



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**ALLAN RANIERI PEREIRA MOREIRA**

**MUNDO-BRANA TIPO-CORDA EM UMA GRAVIDADE  $F(T)$**

**FORTALEZA**

**2020**

ALLAN RANIERI PEREIRA MOREIRA

MUNDO-BRANA TIPO-CORDA EM UMA GRAVIDADE  $F(T)$

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

Coorientador: Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva.

FORTALEZA  
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

M836m Moreira, Allan Ranieri Pereira.

Mundo-Brana tipo-corda em uma gravidade  $f(T)$  / Allan Ranieri Pereira Moreira. – 2020.

132 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2020.

Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

Coorientação: Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva.

1. Mundo-Brana tipo-corda. 2. Teorias de gravidade modificadas. 3. Teleparalelismo. I. Título.

CDD 530

---

ALLAN RANIERI PEREIRA MOREIRA

MUNDO-BRANA TIPO-CORDA EM UMA GRAVIDADE  $F(T)$

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 21/10/2020.

BANCA EXAMINADORA

---

Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Dr. José Euclides Gomes da Silva  
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

---

Dr. Albert Petrov  
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Á Jeová Deus.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Jeová Deus, pelo dom da vida e por sempre estar comigo em todos os momentos, a quem devo todo o meu mérito.

Agradeço a minha esposa Quézia Rodrigues Dias da Silva Moreira por seu grande carinho e apoio em todos os momentos, tanto os momentos felizes como nos momentos mais difíceis, por todo seu amor e respeito.

Agradeço ao meu pai Francisco das Chagas Lourenço Moreira, que é mais que um pai, é um amigo.

Agradeço a minha mãe Deusinete Pereira Moreira, que sempre deu o seu melhor para me criar e educar.

Agradeço a minha irmã e ao meu primo Jefferson Lourenço e a todos meus familiares que sempre estiveram ao meu lado me ajudando e apoiando quando precisei.

Agradeço ao Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida, por ser um excelente orientador e professor, por sua paciência, motivação e disciplina, por me ajudar a lutar contra a timidez, por ter sido um verdadeiro amigo quando precisei.

Agradeço ao Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva, por ter tido uma importância fundamental na minha formação e elaboração deste trabalho, por ser um excelente professor, co-orientador e amigo, por sua disciplina, motivação e paciência.

Agradeço ao Prof. Dr. Marcony Silva Cunha por sua orientação na graduação, por sua amizade, paciência e carinho.

Agradeço a todos os meus colegas do Programa de Pos-Graduação de Física da Universidade Federal do Ceará (UFC), que contribuíram de forma direta ou indireta na minha formação. Em especial, aos amigos Cleiton Estevão, Fernando Belchior e Daniel Vasconcelos, pelas conversas e pelos momentos de distrações vividos nas horas difíceis do curso.

Agradeço ao Laboratório de Simulação de Sistemas Coerentes-LASSCO e seus integrantes, por todo o conhecimento e incentivo proporcionado para minha formação e realização deste trabalho.

Agradeço ao financiamento de bolsa dado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a todos os funcionários do departamento de física.

”Pois as suas qualidades invisíveis — isto é, seu poder eterno e Divindade — são claramente vistas desde a criação do mundo, porque são percebidas por meio das coisas feitas, de modo que eles não têm desculpa.” (Romanos 1:20)

## RESUMO

Com o objetivo de entender como uma gravidade teleparalela modificada  $f(T)$ , onde  $f(T) = T + kT^n$ , se comporta em um cenário de mundo-brana, obtemos os campos de tetrada, a conexão de Weitzenböck, o tensor de torção, de contorção e o dual da torção relativos a um espaço-tempo de um mundo-brana tipo-corda. Observamos que assintoticamente, a geometria do *bulk* converge para um espaço-tempo  $AdS_6$ , cuja constante cosmológica é produzida pelos parâmetros  $k$  e  $n$  da torção. Variando os parâmetros de torção, a brana passa por uma transição de fase, de uma única brana em sub-branas, que leva à formação de estruturas semelhantes a anéis. A análise da condição de energia revela um processo de separação da brana que satisfaz as condições de energia fraca e forte, para alguns valores dos parâmetros da torção. Além disso, investigamos o comportamento das perturbações gravitacionais neste cenário. Observamos que o espectro gravitacional é modificado pelos parâmetros de torção. Dentro do núcleo da brana, a torção produz novas barreiras e poços de potenciais, levando a um modo sem massa localizado nas proximidades da brana. Observamos que dentro do núcleo da brana, a torção produz uma estrutura interna, mesmo para um único campo escalar complexo. Ao assumir um vórtice global como fonte, encontramos uma solução  $\alpha = 0$  que resulta em uma brana espessa tipo-corda, mas no caso de  $\alpha \neq 0$  não é gerado soluções topológicas.

**Palavras-chave:** Mundo-Brana tipo-corda. Teorias de gravidade modificadas. Teleparalelismo.



## ABSTRACT

In order to understand how a modified teleparallel gravity  $f(T)$  where  $f(T) = T + kT^n$ , behaves in a braneworld scenario, we obtain the tetrad fields, the Weitzenböck connection, the torsion tensor, the contortion and the torsional dual relating to a space-time of a string-like braneworld. We observe either asymptotically, the geometry of the bulk converges to a space-time  $AdS_6$ , whose cosmological constant is produced by  $k$  and  $n$  torsion parameters. By varying the torsion parameters, the brane undergoes a phase transition, from a single brane to sub-branes, which leads to the formation of ring-like structures. The analysis of the stress energy condition reveals a splitting brane process satisfying the weak and strong energy conditions for some values of the parameters. In addition, we investigate the behaviour of the gravitational perturbations in this scenario. We note that the gravitational spectrum is modified by the torsion parameters. Inside the brane core, the twist produces new barriers and potential wells, leading to a massless mode located in the vicinity of the brane. We observed that inside the brane core, the torsion produces an internal structure even for a single scalar field. By assuming a global vortex as the source, we found a  $\alpha = 0$  vortex solution that yields to a thick string-like brane, but in the case of  $\alpha \neq 0$  no topological solutions are generated.

**Keywords:** String-like braneworld. Modified theories of gravity. Teleparallelism.

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Relação entre as forças fundamentais, onde $m_b$ são os valores massas dos bósons $W$ ou $Z$ [29]. . . . .	39
Tabela 2 – Relação entre o sistema de unidades de Planck e o Sistema Internacional de unidades (S.I) [29, 80]. . . . .	39

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ilustração para o significado geométrico da não-metricidade $Q_{\alpha\mu\nu}$ [71]. . . . .	25
Figura 2 – Ilustração para o significado geométrico da Torção $T^\alpha_{\mu\nu}$ [71]. . . . .	25
Figura 3 – Ilustração para o significado geométrico da curvatura $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ [71]. . . . .	25
Figura 4 – Descrições Gravitacionais Alternativas [71]. . . . .	27
Figura 5 – A representação da redução do espaço-tempo considerando a Torção $T = 0$ e a curvatura $R = 0$ . . . . .	30
Figura 6 – Ilustração para a teoria de Kaluza-Klein. . . . .	40
Figura 7 – Ilustração para o modelo Randall-Sundrum. . . . .	41
Figura 8 – Ilustração para o modelo GS com uma simetria axial. . . . .	47
Figura 9 – Escalar de torção. (a) $\lambda = 1$ e $p$ variando . (b) $p = 1$ e $\lambda$ variando. . . . .	60
Figura 10 –(a) $f(T)$ com $n = \lambda = p = 1$ , para $k$ pequeno. (b) $f(T)$ com $n = p = \lambda = 1$ , para $k$ muito pequeno. . . . .	61
Figura 11 –(a) $f(T)$ com $n = 2$ e $\lambda = 1$ , para $k$ pequeno. (b) $f(T)$ com $n = 2$ e $p = \lambda = 1$ , para $k$ muito pequeno. . . . .	61
Figura 12 –(a) $f(T)$ com $n = 3$ e $\lambda = p = 1$ , para $k$ pequeno. (b) $f(T)$ com $n = 3$ e $p\lambda = 1$ , para $k$ muito pequeno. . . . .	61
Figura 13 –(a) $t_0(y)$ para $n = 1/2$ e $\lambda = 1$ . (b) $t_0(y)$ para $n = 1/2$ e $p = 1$ . . . . .	62
Figura 14 –(a) $t_y(y)$ para $n = 1/2$ e $\lambda = 1$ . (b) $t_y(y)$ para $n = 1/2$ e $p = 1$ . . . . .	63
Figura 15 –(a) $t_0(y)$ para $n = \lambda = 1$ e $k = -0.5$ . (b) $t_0(y)$ para $n = p = 1$ e $k = -0.5$ . . . . .	63
Figura 16 –(a) $t_0(y)$ com $n = \lambda = p = 1$ , para $k$ pequeno. (b) $t_0(y)$ com $n = p = \lambda = 1$ , para $k$ muito pequeno . . . . .	64
Figura 17 –(a) $t_y(y)$ para $n = \lambda = 1$ e $k = -0.5$ . (b) $t_y(y)$ para $n = p = 1$ e $k = -0.5$ . . . . .	64
Figura 18 –(a) $t_y(y)$ com $n = \lambda = p = 1$ , para $k$ pequeno. (b) $t_y(y)$ com $n = p = \lambda = 1$ , para $k$ muito pequeno. . . . .	64
Figura 19 –(a) $t_0(y)$ para $n = 2$ , $\lambda = 1$ e $k = -0.5$ . (b) $t_0(y)$ para $n = 2$ , $p = 1$ e $k = -0.5$ . . . . .	65
Figura 20 –(a) $t_0(y)$ com $n = 2$ e $p = \lambda = 1$ para $k$ pequeno. (b) $t_0(y)$ com $n = 2$ e $p = \lambda = 1$ , para $k$ muito pequeno . . . . .	65
Figura 21 – $t_y(y)$ para $n = 2$ , $p = 1$ e $k = -0.5$ , com $\lambda$ variando. . . . .	66
Figura 22 –(a) $t_y(y)$ com $n = 2$ e $p = \lambda = 1$ , para $k$ pequeno. (b) $t_y(y)$ com $n = 2$ e $p = \lambda = 1$ , para $k$ muito pequeno . . . . .	66
Figura 23 – $t_0(y)$ para $n = 3$ , $p = 1$ e $k = -0.5$ . . . . .	66

Figura 24–(a) $t_0(y)$ com $n = 3$ e $p = \lambda = 1$ para $k$ pequeno. (b) $t_0(y)$ com $n = 3$ e $p = \lambda = 1$ , para $k$ muito pequeno . . . . .	67
Figura 25– $t_y(y)$ para $n = 3$ , $p = 1$ e $k = -0.5$ . . . . .	67
Figura 26–(a) $t_y(y)$ com $n = 3$ e $p = \lambda = 1$ , para $k$ pequeno. (b) $t_y(y)$ com $n = 3$ , $p = \lambda = 1$ , para $k$ muito pequeno. . . . .	68
Figura 27–Energia-momentum. (a) $n = 1/2$ e $p = \lambda = 1$ com $k = -0.5$ . (b) $n = 1$ e $p = \lambda = 1$ com $k = -0.5$ . (c) $n = 2$ e $p = \lambda = 1$ com $k = -0.5$ . (d) $n = 3$ e $p = \lambda = 1$ com $k = -0.5$ . . . . .	68
Figura 28–Potencial efetivo com $n = 1$ , $p = 1$ e $\lambda$ variando. . . . .	73
Figura 29–Potencial efetivo. (a) $n = 2$ , $p = 1$ e $k = -0.5$ . (b) $n = 2$ , $p = 1$ , $\lambda = 1$ , com $k$ pequeno. (c) $n = 2$ , $p = 1$ , $\lambda$ , com $k$ muito pequeno. . . . .	74
Figura 30–Potencial efetivo. (a) $n = 3$ , $p = 1$ e $k = -0.5$ . (b) $n = 3$ , $p = 1$ , $\lambda = 1$ , com $k$ pequeno. . . . .	74
Figura 31–Potencial efetivo. (a) $n = 4$ , $p = 1$ , e $k = -0.5$ . (b) $n = 4$ , $p = 1$ , $\lambda = 1$ , com $k$ pequeno. (c) $n = 4$ , $p = 1$ , $\lambda$ , com $k$ muito pequeno. . . . .	75
Figura 32–Modo zero com $n = 1$ e $p = 1$ . . . . .	77
Figura 33–Modo zero. (a) $n = 2$ , $p = 1$ , e $k = -0.05$ . (b) $n = 2$ , $p = 1$ , $\lambda = 1$ , com $k < 0$ . (c) $n = 2$ , $p = 1$ , $\lambda = 1$ , com $k > 0$ . . . . .	77
Figura 34–Modo zero. (a) $n = 4$ , $p = 1$ , e $k = -0.0005$ . (b) $n = 4$ , $p = 1$ , $\lambda = 1$ , com $k < 0$ . (c) $n = 4$ , $p = 1$ , $\lambda = 1$ , com $k > 0$ . . . . .	78
Figura 35–Campo escalar $\Phi(y)$ . (a) $n = 1/2$ e $\lambda = 1$ . (b) $n = 1/2$ e $p = 1$ . . . . .	80
Figura 36–Campo escalar $\Phi(y)$ . (a) $n = 1$ , $p = 1$ e $\lambda = 1$ . (b) $n = 2$ , $\lambda = 1$ e $p = 1$ . . . . .	81
Figura 37–Escalar de torção. (a) $\rho = \lambda = 1$ e $p$ variando. (b) $p = \rho = 1$ e $\lambda$ variando. (c) $\lambda = p = 1$ e $\rho$ variando. . . . .	88
Figura 38– $f(T)$ . (a) $n = \rho = \lambda = 1$ e $p$ variando. (b) $n = p = \rho = 1$ e $\lambda$ variando. (c) $n = \lambda = p = 1$ e $\rho$ variando. . . . .	89
Figura 39– $f(T)$ . (a) $n = \rho = \lambda = p = 1$ , para $k$ pequeno. (b) $n = p = \rho = \lambda = 1$ , para $k$ muito pequeno. . . . .	89
Figura 40– $f(T)$ . (a) $n = 2$ , $\rho = \lambda = p = 1$ , para $k$ pequeno. (b) $n = 2$ , $p = \rho = \lambda = 1$ , para $k$ muito pequeno. . . . .	90
Figura 41– $f(T)$ . (a) $n = 3$ , $\rho = \lambda = p = 1$ , para $k$ pequeno. (b) $n = 3$ , $p = \rho = \lambda = 1$ , para $k$ muito pequeno. . . . .	90
Figura 42– $t_\theta(r)$ . (a) $n = \lambda = \rho = 1$ e $k = -0.5$ . (b) $n = p = \rho = 1$ e $k = -0.5$ . . . . .	92
Figura 43– $t_\theta(r)$ . (a) $n = \lambda = \rho = p = 1$ , para $k$ pequeno. (b) $n = p = \rho = \lambda = 1$ , para $k$ muito pequeno . . . . .	92
Figura 44– $t_0(r)$ . (a) $n = \lambda = \rho = 1$ e $k = -0.5$ . (b) $n = p = \rho = 1$ e $k = -0.5$ . . . . .	93

Figura 45 $-t_0(r)$ . (a) $n = \lambda = \rho = p = 1$ , para $k$ pequeno. (b) $n = p = \rho = \lambda = 1$ , para $k$ muito pequeno. . . . .	93
Figura 46 $-t_r(r)$ . (a) $n = \lambda = \rho = 1$ e $k = -0.5$ . (b) $n = p = \rho = 1$ e $k = -0.5$ . . . . .	94
Figura 47 $-t_r(r)$ . (a) $n = \lambda = \rho = p = 1$ , para $k$ pequeno. (b) $n = p = \rho = \lambda = 1$ , para $k$ muito pequeno. . . . .	94
Figura 48 $-t_\theta(r)$ . (a) $n = 2$ , $p = \rho = 1$ e $k = -0.5$ , com $\lambda$ pequeno. (b) $n = 2$ , $p = \rho = 1$ e $k = -0.5$ , com $\lambda$ grande. . . . .	95
Figura 49 $-t_\theta(r)$ . (a) $n = 2$ , $p = \rho = \lambda = 1$ , para $k$ pequeno. (b) $n = 2$ , $p = \rho = \lambda = 1$ , para $k$ muito pequeno. . . . .	95
Figura 50 $-t_0(r)$ . (a) $n = 2$ , $p = \rho = 1$ e $k = -0.5$ , com $\lambda$ pequeno. (b) $n = 2$ , $p = \rho = 1$ e $k = -0.5$ , com $\lambda$ grande. . . . .	96
Figura 51 $-t_0(r)$ . (a) $n = 2$ , $p = \rho = \lambda = 1$ , para $k$ pequeno. (b) $n = 2$ , $p = \rho = \lambda = 1$ , para $k$ muito pequeno. . . . .	96
Figura 52 $-t_r(r)$ para $n = 2$ , $p = \rho = 1$ e $k = -0.5$ , com $\lambda$ variando. . . . .	97
Figura 53 $-t_r(r)$ . (a) $n = 2$ , $p = \rho = \lambda = 1$ , para $k$ pequeno. (b) $n = 2$ , $p = \rho = \lambda = 1$ , para $k$ muito pequeno. . . . .	97
Figura 54 $-t_\theta(r)$ para $n = 3$ , $p = \rho = 1$ e $k = -0.5$ , com $\lambda$ pequeno. . . . .	98
Figura 55 $-t_\theta(r)$ . (a) $n = 3$ , $p = \rho = \lambda = 1$ , para $k$ pequeno. (b) $n = 3$ , $p = \rho = \lambda = 1$ , para $k$ muito pequeno. . . . .	98
Figura 56 $-t_0(r)$ para $n = 3$ , $p = \rho = 1$ e $k = -0.5$ , com $\lambda$ pequeno. . . . .	99
Figura 57 $-t_0(r)$ . (a) $n = 3$ , $p = \rho = \lambda = 1$ , para $k$ pequeno. (b) $n = 3$ , $p = \rho = \lambda = 1$ , para $k$ muito pequeno. . . . .	99
Figura 58 $-t_r(r)$ para $n = 3$ , $p = \rho = 1$ e $k = -0.5$ , com $\lambda$ pequeno. . . . .	99
Figura 59 $-t_r(r)$ . (a) para $n = 3$ , $p = \rho = \lambda = 1$ , para $k$ pequeno. (b) $n = 3$ , $p = \rho = \lambda = 1$ , para $k$ muito pequeno. . . . .	100
Figura 60 –Energia-momentum. (a) $n = p = \rho = \lambda = 1$ com $k = -0.5$ . (b) $n = 2$ , $p = \rho = \lambda = 1$ com $k = -0.5$ . (c) $n = 3$ , $p = \rho = \lambda = 1$ com $k = -0.5$ . . . . .	101
Figura 61 –Energia-momentum. (a) $n = p = \rho = \lambda = 1$ com $k = -10000$ . (b) $n = 2$ , $p = \rho = \lambda = 1$ com $k = -10000$ . (c) $n = 3$ , $p = \rho = \lambda = 1$ com $k = -10000$ . . . . .	102
Figura 62 –Tensões da brana para $\rho = \lambda = p = 1$ e $k = -0.05$ . (a) $n = 1$ . (b) $n = 2$ . (c) $n = 3$ . . . . .	103
Figura 63 –Densidade de Energia para $n = p = \rho = \lambda = 1$ . (a) $k = -0.005$ . (b) $k = -10000$ . . . . .	104
Figura 64 –Densidade de Energia para $n = 2$ , $p = \rho = \lambda = 1$ . (a) $k = -0.005$ . (b) $k = -0.05$ . (c) $k = -0.1$ . (d) $k = -10000$ . . . . .	104

Figura 65 –Densidade de Energia para $n = 2$ , $p = \rho = \lambda = 1$ . (a) $k = -0.00005$ . (b) $k = -0.0005$ . (c) $k = -0.005$ . (d) $k = -10000$ . . . . .	104
Figura 66 – $\chi(r)$ para $p = \rho = \lambda = 1$ e $k = -0.5$ . (a) $n = 1/2$ . (b) $n = 1$ . (c) $n = 2$ . (d) $n = 3$ . Onde $m = m_0^2 - R_0^{-2}\beta^2$ . . . . .	109
Figura 67 – $\chi(r)$ para $p = \rho = \lambda = 1$ e $m_0 = 1$ . (a) $n = 1$ . (b) $n = 2$ . (c) $n = 3$ . . . . .	110
Figura 68 –Modos massivos para $p = \rho = \lambda = 1$ . (a) $n = 1$ . (b) $n = 2$ . (c) $n = 3$ . . . . .	111
Figura 69 –Espectro massivo para $p = \rho = \lambda = 1$ . (a) $n = 1$ . (b) $n = 2$ . (c) $n = 3$ . . . . .	112
Figura 70 –Razão entre as massas KK. (a) $n = 2$ . (b) $n = 3$ . . . . .	112
Figura 71 –Potencial Efetivo com $n = p = \rho = 1$ . (a) $\lambda$ variando. (b) $\rho$ pequeno. (c) $\rho$ grande. . . . .	115
Figura 72 –Potencial Efetivo com $n = 2$ , $p = \rho = 1$ . (a) $\lambda$ variando. (b) e (c) $\lambda = 1$ e $k$ variando. . . . .	116
Figura 73 –Potencial Efetivo com $n = 3$ , $p = \rho = 1$ . (a) $\lambda$ variando. (b) e (c) $\lambda = 1$ e $k$ variando. . . . .	117
Figura 74 –Modo zero para $n = p = 1$ . (a) $\rho = 1$ e $\lambda$ variando. (b) $\lambda = 1$ e $\rho$ variando. . . . .	118
Figura 75 –Modo Zero para $n = 2$ , $p = \lambda = \rho = 1$ . (a) $k < 0$ . (b) $k > 0$ . . . . .	118
Figura 76 –Campo escalar $\phi(r)$ com $n = p = \rho = \lambda = 1$ . (a) $k$ pequeno. (b) $k$ muito pequeno. . . . .	120
Figura 77 –Campo escalar $\phi(r)$ com $n = 2$ , $p = \rho = \lambda = 1$ . (a) $k$ pequeno. (b) $k$ muito pequeno. . . . .	121
Figura 78 –Campo escalar $\phi(r)$ com $n = 3$ , $p = \rho = \lambda = 1$ . (a) $k$ pequeno. (b) $k$ muito pequeno. . . . .	122

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>NOTAÇÃO E DEFINIÇÕES</b>	<b>20</b>
<b>2.1</b>	<b>Tetradas</b>	<b>20</b>
<b>2.2</b>	<b>Conexão</b>	<b>22</b>
<b>2.3</b>	<b>Curvatura, Torção e Não-Métricidade</b>	<b>23</b>
<b>2.4</b>	<b>Ação Gravitacional</b>	<b>25</b>
<b>3</b>	<b>GRAVIDADE TELEPARALELA</b>	<b>28</b>
<b>3.1</b>	<b>Noções Básicas</b>	<b>28</b>
<b>3.2</b>	<b>Conexão de Weitzenböck</b>	<b>28</b>
<b>3.3</b>	<b>Dual da Torção</b>	<b>30</b>
<b>3.4</b>	<b>Lagrangiana na Gravidade Teleparalela</b>	<b>31</b>
<b>3.5</b>	<b>Equações de Campo na Gravidade Teleparalela</b>	<b>33</b>
<b>3.5.1</b>	<b>Corrente de energia-momentum</b>	<b>34</b>
<b>3.5.2</b>	<b>Superpotencial</b>	<b>36</b>
<b>3.5.3</b>	<b>Equações de Campo</b>	<b>37</b>
<b>4</b>	<b>MUNDO-BRANA-5D</b>	<b>39</b>
<b>4.1</b>	<b>O Problema da Hierarquia</b>	<b>39</b>
<b>4.2</b>	<b>Modelo Kaluza-Klein</b>	<b>40</b>
<b>4.3</b>	<b>Modelo Randall-Sundrum</b>	<b>41</b>
<b>4.4</b>	<b>Mundo-Brana-5D em Gravidade Teleparalela</b>	<b>42</b>
<b>4.4.1</b>	<b>Escalar de Torção para o Mundo-Brana-5D</b>	<b>42</b>
<b>4.4.2</b>	<b>Equações de Campo para o Mundo-Brana-5D</b>	<b>44</b>
<b>5</b>	<b>MUNDO-BRANA-6D</b>	<b>46</b>
<b>5.1</b>	<b>Modelos de Mundo-Brana em 6D</b>	<b>46</b>
<b>5.1.1</b>	<b>Modelos de Mundo-Brana com Simetria Axial em 6D</b>	<b>46</b>
<b>5.1.2</b>	<b>Modelo Gherghetta-Shaposhnikov</b>	<b>47</b>
<b>5.2</b>	<b>Mundo-Brana-6D em Gravidade Teleparalela</b>	<b>48</b>
<b>5.2.1</b>	<b>Escalar de Torção para o Mundo-Brana-6D</b>	<b>49</b>
<b>5.2.2</b>	<b>Equações de Campo para o Mundo-Brana-6D</b>	<b>50</b>
<b>6</b>	<b>TEORIA DA GRAVITAÇÃO MODIFICADA POR <math>f(T)</math></b>	<b>52</b>
<b>6.1</b>	<b>Noções Básicas</b>	<b>52</b>
<b>6.2</b>	<b>Equações de Campo na Gravidade <math>f(T)</math></b>	<b>53</b>

6.2.1	Corrente de energia-momentum na gravidade $f(T)$ . . . . .	54
6.2.2	Superpotencial na gravidade $f(T)$ . . . . .	54
6.2.3	Equação do campo gravitacional na teoria $f(T)$ . . . . .	55
7	MUNDO-BRANA-5D EM GRAVIDADE F(T) . . . . .	57
7.1	Equações de Campo . . . . .	57
7.2	Regime de Brana Fina . . . . .	59
7.2.1	$n = 1/2$ . . . . .	59
7.2.2	$n = 1$ . . . . .	59
7.2.3	$n = 2$ . . . . .	59
7.2.4	$n = 3$ . . . . .	60
7.3	Brana Espessa . . . . .	60
7.3.1	$n = 1/2$ . . . . .	62
7.3.2	$n = 1$ . . . . .	62
7.3.3	$n = 2$ . . . . .	63
7.3.4	$n = 3$ . . . . .	65
7.3.5	Análise geral entre $t_0(y)$ e $t_y(y)$ . . . . .	67
7.4	Perturbações Lineares . . . . .	69
7.5	Localização da Gravidade . . . . .	72
7.5.1	Modo Zero . . . . .	73
7.6	Soluções para um Campo Escalar . . . . .	79
7.6.1	Solução para $n = 1/2$ . . . . .	80
7.6.2	Solução para $n = 1$ . . . . .	80
7.6.3	Solução para $n = 2$ . . . . .	80
7.6.4	Solução para $n = 3$ . . . . .	81
8	MUNDO-BRANA-6D EM GRAVIDADE F(T) . . . . .	83
8.1	Equações de Campo . . . . .	83
8.2	Regime de Brana Fina Tipo-Corda . . . . .	85
8.2.1	$n = 1/2$ . . . . .	86
8.2.2	$n = 1$ . . . . .	86
8.2.3	$n = 2$ . . . . .	86
8.2.4	$n = 3$ . . . . .	87
8.3	Brana Espessa Tipo-Corda . . . . .	87
8.3.1	$n = 1$ . . . . .	92
8.3.2	$n = 2$ . . . . .	94
8.3.3	$n = 3$ . . . . .	98
8.3.4	Análise geral entre $t_\theta(r)$ , $t_0(r)$ e $t_r(r)$ . . . . .	100



<b>8.3.5</b>	<b>Densidade de Energia na Brana</b>	100
<b>8.4</b>	<b>Perturbações Lineares</b>	104
8.4.0.1	Modos Kaluza-Klein	108
<b>8.4.1</b>	<b>Potencial Quântico Analógico</b>	113
<b>8.5</b>	<b>Localização da Gravidade</b>	114
<b>8.5.1</b>	<b>Modo Zero</b>	115
<b>8.6</b>	<b>Soluções para um Campo Escalar Tipo Vortices</b>	118
<b>8.6.1</b>	<b>Solução para <math>n = 1</math></b>	120
<b>8.6.2</b>	<b>Solução para <math>n = 2</math></b>	120
<b>8.6.3</b>	<b>Solução para <math>n = 3</math></b>	121
<b>9</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	123
	<b>REFERÊNCIAS</b>	126

## 1 INTRODUÇÃO

O estudo de teorias que envolvem gravidade modificada tem ganhado bastante atenção, principalmente na Física de altas energias, Cosmologia e Astrofísica. Uma das motivações foi a recente observação de um cenário inesperado para o universo, onde grande quantidade de massa do universo deve ser invisível. Smith [1] e Zwicky [2] observaram que o movimento individual de galáxias em aglomerados é tão intenso que a atração gravitacional de todo o aglomerado de galáxias não é suficiente para segura-lo. Isso sugere que existe um componente desconhecido de matéria para manter o aglomerado, que ficou conhecida como Matéria Escura [3–5].

Existem atualmente varias teorias de gravidade modificada, provavelmente a mais conhecida é a teoria de Mundo-Brana [6], que é um modelo de dimensões extras e surgiu como um meio de entender a diferença na escala de energia dos campos eletromagnéticos e gravitacionais, solucionando assim o problema de hierarquia [7]. A ideia de dimensões extras surgiu pela primeira vez com T. Kaluza e O. Klein onde demonstraram que a interação eletromagnética pode ser vista como tendo natureza geométrica [8, 9]. Inspirados por essa ideia L. Randall e R. Sundrum (RS) propõem um modelo para um mundo de dimensões extras [10, 11], onde o espaço-tempo que percebemos é formado por quatro dimensões usuais do espaço de Minkowski, no qual definimos como brana. Diferente do chamado modelo RS I, que envolve duas branas, o modelo RS II, considera uma brana 4D mergulhada em um espaço 5D chamado de *bulk*.

T. Gherghetta e M. Shaposhnikov (GS) inspirados pelo modelo Randall-Sundrum, desenvolveram um modelo de dimensões extras com simetria axial em 6D ou como é conhecido também de co-dimensão 2. São os chamados defeitos tipo corda [12]. Este nome se dá devido às semelhanças destes modelos com defeitos topológicos tipo corda cósmica [13–28]. O modelo GS adiciona mais uma dimensão espacial, de tal forma que temos uma brana 4D mergulhada em um espaço 6D chamado de *bulk*.

Existem muitas vantagens em se trabalhar com um modelo de dimensões extras quando acrescentamos duas dimensões ao espaço já conhecido 4D (espaço de Minkowski), ao invés de só uma dimensão, que é o caso do modelo RS [29]. Com o modelo em 6D os grávitons massivos contribuem com uma menor correção na Lei de Newton do que em um modelo 5D [12], além de não haver necessidade de ajuste fino na constante cosmológica em 6D com a tensão na brana para cancelamento da constante cosmológica 4D [12]. Com um modelo 6D o confinamento do modo zero do campo vetorial de calibre ocorre de forma simples, sendo necessário apenas a interação com a gravidade, mesmo em modelos finos [13, 14, 30]. É

possível explicar a hierarquia da massa de neutrinos, que são férmions sem carga e de massa muito pequena, através de modelos em 6D compactos [31]. Já existem também alguns trabalhos recentes explicando a possível nova partícula de  $750 \text{ GeV}$  através de um modelo em 6D [32,33].

Todos esses trabalhos consideraram apenas o contribuição da curvatura do espaço-tempo sem torção. Outra teoria possível é o chamado Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral (TEGR) [34–37] que, em vez de usar a curvatura definida através da conexão Levi-Civita [38, 39], usa a conexão de Weitzenböck que não tem curvatura, mas apenas torção [35]. Essa teoria nos permite interpretar a relatividade geral como uma teoria de calibre para um grupo de translação. Nesse contexto, a gravidade não se deve à curvatura, mas à torção. Ou seja, a torção é responsável pela gravitação, não pela geometria da interação, mas agindo como uma força.

Embora as equações de movimento na gravidade teleparalela são dinamicamente equivalentes a RG, a gravidade teleparalela descreve uma geometria diferente, o espaço-tempo de Weitzenböck [35]. A métrica do espaço-tempo  $g_{\mu\nu}$  não desempenha nenhum papel dinâmico na descrição teleparalela da gravitação, essa dinâmica se dar pela tetrada  $h_{\mu}^a$ . Uma generalização da gravidade teleparalela é a gravidade de  $f(T)$  que foi proposta pela primeira vez por Bengochea e Ferraro para explicar a observada aceleração do universo [40]. Modelos baseados na gravidade teleparalela modificada, também foram usados para fornecer uma alternativa à inflação sem *inflaton* [41, 42]. Mais recentemente, Linder [43, 44] propôs dois novos modelos  $f(T)$  para explicar a expansão acelerada do universo e constatou que o a teoria  $f(T)$  pode unificar várias extensões interessantes da gravidade além da relatividade geral.

Devemos notar que a gravidade  $f(T)$  poderia ser uma extensão fenomenológica da gravidade teleparalela. As vantagens da gravidade  $f(T)$  também foram investigadas analisando a estrutura em larga escala [44] e as restrições observacionais nos parâmetros do modelo [45, 46]. Além de obter aceleração, pode-se reconstruir uma variedade de evoluções cosmológicas [47–49], considerar a possibilidade do cruzamento de divisão fantasma [50–52], e ainda investigar as perturbações do vácuo e da matéria [53–55], além da evolução do plano de fundo.

Mesmo sendo uma linha de pesquisa nova, já existem muitos trabalhos publicados no cenário de mundo-brana em uma gravidade  $f(T)$ . Em um modelo 5D, com um  $f(T)$  representado por uma lei de potencia, foi obtido divisão da brana gerada por um único campo escalar real como fonte [56]. Esta solução compartilha propriedades semelhantes àquelas geradas por dois campos escalares interagentes na teoria da RG. De fato, os parâmetros da torção modificam o perfil da densidade de energia que leva à divisão em duas branas [56, 57]. As modificações de torção foram estendidas permitindo o acoplamento geral aos campos escalares [58–60] e uma teoria mimética [61]. Em uma formulação métrica, a gravidade  $f(T)$  induz mudanças na tensor energia-momentum, modificando assim a equação da fonte do estado [62]. A torção também

altera a dinâmica de férmions e as perturbações gravitacionais [63]. Esses resultados inspiraram o tema desse trabalho de dissertação.

Neste trabalho, vamos investigar as soluções de mundo-brana tipo-corda em seis dimensões, causada pela torção no espaço-tempo em uma gravidade  $f(T)$ . No Cap.2 apresentamos noções e definições básicas de gravitação como tetrada, conexão, curvatura, torção, não-metricidade e ação gravitacional. No Cap.3 apresentamos noções básicas da gravidade teleparalela como a conexão de Weitzenböck, dual da torção, a lagrangiana e as equações de campo nesta gravidade.

No Cap.4 apresentamos o problema de hierarquia e a introdução das dimensões extras propostas inicialmente por Kaluza-Klein. Apresentamos o modelo Randall-Sundrum tipo II, que introduz a ideia de mundo-brana acrescentando uma dimensão ao espaço de Minkowski, ou seja, um modelo 5D. Descrevemos o mundo-brana em 5D na gravidade teleparalela. No Cap.5 apresentamos alguns modelos de mundo-brana em 6D, as vantagens de se trabalhar com esses modelos e descrevemos o mundo-brana em 6D na gravidade teleparalela. Já no Cap.6 apresentamos algumas justificativas de se trabalhar com a gravidade  $f(T)$ , além de introduzir noções básicas como a lagrangiana e equação de campo nessa gravidade modificada.

No Cap.7 descrevemos o mundo-brana em 5D na gravidade  $f(T)$ , onde  $f(T) = T + kT^n$ , sendo  $k$  e  $n$  parâmetros da torção que controlam a modificação na teoria teleparalela usual. Apresentamos as equações de Einstein modificada por essa teoria. Analisamos as soluções de vácuo com constante cosmológica para  $n = 1/2, 1, 2, 3$ . Encontramos as soluções internas e externas para  $n = 1/2, 1, 2, 3$ , onde utilizamos um *ansatz* de brana espessa  $e^{2A(r)} = \cosh^{-2b}(\lambda r)$ . Analisamos a localização da gravidade fazendo uma perturbação linear na brana. Por fim, definimos a lagrangiana de matéria como a de um campo escalar real e analisamos as soluções do campo para  $n = 1/2, 1, 2, 3$ .

No Cap.8 descrevemos o mundo-brana em 6D na gravidade  $f(T)$ , apresentamos as equações de Einstein modificada por essa teoria. Analisamos as soluções de vácuo com constante cosmológica para  $n = 1/2, 1, 2, 3$  sendo  $f(T) = T + kT^n$ . Analisamos as soluções internas e externas para  $n = 1, 2, 3$  onde utilizamos um *ansatz* de brana espessa  $e^{2A(r)} = \cosh^{-2b}(\lambda r)$  e  $B(r) = -\ln[\cosh^{-b}(\lambda r)] + \ln[\tanh(\rho r)]$ . Analisamos a localização da gravidade fazendo uma perturbação linear na brana. Por fim, definimos a lagrangiana de matéria como a de um campo escalar complexo e analisamos as soluções do campo para  $n = 1, 2, 3$ . É interessante ressaltar que somos os pioneiros em estudar o comportamento de uma gravidade teleparalela modificada em um cenário de mundo-brana tipo-corda em 6D, todos os nossos resultados são contribuições originais.

## 2 NOTAÇÃO E DEFINIÇÕES

### 2.1 Tetradas

O cenário geométrico de qualquer teoria de calibre para a gravitação é o fibrado tangente, uma construção natural que esta sempre presente no espaço-tempo [64]. De fato, em cada ponto do espaço-tempo tem um espaço base do fibrado, ou seja, existe sempre um espaço tangente ligado a fibra no qual o grupo de calibre atua. Usaremos o alfabeto Grego ( $\mu, \nu, \rho, \dots = 0, 1, 2, 3$ ) para os índices relacionados com o espaço-tempo, e a primeira metade do alfabeto Latino ( $a, b, c, \dots = 0, 1, 2, 3$ ) para os índices relacionados ao espaço tangente, que assumimos ser um espaço-tempo de Minkowski com a métrica

$$\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (2.1)$$

A segunda metade do alfabeto latino ( $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$ ) será para os índices de espaço tri-dimensional. Assim, as coordenadas do espaço-tempo serão representadas por  $x^\mu$ , enquanto que as coordenadas do espaço tangente serão representadas por  $x^a$ . Tais coordenadas definem, dentro dos seus domínios, bases locais para campos vetoriais, formados pelos conjuntos de gradientes [64]

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad e \quad \partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial x^a}, \quad (2.2)$$

assim como bases  $\{dx^\mu\}$  e  $\{dx^a\}$  para campos covetoriais, ou diferenciais. Estas bases são duais, no sentido de que [64]

$$dx^\mu \partial_\nu = \delta_\nu^\mu \quad e \quad dx^a \partial_b = \delta_b^a. \quad (2.3)$$

Dentro dos seus respectivos domínios, qualquer vetor ou covetor pode ser expresso em termos destas bases. Além disso, elas podem ser estendidas, por meio do produto direto, para constituir bases para campos tensoriais mais gerais [64].

