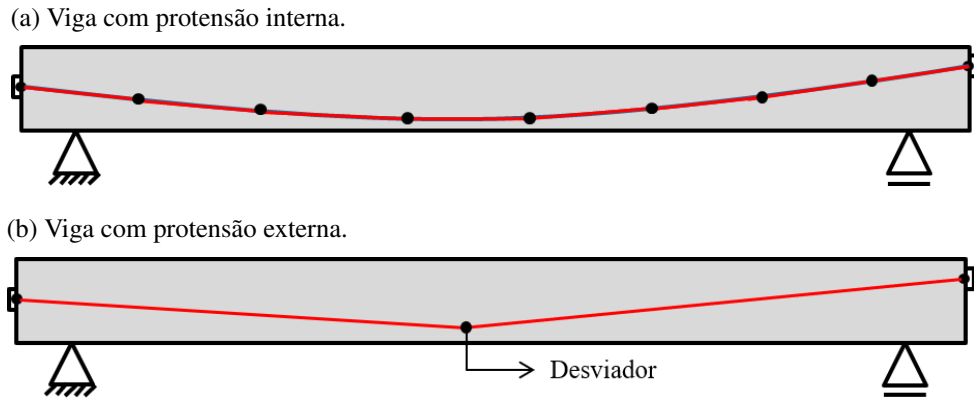
$$\mathbf{g}_e = \int_0^L \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dX \quad (25)$$

e a matriz de rigidez:

$$\mathbf{K}_{Te} = \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{C}_T \mathbf{B} dX \quad (26)$$

A matriz de rigidez é composta apenas por um termo, correspondente à matriz de rigidez material do elemento de pórtico plano.

Figura 11 – Esquema para o elemento de protensão não-aderente.



Fonte: Elaborada pela autora.

3.2 Elemento de cabo de protensão não-aderente

Neste trabalho, o cabo de protensão é modelado como um único elemento composto por um número variável de n segmentos retos, como apresentado na Figura 11. O cabo é envolto de uma graxa anti-corrosão e esse conjunto é envolto por uma capa plástica, de forma que o atrito entre o cabo e a capa plástica pode ser desprezado (ZONA *et al.*, 2008; LOU *et al.*, 2013b; MOREIRA *et al.*, 2018). Assim, a compatibilidade de deslocamentos entre o cabo de protensão e a viga é satisfeita apenas nos pontos de ancoragem. Contudo, a compatibilidade de deslocamentos é satisfeita entre o concreto e a capa plástica. É importante notar que, o elemento de cabo apresentado neste trabalho, permite a análise de vigas com protensão interna (Figura 11b) e protensão externa (Figura 11a).

Devido à ausência de compatibilidade entre as deformações ao longo da viga, a deformação do cabo é determinada considerando os deslocamentos de toda a estrutura. Os deslocamentos de cada segmento de cabo são determinadas a partir dos deslocamentos apresentados pelos elementos de pórtico plano associados ao segmento de cabo. Uma vez que o atrito é desprezado, a deformação ao longo do cabo é uniforme, conseqüentemente, a tensão no cabo é constante.

A posição de um ponto material genérico (x, y) após a deformação pode ser escrito na forma:

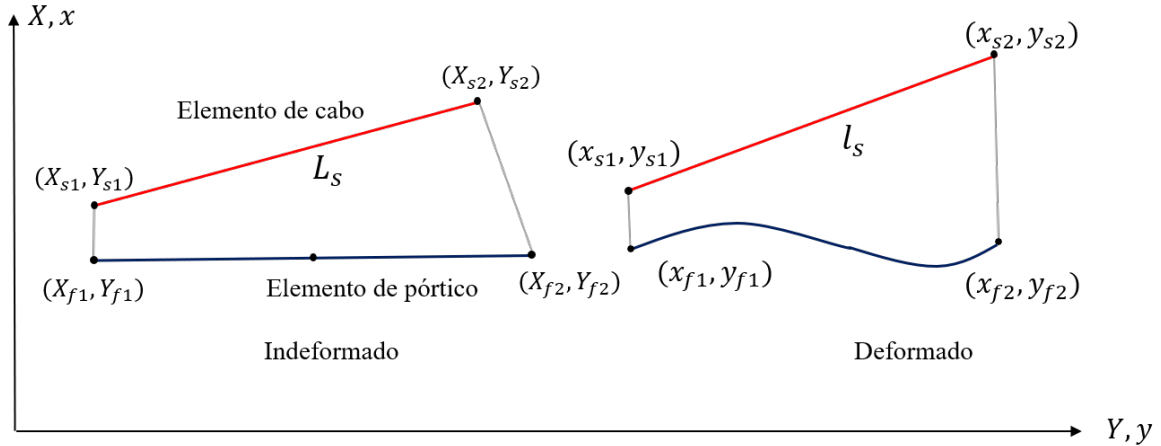
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (27)$$

em que (X, Y) são as coordenadas iniciais e (u, v) os respectivos deslocamentos. Esta expressão

pode ser escrita de forma mais compacta, na forma vetorial:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad (28)$$

Figura 12 – Elemento de pórtico plano e elemento de cabo antes e após a deformação.



Fonte: Elaborada pela autora.

Como apresentado na Figura 12, as coordenadas da extremidade de um elemento de cabo (\mathbf{X}_p) podem ser escritas como:

$$\mathbf{X}_p = \mathbf{X}_f + \mathbf{d} \quad (29)$$

em que \mathbf{X}_f são as coordenadas nodais do elemento de pórtico plano associado e \mathbf{d} é o vetor dado por:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} X_p - X_f \\ Y_p - Y_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} \quad (30)$$

Assumindo que as distâncias entre os pontos do cabo e da viga permanecem constantes, as coordenadas nodais do elemento de cabo após a deformação são dadas por:

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_f + \mathbf{R} \mathbf{d} \quad (31)$$

onde \mathbf{R} é a matriz de rotação:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (32)$$

e θ corresponde a rotação nodal do elemento de pórtico.

Subtraindo a Eq. (29) da Eq. (31), temos:

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{u} + (\mathbf{R} - \mathbf{I}) \mathbf{d} \quad (33)$$

em que \mathbf{u} corresponde aos deslocamentos nodais do elemento de pórtico plano e \mathbf{I} é a matriz identidade. Assim, os deslocamentos nodais do elemento de cabo \mathbf{u}_p podem ser escritas na forma:

$$\begin{bmatrix} u_p \\ v_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u + (\cos \theta - 1) d_x - \sin \theta d_y \\ v + \sin \theta d_x + (\cos \theta - 1) d_y \end{bmatrix} \quad (34)$$

Esta expressão pode ser simplificada para o caso de rotações moderadas:

$$\begin{bmatrix} u_p \\ v_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d_y \\ 0 & 1 & d_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u}_p = \mathbf{T} \mathbf{u} \quad (35)$$

Finalmente, os deslocamentos nodais de um segmento de cabo genérico (\mathbf{u}_{ps}) podem ser obtidos a partir dos deslocamentos nodais do elemento de pórtico plano associado (\mathbf{u}_s):

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}_{ps} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d_{y1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d_{x1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -d_{y2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d_{x2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}_s \Rightarrow \mathbf{u}_{ps} = \mathbf{T}_s \mathbf{u}_s \quad (36)$$

em que \mathbf{T}_s corresponde a matriz de transformação do segmento de cabo. Para o caso de protensão externa, as coordenadas do segmento são associadas a diferentes elementos de pórtico de forma genérica. Por outro lado, na protensão interna, cada segmento de cabo interno de cabo é considerado como interno a um elemento de pórtico.

Para um segmento de cabo cujo comprimento inicial é L_s , seu comprimento deformado l_s pode ser calculado a partir de suas coordenadas finais:

$$L_s = \sqrt{\mathbf{v}_{0s}^T \mathbf{v}_{0s}} \quad (37)$$

e

$$l_s = \sqrt{\mathbf{v}_s^T \mathbf{v}_s} = \sqrt{(\mathbf{v}_{0s} + \mathbf{t}_s)^T (\mathbf{v}_{0s} + \mathbf{t}_s)} \quad (38)$$

em que:

$$\mathbf{v}_{0s} = \begin{bmatrix} X_{s2} - X_{s1} \\ Y_{s2} - Y_{s1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{s21} \\ Y_{s21} \end{bmatrix} \quad (39)$$

e

$$\mathbf{t}_s = \begin{bmatrix} u_{s2} - u_{s1} \\ v_{s2} - v_{s1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{s21} \\ v_{s21} \end{bmatrix} \quad (40)$$

É possível escrever o vetor \mathbf{t}_s na forma:

$$\mathbf{t}_s = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{s1} \\ v_{s1} \\ u_{s2} \\ v_{s2} \end{bmatrix} = \mathbf{G} \mathbf{u}_s \quad (41)$$

Assim, o comprimento deformado do segmento de cabo pode ser escrito na forma:

$$l_s = \sqrt{L_s^2 + 2\mathbf{v}_{0s}^T \mathbf{t}_s + \mathbf{t}_s^T \mathbf{t}_s} \quad (42)$$

ou

$$l_s = L_s \sqrt{1 + \frac{1}{L_s^2} (2\mathbf{v}_{0s}^T \mathbf{t}_s + \mathbf{t}_s^T \mathbf{t}_s)} \quad (43)$$

Este comprimento pode ser calculado de uma forma mais simples aplicando a expansão de Taylor:

$$l_s \approx L_p + \frac{1}{L_s} (\mathbf{v}_{0s}^T \mathbf{t}_s + \frac{1}{2} \mathbf{t}_s^T \mathbf{t}_s) \quad (44)$$

A deformação do cabo é composta pela soma da deformação inicial ε_{p0} , que é constante, e a deformação incremental dependente dos deslocamentos $\Delta\varepsilon_p$:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p0} + \Delta\varepsilon_p \quad (45)$$

A deformação incremental consiste no somatório das deformações individuais dos n_s segmentos de cabo. Desta forma, a Eq. (45) pode ser reescrita:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p0} + \frac{l_p - L_p}{L_p} = \varepsilon_{p0} + \frac{1}{L_p} \sum_{s=1}^{n_s} (l_s - L_s) \quad (46)$$

Utilizando a expressão aproximada do comprimento final do segmento de cabo dado pela Eq. (44):

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p0} + \frac{1}{L_p} \sum_{s=1}^{n_s} \frac{1}{L_s} \left(\mathbf{v}_{0s}^T \mathbf{t}_s + \frac{1}{2} \mathbf{t}_s^T \mathbf{t}_s \right) \quad (47)$$

Finalmente, a partir da Eq. (36), a deformação do cabo pode ser escrita de forma compacta:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p0} + \sum_{s=1}^{n_s} \mathbf{B}_s \mathbf{T}_s \mathbf{u}_s \quad (48)$$

em que a matriz \mathbf{B}_s corresponde à matriz deformação-deslocamento do segmento de cabo. Esta matriz é composta por uma parcela linear \mathbf{B}_0 e uma parcela não linear \mathbf{B}_L :

$$\mathbf{B}_s = \mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L \quad (49)$$

em que:

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{L_p L_s} \mathbf{v}_{0s}^T \mathbf{G} = \frac{1}{L_p L_s} \begin{bmatrix} -X_{21} & -Y_{21} & X_{21} & Y_{21} \end{bmatrix} \quad (50)$$

e

$$\mathbf{B}_L = \frac{1}{L_p L_s} \mathbf{t}_s^T \mathbf{G} = \frac{1}{L_p L_s} \begin{bmatrix} -u_{21} & -v_{21} & u_{21} & v_{21} \end{bmatrix} \quad (51)$$

O trabalho virtual interno δU_p do elemento de cabo de protensão é dado por:

$$\delta U_p = \int_0^{L_p} \int_0^{A_p} \delta \varepsilon_p \sigma_p dA dL = \delta \varepsilon_p F_p L_p \quad (52)$$

em que $\delta \varepsilon_p$ é a deformação virtual do cabo e F_p corresponde a força de protensão no cabo, que pode ser calculada como:

$$F_p = \sigma_p A_p \quad (53)$$

Para calcular o trabalho virtual interno, a variação da deformação $\delta \varepsilon$ é determinada a partir da variação da Eq. (48):

$$\delta \varepsilon_p = \sum_{s=1}^{n_s} \bar{\mathbf{B}}_s \mathbf{T}_s \delta \mathbf{u}_s \quad (54)$$

em que $\bar{\mathbf{B}}_s$ corresponde a matriz deformação-deslocamento virtual dada por:

$$\bar{\mathbf{B}}_s = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L \quad (55)$$

Finalmente, o trabalho virtual interno do cabo não-aderente pode ser calculado:

$$\delta U_p = \delta \varepsilon_p F_p L_p = \sum_{s=1}^{n_s} \bar{\mathbf{B}}_s \mathbf{T}_s \delta \mathbf{u}_s F_p L_p \quad (56)$$

Esta expressão também pode ser escrita na forma:

$$\delta U_p = \sum_{s=1}^{n_s} \mathbf{g}_s^T \delta \mathbf{u}_s \quad (57)$$

em que o vetor de forças internas de cada segmento de cabo pode ser determinado como:

$$\mathbf{g}_s = \mathbf{T}_s^T \bar{\mathbf{B}}_s^T F_p L_p \Rightarrow \mathbf{g}_{pe} = \mathbf{b}_s F_p \quad (58)$$

onde

$$\mathbf{b}_s = \frac{1}{L_s} \begin{bmatrix} -x_{21} \\ -y_{21} \\ d_{y1}x_{21} - d_{x1}y_{21} \\ x_{21} \\ y_{21} \\ d_{x2}y_{21} - d_{y2}x_{21} \end{bmatrix} = \frac{l_s}{L_s} \begin{bmatrix} -\cos \beta \\ -\sin \beta \\ d_{y1} \cos \beta - d_{x1} \sin \beta \\ \cos \beta \\ \sin \beta \\ d_{x2} \sin \beta - d_{y2} \cos \beta \end{bmatrix} \quad (59)$$

O vetor de forças global do cabo \mathbf{g}_p pode ser determinado considerando o somatório da contribuição individual de cada segmento de cabo utilizando o procedimento de montagem clássico do Método dos Elementos Finitos:

$$\mathbf{g}_p = \sum_{s=1}^{n_s} \mathbf{L}_e^T \mathbf{g}_s \quad (60)$$

em que \mathbf{L}_e^T é a matriz Booleana responsável por relacionar os graus de liberdade de cada segmento s aos graus de liberdade globais da estrutura.

A Figura 13a ilustra a representação da decomposição do vetor de forças sobre o eixo cartesiano para uma situação particular em que $d_{x1} = d_{x2} = 0$. Ainda, a Figura 13b representa as forças nodais de um segmento de cabo aplicadas nos nós de um elemento de pórtico.

A matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_{Tp} é determinada a partir da derivada do vetor de forças global interno em relação aos deslocamentos nodais globais:

$$\mathbf{K}_{Tp} = \frac{\partial \mathbf{g}_p}{\partial \mathbf{u}} = \sum_{s=1}^{n_s} \mathbf{L}_e^T \frac{\partial \mathbf{g}_s}{\partial \mathbf{u}} \quad (61)$$

A derivada do vetor de forças internas de um segmento de cabo é dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{g}_s}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{T}_s^T \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_s^T}{\partial \mathbf{u}} F_p L_p + \mathbf{T}_s^T \bar{\mathbf{B}}_s^T \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}} L_p \quad (62)$$

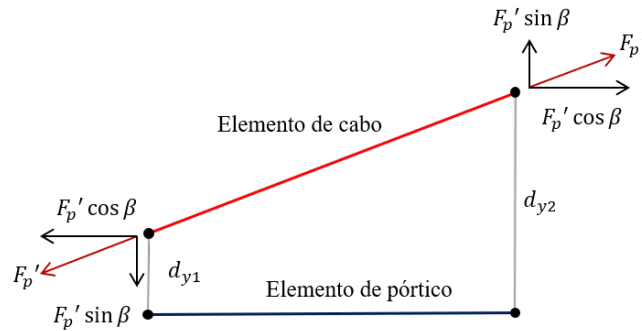
em que o primeiro termo da Eq. (62) corresponde a matriz de rigidez geométrica e o segundo termo corresponde a matriz de rigidez material do segmento de cabo.

A derivada da força no cabo de protensão é dada por:

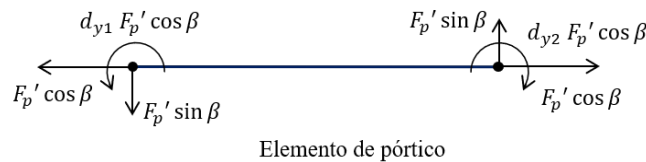
$$\frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}} = A_p \frac{\partial \sigma_p}{\partial \varepsilon_p} \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \mathbf{u}} = A_p E_p \sum_{a=1}^{n_s} \bar{\mathbf{B}}_a \mathbf{T}_a \quad (63)$$

Figura 13 – Forças nodais equivalentes.

(a) Forças nodais no segmento.



(b) Forças nodais no elemento de pórtico.



Fonte: Elaborada pela autora.

em que a indica que a força de protensão é dependente dos deslocamentos do cabo e E_p corresponde ao módulo de elasticidade do cabo de protensão. Assim, é possível determinar a expressão da matriz de rigidez material do elemento de cabo \mathbf{K}_{Ep} :

$$\mathbf{K}_{Ep} = \frac{A_p E_p}{L_p} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \quad (64)$$

em que:

$$\mathbf{b} = \sum_{s=1}^{n_s} \mathbf{L}_e^T \mathbf{b}_s \quad (65)$$

É importante observar que a matriz de rigidez elástica \mathbf{K}_{Ep} é uma matriz densamente preenchida, isto ocorre devido ao produto $\mathbf{b} \mathbf{b}^T$.

Da Eq. (62), a derivada do primeiro termo é dada por:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_s^T}{\partial \mathbf{u}} = \frac{1}{L_p L_s} \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{T}_s \quad (66)$$

Desta forma, a matriz de rigidez geométrica do segmento de cabo \mathbf{K}_{G_s} é calculada:

$$\mathbf{K}_{G_s} = \frac{F_p}{L_s} \mathbf{T}_s^T \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{T}_s \quad (67)$$

Finalmente, a matriz de rigidez geométrica global do elemento de cabo \mathbf{K}_{G_p} pode ser determinada:

$$\mathbf{K}_{G_p} = \sum_{s=1}^{n_s} \mathbf{L}_e^T \mathbf{K}_{G_s} \mathbf{L}_e \quad (68)$$

onde a matriz \mathbf{K}_{G_p} é uma matriz esparsa, apresentando o mesmo padrão dos elementos de pórtico plano.

A matriz de rigidez global do elemento de cabo de protensão finalmente pode ser expressa como o somatório dos termos individuais da matriz de rigidez material global dada pela Eq. (64) e da matriz de rigidez geométrica global dada pela Eq. (68):

$$\mathbf{K}_{T_p} = \mathbf{K}_{E_p} + \mathbf{K}_{G_p} \quad (69)$$

A matriz de rigidez global, bem como o vetor de forças internas global do elemento de cabo são somadas à matriz de rigidez global da viga e vetor de forças global da viga, compondo a matriz de rigidez da estrutura. A solução da equação não linear de equilíbrio resulta no campo de deslocamentos que obedecem a compatibilidade bem como o equilíbrio da estrutura. O método para a solução da equação não linear de equilíbrio é apresentado na Seção 3.4.

3.2.1 *Análise considerando pequenos deslocamentos*

A formulação do elemento de cabo considerando que a viga protendida apresenta pequenas deformações é apresentada nesta seção. Inicialmente, parte-se da hipótese de que a viga apresenta pequenos deslocamentos. Consequentemente, também podemos admitir que as deformações do elemento de cabo também são pequenas. Assim, a parcela não linear da matriz de deformação-deslocamento, \mathbf{B}_L , e a matriz de deformação-deslocamento considerando pequenos deslocamentos é dada por:

$$\mathbf{B}_s = \bar{\mathbf{B}}_s = \mathbf{B}_0 \quad (70)$$

Utilizando a expressão do trabalho virtual interno dada pela Eq. (56), podemos determinar diretamente o vetor de forças interno para um segmento de cabo:

$$\mathbf{g}_s = \mathbf{b}_{s_0} F_p \quad (71)$$

em que:

$$\mathbf{b}_{s_0} = \begin{bmatrix} -\cos \beta_0 \\ -\sin \beta_0 \\ d_{y1} \cos \beta_0 - d_{x1} \sin \beta_0 \\ \cos \beta_0 \\ \sin \beta_0 \\ d_{x2} \sin \beta_0 - d_{y2} \cos \beta_0 \end{bmatrix} \quad (72)$$

o vetor \mathbf{b}_{s_0} é correspondente à decomposição da força do cabo de protensão nas direções cartesianas considerando a posição indeformada da estrutura. Desta forma, β_0 corresponde ao ângulo inicial de inclinação de cada segmento de cabo.

Finalmente, a expressão da matriz de rigidez é dada por:

$$\mathbf{K}_{E_s} = \frac{A_p E_p}{L_p} \mathbf{b}_0 \mathbf{b}_0^T \quad (73)$$

em que:

$$\mathbf{b}_0 = \sum_{s=1}^{n_s} \mathbf{L}_s^T \mathbf{b}_{s_0} \quad (74)$$

Note que a matriz de rigidez do segmento de cabo para uma análise linear geométrica corresponde à matriz de rigidez material \mathbf{K}_{E_s} , similar ao elemento de pórtico plano.

3.3 Modelagem dos materiais

Na literatura existem diversos modelos capazes de representar o comportamento não linear para o aço e o concreto sem que exista uma unanimidade acerca de qual modelo apresenta uma melhor concordância com os resultados experimentais existentes. Neste trabalho, diferentes curvas de materiais propostas por diversos autores são utilizadas para validar o presente trabalho. Nesta seção, cada um deles será brevemente apresentado.

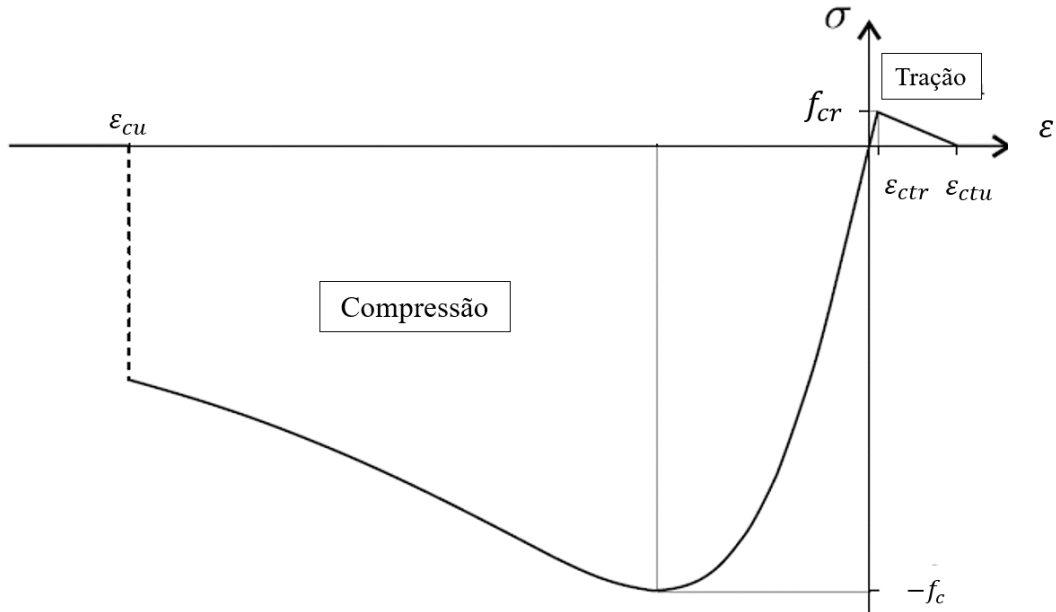
3.3.1 Concreto

Zupan e Saje (2005) propuseram um modelo para representar o comportamento uniaxial do concreto na tração e compressão. A primeira parte da curva traça o caminho que percorre da deformação última de compressão ϵ_{cu} até a deformação que corresponde à resistência à tração do concreto ϵ_{ctr} . O segundo trecho da curva corresponde a uma reta traçada da deformação resistente de tração até a deformação máxima de tensão ϵ_{ctu} , como apresentado na Figura 14. A expressão da curva deste modelo é dada por:

$$\sigma_c = \begin{cases} f_c \frac{2|\epsilon_{c0}|\epsilon_c}{\epsilon_{c0}^2 + \epsilon_c^2} & \epsilon_{cu} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{ctr} \\ f_c \frac{\epsilon_c - \epsilon_{ctu}}{\epsilon_{ctr} - \epsilon_{ctu}} & \epsilon_{ctr} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{ctu} \end{cases} \quad (75)$$

em que σ_c é a tensão no concreto, f_c é a resistência à compressão do concreto e ϵ_c é a deformação do concreto.

Figura 14 – Lei constitutiva do concreto.



Fonte: Adaptado de Zupan e Saje (2005).

O modelo proposto pelo CEB para o concreto sob compressão também é utilizado neste trabalho. A relação uniaxial de tensão-deformação proposto pelo código é dada por:

$$\sigma_c = f_{cm} \left[\frac{k\eta - \eta^2}{1 - (k-2)\eta} \right] \quad (76)$$

onde f_{cm} corresponde a resistência do concreto à compressão e

$$\eta = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \quad k = \frac{1.05E_{ci}\epsilon_{c1}}{f_{cm}} \quad (77)$$

em que E_{ci} é dado pela Eq. (84) e ϵ_{c1} é a deformação determinada para o pico de tensão, estimada por:

$$\epsilon_{c1} = 0.7f_{cm}^{0.31} \quad (78)$$

Finalmente, o terceiro modelo para o concreto sob compressão é o modelo proposto por Scott *et al.* (1982). Neste trabalho, propôs-se uma relação para modelar o comportamento uniaxial do concreto capaz de considerar o efeito do confinamento do concreto. Sob compressão, a relação uniaxial de tensão-deformação é dada por:

$$\sigma_c = \begin{cases} -0.2Kf_c & \epsilon_{cu} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{c,min} \\ -Kf_c(1 + Z(\epsilon_c + \epsilon_{c0})) & \epsilon_{c,min} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{c0} \\ -Kf_c(1 - (1 + (\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c0}})^2)) & \epsilon_{c0} \leq \epsilon_c \leq 0 \end{cases} \quad (79)$$

em que $\epsilon_{c0} = 0.002K$ e $\epsilon_{c,min} = \epsilon_{c0} + \frac{0.8}{Z}$, em que Z é dado por:

$$Z = \frac{0.5}{\frac{3 + 0.29f_c}{145f_c - 1000} + 0.75Q_s \sqrt{\frac{h}{s_h}} - 0.002K} \quad (80)$$

e

$$K = 1 + Q_s \frac{f_{yh}}{f_c} \quad (81)$$

Nas equações acima, as variáveis necessárias para a utilização do modelo proposto são: resistência à compressão do concreto f_c (MPa), deformação última do concreto ϵ_{cu} , taxa volumétrica de armadura transversal Q_s , tensão de escoamento da armadura transversal f_{yh} , espaçamento da armadura transversal s_h e a largura do concreto confinado h .

Para simular o comportamento do concreto sob tração utiliza-se o modelo proposto por Stramandinoli *et al.* (2013). Este modelo foi utilizado previamente em combinação com outros modelos para o concreto sob compressão. Parente *et al.* (2014) utilizaram o modelo proposto combinado com o modelo para compressão do CEB e Moreira *et al.* (2018) também o utilizou combinado ao modelo proposto por Scott *et al.* (1982), ambos os trabalhos apresentando excelentes resultados. Neste trabalho, adota-se essa combinação.

A relação tensão-deformação para o concreto sob tração (STRAMANDINOLI *et al.*, 2013), baseado em um modelo anterior (STRAMANDINOLI; LA, 2012), é capaz de considerar o encruamento do concreto. Inicialmente, apresenta uma relação linear com o módulo de elasticidade do concreto até o pico de tensão de tração, correspondente à resistência à tração do concreto f_{ct} e, em seguida, há um decaimento da tensão do concreto:

$$\sigma_c = \begin{cases} -E_{ci}\epsilon_c & 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cr} \\ -\frac{E_s\rho\epsilon_c}{2} + \sqrt{\left(\frac{E_s\rho\epsilon_c}{2}\right)^2 + f_{ct}^2(n\rho + 1)} & \epsilon_{cr} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{ctu} \end{cases} \quad (82)$$

onde:

$$n = \frac{E_s}{E_{ci}} \quad \rho = \frac{A_s}{A_c} \quad (83)$$

em que E_s corresponde ao módulo de elasticidade da armadura transversal, A_s e A_c as armaduras de aço passivo e da seção transversal do concreto. Os parâmetros E_{ci} e ϵ_{cr} são estimados utilizando as expressões recomendadas pelo CEB:

$$E_{ci} = 2.15 \times 10^4 \sqrt{\frac{f_c}{10}} \quad (84)$$

e

$$\varepsilon_{cr} = \frac{f_{ct}}{E_{ci}} \quad (85)$$

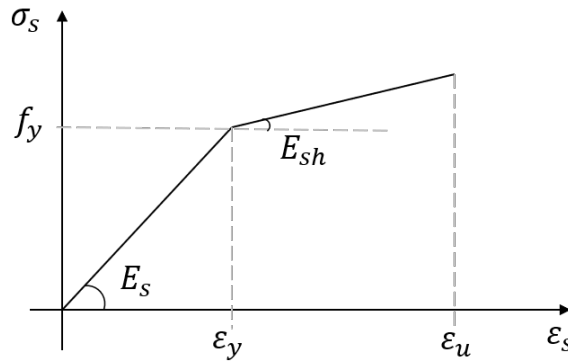
3.3.2 Armadura passiva e de protensão

Uma curva de traçado bilinear, apresentada na Figura 15, é utilizada para modelar o aço passivo, esta curva é capaz de modelar o comportamento à tração e compressão do aço e é dada por:

$$\sigma_s = \begin{cases} -f_y - E_{sh}(\varepsilon_s + \varepsilon_{sy}) & -\varepsilon_{su} \leq \varepsilon_s \leq -\varepsilon_{sy} \\ E_s \varepsilon_s & -\varepsilon_{sy} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{sy} \\ -f_y - E_{sh}(\varepsilon_s + \varepsilon_{sy}) & \varepsilon_{sy} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su} \end{cases} \quad (86)$$

em que σ_s é a tensão no aço, E_{sh} é o módulo de encruamento do aço, ε_{sy} é a deformação de escoamento e E_s corresponde ao módulo de elasticidade inicial do aço.

Figura 15 – Comportamento bilinear para o aço passivo.



Fonte: Elaborada pela autora.

O aço de protensão é modelado pela curva proposta por Menegoto e Pinto (1973), bastante utilizada em diversos trabalhos, sendo válida apenas no comportamento à tração do aço de protensão, onde:

$$\sigma_p = \varepsilon_p E_p \left[Q + (1 - Q) \left(1 + \left(\frac{E_s \varepsilon_p}{K \sigma_{py}} \right)^R \right)^{1/R} \right] \leq \sigma_{pu} \quad (87)$$

em que E_p é o módulo de elasticidade inicial do aço de protensão, Q , K e R são os coeficientes adimensionais que melhor representam o comportamento apresentado em ensaios experimentais do aço e σ_{py} corresponde a tensão de escoamento do aço de protensão.

3.4 Análise Estrutural

A equação de equilíbrio não linear do modelo de elementos finitos é dada por:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{q} \quad (88)$$

em que \mathbf{r} é o vetor de força residual, \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos, λ é o fator de carga e \mathbf{q} é o vetor de referência para a carga externa aplicada. A solução da equação não linear de equilíbrio é primordial para a obtenção da curva carga-deslocamento e das demais respostas da estrutura, tais como deslocamentos e capacidade de carga da viga.

A análise não linear de vigas com protensão não-aderente exige duas etapas de análise. O primeiro passo consiste na aplicação da força de protensão F_p de forma gradual no cabo que, via ancoragens, transmite uma tensão de compressão para a peça de concreto. Nesta etapa da análise, determina-se o campo de deslocamentos correspondente a aplicação da força de protensão F_{pe} . A segunda etapa da análise corresponde à aplicação do carregamento externo da estrutura. Neste trabalho, esta etapa é realizada utilizando o método do controle de deslocamento.