Usaremos a notação  $\{e_a, e^a\}$  para bases lineares, e  $\{h_a, h^a\}$  para um campo de tetradas qualquer. Uma base holônoma como  $\{\partial_a\}$ , relacionada às coordenadas, é um caso muito particular de uma base linear. Qualquer conjunto de quatro campos linearmente independentes  $\{e_a\}$  vão formar outra base, e vão ter um dual  $\{e^a\}$ , cujos membros são tais que

$$e^a(e_b) = \delta_b^a. \quad (2.4)$$

Estes campos são as bases lineares gerais sobre a variedade diferenciável do espaço-tempo cujo conjunto constitui o fibrado das bases lineares. É claro que, nos domínios comuns em que eles

são definidos, os membros de uma base podem ser escritos em termos dos membros da outra base, isto é,

$$e_a = e_a^\mu \partial_\mu \quad e \quad e^a = e^a_\mu dx^\mu, \quad (2.5)$$

e vice-versa. Podemos ainda considerar transformações gerais que levam qualquer base  $\{e_a\}$  em qualquer outro conjunto  $\{e'_a\}$  de quatro campos linearmente independentes. Estas transformações constituem o grupo linear  $GL(4, \mathbb{R})$  de todas as matrizes reais  $4 \times 4$  inversíveis [65]. Note que estas bases, com seus fibrados, são partes constitutivas do espaço-tempo. Elas estão automaticamente presentes assim que o espaço-tempo é assumido como sendo uma variedade diferenciável.

Considere agora a métrica do espaço-tempo  $\mathbf{g}$ , com componentes  $g_{\mu\nu}$ , em alguma base dual holônoma  $\{dx^\mu\}$ :

$$\mathbf{g} = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.6)$$

Um campo de tetradas  $h_a = h_a^\mu \partial_\mu$  será uma base linear que relaciona  $\mathbf{g}$  a métrica do espaço tangente  $\eta = \eta_{ab} dx^a \otimes dx^b = \eta_{ab} dx^a dx^b$  por

$$\eta_{ab} = g_{\mu\nu} h_a^\mu h_b^\nu. \quad (2.7)$$

Isto significa que um campo de tetradas é uma base linear cujos membros  $h_a$  são pseudo-ortogonais pela métrica  $g_{\mu\nu}$  [64]. Como as componentes dos membros da base dual é  $h^a = h^a_\nu dx^\nu$ , então

$$h^a_\mu h_a^\nu = \delta_\mu^\nu \quad e \quad h^a_\mu h_b^\mu = \delta_b^a, \quad (2.8)$$

e portanto a Eq.( 2.7) tem a inversa

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a_\mu h^b_\nu. \quad (2.9)$$

Note que com a métrica da Eq.(2.1) e com a Eq.(2.9), temos o determinante

$$g = \det(g_{\mu\nu}), \quad (2.10)$$

e assim

$$h = \det(h_a^\nu) = \sqrt{-g}. \quad (2.11)$$

Um campo de tetradas pode relacionar tensores internos com externos da seguinte forma,

$$A^\rho = h_a^\rho A^a \quad e \quad A^a = h^a_\rho A^\rho. \quad (2.12)$$

## 2.2 Conexão

Objetos com um comportamento bem definido sob transformações dependentes de pontos, são chamadas covariantes sob essas transformações. Para definir derivadas que são covariantes, é essencial introduzir as conexões  $\Gamma^\rho{}_{\nu\mu}$ , que se comportam como vetores no que diz respeito ao índice de espaço-tempo, mas cujo comportamento não-tensoriais nos índices algébricos apenas compensa a não-tensorialidade das derivadas [65]. Conexões relacionados ao grupo linear  $GL(4, \mathbb{R})$  e seus subgrupos, como o grupo de Lorentz  $SO(3, 1)$ , são chamados de conexões lineares. Conexões lineares têm um alto grau de intimidade com o espaço-tempo porque elas são definidas no fibrado das bases lineares, que faz parte da estrutura de variedade. Esse fibrado exibe a propriedade de soldagem, que leva à existência de torção para todas as conexões [64].

A conexão de spin  $\bar{\Gamma}_\mu$  é uma 1-forma de conexão que assume valores na álgebra de Lie do grupo de Lorentz [65],

$$\bar{\Gamma}_\mu = \frac{1}{2} \bar{\Gamma}^{ab}{}_{\mu} S_{ab}, \quad (2.13)$$

onde  $S_{ab}$  é uma dada representação dos geradores de Lorentz [66]. Esta conexão define a derivada covariante de Fock-Ivanenko [67, 68]

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - i\bar{\Gamma}_\mu, \quad (2.14)$$

que é uma derivada agindo somente nos índices internos, ou melhor, agindo no espaço tangente. Assim, a derivada covariante de Fock-Ivanenko agindo em um tensor  $A^a$  [67, 68], é

$$\mathcal{D}_\mu A^a = \partial_\mu A^a + \bar{\Gamma}^a{}_{b\mu} A^b. \quad (2.15)$$

Uma conexão linear geral  $\Gamma^\rho{}_{\nu\mu}$  se relaciona com a conexão de spin correspondente  $\bar{\Gamma}^a{}_{b\mu}$  da seguinte forma [69]

$$\Gamma^\rho{}_{\nu\mu} = h_a{}^\rho \partial_\mu h^a{}_\nu + h_a{}^\rho \bar{\Gamma}^a{}_{b\mu} h^b{}_\nu \equiv h_a{}^\rho \mathcal{D}_\mu h^a{}_\nu. \quad (2.16)$$

A relação inverso é

$$\bar{\Gamma}^a{}_{b\mu} = h^a{}_\rho \partial_\mu h^{\rho}{}_\nu + h^a{}_\nu \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} h_b{}^\rho \equiv h^a{}_\rho \nabla_\mu h^{\rho}{}_\nu, \quad (2.17)$$

onde  $\nabla_\mu$  é a derivada covariante usual na conexão  $\Gamma^\rho{}_{\nu\mu}$ , que age nos índices externos, ou melhor, age no espaço-tempo. A derivada  $\nabla_\mu$  atuando no tensor  $A^\rho$  é

$$\nabla_\mu A^\rho = \partial_\mu A^\rho + \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} A^\nu, \quad (2.18)$$

As Eqs.(2.16 e 2.17) são formas diferentes de se expressar o fato de que a derivada total da

tetrada, ou seja, a derivada que age em ambos os índices, se anula

$$\partial h^a{}_\nu - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} h^a{}_\rho + \bar{\Gamma}^a{}_{b\mu} h^b{}_\nu = 0. \quad (2.19)$$

Usando as Eqs.(2.15 e 2.18), podemos relacionar as duas derivadas covariantes

$$\mathcal{D}_\mu A^a = h^a{}_\rho \nabla_\mu A^\rho. \quad (2.20)$$

A condição para uma conexão ser compatível com a métrica  $g_{\mu\nu}$  é que a não-metricidade  $Q_{\lambda\mu\nu} = 0$  [69], definida como:

$$Q_{\lambda\mu\nu} \equiv \nabla_\lambda g_{\mu\nu} \equiv \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} = 0, \quad (2.21)$$

ou em termos da tetrada como

$$\mathcal{D}_\lambda \eta_{ab} \equiv \partial_\lambda \eta_{ab} - \bar{\Gamma}^d{}_{a\mu} \eta_{db} - \bar{\Gamma}^d{}_{b\mu} \eta_{ad} = 0, \quad (2.22)$$

o que equivale á

$$\bar{\Gamma}^d{}_{ba\mu} = -\bar{\Gamma}^d{}_{ab\mu}. \quad (2.23)$$

Conseqüentemente, o conteúdo fundamental da propriedade de preservação da métrica é que a conexão de spin é Lorentziana. Por outro lado, quando  $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} \neq 0$ , o valor correspondente da conexão de spin  $\bar{\Gamma}^a{}_{b\mu}$  não pode assumir valores na álgebra de Lie do grupo Lorentz, ou seja, não é uma conexão Lorentziana [69].

### 2.3 Curvatura, Torção e Não-Metricidade

De um ponto de vista formal, podemos dizer que curvatura e torção são propriedades da conexões [64], não do próprio espaço. Isto se torna evidente se notarmos que muitas conexões diferentes podem existir no mesmo espaço-tempo [35]. Quando nos restringimos ao caso especial da relatividade geral, Temos que a única conexão presente é a conexão de Levi-Civita, isso permite que essa conexão seja incorporada á própria definição do espaço-tempo. No entanto, na presença de conexões com curvatura e torção diferentes é muito mais conveniente considerarmos o espaço-tempo simplesmente como uma variedade, e as conexões junto com suas curvaturas e torções como estruturas adicionais.

A curvatura e a torção da conexão de spin  $\bar{\Gamma}^a{}_{b\nu}$  são definidas respectivamente como [69, 70]

$$R^a{}_{b\mu\nu} = \partial_\mu \bar{\Gamma}^a{}_{b\nu} - \partial_\nu \bar{\Gamma}^a{}_{b\mu} + \bar{\Gamma}^a{}_{c\mu} \bar{\Gamma}^c{}_{b\nu} - \bar{\Gamma}^a{}_{c\nu} \bar{\Gamma}^c{}_{b\mu} \quad (2.24)$$

e

$$T^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu h^a{}_\nu - \partial_\nu h^a{}_\mu + \bar{\Gamma}^a{}_{c\mu} h^c{}_\nu - \bar{\Gamma}^a{}_{c\nu} h^c{}_\mu. \quad (2.25)$$



A curvatura é uma 2-forma que assume valores na álgebra de Lie do Grupo Lorentz [65],

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} R^a{}_{b\mu\nu} S_a{}^b, \quad (2.26)$$

com  $S_a{}^b$  uma dada representação dos geradores Lorentz. Torção é uma 2-forma que assume valores na álgebra de Lie do grupo de translação,

$$T_{\mu\nu} = T^a{}_{\mu\nu} P_a, \quad (2.27)$$

onde  $P_a = \partial_a$  os geradores de translação. Usando a Eq.(2.17) a curvatura e a torção podem ser escritos em termos do espaço-tempo:

$$R^\rho{}_{\lambda\mu\nu} \equiv h_a{}^\rho h^b{}_\lambda R^a{}_{b\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\rho + \Gamma^\rho{}_{\sigma\mu} \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma - \Gamma^\rho{}_{\sigma\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma \quad (2.28)$$

e

$$T^\rho{}_{\mu\nu} \equiv h_a{}^\rho T^a{}_{\mu\nu} = \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}. \quad (2.29)$$

Uma conexão geral pode se relacionar com a conexão de Levi-Civita [35]

$$\Gamma^\rho{}_{\nu\mu} = \{\overset{\rho}{\nu\mu}\} + K^\rho{}_{\nu\mu} + L^\rho{}_{\nu\mu}, \quad (2.30)$$

onde

$$\{\overset{\rho}{\nu\mu}\} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\nu\mu}) \quad (2.31)$$

é a conexão de Levi-Civita da relatividade geral [38], e

$$K^\rho{}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} (T_\nu{}^\rho{}_\mu + T_\mu{}^\rho{}_\nu - T^\rho{}_{\nu\mu}) \quad (2.32)$$

é definido como o tensor de contorção, e

$$L^\rho{}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} (Q_\nu{}^\rho{}_\mu + Q_\mu{}^\rho{}_\nu - Q^\rho{}_{\nu\mu}), \quad (2.33)$$

é definido como o tensor de deformação. De maneira similar, uma conexão de spin geral pode está relacionada com uma conexão de spin de Levi-Civita,

$$\bar{\Gamma}^c{}_{a\mu} = \overline{\{^c_{a\mu}\}} + K^c{}_{a\mu} + L^c{}_{a\mu}, \quad (2.34)$$

onde  $\overline{\{^c_{a\mu}\}}$  é o coeficiente de rotação de Ricci, a conexão de spin da relatividade geral.

Com os objetos geométricos  $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ ,  $T^\alpha{}_{\mu\nu}$  e  $Q_{\alpha\mu\nu}$  bem definidos nas Eqs.(2.21,2.28 e 2.29), podemos usá-los para caracterizar um espaço-tempo de Minkowski métrico, plano e com torção nula [71]. Em um espaço-tempo métrico a conexão é compatível com a métrica, ou seja,  $Q_{\lambda\mu\nu} = 0$  [71]. No espaço-tempo não-métrico o comprimento dos vetores mudam à medida que os transportamos em paralelo, como bem ilustrado na Fig.(1). Em um espaços

métricos o comprimento dos vetores é conservado. Já no um espaço-tempo sem torção a conexão é simétrica,  $T^\rho{}_{\mu\nu} = 0$  [71]. A torção não permite o fechamento do paralelogramo formado quando dois vetores infinitesimais paralelos são transportados juntos. Por esse motivo, costuma-se dizer que os paralelogramos não fecham na presença de torção, como bem ilustrado pela Fig.(2). Em um espaço-tempo plano a conexão não é curva,  $R^\rho{}_{\lambda\mu\nu} = 0$  [71]. A curvatura mede a rotação experimentada por um vetor quando é transportado paralelamente ao longo de uma curva fechada, isso representa um obstáculo para comparar vetores definidos em diferentes pontos do espaço-tempo, como bem ilustrado na Fig.(3).

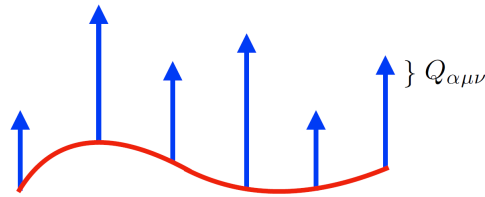


Figura 1: Ilustração para o significado geométrico da não-metricidade  $Q_{\alpha\mu\nu}$  [71].

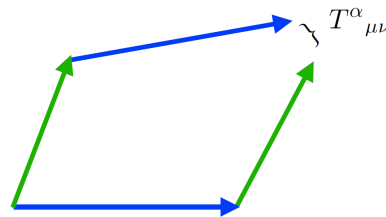


Figura 2: Ilustração para o significado geométrico da Torção  $T^{\alpha}{}_{\mu\nu}$  [71].

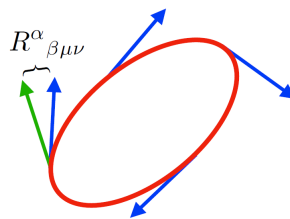


Figura 3: Ilustração para o significado geométrico da curvatura  $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$  [71].

## 2.4 Ação Gravitacional

Gravidade e geometria se acompanharam desde a concepção da RG formulada por Einstein em termos da curvatura do espaço-tempo. Mas, de maneira mais geral por conta da sua estrutura geométrica, a RG não é escrita apenas em termos da curvatura, mas também da torção

e da não-métricidade do espaço-tempo. A ação gravitacional mais geral por conta da geometria, quadrática na métrica, tem a forma [71]

$$\mathcal{S} = -\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \int \left( g^{\nu\mu} R_{\nu\mu} - \frac{1}{2} S_{\rho}{}^{\nu\mu} T^{\rho}{}_{\nu\mu} - \lambda^{\rho}{}_{\nu\mu} Q_{\rho}{}^{\nu\mu} \right) d^4x, \quad (2.35)$$

onde  $g$  é o determinante da métrica,  $S_{\rho}{}^{\nu\mu}$  é o tensor dual da torção,  $\lambda^{\rho}{}_{\nu\mu}$  se apresenta como sendo o tensor dual da não-métricidade e

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (2.36)$$

Com a Eq.(2.35) podemos definir representações alternativas da RG formulada por Einstein [38, 39]. Note que, fazendo  $Q_{\rho}{}^{\nu\mu} = 0$  e  $T^{\rho}{}_{\mu\nu} = 0$  na Eq.(2.35) chegamos na formulação já conhecida da RG, onde a gravidade é identificada com a curvatura do espaço-tempo e a dinâmica é descrita pela ação Hilbert

$$\mathcal{S} = -\frac{\sqrt{-g}}{2k} \int g^{\nu\mu} R_{\nu\mu} d^4x = -\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \int R d^4x, \quad (2.37)$$

Uma representação geométrica alternativa, seria atribuindo gravidade à torção, onde  $Q_{\rho}{}^{\nu\mu} = 0$  e  $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = 0$  na Eq.(2.35) que é conhecida como Equivalente Teleparalelo de RG (TEGR)[71]

$$\mathcal{S} = \frac{\sqrt{-g}}{4k} \int S_{\rho}{}^{\nu\mu} T^{\rho}{}_{\nu\mu} d^4x = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \int T d^4x. \quad (2.38)$$

Com a curvatura e torção nulas, ou seja,  $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = 0$  e  $T^{\rho}{}_{\mu\nu} = 0$  na Eq.(2.35), temos uma terceira estrutura geométrica para a formulação de RG

$$\mathcal{S} = \frac{\sqrt{-g}}{2k} \int \lambda^{\rho}{}_{\nu\mu} Q_{\rho}{}^{\nu\mu} d^4x = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \int Q d^4x. \quad (2.39)$$

que é a mais simples entre as três representações equivalentes de RG porque não há curvatura nem a torção. Essa representação é conhecida como Equivalente Teleparalelo Simétrico de RG (STEGR)[71]. A Fig.(4) resume as três descrições gravitacionais alternativas da gravidade juntas com suas principais propriedades, onde fazemos  $\kappa \rightarrow 1$ .

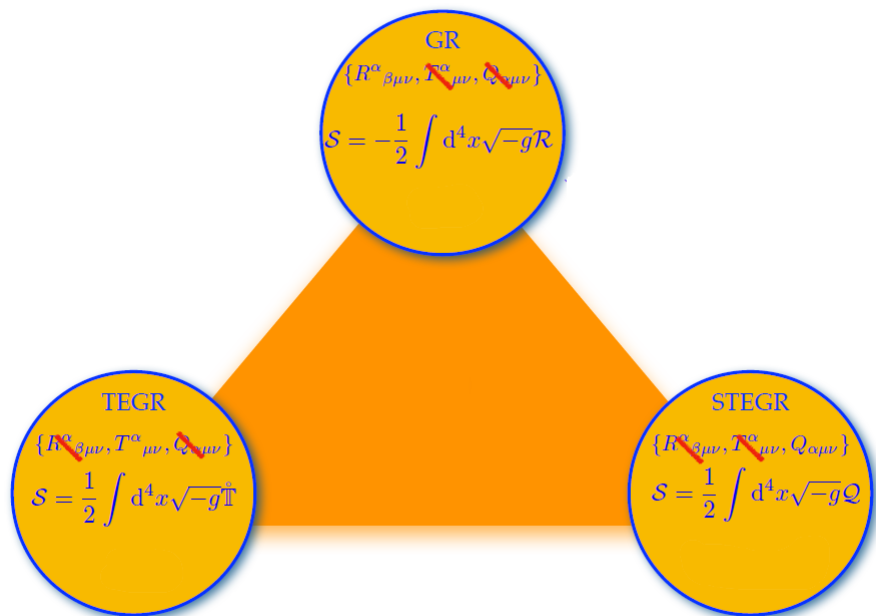


Figura 4: Descrições Gravitacionais Alternativas [71].

### 3 GRAVIDADE TELEPARALELA

#### 3.1 Noções Básicas

Embora a gravidade teleparalela é equivalente a RG, existem diferenças conceituais importantes, que nos motiva a utilizar essa abordagem. De acordo com a relatividade geral, a curvatura é usada para geometrizar a interação gravitacional, e por isso o conceito de força gravitacional não entra nesta descrição. Por outro lado, na gravidade teleparalela a gravitação é gerada pela torção, mas neste caso a torção não entra na gravitação geometrizando a interação, mas atuando como uma força. Isto significa que no equivalente teleparalelo da relatividade geral não existem geodésicas, mas sim equações de força [34]. Desta forma, como já foi visto na sessão 2.4 do capítulo 1, a interação gravitacional pode ser descrita alternativamente em termos de curvatura, como é geralmente feito na relatividade geral[38, 39], ou em termos de torção, que nesse caso teremos a gravidade teleparalela.

Um ponto positivo que nos motiva a utilizar gravidade teleparalela é que como qualquer outra interação da natureza, a gravitação apresenta uma descrição em termos de uma teoria de calibre, e a gravidade teleparalela é conhecida como sendo uma teoria de calibre para o grupo das translações, com a torção fazendo o papel de força [35]. E como a propriedade da universalidade da gravitação nos garante que todas as partículas da natureza sentem a gravitação da mesma forma. Em outras palavras, objetos com massas distintas vão sentir a gravitação de tal forma que todos eles vão adquirir a mesma aceleração. Como consequência desta propriedade, torna-se possível descrever a gravitação, não como uma força, mas como uma deformação do espaço-tempo.

Como a gravitação tem como fonte energia e momento, temos então uma teoria de calibre para o grupo das translações, e não para um outro grupo do espaço-tempo. Como é bem conhecido do teorema de Noether [72], energia e momento são conservadas desde que o sistema físico seja invariante sob translações no espaço-tempo. Por isso é esperado que o campo gravitacional seja representado por uma teoria de calibre para o grupo das translações. Isto é bem semelhante ao campo eletromagnético, cuja fonte, nesse caso a quadri-corrente elétrica, é conservada devido a invariância da teoria sob transformações do grupo unitário  $U(1)$ , que é o grupo de calibre da teoria de Maxwell[66].

#### 3.2 Conexão de Weitzenböck

A conexão relevante para a gravitação teleparalela é a chamada conexão de Weitzenböck [35]. Uma característica impotente dessa conexão é que a correspondente conexão de

spin se anula identicamente

$$\tilde{\Gamma}_{b\mu}^a = 0. \quad (3.1)$$

Assim, com a Eq.(2.16), podemos escrever a conexão de Weitzenböck como

$$\tilde{\Gamma}^\rho{}_{\nu\mu} = h_a{}^\rho \partial_\mu h^a{}_\nu, \quad (3.2)$$

que é completamente definido pela tetrada. Com a Eq.(2.21), temos que

$$\nabla_\lambda h^a{}_\mu \equiv \partial_\lambda h^a{}_\mu - \tilde{\Gamma}^\rho{}_{\lambda\mu} h^a{}_\rho = 0, \quad (3.3)$$

que é a chamada condição de paralelismo absoluto [73]. As conexões de Weitzenböck e de Levi-Civita estão relacionadas por

$$\tilde{\Gamma}^\rho{}_{\nu\mu} = \{v\mu\}^\rho + K^\rho{}_{\nu\mu}, \quad (3.4)$$

onde

$$\{v\mu\}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\nu\mu}) \quad (3.5)$$

é a conexão de Levi-Civita da relatividade geral, e

$$K^\rho{}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} (T_\nu{}^\rho{}_\mu + T_\mu{}^\rho{}_\nu - T^\rho{}_{\nu\mu}) \quad (3.6)$$

é definido como tensor contorção da conexão de Weitzenböck. A curvatura representada pela Eq.(2.24) na conexão de Weitzenböck se anula:

$$R^a{}_{b\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{\Gamma}_{b\nu}^a - \partial_\nu \tilde{\Gamma}_{b\mu}^a + \tilde{\Gamma}^a{}_{c\mu} \tilde{\Gamma}_{b\nu}^c - \tilde{\Gamma}^a{}_{c\nu} \tilde{\Gamma}_{b\mu}^c = 0, \quad (3.7)$$

ou seja,

$$R^\rho{}_{b\mu\nu} \equiv h_a{}^\rho h^b{}_\lambda R^a{}_{b\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{\Gamma}_{\lambda\nu}^\rho - \partial_\nu \tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^\rho + \tilde{\Gamma}^\rho{}_{\sigma\mu} \tilde{\Gamma}_{\lambda\nu}^\sigma - \tilde{\Gamma}^\rho{}_{\sigma\nu} \tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^\sigma = 0. \quad (3.8)$$

No caso da torção representada pela Eq.(2.25) na conexão de Weitzenböck não se anula,

$$\begin{aligned} T^a{}_{\mu\nu} &= \partial_\mu h^a{}_\nu - \partial_\nu h^a{}_\mu + \tilde{\Gamma}^a{}_{c\mu} h^c{}_\nu - \tilde{\Gamma}^a{}_{c\nu} h^c{}_\mu \\ &= \partial_\mu h^a{}_\nu - \partial_\nu h^a{}_\mu, \end{aligned} \quad (3.9)$$

ou seja,

$$T^\rho{}_{\mu\nu} \equiv h_a{}^\rho T^a{}_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^\rho{}_{\nu\mu} - \tilde{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu}. \quad (3.10)$$

Podemos dizer então que a conexão de Weitzenböck onde  $T^\rho{}_{\mu\nu} \neq 0$  e  $R^\rho{}_{b\mu\nu} = 0$ , pode ser considerada uma espécie de dual da conexão da RG onde  $T^\rho{}_{\mu\nu} = 0$  e  $R^\rho{}_{b\mu\nu} \neq 0$ [74]. A Fig.(5) representa a passagem do espaço-tempo de Riemann-Cartan que é o mais geral, para os demais

espaço-tempo, através de reduções, considerando a torção  $T = 0$  e a curvatura  $R = 0$ .

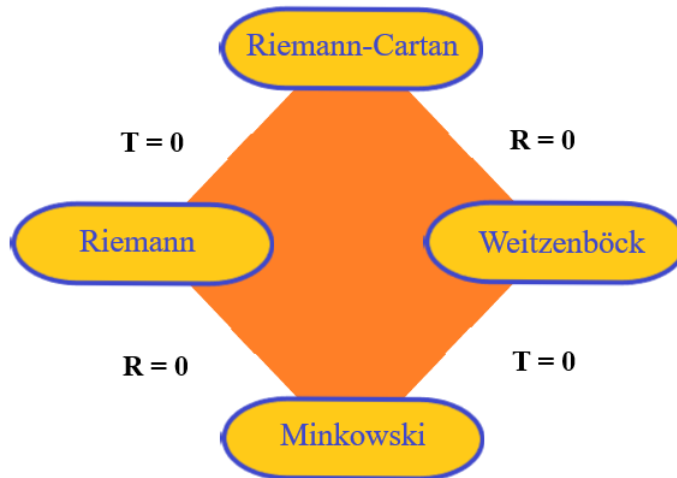


Figura 5: A representação da redução do espaço-tempo considerando a Torção  $T = 0$  e a curvatura  $R = 0$ .

### 3.3 Dual da Torção

Uma definição de dual generalizada envolvendo todas as contrações possíveis dos índices, no caso da torção [35]

$$\star T^{\lambda}{}_{\mu\nu} \equiv h \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left( a T^{\lambda\rho\sigma} + b T^{\rho\lambda\sigma} + c T^{\alpha\rho}{}_{\alpha} g^{\lambda\sigma} \right), \quad (3.11)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes para definimos. Podemos observar que o primeiro e o segundo termos da Eq.(3.11) diferem apenas por uma permutação dos dois primeiros índices. Como  $T^{\lambda\rho\sigma}$  é anti-simétrico nos dois últimos índices, mas não tem simetria entre o primeiro e o terceiro índice, e considerando que ambos são contraídos com  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ , o primeiro termo contribui com metade do número de termos independentes em relação ao segundo. Isso significa que, para eliminar contrações equivalentes, é necessário que  $a$  seja metade do valor de  $b$ , ou seja,

$$b = 2a \quad (3.12)$$

com isso a Eq.(3.11) toma a forma

$$\star T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = h \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left( a T^{\lambda\rho\sigma} + 2a T^{\rho\lambda\sigma} + c T^{\alpha\rho}{}_{\alpha} g^{\lambda\sigma} \right). \quad (3.13)$$

Agora, em um espaço-tempo quadri-dimensional, o dual duplo da torção deve,

como qualquer outra forma, satisfazer a relação [35, 75]

$$\star\star T^\lambda{}_{\mu\nu} = -T^\lambda{}_{\mu\nu}, \quad (3.14)$$

que com a Eq.(3.13) obtemos que

$$\begin{aligned} 8a^2 - 2ac &= 1 \\ 8a^2 + 2ac &= 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

que por sua vez nos dar

$$a = \frac{1}{4}, \quad c = -1 \quad (3.16)$$

e assim, através da Eq.(3.12), temos

$$b = \frac{1}{2}. \quad (3.17)$$

Substituindo os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  na Eq.(3.13), temos

$$\star T^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{\hbar}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} S^{\lambda\mu\nu}, \quad (3.18)$$

onde

$$S^{\lambda\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} T^{\lambda\rho\sigma} + \frac{1}{2} T^{\rho\lambda\sigma} + T^{\alpha\rho}{}_{\alpha} g^{\lambda\sigma} \right) \quad (3.19)$$

é um tensor anti-simétrico nos dois últimos índices  $S^{\lambda\mu\nu} = -S^{\lambda\nu\mu}$ , definido como superpotencial[75].

### 3.4 Lagrangiana na Gravidade Teleparalela

Como uma teoria de calibre para o grupo de translação, a ação gravitacional de Gravidade teleparalela pode ser escrita como [35]

$$\mathcal{S} = \frac{c^4}{16\pi G} \int \text{tr}(T \wedge \star T), \quad (3.20)$$

tipo Yang-Mills, onde

$$T = \frac{1}{2} T^a{}_{\mu\nu} P_a dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (3.21)$$

é a torção em 2-forma, e

$$\star T = \frac{1}{2} (\star T^b{}_{\rho\sigma}) P_b dx^\rho \wedge dx^\sigma \quad (3.22)$$

é a forma dupla correspondente. A ação descrita pela Eq.(3.20) pode ser escrita como [76, 77]

$$\mathcal{S} = \frac{c^4}{16\pi G} \int \eta_{ab} T^a \wedge \star T^b, \quad (3.23)$$



ou de forma direta

$$\mathcal{S} = \frac{c^4}{64\pi G} \int \eta_{ab} T^a{}_{\mu\nu} (\star T^b{}_{\rho\sigma}) dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma, \quad (3.24)$$

onde

$$dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} h^2 d^4x, \quad (3.25)$$

com  $h = \sqrt{-g}$ . A ação da Eq.(3.20) se reduz a [76, 77]

$$\mathcal{S} = -\frac{c^4}{64\pi G} \int T_{\alpha\mu\nu} (\star T^\alpha{}_{\rho\sigma}) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} h^2 d^4x, \quad (3.26)$$

usando a identidade  $T^\alpha{}_{\rho\sigma} = h_b{}^\alpha T^b{}_{\rho\sigma}$ . Como já definido na Eq.(3.18), o dual generalizado

$$\star T^\alpha{}_{\rho\sigma} = \frac{h}{2} \varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu} S^{\alpha\mu\nu}, \quad (3.27)$$

substituindo na Eq.(3.26), temos

$$\mathcal{S} = -\frac{c^4}{64\pi G} \int T_{\alpha\mu\nu} \left( \frac{h}{2} \varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu} S^{\alpha\mu\nu} \right) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} h^2 d^4x. \quad (3.28)$$

Assim a ação assume a forma [76, 77]

$$\mathcal{S} = \frac{hc^4}{32\pi G} \int T_{\rho\mu\nu} S^{\rho\mu\nu} d^4x. \quad (3.29)$$

Temos então, a correspondente Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{hc^4}{32\pi G} T_{\rho\mu\nu} S^{\rho\mu\nu}, \quad (3.30)$$

onde

$$S^{\rho\mu\nu} = -S^{\rho\nu\mu} = K^{\mu\nu\rho} - g^{\rho\nu} T^{\sigma\mu}{}_\sigma + g^{\rho\mu} T^{\sigma\nu}{}_\sigma, \quad (3.31)$$

já definido na Eq.(3.19) como um superpotencial, e

$$K^{\nu}{}_{\rho\mu} = \frac{1}{2} (T_{\rho}{}^{\nu}{}_{\mu} + T_{\mu}{}^{\nu}{}_{\rho} - T^{\nu}{}_{\rho\mu}) \quad (3.32)$$

é o tensor contorção na conexão de Weitzenböck. Usando a identidade  $K^{\nu}{}_{\rho\mu} = T^{\nu}{}_{\rho\mu}$ , que segue da definição da contorção, a Eq.(3.30) pode ser alternativamente escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{hc^4}{16\pi G} (K^{\mu\nu\rho} K_{\rho\nu\mu} - K^{\mu\rho}{}_{\mu} K^{\nu}{}_{\rho\nu}). \quad (3.33)$$

Reescrevendo a lagrangiana puramente em termos da torção, substituindo a Eq.(3.32) na Eq.(3.33), temos

$$\mathcal{L} = \frac{hc^4}{16\pi G} \left( \frac{1}{4} T^{\rho}{}_{\mu\nu} T_{\rho}{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} T^{\rho}{}_{\mu\nu} T^{\nu\mu}{}_{\rho} - T^{\rho}{}_{\mu\rho} T^{\nu\mu}{}_{\nu} \right) = \frac{hc^4}{32\pi G} T, \quad (3.34)$$

definindo

$$T = 2 \left( \frac{1}{4} T^\rho{}_{\mu\nu} T_\rho{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} T^\rho{}_{\mu\nu} T^{\nu\mu}{}_\rho - T^\rho{}_{\mu\rho} T^{\nu\mu}{}_\nu \right) = T_{\rho\mu\nu} S^{\rho\mu\nu}. \quad (3.35)$$

O primeiro termo da Eq.(3.34) corresponde ao lagrangiano usual das teorias de calibre. No entanto, devido á presença de um campo de tetradas no caso gravitacional, os índices internos e de espaço-tempo podem ser transformados uns nos outros, e consequentemente novas contrações tornam-se possíveis [35]. É exatamente esta possibilidade que nos fornece os outros dois termos na lagrangiana [35].

### 3.5 Equações de Campo na Gravidade Teleparalela

Vamos agora considerar a lagrangiana [38]

$$\mathfrak{L} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_m, \quad (3.36)$$

onde  $\mathcal{L}_m$  é a lagrangiana de um campo de matéria qualquer. A ação tem a forma

$$\mathfrak{S} = \int \mathfrak{L} d^4x = \int (\mathcal{L} + \mathcal{L}_m) d^4x, \quad (3.37)$$

e a equação do campo gravitacional é obtida a partir da equação de Euler Lagrange, fazendo variações em termos da tetrada  $h^a{}_\rho$ ,

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial h^a{}_\rho} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_\sigma h^a{}_\rho)} = 0 \quad (3.38)$$

assim

$$\frac{\partial (\mathcal{L} + \mathcal{L}_m)}{\partial h^a{}_\rho} - \partial_\sigma \frac{\partial (\mathcal{L} + \mathcal{L}_m)}{\partial (\partial_\sigma h^a{}_\rho)} = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^a{}_\rho} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma h^a{}_\rho)} = - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial h^a{}_\rho} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial (\partial_\sigma h^a{}_\rho)} \right]. \quad (3.39)$$

Usando a Eq.(3.34), temos

$$\frac{1}{4\kappa} \left[ \frac{\partial (hT)}{\partial h^a{}_\rho} - \partial_\sigma \frac{\partial (hT)}{\partial (\partial_\sigma h^a{}_\rho)} \right] = - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial h^a{}_\rho} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial (\partial_\sigma h^a{}_\rho)} \right], \quad (3.40)$$

sendo

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (3.41)$$

### 3.5.1 Corrente de energia-momentum

Com a primeira parte da Eq.(3.40), pegando a primeira derivada funcional e abrindo termo a termo, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial hT}{\partial h^a{}_\rho} = \frac{h}{4} \left( \frac{\partial T^{\rho}{}_{\mu\nu}}{\partial h^a{}_\rho} T^{\mu\nu} + T^{\rho}{}_{\mu\nu} \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial h^a{}_\rho} \right) + \frac{h}{2} \left( \frac{\partial T^{\rho}{}_{\mu\nu}}{\partial h^a{}_\rho} T^{\nu\mu}{}_\rho + T^{\rho}{}_{\mu\nu} \frac{\partial T^{\nu\mu}{}_\rho}{\partial h^a{}_\rho} \right) \\ - h \frac{\partial T^{\rho}{}_{\mu\rho}}{\partial h^a{}_\rho} T^{\nu\mu}{}_\nu - h T^{\rho}{}_{\mu\rho} \frac{\partial T^{\nu\mu}{}_\nu}{\partial h^a{}_\rho} + h h^a{}_\rho T, \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde usamos as identidade

$$\frac{\partial h}{\partial h^a{}_\rho} = h^a{}_\rho h, \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial h_c{}^\nu}{\partial h^a{}_\rho} = h_a{}^\nu h_c{}^\rho \quad (3.44)$$

e

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial h^a{}_\rho} = -g^{\rho\nu} h_a{}^\mu - g^{\rho\mu} h_a{}^\nu. \quad (3.45)$$

Mesmo a ação sendo definida sem métrica, ela surge para baixar e levantar índices. Devemos lembrar que

$$T^{\rho}{}_{\mu\nu} = h_c{}^\rho T^c{}_{\mu\nu}, \quad (3.46)$$

assim a Eq.(3.42) toma a forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial hT}{\partial h^a{}_\rho} = \frac{h}{4} \left( \frac{\partial T^c{}_{\mu\nu}}{\partial h^a{}_\rho} T^{\mu\nu} + T^c{}_{\mu\nu} \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial h^a{}_\rho} \right) + \frac{h}{2} \left( \frac{\partial T^c{}_{\mu\nu}}{\partial h^a{}_\rho} T^{\nu\mu}{}_c + T^c{}_{\mu\nu} \frac{\partial T^{\nu\mu}{}_c}{\partial h^a{}_\rho} \right) \\ - h \frac{\partial T^{\rho}{}_{\mu\rho}}{\partial h^a{}_\rho} T^{\nu\mu}{}_\nu - h T^{\rho}{}_{\mu\rho} \frac{\partial T^{\nu\mu}{}_\nu}{\partial h^a{}_\rho} + h h^a{}_\rho T. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Com a torção  $T^c{}_{\mu\nu}$  definida na Eq.(2.25), a primeira derivada da Eq.(3.47) é

$$\frac{\partial T^c{}_{\mu\nu}}{\partial h^a{}_\rho} = \bar{\Gamma}^c{}_{a\mu} \delta_\nu^\rho - \bar{\Gamma}^c{}_{a\nu} \delta_\mu^\rho. \quad (3.48)$$

Por sua vez, a segunda derivada é

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_c^{\mu\nu}}{\partial h^a{}_\rho} &= \eta_{cb} \frac{\partial}{\partial h^a{}_\rho} \left( g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} T^b{}_{\alpha\beta} \right) \\
&= \left( \frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial h^a{}_\rho} g^{\nu\beta} + g^{\mu\alpha} \frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial h^a{}_\rho} \right) T_{c\alpha\beta} + \eta_{cb} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial T^b{}_{\alpha\beta}}{\partial h^a{}_\rho} \\
&= \left( -g^{\nu\beta} g^{\alpha\rho} h_a{}^\mu - g^{\nu\beta} g^{\mu\rho} h_a{}^\alpha - g^{\mu\alpha} g^{\nu\rho} h_a{}^\beta - g^{\mu\alpha} g^{\beta\rho} h_a{}^\nu \right) T_{c\alpha\beta} \\
&\quad + \eta_{cb} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \left( \bar{\Gamma}^b{}_{\alpha\alpha} \delta_\beta^\rho - \bar{\Gamma}^b{}_{\alpha\beta} \delta_\alpha^\rho \right) \\
&= -h_a{}^\mu T_c{}^{\rho\nu} - g^{\mu\rho} T_{ca}{}^\nu - g^{\nu\rho} T_c{}^\mu{}_a - h_a{}^\nu T_c{}^{\mu\rho} + \eta_{cb} g^{\mu\alpha} g^{\nu\rho} \bar{\Gamma}^b{}_{\alpha\alpha} \\
&\quad - \eta_{cb} g^{\mu\rho} g^{\nu\beta} \bar{\Gamma}^b{}_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