3.4.1 Aplicação da Protensão

Neste trabalho, a aplicação da força de protensão é simulada por meio da aplicação de uma força efetiva de protensão F_{pe} cujo valor corresponde ao campo de deslocamentos correspondente ao equilíbrio da estrutura protendida. A aplicação desta força de protensão gera uma deformação inicial ε_{p0} de valor inicialmente desconhecido. Esta consideração permite o cálculo da deformação incremental dado pela Eq. (45). Este procedimento é o mesmo proposto por Moreira *et al.* (2018).

Observe que, nesta etapa da análise, não há aplicação de carregamento externo, logo $\lambda = 0$ e há uma deformação inicial desconhecida ε_{p0} que resulta em uma força no cabo F_{pe} . Desta forma, equação de equilíbrio não linear, Eq. (88), apresenta uma equação adicional, que acrescenta a condição da força de protensão no cabo ser idêntica a força efetiva de protensão:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{u}, \varepsilon_{p0}) \\ F_p(\mathbf{u}, \varepsilon_{p0}) - F_{pe} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (89)$$

Este sistema pode ser solucionado via método de Newton-Raphson. Em sua forma

linearizada:

$$\begin{cases} \mathbf{g} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varepsilon_{p0}} \delta \varepsilon_{p0} = 0 \\ F_p - F_{pe} + \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial F_p}{\partial \varepsilon_{p0}} \delta \varepsilon_{p0} = 0 \end{cases} \quad (90)$$

onde $\delta \mathbf{u}$ e $\delta \varepsilon_{p0}$ são as correções iterativas para a os deslocamentos globais e a deformação inicial. Como já abordado, a força interna da estrutura é composta por duas parcelas: a parcela de força interna da viga e a parcela de força interna do cabo de protensão não aderente:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_v + \mathbf{g}_p = \mathbf{g}_v + F_p \mathbf{b} \quad (91)$$

A derivada do vetor de forças internas em relação a deformação inicial é dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varepsilon_{p0}} = \frac{\partial F_p}{\partial \varepsilon_{p0}} \mathbf{b} = A_p \frac{\partial \sigma_p}{\partial \varepsilon_p} \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \varepsilon_{p0}} \mathbf{b} = A_p E_p \mathbf{b} \quad (92)$$

Para a derivada da força no cabo de protensão em relação aos deslocamentos, partimos da Eq. (63):

$$\frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}} = A_p \frac{\partial \sigma_p}{\partial \varepsilon_p} \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \mathbf{u}} = \frac{A_p E_p}{L_p} \mathbf{b}^T \quad (93)$$

Portanto, a Eq. (90) pode ser escrita como:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_T \delta \mathbf{u} + \delta \varepsilon_{p0} A_p E_p \mathbf{b} = -\mathbf{g} \\ \frac{A_p E_p}{L_p} \mathbf{b}^T \delta \mathbf{u} + A_p E_p \delta \varepsilon_{p0} = F_p - F_{pe} \end{cases} \quad (94)$$

Este sistema pode ser resolvido de forma eficiente por meio do particionamento das equações. O uso da primeira equação permite escrever o incremento de deslocamentos como:

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_1 + \delta \varepsilon_{p0} \delta \mathbf{u}_2 \quad (95)$$

em que:

$$\mathbf{K}_T \delta \mathbf{u}_1 = -\mathbf{g} \quad (96)$$

e

$$\mathbf{K}_T \delta \mathbf{u}_2 = -A_p E_p \mathbf{b} \quad (97)$$

Substituindo a Eq. (95) na segunda linha da Eq. (90), é possível determinar a expressão do incremento de deformação:

$$\delta\varepsilon_{p0} = \frac{(F_{pe} - F_p)L_p - A_p E_p \mathbf{b}^T \delta\mathbf{u}_1}{A_p E_p (\mathbf{b}^T \delta\mathbf{u}_2 + L_p)} \quad (98)$$

Utilizando as expressões do incremento de deslocamento e do incremento de deformação inicial, esses parâmetros são atualizados a cada iteração de Newton-Raphson:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \delta\mathbf{u} \\ \varepsilon_{p0i+1} = \delta\varepsilon_{p0i} + \delta\varepsilon_{p0} \end{cases} \quad (99)$$

Este processo iterativo é realizado até que se atinja a convergência. Esta é considerada quando se atinge uma tolerância a ser especificada pelo usuário:

$$\frac{\|\mathbf{r}\|}{F_{pe}} \leq \text{TOL} \quad (100)$$

Este procedimento é inicializado considerando $\mathbf{u} = 0$ e $\varepsilon_{p0} = 0$.

3.4.2 Aplicação do Carregamento Externo

Uma vez determinado o campo de deslocamentos correspondente à aplicação da força de protensão F_p , parte-se para a aplicação da força externa na viga. Nesta fase da análise, a equação de equilíbrio não linear, dada pela Eq. (88) precisa ser solucionada. A solução da equação de equilíbrio não linear exige a utilização de métodos numéricos apropriados, capazes de traçar o caminho de equilíbrio da estrutura.

Dentre os métodos utilizados para traçar o caminho de equilíbrio podemos citar o Método do controle de Carga e o Método do Controle de Deslocamento. No Método do Controle de Carga, o incremento de carga $\Delta\lambda$ é prescrito pelo usuário, sendo um valor sempre crescente ao longo da análise. Neste método, o fator de carga é mantido constante em cada passo da análise e conseqüentemente o incremento de carga no passo é nulo. Portanto, este método não permite valores de incrementos de carga negativos, apresentando-se incapaz de traçar o caminho de equilíbrio de estruturas que apresentem ponto limite.

O Método do Controle de Deslocamento, por sua vez, permite que o fator de carga apresente incrementos tanto capazes de aumentar o fator de carga como de diminuí-lo. Para isto, utiliza-se uma equação adicional de restrição, responsável por relacionar os incrementos de carga $\Delta\lambda$ com o incremento de deslocamento Δu . Desta forma, a equação de equilíbrio não

linear pode ser escrita:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) \\ a(\Delta\mathbf{u}, \Delta\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (101)$$

em que a é a equação de restrição, cujo objetivo é limitar o tamanho dos incrementos de carga. É possível escrever a restrição em função do fator de carga e dos deslocamentos observando-se que seus incrementos são dados por:

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{u} = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} \\ \Delta\lambda = \lambda - \bar{\lambda} \end{cases} \quad (102)$$

em que $\bar{\mathbf{u}}$ e $\bar{\lambda}$ correspondem ao deslocamento e fator de carga determinados no passo anterior, logo, são valores conhecidos. Por consequência, podemos escrever o sistema de equações em função dos deslocamentos e do fator de carga:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) \\ a(\mathbf{u}, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (103)$$

A Eq. (103) pode ser linearizada, apresentando a forma:

$$\begin{cases} \mathbf{r} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} \delta\mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \delta\lambda = 0 \\ a + \frac{\partial a^T}{\partial \mathbf{u}} \delta\mathbf{u} + \frac{\partial a}{\partial \lambda} \delta\lambda = 0 \end{cases} \quad (104)$$

Sabendo que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} &= \mathbf{K}_T \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} &= -\mathbf{q} \end{aligned} \quad (105)$$

podemos escrever na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\mathbf{q} \\ a_{,u}^T & a_{,\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u} \\ \delta\lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ a \end{bmatrix} \quad (106)$$

em que os valores da matriz de rigidez tangente e os valores de \mathbf{g} são atualizados a cada iteração. Uma vez que a matriz dos coeficientes não é singular, este sistema pode ser resolvido, porém, sua matriz dos coeficientes não é simétrica e em banda, como a matriz de rigidez gerada pelo modelo de elementos finitos (COOK *et al.*, 2001). Ainda, apresenta valores distantes da diagonal

principal, necessitando de maior memória para a alocação destes valores. Desta forma, a utilização da técnica do particionamento apresenta-se como uma técnica mais eficiente (BATOZ; DHATT, 1979).

Podemos escrever a primeira linha da Eq. (106) como:

$$\delta \mathbf{u} = \delta \lambda \delta \mathbf{u}_q - \delta \mathbf{u}_r \quad (107)$$

em que:

$$\mathbf{K}_T \delta \mathbf{u}_q = \mathbf{q} \quad (108)$$

$$\mathbf{K}_T \delta \mathbf{u}_r = \mathbf{r}$$

Substituindo a Eq.(107) na segunda linha da Eq. (106) podemos obter a expressão para o cálculo do fator de carga:

$$\delta \lambda = \frac{a_{,u}^T \delta \mathbf{u}_r - a}{a_{,u}^T \delta \mathbf{u}_q + a_{,\lambda}} \quad (109)$$

No Método do Controle de Deslocamento determina-se um grau de liberdade a ser controlado. A cada passo s da análise, o grau de liberdade controlado é incrementado. Este grau de liberdade é indicado pelo índice j :

$$\mathbf{u}_{s+1}^j = \mathbf{u}_s^j + \Delta u_p \quad (110)$$

em que Δu_p é o incremento de deslocamento prescrito pelo usuário. Este incremento de deslocamento mantém-se o mesmo durante as iterações de cada passo da análise. No Método do Controle de Deslocamento, a restrição é dada por:

$$a = \mathbf{e}_u^j - u_p \quad (111)$$

em que \mathbf{e}^j é um vetor nulo, exceto a componente correspondente ao nó controlado. Assim, as derivadas parciais da equação de restrição são dadas por:

$$a_{,u} = \mathbf{e}^j \quad (112)$$

$$a_{,\lambda} = 0$$

Substituindo a Eq. (111) e a Eq. (112) na Eq. (109):

$$\delta \lambda = \frac{\delta \mathbf{u}_r - a}{\delta \mathbf{u}_q} \quad (113)$$

Uma vez que na primeira iteração o resíduo é nulo $\delta \mathbf{u}_r = 0$. Escrevemos o incremento de carga:

$$\delta \lambda = \frac{-a}{\delta \mathbf{u}_q} = \frac{u_p - u^j}{\delta \mathbf{u}_q} = \frac{\Delta u_p}{\delta \mathbf{u}_q} \quad (114)$$

Note que a restrição utilizada é linear, logo, o Método de Newton- Raphson converge para a solução exata e a restrição torna-se nula nas demais iterações:

$$\begin{cases} \delta \lambda = \frac{\Delta u_p}{\delta \mathbf{u}_q} & i = 1 \\ \delta \lambda = \frac{\Delta \mathbf{u}_r^j}{\delta \mathbf{u}_q} & i \geq 1 \end{cases} \quad (115)$$

Para cada iteração, ao determinar o incremento de carga $\delta \lambda$, o incremento de deslocamento $\delta \mathbf{u}$ é determinado, utilizando a Eq. (107). O deslocamento e o fator de carga são atualizados:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u} + \delta \mathbf{u} \\ \lambda = \lambda + \delta \lambda \end{cases} \quad (116)$$

e verifica-se a convergência:

$$\frac{\|\delta \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \leq \text{TOL} \quad (117)$$

onde TOL é a tolerância indicada pelo usuário. Este processo se repete até atingir a convergência.

Uma vez que a convergência é atingida, inicia-se um novo passo s da análise, em que o grau de liberdade controlado é incrementado, utilizando a Eq. (110). O procedimento de análise é novamente realizado, este procedimento se repete até um número de passos informado pelo o usuário ou até a divergência do modelo.

4 CARGAS DE LONGA DURAÇÃO

O concreto submetido a um carregamento apresenta um comportamento imediato e um comportamento dependente do tempo. A deformação do concreto aumenta ao longo do tempo à uma taxa decrescente e, à temperatura constante, esta deformação depende da fluência e da retração do concreto (RANZI *et al.*, 2013). A fluência é dependente da tensão aplicada, enquanto a retração é independente desta tensão. Em estruturas de concreto protendido, soma-se, ainda, o fenômeno da relaxação do aço de protensão, em que há uma perda gradual na tensão de protensão inicialmente aplicada.

Os efeitos combinados da retração, fluência e relaxação podem gerar deslocamentos excessivos bem como uma redistribuição de esforços inesperada. A consideração destes efeitos no dimensionamento de estruturas de concreto protendido é essencial e desprezá-los acarreta na diminuição da vida útil das estruturas. A principal consequência da consideração destes fenômenos é evitar deslocamentos excessivos, garantindo a durabilidade das peças sem a necessidade de intervenções agressivas.

Neste capítulo, os fenômenos da retração, fluência e relaxação serão abordados. Em seguida, um modelo de elementos finitos para a consideração destes efeitos em vigas com protensão não aderente será apresentado. A fluência e retração no concreto serão consideradas utilizando o Método do Módulo Efetivo Ajustado. A relaxação do cabo de protensão será considerada utilizando o modelo proposto por Magura *et al.* (1964).

4.1 Retração

O concreto exposto à ação atmosférica apresenta uma redução em seu volume ocasionada pela perda gradual da água de sua composição, por reações químicas que ocorrem na mistura de concreto e pela perda de calor de hidratação. A deformação por retração do concreto ϵ_{sh} inicia-se imediatamente após o período de cura da peça e gradualmente aumenta ao longo do tempo a uma taxa decrescente. Esta deformação tende a se estabilizar ao longo dos anos e ocorre mais rapidamente nas primeiras idades do concreto (GHALI *et al.*, 2002).

Os parâmetros que regem a dimensão e taxa de deformação por retração devido a perda de água (ϵ_{shd}) dependem principalmente da umidade relativa do ar, relação água cimento, quantidade de água na mistura, tipo de agregado, entre outros parâmetros da mistura do concreto, bem como da dimensão e forma do elemento estrutural (GILBERT; RANZI, 2010). Esta parcela

da deformação por retração tende a ser menor para concretos de alta resistência, uma vez que menores relações de água-cimento implicam em uma menor quantidade de água livre.

A deformação de retração que ocorre devido a reações químicas e perda de calor de hidratação é chamada de retração endógena ϵ_{she} . A retração endógena ocorre nas primeiras idades do concreto após a cura. Em concretos de resistência normal, a retração endógena apresenta um pequeno efeito, podendo ser desprezada (BAŽANT; JIRÁSEK, 2018). No entanto, para concretos de alta resistência, a parcela da retração endógena é bastante significativa, devendo ser considerada.

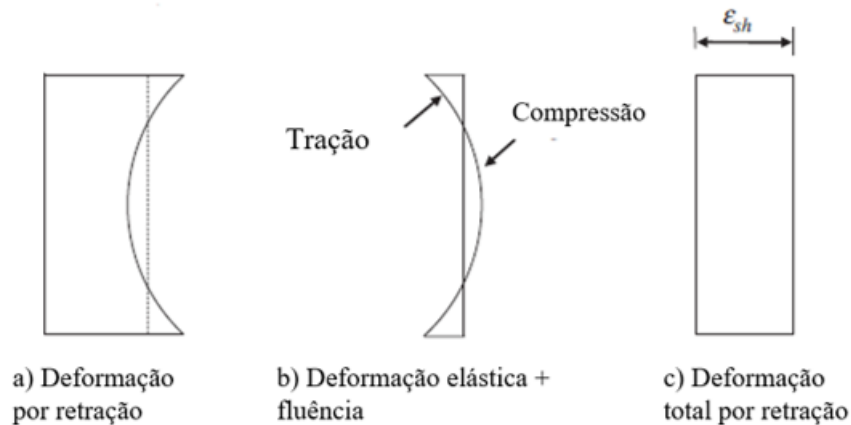
Para a análise estrutural, a retração que ocorre devido à perda de água no concreto e a retração endógena são tratadas na literatura simplesmente como deformação por retração ϵ_{sh} , e desta forma também será tratada neste trabalho. No entanto, é importante afirmar que a deformação por retração no concreto incorpora estas duas parcelas:

$$\epsilon_{sh} = \epsilon_{shd} + \epsilon_{she} \quad (118)$$

Uma peça de concreto sem carregamento externo e livre para deformar apresenta deformações por retração que variam ao longo da seção transversal. Estas deformações são máximas nas extremidades e mínimas no centro da seção, como apresentado na Figura 16a. Desta forma, há o surgimento de tensões de tração na superfície da peça que, quando superam a resistência à tração, podem gerar fissuras nas primeiras idades do concreto. Ainda, ocorrem as deformações elásticas e por fluência que tendem a aliviar as tensões geradas pela retração, Figura 16b, resultando em uma deformação média na seção, esta sem causar tensões, Figura 16c.

No entanto, estruturas de concreto armado usualmente não são livres para deformar, a presença de barras de aço e as condições de apoio são fontes de restrição (GHALI *et al.*, 2002). Assim, a ocorrência da retração gera tensões no concreto e uma redistribuição de esforços. Estes efeitos, ainda que reduzidos pelo efeito da fluência do concreto, devem ser considerados, pois desprezá-los pode levar ao surgimento de fissuras e deflexões excessivas, diminuindo a durabilidade das estruturas.

Figura 16 – Componentes de deformação em uma seção.



Fonte: Adaptada de Gilbert e Ranzi (2010).

Uma vez que em uma seção de concreto armado, a retração se desenvolve de forma diferente ao longo de sua altura (BAŽANT; JIRÁSEK, 2018), a utilização de um modelo realista para determinar este efeito necessitaria de modelos complexos com alto custo computacional. Portanto, é usual a utilização de modelos que consideram uma deformação média na seção transversal.

Na literatura existem vários modelos capazes de determinar a retração em função do tempo. Alguns destes modelos são mais complexos, como o Modelo B3 (BAZANT; MURPHY, 1995) e, em sua versão mais atual, o Modelo B4 (BAŽANT, 2015), em que levam em consideração uma longa lista de parâmetros acerca da composição da mistura de concreto, condições do ambiente, tamanho e forma do elemento estrutural e cura. Estes modelos são mais realistas e necessitam de métodos de análise mais sofisticados. No entanto, na prática, estes modelos exigem muitos parâmetros de difícil determinação, o que pode tornar a sua utilização muitas vezes impraticável.

Existem os modelos recomendados por normas, em geral mais simplificados e dependente de um número menor de variáveis, usualmente mais utilizados para a consideração dos efeitos da retração e fluência em modelos de análise estrutural. Nestes modelos, o concreto é classificado de acordo com sua resistência.

O modelo proposto pelo ACI-209R (2008) considera a deformação por retração como uma função dependente do tempo t e da data final do período de cura t_s em dias:

$$\varepsilon_{sh} = \frac{(t - t_s)^\alpha}{f + (t - t_s)^\alpha} \varepsilon_{shu} \quad (119)$$

em que os parâmetros f e α são constantes para um elemento de concreto em função de sua forma e tamanho. O parâmetro ε_{shu} corresponde à deformação última por retração, em que sob

condições normais e umidade relativa do ar de 40%, é dado por:

$$\varepsilon_{shu} = 780 \times 10^{-6} \quad (120)$$

Caso contrário, o valor deste parâmetro deve ser adequado às condições do ambiente de acordo com a norma.

De acordo com o modelo proposto pelo ACI, valores de f entre 35 e 55 são recomendados para concretos com 7 dias de cura. E, aliado a este intervalo, recomenda-se um valor de $\alpha = 1$. Para estimar o valor de f , recomenda-se a expressão:

$$f = 26e^{1.42 \times 10^{-2} V/S} \quad (121)$$

em que V/S corresponde a relação volume-superfície do elemento estrutural em mm.

O modelo proposto pelo CEB-FIB (2010) para a consideração do efeito da retração apresenta a abordagem de considerar duas parcelas da deformação por retração:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_s) = \varepsilon_{cbs}(t) + \varepsilon_{cds}(t, t_s) \quad (122)$$

em que $\varepsilon_{cs}(t, t_s)$ é a deformação por retração total no instante de tempo t que se inicia na data do final da cura do concreto t_s . Enquanto $\varepsilon_{cbs}(t)$ e $\varepsilon_{cds}(t, t_s)$ correspondem a parcela de retração endógena e por secagem, respectivamente. A retração endógena é dada por:

$$\varepsilon_{cbs}(t) = \varepsilon_{cbs0}(f_{cm}) \beta_{bs}(t) \quad (123)$$

onde $\varepsilon_{cbs0}(f_{cm})$ é o coeficiente básico de retração, dado por:

$$\varepsilon_{cbs0}(f_{cm}) = -\alpha_{bs} \left(\frac{0.1 f_{cm}}{6 + 0.1 f_{cm}} \right)^{2.5} 10^{-6} \quad (124)$$

e α_{bs} depende do tipo de cimento utilizado. O coeficiente $\beta_{bs}(t)$ é uma função do tempo dada por:

$$\beta_{bs}(t) = 1 - \exp(-0.2\sqrt{t}) \quad (125)$$

O coeficiente de retração por secagem $\varepsilon_{cds}(t, t_s)$ é dado por:

$$\varepsilon_{cds}(t, t_s) = \varepsilon_{cds0}(f_{cm}) \beta_{RH} \beta_{ds}(t - t_s) \quad (126)$$

em que

$$\varepsilon_{cds0}(f_{cm}) = [(220 + 110 \alpha_{ds1}) \exp(-\alpha_{ds2} f_{cm})] 10^{-6} \quad (127)$$

e β_{RH} é uma função da umidade relativa do ar (RH):

$$\beta_{RH} = \begin{cases} -1.55 \left[1 - \frac{RH^3}{100} \right] & 40 \leq RH < 99\% \beta_{s1} \\ 0.25 & RH \geq 99\% \beta_{s1} \end{cases} \quad (128)$$

em que

$$\beta_{s1} = \left(\frac{35}{f_{cm}} \right)^{0.1} \leq 1.0 \quad (129)$$

Finalmente, o coeficiente $\beta_{ds}(t - t_0)$ dependente do tempo, é dado por:

$$\beta_{ds}(t - t_0) = \left(\frac{(t - t_s)}{0.035h^2 + (t - t_s)} \right)^{0.5} \quad (130)$$

em que h é a espessura fictícia, dada por:

$$h = \frac{2A_c}{u} \quad (131)$$

onde A_c é a área da seção transversal do concreto em mm^2 e u é o perímetro (em mm) da peça em contato com a atmosfera.

A NBR 6118:2014 permite, em casos onde o concreto apresenta tensões de até 50% da sua resistência e não é necessária a determinação da retração com precisão, a utilização de um valor último para a retração. Esses valores podem ser encontrados na Tabela 8.2 da norma e variam em função da umidade relativa do ar, da espessura fictícia da peça e do tipo de concreto.

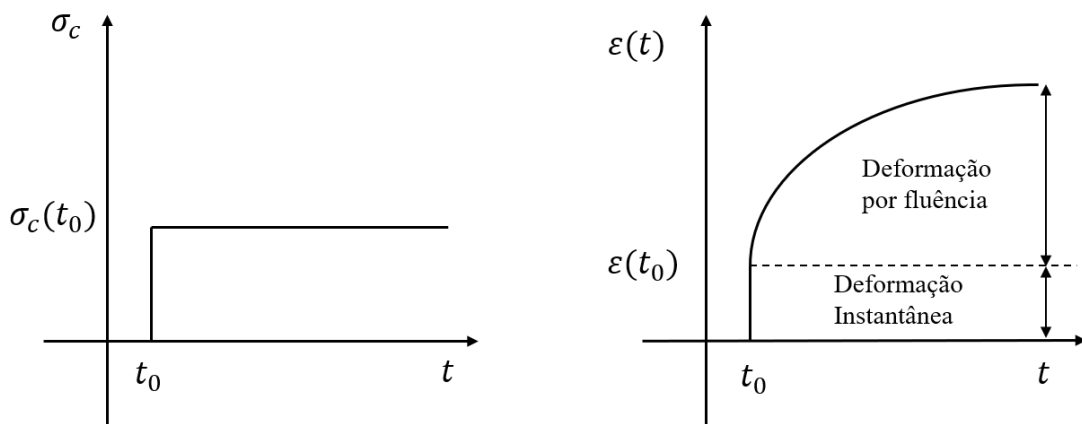
Para a determinação da retração ao longo do tempo, a NBR 6118:2014 apresenta no Anexo A um procedimento mais preciso. O modelo proposto pela norma é função da umidade relativa do ar, da espessura fictícia do elemento de concreto e da consistência do concreto na data de lançamento. O modelo recomendado pela NBR 6118:2014 apresenta similaridade com os modelos recomendados pelo ACI-209R e CEB-FIB em relação às variáveis que determinam o comportamento ao longo do tempo da retração. As expressões para a determinação da retração são diferentes, uma vez que os materiais utilizados no Brasil apresentam características diferentes.

Neste trabalho, optou-se por utilizar o modelo do CEB-FIB (2010), uma vez que este modelo é bastante utilizado por diversos autores para a determinação da deformação por retração do concreto, apresentando bons resultados (GHALI *et al.*, 2002; AMADIO; FRAGIACOMO, 1997; LOU *et al.*, 2013b).

4.2 Fluência

Quando submetido a uma tensão constante, o concreto apresenta uma deformação elástica imediata e desenvolve uma parcela de deformação dependente do tempo (Figura 17). Este fenômeno é denominado fluência. De forma semelhante à retração, a deformação por fluência do concreto ε_{cr} ocorre rapidamente no início da aplicação do carregamento, cerca de 50% acontecem nos três primeiros meses. O desenvolvimento desta deformação ao longo do tempo ocorre à uma taxa decrescente, onde cerca de 90% da fluência acontecem nos primeiros anos (GILBERT; RANZI, 2010).

Figura 17 – Deformação ao longo do tempo.

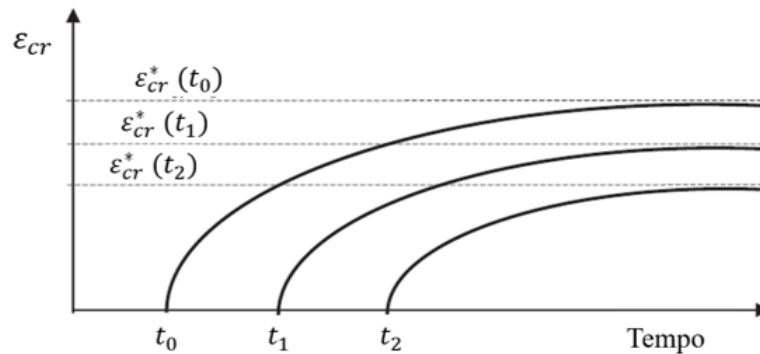


Fonte: Elaborada pela autora.

De forma similar à retração, a fluência depende de uma série de características da mistura do concreto, do ambiente e de carregamento. Uma maior resistência característica e baixa relação água-cimento confere menores deformações por fluência. Elementos que apresentam uma menor área superficial apresentam menores deformações por fluência bem como elementos situados em ambientes com temperaturas baixas.

Um importante efeito na dimensão da deformação por fluência última ε_{cr}^* trata-se da data de carregamento do elemento estrutural. Na Figura 18, são apresentadas as curvas de deformação por fluência de três corpos de prova de um mesmo concreto cujas datas de carregamento são $t_2 \geq t_1 \geq t_0$. Verifica-se que a deformação de fluência diminui ao retardar a data de carregamento. O concreto é um material que apresenta um endurecimento em função do tempo, portanto, a consideração do efeito da idade do concreto é essencial para uma boa aproximação na predição da deformação por fluência.

Figura 18 – Efeito da data de carregamento na deformação por fluência.



Fonte: Elaborada pela autora.

O aumento da temperatura pode aumentar significativamente a magnitude da deformação por fluência. De acordo com Gilbert e Ranzi (2010), estruturas expostas a ambientes com temperatura média de 40°C podem apresentar deformações por fluência até 25% maiores do que uma estrutura sujeita à uma temperatura média de 20°C.

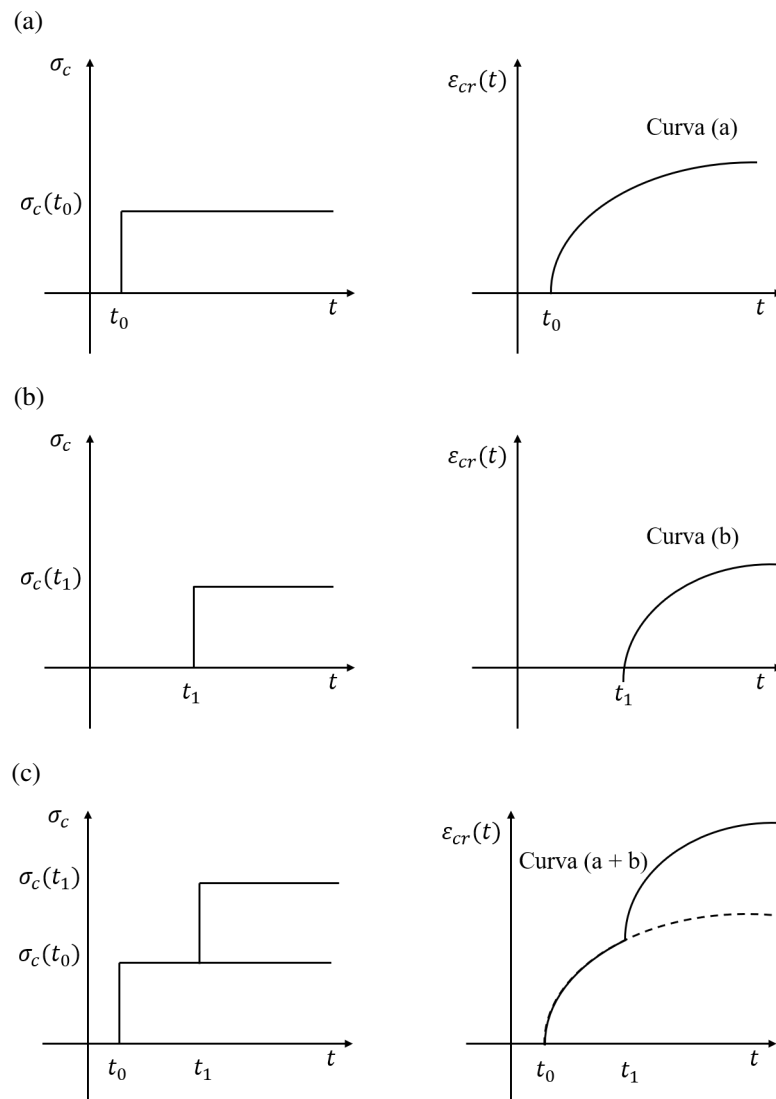
O comportamento da fluência do concreto também depende do nível de tensão. Quando a peça de concreto está submetida a um nível de tensão de até 40% (BAŽANT; JIRÁSEK, 2018) ou 50% (GILBERT; RANZI, 2010) da resistência à compressão f_c , a taxa de deformação por fluência é proporcional à tensão aplicada. Isso ocorre porque neste nível de tensão ainda não se iniciou a micro-fissuração do concreto, havendo uma relação linear entre a deformação por fluência e a tensão aplicada. Com o aumento do nível de tensão na peça, é iniciado o processo de micro-fissuração do concreto, a deformação por fluência ocorre mais rapidamente, desenvolvendo-se um comportamento não-linear.

Uma vez que as cargas de serviço raramente ultrapassam 50% da resistência do concreto, a fluência pode ser descrita por uma relação linear da tensão aplicada. Métodos que admitem uma relação linear entre a deformação por fluência e a tensão aplicada são bastante utilizados para a consideração do fenômeno, especialmente por se tratarem de métodos mais simplificados.

Modelos incrementais para carregamentos que variam ao longo do tempo podem ser baseados no Princípio da Superposição dos Efeitos, em que a deformação produzida por um incremento de tensão aplicada em um instante de tempo t_i é independente de qualquer outro incremento de tensão aplicado em um instante de tempo $t \neq t_i$. Desta forma, a deformação por fluência produzida por um histórico crescente de tensão pode ser aproximada pelo somatório de cada incremento de tensão individualmente. Métodos baseados no Princípio da Superposição apresentam bons resultados para carregamentos crescentes (GILBERT; RANZI, 2010).

Com o objetivo de ilustrar o Princípio da superposição, na Figura 19a é apresentado a deformação por fluência ε_{cr} gerada pela aplicação da tensão inicial $\sigma_c(t_0)$ em uma peça de concreto. Um segundo incremento de tensão $\sigma_c(t_1)$ ocorre, provocando também uma deformação por fluência dependente do tempo (Figura 19b), como a Curva (b). Pelo Princípio da superposição, os efeitos dos dois incrementos de tensão são independentes entre si e podem ser somados, resultando em uma resposta ao longo do tempo da estrutura, ilustrada na Figura 19c.

Figura 19 – Princípio da superposição dos efeitos.



Fonte: Elaborada pela autora.

Apesar da precisão, a utilização de métodos incrementais baseados no Princípio da Superposição apresentam a desvantagem de necessitar o armazenamento de um grande volume de dados. Ademais, não apresenta bons resultados para carregamentos decrescentes. Assim, alguns métodos de formulação mais simplificada são encontrados na literatura com o objetivo de

considerar o efeito da fluência no concreto de forma mais simples e direta, necessitando de um menor custo computacional.