A terceira derivada é

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T^{\nu\mu}{}_c}{\partial h^a{}_\rho} &= \eta_{cb} \frac{\partial}{\partial h^a{}_\rho} \left( h^b{}_\alpha T^{\nu\mu\rho} \right) \\
&= \eta_{ca} T^{\nu\mu\rho} + \eta_{cb} h^b{}_\alpha \frac{\partial T^{\nu\mu\rho}}{\partial h^a{}_\rho}.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T^{\nu\mu\sigma}}{\partial h^a{}_\rho} &= \eta^{bc} \frac{\partial}{\partial h^a{}_\rho} \left( h_b{}^\nu T_c{}^{\mu\sigma} \right) \\
&= \eta^{bc} \left( -h_a{}^\nu h_b{}^\rho T_c{}^{\mu\sigma} + h_b{}^\nu \frac{\partial T_c{}^{\mu\sigma}}{\partial h^a{}_\rho} \right) \\
&= -h_a{}^\nu T^{\rho\mu\sigma} - \eta^{bc} h_b{}^\nu \left( h_a{}^\mu T_c{}^{\mu\sigma} + g^{\mu\rho} T_{ca}{}^\sigma + g^{\sigma\rho} T_c{}^\mu{}_a + h_a{}^\sigma T_c{}^{\mu\rho} \right) \\
&\quad + \eta^{bc} h_b{}^\nu \eta_{cd} \left( g^{\mu\alpha} g^{\sigma\rho} \bar{\Gamma}^d{}_{\alpha\alpha} - g^{\mu\rho} g^{\sigma\beta} \bar{\Gamma}^d{}_{\alpha\beta} \right) \\
&= -h_a{}^\nu T^{\rho\mu\sigma} - h_a{}^\mu T^{\nu\rho\sigma} - g^{\mu\rho} T^{\nu}{}_a{}^\sigma - g^{\sigma\rho} T^{\nu\mu}{}_a - h_a{}^\sigma T^{\nu\mu\rho} \\
&\quad + h_b{}^\nu \left( g^{\mu\alpha} g^{\sigma\rho} \bar{\Gamma}^b{}_{\alpha\alpha} - g^{\mu\rho} g^{\sigma\beta} \bar{\Gamma}^b{}_{\alpha\beta} \right),
\end{aligned} \tag{3.51}$$

assim, substituindo a Eq.(3.51) na Eq.(3.50), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T^{\nu\mu}{}_c}{\partial h^a{}_\rho} &= \eta_{ca} T^{\nu\mu\rho} - h_a{}^\nu T^{\rho\mu\sigma} - h_a{}^\mu T^{\nu\rho\sigma} - g^{\mu\rho} T^{\nu}{}_a{}^\sigma - g^{\sigma\rho} T^{\nu\mu}{}_a - h_a{}^\sigma T^{\nu\mu\rho} \\
&\quad + h_b{}^\nu \left( g^{\mu\alpha} g^{\sigma\rho} \bar{\Gamma}^b{}_{\alpha\alpha} - g^{\mu\rho} g^{\sigma\beta} \bar{\Gamma}^b{}_{\alpha\beta} \right).
\end{aligned} \tag{3.52}$$

A quarta derivada é

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T^{\nu\mu}{}_\nu}{\partial h^a{}_\rho} &= \frac{\partial}{\partial h^a{}_\rho} \left( g_{\nu\sigma} T^{\nu\mu\sigma} \right) \\
&= \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial h^a{}_\rho} T^{\nu\mu\sigma} + g_{\nu\sigma} \frac{\partial T^{\nu\mu\sigma}}{\partial h^a{}_\rho},
\end{aligned} \tag{3.53}$$

mas, com a Eq.(3.51) temos

$$\frac{\partial T^{\nu\mu}}{\partial h^a{}_\rho} = -T^{\rho\mu}{}_\nu - h_a{}^\mu T^{\nu\rho}{}_\nu - g^{\mu\rho} T^{\nu}{}_{\nu a} + (h_b{}^\rho g^{\mu\nu} - h_b{}^\nu g^{\mu\rho}) \bar{\Gamma}^b{}_{\nu a}. \quad (3.54)$$

Por fim, a quinta derivada da Eq.(3.47) é

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{\lambda\mu}{}^\lambda}{\partial h^a{}_\rho} &= \frac{\partial}{\partial h^a{}_\rho} \left( h_c{}^\lambda T^c{}_{\mu\lambda} \right) \\ &= -h_a{}^\lambda h_c{}^\rho T^c{}_{\mu\lambda} + h_c{}^\lambda \frac{\partial T^c{}_{\mu\lambda}}{\partial h^a{}_\rho} \\ &= -h_a{}^\lambda h_c{}^\rho T^c{}_{\mu\lambda} + h_c{}^\lambda (\bar{\Gamma}^c{}_{a\mu} \delta_\lambda^\rho - \bar{\Gamma}^c{}_{a\lambda} \delta_\mu^\rho) \\ &= T^\rho{}_{\mu a} + h_c{}^\rho \bar{\Gamma}^c{}_{a\mu} - h_c{}^\lambda \bar{\Gamma}^c{}_{a\lambda} \delta_\mu^\rho. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Com todos os resultados obtidos acima nas Eqs.(3.48, 3.49, 3.52, 3.54 e 3.55), substituindo na Eq.(3.47) e fazendo algumas manipulações, temos [73]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^a{}_\rho} = -\frac{h}{\kappa} (h_c{}^\sigma T^c{}_{\nu a} S_\sigma{}^{\rho\nu} + \bar{\Gamma}^c{}_{\nu a} S_c{}^{\nu\rho}) + h_a{}^\rho \mathcal{L}. \quad (3.56)$$

Definimos então

$$j_a{}^\rho \equiv -\frac{1}{h} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^a{}_\rho} = \frac{1}{\kappa} (h_c{}^\sigma T^c{}_{\nu a} S_\sigma{}^{\rho\nu} + \bar{\Gamma}^c{}_{\nu a} S_c{}^{\nu\rho}) - \frac{h_a{}^\rho}{h} \mathcal{L}, \quad (3.57)$$

que representa a corrente de energia-momentum gravitacional de Noether [73]. Mas, como a conexão que nos interessa é a conexão de Weitzenböck e como nessa conexão  $\bar{\Gamma}_{b\mu}^a = 0$ , a Eq.(3.57) tomo a forma [35, 73]

$$h j_a{}^\rho = \frac{h}{\kappa} h_c{}^\sigma T^c{}_{\nu a} S_\sigma{}^{\rho\nu} - h_a{}^\rho \mathcal{L}. \quad (3.58)$$

### 3.5.2 Superpotencial

Com a primeira parte da Eq.(3.40), pegando o termo que se deriva em relação a  $\partial_\sigma h^a{}_\rho$  e abrindo termo a termo, temos [35]

$$\frac{\partial(hT)}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} = h \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} \left( \frac{1}{4} T^\rho{}_{\mu\nu} T_\rho{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} T^\rho{}_{\mu\nu} T^{\nu\mu}{}_\rho - T^\rho{}_{\mu\rho} T^{\nu\mu}{}_\nu \right). \quad (3.59)$$

A primeira derivada em relação a  $\partial_\sigma h^a{}_\rho$  é

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} (T^\rho{}_{\mu\nu} T_\rho{}^{\mu\nu}) &= \frac{1}{2} T_b{}^{\mu\nu} \frac{\partial T^b{}_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} \\ &= \frac{1}{2} T_b{}^{\mu\nu} \delta_a^b \left( \delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\rho - \delta_\nu^\sigma \delta_\mu^\rho \right) \\ &= T_a{}^{\sigma\rho}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Por sua vez, a segunda derivada em relação a  $\partial_\sigma h^a{}_\rho$  é

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} (T^\rho{}_{\mu\nu} T^{\nu\mu}{}_\rho) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial T^\rho{}_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} T^{\nu\mu}{}_\rho + T^\rho{}_{\mu\nu} \frac{\partial T^{\nu\mu}{}_\rho}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \delta_a^c \left( \delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\rho - \delta_\nu^\sigma \delta_\mu^\rho \right) T^{\nu\mu}{}_c + \frac{1}{2} T^{\beta\alpha}{}_c \left( \delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\rho - \delta_\beta^\sigma \delta_\alpha^\rho \right) \\ &= T^{\rho\sigma}{}_a - T^{\sigma\rho}{}_a. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Por fim, a terceira derivada da Eq.(3.59) é

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} (T^\rho{}_{\mu\rho} T^{\nu\mu}{}_v) &= 2T^{\nu\mu}{}_v \frac{\partial T^\lambda{}_{\mu\lambda}}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} \\ &= 2T^{\nu\mu}{}_v h_b{}^\lambda \frac{\partial T^b{}_{\mu\lambda}}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} \\ &= 2T^{\nu\mu}{}_v h_b{}^\lambda \delta_a^b \left( \delta_\mu^\sigma \delta_\lambda^\rho - \delta_\lambda^\sigma \delta_\mu^\rho \right) \\ &= 2T^{\nu\sigma}{}_v h_a{}^\rho - 2T^{\nu\rho}{}_v h_a{}^\sigma. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Com todos os resultados obtidos acima nas Eqs.(3.60, 3.61 e 3.62), substituindo na Eq.(3.59), temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} = \frac{h}{2\kappa} (T_a{}^{\sigma\rho} + T^{\rho\sigma}{}_a - T^{\sigma\rho}{}_a - 2T^{\nu\sigma}{}_v h_a{}^\rho + 2T^{\nu\rho}{}_v h_a{}^\sigma). \quad (3.63)$$

Definimos então

$$S_a{}^{\sigma\rho} \equiv \frac{\kappa}{h} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} = \frac{1}{2} (T_a{}^{\sigma\rho} + T^{\rho\sigma}{}_a - T^{\sigma\rho}{}_a - 2T^{\nu\sigma}{}_v h_a{}^\rho + 2T^{\nu\rho}{}_v h_a{}^\sigma) \quad (3.64)$$

como o superpotencial, que é equivalente a

$$S_a{}^{\sigma\rho} = K^{\rho\sigma}{}_a + T^{\nu\sigma}{}_v h_a{}^\rho - T^{\nu\rho}{}_v h_a{}^\sigma, \quad (3.65)$$

onde

$$K^{\rho\sigma}{}_a = \frac{1}{2} (T_a{}^{\rho\sigma} + T^{\sigma\rho}{}_a - T^{\rho\sigma}{}_a) \quad (3.66)$$

é o tensor de contorção. Na conexão de Weitzenböck onde  $\widetilde{\Gamma}_{b\mu}^a = 0$ ,  $S_a{}^{\sigma\rho}$  não se altera.

### 3.5.3 Equações de Campo

A lagrangiana de um campo de matéria  $\mathcal{L}_m$  dependa apenas dos campos e das suas primeiras derivadas. Assim, sob uma variação arbitrária em termos da tetrada  $h^a{}_\rho$  que é escrita

na segunda parte da Eq.(3.40), definimos [78]

$$h\mathcal{T}_a{}^\rho \equiv \frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta h^a{}_\rho} = \left[ \frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial h^a{}_\rho} - \partial_\sigma \frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} \right] \quad (3.67)$$

como o tensor de momento de energia da matéria. Com as definições representadas nas Eqs.(3.58, 3.64 e 3.67), aplicadas a Eq.(3.40), temos a versão teleparalela da equação do campo gravitacional

$$\partial_\sigma (hS_a{}^{\sigma\rho}) - \kappa h j_a{}^\rho = -\kappa h\mathcal{T}_a{}^\rho. \quad (3.68)$$

Com todos os índices de espaço-tempo, a Eq.(3.68) assume a forma

$$\partial_\sigma (hS_\mu{}^{\sigma\rho}) - \kappa h t_\mu{}^\rho = -\kappa h\mathcal{T}_\mu{}^\rho, \quad (3.69)$$

onde,

$$h t_\mu{}^\rho = \frac{h}{\kappa} \tilde{\Gamma}^\sigma{}_{\nu\mu} S_\sigma{}^{\rho\nu} - \delta_\mu^\rho \mathcal{L}, \quad (3.70)$$

é um pseudotensor [73], que representa a versão teleparalela do tensor energia-momentum canónico do campo gravitacional [79].

## 4 MUNDO-BRANA-5D

### 4.1 O Problema da Hierarquia

Em física de partículas o problema da hierarquia é caracterizado pela grande diferença entre as escalas de Planck e a eletrofraca [7]. Essa grande diferença está ligada às diferentes intensidades e domínios das quatro forças fundamentais que são Cromodinâmica Quântica (QCD), a força forte, a força fraca, a Eletrodinâmica Quântica (QED) e força gravitacional. A tabela (1) ilustra a relação entre as quatro forças fundamentais [29].

Força	Mediador	Teoria	$\propto r$	Magnitude
<b>Forte</b>	Glúons	QCD	Variável	$10^{38}$
<b>Eletromagnética</b>	Fótons	QED	$1/r^2$	$10^{36}$
<b>Fraca</b>	Bósons W e Z	Teoria Eletrofraca	$e^{m_b r}/r$	$10^{25}$
<b>Gravitacional</b>	Gráviton	Relatividade Geral	$1/r^2$	1

Tabela 1: Relação entre as forças fundamentais, onde  $m_b$  são os valores massas dos bósons W ou Z [29].

A discrepância entre as forças do modelo padrão e gravidade pode ser entendida como um problema de escalas [29]. A tabela (2) mostra a relação entre o sistema de unidades de Planck e o Sistema Internacional de unidades (S.I).

Unidade	Conversão de Planck	Valor no S.I
<b>Massa</b>	$m_{pl} = \sqrt{\hbar c/G}$	$\sim 2.176 \times 10^{-8} \text{ kg}$
<b>Comprimento</b>	$l_{pl} = \sqrt{\hbar G/c^3}$	$\sim 1.616 \times 10^{-35} \text{ m}$
<b>Tempo</b>	$t_{pl} = \sqrt{\hbar G/c^5}$	$\sim 5.391 \times 10^{-44} \text{ s}$
<b>Carga</b>	$q_{pl} = \sqrt{4\pi\hbar c\epsilon_0}$	$\sim 1.875 \times 10^{-18} \text{ C}$
<b>Temperatura</b>	$\Theta_{pl} = \sqrt{\hbar c^5/GK_b^2}$	$\sim 1.417 \times 10^{32} \text{ K}$
<b>Energia</b>	$E_{pl} = m_{pl}c^2$	$\sim 1.956 \times 10^9 \text{ J}/1.22 \times 10^{19} \text{ GeV}$

Tabela 2: Relação entre o sistema de unidades de Planck e o Sistema Internacional de unidades (S.I) [29, 80].

As quatro forças têm a mesma intensidade que o sistema de unidades de Planck. Este regime, que iguala a teoria eletrofraca com a física gravitacional, ocorreria em energias da ordem de  $10^{19} \text{ GeV}$ , chamado de escala de Planck [80]. Mas, a escala de energia onde vivemos, que é chamada de escala eletrofraca, é da ordem de apenas  $10^3 \text{ GeV}$ . A essa diferença de escalas de energia chamamos problema de hierarquia [29].



## 4.2 Modelo Kaluza-Klein

A ideia da existência de dimensões extras de espaço, surgiu como um meio de unificar campos eletromagnéticos e gravitacionais. Como pioneiros dessa nova ideia, Theodor Kaluza e Oscar Klein demonstraram que a interação eletromagnética pode ser vista como tendo natureza geométrica [8,9]. A teoria de Kaluza e Klein (KK) foi construída inserindo uma quinta dimensão extra, em relação às quatro dimensões usuais do espaço de Minkowski, que pode ser imaginado como um cilindro  $5D$  de raio  $R$  [81], ilustrada na figura (6).

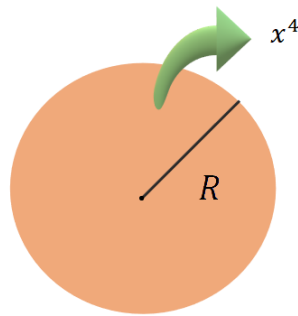


Figura 6: Ilustração para a teoria de Kaluza-Klein.

Nessa teoria, o campo escalar não massivo  $\phi(x^\mu, x^4)$  teria um momento quantizado na quinta dimensão

$$p^4 = \frac{n}{R}, \quad (4.1)$$

em que  $n \in \mathbb{Z}$ . Expandido o campo escalar em uma série de Fourier, temos

$$\phi(x^\mu, x^4) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^n(x^\mu) e^{inx^4/R}. \quad (4.2)$$

Assim, com essa decomposição, a equação de movimento  $(\partial_\mu \partial^\mu + \partial_4 \partial^4)\phi = 0$ , se torna

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi^n(x^\mu) = \left(\frac{n}{R}\right)^2 \phi^n(x^\mu), \quad (4.3)$$

com as equações (4.1 e 4.3), obtemos

$$m^2 = \left(\frac{n}{R}\right)^2 \quad (4.4)$$

onde  $m$  é a massa KK [81]. Observe que a Eq.(4.3) descreve um espectro massivo discreto, onde  $1/R$  tem dimensão massa. Pelos experimentos de altas energias,  $m$  teria que ter valores maiores do que a energia da escala experimental de  $1 \text{ TeV}$ , implicando que o raio  $R$  deveria ser na ordem à  $10^{-21} \text{ cm}$ . Este valor é muito pequeno para ser detectado experimentalmente [81]. Por terem

um raio tão pequeno e  $x^4 \in [0, R]$ , essas dimensões são chamadas de compactas. Dessa forma, o problema da hierarquia pode ser solucionado, dizendo que, para cada energia maior do que  $1 \text{ TeV}$ , há desvio de energia para dimensão extra de forma quantizada, permitindo que as escalas de energia de Planck e experimental possam ser compatíveis pela teoria do modelo padrão da física.

### 4.3 Modelo Randall-Sundrum

O espaço-tempo que percebemos é formado por quatro dimensões usuais do espaço de Minkowski, no qual definimos como brana. O modelo Randall-Sundrum (RS) para um mundo de dimensões extras [10, 11], tem como ideia base de que nosso mundo é composto como uma brana 4D mergulhada em um espaço 5D chamado de *bulk*. A figura (7) representa bem o modelo.

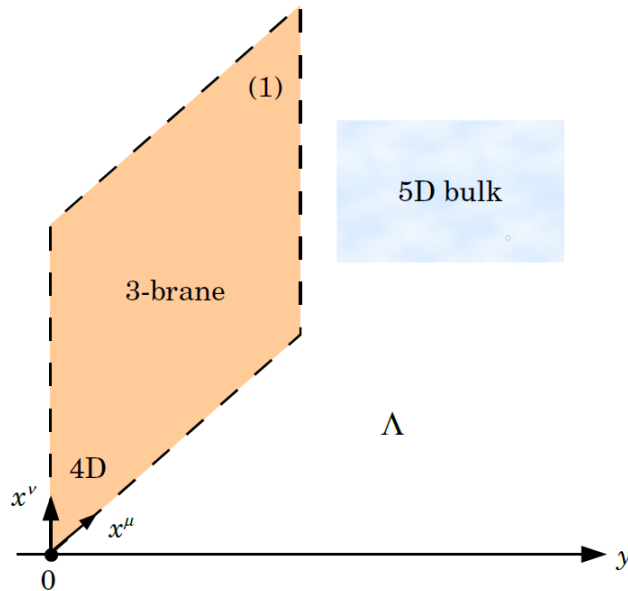


Figura 7: Ilustração para o modelo Randall-Sundrum.

A métrica do modelo RS é descrita como [10, 11]

$$ds^2 = e^{-2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (4.5)$$

sendo  $e^{-2A(y)}$  definido como fator de *warp*,  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica de Minkowski e  $y$  representa a dimensão extra. Interessante nota que esse modelo possibilita uma dimensão extra não compacta,  $y \in [0, \infty]$ . Em seus trabalhos L. Randall e R. Sundrum mostram que o problema da hierarquia é solucionado [10, 11], se tornando assim uma teoria muito mais atrativa por ser mais completa do que outras teorias com o acréscimo de uma dimensão extra.

#### 4.4 Mundo-Brana-5D em Gravidade Teleparalela

Usaremos um modelo semelhante ao de RS para descrever um mundo-brana em cinco dimensões, onde a métrica é descrita como

$$ds_5^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (4.6)$$

ou de uma maneira mais geral

$$ds_5^2 = g_{MN} dx^M dx^N, \quad (4.7)$$

onde

$$g_{MN} = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} + \delta_M^4 \delta_N^4, \quad (4.8)$$

a inversa da métrica é

$$g^{MN} = e^{-2A(y)} \eta^{\mu\nu} + \delta_4^M \delta_4^N, \quad (4.9)$$

onde usaremos as letras latinas maiúsculas ( $M, N, P, Q, \dots = 0, 1, 2, 3, 4$ ) para rotular as coordenadas nas cinco dimensões. Podemos obter as tetradas representante dessa métrica através das Eqs.(2.9 e 2.7) já definidas no Cap.2,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a{}_\mu h^b{}_\nu \quad e \quad \eta_{ab} = g_{\mu\nu} h_a{}^\mu h_b{}^\nu. \quad (4.10)$$

Assim, as tetradas da métrica representada pela Eq.(4.6) é

$$h^a{}_\mu = \begin{pmatrix} e^{A(y)} \delta_\mu^a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

e o seu inverso é

$$h_a{}^\mu = \begin{pmatrix} e^{-A(y)} \delta_a^\mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

##### 4.4.1 Escalar de Torção para o Mundo-Brana-5D

Para a gravitação teleparalela usamos a chamada conexão de Weitzenböck já definida na Eq.(3.2), que toma a forma

$$\tilde{\Gamma}^P{}_{MN} = h_a{}^P \partial_N h^a{}_M. \quad (4.13)$$

Assim, podemos calcular as componentes da conexão de Weitzenböck

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^\rho{}_{\mu y} &= A' \delta_\mu^\rho, \\
\tilde{\Gamma}^y{}_{\mu\nu} &= 0, \\
\tilde{\Gamma}^\rho{}_{y\nu} &= 0, \\
\tilde{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} &= 0, \\
\tilde{\Gamma}^y{}_{yy} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

onde  $A' = \partial_y A(y)$ . Note que, das conexões possíveis, apenas  $\tilde{\Gamma}^\rho{}_{\mu y}$  não é nula. No caso da torção na conexão de Weitzenböck representada pela Eq.(3.10), toma a forma

$$T^P{}_{MN} = \tilde{\Gamma}^P{}_{NM} - \tilde{\Gamma}^P{}_{MN}. \tag{4.15}$$

Com as conexões representadas na Eq.(4.14), podemos calcular as componentes da torção, lembrando que  $T^P{}_{MN} = -T^P{}_{NM}$ , assim

$$\begin{aligned}
T^\rho{}_{\mu y} &= -A' \delta_\mu^\rho, \\
T^\rho{}_{y\nu} &= 0, \\
T^\rho{}_{\mu\nu} &= 0, \\
T^y{}_{yy} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

No caso do tensor contorção da conexão de Weitzenböck representada pela Eq.( 3.6), toma a forma

$$K^P{}_{MN} = \frac{1}{2} (T_M{}^P{}_N + T_N{}^P{}_M - T^P{}_{MN}). \tag{4.17}$$

Com as componentes da torção representada na Eq.(4.16), podemos calcular as componentes da contorção,

$$\begin{aligned}
K^\rho{}_{y\nu} &= -A' \delta_\nu^\rho, \\
K^y{}_{\mu\nu} &= A' g_{\mu\nu}, \\
K^\rho{}_{\mu y} &= 0, \\
K^\rho{}_{\mu\nu} &= 0, \\
K^y{}_{\mu\nu} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

No caso do tensor dual da torção, conhecido como um superpotencial representada pela Eq.(3.19), toma a forma

$$S_P{}^{MN} = \frac{1}{2} (K^{MN}{}_P - \delta_P^N T^{RM}{}_R + \delta_P^M T^{RN}{}_R), \tag{4.19}$$

Com as componentes da torção e do tensor contorção representadas nas Eqs.(4.16 e 4.18), podemos calcular as componentes do superpotencial, lembrando que  $S_P^{MN} = -S_P^{NM}$ , assim

$$\begin{aligned} S_\rho^{\mu y} &= \frac{3}{2}A'\delta_\rho^\mu, \\ S_y^{\mu\nu} &= 0, \\ S_\rho^{\mu\nu} &= 0, \\ S_y^{yy} &= 0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Com as componentes da torção e do superpotencial representadas nas Eqs.(4.16 e 4.20), podemos calcular o escalar da torção representada pela Eq.(3.35),

$$\begin{aligned} T &= T^P{}_{MN}S_P{}^{MN} \\ &= -12A'^2. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Note que, na RG o escalar de curvatura é  $R = 8A'' - 20A'^2$  [81].

#### 4.4.2 Equações de Campo para o Mundo-Brana-5D

A lagrangiana puramente em termos da torção foi definida na Eq.(3.34)

$$\mathcal{L} = \frac{h}{4}T, \tag{4.22}$$

onde fazemos  $\kappa = 1$ . Podemos escrever a ação gravitacional em cinco dimensões, com constante cosmológica  $\Lambda$ , como

$$\mathfrak{S} = \frac{h}{4} \int T dx^5 + \int (\Lambda + \mathcal{L}_m) d^5x, \tag{4.23}$$

onde  $\mathcal{L}_m$  é a lagrangiana de um campo de matéria qualquer. Tendo como base a equação de campo gravitacional (3.69), a equação de campo correspondentes assume a forma

$$\frac{1}{h} \partial_Q \left( h S_N{}^{MQ} \right) - t_N{}^M = -(\Lambda \delta_N^M + \mathcal{T}_N{}^M), \tag{4.24}$$

onde,

$$t_N{}^M = \tilde{\Gamma}^R{}_{SN} S_R{}^{MS} - \frac{1}{4} \delta_N^M T, \tag{4.25}$$

representa a versão teleparalela do tensor momento-energia canônico do campo gravitacional [79]. A partir da lagrangiana de matéria  $\mathcal{L}_m$ , definimos o tensor energia-momentum  $\mathcal{T}_N{}^M$  na forma [13, 14, 82–84]

$$\mathcal{T}_N{}^M = t_0(y) \delta_\mu^p + t_y(y) \delta_y^y. \tag{4.26}$$

Com as equações (4.24 e 4.26), obtemos as equações de campo para a métrica (4.6)

$$3A'^2 + \frac{3}{2}A'' = -\Lambda - t_0(y), \quad (4.27)$$

$$3A'^2 = -\Lambda - t_y(y), \quad (4.28)$$

que são as mesmas equações obtidas na RG [81], ou seja, mesmo trabalhando com o escalar de torção  $T \propto (A')$  em vez do escalar de curvatura  $R \propto (A'', A')$ , as equações obtidas são as mesmas, que está de acordo com a afirmação de que o teleparalelismo é o equivalente teleparalelo da RG. No estado de vácuo, onde  $\mathcal{T}_N^M = 0$  e supondo  $A' = -c$ , onde  $c$  é uma constante, as equações (4.27) e (4.28) tomam a forma

$$3c^2 = -\Lambda, \quad (4.29)$$

que tem como solução

$$c = \pm \sqrt{\frac{(-\Lambda)}{3}}, \quad (4.30)$$

que é uma solução  $AdS_5$  no vácuo, para um mundo-brana do modelo RS [10, 11, 81].

## 5 MUNDO-BRANA-6D

### 5.1 Modelos de Mundo-Brana em 6D

Existem muitas vantagens em se trabalhar com um modelo de dimensões extras quando acrescentamos duas dimensões ao espaço já conhecido 4D (espaço de Minkowski) em vez de só uma dimensão que é o caso do modelo RS [29]. Com o modelo em 6D os grávitons massivos contribuem com uma menor correção na Lei de Newton do que em um modelo 5D [12], além de não haver necessidade de ajuste fino na constante cosmológica em 6D com a tensão na brana para cancelamento da constante cosmológica 4D [12]. Com um modelo 6D o confinamento do modo zero do campo vetorial de calibre ocorre de forma espontânea sendo necessário apenas a interação com a gravidade, mesmo em modelos finos [13,14,30]. É possível explicar a hierarquia da massa de neutrinos que são férmions sem carga e de massa muito pequena, através de modelos em 6D compactos [31]. Já existem também alguns trabalhos recentes explicando a possível nova partícula de  $750 \text{ GeV}$  através de um modelo em 6D [32,33].

#### 5.1.1 Modelos de Mundo-Brana com Simetria Axial em 6D

Modelos de mundo-brana com simetria axial em 6D ou como é conhecido também de co-dimensão 2, são chamados de defeitos tipo corda [12], este nome se dá devido às semelhanças destes modelos com defeitos topológicos tipo corda cósmicas. Para esses modelos de dimensões extras em 6D a métrica pode ser escrita como [12–28]

$$ds^2 = \sigma(r)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dr^2 + \gamma(r)d\theta^2, \quad (5.1)$$

onde  $r \in [0; \infty)$ ,  $\theta \in [0; 2\pi)$  e sendo

$$\gamma(r) = \beta(r)\sigma(r) \quad (5.2)$$

para garantir a simetria axial, onde  $\sigma(r)$  é o fator de *warp*. Para garantir uma geometria suave na origem, nós temos a condição de regularidade [85–88]

$$\sigma(0) = 1, \quad (5.3)$$

e assim

$$\sigma'(0) = 0. \quad (5.4)$$

Para uma 3-brana na origem, impomos a condição [12–14, 86–89]

$$\gamma(0) = 0, \quad (5.5)$$

e assim

$$\left(\sqrt{\gamma(0)}\right)' = 1, \quad (5.6)$$

### 5.1.2 Modelo Gherghetta-Shaposhnikov

Tony Gherghetta e Mikhail Shaposhnikov (GS) inspirados pelo modelo RS, desenvolveram um modelo de dimensões extras com defeito tipo corda em 6D [12]. Nesse modelo, assim como no modelo RS, o espaço-tempo que percebemos é formado por quatro dimensões usuais do espaço de Minkowski, no qual definimos como brana. O modelo GS para um mundo de dimensões extras [10, 11], tem como ideia base de que nosso mundo é composto como uma brana 4D mergulhada em um espaço 6D chamado de *bulk*. A figura (8) representa bem o modelo.

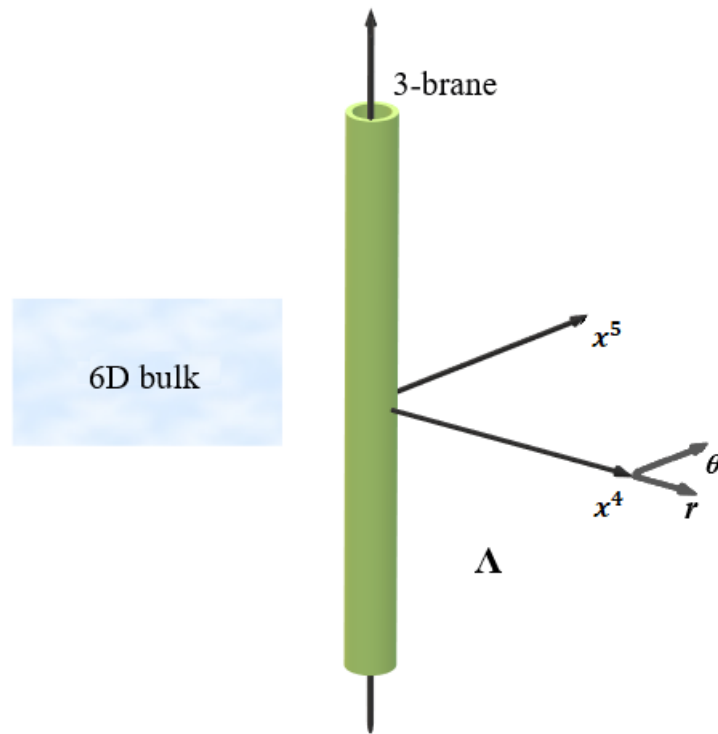


Figura 8: Ilustração para o modelo GS com uma simetria axial.

No modelo GS

$$\sigma(r) = e^{-cr}, \quad (5.7)$$

e

$$\gamma(r) = R_0^2 e^{-cr}. \quad (5.8)$$

Assim, a métrica do modelo GS é descrita como [12]

$$ds^2 = e^{-cr} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dr^2 + R_0^2 e^{-cr} d\theta^2, \quad (5.9)$$



sendo  $\beta(r) = R_0^2$  uma escala de comprimento arbitrário que representa o raio do espaço transversal, sendo também uma constante de regularização dimensional[29].

## 5.2 Mundo-Brana-6D em Gravidade Teleparalela

Usaremos um modelo semelhante ao de GS para descrever um mundo-brana em seis dimensões com simetria axial, onde a métrica é descrita como

$$ds_6^2 = e^{2A(r)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dr^2 + R_0^2 e^{2B(r)} d\theta^2, \quad (5.10)$$

ou de uma maneira mais geral

$$ds_6^2 = g_{MN} dx^M dx^N, \quad (5.11)$$

onde

$$g_{MN} = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} + \delta_M^4 \delta_N^4 + R_0^2 e^{2B(r)} \delta_M^5 \delta_N^5, \quad (5.12)$$

a inversa da métrica é

$$g^{MN} = e^{-2A(y)} \eta^{\mu\nu} + \delta_4^M \delta_4^N + R_0^{-2} e^{-2B(r)} \delta_5^M \delta_5^N, \quad (5.13)$$

onde usaremos as letras latinas maiúsculas ( $M, N, P, Q, \dots = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ) para rotular as coordenadas nas seis dimensões. Podemos obter as tetradas representante dessa métrica através das Eqs.(2.9 e 2.7) já definidas no Cap.2,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a{}_\mu h^b{}_\nu \quad e \quad \eta_{ab} = g_{\mu\nu} h_a{}^\mu h_b{}^\nu. \quad (5.14)$$

Assim, as tetradas da métrica representada pela Eq.(5.10) é

$$h^a{}_\mu = \begin{pmatrix} e^{A(r)} \delta_\mu^a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R_0 e^{B(r)} \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

e a sua inversa é

$$h_a{}^\mu = \begin{pmatrix} e^{-A(r)} \delta_a^\mu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R_0^{-1} e^{-B(r)} \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

### 5.2.1 Escalar de Torção para o Mundo-Brana-6D

Para a gravitação teleparalela usamos a chamada conexão de Weitzenböck já definida na Eq.(3.2), que toma a forma

$$\tilde{\Gamma}^P{}_{MN} = h_a{}^P \partial_N h^a{}_M. \quad (5.17)$$

Assim, os componentes não nulos da conexão de Weitzenböck são

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^P{}_{\mu y} &= A' \delta_\mu^P, \\ \tilde{\Gamma}^z{}_{zy} &= B', \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde  $A' = \partial_r A(r)$  e  $B' = \partial_r B(r)$ . No caso da torção na conexão de Weitzenböck representada pela Eq.(3.10), toma a forma

$$T^P{}_{MN} = \tilde{\Gamma}^P{}_{NM} - \tilde{\Gamma}^P{}_{MN}. \quad (5.19)$$

Com as conexões representadas na Eq.(5.18), obtemos os componentes não nulos da Torção, lembrando que  $T^P{}_{MN} = -T^P{}_{NM}$ , assim

$$\begin{aligned} T^P{}_{\mu y} &= -A' \delta_\mu^P, \\ T^z{}_{zy} &= B'. \end{aligned} \quad (5.20)$$

No caso do tensor contorção da conexão de Weitzenböck representada pela Eq.(3.6), toma a forma

$$K^P{}_{MN} = \frac{1}{2} (T_M{}^P{}_N + T_N{}^P{}_M - T^P{}_{MN}). \quad (5.21)$$

Com as componentes da torção representada na Eq.(5.20), obtemos os componentes não nulos da contorção,

$$\begin{aligned} K^P{}_{yv} &= -A' \delta_v^P, \\ K^y{}_{\mu v} &= A' g_{\mu v}, \\ K^z{}_{yz} &= -B', \\ K^y{}_{zz} &= B' g_{\theta\theta}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

No caso do tensor dual da torção, conhecido como um superpotencial representada pela Eq.(3.19), toma a forma

$$S_P{}^{MN} = \frac{1}{2} (K^{MN}{}_P - \delta_P^N T^{RM}{}_R + \delta_P^M T^{RN}{}_R), \quad (5.23)$$

Com as componentes da torção e do tensor contorção representadas nas Eqs.(5.20 e 5.22), obtemos os componentes não nulos do superpotencial, lembrando que  $S_P{}^{MN} = -S_P{}^{NM}$ , assim

$$\begin{aligned}
S_{\rho}{}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (A' + B') \delta_{\rho}^{\mu}, \\
S_z{}^{zy} &= 2A'.
\end{aligned}
\tag{5.24}$$

Com as componentes da torção e do superpotencial representadas nas Eqs.(5.20 e 5.24), podemos calcular o escalar da torção representada pela Eq.(3.35),

$$\begin{aligned}
T &= T^P{}_{MN} S_P{}^{MN} \\
&= -4A'(3A' + B').
\end{aligned}
\tag{5.25}$$

Note que, na RG o escalar de curvatura é  $R = -8A'' - 4A'(5A' + 2B') - 2(B'^2 + B'')$  [12].

### 5.2.2 Equações de Campo para o Mundo-Brana-6D

A lagrangiana puramente em termos da torção foi definida na Eq.(3.34)

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar}{4} T,
\tag{5.26}$$

onde fazemos  $\kappa = 1$ . Podemos escrever a ação gravitacional em cinco dimensões, com constante cosmológica  $\Lambda$ , como

$$\mathfrak{S} = \frac{\hbar}{4} \int T dx^5 + \int (\Lambda + \mathcal{L}_m) d^5x,
\tag{5.27}$$

onde  $\mathcal{L}_m$  é a lagrangiana de um campo de matéria qualquer. Tendo como base a equação de campo gravitacional (3.69), a equação de campo correspondentes assume a forma

$$\frac{1}{\hbar} \partial_Q \left( \hbar S_N{}^{MQ} \right) - t_N{}^M = -(\Lambda \delta_N^M + \mathcal{T}_N{}^M),
\tag{5.28}$$

onde,

$$t_N{}^M = \tilde{\Gamma}^R{}_{SN} S_R{}^{MS} - \frac{1}{4} \delta_N^M T,
\tag{5.29}$$

representa a versão teleparalela do tensor momento-energia canônico do campo gravitacional [79]. A partir da lagrangiana de matéria  $\mathcal{L}_m$ , definimos o tensor energia-momentum  $\mathcal{T}_N{}^M$  na forma [13, 14, 82–84]

$$\mathcal{T}_N{}^M = t_0(r) \delta_{\mu}^{\rho} + t_r(r) \delta_r^r + t_{\theta}(r) \delta_{\theta}^{\theta}.
\tag{5.30}$$

Com as equações (5.28 e 5.30), obtemos as equações de campo para a métrica (5.9)

$$\frac{1}{2} (6A'^2 + 3A'B' + B'^2 + 3A'' + B'') = -\Lambda - t_0(r),
\tag{5.31}$$

$$5A'^2 + 2A'' = -\Lambda - t_{\theta}(r),
\tag{5.32}$$

$$3A'^2 + 2A'B' = -\Lambda - t_r(r), \quad (5.33)$$

que são as mesmas equações obtidas na RG [12], ou seja, mesmo trabalhando com o escalar de torção  $T \propto (A', B')$  em vez do escalar de curvatura  $R \propto (A'', A', B'', B')$ , as equações obtidas são as mesmas, que está de acordo com a afirmação de que o teleparalelismo é o equivalente teleparalelo da RG. No estado de vácuo, onde  $\mathcal{T}_N^M = 0$  e supondo  $A' = B' = -c$ , onde  $c$  é uma constante, as equações (5.31), (5.32) e (5.33) tomam a forma

$$5c^2 = -\Lambda, \quad (5.34)$$

que tem como solução

$$c = \pm \sqrt{\frac{(-\Lambda)}{5}}, \quad (5.35)$$

que é uma solução  $AdS_6$  no vácuo, para um mundo-brana tipo-corda [12].