O Método da Taxa de Fluência (*The Rate-of-Creep Method*) foi inicialmente proposto por Glanville (1930) e também desenvolvido por Whitney (1932). Este método considera que a taxa de fluência do concreto independe da data de carregamento, o que não é verdade. Assumir esta hipótese implica em que as curvas de deformação ao longo do tempo para elementos carregados em diferentes datas são paralelas (BAŽANT, 1975).

O Método da Taxa de Fluência subestima a deformação por fluência em concretos cujo carregamento foi aplicado em idades avançadas (GILBERT; RANZI, 2010). Pois, embora estas deformações sejam consideravelmente menores, ainda ocorrem. Adicionalmente, a remoção do carregamento, implicaria em uma taxa de fluência nula, ignorando-se o efeito da recuperação das deformações por fluência quando a estrutura apresenta um decréscimo de carregamento (GILBERT; RANZI, 2010; BAŽANT; JIRÁSEK, 2018).

Apesar das limitações, este método foi largamente utilizado na década de 1960 para a consideração da fluência em estruturas de concreto (BAŽANT, 1961; ULICKII I. I., 1960). Após estudos experimentais de longa duração, ficou evidente que o Método da Taxa de Fluência não apresenta bons resultados quando comparado ao Método do Módulo Efetivo e o Método do Módulo Efetivo Ajustado (BAŽANT, 1975; BAŽANT; PANULA, 1978).

As normas de concreto geralmente apresentam seus modelos para considerar o efeito da fluência. Estes modelos utilizam o coeficiente de fluência ϕ , em que, considerando que a deformação por fluência é linearmente dependente da tensão aplicada:

$$\phi(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{cr}(t, t_0)}{\varepsilon_e(t)} \quad (132)$$

em que $\varepsilon_{cr}(t, t_0)$ é a deformação por fluência e $\varepsilon_e(t)$ é a deformação elástica no instante de tempo t . O coeficiente de fluência relaciona a deformação elástica à deformação de fluência no instante de tempo t . Desta forma, é possível escrever ε_{cr} em função da tensão instantânea aplicada em $t = t_0$:

$$\varepsilon_{cr}(t, t_0) = \phi(t, t_0) \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \quad (133)$$

em que $E_c(t_0)$ é o módulo de elasticidade do concreto na data de aplicação do carregamento externo. Em elementos cujo nível de tensão não ultrapassem 50 % da resistência do concreto, é razoável assumir uma relação linear entre a deformação por fluência e a deformação instantânea.

Desta forma, é possível afirmar que o coeficiente de fluência depende somente do tempo (GILBERT; RANZI, 2010; BAŽANT; JIRÁSEK, 2018).

A deformação total $\varepsilon(t, t_0)$ é dada pela soma da deformação instantânea $\varepsilon_e(t_0)$ e a deformação por fluência:

$$\varepsilon(t, t_0) = \varepsilon_e(t_0) + \varepsilon_{cr}(t, t_0) = J(t, t_0)\sigma_c(t) = \frac{1}{E_c(t_0)}[1 + \phi(t, t_0)]\sigma_c(t) = \frac{\sigma_c(t)}{E_e(t, t_0)} \quad (134)$$

em que $J(t, t_0)$ é a função de fluência, dada por:

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)}[1 + \phi(t, t_0)] \quad (135)$$

e $E_e(t, t_0)$ é o módulo de elasticidade efetivo, dado por:

$$E_e(t, t_0) = \frac{E_c(t_0)}{1 + \phi(t, t_0)} \quad (136)$$

Assim, o Método do Módulo Efetivo (FABER, 1928) utiliza para o concreto um módulo de elasticidade variando ao longo do tempo, conforme a Eq. (136). A utilização deste método permite considerar o efeito da fluência, no entanto, este método não considera o efeito do tempo no módulo de elasticidade do concreto ($E_c(t_0)$). É importante notar que o módulo de elasticidade do concreto aumenta com o passar do tempo, desta forma, a utilização do Método do Módulo Efetivo subestima as deformações por fluência do concreto (GILBERT; RANZI, 2010).

O Método do Módulo Efetivo Ajustado foi proposto com o objetivo de considerar o efeito da idade no módulo de elasticidade do concreto. Este método foi primeiramente proposto por Trost (1967) e, posteriormente, uma versão mais rigorosa deste método foi apresentada por Bažant (1972). O efeito da idade do concreto no módulo de elasticidade efetivo foi introduzido utilizando o coeficiente de idade χ . Desta forma, o módulo de elasticidade efetivo ajustado $\bar{E}_e(t, t_0)$ é dado por:

$$\bar{E}_e(t, t_0) = \frac{E_c(t_0)}{1 + \chi(t, t_0)\phi(t, t_0)} \quad (137)$$

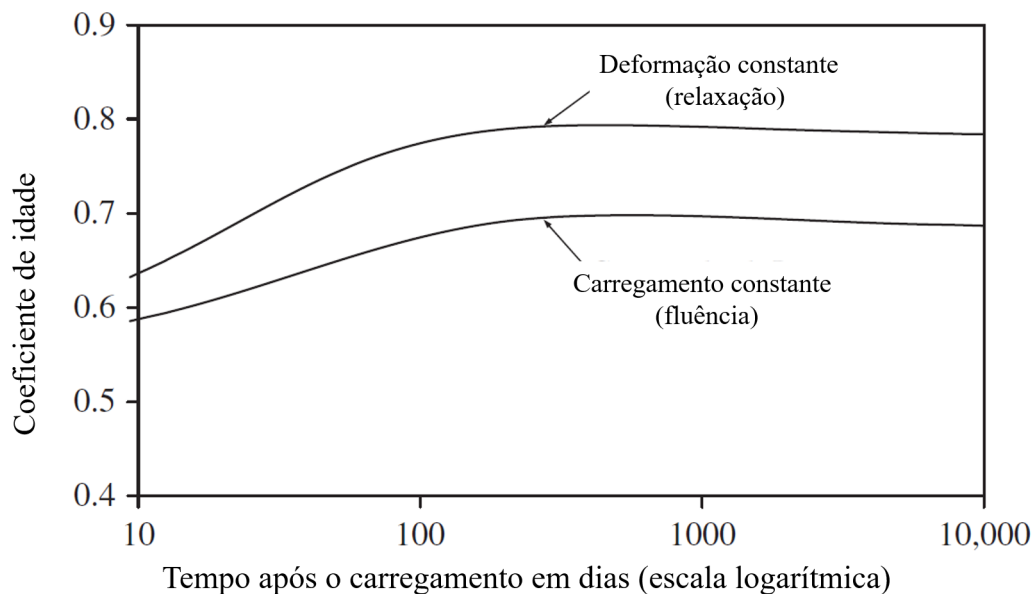
Observe que quando $\chi(t, t_0) = 1$, a expressão da Eq. (137) é idêntica ao módulo de elasticidade efetivo, dado pela Eq. (136). Esta situação corresponderia a um material que não sofre envelhecimento, que não é o caso do concreto.

O valor do coeficiente de idade pode ser determinado utilizando um procedimento incremental, em que é estabelecida uma perda gradual de tensão. Este procedimento pode ser utilizado para problemas de carga constante (fluência) e para problemas de deformação constante

(relaxação). A determinação do coeficiente de idade via métodos incrementais leva a resultados mais precisos quando comparados com resultados experimentais (NEVILLE *et al.*, 1983).

Na Figura 20, é apresentado o resultado obtido para uma barra em duas situações distintas. Primeiramente, o coeficiente de idade é determinado para o caso em que a deformação é mantida constante, correspondendo ao fenômeno da relaxação. A segunda situação corresponde ao caso em que a tensão é mantida constante, correspondente ao ensaio de fluência. A partir deste resultado, é possível verificar que o coeficiente de fluência não apresenta grandes alterações ao longo do tempo. Portanto, considerar o seu valor constante ao longo da análise é uma boa aproximação (GILBERT; RANZI, 2010).

Figura 20 – Variação do coeficiente de idade com o tempo.



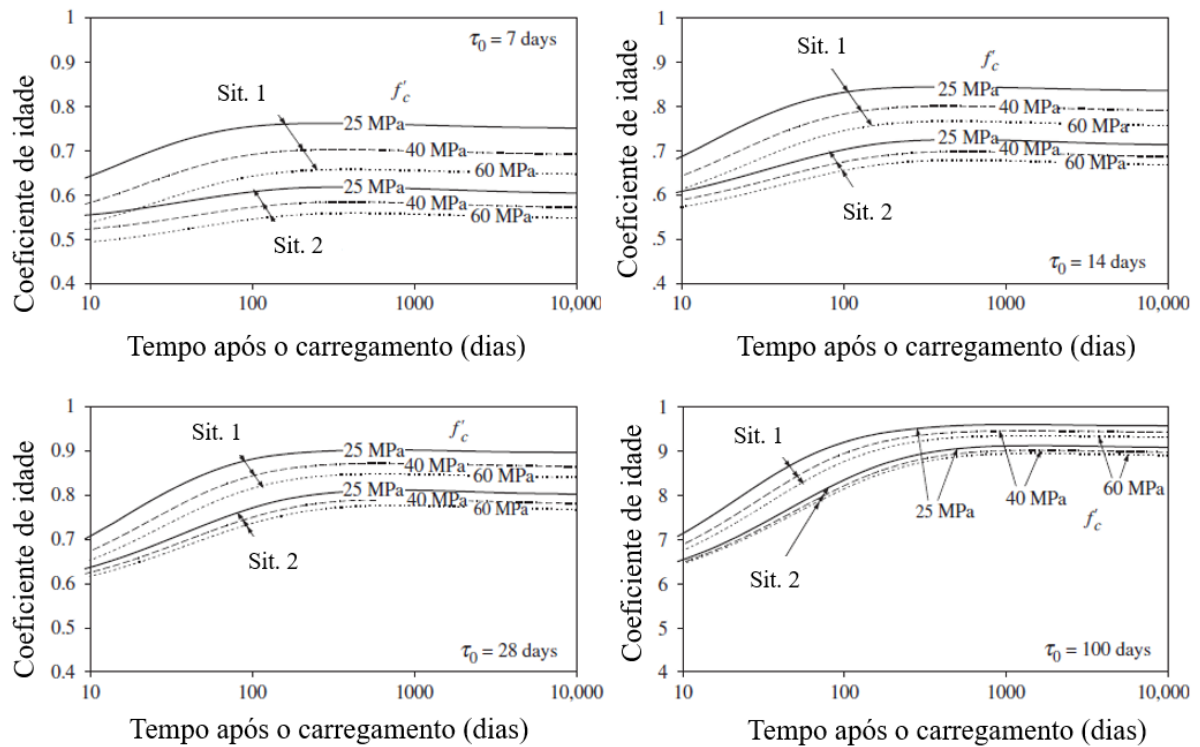
Fonte: Adaptada de Gilbert e Ranzi (2010).

Uma variável que apresenta efeitos no coeficiente de idade é a data de carregamento da estrutura. Na Figura 21, são apresentadas as curvas para o coeficiente de idade de concretos com diferentes resistências à compressão e na situação de deformação constante (Sit. 1) e de tensão constante (Sit. 2). Estas curvas são apresentadas para os materiais carregados em diferentes idades.

Observa-se que, os coeficientes de idade para problemas de fluência são inferiores aos coeficientes de idade para problemas de relaxação. Outro ponto importante é que ao aumentarmos a data em que houve o carregamento da estrutura, o coeficiente de idade aumenta e, com o passar do tempo, tendem a 1. Esta situação corresponde à utilização do Método do Módulo de Efetivo,

que apresenta bons resultados para elementos carregados em idades avançadas. Adicionalmente, a partir da Figura 21, é possível observar que o aumento da resistência do concreto diminui o coeficiente de idade.

Figura 21 – Variação do coeficiente de idade em relação à data de carregamento.



Fonte: Adaptada de Gilbert e Ranzi (2010).

Segundo Bažant e Jirásek (2018), o valor de 0.8 para o coeficiente de idade do concreto é típico e representa bem o comportamento do material. Enquanto Gilbert e Ranzi (2010) recomendam valores de coeficiente de fluência de forma mais específica. Os autores indicam que para concretos cujo carregamento ocorreu entre os 7 e 14 dias, em que a duração deste carregamento é superior a 100 dias, valores entre 0.55 e 0.72 para o coeficiente de fluência são recomendados (Figura 21). Adicionalmente, considerando a variabilidade na determinação das variáveis que regem o comportamento ao longo do tempo, os autores recomendam a utilização de valores constantes do coeficiente de fluência para a utilização prática em análise estrutural.

Na Tabela 1, são apresentados valores para o coeficiente de fluência em função do tipo de problema e em função da data de carregamento. É importante notar que Gilbert e Ranzi (2010) apresentam coeficientes de idade para problemas com carregamento constante e deformação constante. Na prática, o comportamento das estruturas de concreto não se encaixa em nenhuma das situações, uma vez que há a redistribuição de esforços e as tensões e deformações

variam ao longo do tempo. Portanto, é importante a compreensão de que estes valores são apenas recomendações. A correta determinação do coeficiente de fluência exigiria a realização de ensaios experimentais ou o uso de métodos incrementais mais sofisticados.

Tabela 1 – Coeficiente de fluência.

	Data de carregamento t_0	
	$t_0 \leq 20$ dias	$t_0 > 28$ dias
Carregamento constante	0.65	0.75
Deformação constante	0.8	0.85

Fonte: Elaborada pela autora.

Neste trabalho, será utilizado o Método do Módulo Efetivo Ajustado. Sua utilização necessita da determinação do coeficiente de fluência ϕ bem como do coeficiente de idade χ . Em geral, utilizam-se modelos normativos para a determinação do coeficiente de fluência. O coeficiente de idade será considerado constante ao longo da análise, considerando recomendações encontradas na literatura.

O modelo do *American Concrete Structure* (ACI) foi desenvolvido por Branson e Christiason (1971) e algumas modificações foram realizadas pelo comitê do ACI nos anos de 1982 e 1992. O modelo foi desenvolvido a partir de uma demanda da indústria de estruturas protendidas e a sua versão mais atual é de 2008.

O modelo de previsão da deformação lenta do concreto (assim como da retração) utiliza uma curva hiperbólica que tende a um valor assintótico. Este modelo exige o conhecimento ou estimativa de alguns parâmetros do concreto. Dentre estes podemos citar as datas de carregamento e final de cura, método de cura, volume de cimento, entre outros. A função que descreve a fluência é dada por:

$$J(t, t_0) = \frac{1 + \phi(t, t_0)}{E_{cmt0}} \quad (138)$$

onde E_{cmt0} corresponde ao módulo de elasticidade do concreto na data de carregamento da estrutura em MPa. O módulo de elasticidade do concreto E_{cmt0} no tempo t_0 é dado por:

$$E_{cmt0} = 0.043\gamma_c^{1.5} \sqrt{f_{cmt0}} \quad (139)$$

onde γ_c corresponde ao peso unitário do concreto (kg/m^3) e f_{cmt0} a resistência à compressão do concreto na data de carregamento da estrutura. Este valor pode ser determinado por:

$$f_{cmt0} = \left[\frac{t}{a + bt} \right] f_{cm28} \quad (140)$$

onde f_{cm28} é a resistência à compressão do concreto aos 28 dias, a e b são constantes a serem determinadas em função do tipo de cimento utilizado e t é a idade do concreto em dias. O coeficiente de fluência $\phi(t, t_0)$ é dado por:

$$\phi(t, t_0) = \frac{(t - t_0)^\psi}{d + (t - t_0)^\psi} \phi_u \quad (141)$$

onde d e ψ são constantes para um elemento de forma e tamanho constantes e ϕ_u é o coeficiente de deformação última. Em condições padrão ou na ausência de dados acerca dos agregados locais, utiliza-se o valor de ϕ_u igual a 2.35. Para outras condições, deve-se utilizar o procedimento apresentado na norma.

O modelo atualmente vigente proposto pelo CEB-FIB (2010) é derivado do antigo modelo proposto pelo CEB no ano de 1999. A determinação do coeficiente de fluência $\phi(t, t_0)$ consiste na determinação de duas parcelas:

$$\phi(t, t_0) = \phi_{bc}(t, t_0) + \phi_{dc}(t, t_0) \quad (142)$$

em que $\phi_{bc}(t, t_0)$ e $\phi_{dc}(t, t_0)$ correspondem ao coeficiente fluência básica e o coeficiente de fluência por secagem. A primeira parcela é dada por:

$$\phi_{bc}(t, t_0) = \beta_{bc}(f_{cm})\beta(t, t_0) \quad (143)$$

onde

$$\beta_{bc}(f_{cm}) = \frac{1.8}{(f_{cm})^{0.7}} \quad \beta_{bc}(t, t_0) = \ln \left[\left(\frac{30}{t_{0,adj}} + 0.035 \right)^2 (t - t_0) + 1 \right] \quad (144)$$

onde f_{cm} e $t_{0,adj}$ correspondem a resistência à compressão média aos 28 dias em MPa e a idade ajustada da data de carregamento. Ambos os parâmetros podem ser estimados por:

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \quad t_{0,adj} = t_{0,T} \left[\frac{9}{2 + t_{0,T}^{1.2}} + 1 \right]^\alpha \geq 0.5 \text{ dias} \quad (145)$$

em que $t_{0,T}$ corresponde à idade do concreto na data de carregamento e α é um coeficiente que depende do tipo de cimento utilizado, podendo variar de 1 a -1.

A parcela da fluência por secagem $\phi_{dc}(t, t_0)$ é dada por:

$$\phi_{dc}(t, t_0) = \beta_{dc}(f_{cm})\beta(RH)\beta(t_0)\beta(t, t_0) \quad (146)$$

onde

$$\beta_{dc}(f_{cm}) = \frac{412}{(f_{cm})^{1.4}} \quad \beta(RH) = \frac{1 - \frac{RH}{100}}{0.1 \frac{h}{100}^{1/3}} \quad \beta_{dc}(t_0) = \frac{1}{0.1 + t_{0,adj}^{0.2}}$$

(147)

em que RH corresponde a umidade relativa do ar (%) e h é dado pela Eq. (131).

Finalmente, o parâmetro dependente do tempo $\beta_{dc}(t, t_0)$ é dado por:

$$\beta_{dc}(t, t_0) = \left[\frac{(t - t_0)}{\beta_h + (t - t_0)} \right]^{\gamma(t_0)} \quad (148)$$

em que:

$$\gamma(t_0) = \frac{1}{2.3 + \frac{3.5}{\sqrt{t_{0,adj}}}} \quad \beta_h = 1.5h + 250\alpha_{f_{cm}} \leq 1500\alpha_{f_{cm}} \quad (149)$$

e

$$\alpha_{f_{cm}} = \left(\frac{35}{f_{cm}} \right) \quad (150)$$

A partir dos dois modelos para a determinação do coeficiente de fluência do concreto, é possível observar que estes modelos dependem de muitas variáveis. Alguns destes parâmetros são difíceis de serem obtidos na prática da engenharia. Portanto, é esperado que haja uma variação entre os resultados obtidos por simulações e resultados experimentais.

A NBR 6118:2014, de forma similar à retração, permite a utilização de um valor último para o coeficiente de fluência quando o concreto está submetido a um nível de tensão inferior a 50% de sua resistência e a precisão na determinação deste valor não é essencial. O valor último do coeficiente de fluência é determinado em função da umidade do meio, da espessura fictícia da peça e da classificação do concreto.

Para uma determinação mais precisa do coeficiente de fluência (em função do tempo), a norma recomenda a utilização do procedimento apresentado no Anexo A. Este procedimento também considera que o concreto apresenta tensões abaixo de 50% da sua resistência e assume uma relação linear entre a deformação por fluência e a tensão aplicada.

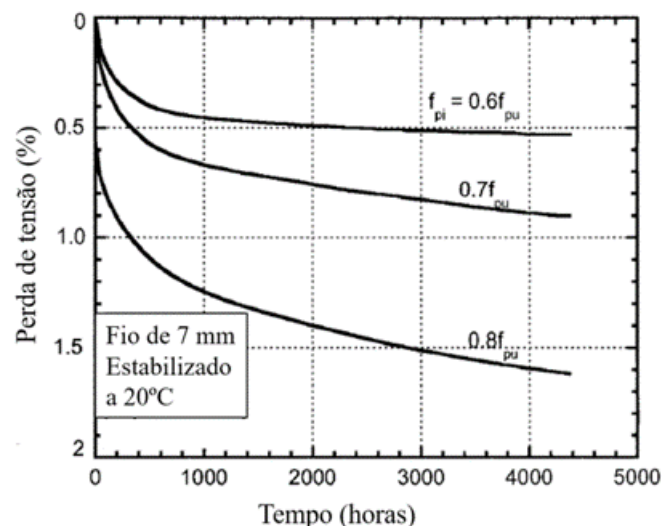
O coeficiente de fluência determinado utilizando a NBR 6118:2014 é função das mesmas variáveis dos modelos propostos pelo ACI-209R e pelo CEB-FIB. As principais diferenças são encontradas nas expressões que determinam o coeficiente de fluência. Este aspecto é esperado uma vez que a NBR 6118:2014 é voltada para estruturas de concreto no Brasil. Logo, devem ser consideradas as características dos materiais do país, fatores que influenciam o comportamento ao longo do tempo do concreto. Neste trabalho, o coeficiente de fluência será determinado utilizando o modelo recomendado pelo CEB-FIB (2010), por se tratar de um modelo internacionalmente utilizado.

4.3 Relaxação

No aço de protensão, o efeito da fluência ocorre por meio da perda de tensão no cabo quando a deformação e a temperatura são mantidas constantes. Este fenômeno é denominado relaxação e pode ser observado por meio de um ensaio de relaxação, em que o aço é tensionado, seu comprimento é mantido constante e a tensão é medida por um longo intervalo de tempo.

Segundo Naaman (2004), a relaxação pode ser desprezada quando a tensão no aço não ultrapassa 50% da sua resistência. No entanto, o efeito da relaxação passa a ser importante quando esta tensão aumenta, como pode ser observado na Figura 22.

Figura 22 – Relaxação em função da tensão aplicada.



Fonte: Adaptada de Naaman (2004)

De forma similar à fluência do concreto, a relaxação no aço de protensão se desenvolve à uma taxa decrescente e também depende da temperatura. A perda por relaxação é mais acentuada ao aumentar-se a temperatura. Outro fator importante para a relaxação é o tipo de aço utilizado. Na Tabela 2 são apresentados valores típicos esperados para a relaxação de aços relaxação normal e de baixa relaxação, onde f_{pi} é a tensão inicial aplicada e f_{pu} é a tensão última. Verifica-se que aços de relaxação normal podem apresentar uma perda cerca de 12% da tensão inicial aplicada, enquanto que aços de baixa relaxação esse valor diminui para 4.5%.

Usualmente a tensão aplicada em cabos de protensão é alta, cerca de 60% da tensão última no mínimo (GILBERT; RANZI, 2010), desta forma, é recomenda-se que o efeito da relaxação seja considerado. Na prática de projetos de estruturas protendidas, é comum utilizar-se um valor percentual da perda de força de protensão, em geral este valor é fornecido pelo fabricante. No entanto, quando se deseja realizar uma análise no tempo, é necessário utilizar um

modelo que seja capaz de representar a tensão no cabo considerando o efeito da relaxação.

Tabela 2 – Perda de tensão em função da tensão inicial.

f_{pi}/f_{pu}	0.6	0.7	0.8
Relaxação normal	4.5%	8%	12%
Baixa relaxação	1%	2%	4.5%

Fonte: Adaptada de Naaman (2004)

Magura *et al.* (1964) realizaram um estudo para avaliar o efeito da relaxação e propor uma expressão capaz de representar a variação da tensão no cabo ao longo do tempo. Como resultado do trabalho, foi proposta uma expressão para o efeito da relaxação em função do tempo para o aço de relaxação baixa:

$$\sigma_p(t) = \sigma_{p0} \left[1 - \frac{\log(t - t_0)}{10} \left(\frac{\sigma_{p0}}{\sigma_{py}} - 0.55 \right) \right] \quad (151)$$

em que $\sigma_p(t)$ e a tensão de protensão no instante de tempo t em dias, σ_{p0} e σ_{py} correspondem a tensão inicial aplicada e a tensão de escoamento, respectivamente. Esta expressão será considerada neste trabalho para simular o efeito da relaxação em vigas de concreto com protensão não aderente.

4.4 Análise estrutural para cargas de longa duração

Os efeitos da fluência e retração do concreto são essenciais para análises de longa duração, em que o principal interesse é o atendimento às condições de serviço e durabilidade da estrutura. Desprezar o efeito da retração e fluência do concreto pode ocasionar deslocamentos excessivos, fissuras por retração, exposição da armadura à ação de agentes corrosivos, redistribuição de esforços não previstas, entre outros (BAŽANT; JIRÁSEK, 2018). Estes problemas afetam diretamente a utilização e a durabilidade das estruturas.

A correta predição da deformação ao longo do tempo do concreto é complexa e dependente de muitas variáveis, tais como a data de carregamento da estrutura, quantidade de água e cimento presente na mistura, tipo de agregado utilizado, resistência à compressão, entre outros. Ademais, segundo Ranzi *et al.* (2013), mesmo realizando-se ensaios experimentais para a obtenção destes parâmetros, a variabilidade encontrada para os parâmetros apresenta-se como um gargalo na predição da fluência e retração do concreto. Assim, a estimativa do comportamento ao longo do tempo do concreto é diretamente dependente da quantidade e precisão dos parâmetros

necessários acerca da mistura de concreto bem como do modelo utilizado para a inclusão destes efeitos na análise estrutural.

A utilização de um modelo sofisticado para a consideração da fluência e retração do concreto não admite soluções analíticas, sendo necessária a utilização de análises incrementais, em que o tempo é dividido em incrementos de tempo. Em geral, os modelos incrementais para a consideração da fluência são utilizados quando o histórico de carregamento da estrutura varia com o tempo (GILBERT; RANZI, 2010) ou quando se deseja um modelo realista para simular o comportamento das estruturas (BAŽANT; JIRÁSEK, 2018).

Criel *et al.* (2015) utilizaram um método incremental que utilizava a solução da integral de Volterra para considerar o efeito da fluência e retração em vigas de concreto armado com carregamento variável ao longo do tempo. O modelo apresentou excelentes resultados quando comparados com dados experimentais.

Lou *et al.* (2013b) utilizaram um método incremental baseado no princípio da superposição em que a função de fluência pode ser representada por um somatório de funções exponenciais. Este método foi inicialmente proposto por Zienkiewicz e Watson (1966). O modelo é baseado em elementos finitos e é capaz de considerar os efeitos da retração e fluência do concreto bem como a relaxação do aço em vigas com protensão interna não aderente. Posteriormente o modelo foi utilizado para avaliar a deflexão de longa duração em vigas em condições de serviço (LOU *et al.*, 2014). O modelo apresentou excelentes resultados em relação aos resultados experimentais.

Apesar de apresentar bons resultados, modelos incrementais apresentam a desvantagem de necessitar de um grande armazenamento de dados. Desta forma, buscam-se por modelos mais simplificados com o objetivo de se considerar os fenômenos da fluência no concreto de forma mais direta. O Método do Módulo Efetivo Ajustado (MMEA) é bastante utilizado com este objetivo, sendo aplicado em diferentes sistemas estruturais em concreto.

Gilbert (2013) utilizou o MMEA para considerar o efeito da retração e fluência em vigas e lajes de concreto armado considerando a presença de fissuras em condições de serviço, obtendo bons resultados. Este método também foi aplicado para vigas mistas (AMADIO; FRAGIACOMO, 1997) e lajes de concreto protendido de forma analítica (GAYED; GHALI, 2019) e em uma formulação baseada em elementos finitos (SI; AU, 2011).

Pisani (2018) utilizou o MMEA em vigas com protensão externa em sua forma incremental. Em seu trabalho, o coeficiente de fluência era obtido por meio de uma solução

numérica quase exata das integrais de Volterra e também via aproximação desta solução. Os resultados apresentaram excelente concordância com os resultados experimentais para as duas abordagens.

Este trabalho acrescenta os efeitos da fluência e da retração do concreto utilizando o MMEA, em uma abordagem em elementos finitos, em que o coeficiente de fluência ϕ é descrito por recomendações normativas. A formulação para a consideração destes efeitos é apresentada na Seção 4.5. Para a relaxação do aço de protensão, utiliza-se o modelo proposto por Magura *et al.* (1964). A consideração do fenômeno da relaxação na análise de longa duração de vigas protendidas é apresentado na Seção 4.6.

4.5 Consideração da fluência e retração no concreto

Neste trabalho, o objetivo da consideração de efeitos dependentes do tempo é de avaliar os deslocamentos em vigas com protensão interna ou externa não aderentes quando submetidas a carregamentos constantes ao longo do tempo (*sustained loads*). Isso permite que um procedimento simplificado, como o MMEA, seja capaz de representar bem o comportamento destas estruturas, sem a necessidade de uso de métodos incrementais.

A retração e a fluência no concreto serão consideradas utilizando o MMEA. Esta seção apresenta a formulação baseada no Método dos Elementos Finitos para a consideração destes efeitos. O elemento utilizado para a discretização da viga de concreto armado é o elemento de pórtico plano linear apresentado na Seção 3.1.1.

Esta formulação considera que a viga de concreto é submetida a um carregamento inferior a 50% da sua resistência e que o comportamento imediato dos materiais pode ser representado pela Lei de Hooke (i.e. regime linear). Desta forma, é possível afirmar que a deformação no concreto ao longo do tempo $\varepsilon(t)$ devido a uma tensão $\sigma_c(t_0)$ aplicada na idade t_0 e constante ao longo do período $(t - t_0)$, a uma tensão aplicada na idade t_0 gradualmente crescente até a idade t , $\Delta\sigma_c(t)$, e à retração do concreto ε_{sh} , é dada por:

$$\varepsilon(t) = \sigma_c(t_0) \frac{1 + \phi(t, t_0)}{E_c(t_0)} + \frac{\Delta\sigma_c}{E_e(t, t_0)} [1 + \chi(t, t_0)\phi(t, t_0)] + \varepsilon_{sh}(t) \quad (152)$$

Esta expressão pode ser reescrita na forma:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_e(t, t_0)} + \frac{\Delta\sigma_c}{\bar{E}_e(t, t_0)} + \varepsilon_{sh}(t) \quad (153)$$

em que $E_e(t, t_0)$ é o módulo de elasticidade efetivo e $\bar{E}_e(t, t_0)$ é o módulo de elasticidade ajustado.

O incremento de tensão $\Delta\sigma_c$ pode ser obtido a partir da Eq. (153):

$$\Delta\sigma_c = \bar{E}_e(t, t_0)\varepsilon(t) - \frac{\bar{E}_e(t, t_0)}{E_e(t, t_0)}\sigma_c(t_0) - \bar{E}_e(t, t_0)\varepsilon_{sh}(t) \quad (154)$$

O incremento de tensão pode ser escrito como:

$$\Delta\sigma_c = \sigma_c(t) - \sigma_c(t_0) \quad (155)$$

Desta forma, a tensão no concreto no instante de tempo t é dada por:

$$\sigma_c(t) = \bar{E}_e(t, t_0)\varepsilon(t) + \left[1 - \frac{\bar{E}_e(t, t_0)}{E_e(t, t_0)}\right]\sigma_c(t_0) - \bar{E}_e(t, t_0)\varepsilon_{sh}(t) \quad (156)$$

A deformação longitudinal $\varepsilon(t)$ da seção transversal de uma de viga de Euler-Bernoulli é dada por:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0(t) - y\kappa(t) \quad (157)$$

em que ε_0 é a deformação de membrana e κ é a curvatura da viga.

O trabalho virtual interno de um corpo no instante t é dado por:

$$\delta U(t) = \int_V \delta\varepsilon(t)^T \sigma(t) dV \quad (158)$$

Para um elemento de pórtico, a deformação e a tensão são uniaxiais, portanto:

$$\delta U_e(t) = \int_V \delta\varepsilon(t)\sigma(t) dV \quad (159)$$

Usando a Eq. (157), esta integral pode ser reescrita separando a integral em uma parcela de membrana e outra de flexão::

$$\delta U_e(t) = \int_L \int_A (\delta\varepsilon_0(t) - y\delta\kappa(t))^T \sigma(t) dA dX \quad (160)$$

Esta expressão pode ser escrita como:

$$\delta U_e(t) = \int_L \delta\varepsilon_0(t) N(t) dX + \int_L \delta\kappa(t) M(t) dX \quad (161)$$

onde

$$N(t) = \int_A \sigma(t) dA \quad M(t) = \int_A -y\sigma(t) dA \quad (162)$$

A Eq. (161) também pode ser escrita na forma vetorial:

$$\delta U(t) = \int_L \delta\varepsilon(t)^T \sigma(t) dX \quad (163)$$

em que $\delta\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ e $\boldsymbol{\sigma}(t)$ são os vetores de deformação e tensão generalizadas no instante de tempo t , dados por:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \begin{bmatrix} \delta\varepsilon_0(t) \\ \delta\kappa(t) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{bmatrix} N(t) \\ M(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_A \boldsymbol{\sigma}(t) dA \\ - \int_A Y \boldsymbol{\sigma}(t) dA \end{bmatrix} \quad (164)$$

A tensão em uma viga de concreto armado possui duas componentes: uma devido à tensão no concreto $\boldsymbol{\sigma}_c(t)$ e uma componente devido à tensão na armadura passiva. Desta forma:

$$N(t) = \int_{A_c} \boldsymbol{\sigma}_c(t) dA + \int_{A_s} \boldsymbol{\sigma}_s(t) dA = N_c(t) + N_s(t) \quad (165)$$

O mesmo ocorre com o momento fletor:

$$M(t) = - \int_{A_c} y \boldsymbol{\sigma}_c(t) dA - \int_{A_s} y \boldsymbol{\sigma}_s(t) dA = M_c(t) + M_s(t) \quad (166)$$

Essa separação é conveniente, uma vez que o aço passivo não apresenta comportamento dependente do tempo.

A força normal no concreto no instante de tempo t , $N_c(t)$, é determinada utilizando a expressão da tensão no concreto no instante de tempo t , dada pela Eq. (156):

$$N_c(t) = \int_A \boldsymbol{\sigma}_c(t) dA = \int_A \left[\bar{E}_e(t, t_0)(\boldsymbol{\varepsilon}(t) - \boldsymbol{\varepsilon}_{sh}(t)) + \bar{\phi} \boldsymbol{\sigma}_c(t_0) \right] dA \quad (167)$$

em que

$$\bar{\phi} = \frac{\phi(t, t_0)[\chi(t, t_0) - 1]}{1 + \chi(t, t_0)\phi(t, t_0)} \quad (168)$$

Substituindo a Eq. (157) e rearranjando os termos:

$$N_c(t) = \bar{E}_e(t, t_0) \left[\boldsymbol{\varepsilon}_0(t) \int_{A_c} dA - \kappa(t) \int_{A_c} y dA \right] - \bar{E}_e(t, t_0) \boldsymbol{\varepsilon}_{sh}(t) \int_{A_c} dA + \bar{\phi} \int_{A_c} \boldsymbol{\sigma}_c(t_0) dA \quad (169)$$

Esta expressão pode ser escrita de forma compacta como:

$$N_c(t) = \bar{E}_e(t, t_0) [A_c \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) + S_c \kappa(t)] - \bar{E}_e(t, t_0) A_c \boldsymbol{\varepsilon}_{sh}(t) + \bar{\phi} N_c(t_0) \quad (170)$$

onde

$$A_c = \int_{A_c} dA \quad S_c = - \int_{A_c} y dA \quad N_c(t_0) = \int_{A_c} \boldsymbol{\sigma}_c(t_0) dA \quad (171)$$

Observe que $N_c(t_0)$ corresponde à força normal do concreto na aplicação instantânea do carregamento externo.

De forma semelhante, encontramos a expressão para a força normal na armadura passiva:

$$N_s(t) = \int_A \sigma_s(t) dA = \int_{A_s} E_s \varepsilon_s(t) dA = \int_{A_s} E_s (\varepsilon_0(t) - y\kappa(t)) dA \quad (172)$$

As barras de aço podem ser consideradas de forma discreta. Desta forma, a força normal pode ser calculada como:

$$N_s(t) = E_s A_s \varepsilon_0(t) - E_s S_s y \kappa(t) \quad (173)$$

onde

$$A_s = \int_{A_s} dA \quad S_s = \int_{A_s} y dA \quad (174)$$

Para a parcela de concreto do momento fletor:

$$M_c(t) = \int_{A_c} -y \sigma_c(t) dA_c = - \int_A \left[\bar{E}_e(t, t_0) (\varepsilon(t) - \varepsilon_{sh}(t)) + \bar{\phi} \sigma_c(t_0) \right] y dA_c \quad (175)$$

Substituindo a Eq. (157) e rearranjando os termos:

$$M_c(t) = \bar{E}_e(t, t_0) [-S_c \varepsilon_0(t) + I_c \kappa(t)] + \bar{E}_e(t, t_0) S_c \varepsilon_{sh}(t) + \bar{\phi} M_c(t_0) \quad (176)$$

em que I_c é o momento de inércia da seção transversal e $M_c(t_0)$ é o momento fletor gerado pelo carregamento externo na data de aplicação desta carga.

A parcela de momento fletor devido ao aço passivo, é dada por:

$$M_s(t) = \int_{A_s} -y \sigma_c(t) dA = - \int_{A_s} E_s (\varepsilon_0(t) - y \kappa(t)) y dA \quad (177)$$

De forma simplificada:

$$M_s(t) = -E_s S_s \varepsilon_0(t) + E_s I_s \kappa(t) \quad (178)$$

onde

$$I_s = \int_{A_s} y^2 dA \quad (179)$$

As expressões para a determinação dos esforços internos podem ser escritas na forma do vetor de tensões generalizadas $\sigma(t)$, este vetor apresenta duas parcelas:

$$\sigma(t) = \sigma_c(t) + \sigma_s(t) \quad (180)$$

em que $\sigma_c(t)$ é a parcela da tensão do concreto e $\sigma_s(t)$ é a parcela da tensão da armadura passiva. Para o concreto, temos:

$$\sigma_c(t) = \mathbf{C}_c(t, t_0)\boldsymbol{\varepsilon}(t) - \mathbf{c}_{sh}(t, t_0)\boldsymbol{\varepsilon}_{sh}(t, t_0) + \bar{\phi}(t, t_0)\sigma_c(t_0) \quad (181)$$

em que $\sigma_c(t_0)$ é o vetor de tensão generalizada do concreto no instante de tempo correspondente a data de aplicação do carregamento externo, $\mathbf{C}_c(t, t_0)$ e \mathbf{c}_{sh} são as matrizes constitutivas do concreto e da parcela de retração do mesmo, dadas por:

$$\mathbf{C}_c(t, t_0) = \begin{bmatrix} \bar{E}_e(t, t_0)A_c & -\bar{E}_e(t, t_0)S_c \\ -\bar{E}_e(t, t_0)S_c & \bar{E}_e(t, t_0)I_c \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_{sh}(t, t_0) = \begin{bmatrix} \bar{E}_e(t, t_0)A_c \\ -\bar{E}_e(t, t_0)S_c \end{bmatrix} \quad (182)$$

Utilizando a Eq. (173) e a Eq. (178), podemos escrever a contribuição da armadura passiva na forma matricial:

$$\sigma_s(t) = \mathbf{C}_s \boldsymbol{\varepsilon}(t) \quad (183)$$

onde

$$\mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} E_s A_s & -E_s S_s \\ -E_s S_s & E_s I_s \end{bmatrix} \quad (184)$$

em que E_s é o módulo de elasticidade, A_s é a área, S_s é o primeiro momento estático e I_s é o momento de inércia da seção. Observe que a matriz constitutiva da parcela da armadura passiva é constante, pois seu comportamento é independente do tempo.

Finalmente, podemos escrever a expressão do trabalho virtual:

$$\delta U(t) = \int_L \delta \boldsymbol{\varepsilon}(t)^T \boldsymbol{\sigma}(t) dX = \int_L \delta \boldsymbol{\varepsilon}(t)^T [\mathbf{C}(t, t_0)\boldsymbol{\varepsilon}(t) - \boldsymbol{\sigma}_{sh}(t, t_0) + \bar{\phi}(t, t_0)\boldsymbol{\sigma}(t_0)] dX \quad (185)$$

em que

$$\mathbf{C}(t, t_0) = \mathbf{C}_c(t, t_0) + \mathbf{C}_s \quad \boldsymbol{\sigma}_{sh}(t, t_0) = \mathbf{C}_{sh}(t, t_0)\boldsymbol{\varepsilon}_{sh}(t, t_0) \quad (186)$$

4.5.1 Elementos Finitos

No Método dos Elementos Finitos, o vetor de deformações generalizadas pode ser relacionado aos deslocamentos nodais do elemento \mathbf{u}_e utilizando a matriz de deformação-deslocamento \mathbf{B} , em que:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{u}_e \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{u}_e \quad (187)$$

Utilizando esta definição, podemos reescrever o trabalho virtual interno:

$$\delta U_e(t) = \delta \mathbf{u}_e(t)^T \int_L \mathbf{B}^T [\mathbf{C}(t, t_0) \mathbf{B} \mathbf{u}_e(t) - \sigma_{sh}(t, t_0) + \bar{\phi}(t, t_0) \sigma(t_0)] dX = \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{g}_e(t) \quad (188)$$

Desta forma, o vetor de forças internas é dado por:

$$\mathbf{g}_e(t) = \mathbf{K}_e(t, t_0) \mathbf{u}_e(t) - \mathbf{f}_{she}(t, t_0) + \mathbf{f}_{cre}(t, t_0) \quad (189)$$

em que matriz de rigidez do elemento \mathbf{K}_e é dada por:

$$\mathbf{K}_e(t, t_0) = \int_L \mathbf{B}^T \mathbf{C}(t, t_0) \mathbf{B} dX \quad (190)$$

$\mathbf{f}_{she}(t, t_0)$ é o vetor de forças de cada elemento devido à retração:

$$\mathbf{f}_{she}(t, t_0) = \int_L \mathbf{B}^T \sigma_{sh}(t, t_0) dX \quad (191)$$

e $\mathbf{f}_{cre}(t_0)$ é o vetor de forças de cada elemento devido à fluência do concreto:

$$\mathbf{f}_{cre}(t_0) = \bar{\phi}(t, t_0) \int_L \mathbf{B}^T \sigma(t_0) dX \quad (192)$$

A montagem da matriz de rigidez global e dos vetores de forças globais são feitos de forma tradicional do MEF e não serão discutidas aqui.

Para que haja equilíbrio, é necessário que os esforços internos estejam em equilíbrio com os esforços externos para todo instante de tempo t , para isto:

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (193)$$

em que $\mathbf{f}(t)$ é o vetor de forças externas aplicada. Substituindo a expressão do vetor de forças internas dada pela Eq. (189) e a expressão da matriz de rigidez dada pela Eq. (190), em suas formas globais, podemos escrever as equações de equilíbrio da estrutura como:

$$\mathbf{K}(t, t_0) \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) + \mathbf{f}_{sh}(t, t_0) - \mathbf{f}_{cr}(t_0) \quad (194)$$

onde $\mathbf{f}_{sh}(t, t_0)$ e $\mathbf{f}_{cr}(t_0)$ são os vetores de forças globais devido à retração e fluência do concreto, respectivamente.

4.6 Consideração da relaxação do cabo de protensão

O trabalho virtual interno δU_p do elemento de cabo de protensão no instante de tempo t , é dado por:

$$\delta U_p(t) = \int_{L_p} \int_{A_p} \delta \varepsilon_p(t) \sigma_p(t) dA dL = \delta \varepsilon_p(t) \sigma_p(t) A_p L_p \quad (195)$$

em que $\varepsilon_p(t)$ e $\sigma_p(t)$ correspondem à deformação axial e à tensão axial no cabo de protensão e A_p e L_p são a área da seção transversal do cabo e o comprimento inicial do cabo.

A tensão no cabo no instante t , $\sigma_p(t)$, considerando que este apresenta-se no regime linear elástico, é dada por:

$$\sigma_p(t) = E_p(\varepsilon_p(t) - \varepsilon_{p,rel}(t, t_0)) \quad (196)$$

em que E_p é o módulo de elasticidade do cabo de protensão e $\varepsilon_{p,rel}(t)$ é a deformação de relaxação no cabo de protensão. A tensão por relaxação do cabo $\sigma_{p,rel}$, a partir da Eq. (151), é dada por:

$$\sigma_{p,rel}(t, t_0) = \sigma_p(t_0) \left[\frac{\log(t - t_0)}{10} \left(\frac{\sigma_p(t_0)}{\sigma_{py}} - 0.55 \right) \right] \quad (197)$$

Considerando que o material se comporta em seu regime linear elástico (i.e. Lei de Hooke), podemos relacionar de forma linear a tensão com a deformação por relaxação:

$$\varepsilon_{p,rel}(t, t_0) = \varepsilon_{p0}(t_0) \left[\frac{\log(t - t_0)}{10} \left(\frac{\sigma_p(t_0)}{\sigma_{py}} - 0.55 \right) \right] \quad (198)$$

em que ε_{p0} é a deformação que ocorre no instante de aplicação da protensão.

Sabendo que a deformação do cabo de protensão apresenta duas parcelas, uma parcela constante inicial (ε_{p0}) e uma parcela dependente dos deslocamentos ($\Delta\varepsilon_p$), dada pela Eq. (45), podemos escrever a tensão no cabo $\sigma_p(t)$ na forma:

$$\sigma_p(t) = E_p(\varepsilon_{p0}(t_0) + \Delta\varepsilon_p(t) - \varepsilon_{p,rel}(t, t_0)) \quad (199)$$

Aplicando a Eq. (198) na Eq. (199):

$$\sigma_p(t) = E_p(\Delta\varepsilon_p(t) + \varepsilon_{p0}(t_0)\phi_{p,rel}(t, t_0)) \quad (200)$$

em que $\phi_{p,rel}$ é dado por:

$$\phi_{p,rel}(t, t_0) = \left[1 - \frac{\log(t - t_0)}{10} \left(\frac{\sigma_p(t_0)}{\sigma_{py}} - 0.55 \right) \right] \quad (201)$$

4.6.1 Elementos Finitos

Para a análise de cargas de longa duração, o elemento de cabo será utilizado em sua versão linear, apresentada na Seção 3.2.1. Assim, a variação da deformação do cabo é dada pela Eq. (54), portanto, o trabalho virtual interno realizado é dado por:

$$\delta U_p(t) = \delta \mathbf{u}_s(t) \sum_{s=1}^{n_s} \bar{\mathbf{B}}_s \mathbf{T}_s A_p E_p (\Delta\varepsilon_p(t) + \varepsilon_{p0}(t_0)\phi_{p,rel}(t, t_0)) L_p \quad (202)$$

Esta expressão pode ser expressa na forma:

$$\delta U_p(t) = \delta \mathbf{u}_s(t) \sum_{s=1}^{n_s} \bar{\mathbf{B}}_s \mathbf{T}_s (\Delta F_p(t) + F_{p0}(t_0) \phi_{p,rel}(t, t_0)) L_p \quad (203)$$

em que:

$$\Delta F_p(t) = A_p E_p \Delta \varepsilon_p(t) \quad F_{p0}(t_0) = A_p E_p \varepsilon_{p0}(t_0) \quad (204)$$

Sabendo que:

$$\delta U_p(t) = \sum_{s=1}^{n_s} \mathbf{g}_s(t)^T \delta \mathbf{u}_s \quad (205)$$

onde $\mathbf{g}_s(t)$ é o vetor de forças internas de um segmento de cabo, dado por:

$$\mathbf{g}_s(t) = \mathbf{b}_{s0} (\Delta F_p(t) + F_{p0}(t_0) \phi_{p,rel}(t, t_0)) \quad (206)$$

em que \mathbf{b}_{s0} é dado pela Eq. (72).

Assim, podemos escrever o vetor de forças internas do segmento de cabo em função dos deslocamentos do segmento associado:

$$\mathbf{g}_s(t) = \frac{A_p E_p}{L_p} \mathbf{b}_{s0} \mathbf{b}_{s0}^T \mathbf{u}_s + \mathbf{f}_{ps,rel}(t, t_0) \quad (207)$$

em que a matriz de rigidez do segmento pode ser diretamente obtida:

$$\mathbf{K}_{E_s} = \frac{A_p E_p}{L_p} \mathbf{b}_{s0} \mathbf{b}_{s0}^T \quad (208)$$

A matriz de rigidez do segmento de cabo não varia com o passar do tempo. O vetor $\mathbf{f}_{ps,rel}(t, t_0)$ corresponde ao vetor de forças do segmento de cabo devido ao efeito da relaxação, dado por:

$$\mathbf{f}_{ps,rel}(t, t_0) = \mathbf{b}_{s0} F_{p0}(t_0) \phi_{p,rel}(t, t_0) \quad (209)$$

A matriz de rigidez \mathbf{K}_{E_p} e o vetor de forças do cabo $\mathbf{f}_{p,rel}(t, t_0)$ são montados de forma análoga à discutida no Item 3.2.

De forma que haja equilíbrio, o vetor de forças internas do cabo deve contribuir no vetor de forças internas da estrutura. Assim, adiciona-se o vetor de forças internas do cabo ao vetor de forças internas da estrutura:

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{g}_v(t) + \mathbf{g}_c(t) = \mathbf{f}(t) \quad (210)$$

onde \mathbf{g}_v e \mathbf{g}_c correspondem ao vetor de forças internas globais da viga e o vetor de forças internas globais do cabo e $\mathbf{f}(t)$ corresponde ao vetor de forças externas da estrutura. Portanto:

$$(\mathbf{K}_v(t, t_0) + \mathbf{K}_c) \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) + \mathbf{f}_{sh}(t, t_0) - \mathbf{f}_{cr}(t, t_0) - \mathbf{f}_{p,rel}(t, t_0) \quad (211)$$

onde \mathbf{K}_v e \mathbf{K}_c são as matrizes de rigidez global da viga de concreto armado e do cabo de protensão, respectivamente, $\mathbf{u}(t)$ corresponde ao vetor de deslocamentos globais da estrutura e $\mathbf{f}_{p,rel}(t, t_0)$ corresponde ao vetor de forças globais devido ao efeito da relaxação do cabo.

5 APLICAÇÕES

Neste capítulo é apresentada a validação do modelo proposto para cargas de curta e longa duração. Os modelos são comparados com resultados apresentados na literatura. Ainda, os resultados obtidos via análise utilizando o MEF são avaliados em termos de curvatura, deformações e diagramas de momento fletor.

5.1 Análise de curta duração

Esta seção apresenta a validação do modelo proposto para cargas de curta duração bem como estudos realizados com o objetivo de caracterizar o comportamento de vigas com protensão não aderente interna e externa. Os resultados foram comparados com dados experimentais apresentados na literatura e o modelo proposto foi utilizado para simular vigas biapoiadas e vigas contínuas com diferentes traçados de cabo, além de vigas com protensão não aderente externa.

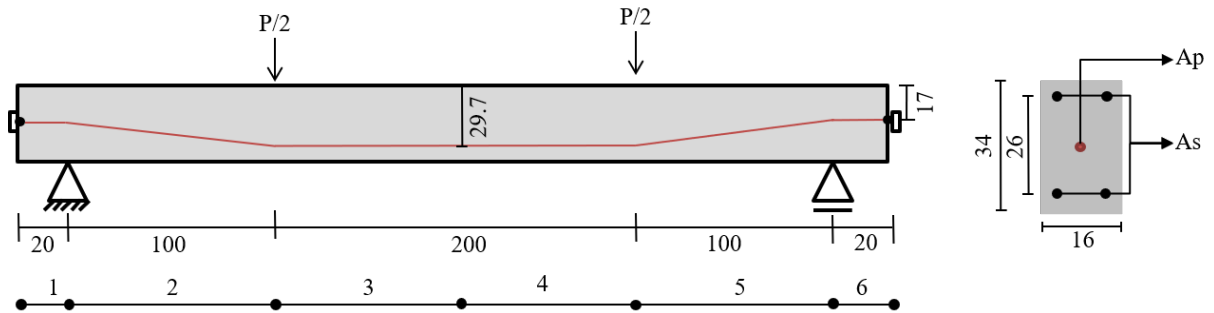
O comportamento dos elementos estruturais estudados também foi avaliado em termos de deformações, momento fletor e curvatura ao longo da viga. Estes parâmetros são facilmente obtidos pela formulação, são calculados nos pontos de Gauss ao longo da viga. Ainda, avaliou-se o efeito da consideração do termo quadrático da relação deformação-deslocamento, relações tensão-deformação para o concreto e o efeito do número de desviadores em vigas com protensão externa.

5.1.1 Viga com protensão não-aderente com cabo de perfil poligonal

Um conjunto de vigas com protensão não aderente foi testado por Hussien *et al.* (2012). A viga, nomeada B7, tem seção e traçado do cabo apresentados na Figura 23. O cabo de protensão apresenta 0.99 cm^2 de área. A tensão de protensão no cabo, após as perdas imediatas, é igual a 1000 MPa. As áreas de armadura passiva positiva e negativa são de 1.57 cm^2 cada.

A resistência à compressão do concreto é de 43 MPa. O pico de deformação de compressão e a deformação de compressão última, estimadas de acordo com as expressões recomendadas pelo Eurocode, são iguais a 2.246×10^{-3} e 3.1×10^{-3} , respectivamente. Utilizaremos a curva de concreto proposta por Zupan e Saje (2005) para os resultados numéricos, bem como para a curva carga-deslocamento, e para isto, estimou-se um pico de deformação de tração de 1×10^{-5} e deformação última de tração de 4×10^{-4} .

Figura 23 – Viga B7 ensaiada por Hussien *et al.* (2012) (unidades em cm).



Fonte: Elaborada pela autora.

O aço de protensão tem módulo de elasticidade igual a 195 GPa e tensão de escoamento de 1674 MPa. A tensão última e a deformação última do cabo de protensão correspondem a 1860 MPa e 0.06, respectivamente. Os parâmetros K , Q e R necessários para a curva do aço de protensão, utilizando o modelo proposto por Menegoto e Pinto (1973), têm valores de 1.04, 0.012 e 8.127, respectivamente.

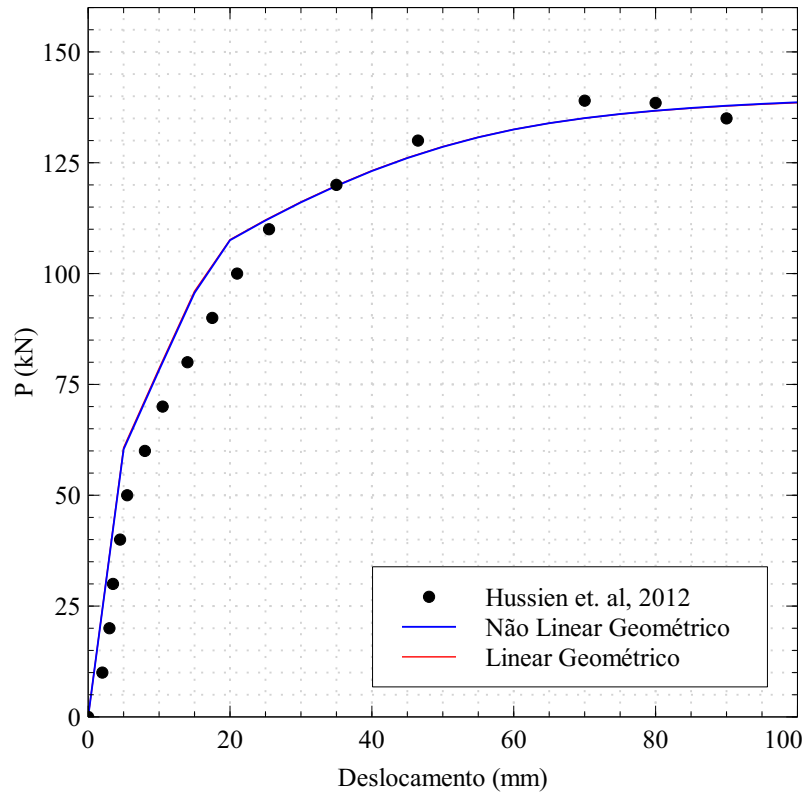
Para simular o comportamento da armadura passiva, utilizou-se uma relação bilinear de tensão-deformação, em que o módulo de elasticidade e a tensão de escoamento são iguais a 210 GPa e 470 MPa, respectivamente. A deformação última considerada foi de 0.12 e o módulo de encruamento de 1.2 GPa.

Para o traçado do caminho de equilíbrio utilizou-se o Método do Controle de Deslocamento no nó central da viga, em que utilizaram-se incrementos de 5 mm em 20 passos. A tolerância adotada para a convergência foi de 10^{-6} . O resultado obtido para a curva de carga-deslocamento é apresentado na Figura 24.

Podemos observar que a formulação proposta apresenta excelentes resultados em comparação com os obtidos experimentalmente. Verifica-se também que a influência da consideração dos termos não lineares de deformação-deslocamento na formulação é desprezível para esta viga. Este comportamento é esperado, uma vez que se trata de um problema com pequenos deslocamentos e a protensão é interna, ou seja, os deslocamentos do cabo de protensão acompanham os deslocamentos da viga.

Na Tabela 3, são apresentados os resultados para cada iteração realizada na fase de aplicação da protensão apresentado para cada tipo de análise. A partir destes resultados, verificamos que a convergência da formulação proposta é atingida rapidamente, apresentando convergência quadrática, o que corrobora com a consistência e robustez do modelo. Ainda, para uma análise de pequenos deslocamentos, um número menor de iterações foi necessário para se atingir a convergência.

Figura 24 – Curva carga-deslocamento obtida para a Viga B7.



Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 3 – Convergência para a fase de aplicação da protensão - viga B7.

Iter	Não Linear Geométrico		Linear Geométrico	
	ϵ_{p0}	Erro	ϵ_{p0}	Erro
1	0.00E+00	1.00E+00	0.00E+00	1.00E+00
2	5.22E-03	1.22E-03	5.22E-03	1.33E-03
3	5.23E-03	2.25E-06	5.23E-03	8.90E-08
4	5.23E-03	3.02E-07	-	-

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 4 – Convergência para o 20º passo para a viga B7.

Iter	Não linear Geométrico		Linear Geométrico	
	P (kN)	Erro	P (kN)	Erro
1	138.49	2.6692E-04	138.39	1.0826E-05
2	138.49	8.6253E-06	138.39	2.3759E-09
3	138.49	1.6485E-08	-	-

Fonte: Elaborada pela autora.

A Tabela 4 apresenta os resultados para a convergência das iterações de Newton-Raphson do 20º passo do controle de deslocamento, quando $v = 0.1$ m, para a análise não linear e linear. Verifica-se, novamente, que a convergência do modelo é atingida com um menor número de iterações para a análise linear geométrica. Também pode-se observar que a diferença do valor da carga é desprezível. A rápida convergência do modelo deve-se a consistência e correta implementação do modelo.

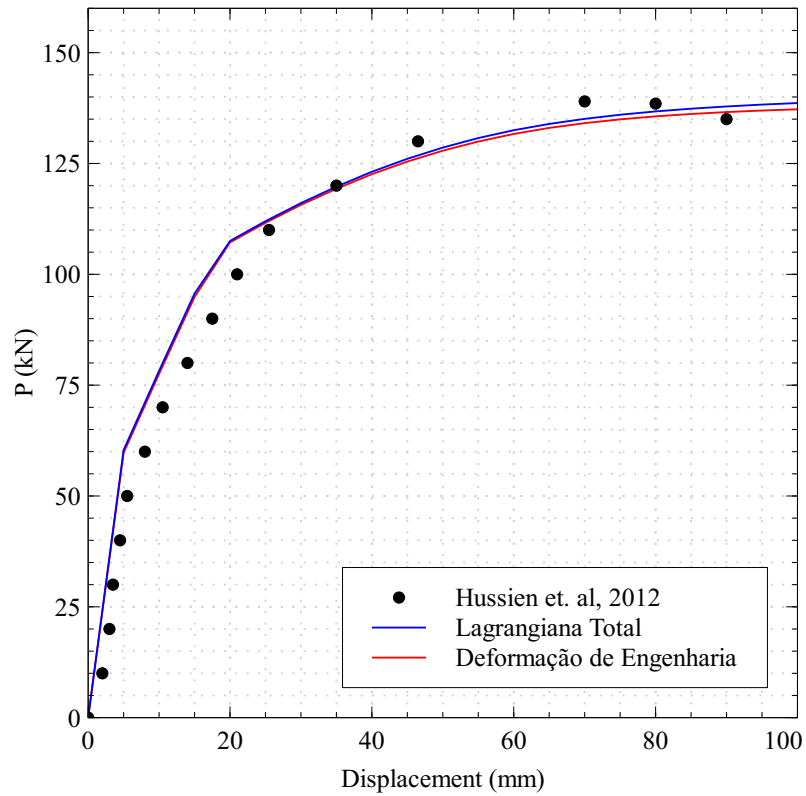
O resultado apresentado pelo modelo proposto neste trabalho foi comparado com o modelo proposto por Moreira *et al.* (2018), em que elemento de cabo de protensão é baseado na deformação de engenharia. Ambos os modelos foram discretizados com a mesma malha, utilizando as mesmas relações constitutivas e parâmetros de materiais e numéricos já citados. A malha de elementos finitos é discretizada em 6 elementos de pórtico plano e 6 segmentos de cabo para ambas as formulações.

A Figura 25 apresenta as curvas para o caminho de equilíbrio obtidas. É possível observar que ambos os resultados numéricos estão em excelente concordância com os resultados experimentais. Os resultados utilizando os dois modelos foram praticamente idênticos no início da curva carga-deslocamento. Quando há um aumento de deslocamento, a diferença entre os resultados passa a ser perceptível. A utilização de uma formulação Lagrangiana Total apresenta a vantagem de se obter expressões mais simples, em que as parcelas lineares e quadráticas podem ser facilmente visualizadas, diferente da formulação proposta por Moreira *et al.* (2018).

Estudos para a verificação da convergência do modelo em relação à discretização da malha de elementos finitos e do número de fatias necessárias para a integração na seção transversal foram realizados. Na Figura 26, são apresentadas as curvas carga-deslocamento obtidas para uma malha com 6, 10 e 18 elementos de pórtico plano e 6, 10 e 18 segmentos de cabo.

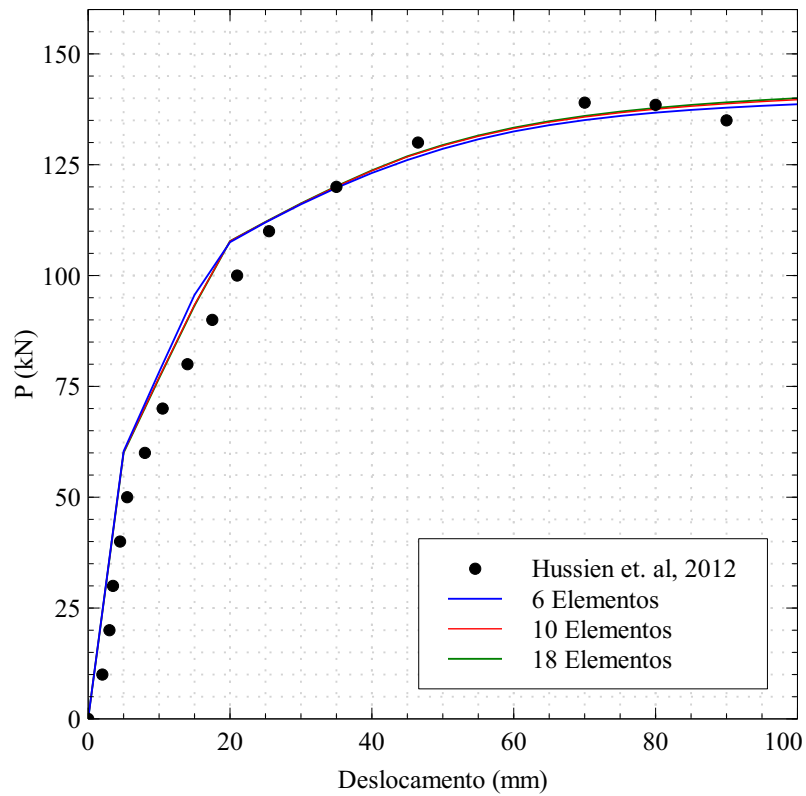
Para o estudo de convergência, o número de 20 fatias para a discretização da seção transversal foi mantido constante. Os demais parâmetros de materiais são os mesmos acima citados. A menor malha de elementos necessária para descrever o traçado do cabo e condições de apoio da viga é de 6 elementos. Posteriormente, os elementos do vão entre os apoios foram divididos ao meio, resultando em malhas de 10 e 18 elementos. A partir dos resultados, é possível observar que a malha com 6 elementos apresenta excelentes resultados. A discretização em 10 e 18 elementos apresentam resultados praticamente idênticos, mostrando que o modelo proposto não requer malhas muito refinadas para a obtenção de resultados adequados.