## 6 TEORIA DA GRAVITAÇÃO MODIFICADA POR $f(T)$

### 6.1 Noções Básicas

O estudo de teorias que envolvem gravidade modificada tem ganhado bastante atenção, principalmente na física de altas energias, cosmologia e astrofísica. Uma das motivações para o estudo dessas teorias foi o surgimento da teoria quântica, onde foi possível perceber que a teoria da relatividade geral não era normalizada e que, portanto, não poderia ser quantizada [90, 91].

Outra motivação foi a recente observação de um cenário inesperado para o universo, onde grande quantidade de massa do universo deve ser invisível. Smith [1] e Zwicky [2] observaram que o movimento individual de galáxias em aglomerados é tão intenso que a atração gravitacional de todo o aglomerado de galáxias não é suficiente segurá-lo. Isso sugere que existe um componente desconhecido de matéria para manter o aglomerado, que ficou conhecida como Matéria Escura [3–5].

Com os dados levantados de observações de supernovas do tipo Ia indicaram que o universo está em expansão acelerada [92–98]. Medidas indiretas baseadas na combinação de resultados da Radiação Cósmica de Fundo (CMBR), estruturas de grande escala e a constante de Hubble confirmam essa expansão acelerada [99–101]. Com os dados mais recentes WMAP-7 [102], o universo é constituído de aproximadamente 4,5% de matéria bariônica (que interage eletronicamente), 21,5% de matéria escura e 74% de uma forma de energia desconhecida denominada energia Escura.

Uma modificação na gravidade da RG é introduzida como uma tentativa de obter a resposta para esses problemas. Existem atualmente varias teorias de gravidade modificada, provavelmente a mais conhecida é a gravidade proposta por Brans e Dicke [103]. Outros exemplos de teorias de gravidade modificadas são as tensoriais-vetorial-escalares (TeVeS)[104], a teoria de Mundo-Brana [6] e as teorias  $f(R)$  [105]. Outra teoria é a conhecida teoria  $f(T)$ , onde  $T$  é torção, que nesse caso surge com o objetivo de investigar a influência do espaço-tempo com torção, para isso devemos modificar a gravidade teleparalela.

Embora as equações de movimento na gravidade teleparalela são dinamicamente equivalentes a RG, a gravidade teleparalela descreve uma geometria diferente, o espaço-tempo de Weitzenböck. A métrica espaço-tempo  $g_{\mu\nu}$  não desempenha nenhum papel dinâmico na descrição teleparalela da gravitação. Uma generalização da gravidade teleparalela é a gravidade de  $f(T)$  que foi proposta pela primeira vez por Bengochea e Ferraro para explicar a observada aceleração do universo [40]. E modelos baseados na gravidade teleparalela modificada também foi encontrada para fornecer uma alternativa à inflação sem *inflaton* [41, 42]. Mais

Recentemente, Linder [43, 44] propôs dois novos modelos  $f(T)$  para explicar a expansão acelerada do universo e constatou que o a teoria  $f(T)$  pode unificar várias extensões interessantes da gravidade além da relatividade geral.

Devemos notar que a gravidade  $f(T)$  poderia ser uma extensão fenomenológica da gravidade teleparalela. As vantagens da gravidade  $f(T)$  também foram investigadas analisando a estrutura em larga escala [44] e as restrições observacionais nos parâmetros do modelo [45, 46]. Além de obter aceleração, pode-se reconstruir uma variedade de evoluções cosmológicas [47–49], pode considerar a possibilidade do cruzamento de divisão fantasma [50–52], e pode investigar as perturbações do vácuo e da matéria [53–55] além da evolução do plano de fundo.

## 6.2 Equações de Campo na Gravidade $f(T)$

Na teoria de Gravidade teleparalela a lagrangiana gravitacional pode ser escrita como (3.34)

$$\mathcal{L} = \frac{hc^4}{32\pi G}T, \quad (6.1)$$

onde  $T = T_{\rho\mu\nu}S^{\rho\mu\nu}$  é o escalar de torção e  $h = \sqrt{-g}$ . Para a teoria  $f(T)$  a lagrangiana assume a forma

$$\mathcal{L} = \frac{hc^4}{32\pi G}f(T), \quad (6.2)$$

note que apenas substituímos  $T$  por  $f(T)$ . Considerando a lagrangiana [38]

$$\mathfrak{L} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_m, \quad (6.3)$$

onde  $\mathcal{L}_m$  é a lagrangiana de um campo de matéria qualquer. A ação tem a forma

$$\mathfrak{S} = \int \mathfrak{L}d^4x = \int (\mathcal{L} + \mathcal{L}_m)d^4x, \quad (6.4)$$

e a equação do campo gravitacional é obtida a partir da equação de Euler Lagrange, fazendo variações em termos da tetrada  $h^a{}_\rho$ ,

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial h^a{}_\rho} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_\sigma h^a{}_\rho)} = 0 \quad (6.5)$$

assim

$$\frac{\partial (\mathcal{L} + \mathcal{L}_m)}{\partial h^a{}_\rho} - \partial_\sigma \frac{\partial (\mathcal{L} + \mathcal{L}_m)}{\partial (\partial_\sigma h^a{}_\rho)} = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^a{}_\rho} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma h^a{}_\rho)} = - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial h^a{}_\rho} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial (\partial_\sigma h^a{}_\rho)} \right]. \quad (6.6)$$

Usando a Eq.(6.2), temos

$$\frac{1}{4\kappa} \left[ \frac{\partial (hf)}{\partial h^a{}_\rho} - \partial_\sigma \frac{\partial (hf)}{\partial (\partial_\sigma h^a{}_\rho)} \right] = - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial h^a{}_\rho} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial (\partial_\sigma h^a{}_\rho)} \right], \quad (6.7)$$

sendo  $f = f(T)$  e

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (6.8)$$

### 6.2.1 Corrente de energia-momentum na gravidade $f(T)$

Com a primeira parte da Eq.(6.7), pegando a primeira derivada funcional e abrindo termo a termo, temos

$$\frac{\partial(hf)}{\partial h^a{}_\rho} = h h^a{}_\rho f + h \left( \frac{\partial T}{\partial h^a{}_\rho} \right) \frac{\partial f}{\partial T}, \quad (6.9)$$

onde usamos a identidade

$$\frac{\partial h}{\partial h^a{}_\rho} = h^a{}_\rho h. \quad (6.10)$$

Utilizando os resultado da Eq.(3.56), obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^a{}_\rho} = -\frac{h}{\kappa} (h_c{}^\sigma T^c{}_{va} S_\sigma{}^{\rho\nu} + \bar{\Gamma}^c{}_{av} S_c{}^{\nu\rho}) \frac{\partial f}{\partial T} + h_a{}^\rho \mathcal{L}, \quad (6.11)$$

que é bem parecido com a corrente de energia-momentum definida na Eq.(3.57), podemos de maneira similar definir

$$j_a{}^\rho \equiv -\frac{1}{h} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^a{}_\rho} = \frac{1}{\kappa} (h_c{}^\sigma T^c{}_{va} S_\sigma{}^{\rho\nu} + \bar{\Gamma}^c{}_{av} S_c{}^{\nu\rho}) \frac{\partial f}{\partial T} - \frac{h_a{}^\rho}{h} \mathcal{L}. \quad (6.12)$$

Mas, como a conexão que nos interessa é a conexão de Weitzenböck e como nessa conexão  $\bar{\Gamma}^c{}_{av} \simeq 0$ , a Eq.(6.12) tomo a forma

$$h j_a{}^\rho = \frac{h}{\kappa} (h_c{}^\sigma T^c{}_{va} S_\sigma{}^{\rho\nu}) \frac{\partial f}{\partial T} - h_a{}^\rho \mathcal{L}. \quad (6.13)$$

### 6.2.2 Superpotencial na gravidade $f(T)$

Com a primeira parte da Eq.(6.7), pegando o termo que se deriva em relação a  $\partial_\sigma h^a{}_\rho$  e abrindo termo a termo, temos

$$\begin{aligned} \partial_\sigma \left( \frac{\partial(hf)}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} \right) &= \partial_\sigma \left( h \frac{\partial T}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} \frac{\partial f}{\partial T} \right) \\ &= \partial_\sigma \left( h \frac{\partial T}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} \right) \frac{\partial f}{\partial T} + h \frac{\partial T}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} \partial_\sigma \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Como já definido na Eq.(3.64)

$$S_a{}^{\sigma\rho} \equiv \kappa \left( \frac{\partial T}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} \right) \quad (6.15)$$

que é conhecido como um superpotencial, que é equivalente a

$$S_a^{\sigma\rho} = K^{\rho\sigma}{}_a + T^{\nu\sigma}{}_\nu h_a{}^\rho - T^{\nu\rho}{}_\nu h_a{}^\sigma, \quad (6.16)$$

onde

$$K^{\rho\sigma}{}_a = \frac{1}{2} (T_a{}^{\rho\sigma} + T^{\sigma\rho}{}_a - T^{\rho\sigma}{}_a) \quad (6.17)$$

é o tensor de contorção. Assim (6.14) fica

$$\partial_\sigma \left( \frac{\partial(hf)}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} \right) = \frac{1}{\kappa} \left[ \partial_\sigma (hS_a{}^{\sigma\rho}) \frac{\partial f}{\partial T} + hS_a{}^{\sigma\rho} \partial_\sigma T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \right]. \quad (6.18)$$

Na conexão de Weitzenböck onde  $\tilde{\Gamma}^c{}_{av} = 0$ ,  $S_a{}^{\sigma\rho}$  não se altera.

### 6.2.3 Equação do campo gravitacional na teoria $f(T)$

A lagrangiana de um campo de matéria  $\mathcal{L}_m$  dependa apenas dos campos e das suas primeiras derivadas. Assim, sob uma variação arbitrária em termos da tetrada  $h^a{}_\rho$  que é escrita na segunda parte da Eq.(6.7), definimos [78]

$$h\mathcal{T}_a{}^\rho \equiv \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta h^a{}_\rho} = \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial h^a{}_\rho} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} \right] \quad (6.19)$$

como o tensor de momento de energia da matéria. Com as definições representadas nas Eqs.(6.13, 6.18 e 6.19), aplicadas a Eq.(6.7), temos a equação do campo gravitacional na teoria  $f(T)$

$$\partial_\sigma (hS_a{}^{\sigma\rho}) \frac{\partial f}{\partial T} + hS_a{}^{\sigma\rho} \partial_\sigma T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} - \kappa h j_a{}^\rho = -\kappa h \mathcal{T}_a{}^\rho. \quad (6.20)$$

Com todos os índices de espaço-tempo, a Eq.( 3.68) assume a forma

$$\partial_\sigma (hS_\mu{}^{\sigma\rho}) \frac{\partial f}{\partial T} + hS_\mu{}^{\sigma\rho} \partial_\sigma T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} - \kappa h t_\mu{}^\rho = -\kappa h \mathcal{T}_\mu{}^\rho, \quad (6.21)$$

que bem similar a teoria da gravidade teleparalela,

$$h t_\mu{}^\rho = \frac{h}{\kappa} \left( \tilde{\Gamma}^\sigma{}_{\nu\mu} S_\sigma{}^{\rho\nu} \right) \frac{\partial f}{\partial T} - h \delta_\mu^\rho f, \quad (6.22)$$

é um pseudotensor, que representa a versão teleparalela do tensor energia-momentum canónico do campo gravitacional [79]. Uma equação de campo gravitacional métrico equivalente é dada por [106]

$$R_{MN} - \frac{1}{2} R g_{MN} = \frac{\kappa_g}{f_T} \mathcal{T}_{MN} + \mathfrak{T}_{MN}, \quad (6.23)$$



onde o termo semelhante à fonte fornecida pela torção tem a forma

$$\mathfrak{T}_{MN} = [[f_T - f(T)]g_{MN} - f_{TT}S_{MNP}\nabla^P T] / f_T. \quad (6.24)$$

Isso nos mostra que, os efeitos da torção causadas por  $f(T)$  são equivalentes a uma fonte adicional a RG e uma constante gravitacional variável. Observe que, para um escalar de torção  $T$  constante, o espaço-tempo do vácuo é equivalente a um com uma constante cosmológica da forma

$$\Lambda_T = - \left[ T - \frac{f(T)}{f_T} \right]. \quad (6.25)$$

## 7 MUNDO-BRANA-5D EM GRAVIDADE F(T)

### 7.1 Equações de Campo

Usaremos a métrica descrita na Eq.(4.6) para descrever um mundo-brana em cinco dimensões, onde a métrica é descrita como

$$ds_5^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (7.1)$$

onde  $e^{A(y)}$  é o fator de warp. De uma maneira mais geral

$$ds_5^2 = g_{MN} dx^M dx^N, \quad (7.2)$$

onde

$$g_{MN} = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} + \delta_M^4 \delta_N^4, \quad (7.3)$$

a inversa da métrica é

$$g^{MN} = e^{-2A(y)} \eta^{\mu\nu} + \delta_4^M \delta_4^N, \quad (7.4)$$

onde usaremos as letras latinas maiúsculas ( $M, N, P, Q, \dots = 0, 1, 2, 3, 4$ ) para rotular as coordenadas nas cinco dimensões. Podemos obter as tetradas representante dessa métrica através das Eqs.(2.9 e 2.7) já definidas no Cap.2,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a{}_\mu h^b{}_\nu \quad e \quad \eta_{ab} = g_{\mu\nu} h_a{}^\mu h_b{}^\nu. \quad (7.5)$$

Assim, as tetradas da métrica representada pela Eq.(7.1) é

$$h^a{}_\mu = \begin{pmatrix} e^{A(y)} \delta_\mu^a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.6)$$

e o seu inverso é

$$h_a{}^\mu = \begin{pmatrix} e^{-A(y)} \delta_a^\mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.7)$$

O escalar da torção para essa métrica é obtida na Eq.(4.21),

$$\begin{aligned} T &= T^P{}_{MN} S_P{}^{MN} \\ &= -12A'^2, \end{aligned} \quad (7.8)$$

onde  $A' \equiv \partial A(y)/\partial y$ . A lagrangiana puramente em termos da função que depende da torção foi definida na Eq.(6.2)

$$\mathcal{L} = \frac{h}{4}f(T), \quad (7.9)$$

onde fazemos  $\kappa = 1$ . Podemos escrever a ação gravitacional em cinco dimensões, com constante cosmológica  $\Lambda$ , como

$$\mathfrak{S} = \frac{h}{4} \int f(T) dx^5 + \int (\Lambda + \mathcal{L}_m) d^5x, \quad (7.10)$$

onde  $\mathcal{L}_m$  é a lagrangiana de um campo de matéria qualquer. Tendo como base a equação de campo gravitacional (6.21), a equação de campo correspondentes assume a forma [56]

$$\frac{1}{h} \partial_Q \left( h S_N^{MQ} \right) f_T + S_N^{MQ} \partial_Q T f_{TT} - t_N^M = -\Lambda \delta_N^M - \mathcal{T}_N^M, \quad (7.11)$$

que bem similar a teoria da gravidade teleparalela,

$$t_N^M = \tilde{\Gamma}^R_{SN} S_R^{MS} f_T - \frac{1}{4} \delta_N^M f, \quad (7.12)$$

é um pseudotensor, que representa a versão teleparalela do tensor energia-momentum canônico do campo gravitacional [79]. Lembrando que  $f \equiv f(T)$ ,  $f_T \equiv \partial f(T)/\partial T$  e  $f_{TT} \equiv \partial^2 f(T)/\partial T^2$ . A correção na constante gravitacional fornecida pelo  $f(T)$  na Eq.(6.23) resulta em uma modificação na relação entre as massas de Planck no volume e na brana como

$$M_4^2 = M_5^4 \int_{-\infty}^{\infty} f_T e^{2A} dy. \quad (7.13)$$

A partir da lagrangiana de matéria  $\mathcal{L}_m$ , definimos o tensor energia-momentum  $\mathcal{T}_N^M$  na forma [13, 14, 82–84]

$$\mathcal{T}_N^M = t_0(y) \delta_\mu^p + t_y(y) \delta_y^y. \quad (7.14)$$

Em nosso caso, tomamos um  $f(T)$  que represente uma generalização da gravidade teleparalela [56]

$$f(T) = T + kT^n \quad (7.15)$$

onde  $n$  e  $k$  são parâmetros que controlam a influencia da torção. Note que, se fizemos  $k = 0$  temos o caso teleparalelo, já analisado no cap.3. As equações de campo são dados como

$$(-1)^{n-1} k A'^{2n-2} 3^n 2^{2n-3} (2n-1) (2A'^2 + nA'') + 3A'^2 + \frac{3}{2} A'' = -\Lambda - t_0(y), \quad (7.16)$$

$$\frac{1}{4} [12A'^2 + (-1)^{n-1} (2n-1) 12^n k A'^{2n}] = -\Lambda - t_y(y). \quad (7.17)$$

As equações (7.16) e (7.17) formam um sistema complexo de equações acopladas.

## 7.2 Regime de Brana Fina

No estado de vácuo, onde  $\mathcal{T}_N^M = 0$  e supondo  $A' = -c$ , onde  $c$  é uma constante, as equações (7.16) e (7.17) tomam a forma

$$3c^2 + (-4)^{n-1}k(2n-1)(3c^2)^n = -\Lambda, \quad (7.18)$$

pois as equações (7.16) e (7.17) se tornam a mesma.

### 7.2.1 $n = 1/2$

Para o caso de  $n = 1/2$ , temos

$$c_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{(-\Lambda)}{3}}, \quad (7.19)$$

que se parece muito com uma solução  $AdS_5$  no vácuo, para um mundo-brana do modelo RS [10, 11].

### 7.2.2 $n = 1$

Para o caso de  $n = 1$ , temos

$$c_1 = \pm \sqrt{\frac{(-\Lambda)}{3(1+k)}}. \quad (7.20)$$

Se fizemos  $k = 0$ , temos uma solução  $AdS_5$  no vácuo. Para os casos onde  $k \neq 0$  temos a influência da torção. Note que, se  $k < -1$  temos uma solução real, e se  $k > -1$  temos uma solução complexa.

### 7.2.3 $n = 2$

Para o caso de  $n = 2$ , temos duas soluções possíveis

$$c_{2.1} = \pm \sqrt{\frac{(-\Lambda)}{3}} \quad e \quad c_{2.2} = \pm \sqrt{\frac{(\Lambda+1)}{36k}}. \quad (7.21)$$

Note que, no caso de  $c_{2.1}$ , a solução métrica é a mesma para  $c_{1/2}$ , mudando apenas as constantes de integração. Para  $c_{2.2}$ , temos uma solução diferente, onde a torção influencia em seu valor. Fica bem evidente que mesmo  $\Lambda$  sendo zero,  $f(T)$  gera uma constante cosmológica, que torna possível a existência de soluções, que está de acordo com a Eq.(6.25).

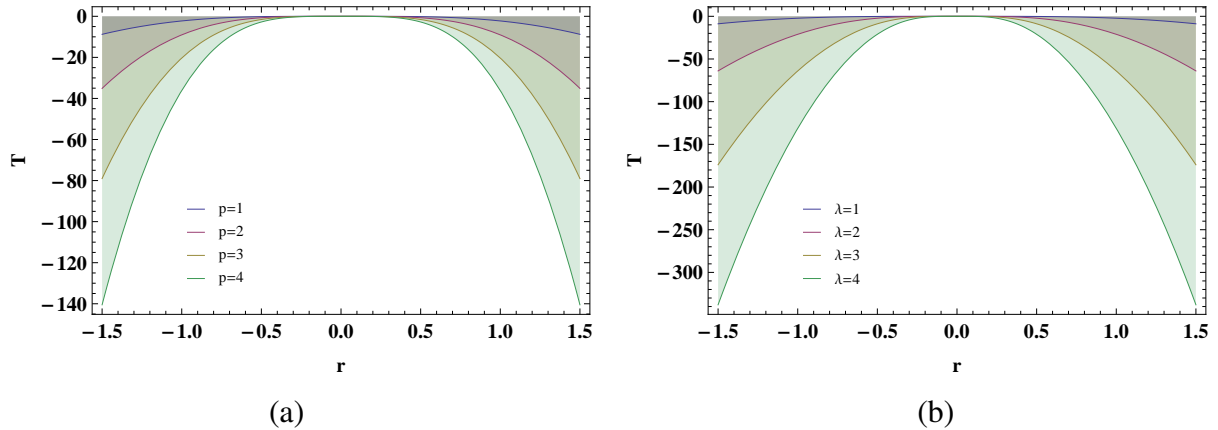


Figura 9: Escalar de torção. (a)  $\lambda = 1$  e  $p$  variando . (b)  $p = 1$  e  $\lambda$  variando.

### 7.2.4 $n = 3$

Para o caso de  $n = 3$ , temos duas soluções possíveis

$$c_{3.1} = \pm \sqrt{\frac{(-\Lambda)}{3}} \quad e \quad c_{3.2} = \pm \sqrt[4]{\frac{-(\Lambda + 1)}{720k}}, \quad (7.22)$$

O caso de a  $c_{3.1}$  é o mesmo de  $c_{2.1}$ , que dar a mesma solução métrica, mudando apenas as constantes de integração. No caso de  $c_{3.2}$  bem parecido com o caso de  $n = 2$  a torção influencia em seu valor. De uma maneira geral podemos dizer que a constante  $c = c(n, k)$  é determinada por  $n$  e  $k$ .

## 7.3 Brana Espessa

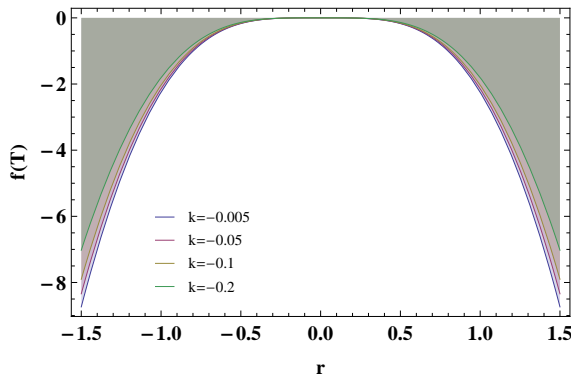
Embora as equações (7.16) e (7.17) forme uma teoria derivada de segunda ordem, é difícil fornecer uma solução analítica para esse caso. Para simplificar, vamos assumir um *ansatz* [56, 107–109]

$$e^{2A(r)} = \cosh^{-2p}(\lambda r), \quad (7.23)$$

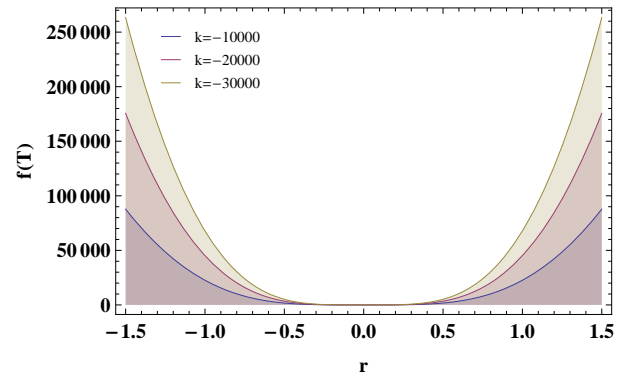
onde o parâmetro  $p$  modifica a variação de *warp* dentro do núcleo da brana,  $\lambda$  determina a largura da brana. Podemos observar o comportamento do escalar de torção para esse *ansatz*, através da figura 9. Por sua vez, podemos analisar como a gravidade  $f(T)$  modifica a gravidade RG analisando as figuras (10, 11 e 12). Para  $k = 0$  temos o caso convencional RG analisado na Fig.(9).

Obtemos a partir da Eq.(7.17)

$$t_y(y) = -\frac{1}{4} [12(p\lambda)^2 - (-12)^n k(2n-1)(p\lambda)^{2n}] + \frac{1}{4} \{12[p\lambda \tanh(y\lambda)]^2 - (-12)^n k(2n-1)[p\lambda \tanh(y\lambda)]^{2n}\}, \quad (7.24)$$

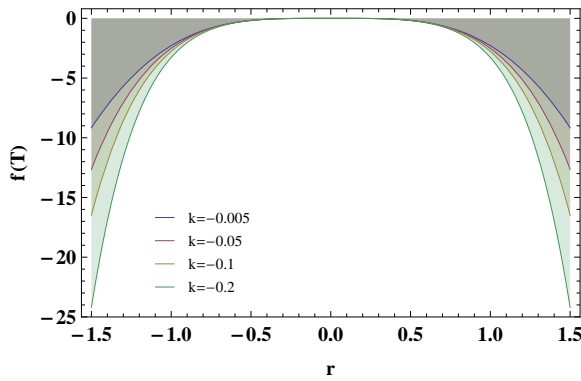


(a)

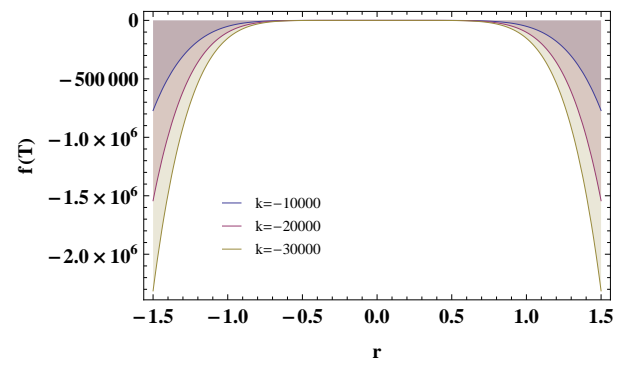


(b)

Figura 10: (a)  $f(T)$  com  $n = \lambda = p = 1$ , para  $k$  pequeno. (b)  $f(T)$  com  $n = p = \lambda = 1$ , para  $k$  muito pequeno.

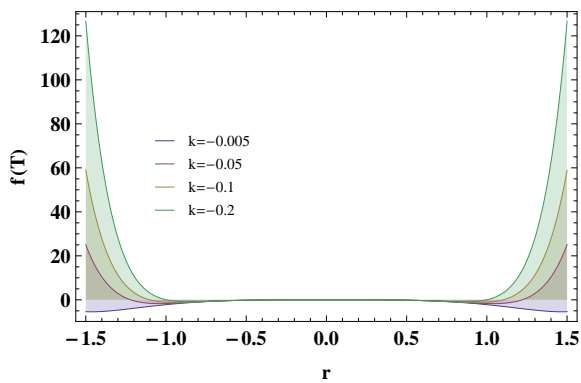


(a)

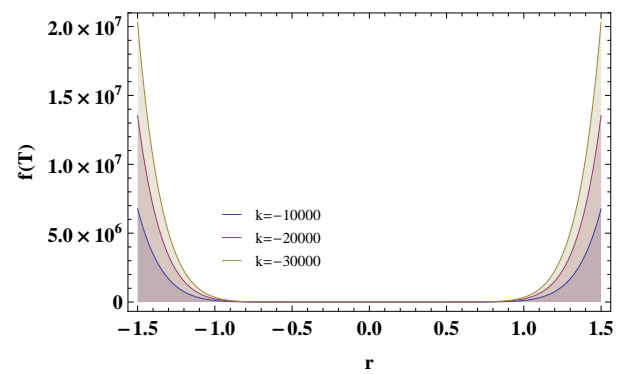


(b)

Figura 11: (a)  $f(T)$  com  $n = 2$  e  $\lambda = 1$ , para  $k$  pequeno. (b)  $f(T)$  com  $n = 2$  e  $p = \lambda = 1$ , para  $k$  muito pequeno.



(a)



(b)

Figura 12: (a)  $f(T)$  com  $n = 3$  e  $\lambda = p = 1$ , para  $k$  pequeno. (b)  $f(T)$  com  $n = 3$  e  $p\lambda = 1$ , para  $k$  muito pequeno.

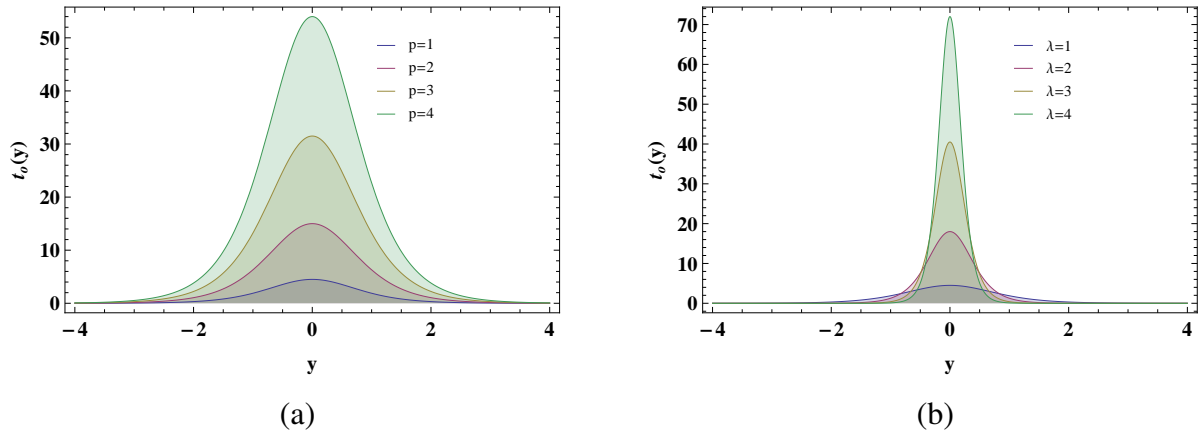


Figura 13: (a)  $t_0(y)$  para  $n = 1/2$  e  $\lambda = 1$ . (b)  $t_0(y)$  para  $n = 1/2$  e  $p = 1$ .

onde encontramos uma escolha apropriada

$$\Lambda = -3(p\lambda)^2 - (-4)^{n-1}k(2n-1)[3(p\lambda)^2]^n, \quad (7.25)$$

pela condição de que  $t_y(y \rightarrow \infty) = 0$ . Comparando a Eq.(7.25) com a Eq.(7.18), temos que nesse caso  $c = p\lambda$ . Com as equações (7.16, 7.25), obtemos

$$t_0(y) = -\frac{1}{4} [12(p\lambda)^2 - (-12)^n k(2n-1)(p\lambda)^{2n}] + \frac{3}{2} p\lambda^2 \operatorname{sech}^2(y\lambda) - 3[p\lambda \tanh(y\lambda)]^2 \\ - \frac{1}{p} \{ (-3)^n 2^{2n-3} k(2n-1) [n+p - p \cosh(2y\lambda)] \operatorname{csch}^2(y\lambda) [-p\lambda \tanh(y\lambda)]^{2n} \}. \quad (7.26)$$

Analisaremos melhor os comportamentos de  $t_0(y)$  e  $t_y(y)$ , para alguns valores de  $n$  nas subsecções seguintes.

### 7.3.1 $n = 1/2$

Na figura 13 mostra que a condição de ser localizada ao redor da origem é satisfeita para  $t_0(y)$ . Com (a) vemos que a largura se mantém aumentando  $p$ . Com (b) vemos que a largura a meia altura diminui com o aumento de  $\lambda$ . Na figura 14 mostra que a condição de ser localizada ao redor da origem é satisfeita para  $t_y(y)$ . Com (a) vemos que a largura se mantém aumentando  $p$ . Com (b) vemos que a largura a meia altura diminui com o aumento de  $\lambda$ .

### 7.3.2 $n = 1$

Na figura 15 mostra que a condição de ser localizada ao redor da origem é satisfeita para  $t_0(y)$ . Com (a) vemos que a largura se mantém aumentando  $p$ . Com (b) vemos que a largura a meia altura diminui com o aumento de  $\lambda$ . Na figura 16 mostra que a condição de ser localizada ao redor da origem. Com (a) vemos que a largura se mantém, aumentando a

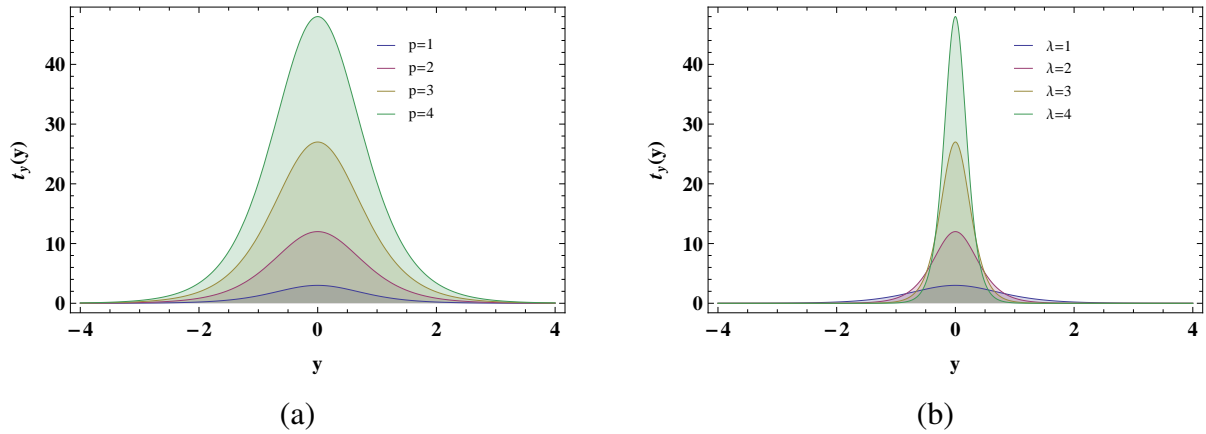


Figura 14: (a)  $t_y(y)$  para  $n = 1/2$  e  $\lambda = 1$ . (b)  $t_y(y)$  para  $n = 1/2$  e  $p = 1$ .

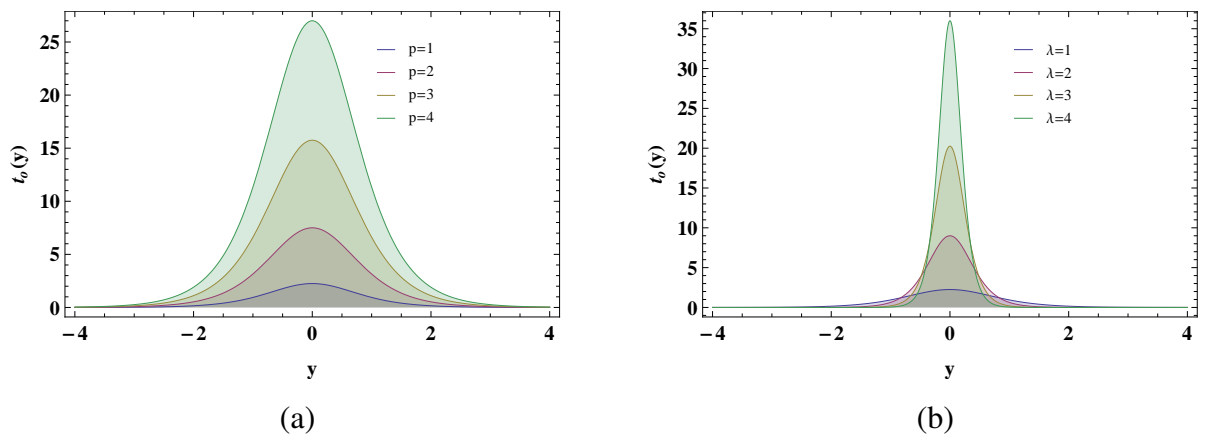


Figura 15: (a)  $t_0(y)$  para  $n = \lambda = 1$  e  $k = -0.5$ . (b)  $t_0(y)$  para  $n = p = 1$  e  $k = -0.5$ .

amplitude de  $t_0(y)$  quanto maior for  $k$ . Com (b) vemos que é gerado uma pressão angular negativa, a largura se mantém, diminuindo apenas  $t_0(y)$  quanto menor for  $k$ .

Na figura 17 mostra que a condição de ser localizada ao redor da origem é satisfeita para  $t_y(y)$ . Com (a) vemos que a largura se mantém aumentando  $p$ . Com (b) vemos que a largura a meia altura diminui com o aumento de  $\lambda$ . Na figura 18 mostra que a condição de ser localizada ao redor da origem. Com (a) vemos que a largura se mantém, aumentando a amplitude de  $t_y(y)$  quanto maior for  $k$ . Com (b) vemos que é gerado uma pressão negativa, a largura se mantém, diminuindo apenas  $t_y(y)$  quanto menor for  $k$ .

### 7.3.3 $n = 2$

Na figura 19 mostra que  $t_0(y)$  se localizada nas proximidades da origem. Tanto em (a) como em (b) vemos que a largura a meia altura diminui com o aumento de  $\lambda$ . Vemos também o surgimento de dois máximos, quanto maior  $\lambda$  e  $p$  mais evidente isso fica. Na figura 20 vemos que quando menor for  $k$  existe apenas um máximo, quando diminuimos  $k$  aparece dois máximos, isso estar relacionado à transição de fase entre a quebra de uma única brana em



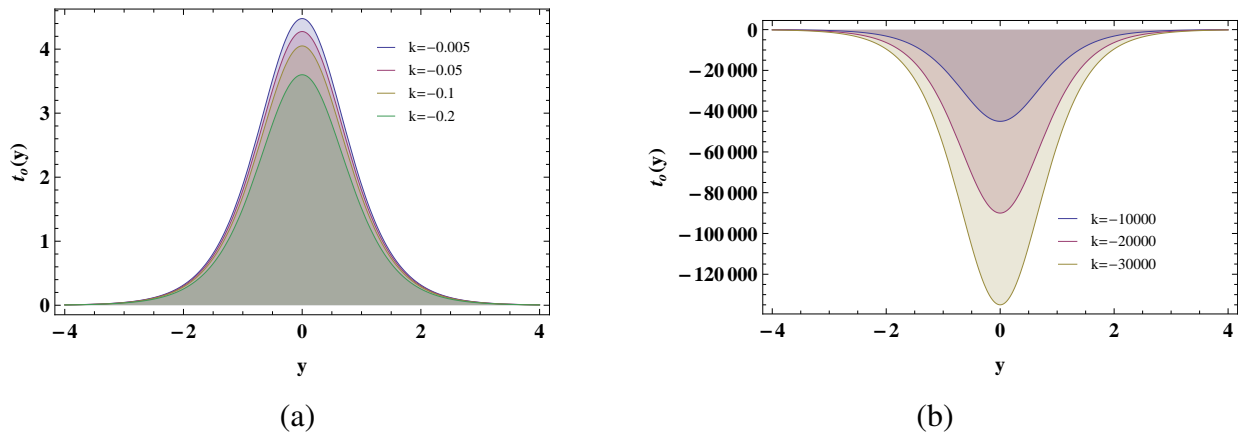


Figura 16: (a)  $t_0(y)$  com  $n = \lambda = p = 1$ , para  $k$  pequeno. (b)  $t_0(y)$  com  $n = p = \lambda = 1$ , para  $k$  muito pequeno.