Figura 25 – Curva carga-deslocamento obtida para a Viga B7 - Comparação.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 26 – Estudo de convergência da malha - Viga B7.



Fonte: Elaborada pela autora.

Para o estudo de convergência da discretização da seção transversal utilizando o método das fatias, a seção transversal da viga foi discretizada em 10, 20, 30, 40 e 50 fatias. Os resultados desse estudo são apresentados na Tabela 5, onde são apresentados os valores da carga P para cada caso de discretização da seção transversal. Considerou-se que o valor de referência é aquele apresentado pelo fator de carga quando o número de fatias é igual a 50. Na Figura 27, é possível observar a convergência do resultado. Ao aumentarmos o número de fatias, o valor da carga P converge para o valor de referência. Ao utilizarmos 40 fatias, a diferença entre os resultados é praticamente imperceptível.

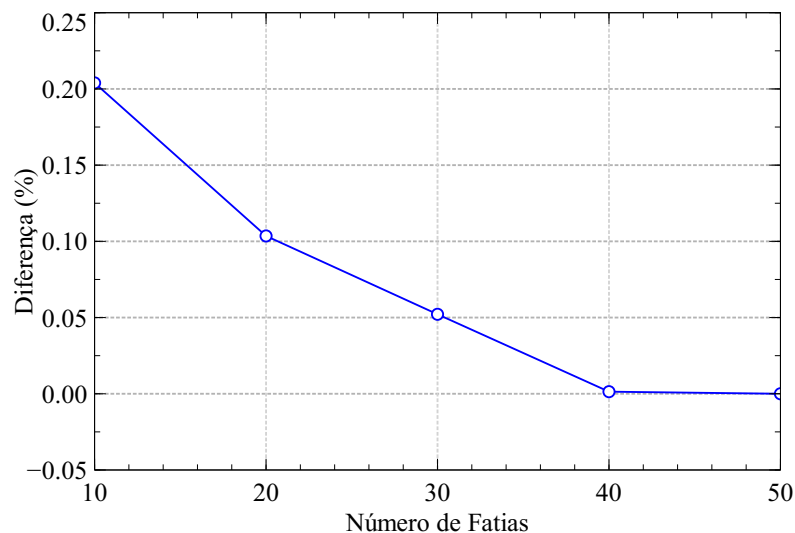
Tabela 5 – Convergência para o 20º passo para a viga B7.

Nº de Fatias	P (kN)	Diferença (%)
10	138.92	0.2040
20	138.49	0.1040
30	138.56	0.0522
40	138.64	0.0014
50	138.64	-

Fonte: Elaborada pela autora.

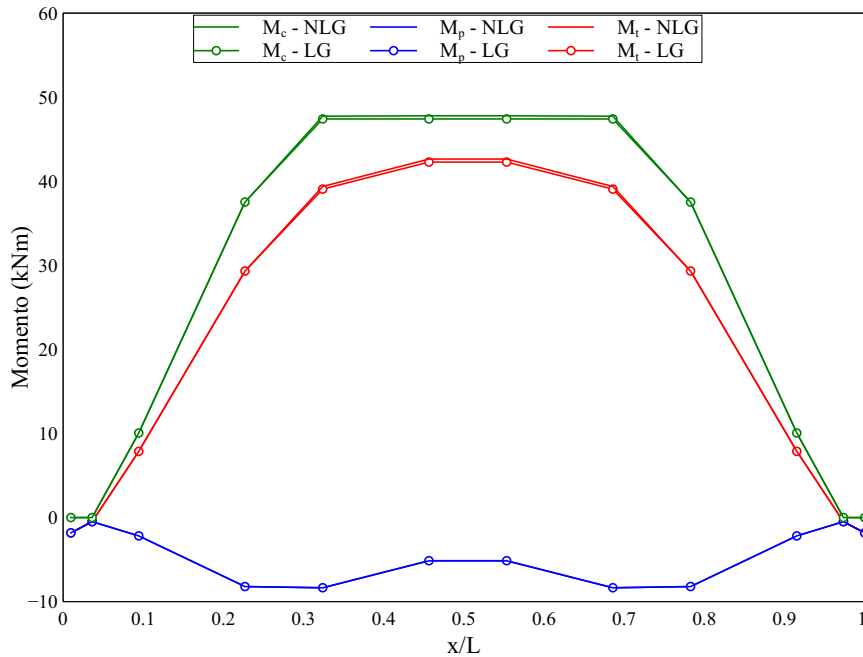
Na Figura 28, é apresentado o momento fletor para o último passo da análise. São apresentados os resultados para a análise linear e não linear geométrica, em que M_c , M_p e M_t correspondem às parcelas de momento fletor da viga (concreto e armadura passiva), do cabo não aderente e o momento total. Observa-se que os resultados são praticamente idênticos, enfatizando que, para vigas com protensão não aderente interna, a influência da parcela não linear geométrica é desprezível.

Figura 27 – Estudo de convergência da seção transversal- Viga B7.



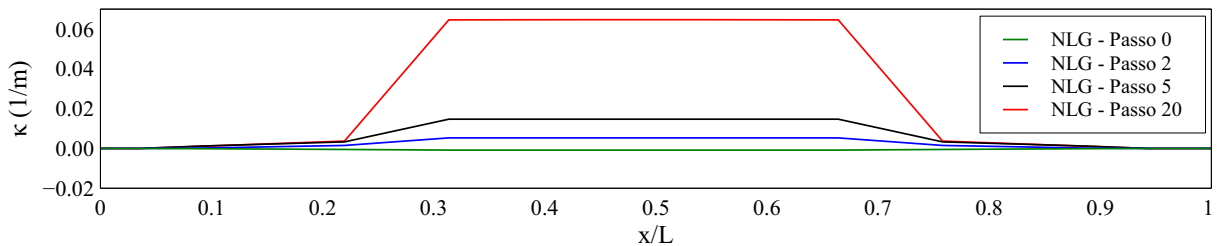
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 28 – Momento fletor - Viga B7.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 29 – Curvatura ao longo da viga B7.



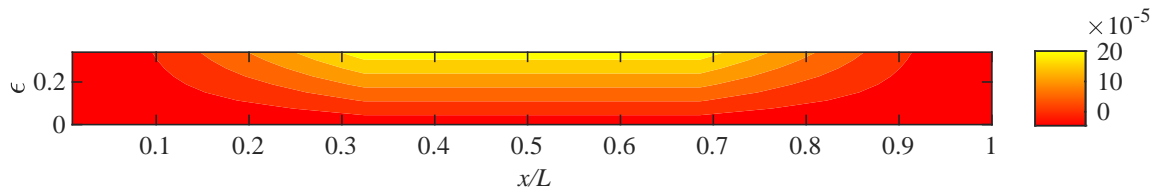
Fonte: Elaborada pela autora.

A Figura 29 apresenta a curvatura ao longo do comprimento normalizado da viga. Somente os resultados para a análise não linear geométrica são apresentados, uma vez que a diferença entre os resultados foram desprezíveis. Observa-se que valores máximos para a curvatura em cada passo apresentado é máxima na região central, entre os pontos de aplicação do carregamento externo, o que é esperado uma vez que trata-se de uma viga biapoiada. Outro ponto a ser observado é que os valores da curvatura aumentam ao longo aplicação do carregamento externo.

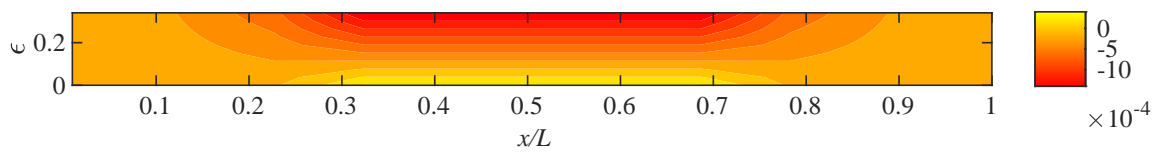
As deformações, ao longo do comprimento normalizado da viga, durante a fase de aplicação da protensão, são apresentadas na Figura 30a. Verifica-se que, nesta etapa, existem deformações de tração na face superior da viga. Após a aplicação da carga, a Figura 30b apresenta o estado de deformação da viga para o segundo passo do controle de deslocamento. É possível observar que houve uma inversão das deformações, ou seja, a face inferior da viga

Figura 30 – Deformação ao longo da viga B7.

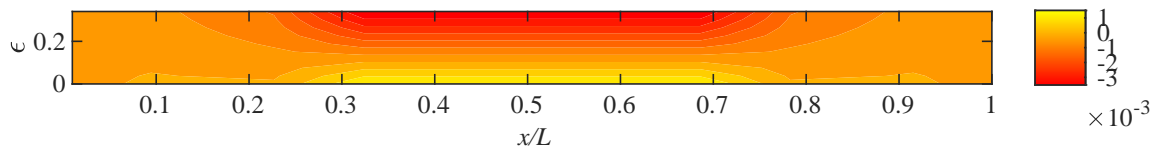
(a) Etapa de aplicação da protensão.



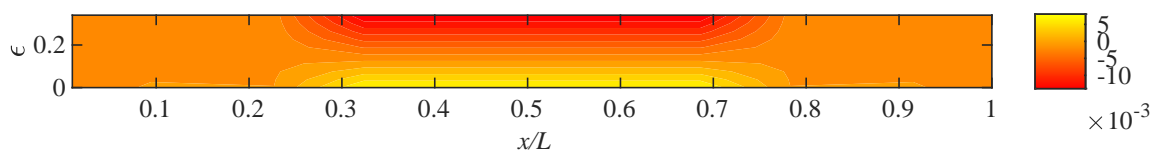
(b) Aplicação do carregamento externo - Passo 2.



(c) Aplicação do carregamento externo - Passo 5.



(d) Aplicação do carregamento externo - Passo 20.



Fonte: Elaborada pela autora.

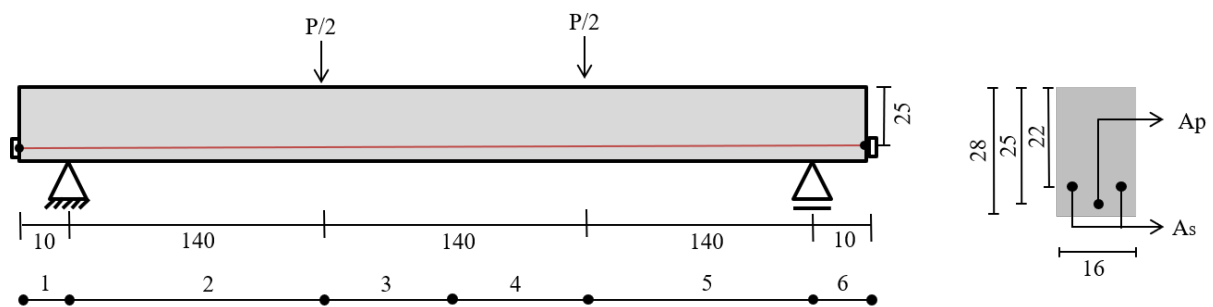
agora apresenta deformações de tração. Nesta fase há o início de fissuração da peça, em que as deformações de tração superam a deformação correspondente à resistência à tração do material.

Na Figura 30c, o concreto já atingiu a deformação última adotada no modelo. Este ponto pode ser considerado como a falha da viga. No entanto, o modelo continua a simular a estrutura atingindo valores de deformações acima da deformação última adotada. O último passo da análise estrutural apresenta um estado de deformação avançado e é mostrado na Figura 30d.

5.1.2 Viga com protensão não-aderente com cabo reto

Neste exemplo, uma viga protendida com cabo de traçado reto, foi ensaiada por Tao e Du (1985), identificada como viga A1. Trata-se de uma viga biapoada com 4.20 m de comprimento cuja seção transversal e posicionamento da armadura passiva e ativa são apresentadas na Figura 31. A resistência à compressão do concreto é de 30.6 MPa. As deformações de compressão correspondentes ao pico e à deformação última são de 2.021×10^{-3} e 4.0×10^{-3} , respectivamente.

Figura 31 – Viga A1 ensaiada por Tao e Du (1985) (unidades em cm).



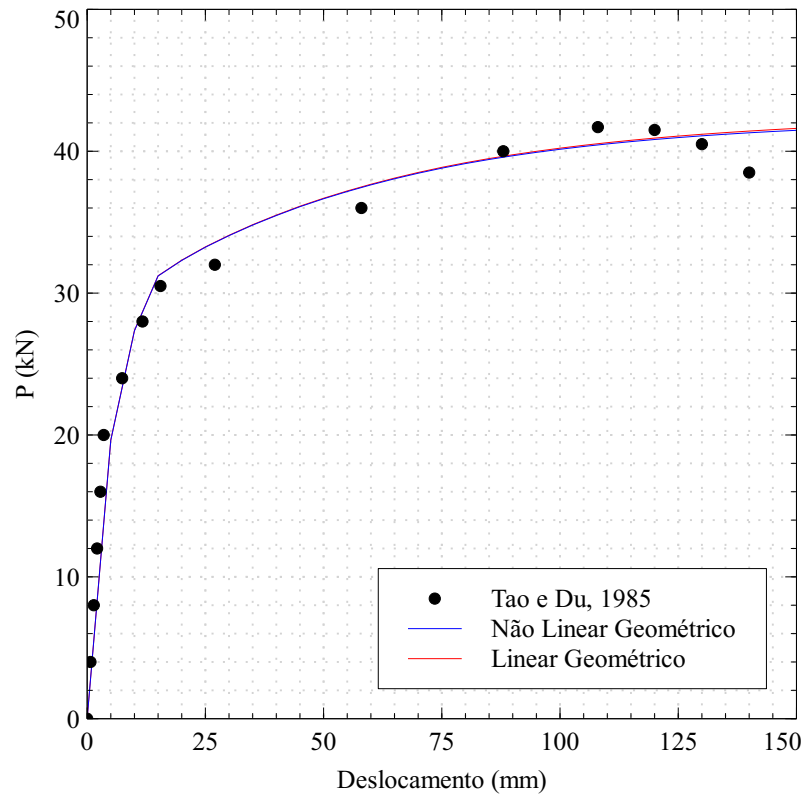
Fonte: Adaptado de Moreira *et al.* (2018)

Utilizou-se o modelo constitutivo bilinear para o aço passivo, em que a tensão de escoamento, o módulo de elasticidade e o módulo de encruamento são iguais a 267 MPa, 210 GPa e 1.2 GPa, respectivamente. A deformação última adotada é igual a 0.16. A viga apresenta uma camada de armadura passiva positiva de 1.57 cm^2 de área.

O cabo de protensão apresenta uma área de 0.588 cm^2 , cuja tensão após as perdas imediatas é de 960 MPa. Suas propriedades consistem em módulo de elasticidade, tensão de escoamento e tensão última iguais a 205 GPa, 1465 MPa e 1790 MPa, respectivamente. Adotou-se uma deformação última de 0.06. Para simular o comportamento do aço de protensão, os valores dos coeficientes K , Q e R , para utilizar o modelo proposto por Menegoto e Pinto (1973), são: 1.04, 0.02472 e 4.6019, respectivamente.

Neste exemplo, utilizou-se uma discretização longitudinal de 6 elementos de viga e 6 segmentos de cabo. A seção transversal foi discretizada em 20 fatias. Utilizou-se o controle de deslocamento para o deslocamento vertical do nó central da viga, cujo incremento de deslocamento foi de 5mm em 30 incrementos. A tolerância para a convergência adotada neste exemplo foi de 10^{-6} .

Figura 32 – Curva carga-deslocamento obtida para a Viga A1.



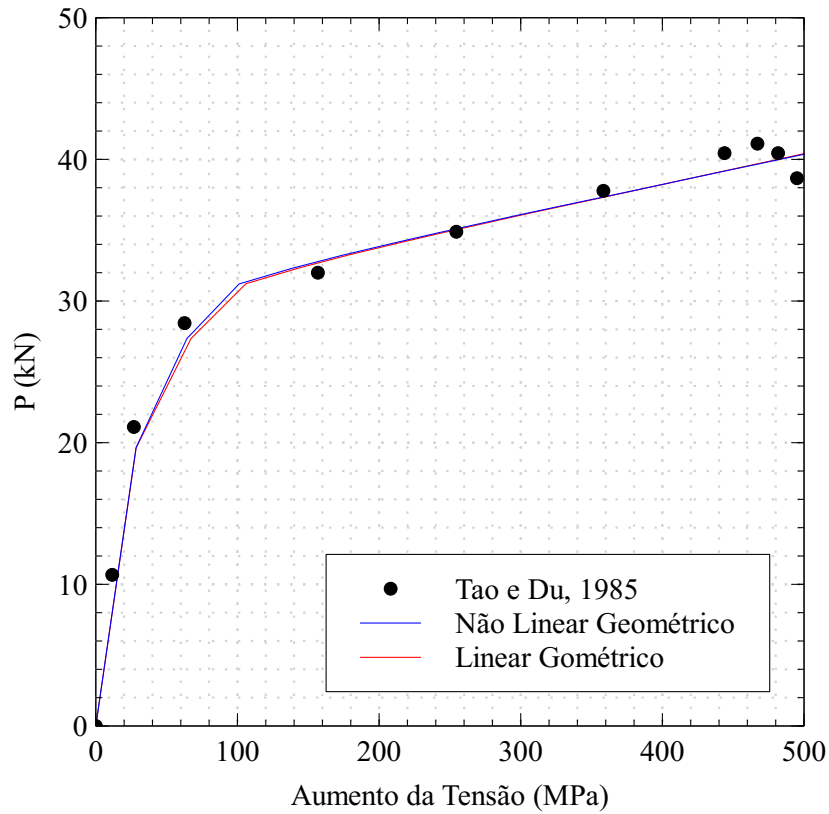
Fonte: Elaborada pela autora.

A partir da curva apresentada pelo caminho de equilíbrio da viga, na Figura 32, observamos que as conclusões são semelhantes às do exemplo anterior. Os resultados apresentam uma excelente concordância com os dados experimentais obtidos por Tao e Du (1985). Ainda, a diferença entre os resultados obtidos para uma análise linear e não linear geométrica é desprezível.

Na Figura 33, é apresentado o aumento da tensão no cabo de protensão ao longo do ensaio virtual. Observa-se que os resultados numéricos representam bem o resultado experimental. Ainda, os efeitos da não linearidade geométrica, como esperado, são desprezíveis.

Na Tabela 6 e na Tabela 7, são apresentados os resultados numéricos para a fase de aplicação de protensão e para o último passo da análise realizada. Verifica-se que o modelo apresenta excelentes resultados e uma taxa quadrática de convergência para a análise linear e não linear, enfatizando a consistência e robustez do modelo. Ainda, verifica-se que os valores numéricos para a deformação inicial ε_{p0} e para o fator de carga P são praticamente idênticos em uma análise para grandes e pequenos deslocamentos, enfatizando que, para vigas com protensão interna não aderente, a consideração da não linearidade geométrica apresenta um efeito desprezível.

Figura 33 – Aumento na tensão do cabo obtida para a Viga A1.



Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 6 – Convergência para a fase de aplicação da protensão - viga A1.

Iter	Não Linear Geométrico		Linear Geométrico	
	ϵ_{p0}	Erro	ϵ_{p0}	Erro
1	0.00E+00	1.00E+00	0.00E+00	1.00E+00
2	4.76E-03	2.36E-02	4.76E-03	2.36E-02
3	4.89E-03	1.88E-04	4.89E-03	1.89E-04
4	4.89E-03	9.54E-09	4.89E-03	1.31E-08

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 7 – Convergência para o 30º passo para a viga A1.

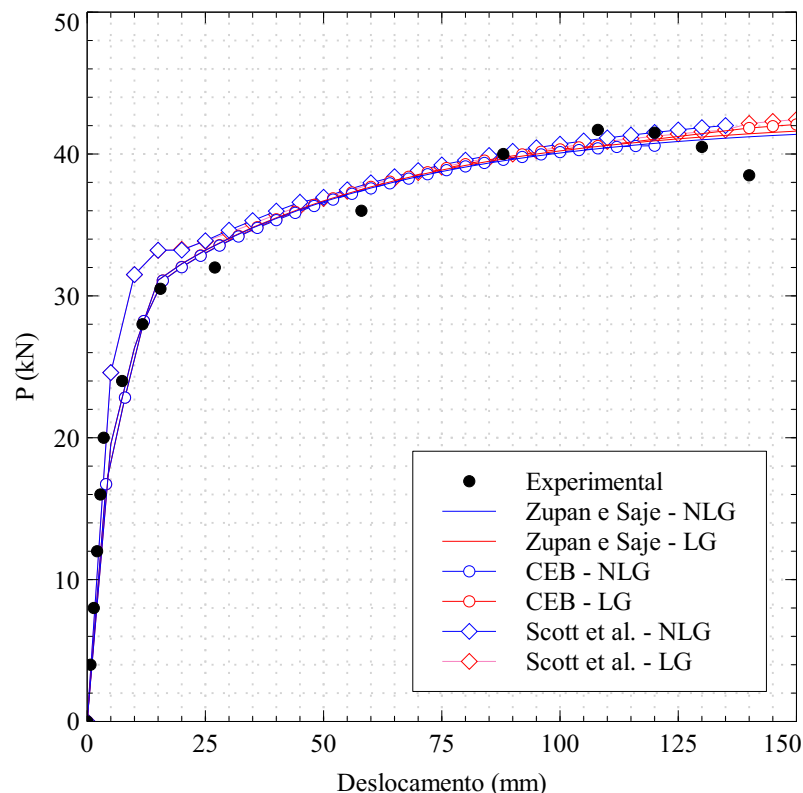
Iter	Não linear Geométrico		Linear Geométrico	
	P (kN)	Erro	P (kN)	Erro
1	40.42451	1.22E-04	40.42119	1.25E-05
2	40.42447	1.77E-06	40.42119	9.39E-09
3	40.42446	3.37E-09	-	-

Fonte: Elaborada pela autora.

Muitos modelos podem ser encontrados na literatura com o objetivo de simular o comportamento do concreto quando submetido à tração e compressão, como apresentado na Seção 3.3. Na Figura 34 e Figura 35 são apresentados a curva carga-deslocamento e o aumento da tensão no cabo para três modelos uniaxiais para o concreto, o modelo proposto por Zupan e Saje (2005), o modelo proposto pelo CEB e o modelo proposto por Scott *et al.* (1982). Os mesmos parâmetros já apresentados acima foram utilizados. É possível observar que, apesar de se tratarem de diferentes modelos, as respostas apresentam bons resultados quando comparados com os resultados experimentais. A utilização do modelo proposto por Scott *et al.* (1982) apresentou a maior diferença. Este comportamento pode ser justificado pelo fato de que este modelo é considera o efeito do confinamento do concreto, devido à armadura transversal. Em Tao e Du (1985) não existem dados acerca da armadura transversal e a ausência dos parâmetros da armadura transversal pode ter gerado a disparidade entre os resultados.

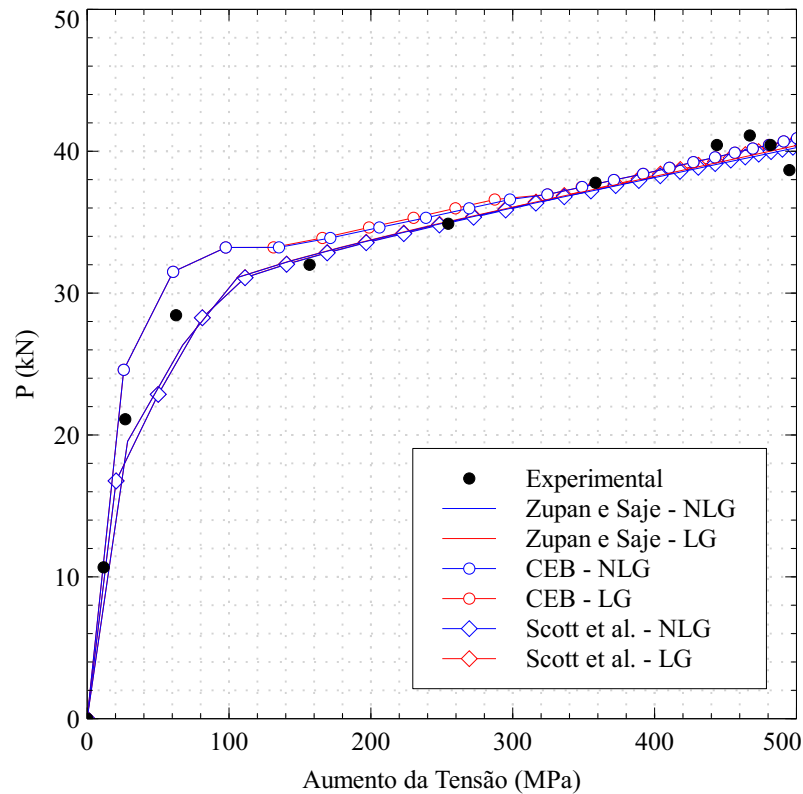
Na Figura 36 é apresentada a curvatura ao longo do comprimento normalizado da viga para vários passos do carregamento para uma análise geometricamente não linear. Novamente, pode-se observar que a curvatura máxima encontra-se na região central de viga e seus valores mínimos próximos aos apoios (viga biapoiada).

Figura 34 – Curva carga-deslocamento obtida para a Viga A1.



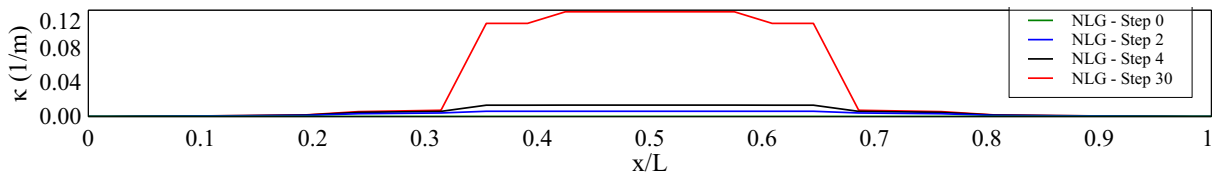
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 35 – Aumento na tensão no cabo - Viga A1.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 36 – Curvatura - Viga A1.



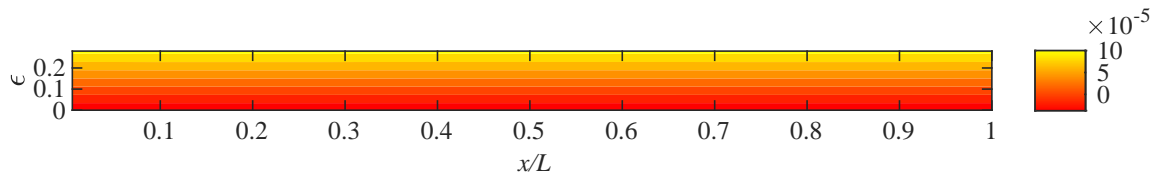
Fonte: Elaborada pela autora.

Na Figura 37, são apresentadas as deformações ao longo da viga. Para a fase de aplicação de protensão (Figura 37a), é possível observar que as deformações apresentam-se uniformes ao longo da viga, isto ocorre pois o traçado do cabo é reto. Na Figura 37b, apresenta-se o ponto da análise em que se inicia a fissuração do concreto (i.e. o concreto atinge a resistência à tração), enquanto que na Figura 37c o concreto atinge a sua deformação última. Finalmente, na Figura 37d são apresentadas as deformações para o último passo da análise.

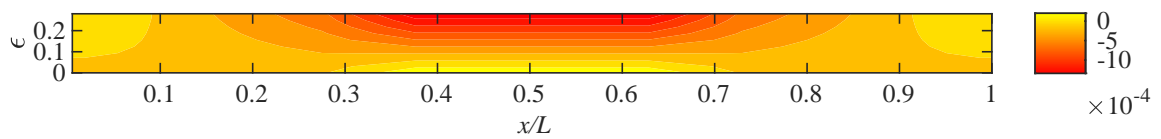
Na Figura 38 são apresentadas as parcelas de momento fletor para a viga, para o cabo não aderente e o momento total. Observa-se que o momento gerado pelo cabo de protensão, para a análise linear geométrica, apresenta a mesma forma do traçado do cabo. Isto ocorre pois o cálculo do momento é feito a partir da geometria inicial da estrutura. Para a análise não linear geométrica, a deformação da viga ocasiona alterações na excentricidade do cabo.

Figura 37 – Deformação ao longo da viga A1.

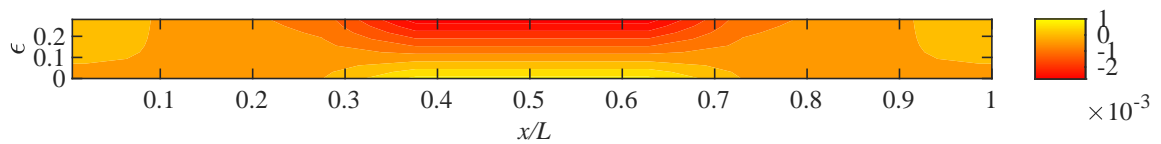
(a) Etapa de aplicação da protensão.



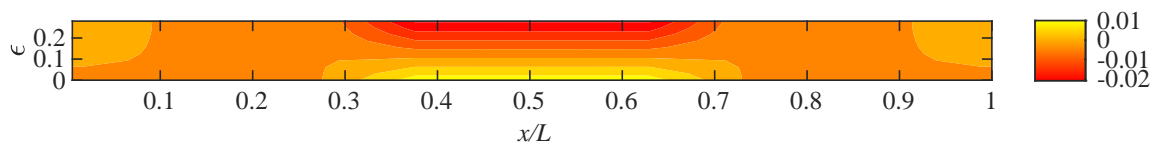
(b) Aplicação do carregamento externo - Passo 2.



(c) Aplicação do carregamento externo - Passo 4.



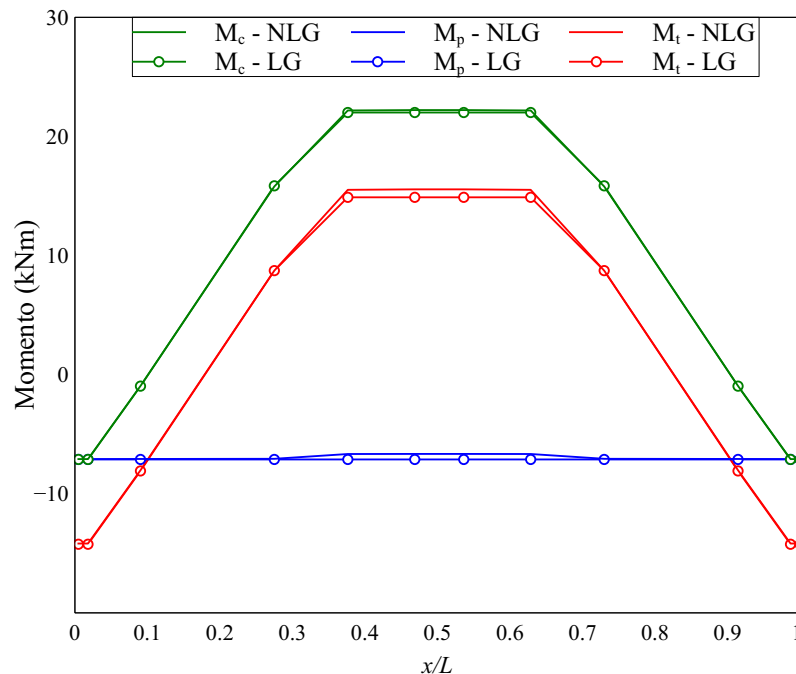
(d) Aplicação do carregamento externo - Passo 30.



Fonte: Elaborada pela autora.

No entanto, para vigas com protensão externa, os efeitos da não linearidade geométrica são pequenos, podendo ser desprezados.

Figura 38 – Componentes do momento fletor - Viga A1.

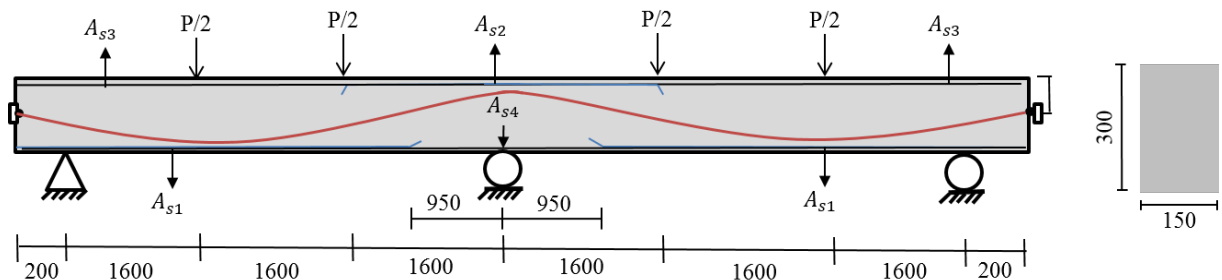


Fonte: Elaborada pela autora.

5.1.3 Viga contínua com protensão não-aderente com cabo curvo

Partindo para um exemplo mais complexo, utilizamos 5 vigas contínuas, de comprimento total igual a 10 m, previamente estudadas por Lou *et al.* (2013b), cuja geometria e seção transversal são apresentadas na Figura 39. Alguns parâmetros para o concreto são apresentados na Tabela 8, em que utilizou-se o modelo proposto por Scott *et al.* (1982) para o concreto sob compressão e o modelo proposto por Hernández-Montes *et al.* (STRAMANDINOLI *et al.*, 2013) para o concreto sob tração.

Figura 39 – Viga contínua com protensão não-aderente Lou *et al.* (2013b) (unidades em mm).



Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 8 – Parâmetros para o modelo de concreto.

Viga	f_c	ϵ_{cu}	Q_s	h	f_{ct}	ρ
YLA1	34.9	0.01764	0.01263	262	1.5	0.010
YLA2	36.7	0.01764	0.01263	262	0.8	0.005
YLB2	33.0	0.01727	0.01229	266	1.0	0.013
YLC1	37.1	0.01708	0.01211	268	0.8	0.017
YLC2	33.2	0.01708	0.01211	268	0.6	0.017

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 9 – Parâmetros do aço e tensão inicial de protensão.

Viga	A_{s1} (cm^2)	A_{s2} (cm^2)	A_{s3} (cm^2)	A_{s4} (cm^2)	f_{pe} (MPa)
YLA1	4 ϕ 12	2 ϕ 12	2 ϕ 12	2 ϕ 12	1083
YLA2	4 ϕ 12	2 ϕ 12	2 ϕ 12	2 ϕ 12	1196
YLB2	4 ϕ 16	2 ϕ 18	2 ϕ 12	3 ϕ 16	1193
YLC1	3 ϕ 18	3 ϕ 18	2 ϕ 12	3 ϕ 18	1169
YLC2	3 ϕ 18	3 ϕ 18	2 ϕ 12	3 ϕ 18	1205

Fonte: Elaborada pela autora.

Para a armadura passiva, as áreas de aço para cada viga analisada são apresentadas na Tabela 9. A tensão de escoamento das barras de reforço é de 361 MPa, seu módulo de elasticidade igual a 200 GPa e a deformação última corresponde a 0.3.

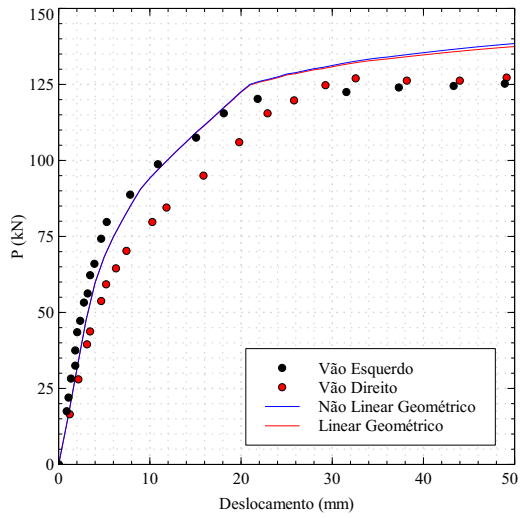
Para a armadura ativa, a área total de aço de protensão é igual a 1.4 cm^2 , apresentando tensão de escoamento e módulo de elasticidade iguais a 1941 MPa e 205 GPa, respectivamente. A tensão inicial no cabo após as perdas imediatas de protensão para cada viga é apresentada na Tabela 9.

Para este exemplo, utilizou-se a simetria do problema, isto é, somente metade da viga foi modelada. Para isto, utilizou-se uma discretização de 16 elementos ao longo do eixo longitudinal da viga. Sua seção transversal foi discretizada em 15 fatias. Para isso, utilizaram-se 55 incrementos de 1 mm aplicados ao nó central da viga.

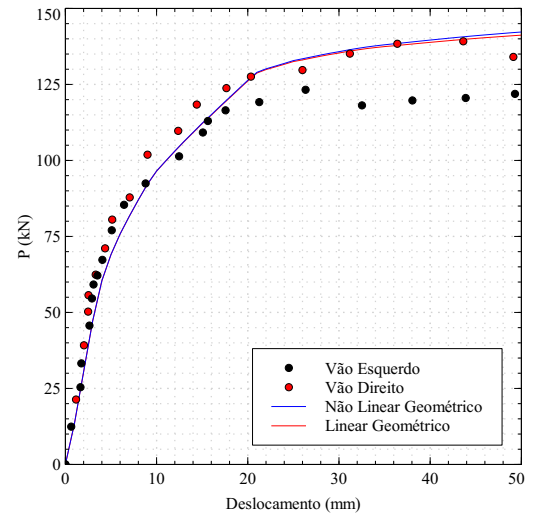
Na Figura 40, são apresentadas as curvas carga-deslocamento obtidas para as cinco vigas. É possível observar que obtiveram-se excelentes resultados numéricos quando comparados com os resultados experimentais. Ainda, observa-se que, apesar da simetria da viga, existem disparidades entre os resultados experimentais para o vão esquerdo e direito. Este comportamento pode ser justificado, uma vez que o concreto, na prática, apresenta heterogeneidades do seu material, além de possíveis erros de leitura, efeito do atrito, caso a protensão tenha sido realizada por uma das extremidades da viga, entre outros.

Figura 40 – Curvas carga-deslocamento - Exemplo 3.

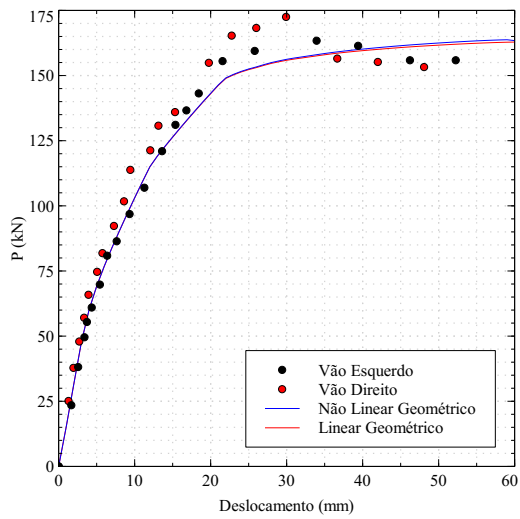
(a) Viga YLA1.



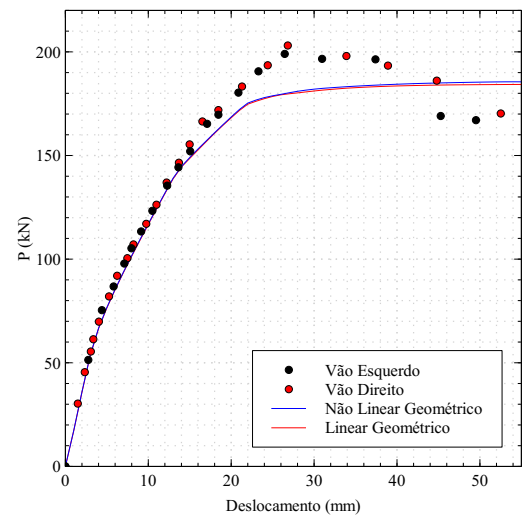
(b) Viga YLA2.



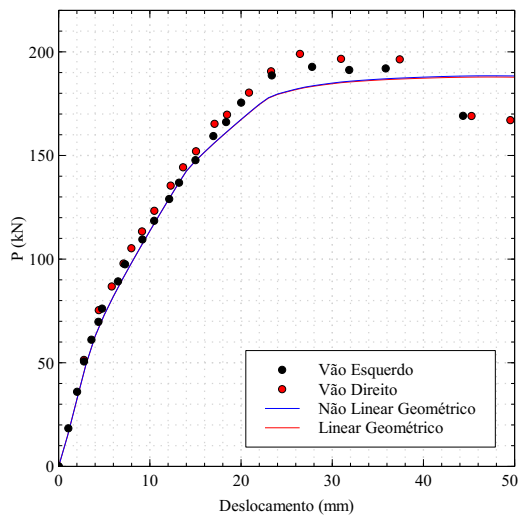
(c) Viga YLB2.



(d) Viga YLC1.



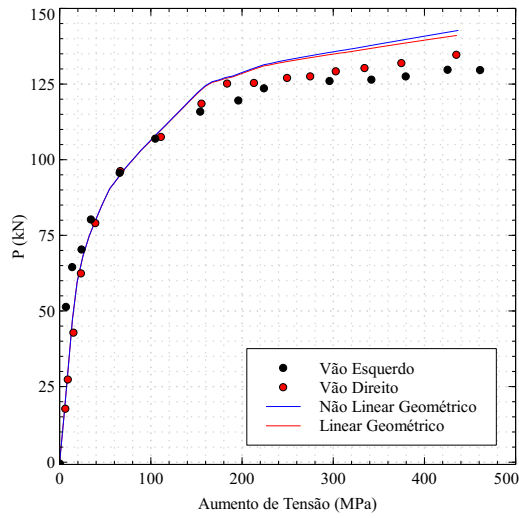
(e) Viga YLC2.



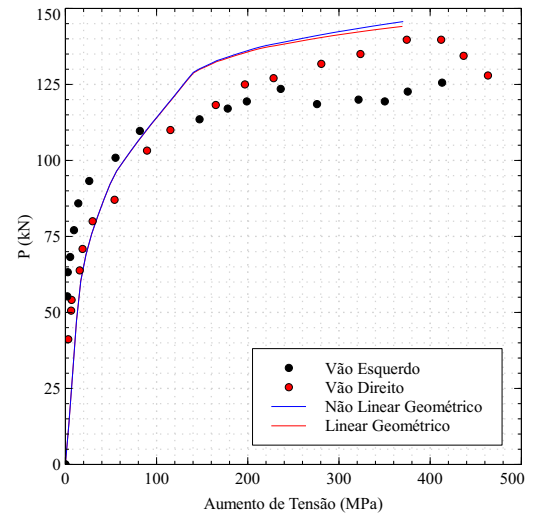
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 41 – Curvas de aumento de tensão no cabo.

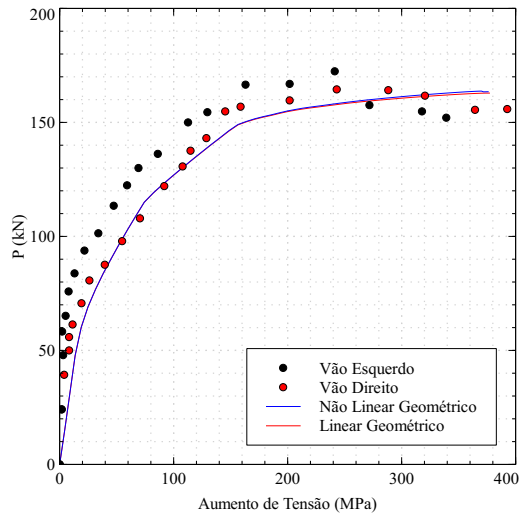
(a) Viga YLA1.



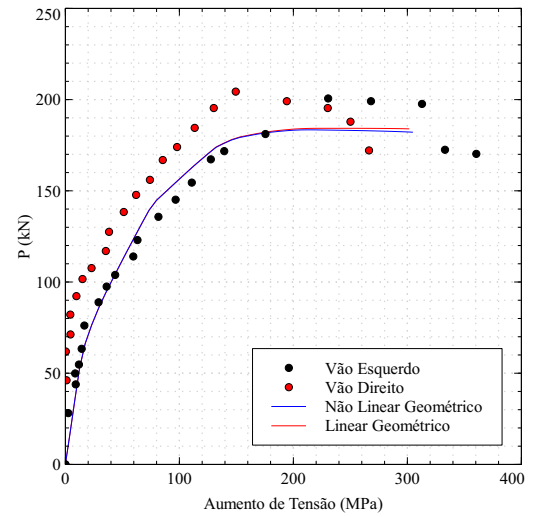
(b) Viga YLA2.



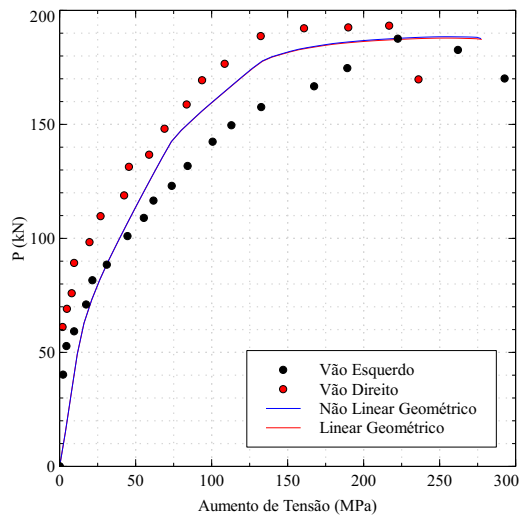
(c) Viga YLB2.



(d) Viga YLC1.



(e) Viga YLC2.



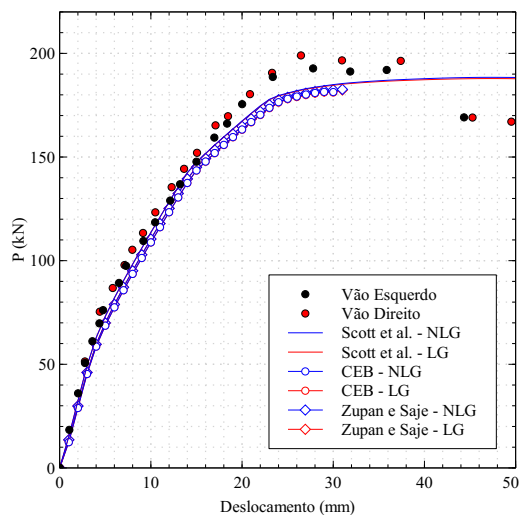
Fonte: Elaborada pela autora.

Na Figura 41, são apresentados o aumento na tensão no cabo não aderente. Observa-se que, no início da curva, o modelo superestima a tensão no cabo, isto pode ocorrer pelo fato de o modelo desconsiderar o atrito e este efeito ser maior no início do carregamento. No entanto, o modelo é capaz de simular o aumento na tensão do cabo de forma muito satisfatória, quando comparado com os dados experimentais.

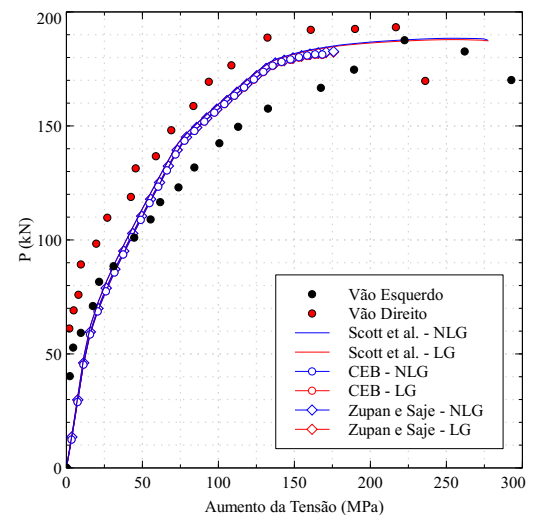
É importante notar que, para a curva carga-deslocamento e para a curva de aumento de tensão no cabo, o efeito da não linearidade geométrica mais uma vez é desprezível. Enfatizando que, mesmo para casos mais complexos, o efeito da não linearidade geométrica pode ser desprezado, sendo o comportamento não linear físico responsável por simular o comportamento da viga.

Figura 42 – Resultados para a viga YLC2 utilizando diferentes modelos para o concreto.

(a) Curvas carga-deslocamento.



(b) Aumento da tensão no cabo.



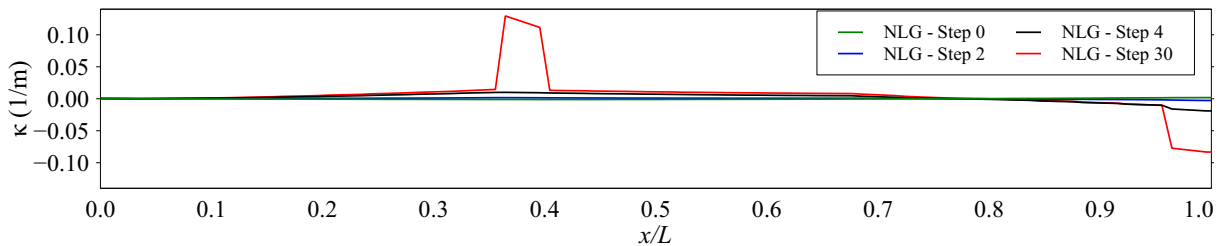
Fonte: Elaborada pela autora.

Apresenta-se um estudo realizado com a Viga YLC2 com o objetivo de se analisar a influência da curva de tensão-deformação para o concreto utilizada. A viga YLC2 foi analisada utilizando os modelos do CEB e o modelo de Zupan e Saje (2005), além do modelo proposto por Scott *et al.* (1982), apresentado previamente. Na Figura 42, são apresentadas as curvas carga-deslocamento e a curva de aumento da tensão no cabo para os três modelos utilizados. É possível observar que os modelos propostos pelo CEB e por Zupan e Saje não foram capazes de representar a curva carga-deslocamento completa, porém, ambas representam muito bem o comportamento da viga até o deslocamento de 30 mm. O modelo proposto por Scott *et al.* (1982) apresentou o melhor resultado, e isto possivelmente se deve à consideração do efeito do

confinamento do concreto devido à armadura transversal da viga, fazendo, neste exemplo, um importante papel.

A Figura 43 apresenta a curvatura ao longo da viga para o passo de aplicação da protensão e três passos de aplicação do carregamento externo. Observam-se que os valores máximos de curvatura negativa ocorrem no apoio direito (engaste) e de curvatura positiva no ponto de aplicação de uma das cargas externas.

Figura 43 – Curvatura - Viga YLC2.

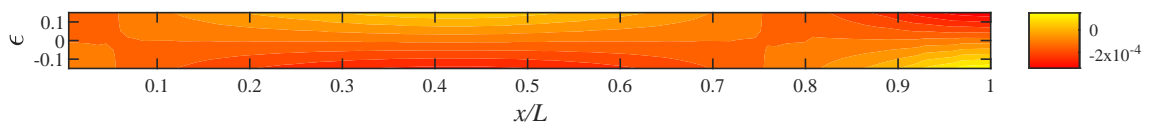


Fonte: Elaborada pela autora.

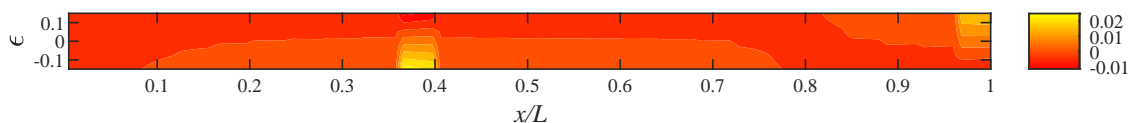
A Figura 44 apresenta as deformações ao longo do comprimento normalizado da viga para o passo de aplicação da protensão e para o último passo de aplicação do carregamento externo. Observa-se que o comportamento das deformações apresenta-se mais complexo, uma vez que o traçado do cabo é curvo. Ainda, o valor das deformações máximas indicam os pontos de formação das rótulas plásticas.

Figura 44 – Deformações - Viga YLC2.

(a) Etapa de aplicação da protensão.



(b) Aplicação do carregamento externo - Passo 42.



Fonte: Elaborada pela autora.

5.1.4 Viga com protensão externa

Um estudo experimental com o objetivo de avaliar o comportamento de vigas com protensão externa não aderente foi realizado por Khairallah (1997). Posteriormente, Harajli *et al.* (1999) realizou uma série de análises não lineares analíticas de 12 vigas de concreto armado com protensão externa cujos resultados apresentaram uma boa correspondência com resultados experimentais presentes na literatura. As vigas de seção T, identificadas como T1S, T1D e T2D, sem desviador, um e dois desviadores, respectivamente, são apresentadas na Figura 45.

Alguns parâmetros necessários para o aço passivo, de protensão e concreto são apresentados na Tabela 10. A curva de tensão-deformação proposta por Scott *et al.* (1982) é utilizada para simular o comportamento do concreto na compressão e o modelo proposto por Hernández-Montes *et al.* (STRAMANDINOLI *et al.*, 2013) foi utilizado para simular o comportamento à tração.

Tabela 10 – Parâmetros dos materiais - Vigas com protensão externa.

Viga	A_s (cm^2)	f_y (MPa)	A_p (cm^2)	f_p (MPa)	f_{pu} (MPa)	f_c (MPa)
T1S	2.26	612.7	0.77	788	1427	39.6
T1D	2.26	600.9	0.77	792	1427	40.8
T2D	3.40	615.3	0.39	931	1607	43.5

Fonte: Elaborada pela autora.

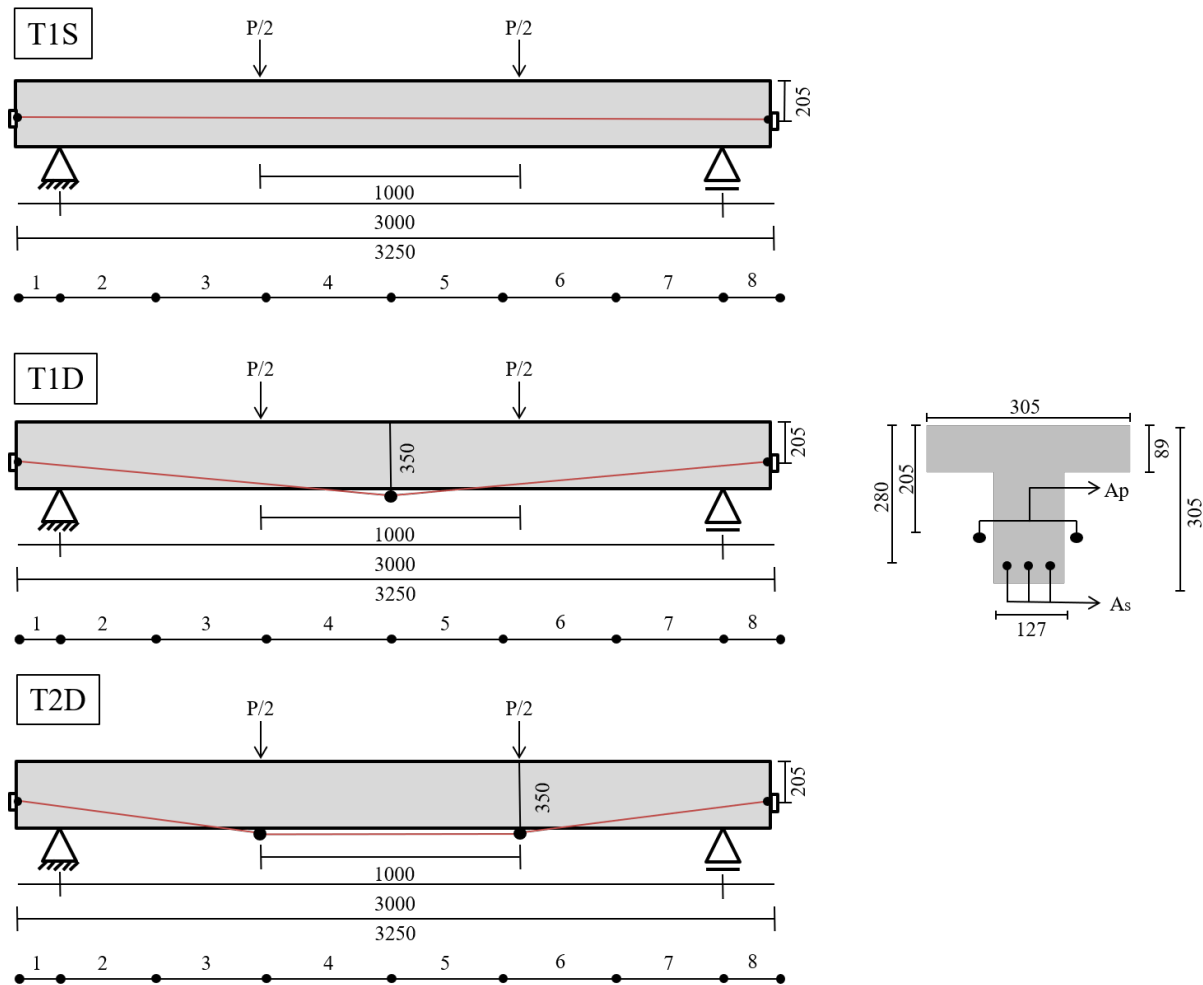
Para simular o comportamento do aço passivo, utilizou-se uma relação tensão-deformação bilinear para tração e compressão. O módulo de elasticidade do aço é de 200 GPa e adotou-se um módulo de encruamento do aço equivalente 1.5% do módulo de elasticidade (HARAJLI *et al.*, 1999). Para a deformação última do aço, considerou-se o valor de 0.15.

Os parâmetros para simular o aço de protensão não-aderente (HARAJLI *et al.*, 1999) são os necessários para a utilização da curva proposta por Menegoto e Pinto (1973), cujos parâmetros K , Q , e R são, respectivamente, 1.0618, 0.01174, e 7.344. A tensão de escoamento do aço de protensão é de 1.585 GPa, o módulo de elasticidade 193 GPa e a tensão última 1427 MPa.

Para simular o comportamento das vigas, utilizaram-se 8 elementos de pórtico plano e 1 elemento de cabo com 1, 2 e 3 segmentos de cabo para as vigas T1S, T1D e T2D, respectivamente. A discretização da seção da viga utilizou 15 fatias e o Método do Controle de Deslocamento foi aplicado utilizando incrementos de 1mm ao nó central da viga. A tolerância

para de convergência adotada foi de 10^{-6} .

Figura 45 – Vigas T analisadas (unidades em mm).



Fonte: Elaborada pela autora.

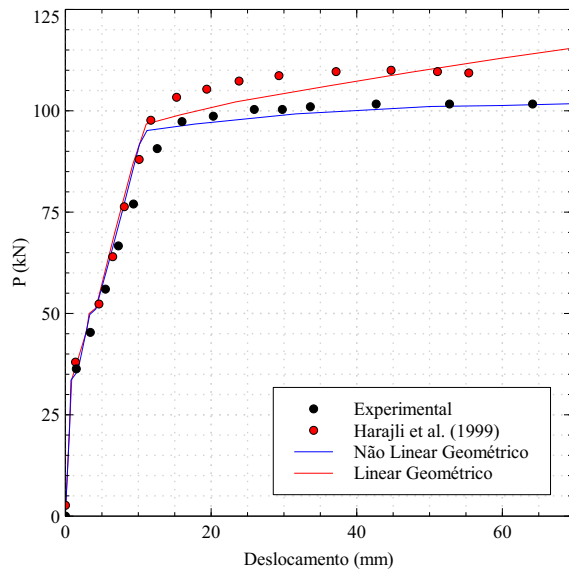
Na Figura 46 são plotadas as curvas carga-deslocamento obtidas para as vigas. Primeiramente, observam-se que os resultados obtidos apresentam excelente concordância com os resultados experimentais de referência. Ainda, os resultados obtidos numericamente são consideravelmente melhores do que os resultados analíticos obtidos por Harajli *et al.* (1999), tanto mais próximos dos resultados experimentais quanto no traçado mais completo do caminho de equilíbrio.

A partir da Figura 46 também é possível observar a influência da presença do desviador do traçado do cabo em relação ao efeito da não linearidade geométrica. Para a viga T1S, o efeito da desconsideração do termo não linear de deformação deslocamento é bastante expressivo, o que não ocorre com as demais vigas. Este comportamento ocorre, pois, na ausência do desviador, a deformação do cabo de protensão não acompanha a deformação da viga, somente

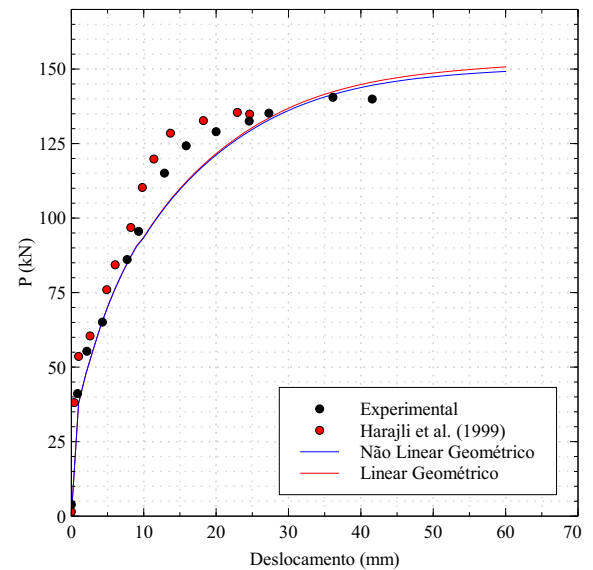
nos pontos extremos de ancoragem. Para o caso da viga com um desviador, a deformação do cabo acompanha a deformação da viga, além dos pontos de ancoragem, também no ponto de localização do desviador. Desta forma, espera-se que, com o aumento do número de desviadores, os efeitos de segunda ordem tendem a diminuir.

Figura 46 – Curvas carga-deslocamento - Vigas T.

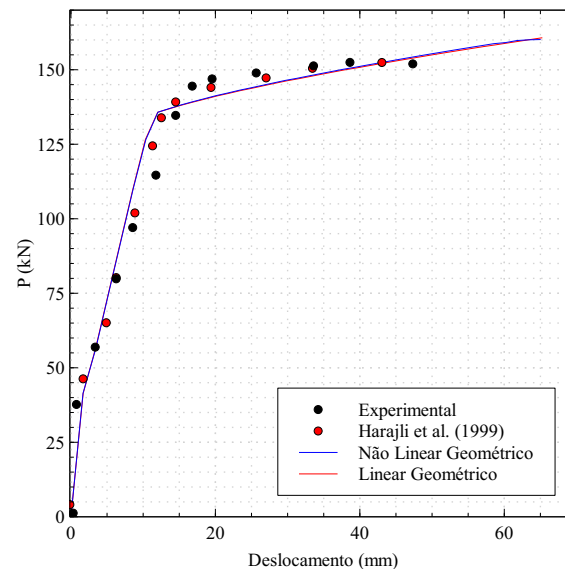
(a) Viga T1S



(b) Viga T1D



(c) Viga T2D



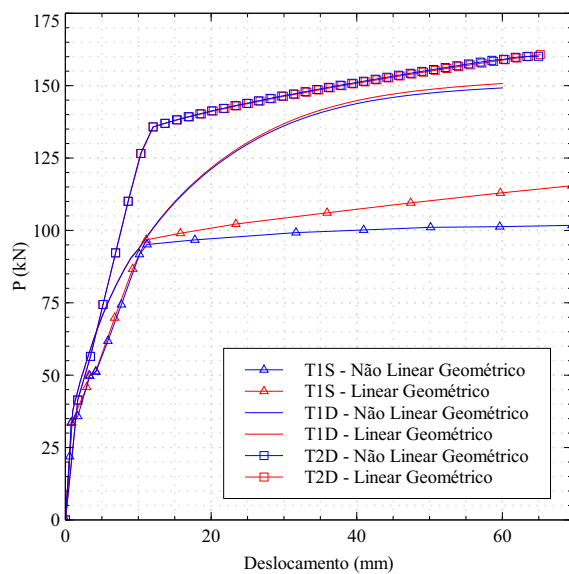
Fonte: Elaborada pela autora.