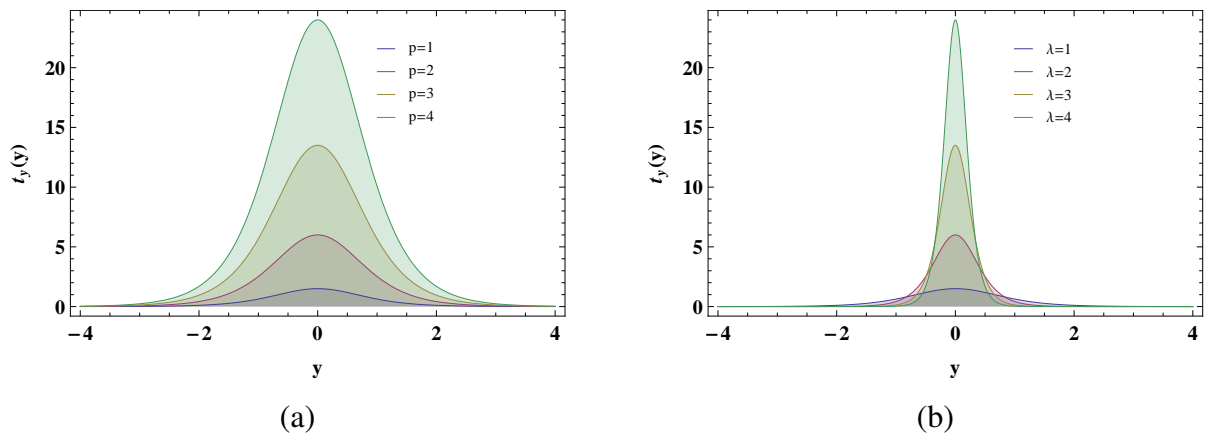


Figura 17: (a)  $t_y(y)$  para  $n = \lambda = 1$  e  $k = -0.5$ . (b)  $t_y(y)$  para  $n = p = 1$  e  $k = -0.5$ .

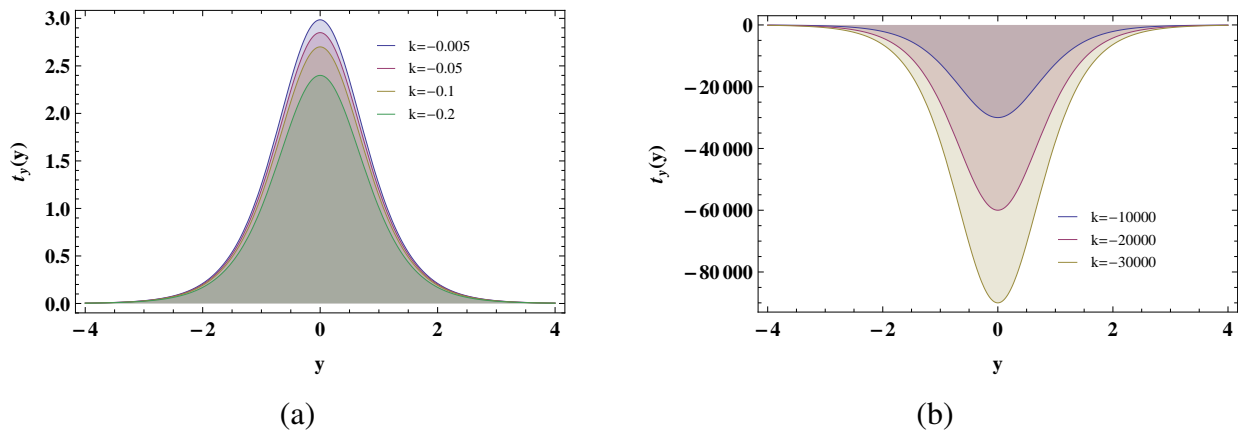


Figura 18: (a)  $t_y(y)$  com  $n = \lambda = p = 1$ , para  $k$  pequeno. (b)  $t_y(y)$  com  $n = p = \lambda = 1$ , para  $k$  muito pequeno.

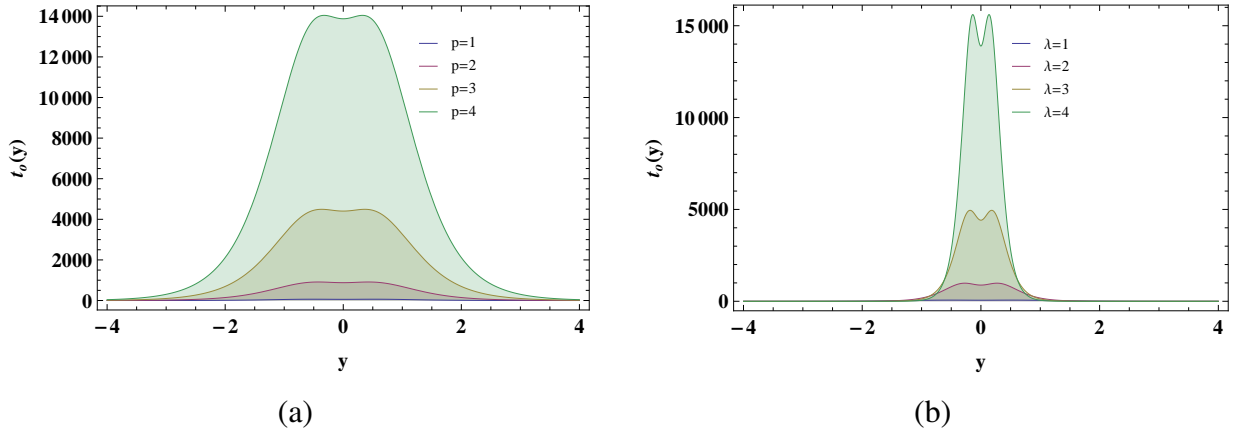


Figura 19: (a)  $t_0(y)$  para  $n = 2$ ,  $\lambda = 1$  e  $k = -0.5$ . (b)  $t_0(y)$  para  $n = 2$ ,  $p = 1$  e  $k = -0.5$ .

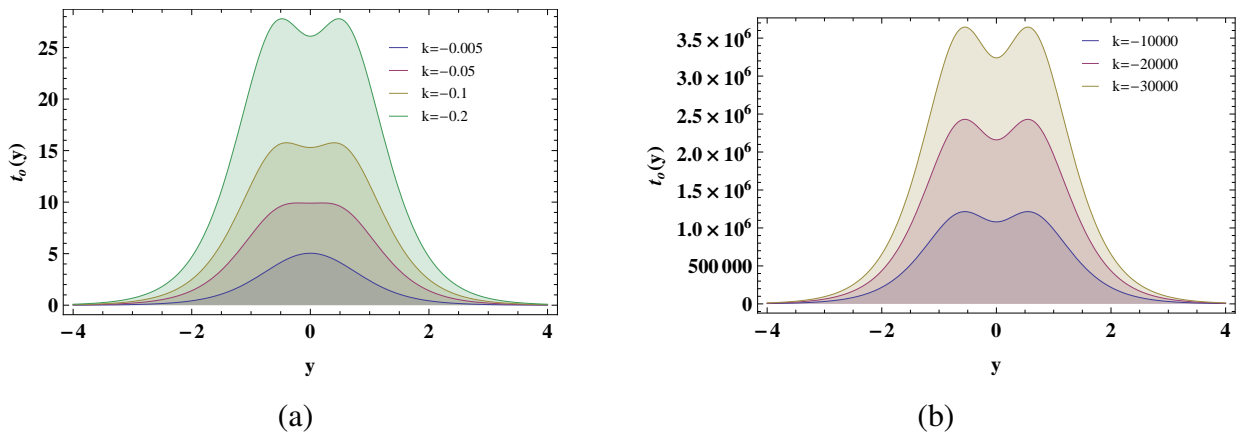


Figura 20: (a)  $t_0(y)$  com  $n = 2$  e  $p = \lambda = 1$  para  $k$  pequeno. (b)  $t_0(y)$  com  $n = 2$  e  $p = \lambda = 1$ , para  $k$  muito pequeno .

duas branas.

Na figura 21 mostra que  $t_y(y)$  se localizada nas proximidades da origem. Vemos que a largura a meia altura diminui com o aumento de  $\lambda$ . Vemos também o surgimento de um achatamento no máximo, quanto maior  $\lambda$ , mais evidente isso fica. Na figura 22 vemos que quando diminuimos  $k$  aparece o achatamento fica mais evidente, isso estar relacionado à transição de fase da quebra da brana .

### 7.3.4 $n = 3$

Na figura 23 mostra que  $t_0(y)$  se localizada nas proximidades da origem. Vemos também o surgimento de dois máximos, quanto maior  $\lambda$ , mais evidente isso fica. Na figura 24 vemos quando diminuimos  $k$  aparece dois máximos, isso estar relacionado à transição de fase entre uma única brana em duas branas. Nos dois casos vemos que é gerado uma pressão negativa.

Na figura 25 mostra que  $t_y(y)$  se localizada nas proximidades da origem. Vemos

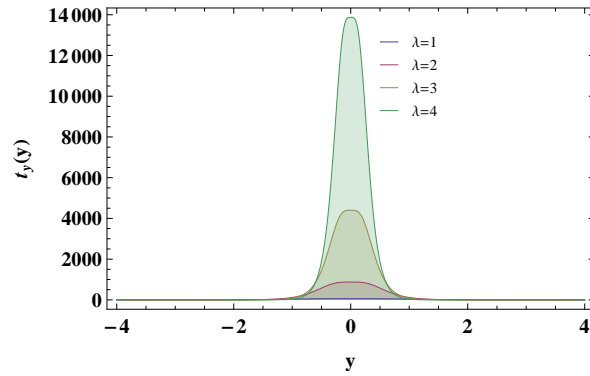
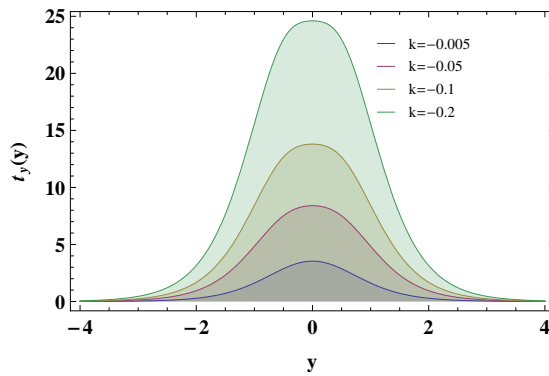
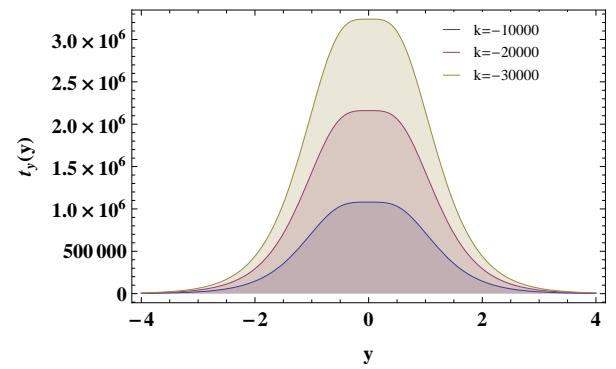


Figura 21:  $t_y(y)$  para  $n = 2$ ,  $p = 1$  e  $k = -0.5$ , com  $\lambda$  variando.



(a)



(b)

Figura 22: (a)  $t_y(y)$  com  $n = 2$  e  $p = \lambda = 1$ , para  $k$  pequeno. (b)  $t_y(y)$  com  $n = 2$  e  $p = \lambda = 1$ , para  $k$  muito pequeno .

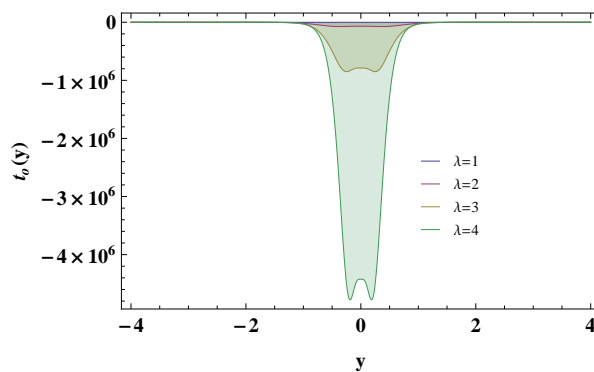


Figura 23:  $t_0(y)$  para  $n = 3$ ,  $p = 1$  e  $k = -0.5$ .

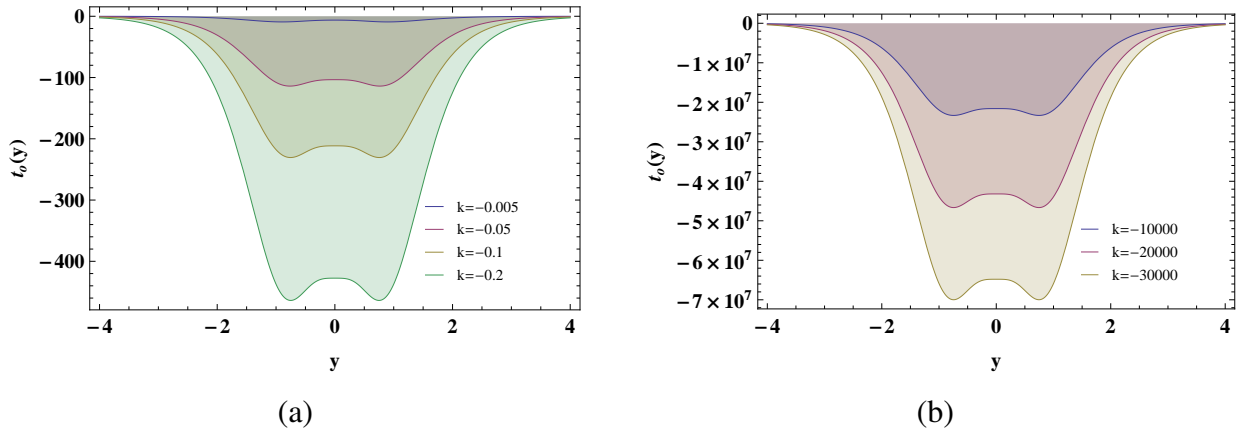


Figura 24: (a)  $t_0(y)$  com  $n = 3$  e  $p = \lambda = 1$  para  $k$  pequeno. (b)  $t_0(y)$  com  $n = 3$  e  $p = \lambda = 1$ , para  $k$  muito pequeno .

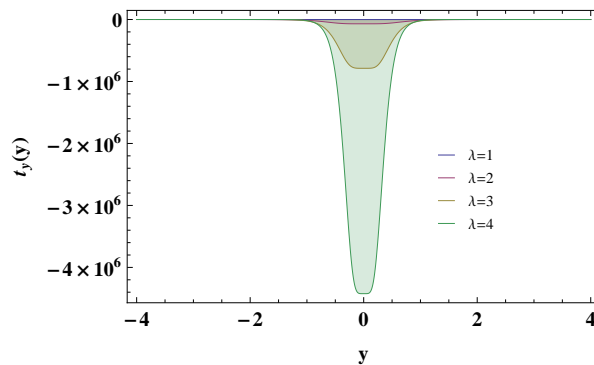


Figura 25:  $t_y(y)$  para  $n = 3$ ,  $p = 1$  e  $k = -0.5$ .

também o surgimento de do achatamento no máximo, quanto maior  $\lambda$ , mais evidente isso fica. Na figura 26 vemos quando diminuimos  $k$  aparece fica mais evidente o achatamento no máximo, isso estar relacionado à transição de fase entre a quebra da brana.

### 7.3.5 Análise geral entre $t_0(y)$ e $t_y(y)$

Na figura 27 (a) e (b) descreve uma brana espessa localizada. As condições de energia fraca, forte e dominante são satisfeitas. Em (c) descreve uma brana espessa localizada mas a condição de energia dominante não é satisfeita. Quanto a (d) as condições de energia não são satisfeitas.

A densidade de energia que existem nas branas divididas se torna mais notáveis com o aumento da contribuição de torção. Isso indica que o efeito geométrico influencia na distribuição da densidade de energia. Podemos notar que os parâmetros  $p$  e  $\lambda$  são os principais responsáveis pela distância entre as branas divididas, que também determinam a espessura do domínio da parede.

Uma explicação provável para a variável  $k$  é que  $k$  pode estar relacionado à evolução

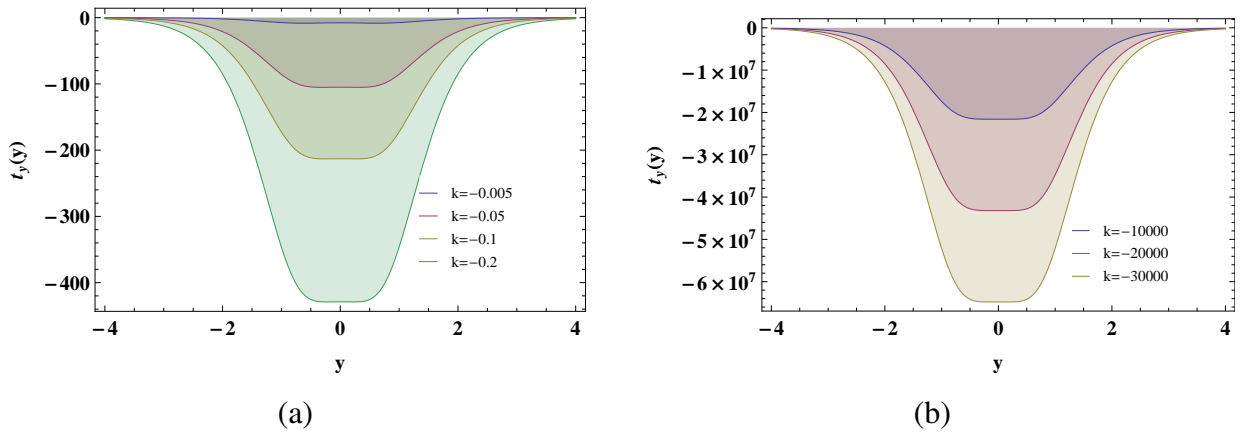


Figura 26: (a)  $t_y(y)$  com  $n = 3$  e  $p = \lambda = 1$ , para  $k$  pequeno. (b)  $t_y(y)$  com  $n = 3$ ,  $p = \lambda = 1$ , para  $k$  muito pequeno.

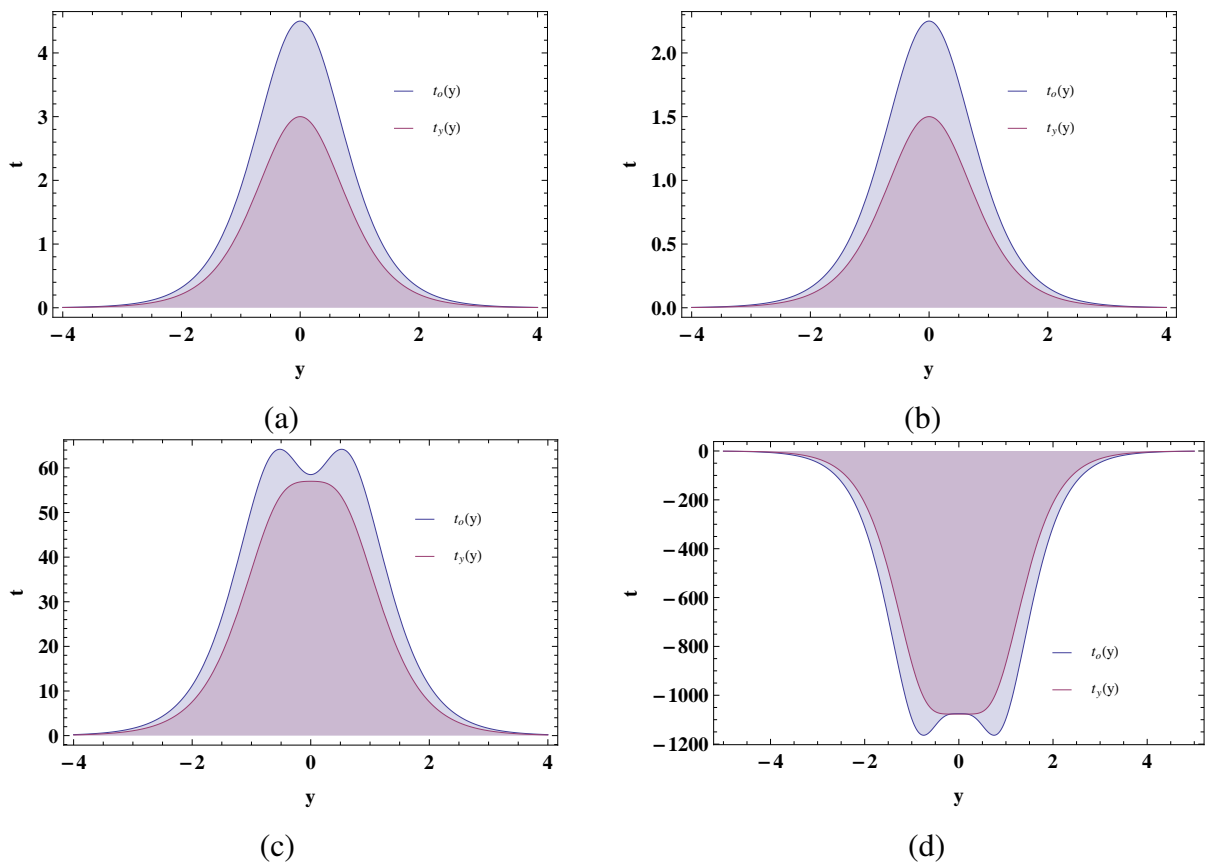


Figura 27: Energia-momentum. (a)  $n = 1/2$  e  $p = \lambda = 1$  com  $k = -0.5$ . (b)  $n = 1$  e  $p = \lambda = 1$  com  $k = -0.5$ . (c)  $n = 2$  e  $p = \lambda = 1$  com  $k = -0.5$ . (d)  $n = 3$  e  $p = \lambda = 1$  com  $k = -0.5$

do universo [56]. Observe que a temperatura do fundo cosmológico é um parâmetro com características relevantes para a evolução do universo, podemos assim, reconhecer  $k$  como uma função da temperatura. Portanto, podemos então dizer que existem temperaturas crítica, ou seja, valores de  $k$ , na qual, a brana se divide [110, 111].

#### 7.4 Perturbações Lineares

Agora, fazemos uma investigação nas perturbações lineares do sistema de branas. Para simplificar, consideramos apenas o perturbação do tensor sem traço transversal (TT)[63], que está relacionado com a onda gravitacional e gravitons quadridimensionais. Para isso, fazemos uma perturbação na tetrada [63]

$$h^a{}_{\mu} = \begin{pmatrix} e^{A(y)} (\delta_{\mu}^a + w^a{}_{\mu}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.27)$$

e a sua inverso é

$$h_a{}^{\mu} = \begin{pmatrix} e^{-A(y)} (\delta_a^{\mu} + w_a{}^{\mu}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.28)$$

onde  $w^a{}_{\mu} = w^a{}_{\mu}(x^{\mu}, y)$ . Nossa métrica demonstrada na Eq.(7.1) fica

$$g_{MN} dx^M \otimes dx^N = e^{A(y)} (\eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}) dx^{\mu} dx^{\nu} + dy^2, \quad (7.29)$$

e sua inversa

$$g^{MN} dx_M \otimes dx_N = e^{-A(y)} (\eta_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}) dx^{\mu} dx^{\nu} + dy^2, \quad (7.30)$$

onde  $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} \gamma^{\alpha\beta}$ ,  $\gamma_a{}^{\mu} = \eta^{ab} \eta_{\mu\nu} \gamma^b{}_{\nu}$  e por sua vez

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} &= (\delta_{\mu}^a w_b{}^{\nu} + \delta_{\nu}^b w_a{}^{\mu}) \eta_{ab}, \\ \gamma^{\mu\nu} &= (\delta_a^{\mu} w_b{}^{\nu} + \delta_b^{\nu} w_a{}^{\mu}) \eta^{ab}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Observe que a perturbação do tensor TT satisfaz as seguintes Condições[63]:

$$\partial_{\mu} \gamma^{\mu\nu} = 0 = \eta^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu}, \quad (7.32)$$

isso implica que

$$\partial_{\mu} (\delta_a^{\mu} w_b{}^{\nu} + \delta_b^{\nu} w_a{}^{\mu}) \eta^{ab} = 0, \quad (7.33)$$

ou de maneira mais direta [63]

$$\delta_a^{\mu} w^a{}_{\mu} = 0. \quad (7.34)$$

Assim, os componentes não nulos da conexão de Weitzenböck sofrendo a perturbação

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^\rho{}_{\mu r} &= A' \delta_\mu^\rho + (\delta_a^\rho w^a{}_\mu - \delta_\mu^a w_a{}^\rho) A' + \delta_a^\rho w^a{}_\mu, \\ \tilde{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} &= \delta_a^\rho \partial_\mu w^a{}_\nu,\end{aligned}\quad (7.35)$$

onde  $A' = \partial_y A(y)$ . Com a Eq.(7.35) obtemos os componentes não nulos do tensor torção na conexão de Weitzenböck sofrendo a perturbação [63]

$$\begin{aligned}T^\rho{}_{\mu r} &= -A' \delta_\mu^\rho - (\delta_a^\rho w^a{}_\mu - \delta_\mu^a w_a{}^\rho) A' - \delta_a^\rho w^a{}_\mu, \\ T^\rho{}_{\mu\nu} &= \delta_a^\rho (\partial_\mu w^a{}_\nu - \partial_\nu w^a{}_\mu),\end{aligned}\quad (7.36)$$

lembrando que  $T^\rho{}_{\mu\nu} = -T^\rho{}_{\nu\mu}$ . Com as representações da torção na Eq.(7.36) podemos obter os componentes não nulos do tensor contorção [63]

$$\begin{aligned}K^\rho{}_{\mu r} &= A' (\delta_a^\rho w^a{}_\mu - \delta_\mu^a w_a{}^\rho) + \frac{1}{2} (\delta_a^\rho w'^a{}_\mu - \delta_\mu^a w'_a{}^\rho), \\ K^\rho{}_{r\nu} &= -A' \delta_\nu^\rho - \frac{1}{2} (\delta_\nu^a w'_a{}^\rho - \delta_a^\rho w'^a{}_\nu), \\ K^r{}_{\mu\nu} &= e^{2A} (A' \eta_{\mu\nu} + A' \gamma_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \gamma'_{\mu\nu}), \\ K^\rho{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left[ \delta_\mu^a (\partial^\rho w_{a\nu} - \partial_\nu w_a{}^\rho) + \delta_\nu^a (\partial^\rho w_{a\mu} - \partial_\mu w_a{}^\rho) - \delta_a^\rho (\partial_\mu w^a{}_\nu - \partial_\nu w^a{}_\mu) \right].\end{aligned}\quad (7.37)$$

Por sua vez, com (7.36) e (7.37) obtemos os componentes não nulos do tensor dual da torção [63]

$$\begin{aligned}S_\rho{}^{\mu r} &= \frac{1}{2} \left[ 3A' \delta_\rho^\mu - \frac{1}{2} (\delta_\rho^a w'_a{}^\mu + \delta_a^\mu w'^a{}_\rho) \right], \\ S_r{}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left[ A' (\delta_a^\mu w^{a\nu} - \delta_\nu^a w^{a\mu}) + \frac{1}{2} (\delta_a^\mu w'^{a\nu} - \delta_\nu^a w'^{a\mu}) \right] e^{-2A}, \\ S_\rho{}^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \left[ \delta_a^\nu (\partial^\mu w^a{}_\rho - \partial_\rho w^{a\mu}) - \delta_a^\mu (\partial^\nu w^a{}_\rho - \partial_\rho w^{a\nu}) \right] e^{-2A} + \frac{1}{4} \delta_\mu^a (\partial^\mu w_a{}^\nu - \partial^\nu w_a{}^\mu) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \delta_\rho^\nu \delta_a^\lambda \partial_\lambda w^{a\mu} - \delta_\rho^\mu \delta_a^\lambda \partial_\lambda w^{a\nu} \right] e^{-2A}, \\ S_r{}^{\mu r} &= \frac{1}{2} (\delta_a^\rho \partial_\rho w^{a\mu}) e^{-2A}.\end{aligned}\quad (7.38)$$

Lembrando que  $S_\rho{}^{\mu\nu} = -S_\rho{}^{\nu\mu}$ . Fazendo uma perturbação na Eq.(7.11), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{h} f_T \left[ \delta g_{NP} \partial_Q (h S_M{}^{PQ}) + g_{NP} \partial_Q (h \delta S_M{}^{PQ}) - h (\delta \tilde{\Gamma}^Q{}_{PM} S_{QN}{}^P + h \tilde{\Gamma}^Q{}_{PM} \delta S_{QN}{}^P) \right] \\ + f_{TT} \delta S_{MN}{}^Q \partial_Q T + \frac{1}{4} \delta g_{MN} f = \delta \mathcal{T}_{MN},\end{aligned}\quad (7.39)$$

onde  $\delta h = 0$  e  $\delta T = 0$ . Pela Eq.(7.39), obtemos as equações de campo perturbadas [63]

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \left( e^{-2A} \square \gamma_{\mu\nu} + 4A' \gamma'_{\mu\nu} + \gamma''_{\mu\nu} - 24A' \gamma_{\mu\nu} - 6A'' \gamma_{\mu\nu} \right) e^{2A} f_T \\ & - 6 \left( 6A'A'' \gamma_{\mu\nu} - A'A'' \gamma'_{\mu\nu} \right) e^{2A} f_{TT} + \frac{1}{4} e^{2A} \gamma_{\mu\nu} f = \delta \mathcal{T}_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (7.40)$$

onde  $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ . Note que a equação radial se anulam com essa perturbação. Agora para o caso da perturbação do tensor de momento-energia

$$\delta \mathcal{T}_{\mu\nu} = \delta(\mathcal{T}_\mu{}^\mu g_{\mu\nu}) = \delta(\mathcal{T}_\mu{}^\mu) \eta_{\mu\nu} e^{2A} + \mathcal{T}_\mu{}^\mu \gamma_{\mu\nu} e^{2A}. \quad (7.41)$$

Com a Eq.(7.16), temos que [63]

$$\frac{3}{2} (4A'^2 + A'') f_T - \frac{3}{2} (24A'^2 A'') f_{TT} + \frac{1}{4} f = \mathcal{T}_\mu{}^\mu. \quad (7.42)$$

Substituindo (7.41) e (7.42) na Eq.(7.40), temos

$$-\frac{1}{4} \left( e^{-2A} \square \gamma_{\mu\nu} + 4A' \gamma'_{\mu\nu} + \gamma''_{\mu\nu} \right) f_T + 6 \left( A'A'' \gamma'_{\mu\nu} \right) f_{TT} = \delta \mathcal{T}_{\mu\nu}. \quad (7.43)$$

Mas, o traço de  $\delta(\mathcal{T}_\mu{}^\mu)$  é nulo. Assim, a Eq.(7.43) toma a forma [63]

$$\left( e^{-2A} \square \gamma_{\mu\nu} + 4A' \gamma'_{\mu\nu} + \gamma''_{\mu\nu} \right) f_T - 24 \left( A'A'' \gamma'_{\mu\nu} \right) f_{TT} = 0. \quad (7.44)$$

Note que, se fizemos  $k = 0$  temos que  $f_T = 1$  e  $f_{TT} = 0$ , para esse caso a Eq.(7.44) é igual a da RG [81]. Fazendo a transformação de coordenadas  $dz = e^{-A} dy$  na Eq.(7.44), onde

$$\partial_y = e^{-A} \partial_z \quad e \quad \partial_y^2 = e^{-2A} (\partial_z^2 - \partial_z A \partial_z), \quad (7.45)$$

temos [63]

$$(\partial_z^2 + 2H \partial_z + \square) \gamma_{\mu\nu} = 0, \quad (7.46)$$

onde

$$H = \frac{3}{2} \partial_z A + 12e^{-2A} [(\partial_z A)^3 - \partial_z A \partial_z^2 A] \frac{f_{TT}}{f_T}. \quad (7.47)$$

Introduzindo a decomposição KK [63]

$$\gamma_{\mu\nu}(x^\rho, z) = \varepsilon_{\mu\nu}(x^\rho) F(z) \Psi(z), \quad (7.48)$$

onde

$$F(z) = e^{-\frac{3}{2}A + \int K(z) dz}, \quad (7.49)$$



com

$$K(z) = -12e^{-2A} [(\partial_z A)^3 - \partial_z A \partial_z^2 A] \frac{f_{TT}}{f_T}. \quad (7.50)$$

A função  $F(z)$  é introduzida para eliminar os termos de derivadas primeiras. Note que, se  $f_{TT} = 0$  temos  $K(z) = 0$ . Substituindo a decomposição KK (7.48) na Eq.(7.46), obtemos duas equações: a equação tipo Klein-Gordon para a KK quadridimensional do gravitons  $\varepsilon_{\mu\nu}$

$$(\square - m^2) \varepsilon_{\mu\nu} = 0, \quad (7.51)$$

e a equação tipo Schrödinger para a dimensão extra

$$(-\partial_z^2 + U(z)) \Psi(z) = m^2 \Psi(z), \quad (7.52)$$

onde  $m$  é a massa do graviton KK e o potencial efetivo é

$$U(z) = \partial_z H + H^2. \quad (7.53)$$

A equação do tipo Schrödinger (7.52) pode ser fatorada como

$$(-\partial_z + H) (\partial_z + H) \Psi(z) = m^2 \Psi(z), \quad (7.54)$$

isso representa uma equação de mecânica quântica supersimétrica. Note que para  $m^2 < 0$ , não há graviton quadridimensional, portanto, qualquer solução de brana na teoria de gravidade modificada por  $f(T)$  é estável sob a perturbação do tensor TT [63]. A fim de localizar um graviton KK na brana, o correspondente perfil extra-dimensional  $\Psi(z)$  (também chamado de modo KK por simplicidade) deve satisfazer a condição de normalização

$$\int |\Psi(z)|^2 dz < \infty. \quad (7.55)$$

A solução do graviton no modo zero (o quadridimensional graviton sem massa) é [63]

$$\Psi_0 = N_0 e^{\frac{3}{2}A - \int K(z) dz}, \quad (7.56)$$

onde  $N_0$  é a constante de normalização.

## 7.5 Localização da Gravidade

Nesta sessão, investigamos o problema de localização da gravidade, levando em conta que o graviton no modo zero deve estar localizado na brana. Com a transformação de coordenadas  $dz = e^{-A} dy$  e com o *ansatz* proposto na Eq.(7.23) obtemos que

$$y\lambda = \operatorname{arcsinh}(z\lambda), \quad (7.57)$$

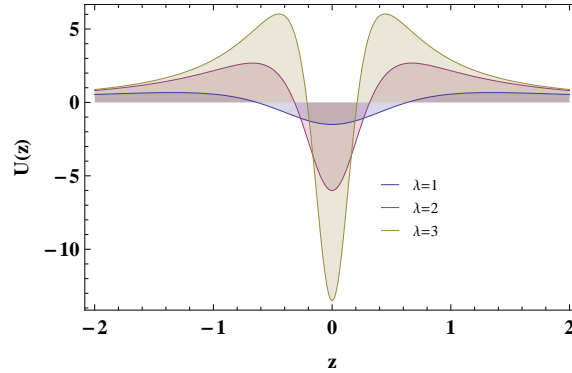


Figura 28: Potencial efetivo com  $n = 1$ ,  $p = 1$  e  $\lambda$  variando.

onde  $b = 1$ . Lembrando que  $f(T) = T + kT^n$  onde nesse caso  $T = -12e^{-2A}(\partial_z A)^2$ . A função  $H$  que nesse caso é conhecido como superpotencial, devido a semelhança com a mecânica quântica supersimétrica, assume o valor

$$H = \frac{3}{2} \frac{\xi}{z\lambda^2} + \frac{k(n-1)n(12\xi)^n}{znk(12\xi)^n + z^3[kn\lambda^2(12\xi)^n - 12\lambda^4]}, \quad (7.58)$$

onde

$$\xi = -\frac{z^2\lambda^4}{1+(z\lambda)^2}. \quad (7.59)$$

Substituindo a Eq.(7.58) na Eq.(7.53), podemos obter o potencial efetivo  $U(z)$ . O comportamento do potencial efetivo é demonstrado em alguns casos. A figura 28 demonstra o comportamento do potencial efetivo para  $n = 1$ , nesse caso em especial, a torção não influencia no valor. A figura 29 demonstra o comportamento do potencial efetivo para  $n = 2$  e a figura 30 demonstra o potencial efetivo para  $n = 3$ , que tem um comportamento interessante, onde aparece dois picos no potencial tanto quando aumentamos o valor de  $\lambda$  e diminuimos o valor para  $k$ , demonstrando uma quebra de uma brana em duas. A figura 31 demonstra o potencial efetivo para  $n = 4$ , que tem um comportamento interessante, onde aparece dois picos no potencial, demonstrando uma quebra de uma brana em duas.

### 7.5.1 Modo Zero

Fazemos uma análise do modo zero representada na Eq.(7.56) com  $p = 1$  por simplicidade. O modo zero para  $n = 1$  é

$$\Psi_{01} = N_{01} (1 + z^2\lambda^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad (7.60)$$

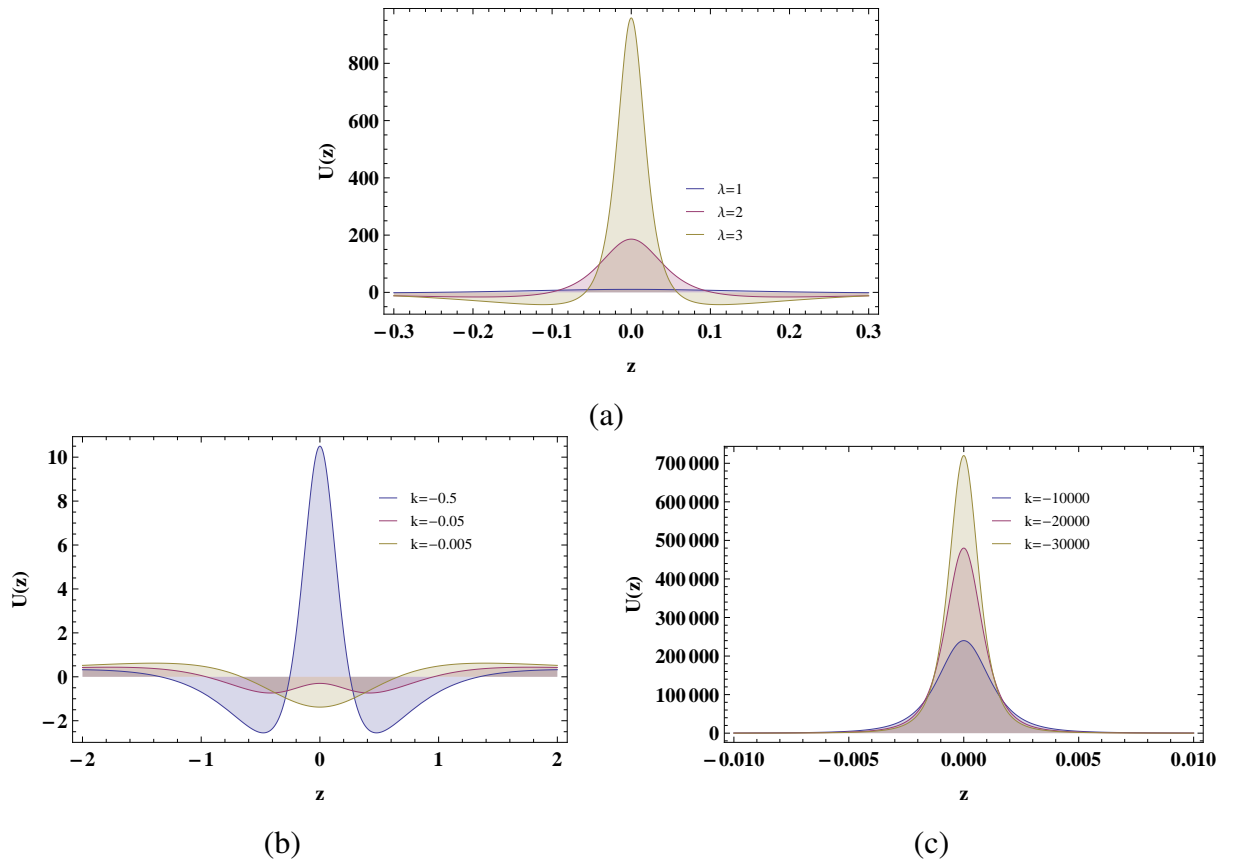


Figura 29: Potencial efetivo. (a)  $n = 2$ ,  $p = 1$  e  $k = -0.5$ . (b)  $n = 2$ ,  $p = 1$ ,  $\lambda = 1$ , com  $k$  pequeno. (c)  $n = 2$ ,  $p = 1$ ,  $\lambda$ , com  $k$  muito pequeno.

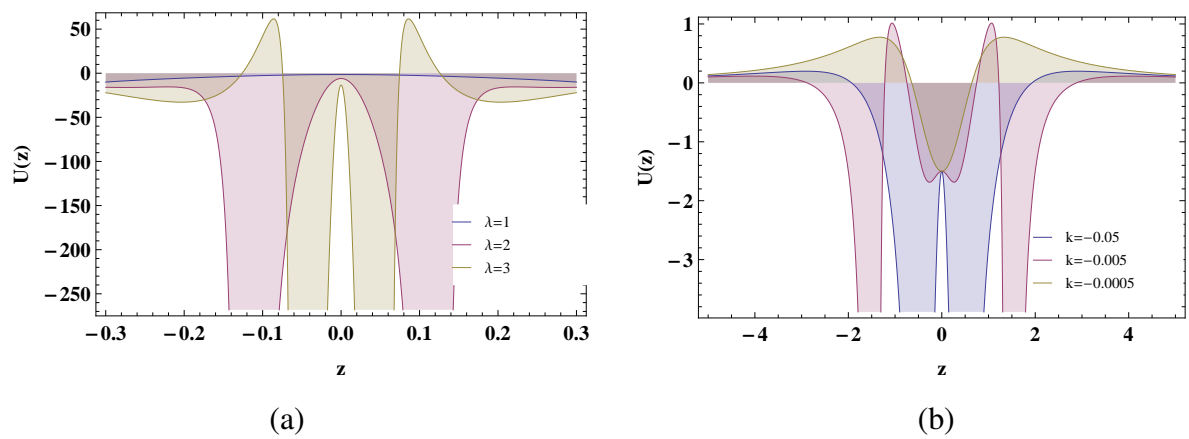


Figura 30: Potencial efetivo. (a)  $n = 3$ ,  $p = 1$  e  $k = -0.5$ . (b)  $n = 3$ ,  $p = 1$ ,  $\lambda = 1$ , com  $k$  pequeno.

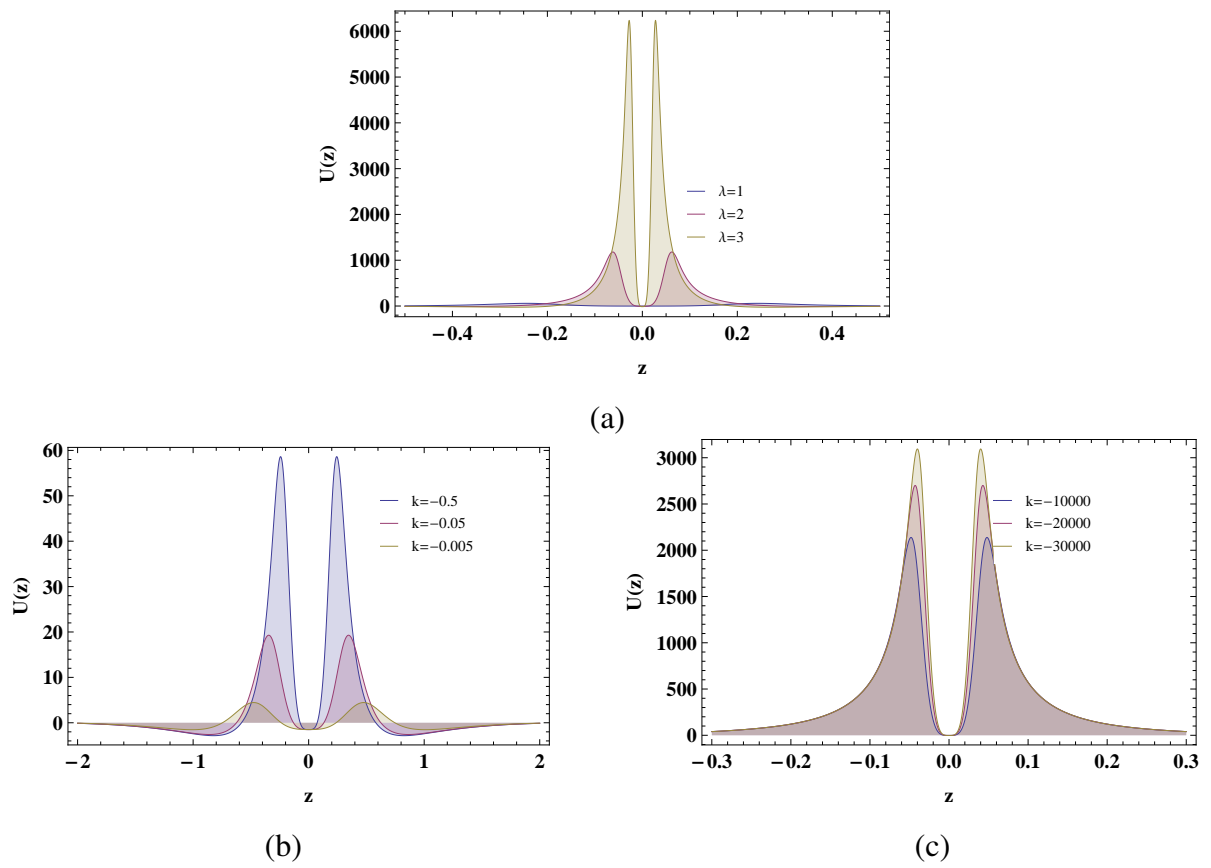


Figura 31: Potencial efetivo. (a)  $n = 4$ ,  $p = 1$ , e  $k = -0.5$ . (b)  $n = 4$ ,  $p = 1$ ,  $\lambda = 1$ , com  $k$  pequeno. (c)  $n = 4$ ,  $p = 1$ ,  $\lambda$ , com  $k$  muito pequeno.

onde

$$N_{01} = \sqrt{\frac{8\lambda}{3\pi}}, \quad (7.61)$$

é a constante de normalização. O comportamento de  $\Psi_{01}$  é analisado na figura 32. O modo zero para  $n = 2$  é

$$\Psi_{02} = N_{02} \frac{\sqrt{1+z^2(\lambda^2-24\lambda^4k)}}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{-1-z^2\lambda^2}}, \quad (7.62)$$

onde

$$N_{02} = \sqrt{\frac{8(1+\lambda)^3}{3\pi(-1+\lambda(-3+\lambda(-3+\lambda(-1+8k\lambda(1+3\lambda))))))}}, \quad (7.63)$$

é a constante de normalização. O comportamento de  $\Psi_{02}$  é analisado na figura 33, assim como esperado com os valores do potencial efetivo demonstrado na Fig.29, observamos uma quebra na brana quando aumentamos o valor de  $\lambda$  e com a diminuição do valor de  $k$ . Na Fig.33 (c), analisamos o comportamento de  $\Psi_{02}$  para  $k > 0$  e para esses valores a solução é fisicamente indesejada. Para  $n = 3$  o modo zero é

$$\Psi_{03} = N_{03} \frac{\sqrt{1+2z^2\lambda^2+z^4(\lambda^4+432\lambda^8k)}}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}(1+z^2\lambda^2)}, \quad (7.64)$$

onde

$$N_{03} = \sqrt{\frac{8(1+\lambda)^4}{3\pi(1+\lambda(4+\lambda(4+\lambda(6+\lambda+432k\lambda^5))))))}}, \quad (7.65)$$

é a constante de normalização. Para  $n = 4$  o modo zero é

$$\Psi_{04} = N_{04} \frac{\sqrt{1+3z^2\lambda^2+3z^4\lambda^4+z^6(\lambda^6-6912\lambda^{12}k)}}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}(1+z^2\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (7.66)$$

onde

$$N_{04} = \sqrt{\frac{8(1+\lambda)^5}{3\pi(1+\lambda(5+\lambda(10+\lambda(10+\lambda(5+\lambda-6912k\lambda^7))))))}}, \quad (7.67)$$

é a constante de normalização. O comportamento de  $\Psi_{04}$  é analisado na figura 34, assim como esperado com os valores do potencial efetivo demonstrado na Fig.31, observamos uma quebra na brana quando aumentamos o valor de  $\lambda$  e com a diminuição do valor de  $k$ . Na Fig.34 (c), analisamos o comportamento de  $\Psi_{04}$  para  $k > 0$  e para esses valores a solução é fisicamente indesejada.

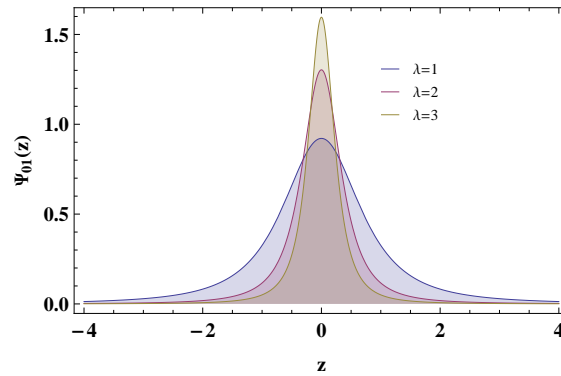
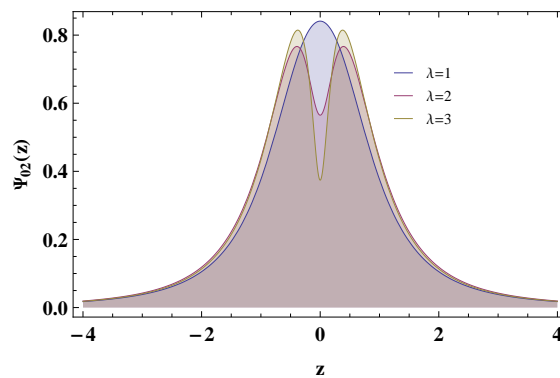
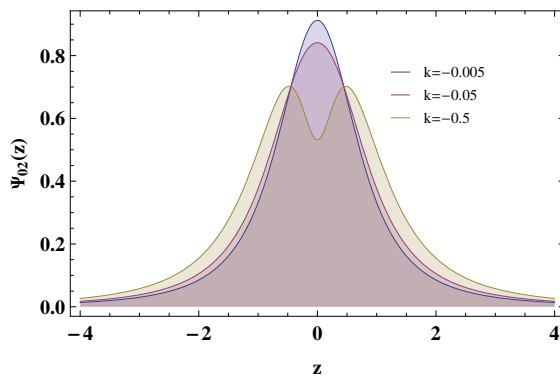


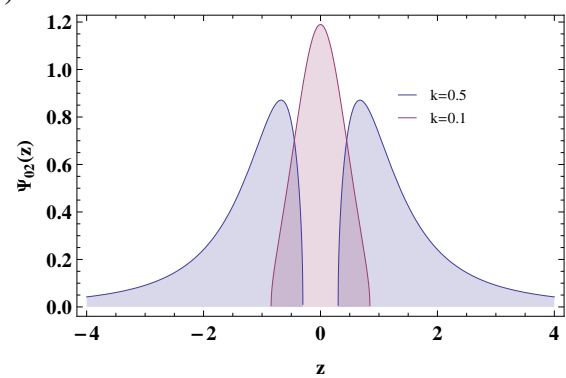
Figura 32: Modo zero com  $n = 1$  e  $p = 1$ .



(a)



(b)



(c)

Figura 33: Modo zero. (a)  $n = 2$ ,  $p = 1$ , e  $k = -0.05$ . (b)  $n = 2$ ,  $p = 1$ ,  $\lambda = 1$ , com  $k < 0$ . (c)  $n = 2$ ,  $p = 1$ ,  $\lambda = 1$ , com  $k > 0$ .

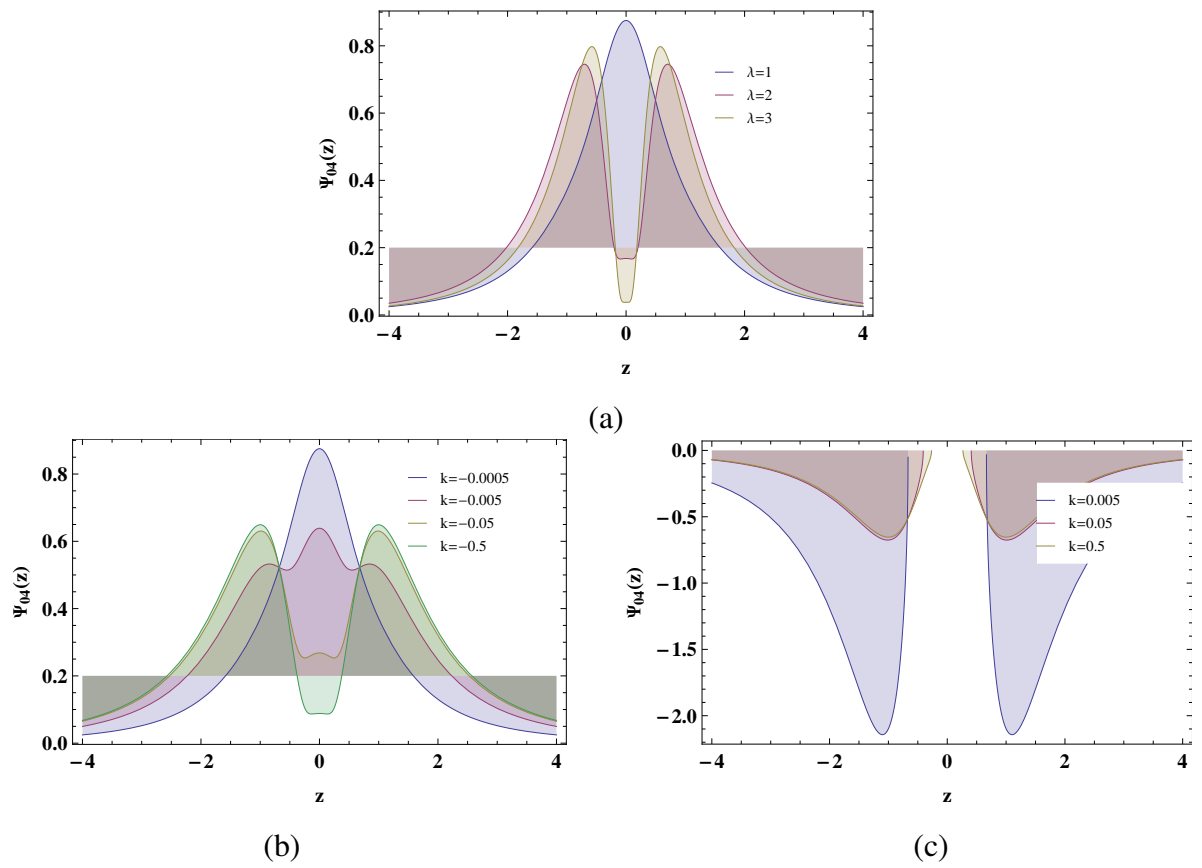


Figura 34: Modo zero. (a)  $n = 4, p = 1$ , e  $k = -0.0005$ . (b)  $n = 4, p = 1, \lambda = 1$ , com  $k < 0$ . (c)  $n = 4, p = 1, \lambda = 1$ , com  $k > 0$ .

## 7.6 Soluções para um Campo Escalar

Com a ação gravitacional já definida na Eq.(7.10), onde  $\mathcal{L}_m$  é a lagrangiana de matéria para a fonte da geometria, que nesse caso

$$\mathcal{L}_M = -h \left[ \frac{1}{2} \partial^M \Phi \partial_M \Phi + V(\Phi) \right], \quad (7.68)$$

onde  $\Phi \equiv \Phi(y)$ . O tensor de energia-momentum do campo escalar é

$$\mathcal{T}_{MN} = -\partial_M \Phi \partial_N \Phi + \frac{1}{2} g_{MN} g^{PQ} \partial_P \Phi \partial_Q \Phi + g_{MN} V, \quad (7.69)$$

e assim para a nossa métrica definida na Eq.(7.1) obtemos

$$\begin{aligned} t_0(y) &= \frac{1}{2} \Phi'^2 + V, \\ t_y(y) &= -\frac{1}{2} \Phi'^2 + V. \end{aligned} \quad (7.70)$$

Substituindo (7.70) nas equações (7.16) e (7.17), temos

$$\Phi'' + 4A' \Phi' = \frac{\partial V}{\partial \Phi} \quad (7.71)$$

$$(-1)^{n-1} k A'^{2n-2} 3^n 2^{2n-3} (2n-1) (2A'^2 + nA'') + 3A'^2 + \frac{3}{2} A'' = -\frac{1}{2} \Phi'^2 - V - \Lambda, \quad (7.72)$$

e

$$\frac{1}{4} [12A'^2 + (-1)^{n-1} (2n-1) 12^n k A'^{2n}] = \frac{1}{2} \Phi'^2 - V - \Lambda. \quad (7.73)$$

onde  $\Phi' = \partial_y \Phi$ . Observe que existem apenas duas equações independentes nas equações acima. Subtraindo a equação (7.73) com a equação (7.72), fazemos essa manipulação para eliminar o termo do potencial e da constante cosmológica, assim temos:

$$\Phi'^2 = -\frac{[12A'^2 + (-1)^{n-1} 12^n k n (2n-1) A'^{2n}] A''}{8A'^2}. \quad (7.74)$$

Com o *ansatz* proposto na Eq.(7.23), podemos reescrever a Eq.(7.74)

$$\Phi'^2 = -\frac{1}{8} p \lambda^2 \operatorname{sech}^2(\lambda y) \left\{ -12 + k n (-12)^n (2n-1) [-p \lambda \tanh(\lambda y)]^{2n-2} \right\}. \quad (7.75)$$



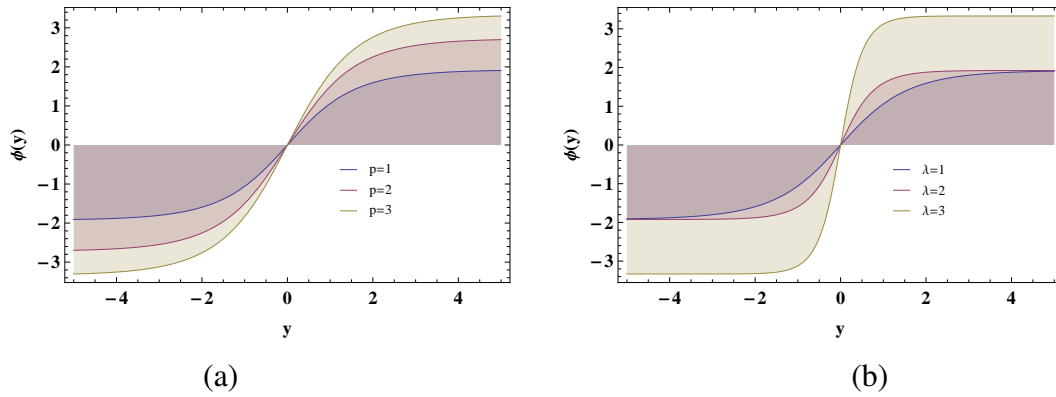


Figura 35: Campo escalar  $\Phi(y)$ . (a)  $n = 1/2$  e  $\lambda = 1$ . (b)  $n = 1/2$  e  $p = 1$ .

### 7.6.1 Solução para $n = 1/2$

Para  $n = 1/2$  a Eq.(7.75) fica

$$\Phi'^2 - \frac{3}{2}p\lambda^2 \operatorname{sech}^2(\lambda y) = 0, \quad (7.76)$$

que é de fácil solução

$$\Phi(y) = \sqrt{6p} \arctan\left(\tanh\left(\frac{\lambda y}{2}\right)\right), \quad (7.77)$$

que é uma solução tipo *kink*, podemos observar o seu comportamento na figura (35), note que a solução não depende de  $k$  e é a mesma solução encontrada no modelo RS [56].

### 7.6.2 Solução para $n = 1$

Para  $n = 1$  a Eq.(7.75) fica

$$\Phi'^2 - \frac{3}{2}(k+1)p\lambda^2 \operatorname{sech}^2(\lambda y) = 0, \quad (7.78)$$

que é de fácil solução

$$\Phi(y) = \sqrt{6(k+1)p} \arctan\left(\tanh\left(\frac{\lambda y}{2}\right)\right), \quad (7.79)$$

que é uma solução tipo *kink*, podemos observar o seu comportamento na figura (36)(a), note que a solução sofre poucas variações quando diminuimos  $k$ .

### 7.6.3 Solução para $n = 2$

Para  $n = 2$  a Eq.(7.75) fica

$$\Phi'^2 - \frac{3}{2}p\lambda^2 \operatorname{sech}^2(\lambda y) [1 - 72kp^2\lambda^2 \tanh^2(\lambda y)] = 0, \quad (7.80)$$

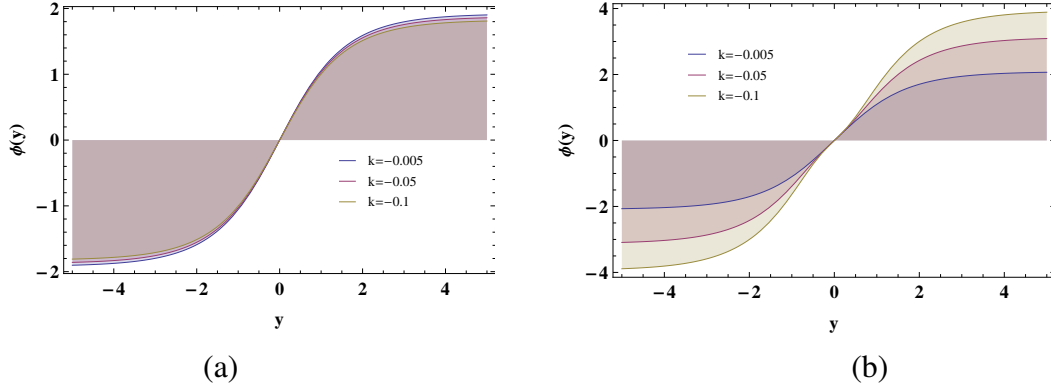


Figura 36: Campo escalar  $\Phi(y)$ . (a)  $n = 1$ ,  $p = 1$  e  $\lambda = 1$ . (b)  $n = 2$ ,  $\lambda = 1$  e  $p = 1$ .

que a solução é

$$\begin{aligned} \Phi(y) = & \sqrt{\frac{3p}{4}} \left\{ i\sqrt{2} [E(i\lambda y; 1 - 72kp^2\lambda^2) - F(i\lambda y; 1 - 72kp^2\lambda^2)] \right\} \\ & + [3p + 216kp^3\lambda^2 + 3p(1 - 72kp^2\lambda^2) \cosh(2\lambda y)]^{\frac{1}{2}} \frac{\tanh(\lambda y)}{2}, \end{aligned} \quad (7.81)$$

que é uma solução tipo *ant-kink*, onde  $E(i\lambda y; 1 - 72kp^2\lambda^2)$  e  $F(i\lambda y; 1 - 72kp^2\lambda^2)$  são as integrais elípticas de primeiro e segundo tipo, respetivamente. Podemos observar o seu comportamento na figura (36)(b), note que com a diminuição de  $k$ , as soluções tipo *kink* são mais notáveis.

#### 7.6.4 Solução para $n = 3$

Para  $n = 3$  a Eq.(7.75) fica

$$\Phi'^2 - \frac{3}{2}p\lambda^2 \operatorname{sech}^2(\lambda y) [1 + 2160kp^4\lambda^4 \tanh^4(\lambda y)] = 0, \quad (7.82)$$

que a solução é

$$\begin{aligned} \Phi(y) = & \sqrt{\frac{3p}{8} \cosh(2\lambda y)} \left\{ 2i \cosh^2\left(\frac{\lambda y}{2}\right) \varpi F(i \operatorname{arcsinh}(\rho); 17 + 12\sqrt{2}) + \operatorname{sech}(\lambda y) \tanh(\lambda y) \right\} \\ & + \sqrt{\frac{3p}{8} \cosh(2\lambda y)} \left\{ 4i \cosh^2\left(\frac{\lambda y}{2}\right) \varpi \Pi(3 + 2\sqrt{2}; i \operatorname{arcsinh}(\rho), 17 + 12\sqrt{2}) \right\}, \end{aligned} \quad (7.83)$$

onde

$$\begin{aligned}\rho &\equiv \frac{\tanh\left(\frac{\lambda y}{2}\right)}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}, \\ \varpi &\equiv \operatorname{sech}(2\lambda y) \sqrt{\left[(3+2\sqrt{2})(1+\rho^2)\right] \left[(3+2\sqrt{2})^2\rho^2+1\right]},\end{aligned}\tag{7.84}$$

e  $\Pi(3+2\sqrt{2}; i \operatorname{arcsinh}(\rho), 17+12\sqrt{2})$  é o terceiro tipo de integral elíptica.

## 8 MUNDO-BRANA-6D EM GRAVIDADE F(T)

### 8.1 Equações de Campo

Usaremos a métrica descrita na Eq.(5.10) para descrever um mundo-brana em seis dimensões, onde a métrica é descrita como

$$ds_6^2 = e^{2A(r)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dr^2 + R_0^2 e^{2B(r)} d\theta^2, \quad (8.1)$$

onde  $0 \leq r \leq r_{max}$ ,  $\theta \in [0; 2\pi)$  e  $e^{A(r)}$  é o fator de *warp*. Para garantir uma geometria suave na origem, nós temos a condição de regularidade [12–14, 85–89]

$$\begin{aligned} e^{A(0)} &= 1 \quad , \quad (e^A)'(0) = 0 \\ e^{B(0)} &= 0 \quad , \quad (e^B)'(0) = 1. \end{aligned} \quad (8.2)$$

De uma maneira mais geral

$$ds_6^2 = g_{MN} dx^M dx^N, \quad (8.3)$$

onde

$$g_{MN} = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} + \delta_M^4 \delta_N^4 + R_0^2 e^{2B(r)} \delta_M^5 \delta_N^5, \quad (8.4)$$

a inversa da métrica é

$$g^{MN} = e^{-2A(y)} \eta^{\mu\nu} + \delta_4^M \delta_4^N + R_0^{-2} e^{-2B(r)} \delta_5^M \delta_5^N, \quad (8.5)$$

onde usaremos as letras latinas maiúsculas ( $M, N, P, Q, \dots = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ) para rotular as coordenadas nas seis dimensões. Podemos obter as tetradas representante dessa métrica através das Eqs.(2.9 e 2.7) já definidas no Cap.2,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a{}_\mu h^b{}_\nu \quad e \quad \eta_{ab} = g_{\mu\nu} h_a{}^\mu h_b{}^\nu. \quad (8.6)$$

Assim, as tetradas da métrica representada pela Eq.(8.1) é

$$h^a{}_\mu = \begin{pmatrix} e^{A(r)} \delta_\mu^a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R_0 e^{B(r)} \end{pmatrix}, \quad (8.7)$$

e a sua inversa é

$$h_a{}^\mu = \begin{pmatrix} e^{-A(r)} \delta_a^\mu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R_0^{-1} e^{-B(r)} \end{pmatrix}, \quad (8.8)$$

O escalar da torção para essa métrica é obtida na Eq.(5.25),

$$\begin{aligned} T &= T^P{}_{MN} S_P{}^{MN} \\ &= -4A'(3A' + B'). \end{aligned} \quad (8.9)$$

onde  $A' \equiv \partial A(r)/\partial r$  e  $B' \equiv \partial B(r)/\partial r$ . A lagrangiana puramente em termos da função que depende da torção foi definida na Eq.(6.2)

$$\mathcal{L} = \frac{h}{4} f(T), \quad (8.10)$$

onde fazemos  $\kappa = 1$ . Podemos escrever a ação gravitacional em seis dimensões, com constante cosmológica  $\Lambda$ , como [12–14, 33, 44, 52, 56, 78, 85–89]

$$\mathfrak{S} = \frac{h}{4} \int f(T) dx^6 + \int (\Lambda + \mathcal{L}_m) d^6x, \quad (8.11)$$

onde  $\mathcal{L}_m$  é a lagrangiana de um campo de matéria qualquer. Tendo como base a equação de campo gravitacional (6.21), a equação de campo correspondentes assume a forma [56]

$$\frac{1}{h} \partial_Q \left( h S_N{}^{MQ} \right) f_T + S_N{}^{MQ} \partial_Q T f_{TT} - t_N{}^M = -\Lambda \delta_N^M - \mathcal{T}_N{}^M, \quad (8.12)$$

que bem similar a teoria da gravidade teleparalela,

$$t_N{}^M = \tilde{\Gamma}^R{}_{SN} S_R{}^{MS} f_T - \frac{1}{4} \delta_N^M f, \quad (8.13)$$

é um pseudotensor, que representa a versão teleparalela do tensor momento-energia canônico do campo gravitacional [79]. Lembrando que  $f \equiv f(T)$ ,  $f_T \equiv \partial f(T)/\partial T$  e  $f_{TT} \equiv \partial^2 f(T)/\partial T^2$ . A correção na constante gravitacional fornecida pelo  $f(T)$  na Eq.(6.23) resulta em uma modificação na relação entre as massas de Planck no volume e na brana como [112]

$$M_4^2 = 2\pi R_0 M_6^4 \int_0^\infty f_T e^{2A+B} dr. \quad (8.14)$$

A dinâmica  $f(T)$  modifica a tensão da brana [12]

$$\mu_i = \int_0^\varepsilon f_T e^{2A+B} t_i(r) dr, \quad (8.15)$$

onde  $\varepsilon$  é a largura da brana.

A partir da lagrangiana de matéria  $\mathcal{L}_m$ , definimos o tensor energia-momentum  $\mathcal{T}_N{}^M$

[13, 14, 82–84, 89, 113]

$$\mathcal{T}_N^M = t_0(r)\delta_\mu^\rho + t_r(r)\delta_r^r + t_\theta(r)\delta_\theta^\theta. \quad (8.16)$$

Em nosso caso, tomamos um  $f(T)$  que represente uma generalização da gravidade teleparalela [56]

$$f(T) = T + kT^n \quad (8.17)$$

onde  $n$  e  $k$  são parâmetros que controlam a influencia da torção. Note que, se fizemos  $k = 0$  temos o caso teleparalelo, já analisado no cap.4. E então as equações de campo são dados como

$$\begin{aligned} & -3A'^2 - 2A'B' + 4^{n-1}k[-A'(3A' + 2B')]^n \\ & + \frac{1}{2} \left\{ 1 + 4^{n-1}nk[-A'(3A' + 2B')]^{n-1} \right\} [(3A' + B')(4A' + B') + 3A'' + B''] \\ & - 4^{n-1}kn(n-1)(3A' + B')[ -A'(3A' + 2B')]^{n-2} [A''B' + A'(3A'' + B'')] = -\Lambda - t_0(r), \end{aligned} \quad (8.18)$$

$$\begin{aligned} & -3A'^2 - 2A'B' + 4^{n-1}k[-A'(3A' + 2B')]^n \\ & + 2 \left\{ 1 + 4^{n-1}nk[-A'(3A' + 2B')]^{n-1} \right\} [A'(3A' + B') + A''] \\ & - 4^{n-1}kn(n-1)A'[-A'(3A' + 2B')]^{n-2} [A''B' + A'(3A'' + B'')] = -\Lambda - t_\theta(r) \end{aligned} \quad (8.19)$$

e

$$\frac{1}{4} \left\{ 4A'(3A' + 2B') + (-1)^{n-1}4^n k(2n-1)[A'(3A' + 2B')]^n \right\} = -\Lambda - t_r(r). \quad (8.20)$$

As equações (8.18), (8.19) e (8.20) formam um sistema complexo de equações acopladas.

## 8.2 Regime de Brana Fina Tipo-Corda

No estado de vácuo, onde  $\mathcal{T}_N^M = 0$  e supondo  $A' = B' = -c$ , onde  $c$  é uma constante, as equações (8.18), (8.19) e (8.20) tomam a forma

$$5c^2 + (-4)^{n-1}k(2n-1)(5c^2)^n = -\Lambda, \quad (8.21)$$

pois as equações (8.18), (8.19) e (8.20) se tornam a mesma. No limite da brana fina, a relação entre as massas de Planck é modificada pela torção, conforme mostrado na Eq.(8.14). Por exemplo, se  $n = 2$  na ausência da constante cosmológica, a relação é

$$M_4^2 = -\frac{20\pi\mu_\theta}{3\Lambda_T} \left( 1 - \frac{20k\Lambda_T}{3} \right) M_6^4, \quad (8.22)$$

onde  $\mu_\theta = 2R_0cM_6^4$  é a tensão angular da brana fina [12]. Para  $M_4 \gg M_6$ , definimos  $\Lambda_T \ll \mu_\theta$ . Vale a pena mencionar que a correção de torção na Eq. (8.22) é maior que a relação GS pelo fator  $k\Lambda_T$ .

Um comentário digno de nota sobre a Eq.(8.21) é o aparecimento de soluções complexas para valores semi-inteiros de  $n$ . Para  $\Lambda = 0$ , a única solução real permitida é a trivial  $c = 0$ . Por outro lado, para  $\Lambda \neq 0$  a solução complexa  $c = c_1 + ic_2$  leva ao fator de dobra real  $Re(e^{2A}) = e^{-c_1r} \cos(c_2r)$  [112]. Um comportamento semelhante foi encontrado em soluções estacionárias chamadas mundo-brana de onda estacionária [114].

### 8.2.1 $n = 1/2$

Para o caso de  $n = 1/2$ , temos

$$c_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{(-\Lambda)}{5}}, \quad (8.23)$$

que se parece muito com uma solução  $AdS_6$  no vácuo, para um mundo-brana tipo corda [12].

### 8.2.2 $n = 1$

Para o caso de  $n = 1$ , temos

$$c_1 = \pm \sqrt{\frac{(-\Lambda)}{5(1+k)}}. \quad (8.24)$$

Se fizemos  $k = 0$ , temos uma solução  $AdS_6$  no vácuo, já descrita em uma gravidade RG para um mundo-brana tipo corda [12]. Para o caso de  $k \neq 0$  temos a influencia da torção.

### 8.2.3 $n = 2$

Para o caso de  $n = 2$ , temos duas soluções possíveis

$$c_{2.1} = \pm \sqrt{\frac{(-\Lambda)}{5}} \quad e \quad c_{2.2} = \pm \sqrt{\frac{(\Lambda+1)}{60k}}. \quad (8.25)$$

Note que, no caso de a  $c_{2.1}$ , a solução métrica é a mesma para  $c_{1/2}$ , mudando apenas as constantes de integração. Para  $c_{2.2}$ , temos uma solução diferente, onde a torção influencia em seu valor. Fica bem evidente que mesmo  $\Lambda$  sendo zero,  $f(T)$  gera uma constante cosmológica, que torna possível a existência de soluções

$$c_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{60k}}, \quad (8.26)$$

que está de acordo com a Eq.(6.25). Na verdade, da Eq.(6.25) e da Eq.(8.26), obtemos uma constante cosmológica efetiva como

$$\Lambda_T = -\frac{1}{3k}. \quad (8.27)$$

Como  $k > 0$  na Eq.(8.26), a torção produz uma constante cosmológica negativa.

#### 8.2.4 $n = 3$

Para o caso de  $n = 3$ , temos duas soluções possíveis

$$c_{3.1} = \pm \sqrt{\frac{(-\Lambda)}{5}} \quad e \quad c_{3.2} = \pm \sqrt[4]{\frac{-(\Lambda + 1)}{2000k}}, \quad (8.28)$$

O caso de a  $c_{3.1}$  é o mesmo de  $c_{2.1}$ , que dar a mesma solução métrica, mudando apenas as constantes de integração. No caso de  $c_{3.2}$ , bem parecido com o caso de  $n = 1$  e 2 a torção influencia em seu valor. De uma maneira mais geral podemos dizer que a constante  $c = c(n.k)$  é determinado por  $n$  e  $k$ .

Assim como em  $n = 2$ , fica bem evidente que mesmo  $\Lambda = 0$ ,  $f(T)$  gera uma constante cosmológica, que torna possível a existência de soluções

$$c_3 = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{200k}}. \quad (8.29)$$

### 8.3 Brana Espessa Tipo-Corda

Embora as equações (8.18), (8.19) e (8.20) forme uma teoria derivada de segunda ordem, é difícil fornecer uma solução analítica para esse caso. Para simplificar, vamos assumir um *ansatz* já conhecido e muito trabalhado nesse cenário de mundo-brana [56, 107–109]

$$e^{2A(r)} = \cosh^{-2p}(\lambda r), \quad (8.30)$$

onde o parâmetro  $p$  modifica a variação de *warp* dentro do núcleo da brana,  $\lambda$  determina a largura da brana. Nesse caso, assumimos

$$B(r) = -\ln[\cosh^{-p}(\lambda r)] + \ln[\tanh(\rho r)], \quad (8.31)$$

. onde o segundo termo tem como objetivo atender a condição (8.2). Podemos observar o comportamento do escalar de torção para esse *ansatz*, através da figura 37. Por sua vez, podemos analisar como a gravidade  $f(T)$  modifica a gravidade teleparalela analisando as figuras (38), (39), (40), (41). Para  $k = 0$  temos o caso convencional teleparalelo analisado na Fig.(37).