Na Figura 47a, são apresentadas as curvas carga-deslocamento para as três vigas analisadas. A partir desta comparação, fica evidente a relação entre a não linearidade geométrica e o número de desviadores. O aumento do número de desviadores aumenta a capacidade de

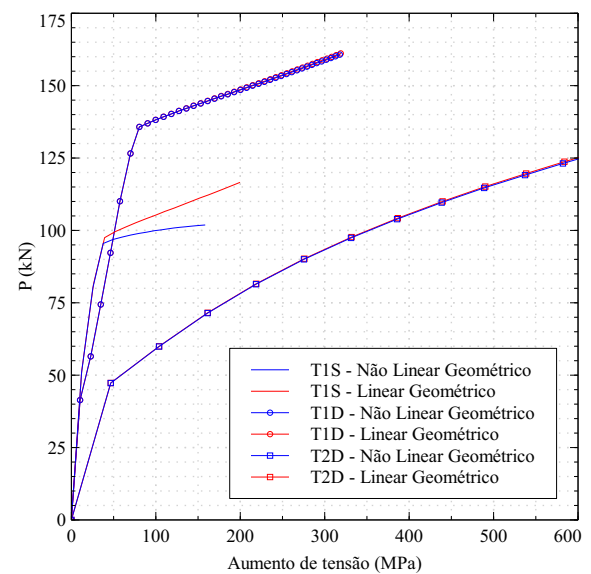
carga da viga ao passo que os efeitos da não linearidade geométrica diminuem. Para vigas com protensão não aderente, cada segmento interno de cabo pode ser interpretado como um desviador, por consequência, diminuindo os efeitos da não linearidade geométrica, uma vez que a viga apresenta pequenos deslocamentos e os nós dos segmentos associados seguem o deslocamento da viga. O aumento da tensão no cabo é apresentado na Figura 47b.

Figura 47 – Comparação dos resultados para as vigas T.

(a) Curvas carga-deslocamento.



(b) Curvas de aumento de tensão.



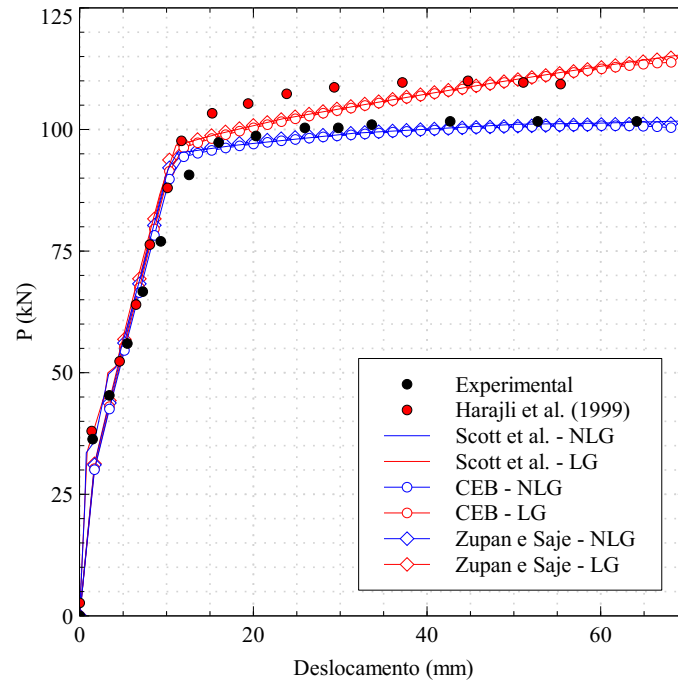
Fonte: Elaborada pela autora.

A Figura 48 apresenta as curvas carga-deslocamento obtidas para a viga T1S quando utilizadas as curvas de tensão-deformação do concreto propostas por Scott *et al.* (1982), Código CEB e por Zupan e Saje (2005). Os resultados para as três curvas apresentaram diferenças desprezíveis, tanto para uma análise não linear geométrica quanto para uma análise linear geométrica. Ademais, apresentou excelentes resultados em relação aos resultados experimentais e analíticos (HARAJLI *et al.*, 1999).

Da Figura 49 até 51 são apresentadas as deformações ao longo da viga para as vigas T analisadas para o instante após a aplicação da protensão e para o último passo de aplicação do carregamento externo. Pode-se observar que, para o estado de deformação na fase de aplicação da protensão, a distribuição das deformações, uniforme para a viga T1S, passam a ser mais complexas para as vigas T1D e T2D com o aumento do número de desviadores. Também é possível observar a predominância de deformações de tensão na face superior das vigas, como esperado. Durante a fase de aplicação do carregamento externo, a distribuição de deformação

é similar entre as vigas. Os valores máximos das deformações de compressão e tração têm a mesma ordem de grandeza e localizados no centro do vão, isto é esperado, uma vez que as vigas são biapoiadas.

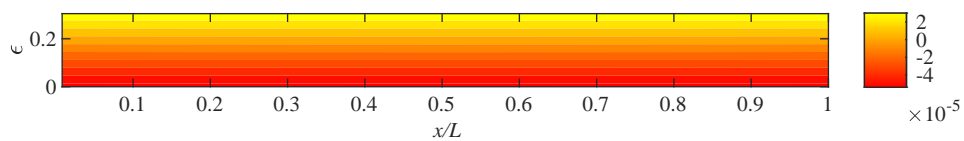
Figura 48 – Curvas carga-deslocamento.



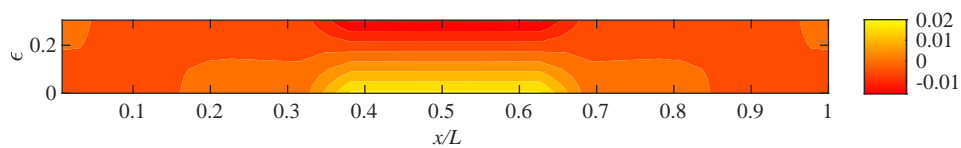
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 49 – Deformações na viga T1S.

(a) Após a aplicação da protensão.



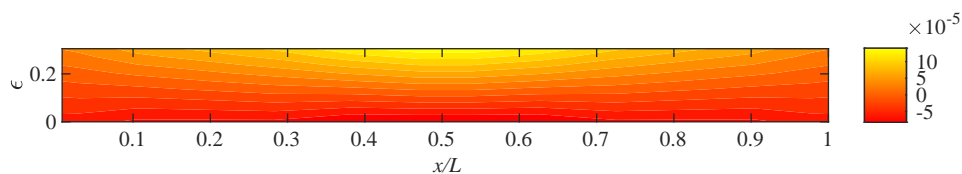
(b) Aplicação do carregamento externo - Passo 40.



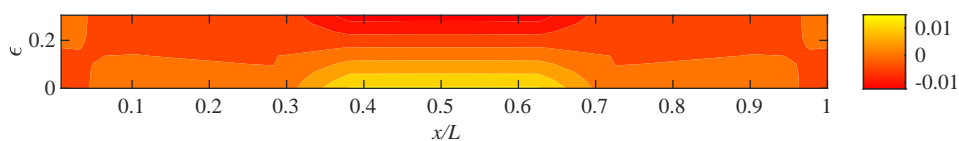
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 50 – Deformações na viga T1D.

(a) Após a aplicação da protensão.



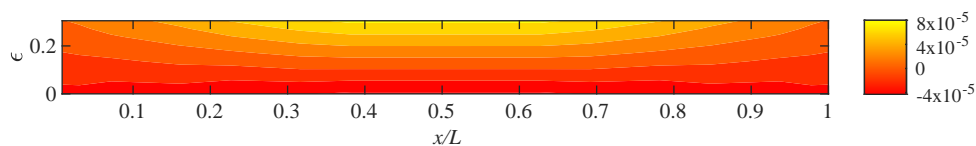
(b) Aplicação do carregamento externo - Passo 40.



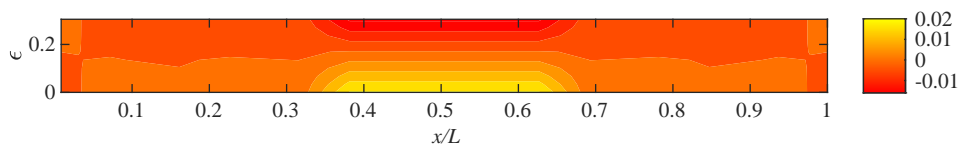
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 51 – Deformações na viga T2D.

(a) Após a aplicação da protensão.



(b) Aplicação do carregamento externo - Passo 40.



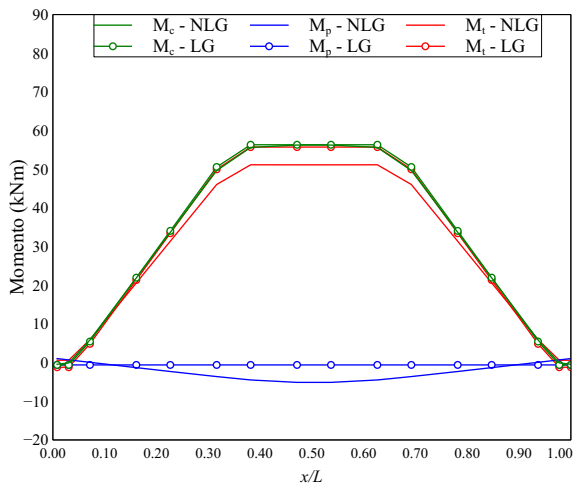
Fonte: Elaborada pela autora.

Na Figura 52 são apresentadas as parcelas de momento fletor ao longo do comprimento normalizado da viga para cada uma das vigas analisadas, são apresentados os resultados das análises linear e não linear geométrica. É possível observar que a componente linear do momento do cabo (M_p) é similar ao seu respectivo traçado do cabo, uma vez que é calculado em relação à geometria inicial da viga. A parcela de momento fletor da viga de concreto armado (M_c) é praticamente idêntica em suas respostas linear e não linear geométrica, para todas as vigas. Em contrapartida, o momento total (M_t) depende do efeito da não linearidade do cabo. Estes efeitos, por sua vez, são mais expressivos para a viga sem desviador, diminuindo ao aumentar o

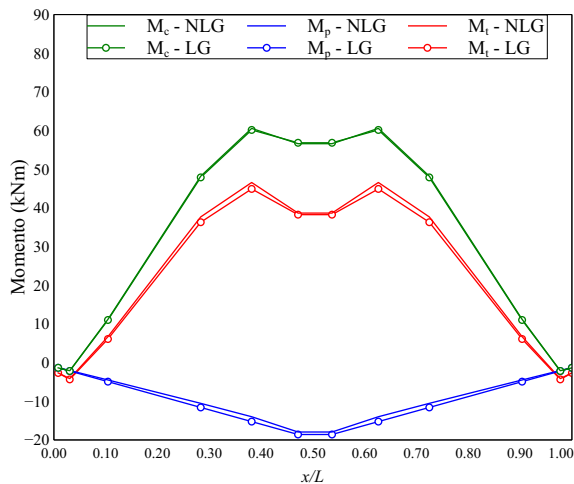
número de desviadores.

Figura 52 – Momento fletor para as vigas T.

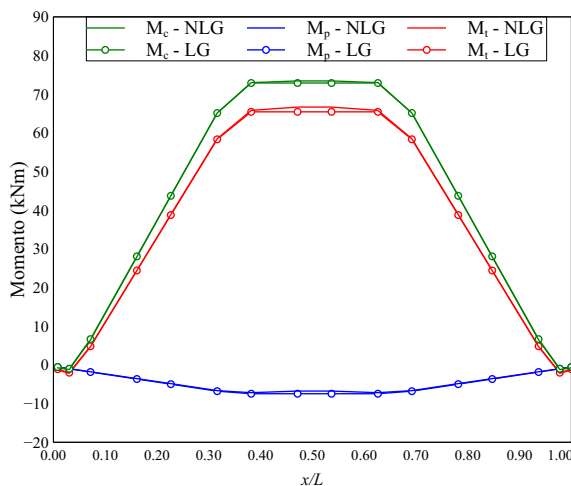
(a) Viga T1S.



(b) Viga T1D.



(c) Viga T2D.



Fonte: Elaborada pela autora.

5.2 Análise de longa duração

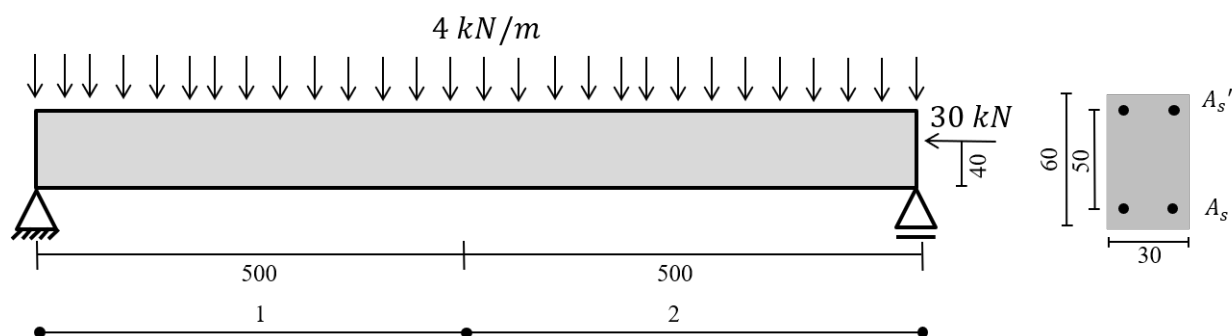
Esta seção apresenta a validação do modelo proposto para a análise de longa duração de vigas com protensão não aderente. Os resultados obtidos por esta formulação foram comparados com resultados apresentados na literatura. O comportamento da viga é avaliado em termo de deflexões, deformações e perdas de protensão. Adicionalmente, é apresentado um estudo para a avaliação do efeito do coeficiente de idade do concreto nas deflexões e na perda por relaxação do aço de protensão.

5.2.1 Viga de concreto armado submetida a um carregamento distribuído

Neste exemplo de aplicação, o modelo para a análise de longa duração de vigas de concreto armado é validado utilizando o Exemplo 9.1 apresentado por Gilbert e Ranzi (2010). Uma viga biapoiada é submetida a um carregamento distribuído uniforme e uma força normal aplicada. O eixo de referência do elemento encontra-se a 40 cm da face inferior da viga. A seção transversal é retangular, cujas dimensões são apresentadas na Figura 53.

O módulo de elasticidade do concreto na data do carregamento é de 25GPa e o módulo de elasticidade do aço é de 200 GPa. A armadura positiva é de 18 cm² e a negativa apresenta 6.2 cm². Ambas as armaduras estão posicionadas à 5 cm da face inferior e superior da viga, respectivamente.

Figura 53 – Viga biapoiada de Gilbert e Ranzi (2010) (unidades em cm).



Fonte: Elaborada pela autora.

A primeira etapa da análise consiste na aplicação do carregamento externo, em que $t = 0$. Nesta etapa, o campo de deslocamento devido ao carregamento externo é determinado $\mathbf{u}(t_0)$. Gilbert e Ranzi (2010) utilizaram o método da rigidez direta para determinar os deslocamentos nodais, utilizando um elemento de pórtico plano com seis graus de liberdade. Para seus resultados, a viga foi discretizada em dois elementos. A força distribuída é aplicada na viga na forma de força nodal equivalente. Processo semelhante foi realizado neste trabalho.

Para este exemplo, a viga foi discretizada em dois elementos e o carregamento externo foi aplicado em seu centroide. Os resultados obtidos para o deslocamento vertical no centro do vão da viga são apresentados na Tabela 11, em que é possível observar que o modelo utilizado neste trabalho concorda exatamente com o resultado apresentado por Gilbert e Ranzi (2010).

O segundo passo da análise consiste na determinação dos deslocamentos para a viga

em um instante de tempo $t > t_0$, não informado pelos autores (GILBERT; RANZI, 2010). Os parâmetros necessários para esta etapa consistem no módulo de elasticidade ajustado de 9524 MPa, coeficiente de fluência ϕ igual a 2.5 e $\bar{\phi}$ igual a -0.333. A deformação por retração ε_{sh} é igual a -600×10^{-6} . Novamente, o deslocamento do nó central da viga foi determinado e é apresentado na Tabela 12, em que é possível observar que o resultado do modelo proposto é exatamente igual ao resultado de referência.

Tabela 11 – Deslocamento vertical ($t = t_0$) - Ex. 9.1 (GILBERT; RANZI, 2010)

v (mm)	v_{ref} (mm)	Diferença %
-3.494	-3.494	0.00

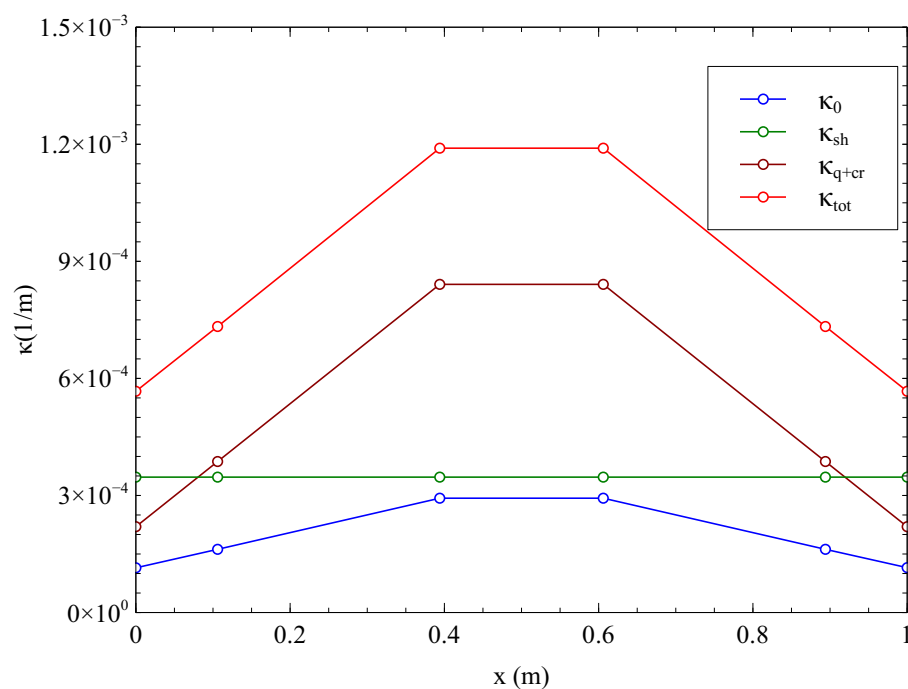
Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 12 – Deslocamento vertical ($t > t_0$) - Ex. 9.1 (GILBERT; RANZI, 2010)

v (mm)	v_{ref} (mm)	Diferença (%)
-13.65	-13.65	0.00

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 54 – Parcelas individuais da curvatura - Ex. 9.1.



Fonte: Elaborada pela autora.

Com o objetivo de avaliar o efeito das parcelas de retração, fluência e carregamento externo ao longo do tempo, na Figura 54 são apresentadas as parcelas de curvatura para cada um

destes efeitos. A partir dos resultados, é possível observar que somente a parcela da curvatura gerada pelo efeito da retração κ_{sh} supera a deformação devido ao carregamento imediato κ_0 . A parcela do efeito do carregamento externo combinada com o efeito da fluência κ_{cr+q} representa a maior parte da parcela total da curvatura κ_{tot} , dada pela soma dos efeitos individualmente. Este valor total de curvatura representa cerca de quatro vezes a curvatura inicial. Estes resultados mostram a importância da consideração dos efeitos da retração e da fluência nas deformações que a estrutura pode desenvolver ao longo do tempo.

5.2.2 Viga de concreto armado biapoiada

Bakoss *et al.* (1982) apresentaram um estudo experimental para a determinação da deflexão ao longo do tempo de vigas biapoiadas e contínuas. A viga biapoiada nomeada 1B2 é utilizada neste exemplo para validar a formulação proposta. Duas barras de 12 mm de diâmetro são utilizadas como reforço, posicionadas à 15 mm da face inferior da viga, conforme a Figura 55.

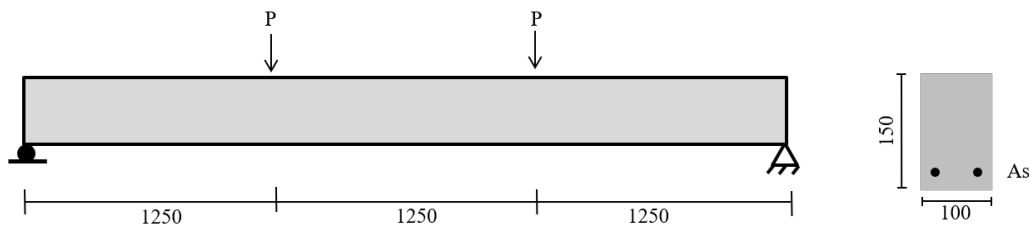
A viga foi discretizada utilizando 12 elementos de pórtico plano. A resistência à compressão do concreto é de 39 MPa e o módulo de elasticidade é de 31.2 GPa. O carregamento da viga ocorre aos 28 dias e a carga de serviço aplicada foi de $P = 2.6$ kN, mantida constante ao longo da análise de 650 dias.

Os autores informam as medidas de umidade relativa do ar ao longo do período de medição dos deslocamentos. A relatividade média do ar considerada foi de 50% e o tipo do cimento é Portland, assim, os coeficientes α_{bs} , α_{ds1} e α_{ds2} , para a determinação da deformação por retração, são correspondem a 800, 3 e 0.013. O modelo para a determinação da deformação por retração e do coeficiente de fluência do concreto utilizado foi o modelo proposto pelo CEB-FIB:2010. O coeficiente de idade considerado foi de 0.75, considerado uma boa aproximação para concretos problemas com carga constante (*sustained load*) e carregado após 28 dias (GILBERT; RANZI, 2010).

Na Figura 56 são apresentados os resultados obtidos para o deslocamento vertical no centro do vão da viga ao longo do tempo. É possível observar que os resultados apresentados pelo modelo proposto por este trabalho apresenta uma ótima concordância com os resultados apresentados por Bakoss *et al.* (1982) tendo em vista as incertezas envolvidas da determinação da retração e fluência. Apesar de que, no início do carregamento, o modelo proposto por este trabalho apresenta uma maior taxa de crescimento do deslocamento vertical, os resultados

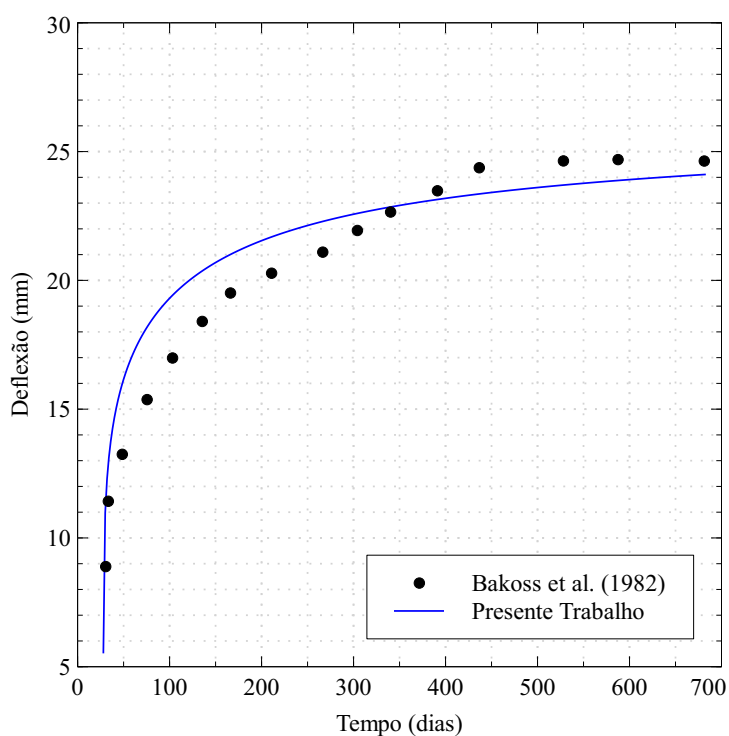
acompanham o valor medido no ensaio experimental.

Figura 55 – Viga 1B2 (unidades em mm).



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 56 – Deflexão no centro do vão - Viga 1B2.

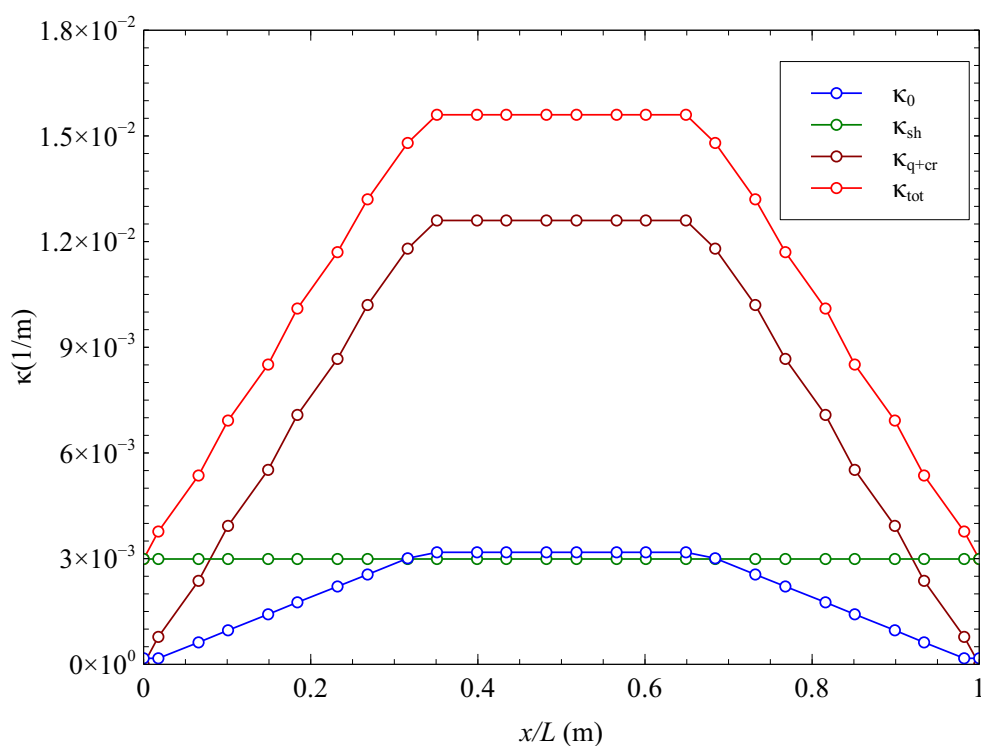


Fonte: Elaborada pela autora.

Na Figura 57 são apresentadas as parcelas de curvatura individuais devido ao carregamento externo e do efeito da fluência e retração do concreto. É possível observar que o formato da curva é simétrico e representa a forma do carregamento aplicado. Por outro lado, o efeito da retração é constante, pois este fenômeno não depende das tensões aplicadas e, neste trabalho, é considerado constante ao longo da seção. Outro ponto a se observar é que a maior parte destas deformações ocorrem em decorrência do carregamento externo associado ao efeito da fluência do concreto. A soma destes efeitos, no final da análise, geram curvaturas cerca de cinco vezes a curvatura inicial da peça.

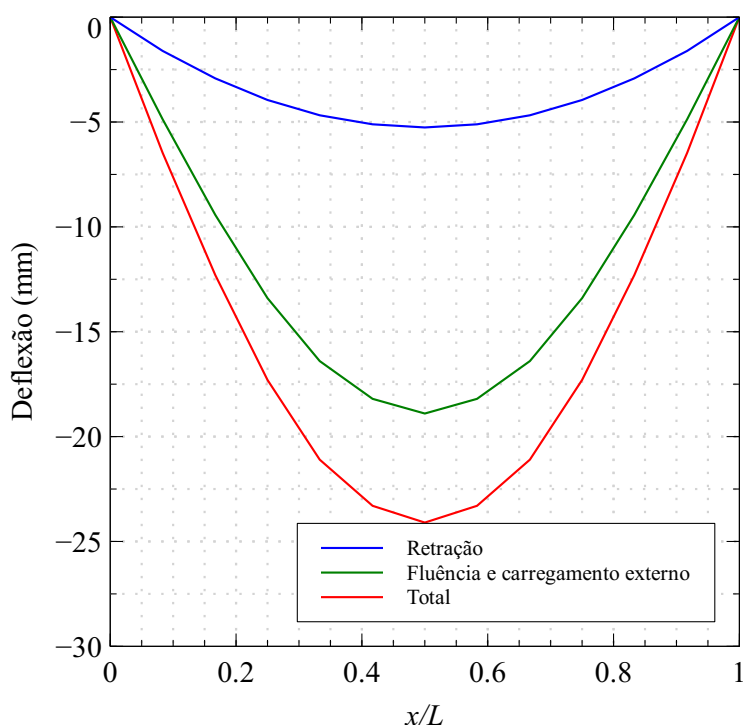
Na Figura 58 são apresentadas as parcelas individuais da deflexão ao longo do comprimento normalizado da viga ao final da análise realizada. É importante observar a simetria dos deslocamentos ao longo da viga, uma vez que a viga é biapojada. Adicionalmente, é possível verificar que a maior parte da parcela total de deslocamento ocorre devido ao efeito do carregamento externo e da fluência da viga. A magnitude da deformação final observada apenas enfatiza a importância das considerações dos efeitos da retração e da fluência na prática da engenharia.

Figura 57 – Parcelas individuais da curvatura - Viga 1B2.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 58 – Parcelas individuais das deflexões finais - Viga 1B2.



Fonte: Elaborada pela autora.

5.2.3 Viga contínua com protensão não aderente

Neste exemplo, as vigas contínuas denominadas YLA2, YLB2 e YLC1, cuja seção transversal e propriedades são apresentadas na Tabela 8 e na Tabela 9, são utilizadas para validar o modelo proposto para cargas de longa duração. Nesta etapa da análise os materiais são considerados em regime linear e a não linearidade geométrica é desprezada. Foi considerada uma carga de serviço $P = 30$ kN aplicada à viga. A data de carregamento da estrutura e de início das deformações por retração é de 28 dias e a análise apresenta data final de 600 dias.

Ao longo da análise, manteve-se uma discretização de 16 elementos para a viga e 16 segmentos para o cabo de protensão. Para a determinação do coeficiente de fluência ϕ e da deformação por retração ϵ_{sh} utilizou-se o modelo proposto pelo CEB-FIB:2010. Lou *et al.* (2013b) não informaram os parâmetros necessários para determinar o coeficiente de fluência e a deformação por retração, desta forma, esses parâmetros são estimados.

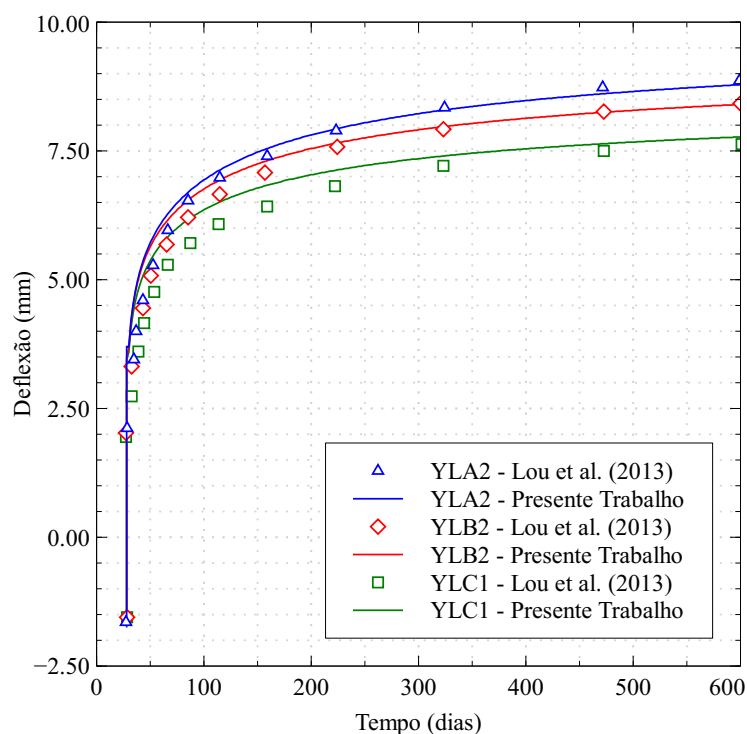
Considerou-se o cimento do concreto do tipo Portland, classe 32.5N, de acordo com EN 197:2000. Desta forma, os coeficientes α_{bs} , α_{ds1} e α_{ds2} , para a determinação da deformação por retração, são correspondem a 800, 3 e 0.013, respectivamente. A umidade relativa do ar considerada foi de 60%.

Ao longo da análise, o coeficiente de idade do concreto χ foi considerado constante, sendo esta uma boa aproximação, uma vez que este parâmetro varia pouco ao longo da análise (GILBERT; RANZI, 2010). Bažant e Jirásek (2018) afirma que o valor mais usual para o coeficiente de idade do concreto é de 0.8, enquanto Gilbert e Ranzi (2010) recomenda valores entre 0.65 e 0.75 para concretos de resistência normal carregados entre 7 e 28 dias. Desta forma, inicialmente considerou-se o valor de $\chi = 0.7$, uma vez que esse valor está entre os valores recomendados e representou bem o comportamento da viga.