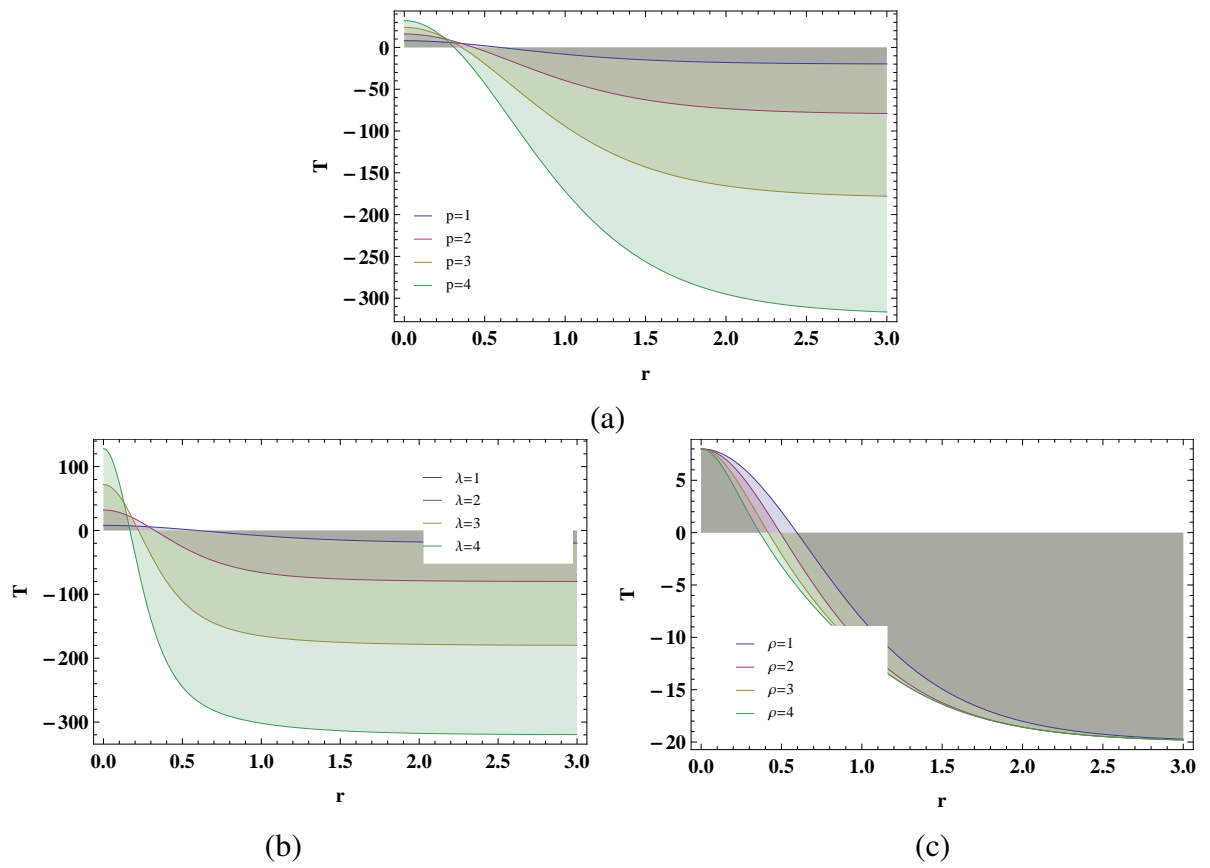


Figura 37: Escalar de torção. (a)  $\rho = \lambda = 1$  e  $p$  variando. (b)  $p = \rho = 1$  e  $\lambda$  variando. (c)  $\lambda = p = 1$  e  $\rho$  variando.

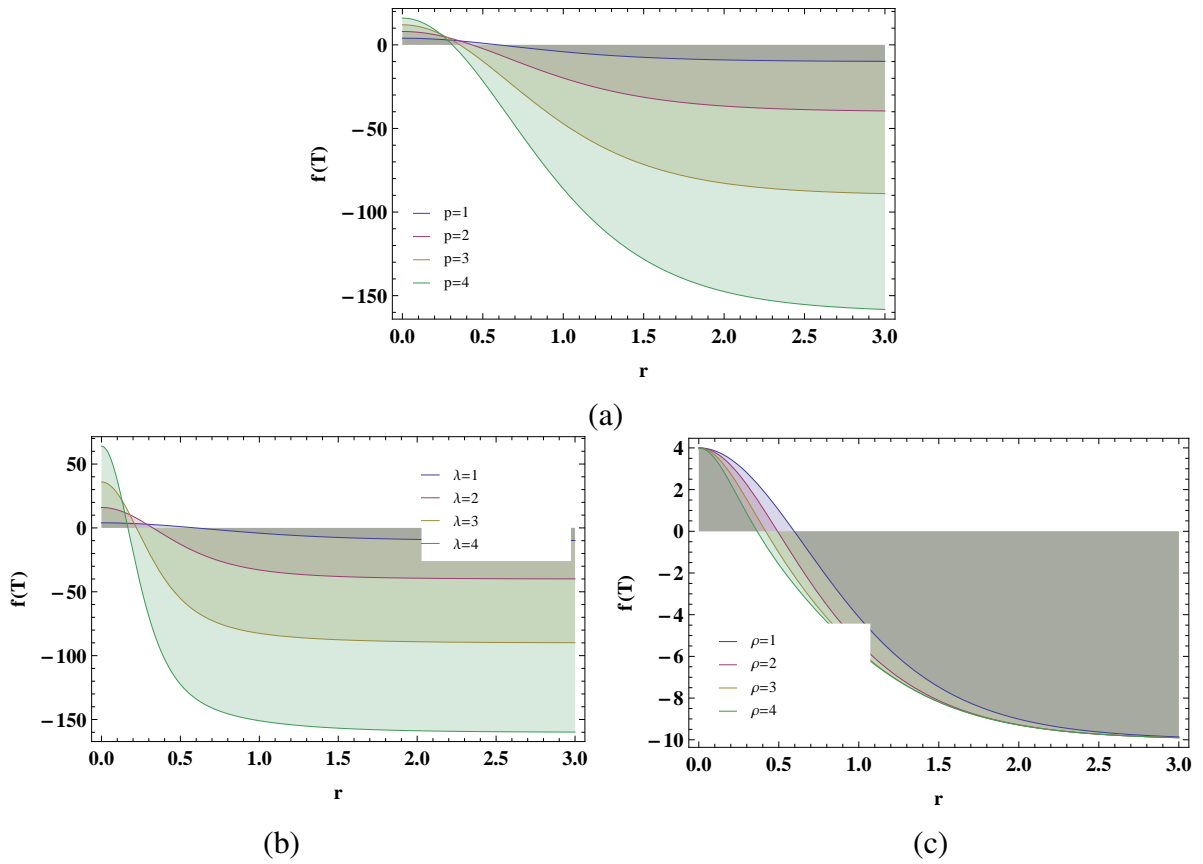


Figura 38:  $f(T)$ . (a)  $n = \rho = \lambda = 1$  e  $p$  variando. (b)  $n = p = \rho = 1$  e  $\lambda$  variando. (c)  $n = \lambda = p = 1$  e  $\rho$  variando.

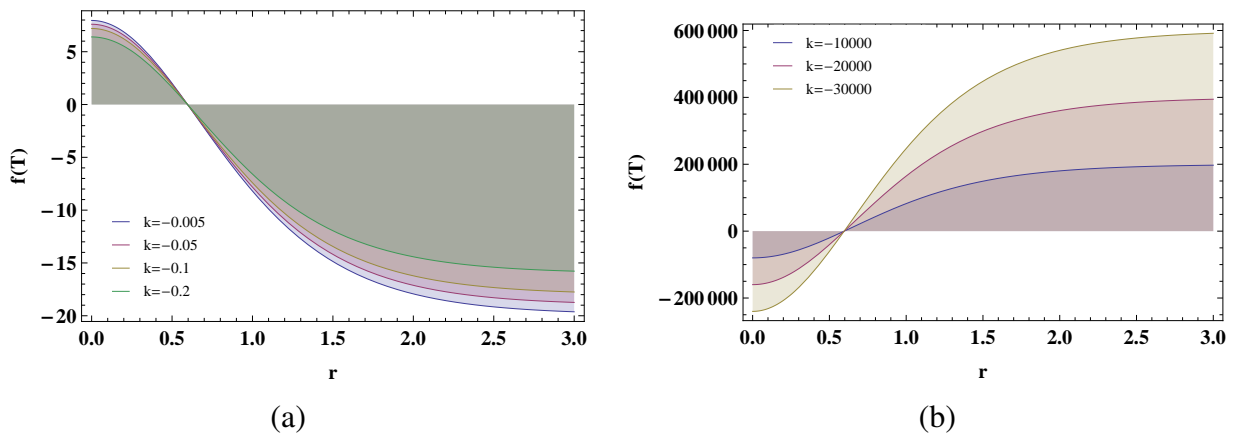


Figura 39:  $f(T)$ . (a)  $n = \rho = \lambda = p = 1$ , para  $k$  pequeno. (b)  $n = p = \rho = \lambda = 1$ , para  $k$  muito pequeno.

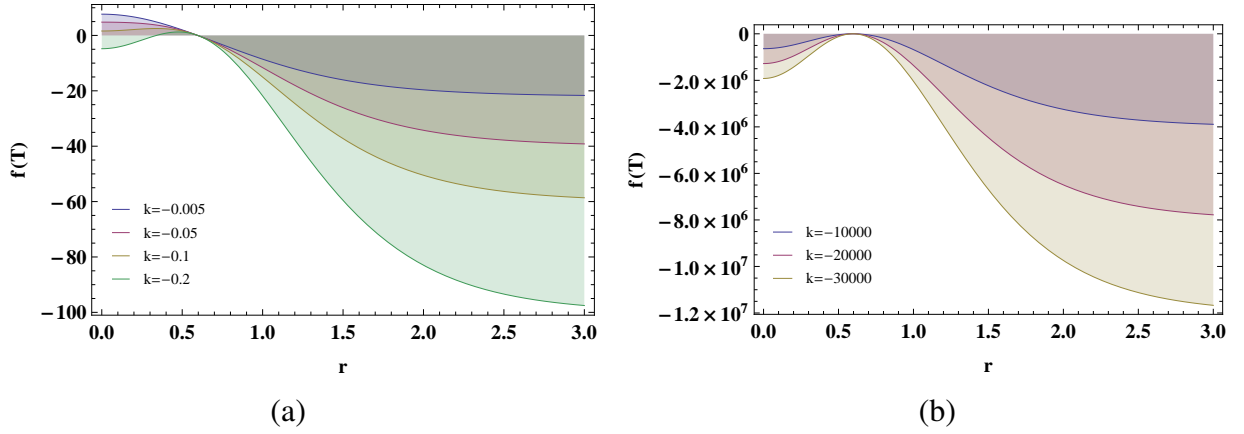


Figura 40:  $f(T)$ . (a)  $n = 2$ ,  $\rho = \lambda = p = 1$ , para  $k$  pequeno. (b)  $n = 2$ ,  $p = \rho = \lambda = 1$ , para  $k$  muito pequeno.

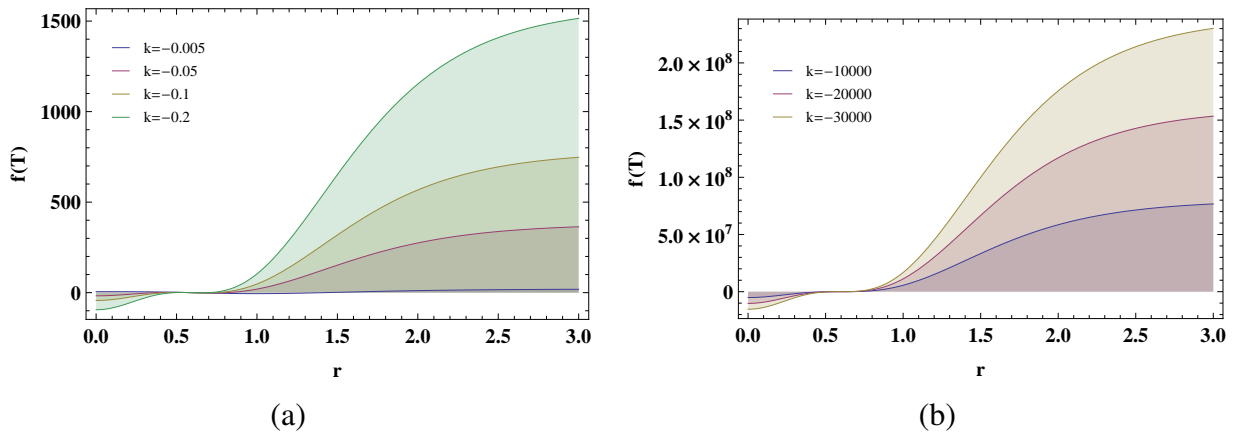


Figura 41:  $f(T)$ . (a)  $n = 3$ ,  $\rho = \lambda = p = 1$ , para  $k$  pequeno. (b)  $n = 3$ ,  $p = \rho = \lambda = 1$ , para  $k$  muito pequeno.

Obtemos a partir da Eq.(8.19)

$$\begin{aligned}
 t_{\theta}(r) = & -\Lambda + 3g^2 - 4^{n-1}k(gl)^n - 2gy \\
 & - \frac{4^n kn(n-1)\rho \coth(\lambda r)(gl)^n}{\lambda p l^2} \{g\rho [csch^2(\rho r) + sech^2(\rho r) + 5w] - w csch(\rho r) sech(\rho r)\} \\
 & - 2 \left[ 1 + 4^{n-1}nk(gl)^{n-1} \right] [g(1-y) - w],
 \end{aligned} \tag{8.32}$$

onde

$$g \equiv g(p, \lambda, r) = p\lambda \tanh(\lambda r), \tag{8.33}$$

$$w \equiv w(p, \lambda, r) = p\lambda^2 sech^2(\lambda r), \tag{8.34}$$

$$l \equiv l(p, g, r) = 4\rho csch(2\rho r) - 5g, \tag{8.35}$$

e

$$y \equiv y(p, g, r) = 2\rho csch(2\rho r) - g, \tag{8.36}$$

Encontramos uma escolha apropriada

$$\Lambda = -5(p\lambda)^2 - (-4)^{n-1}k(2n-1)[5(p\lambda)^2]^n, \tag{8.37}$$

pela condição de que  $t_{\theta}(r \rightarrow \infty) = 0$ . Comparando a Eq.(8.37) com a Eq.(8.21), temos que nesse caso  $c = p\lambda$ . Para  $n = 1$ , a Eq.(8.37) resulta em  $p\lambda = \sqrt{-\Lambda/5(k+1)} = c$ . Resultados semelhantes podem ser encontrados para  $n = 2$  e  $n = 3$ .

Com as equações (8.33, 8.34, 8.35, 8.36 e 8.37), obtemos

$$\begin{aligned}
 t_0(r) = & -\Lambda + 3g^2 - 4^{n-1}k(gl)^n - 2gy \\
 & + \frac{4^{n-1}kn(n-1)\rho \coth^2(\lambda r)(gl)^n}{\lambda^2 p^2 l^2} 2y \{g\rho [csch^2(\rho r) + sech^2(\rho r) + 5w] - w csch(\rho r) sech(\rho r)\} \\
 & + \frac{1}{2} \left[ 1 + 4^{n-1}nk(gl)^{n-1} \right] y \{ \rho^2 [csch^2(\rho r) + sech^2(\rho r)] + 2g - 4y + 4w \},
 \end{aligned} \tag{8.38}$$

e

$$t_r(r) = -\Lambda - 3g^2 + 4^{n-1}(2n-1)k(gl)^n - 2gy. \tag{8.39}$$

Analisaremos melhor os comportamentos de  $t_{\theta}(r)$ ,  $t_0(r)$  e  $t_r(r)$ , para alguns valores de  $n$  nas subsecções seguintes.

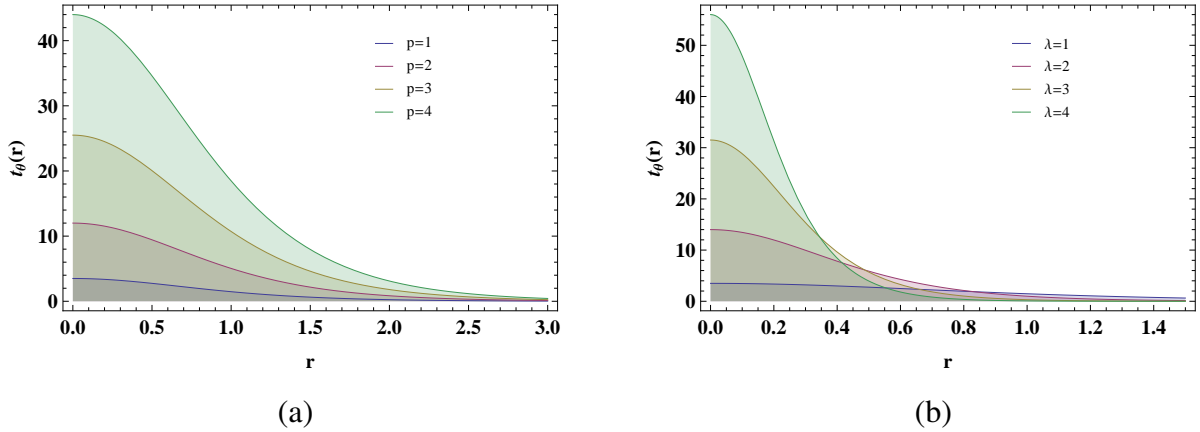


Figura 42:  $t_\theta(r)$ . (a)  $n = \lambda = \rho = 1$  e  $k = -0.5$ . (b)  $n = p = \rho = 1$  e  $k = -0.5$ .

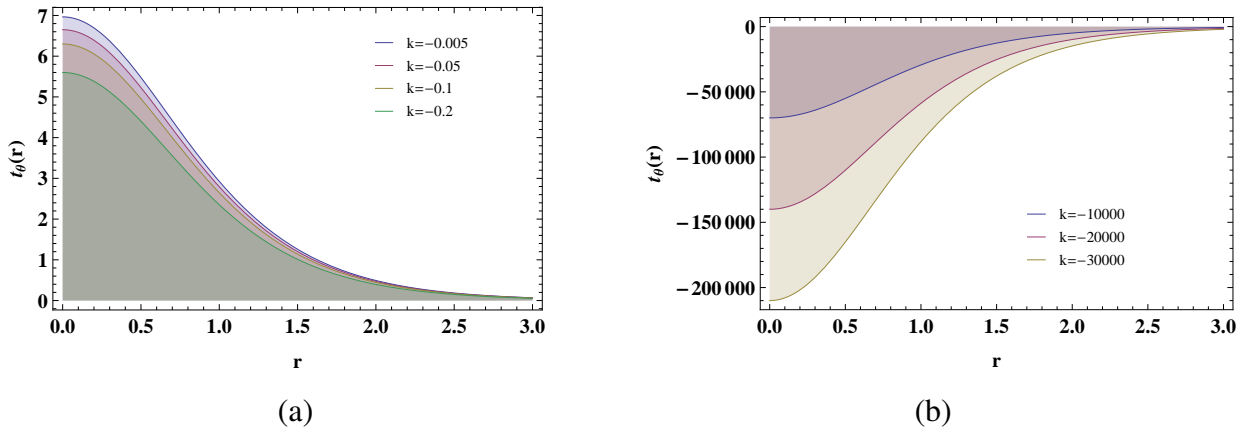


Figura 43:  $t_\theta(r)$ . (a)  $n = \lambda = \rho = p = 1$ , para  $k$  pequeno. (b)  $n = p = \rho = \lambda = 1$ , para  $k$  muito pequeno .

### 8.3.1 $n = 1$

Na figura 42 vemos que a condição de ser localizada ao redor da origem é satisfeita para  $t_\theta(r)$ . Com (a) vemos que a largura se mantém, mesmo aumentando  $p$ . Com (b) vemos que a largura a meia altura diminui com o aumento de  $\lambda$ . A figura 43 mostra que a condição de ser localizada ao redor da origem é satisfeita. Com (a) vemos que a largura se mantém, aumentando a amplitude de  $t_\theta(r)$  quanto maior for  $k$ . Com (b) vemos que é gerado uma pressão angular negativa, a largura se mantém, diminuindo apenas  $t_\theta(r)$  quanto menor for  $k$ .

A figura 44 mostra que a condição de ser localizada ao redor da origem é satisfeita para  $t_0(r)$ . Com (a) vemos que a largura se mantém, mesmo aumentando  $p$ . Com (b) vemos que a largura a meia altura diminui com o aumento de  $\lambda$ . Na figura 45 vemos que a condição de ser localizada ao redor da origem é satisfeita. Com (a) vemos que a largura se mantém, aumentando apenas  $t_0(r)$  quanto maior for  $k$ . Com (b) vemos que é gerado uma pressão angular negativa, a largura se mantém, diminuindo apenas  $t_0(r)$  quanto menor for  $k$ .

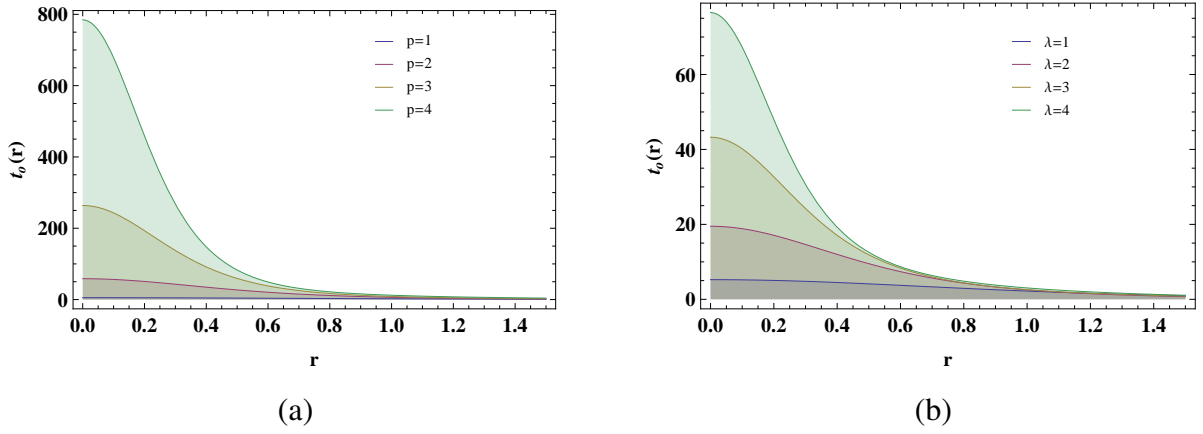


Figura 44:  $t_0(r)$ . (a)  $n = \lambda = \rho = 1$  e  $k = -0.5$ . (b)  $n = p = \rho = 1$  e  $k = -0.5$ .

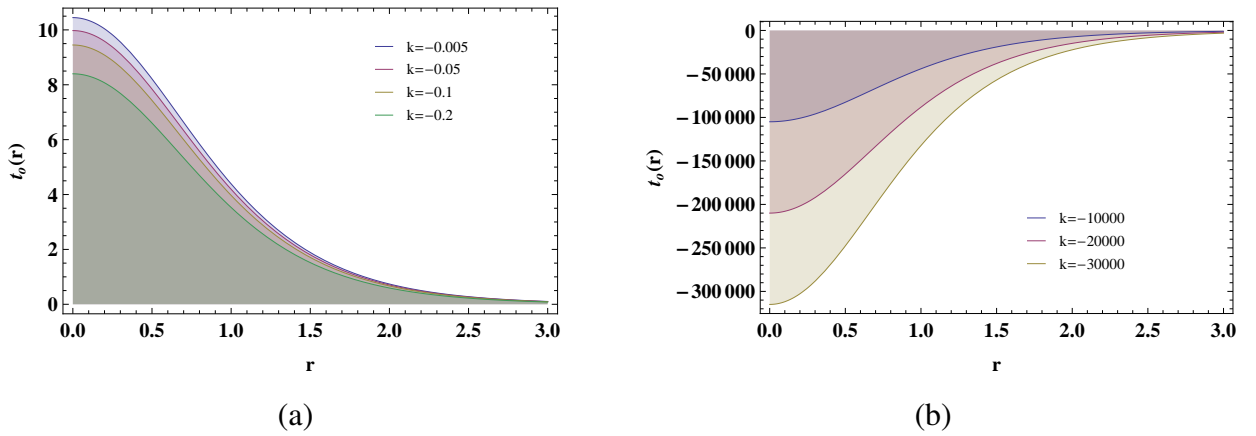


Figura 45:  $t_0(r)$ . (a)  $n = \lambda = \rho = p = 1$ , para  $k$  pequeno. (b)  $n = p = \rho = \lambda = 1$ , para  $k$  muito pequeno .

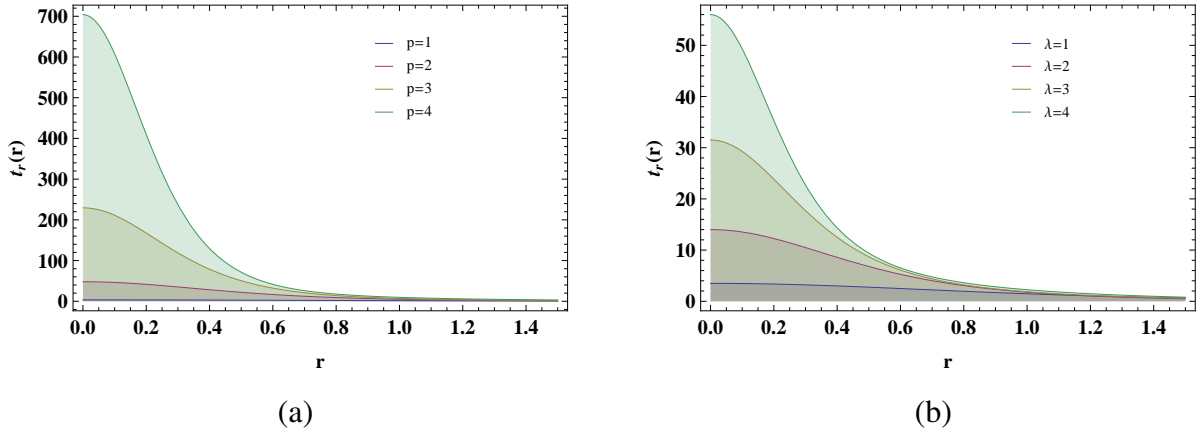


Figura 46:  $t_r(r)$ . (a)  $n = \lambda = \rho = 1$  e  $k = -0.5$ . (b)  $n = p = \rho = 1$  e  $k = -0.5$ .

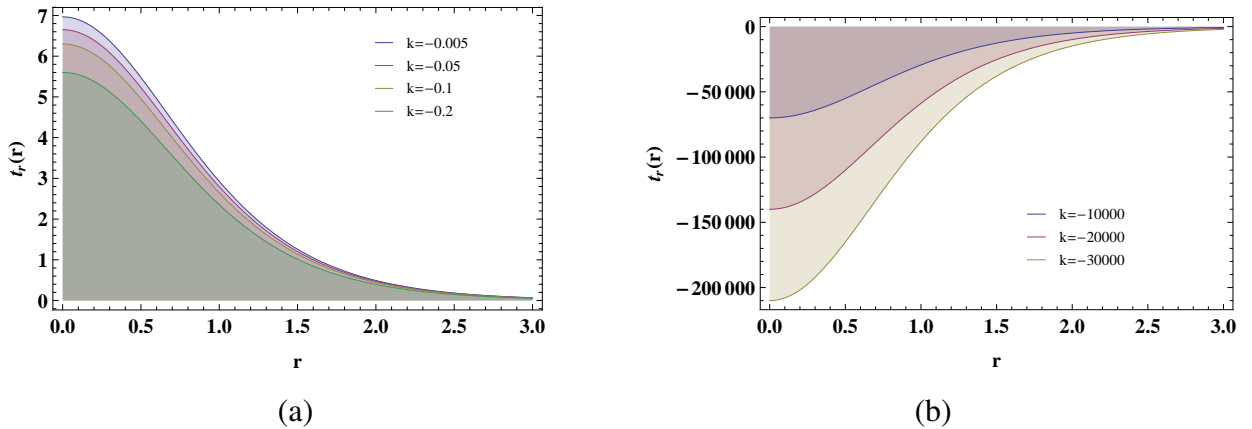


Figura 47:  $t_r(r)$ . (a)  $n = \lambda = \rho = p = 1$ , para  $k$  pequeno. (b)  $n = p = \rho = \lambda = 1$ , para  $k$  muito pequeno.

A figura 46 mostra que a condição de ser localizada ao redor da origem é satisfeita para  $t_r(r)$ . Com (a) vemos que a largura se mantém, mesmo aumentando  $p$ . Com (b) vemos que a largura a meia altura diminui com o aumento de  $\lambda$ . A figura 47 mostra que a condição de ser localizada ao redor da origem é satisfeita. Com (a) vemos que a largura se mantém, aumentando apenas  $t_r(r)$  quanto maior for  $k$ . Com (b) vemos que é gerado uma pressão angular negativa, a largura se mantém, diminuindo apenas  $t_r(r)$  quanto menor for  $k$ .

### 8.3.2 $n = 2$

A figura 48 mostra que  $t_\theta(r)$  se localiza nas proximidades da origem. Tanto em (a) como em (b) vemos que a largura a meia altura diminui com o aumento de  $\lambda$ . Vemos também o surgimento de dois máximos, quanto maior  $\lambda$ , mais evidente isso fica. A figura 49 vemos que quando menor for  $k$  existe apenas um máximo, quando diminuirmos  $k$  aparece dois máximos, isso estar relacionado à transição de fase entre uma única brana tipo-corda para uma cadeia com um anel ao seu redor.

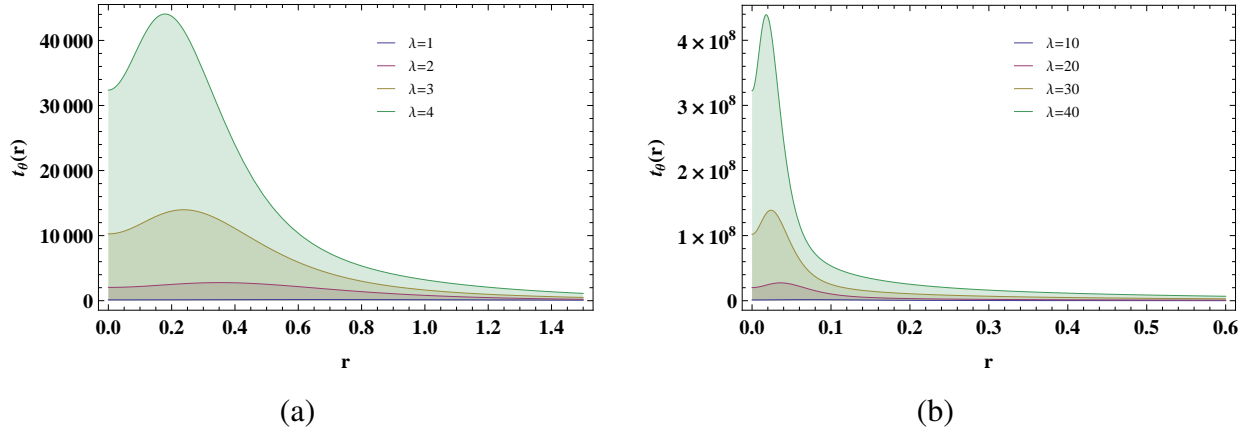


Figura 48:  $t_\theta(r)$ . (a)  $n = 2$ ,  $p = \rho = 1$  e  $k = -0.5$ , com  $\lambda$  pequeno. (b)  $n = 2$ ,  $p = \rho = 1$  e  $k = -0.5$ , com  $\lambda$  grande.

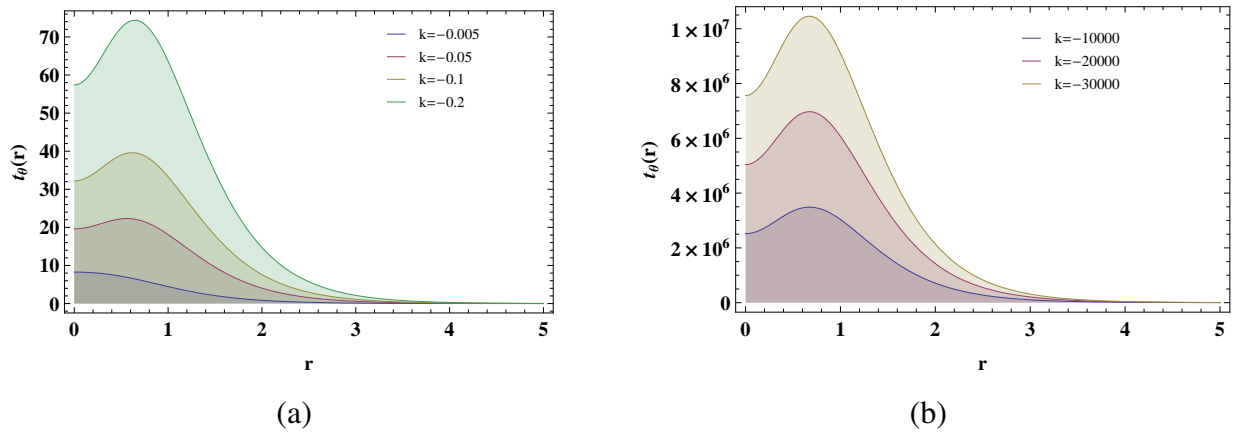


Figura 49:  $t_\theta(r)$ . (a)  $n = 2$ ,  $p = \rho = \lambda = 1$ , para  $k$  pequeno. (b)  $n = 2$ ,  $p = \rho = \lambda = 1$ , para  $k$  muito pequeno .



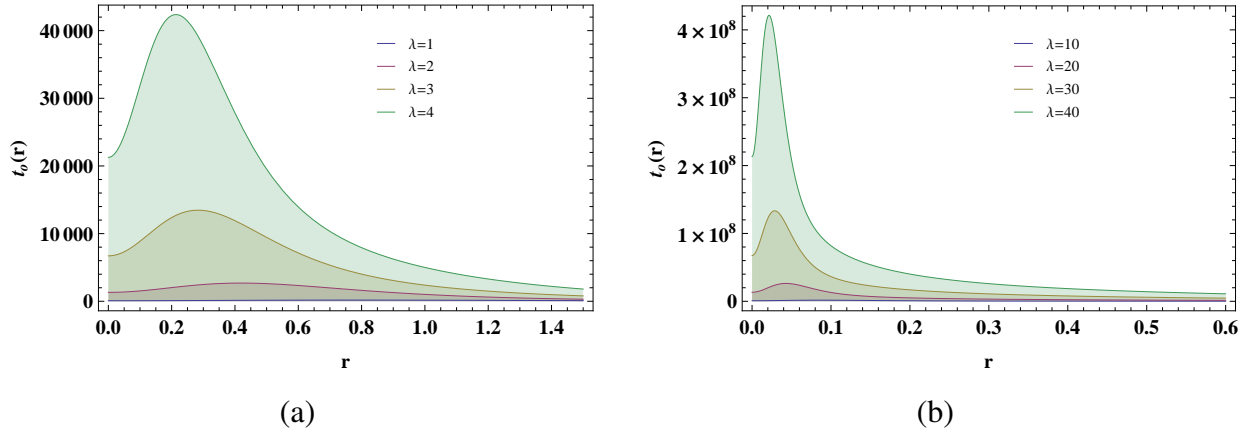


Figura 50:  $t_0(r)$ . (a)  $n = 2$ ,  $p = \rho = 1$  e  $k = -0.5$ , com  $\lambda$  pequeno. (b)  $n = 2$ ,  $p = \rho = 1$  e  $k = -0.5$ , com  $\lambda$  grande.

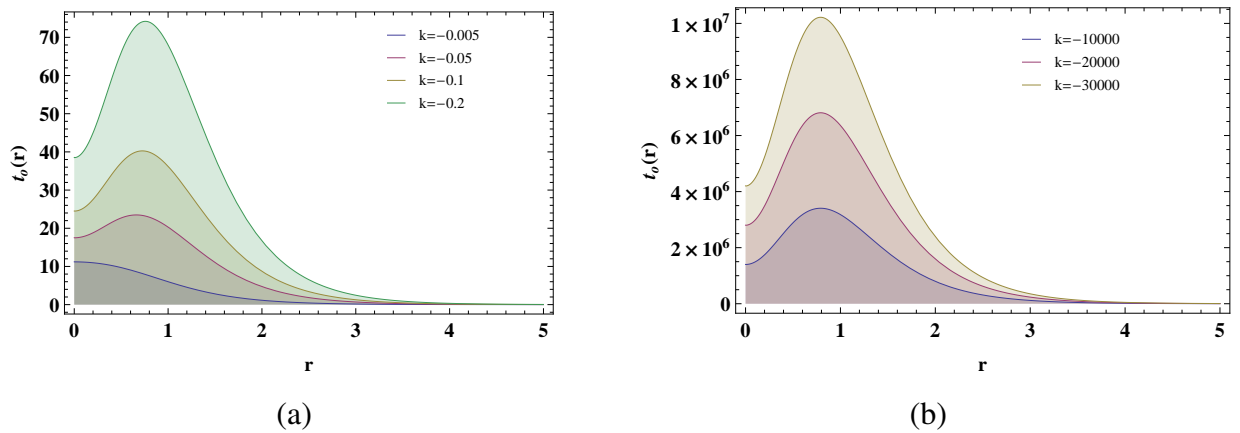


Figura 51:  $t_0(r)$ . (a)  $n = 2$ ,  $p = \rho = \lambda = 1$ , para  $k$  pequeno. (b)  $n = 2$ ,  $p = \rho = \lambda = 1$ , para  $k$  muito pequeno .

Na figura 50 vemos que  $t_0(r)$  se localizada nas proximidades da origem. Tanto em (a) como em (b) vemos que a largura a meia altura diminui com o aumento de  $\lambda$ . Vemos também o surgimento de dois máximos, quanto maior  $\lambda$ , mais evidente isso fica. Na figura 51 vemos que quando menor for  $k$  existe apenas um máximo, quando diminuimos  $k$  aparece dois máximos, isso estar relacionado à transição de fase entre uma única brana tipo-corda para uma cadeia com um anel ao seu redor.

Na figura 52 vemos que  $t_r(r)$  se localizada nas proximidades da origem. Vemos que a largura a meia altura diminui com o aumento de  $\lambda$ . Vemos também o surgimento de dois máximos, quanto maior  $\lambda$ , mais evidente isso fica. Na figura 53 vemos que quando menor for  $k$  existe apenas um máximo, quando diminuimos  $k$  aparece dois máximos, isso estar relacionado à transição de fase entre uma única brana tipo-corda para uma cadeia com um anel ao seu redor.