Na Figura 59 são apresentados os resultados obtidos para cada viga, comparando-se com os resultados obtidos por Lou *et al.* (2013b). Nota-se que o modelo proposto por este trabalho representa bem o comportamento da viga para cargas de longa duração. Os deslocamentos crescem rapidamente nas primeiras idades e ao longo do tempo esse crescimento ocorre de forma mais lenta, estabilizando em idades maiores.

É possível verificar que excelentes resultados foram obtidos, ainda que o modelo proposto por este trabalho é mais simples do que o modelo utilizado pelos autores, mostrando que apesar de se tratar de uma abordagem simplificada, o Método do Módulo Efetivo Ajustado representa bem o comportamento dependente do tempo de vigas de concreto.

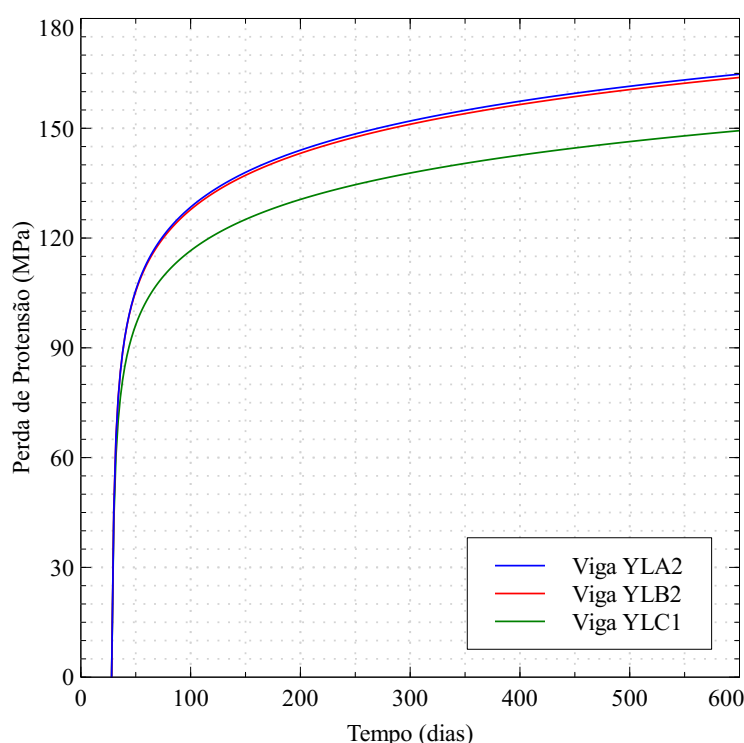
Figura 59 – Deslocamento vertical do centro do vão.



Fonte: Elaborada pela autora.

De forma similar, na Figura 60 são apresentadas as perdas de protensão devido a fluência, retração e relaxação para cada uma das vigas analisadas. A maior parte das perdas de protensão ocorrem nas primeiras idades, com o passar do tempo o valor da tensão de protensão tende a se estabilizar. Adicionalmente, possível observar que a Viga YLC1 apresenta a menor perda de protensão, isto ocorre pois a perda de protensão depende da tensão inicial aplicada, e esta viga apresenta a menor força de protensão inicial. Por outro lado, as vigas YLA2 e YLB2 foram protendidas com tensões praticamente iguais.

Figura 60 – Perda de protensão ao longo do tempo.



Fonte: Elaborada pela autora.

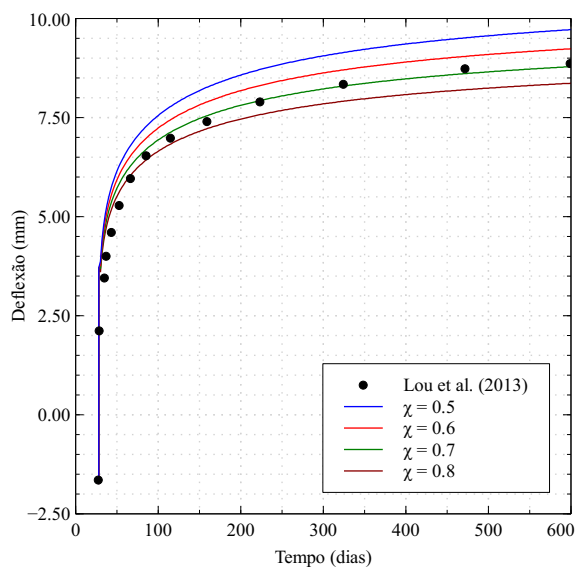
Com o objetivo de avaliar o efeito do coeficiente de idade do concreto na deflexão da viga e da perda de protensão, a análise foi realizada para valores de χ de 0.5, 0.6, 0.7 e 0.8. A Figura 61 apresenta os resultados obtidos para cada viga. É possível observar que com o aumento do valor de χ o deslocamento ao longo do tempo diminui. Este resultado é esperado, uma vez que ao aproximarmos o valor do coeficiente de idade para 1, o módulo de elasticidade passa a não considerar os efeitos do envelhecimento do concreto (i.e. Método do Módulo Efetivo), subestimando os deslocamentos (GILBERT; RANZI, 2010; BAŽANT; JIRÁSEK, 2018).

A Figura 62 apresenta a perda de protensão que ocorre ao longo do tempo, ao variarmos o coeficiente de idade do concreto. Verifica-se que ocorre o efeito inverso ao observado

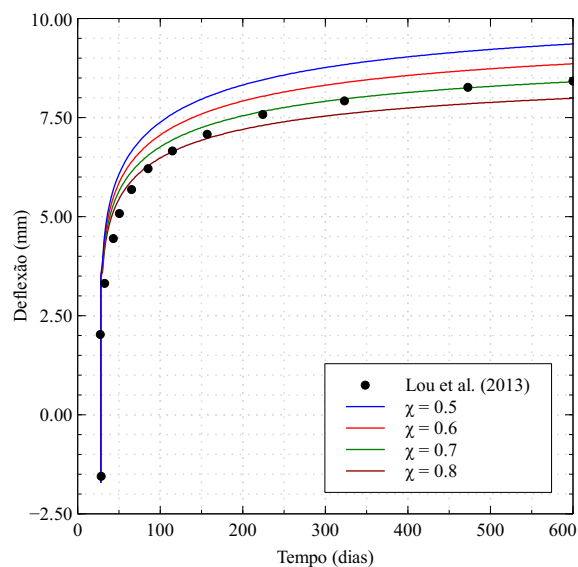
anteriormente, o aumento do valor de χ se reverte em maiores perdas de protensão, isto pode ocorrer devido à redistribuição de esforços entre os elementos estruturais.

Figura 61 – Deflexão no centro do vão.

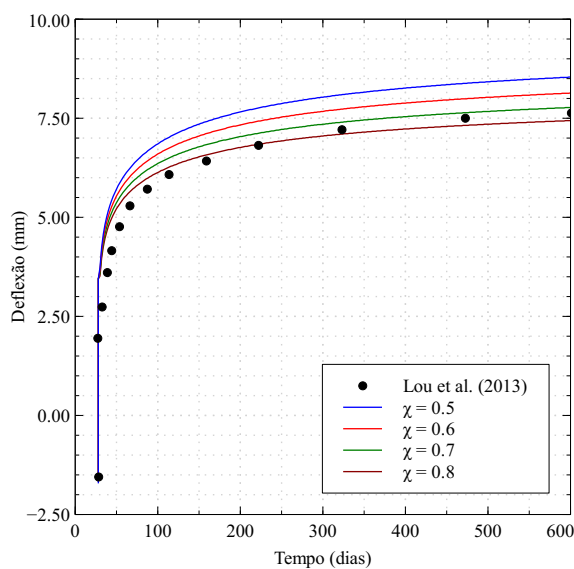
(a) Viga YLA2.



(b) Viga YLB2.



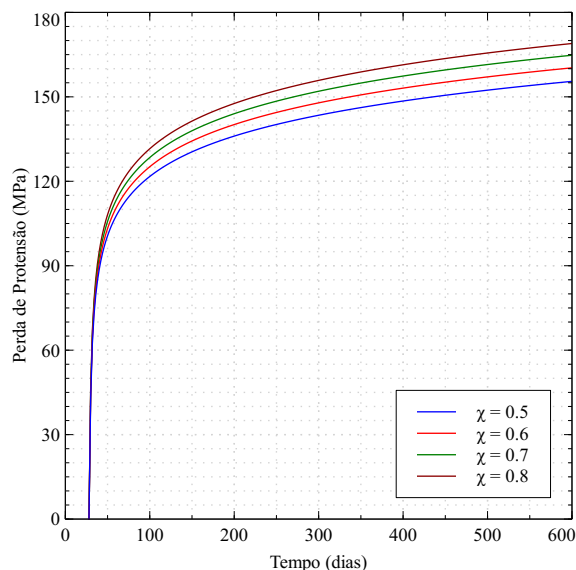
(c) Viga YLC1.



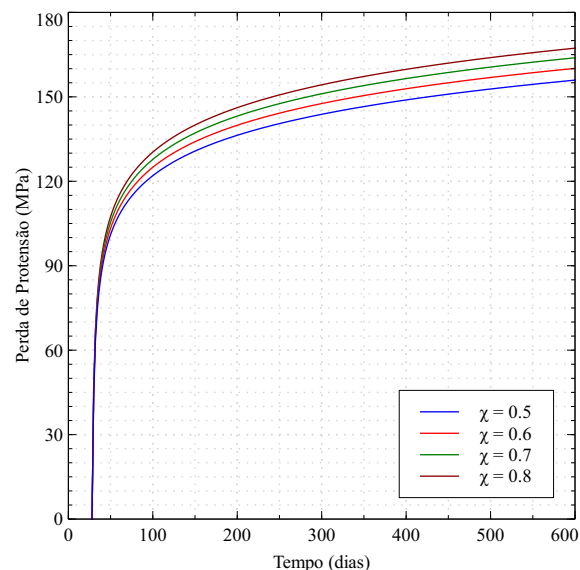
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 62 – Perda de protensão.

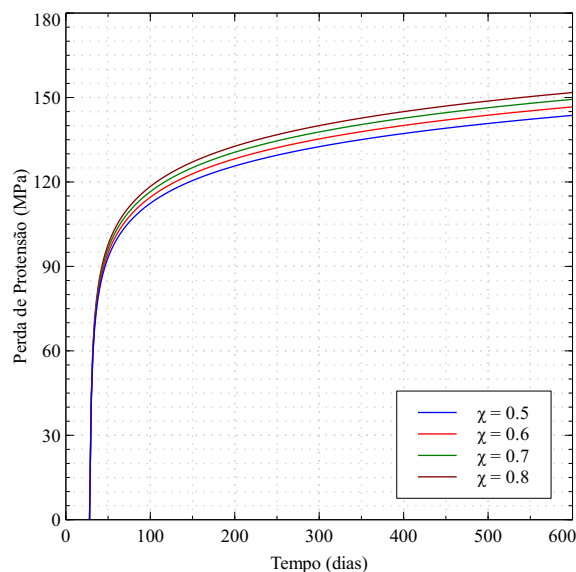
(a) Viga YLA2.



(b) Viga YLB2.



(c) Viga YLC1.



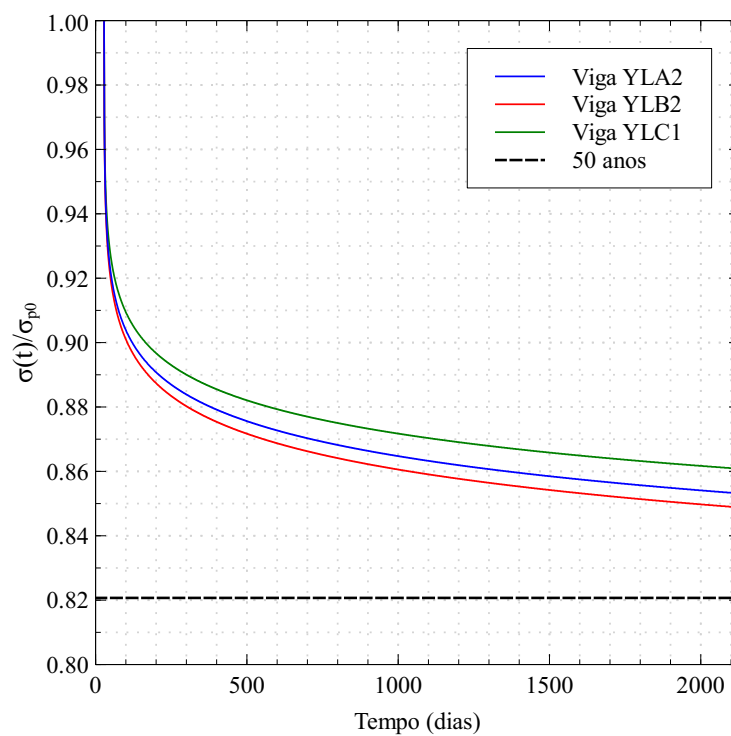
Fonte: Elaborada pela autora.

A NBR 6118:2014 considera para o cálculo das flechas diferidas coeficientes que vão até a idade de 70 meses. Desta forma, o tempo de análise para as três vigas foi alterado para até 70 meses, equivalente a 2100 dias, com o objetivo de determinar a perda de protensão no cabo no final deste intervalo. Na Figura 63 são apresentadas as curvas de perda de protensão para cada viga até os 70 meses considerando um coeficiente de idade de 0.7. É possível observar que ao final dos 70 meses, as vigas apresentam menos de 15% de perdas totais de protensão.

Adicionalmente, apresenta-se a tensão final de protensão considerando um período de 50 anos, correspondente à vida útil da estrutura. Nesta idade, a tensão de protensão determinada

corresponde à 82% da tensão inicial. Ou seja, a percentagem de perdas totais correspondem à 18%. Considerando que a perda total de protensão recomendada é de 20%, os resultados apresentam-se coerentes com a prática da engenharia.

Figura 63 – Tensão normalizada no cabo de protensão.



Fonte: Elaborada pela autora.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou modelos baseados no Método dos Elementos Finitos para análise de vigas com protensão não aderente submetidas a cargas de curta e longa duração. Estes modelos podem ser aplicados a vigas biapoiadas e contínuas com protensão interna ou externa.

Para a análise de vigas protendidas com protensão não aderente submetidas a cargas de curta duração, a viga de concreto armado foi simulada utilizando elementos de pórtico plano em uma abordagem Lagrangiana Total, em que a não linearidade física e geométrica foram consideradas. Enquanto o cabo de protensão foi simulado utilizando um elemento de cabo com um número variável de segmentos retos. Este elemento também tem sua formulação em uma abordagem Lagrangiana Total. A matriz de rigidez e o vetor de forças internas dos elementos de viga e cabo foram obtidas de forma consistente.

O procedimento de análise para cargas imediatas apresenta duas etapas, em que a primeira se trata da etapa de aplicação da protensão, utilizando iterações de Newton-Raphson. Em seguida o carregamento externo é aplicado, onde as equações de equilíbrio são solucionadas utilizando o Método do Controle de Deslocamento.

Os resultados obtidos foram capazes de validar a formulação proposta para cargas de curta duração:

- Comparando com resultados experimentais disponíveis na literatura.
- Verificando-se aspectos de convergência.
- Vigas biapoiadas e contínuas com diferentes traçados de cabo.

Foi possível avaliar o efeito da não linearidade geométrica no comportamento de vigas com protensão interna e externa:

- É desprezível para vigas com protensão interna.
- É importante para vigas com protensão externa sem desviadores.
- Diminui com o aumento do número de desviadores.

Adicionalmente, outros pontos importantes foram observados:

- Verificou-se um aumento da capacidade de carga com o aumento do número de desviadores.
- A formulação proposta é mais simples, porém igualmente robusta e eficaz em relação ao modelo de cabo roposto por Moreira *et al.* (2018).
- O modelo é capaz de fornecer respostas difíceis de serem mensuradas experimentalmente: deformações, curvaturas e momento fletor.

- O modelo proposto e suas respostas auxiliam na compreensão do complexo comportamento de vigas com protensão não aderente.

A segunda parte do trabalho consiste na apresentação de uma formulação baseada em elementos finitos para a consideração de cargas de longa duração em vigas com protensão não aderente. Nesta etapa, os materiais foram considerados no regime linear elástico e a não linearidade geométrica foi desconsiderada. A aplicação da protensão e do carregamento foram realizadas de forma direta, por se tratar de um problema linear.

Neste trabalho, a fluência do concreto foi considerada utilizando o Método do Módulo Efetivo Ajustado, uma vez que se trata de uma abordagem simples e eficiente mas ainda capaz de representar bem os efeitos de longa duração do de vigas com protensão não aderente. A retração foi considerada utilizando o modelo proposto pelo CEB-FIB:2010. Finalmente, a relaxação do aço de protensão foi considerada utilizando o modelo proposto por Magura *et al.* (1964).

Ótimos resultados foram obtidos para cargas de longa duração:

- Comparando com resultados apresentados na literatura.
- para vigas biapoiadas e contínuas.
- O aumento do coeficiente de idade diminui os deslocamentos ao longo do tempo.
- O aumento do coeficiente de idade aumenta as perdas de protensão.

Como sugestões para trabalhos futuros, os modelos implementados podem ser utilizados para diferentes materiais de cabo de protensão, como cabos compósitos. Também podem ser implementados modelos constitutivos mais complexos, com o objetivo de considerar carregamentos cíclicos. O modelo proposto pode ser utilizado para a análise de vigas mistas e também pode ser adaptado para ser utilizado em lajes protendidas.

Para cargas de longa duração, outros modelos apresentados por normas, como o ACI e a NBR 6118:2014, podem ser implementados com o objetivo de avaliar o efeito da utilização das diferentes recomendações normativas na determinação do coeficiente de fluência e da deformação por retração. Adicionalmente, outros modelos para a consideração da fluência e retração do concreto podem ser implementadas com o objetivo de avaliar o comportamento destes modelos e também considerar carregamentos aplicados em várias etapas. Outros trabalhos futuros também podem focar na implementação de um modelo incremental para a consideração de cargas de longa duração, por estes modelos serem mais realistas, e comparando-o com o modelo proposto neste trabalho.

REFERÊNCIAS

- AALAMI, B. Structural Modeling of Posttensioned Members. v. 126, n. 2, 2000.
- AALAMI, B. O. Load balancing. A comprehensive solution to post-tensioning. **ACI Structural Journal**, v. 87, n. 6, p. 662–670, 1990. ISSN 08893241.
- AALAMI, B. O. **Post-Tensioned Buildings: Design and construction**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014.
- ALKHAIRI, F.; NAAMAN, A. Analysis of beams prestressed with unbonded internal or external tendons. **Journal of Structural Engineering-asce - J STRUCT ENG-ASCE**, v. 119, 09 1993.
- AMADIO, C.; FRAGIACOMO, M. Simplified Approach to evaluate creep and shrinkage effects in steel-concrete composite beams. **Engineering Structures**, v. 9, p. 1153–1162, 1997.
- ASTA, A. D.; RAGNI, L.; ZONA, A. Analytical Model for Geometric and Material Nonlinear Analysis of Externally Prestressed Beams. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 133, n. January, p. 117–121, 2007.
- BAKOSS, S. L.; GILBERT, R. I.; FAULKES, K. A.; PULMANO, V. A. Long-term deflections of reinforced concrete beams. **Magazine of Concrete Research**, v. 34, n. 121, p. 203–212, 1982.
- BATOZ, J.-L.; DHATT, G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 14, n. 8, p. 1262–1267, 1979.
- BAŽANT, P. RILEM draft recommendation: TC-242-MDC multi-decade creep and shrinkage of concrete: material model and structural analysis*: Model B4 for creep, drying shrinkage and autogenous shrinkage of normal and high-strength concretes with multi-decade applicability. **Materials and Structures/Materiaux et Constructions**, v. 48, n. 4, p. 753–770, 2015. ISSN 13595997.
- BAŽANT, Z. P. Effect of creep and shrinkage in statically indeterminate structures with concrete of nonuniform age (in Czech). **Inženýrské Stavby**, v. 9, p. 462–532, 1961.
- BAŽANT, Z. P. Prediction of Concrete Creep Effects Using Age-Adjusted Effective. **Journal of the American Concrete Institute**, v. 69, p. 212–217, 1972.
- BAŽANT, Z. P. **Theory of creep and shrinkage in concrete structures: A precis of recent developments**. [S.l.]: Pergamon Pres, 1975. (Mechanics Today).
- BAŽANT, Z. P.; JIRÁSEK, M. **Creep and hygrothermal effects in concrete structures**. [S.l.: s.n.], 2018. v. 225. 1–45 p. ISSN 09250042. ISBN 9789402411362.
- BAZANT, Z. P.; MURPHY, W. P. Creep and shrinkage prediction model for analysis and design of concrete structures - model B3. **Materiaux et constructions**, v. 28, n. 180, p. 357–365, 1995. ISSN 00255432.
- BAŽANT, Z. P.; PANULA, L. Practical prediction of time-dependent deformations of concrete. **Matériaux et Construction**, v. 11, p. 307–316, 1978.

BRADFORD, M. A.; GILBERT, R. I. Composite beams with partial interaction under sustained loads. **Journal of Structural Engineering (United States)**, v. 118, n. 7, p. 1871–1883, 1992. ISSN 07339445.

BRANSON, D. E.; CHRISTIASON, M. L. Time dependent concrete properties related to design-strength and elastic properties, creep, and shrinkage. In: . [S.l.: s.n.], 1971.

CÉSAR, J. K. M. L.; VERÍSSIMO, G. D. S. CP-vol1. 1998.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 4th Edition**. 4. ed. [S.l.]: Wiley, 2001. ISBN 0471356050.

CRIEL, P.; CASPEELE, R.; MATTHYS, S.; TAERWE, L. Step-wise numerical procedure for the time-dependent modelling of concrete beams taking into account creep and creep recovery. **Concrete - Innovation and Design: fib Symposium Proceedings**, p. 412–413, 2015.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**. [S.l.]: Wiley, 1991. v. 1.

DALL'ASTA, A.; ZONA, A. Finite element model for externally prestressed composite beams with deformable connection. **Journal of Structural Engineering**, v. 131, n. 5, p. 706–714, 2005.

DIAS, M. M. Análise numérica de vigas mistas aço-concreto pelo método dos elementos finitos : efeitos de longa duração. p. 177, 2013.

EL-ZOHAIRY, A.; SALIM, H.; SHAABAN, H.; MUSTAFA, S.; EL-SHIHY, A. Finite-Element Modeling of Externally Posttensioned Composite Beams. **Journal of Bridge Engineering**, v. 20, n. 12, p. 04015018, 2015. ISSN 1084-0702.

FABER, O. Plastic yield, shrinkage, and other problems of concrete, and their effect on design. **Minutes of the Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, v. 225, n. 1928, p. 27–73, 1928.

GAYED, R. B.; GHALI, A. Control of long-term deflection of concrete slabs by prestressing. **Structural Concrete**, v. 20, n. 6, p. 1816–1827, 2019. ISSN 17517648.

GHALI, A.; FAVRE, R.; ELDBALDRY, M. 3rd. ed. [S.l.: s.n.], 2002.

GILBERT, R. I. Time-dependent stiffness of cracked reinforced and composite concrete slabs. **Procedia Engineering**, Elsevier B.V., v. 57, p. 19–34, 2013. ISSN 18777058.

GILBERT, R. I.; RANZI, G. **Time-Dependent Behaviour of Concrete Structures**. [S.l.: s.n.], 2010. ISBN 9780415493840.

GLANVILLE, W. **The Creep Or Flow of Concrete Under Load**. [S.l.]: H.M. Stationery Office, 1930. (Studies in reinforced concrete).

HARAJLI, M.; KHAIRALLAH, N.; NASSIF, H. Externally prestressed members evaluation of second-order effects. v. 125, n. October, p. 1151–1161, 1999.

HEO, S.; SHIN, S.; LEE, C. Flexural Behavior of Concrete Beams Internally Prestressed with Unbonded Carbon-Fiber-Reinforced Polymer Tendons. **JOURNAL OF COMPOSITES FOR CONSTRUCTION**, v. 17, n. April, p. 167–175, 2013.

HUSSIEN, O.; ELAFANDY, T.; ABDELRAHMAN, A.; Abdel Baky, S.; NASR, E. Behavior of bonded and unbonded prestressed normal and high strength concrete beams. **HBRC Journal**, Housing and Building National Research Center, v. 8, n. 3, p. 239–251, 2012. ISSN 16874048.

KHAIRALLAH, N. **Experimental and Analytical Evaluation of the Behavior of Concrete T Beams with External Prestressing**. [S.l.]: American University of Beirut. Department of Civil and Environmental Engineering, 1997.

KWON, S. J.; YANG, K. H.; MUN, J. H. Flexural tests on externally post-tensioned lightweight concrete beams. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 164, n. October 2017, p. 128–140, 2018. ISSN 18737323.

LIN, T. Y. Strength of continuous prestressed concrete beams under static and repeated loads. **ACI J.**, v. 26, n. 10, p. 1037–1059, 1955. Cited By :24.

LOU, T.; KARAVASILIS, T. L. Time-dependent assessment and deflection prediction of prestressed concrete beams with unbonded CFRP tendons. **Composite Structures**, Elsevier, v. 194, n. March, p. 365–376, 2018. ISSN 02638223.

LOU, T.; KARAVASILIS, T. L. Numerical evaluation of prestressed steel-concrete composite girders with external FRP or steel tendons. **Journal of Constructional Steel Research**, Elsevier Ltd, v. 162, p. 105698, 2019. ISSN 0143974X.

LOU, T.; LOPES, S. M.; LOPES, A. V. Flexural response of continuous concrete beams prestressed with external tendons. **Journal of Bridge Engineering**, v. 18, n. 6, p. 525–537, 2013. ISSN 10840702.

LOU, T.; LOPES, S. M.; LOPES, A. V. Nonlinear and time-dependent analysis of continuous unbonded prestressed concrete beams. **Computers and Structures**, v. 119, p. 166–176, 2013. ISSN 00457949.

LOU, T.; LOPES, S. M.; LOPES, A. V. A finite element model to simulate long-term behavior of prestressed concrete girders. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 81, p. 48–56, 2014. ISSN 0168874X.

LOU, T.; LOPES, S. M.; LOPES, A. V. A comparative study of continuous beams prestressed with bonded FRP and steel tendons. **Composite Structures**, Elsevier Ltd, v. 124, p. 100–110, jun 2015. ISSN 02638223.

LOU, T.; LOPES, S. M. R.; LOPES, A. V. Flexural Response of Continuous Concrete Beams Prestressed with External Tendons. v. 18, n. June, p. 525–537, 2013.

LOU, T.; MIN, D.; SUN, W.; CHEN, B.; LOU, T.; MIN, D.; SUN, W.; CHEN, B. Numerical assessment of continuous prestressed NSC and HSC members with external CFRP tendons. **Composite Structures**, Elsevier, v. 234, n. January, p. 111671, 2020. ISSN 0263-8223.

LOU, T.; PENG, C.; KARAVASILIS, T. L.; MIN, D.; SUN, W. Moment redistribution versus neutral axis depth in continuous PSC beams with external CFRP tendons. **Engineering Structures**, Elsevier, n. September, p. 109927, 2019. ISSN 0141-0296.

LOU, T. jiong; XIANG, Y. qiang. Finite element modeling of concrete beams prestressed with external tendons. **Engineering Structures**, v. 28, n. 14, p. 1919–1926, 2006. ISSN 01410296.

LUIS, J.; TAMAYO, P. Universidade Federal do Rio Grande do Sul Análise Numérica de Vigas Mistas pelo Método dos Elementos Finitos. 2011.

MAGURA, D.; SOZEN, M. A.; SIESS, D. P. A study of stress relaxation in prestressing reinforcement. **PCI Journal**, v. 9, n. 9, p. 13–57, 7 1964.

MENEGOTO, M.; PINTO, P. E. Method of analysis for cyclically loaded R . C . plane frames including changes in geometry and non-elastic behaviour of elements under combined normal force and bending. 1973.

MOREIRA, L. S.; SOUSA, J. B. M.; PARENTE, E. Nonlinear finite element simulation of unbonded prestressed concrete beams. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 170, n. May, p. 167–177, 2018. ISSN 18737323.

NAAMAN, A. E. 2rd. ed. [S.l.]: Techno Press, Michigan, USA, 2004.

NEVILLE, A.; DILGER, W.; BROOKS, J. **Creep Of Plain And Structural Concrete**. [S.l.]: Construction Press, 1983. ISBN 9780860958345.

PARENTE, E.; NOGUEIRA, G. V.; NETO, M. M.; MOREIRA, L. S. Material and geometric nonlinear analysis of reinforced concrete frames. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, scielo, v. 7, p. 879 – 904, 10 2014. ISSN 1983-4195.

PENG, F.; XUE, W. Calculating Method for Ultimate Tendon Stress in Internally Unbonded Prestressed Concrete Members. **ACI Structural Journal**, v. 116, n. 5, 2019.

PISANI, M. A. Behaviour under long-term loading of externally prestressed concrete beams. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 160, n. January, p. 24–33, 2018. ISSN 18737323.

RANZI, G.; AL-DEEN, S.; AMBROGI, L.; UY, B. Long-term behaviour of simply-supported post-tensioned composite slabs. **Journal of Constructional Steel Research**, Elsevier Ltd, v. 88, p. 172–180, 2013. ISSN 0143974X.

RANZI, G.; OSTINELLI, A. Ultimate behaviour and design of post-tensioned composite slabs. **Engineering Structures**, Elsevier Ltd, v. 150, p. 711–718, 2017. ISSN 18737323.

REYBROUCK, N.; CRIEL, P.; CASPEELE, R.; TAERWE, L. Modelling of long-term loading tests on reinforced concrete beams. p. 745–753, 2014.

SCOTT, B.; PARK, R.; PRIESTLEY, M. Stress-strain behaviour of concrete confined by overlapping hoops at low and high strain rates. **Journal of the American Concrete Institute**, v. 79, p. 13–27, 01 1982.

SI, X. T.; AU, F. T. An efficient method for time-dependent analysis of composite beams. **Procedia Engineering**, v. 14, p. 1863–1870, 2011. ISSN 18777058.

SOUSA, J. B. M.; PARENTE, E.; LIMA, É. M.; OLIVEIRA, M. V. Beam-tendon finite elements for post-tensioned steel-concrete composite beams with partial interaction. **Journal of Constructional Steel Research**, Elsevier Ltd, v. 159, p. 147–160, 2019. ISSN 0143974X.

STRAMANDINOLI, R. S. B.; LA, H. L. FE model for nonlinear analysis of reinforced concrete beams considering shear deformation. **Engineering Structures**, Elsevier Ltd, v. 35, p. 244–253, 2012. ISSN 0141-0296.

STRAMANDINOLI, R. S. B.; ROVERE, H. L. L.; HERNÁNDEZ-MONTES, E.; CESETTI, A.; GIL-MARTÍN, L. M. Discussion of “ An efficient tension-stiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members ”, **Engineering Structures**, v. 48, p. 763–764, 2013.

TAN, K. H.; TJANDRA, R. A. Strengthening of RC Continuous Beams by External Prestressing. **JOURNAL OF STRUCTURAL ENGINEERING**, v. 133, n. February, p. 195–204, 2007.

TAO, X.; DU, G. Ultimate Stress of Unbonded Tendons in Partially Prestressed Concrete Beams. **PCI Journal**, v. 30, n. 6, p. 72–91, 1985. ISSN 08879672.

TEJANI, V. G.; DHAMELIYA, H. K.; GADHIYA, J. Review for Study of Prestressing Systems for all Structural Element. v. 6, n. 6, p. 369–372, 2015.

TROST, H. Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxations-Probleme bei Beton und Spannbeton. **Beton- und Stahlbetonbau**, v. 62, n. 11, p. 230–238, 1967.

ULICKII I. I., C. U. Y. B. A. V. **Analysis of reinforced concrete structures considering long-time processes**. [S.l.]: Kiev: Gosstroyizdat. (in Russian), 1960. (Mechanics Today).

WHITNEY, C. S. Plain And Reinforced Concrete Arches. **CI Journal Proceedings**, v. 28, n. 3, p. 479–519, 1932.

ZIENKIEWICZ, O. C.; WATSON, M. Some creep effects in stress analysis with particular reference to concrete pressure vessels. v. 4, p. 406–412, 1966.

ZONA, A.; RAGNI, L.; DALL’ASTA, A. Finite element formulation for geometric and material nonlinear analysis of beams prestressed with external slipping tendons. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 44, n. 15, p. 910–919, 2008. ISSN 0168874X.

ZUPAN, D.; SAJE, M. Analytical integration of stress field and tangent material moduli over concrete cross-sections. **Computers and Structures**, v. 83, n. 28-30 SPEC. ISS., p. 2368–2380, 2005. ISSN 00457949.