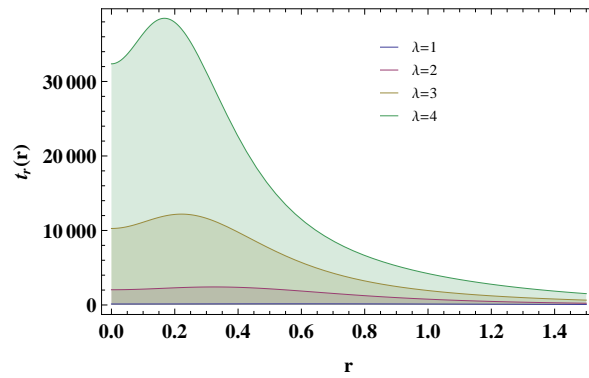
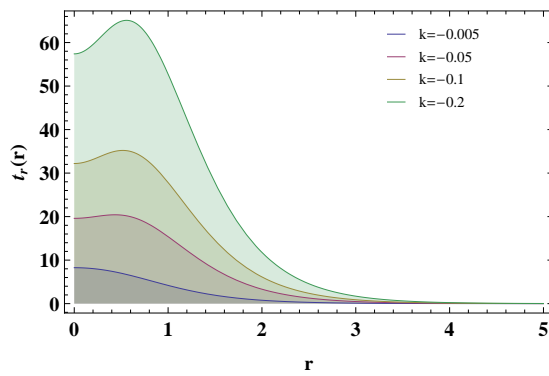
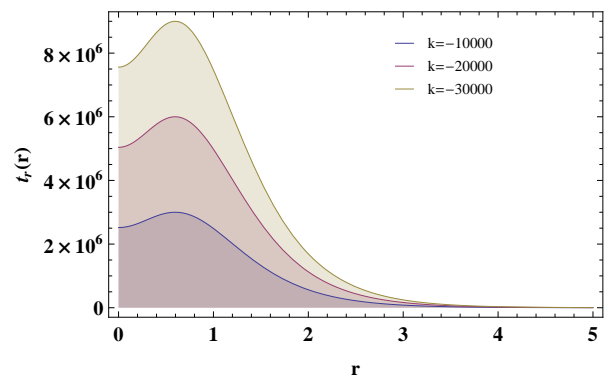


Figura 52:  $t_r(r)$  para  $n = 2$ ,  $p = \rho = 1$  e  $k = -0.5$ , com  $\lambda$  variando.



(a)



(b)

Figura 53:  $t_r(r)$ . (a)  $n = 2$ ,  $p = \rho = \lambda = 1$ , para  $k$  pequeno. (b)  $n = 2$ ,  $p = \rho = \lambda = 1$ , para  $k$  muito pequeno .

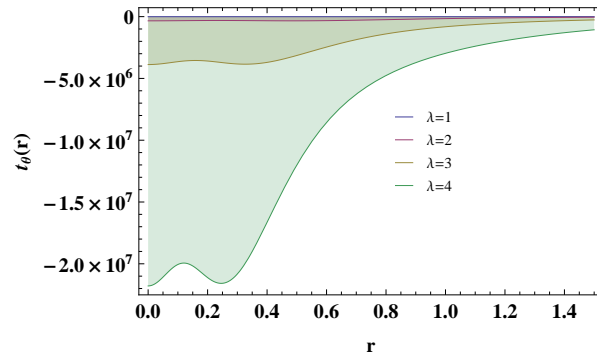


Figura 54:  $t_\theta(r)$  para  $n = 3$ ,  $p = \rho = 1$  e  $k = -0.5$ , com  $\lambda$  pequeno.

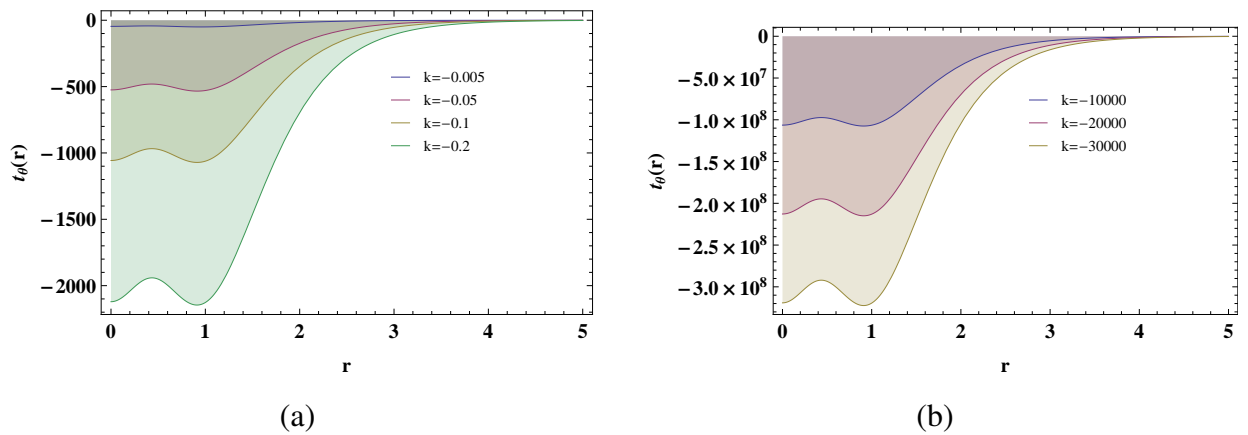


Figura 55:  $t_\theta(r)$ . (a)  $n = 3$ ,  $p = \rho = \lambda = 1$ , para  $k$  pequeno. (b)  $n = 3$ ,  $p = \rho = \lambda = 1$ , para  $k$  muito pequeno .

### 8.3.3 $n = 3$

Na figura 54 vemos que  $t_\theta(r)$  se localizada nas proximidades da origem. Vemos também o surgimento de três máximos, quanto maior  $\lambda$  mais evidente isso fica. Na figura 55 vemos que quando diminuimos  $k$  aparece três máximos, isso estar relacionado à transição de fase entre uma única brana tipo-corda para uma brana com um anel ao seu redor.

A figura 56 mostra que  $t_0(r)$  se localizada nas proximidades da origem. Vemos também o surgimento de três máximos, quanto maior  $\lambda$  mais evidente isso fica. Na figura 57 vemos quando diminuimos  $k$  aparece três máximos, isso estar relacionado à transição de fase entre uma única brana tipo-corda para uma brana com um anel ao seu redor.

A figura 58 mostra que  $t_r(r)$  se localizada nas proximidades da origem. Vemos também o surgimento de três máximos, quanto maior  $\lambda$  mais evidente isso fica. Na figura 59 vemos quando diminuimos  $k$  aparece três máximos, isso estar relacionado à transição de fase entre uma única brana tipo-corda para uma brana com um anel ao seu redor.

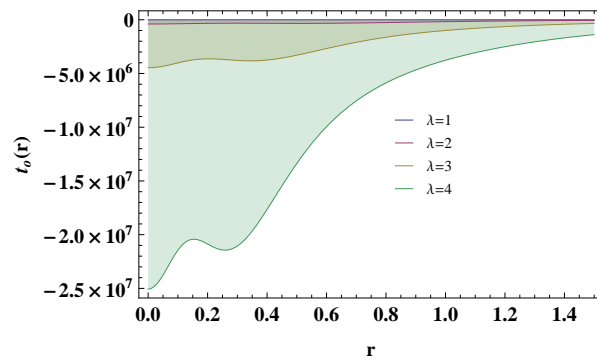


Figura 56:  $t_0(r)$  para  $n = 3$ ,  $p = \rho = 1$  e  $k = -0.5$ , com  $\lambda$  pequeno.

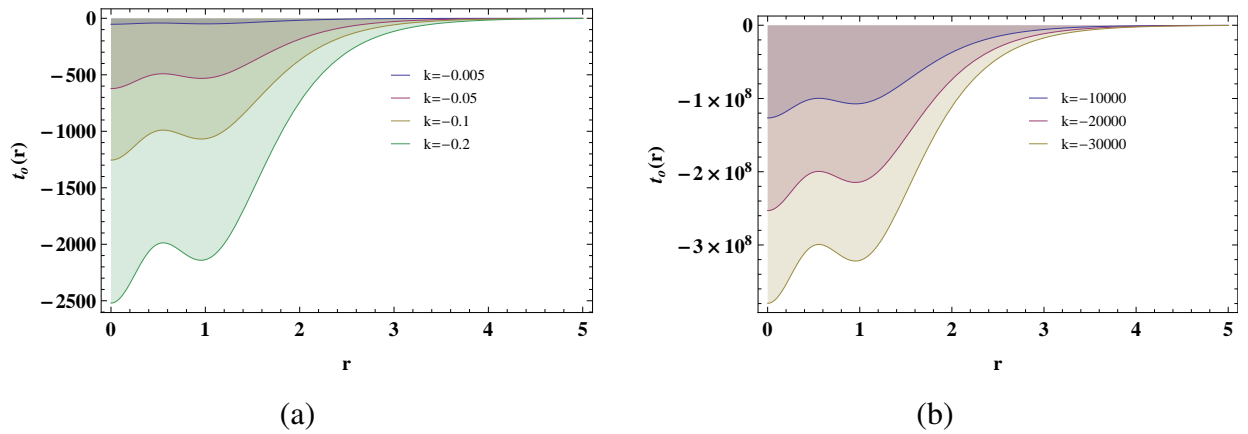


Figura 57:  $t_0(r)$ . (a)  $n = 3$ ,  $p = \rho = \lambda = 1$ , para  $k$  pequeno. (b)  $n = 3$ ,  $p = \rho = \lambda = 1$ , para  $k$  muito pequeno .

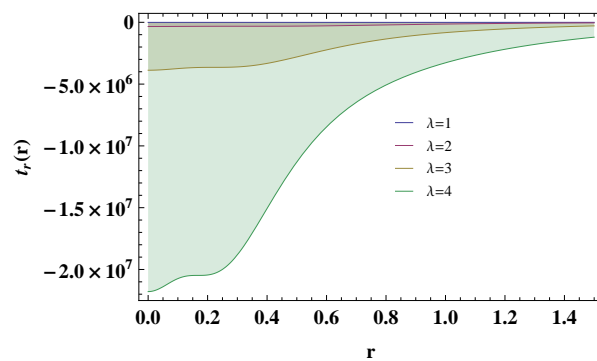


Figura 58:  $t_r(r)$  para  $n = 3$ ,  $p = \rho = 1$  e  $k = -0.5$ , com  $\lambda$  pequeno.

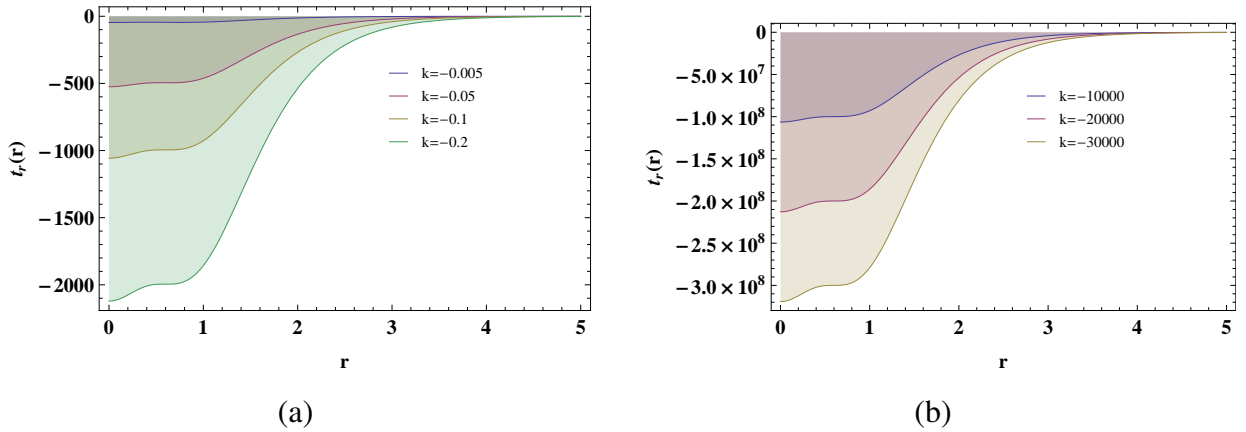


Figura 59:  $t_r(r)$ . (a) para  $n = 3$ ,  $p = \rho = \lambda = 1$ , para  $k$  pequeno. (b)  $n = 3$ ,  $p = \rho = \lambda = 1$ , para  $k$  muito pequeno .

### 8.3.4 Análise geral entre $t_\theta(r)$ , $t_0(r)$ e $t_r(r)$

A figura 60 (a) descreve uma brana espessa localizada. As condições de energia fraca, forte e dominante são satisfeitas. Em (b) descreve uma brana espessa localizada mas a condição de energia dominante não é satisfeita. Quanto a (c) as condições de energia não são satisfeitas. Na figura 61 (a) descreve uma brana espessa localizada, mas as condições não são satisfeitas. Em (b) descreve uma brana espessa localizada mas a condição de energia dominante não é satisfeita. Quanto a (c) as condições de energia não são satisfeitas.

Com a Eq.(8.15) podemos analisar as tensões da brana. A Fig.(62) mostra a variação das tensões da brana dentro do núcleo da brana. Para  $n = 1$  as tensões angular e radial coincidem enquanto a tensão temporal é negativa. As configurações de  $n = 2$  e  $3$ , revelam tensões de brana positivas. Ao contrário do modelo GS, a tensão  $\mu_0$  é menor que  $\mu_r$  e  $\mu_\theta$ .

### 8.3.5 Densidade de Energia na Brana

A análise do comportamento da densidade de energia na brana já foram feitas através das figuras (44, 45, 50, 51, 56 e 57), mas de uma maneira mais geral, podemos analisar a variação da densidade sobre o plano  $r - \theta$ . Para  $n = 1$  temos a figura (63), onde vemos que para  $k$  muito pequenos a densidade se torna negativa, mas permanece localizada na origem. Para  $n = 2$  temos a figura (64) onde vemos que para  $k$  muito pequenos a densidade se divide, representando a quebra da brana, permanecendo localizada na origem. Para  $n = 3$  temos a figura (65) onde vemos que para  $k$  muito pequenos a densidade se divide, representando a quebra da brana, permanecendo localizada na origem.

A densidade de energia que existem nas branas divididas se torna mais notáveis com o aumento da contribuição de torção. Isso indica que o efeito geométrico influencia na distribuição da densidade de energia. Podemos notar que os parâmetros  $p$ ,  $\rho$  e  $\lambda$  são os princi-

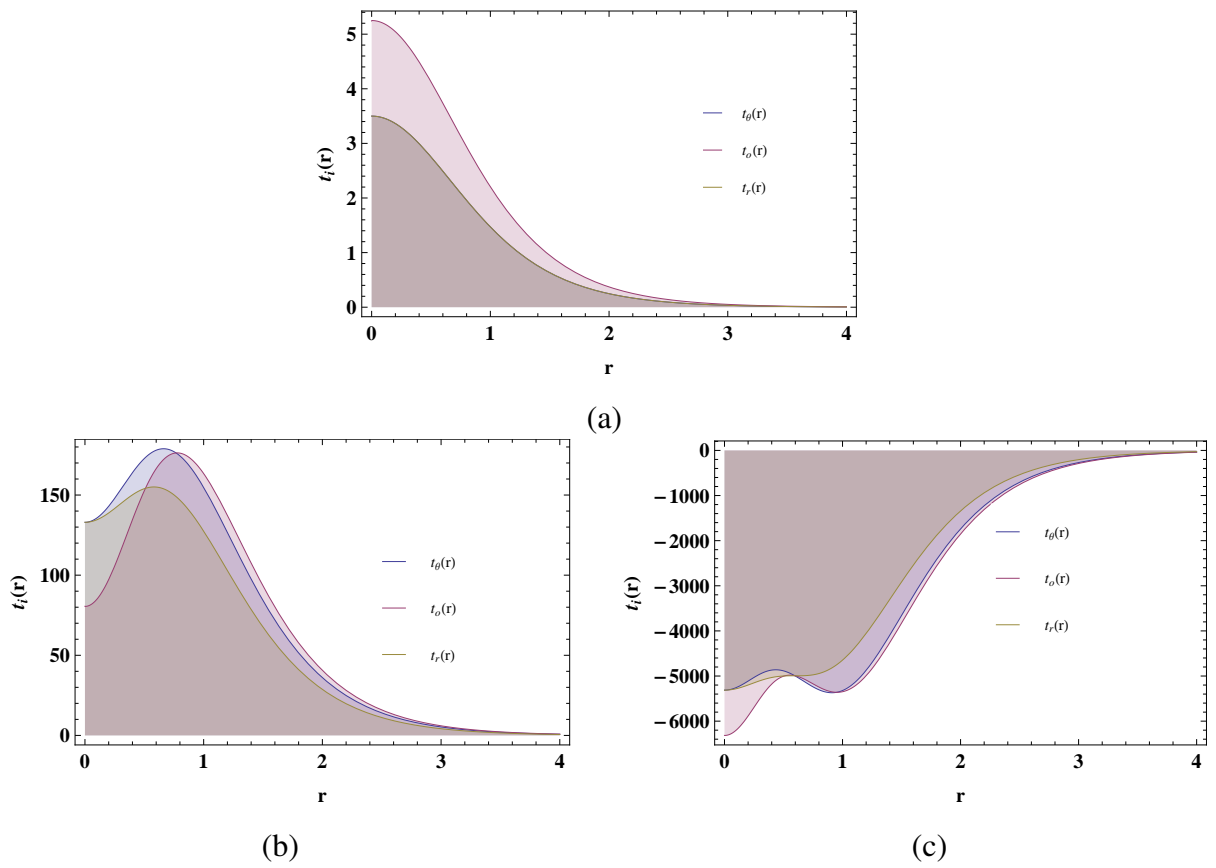


Figura 60: Energia-momentum. (a)  $n = p = \rho = \lambda = 1$  com  $k = -0.5$ . (b)  $n = 2$ ,  $p = \rho = \lambda = 1$  com  $k = -0.5$ . (c)  $n = 3$ ,  $p = \rho = \lambda = 1$  com  $k = -0.5$ .

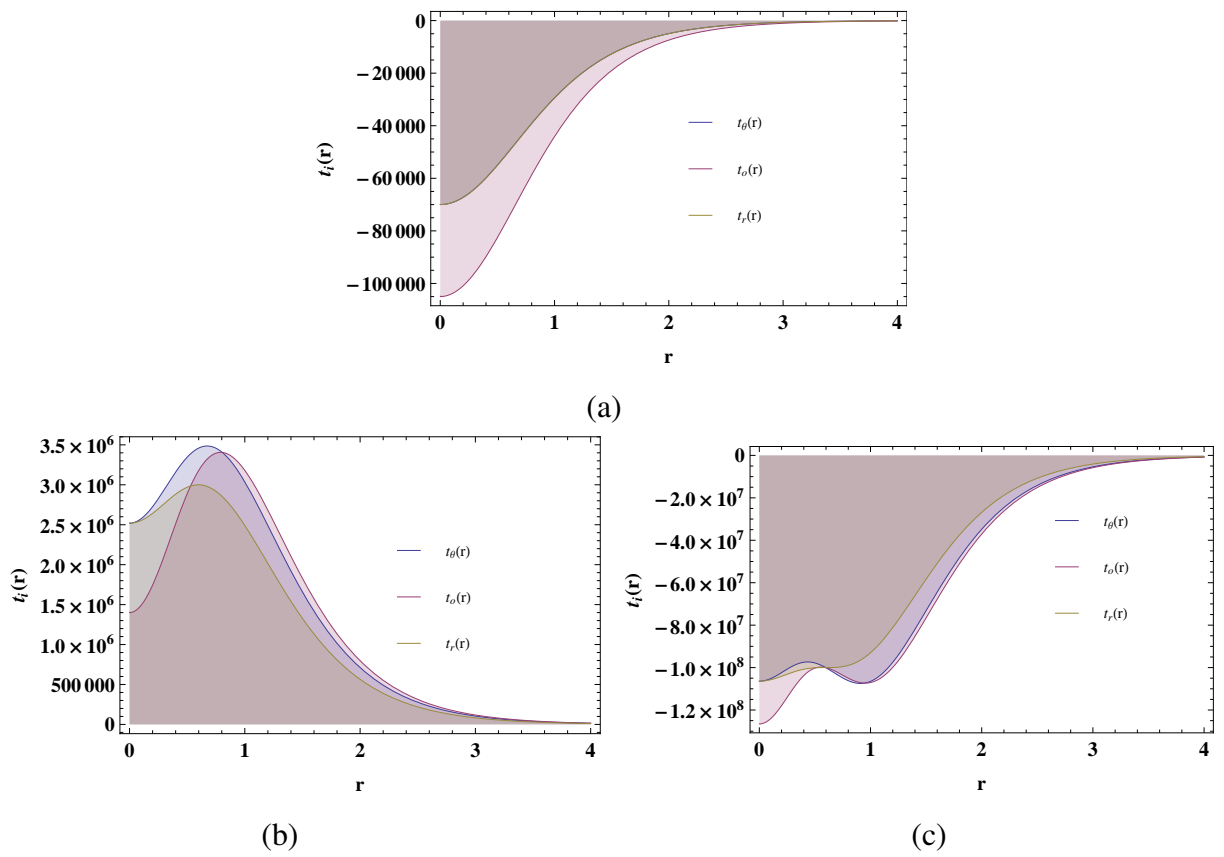


Figura 61: Energia-momentum. (a)  $n = p = \rho = \lambda = 1$  com  $k = -10000$ . (b)  $n = 2$ ,  $p = \rho = \lambda = 1$  com  $k = -10000$ . (c)  $n = 3$ ,  $p = \rho = \lambda = 1$  com  $k = -10000$ .

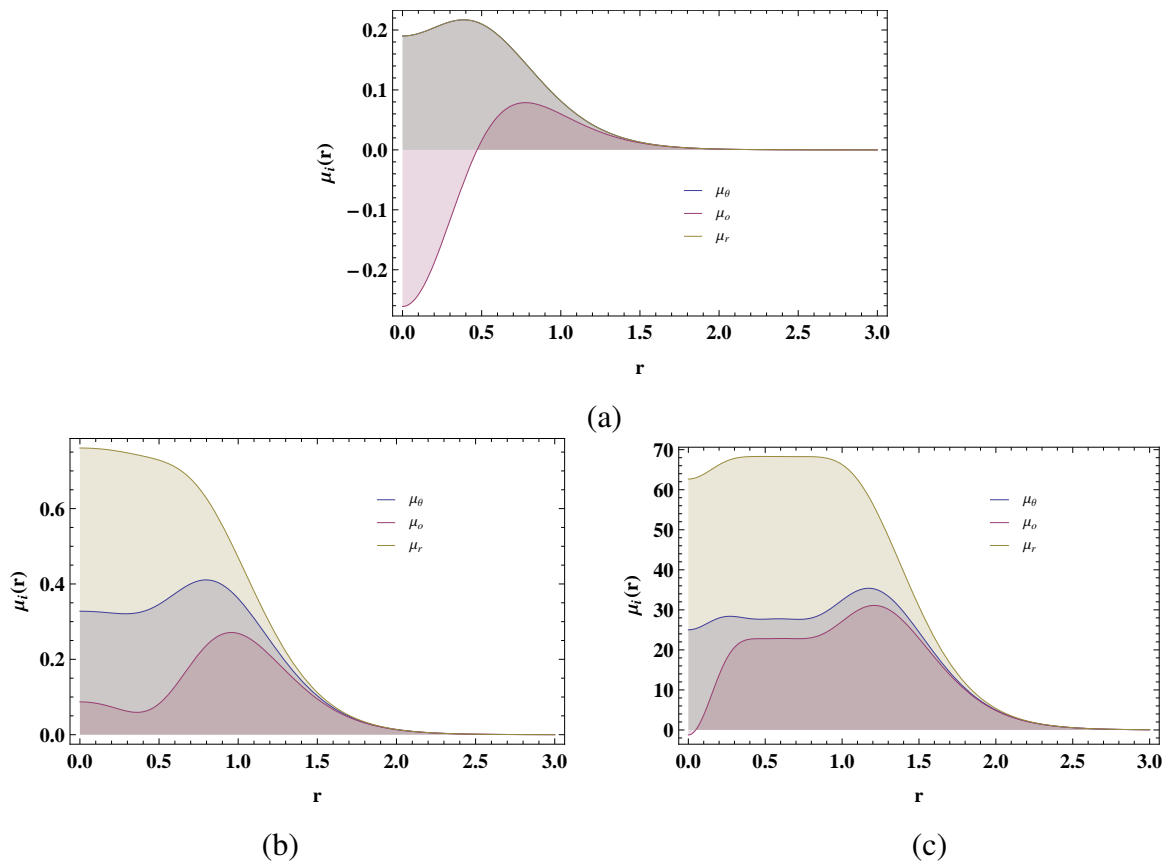


Figura 62: Tensões da brana para  $\rho = \lambda = p = 1$  e  $k = -0.05$ . (a)  $n = 1$ . (b)  $n = 2$ . (c)  $n = 3$ .



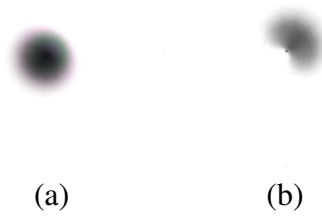


Figura 63: Densidade de Energia para  $n = p = \rho = \lambda = 1$ . (a)  $k = -0.005$ . (b)  $k = -10000$ .

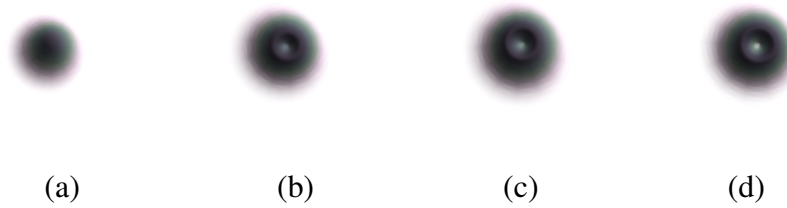


Figura 64: Densidade de Energia para  $n = 2, p = \rho = \lambda = 1$ . (a)  $k = -0.005$ . (b)  $k = -0.05$ . (c)  $k = -0.1$ . (d)  $k = -10000$ .

pais responsáveis pela distância entre as branas divididas, que também determinam a espessura do domínio da parede.

Uma explicação provável para a variável  $k$  é que  $k$  pode estar relacionado à evolução do universo [56]. Observe que a temperatura do fundo cosmológico é um parâmetro com características relevantes para a evolução do universo, podemos assim, reconhecer  $k$  como uma função da temperatura. Portanto, podemos então dizer que existem temperaturas crítica, na qual, a brana se divide [110, 111].

#### 8.4 Perturbações Lineares

Agora, fazemos uma investigação nas perturbações lineares do sistema de branas. Para simplificar, consideramos apenas o perturbação do tensor sem traço transversal (TT), que

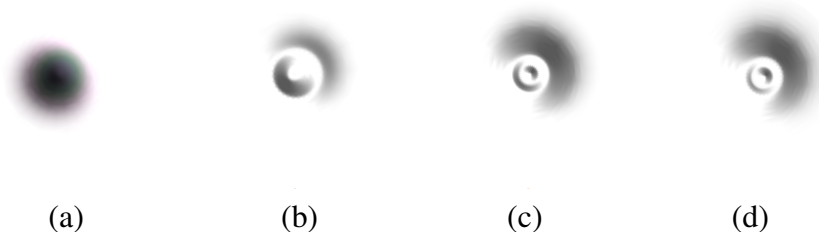


Figura 65: Densidade de Energia para  $n = 2, p = \rho = \lambda = 1$ . (a)  $k = -0.00005$ . (b)  $k = -0.0005$ . (c)  $k = -0.005$ . (d)  $k = -10000$ .

está relacionado com a onda gravitacional e gravitons quadridimensionais. Para isso, fazemos uma perturbação na tetrada [63]

$$h^a{}_{\mu} = \begin{pmatrix} e^{A(r)} (\delta_{\mu}^a + w^a{}_{\mu}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R_0 e^{B(r)} \end{pmatrix}, \quad (8.40)$$

e o vielbein inverso é

$$h_a{}^{\mu} = \begin{pmatrix} e^{-A(r)} (\delta_a^{\mu} + w_a{}^{\mu}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R_0^{-1} e^{-B(r)} \end{pmatrix}, \quad (8.41)$$

onde  $w^a{}_{\mu} = w^a{}_{\mu}(x^{\mu}, r, \theta)$ . Nossa métrica demonstrada na Eq.(8.1) fica

$$g_{MN} dx^M \otimes dx^N = e^{A(r)} (\eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}) dx^{\mu} dx^{\nu} + dr^2 + R_0^2 e^{2B(r)} d\theta^2, \quad (8.42)$$

e sua inversa

$$g^{MN} dx_M \otimes dx_N = e^{-A(r)} (\eta_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}) dx^{\mu} dx^{\nu} + dr^2 + R_0^{-2} e^{-2B(r)} d\theta^2, \quad (8.43)$$

onde  $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} \gamma^{\alpha\beta}$ ,  $\gamma_a{}^{\mu} = \eta^{ab} \eta_{\mu\nu} \gamma^b{}_{\nu}$  e por sua vez

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} &= (\delta_{\mu}^a w_b{}^{\nu} + \delta_b^{\nu} w_a{}^{\mu}) \eta_{ab}, \\ \gamma^{\mu\nu} &= (\delta_a^{\mu} w_b{}^{\nu} + \delta_b^{\nu} w_a{}^{\mu}) \eta^{ab}. \end{aligned} \quad (8.44)$$

Observe que a perturbação do tensor TT satisfaz as seguintes condições:

$$\partial_{\mu} \gamma^{\mu\nu} = 0 = \eta^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu}, \quad (8.45)$$

isso implica que

$$\partial_{\mu} (\delta_a^{\mu} w_b{}^{\nu} + \delta_b^{\nu} w_a{}^{\mu}) \eta^{ab} = 0, \quad (8.46)$$

ou de maneira mais direta

$$\delta_a^{\mu} w^a{}_{\mu} = 0. \quad (8.47)$$

Assim, os componentes não nulos da conexão de Weitzenböck sofrendo a perturbação

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu r} &= A' \delta_{\mu}^{\rho} + (\delta_a^{\rho} w^a{}_{\mu} - \delta_{\mu}^a w_a{}^{\rho}) A' + \delta_a^{\rho} w^a{}_{\mu}, \\ \tilde{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu} &= \delta_a^{\rho} \partial_{\mu} w^a{}_{\nu}, \\ \tilde{\Gamma}^{\theta}{}_{\theta r} &= B', \end{aligned} \quad (8.48)$$

onde  $A' = \partial_r A(r)$ . Com a Eq.(8.48) obtemos os componentes não nulos do tensor torção na conexão de Weitzenböck sofrendo a perturbação

$$\begin{aligned}
T^\rho{}_{\mu r} &= -A' \delta_\mu^\rho - (\delta_a^\rho w^a{}_\mu - \delta_\mu^a w_a{}^\rho) A' - \delta_a^\rho w^a{}_\mu, \\
T^\rho{}_{\mu\nu} &= \delta_a^\rho (\partial_\mu w^a{}_\nu - \partial_\nu w^a{}_\mu), \\
T^\rho{}_{\mu\theta} &= -\delta_a^\rho \partial_\theta w^a{}_\mu, \\
T^\theta{}_{\theta r} &= -B',
\end{aligned} \tag{8.49}$$

lembrando que  $T^\rho{}_{\mu\nu} = -T^\rho{}_{\nu\mu}$ . Com as representações da torção na Eq.(8.49) substituindo na Eq.(3.6), obtemos os componentes não nulos do tensor contorção

$$\begin{aligned}
K^\rho{}_{\mu r} &= A' (\delta_a^\rho w^a{}_\mu - \delta_\mu^a w_a{}^\rho) + \frac{1}{2} (\delta_a^\rho w'^a{}_\mu - \delta_\mu^a w'_a{}^\rho), \\
K^\rho{}_{r\nu} &= -A' \delta_\nu^\rho - \frac{1}{2} (\delta_\nu^a w'_a{}^\rho - \delta_a^\rho w'^a{}_\nu), \\
K^r{}_{\mu\nu} &= e^{2A} (A' \eta_{\mu\nu} + A' \gamma_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \gamma'_{\mu\nu}), \\
K^\rho{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left[ \delta_\mu^a (\partial^\rho w_{a\nu} - \partial_\nu w_a{}^\rho) + \delta_\nu^a (\partial^\rho w_{a\mu} - \partial_\mu w_a{}^\rho) - \delta_a^\rho (\partial_\mu w^a{}_\nu - \partial_\nu w^a{}_\mu) \right], \\
K^\rho{}_{\mu\theta} &= \frac{1}{2} (\delta_a^\rho \partial_\theta w^a{}_\mu - \delta_\mu^a \partial_\theta w_a{}^\rho), \\
K^\rho{}_{\theta\nu} &= -\frac{1}{2} (\delta_a^\rho \partial_\theta w^a{}_\nu + \delta_\nu^a \partial_\theta w_a{}^\rho), \\
K^\theta{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\delta_{a\mu} \partial_\theta w^a{}_\nu + \delta^{a\nu} \partial_\theta w_a{}^\rho) e^{2A} g^{\theta\theta}, \\
K^\theta{}_{r\theta} &= -B', \\
K^r{}_{\theta\theta} &= B' g_{\theta\theta}.
\end{aligned} \tag{8.50}$$

Por sua vez, com (8.49) e (8.50), obtemos os componentes não nulos do tensor dual

da torção

$$\begin{aligned}
S_\rho{}^{\mu r} &= \frac{1}{2} \left[ (3A' + B') \delta_\rho^\mu - \frac{1}{2} (\delta_\rho^a w_a{}^\mu + \delta_a^\mu w^a{}_\rho) \right], \\
S_r{}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left[ A' (\delta_a^\mu w^{a\nu} - \delta_a^\nu w^{a\mu}) + \frac{1}{2} (\delta_a^\mu w'^{a\nu} - \delta_a^\nu w'^{a\mu}) \right] e^{-2A}, \\
S_\rho{}^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \left[ \delta_a^\nu (\partial^\mu w^a{}_\rho - \partial_\rho w^{a\mu}) - \delta_a^\mu (\partial^\nu w^a{}_\rho - \partial_\rho w^{a\nu}) \right] e^{-2A} + \frac{1}{4} \delta_\mu^a (\partial^\mu w_a{}^\nu - \partial^\nu w_a{}^\mu) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[ \delta_\rho^\nu \delta_a^\lambda \partial_\lambda w^{a\mu} - \delta_\rho^\mu \delta_a^\lambda \partial_\lambda w^{a\nu} \right] e^{-2A}, \\
S_r{}^{\mu r} &= \frac{1}{2} (\delta_a^\rho \partial_\rho w^{a\mu}) e^{-2A}, \\
S_\rho{}^{\mu\theta} &= -\frac{1}{4} (\delta_\rho^a \partial_\theta w_a{}^\mu + \delta_a^\mu \partial_\theta w^a{}_\rho) g^{\theta\theta}, \\
S_\theta{}^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} (\delta_a^\mu \partial_\theta w^{a\nu} + \delta^{a\nu} \partial_\theta w_a{}^\mu) e^{-2A}, \\
S_\theta{}^{\theta r} &= -2A'.
\end{aligned} \tag{8.51}$$

Lembrando que  $S_\rho{}^{\mu\nu} = -S_\rho{}^{\nu\mu}$ . Fazendo uma perturbação na Eq.(3.69), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h} f_T \left[ \delta g_{NP} \partial_Q (h S_M{}^{PQ}) + g_{NP} \partial_Q (h \delta S_M{}^{PQ}) - h \left( \delta \tilde{\Gamma}^Q{}_{PM} S_{QN}{}^P + h \tilde{\Gamma}^Q{}_{PM} \delta S_{QN}{}^P \right) \right] \\
+ f_{TT} \delta S_{MN}{}^Q \partial_Q T + \frac{1}{4} \delta g_{MN} f = \delta \mathcal{T}_{MN},
\end{aligned} \tag{8.52}$$

onde  $\delta h = 0$  e  $\delta T = 0$ . Pela Eq.(8.52), obtemos as equações de campo perturbadas

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4} \left[ e^{-2A} \square \gamma_{\mu\nu} + (4A' + B') \gamma'_{\mu\nu} + \gamma'_{\mu\nu} + R_0^{-2} e^{-2B} \partial_\theta^2 \gamma_{\mu\nu} \right] e^{2A} f_T \\
+ \frac{1}{2} \left[ (4A' + B')(3A' + B') + 3A'' + B'' \right] \gamma_{\mu\nu} e^{2A} f_T + \frac{1}{4} \gamma_{\mu\nu} e^{2A} f \\
- f_{TT} \left[ 2(3A' + B') \gamma_{\mu\nu} - \gamma'_{\mu\nu} \right] \left[ A''(3A' + 2B') + A'(3A'' + 2B'') \right] e^{2A} = \delta \mathcal{T}_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{8.53}$$

onde  $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ , e as equações angular e radial se anulam com essa perturbação. Agora para o caso da perturbação do tensor de energia-momentum

$$\delta \mathcal{T}_{\mu\nu} = \delta (\mathcal{T}_\mu{}^\mu g_{\mu\nu}) = \delta (\mathcal{T}_\mu{}^\mu) \eta_{\mu\nu} e^{2A} + \mathcal{T}_\mu{}^\mu \gamma_{\mu\nu} e^{2A}. \tag{8.54}$$

Com a Eq.(3.69), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left[ (4A' + B')(3A' + B') + 3A'' + B'' \right] f_T \\
- 2(3A' + B') \left[ A''(3A' + 2B') + A'(3A'' + 2B'') \right] f_{TT} + \frac{1}{4} f = \mathcal{T}_\mu{}^\mu.
\end{aligned} \tag{8.55}$$

Substituindo (8.54) e (8.55) na Eq.(8.53), temos

$$-\frac{1}{4} \left[ e^{-2A} \square \gamma_{\mu\nu} + (4A' + B') \gamma'_{\mu\nu} + \gamma''_{\mu\nu} + R_0^{-2} e^{-2B} \partial_\theta^2 \gamma_{\mu\nu} \right] f_T + [A''(3A' + 2B') + A'(3A'' + 2B'')] \gamma'_{\mu\nu} f_{TT} = \delta(\mathcal{T}_\mu{}^\mu) \eta_{\mu\nu}. \quad (8.56)$$

Mas, o traço de  $\delta(\mathcal{T}_\mu{}^\mu)$  é nulo. Assim, a Eq.(8.56) toma a forma

$$\left[ e^{-2A} \square \gamma_{\mu\nu} + (4A' + B') \gamma'_{\mu\nu} + \gamma''_{\mu\nu} + R_0^{-2} e^{-2B} \partial_\theta^2 \gamma_{\mu\nu} \right] f_T - 4 [A''(3A' + 2B') + A'(3A'' + 2B'')] \gamma'_{\mu\nu} f_{TT} = 0. \quad (8.57)$$

Assumindo a decomposição usual de Kaluza-Klein

$$\gamma_{\mu\nu}(x^p, r, \theta) = \varepsilon_{\mu\nu}(x^p) \sum_{\beta=1}^{\infty} \chi(r) e^{i\beta\theta}, \quad (8.58)$$

e que a equação tipo Klein-Gordon para os gravitons quadridimensional  $\varepsilon_{\mu\nu}$  é

$$(\square - m_0^2) \varepsilon_{\mu\nu} = 0, \quad (8.59)$$

a Eq.(8.57) toma a forma

$$\chi'' + \left\{ 4A' + B' - 4 [A''(3A' + 2B') + A'(3A'' + 2B'')] \frac{f_{TT}}{f_T} \right\} \chi' + \left( e^{-2A} m_0^2 - R_0^{-2} e^{-2B} \beta^2 \right) \chi = 0. \quad (8.60)$$

#### 8.4.0.1 Modos Kaluza-Klein

No limite de  $r \rightarrow \infty$ , ou seja, no vácuo, temos  $A' = B' = -c$ , onde  $c = c(n, k)$  é uma constante já definida, a Eq.(8.60) toma a forma

$$\chi'' - 5c\chi' + e^{2cr} (m_0^2 - R_0^{-2} \beta^2) \chi = 0. \quad (8.61)$$

A equação (8.61) é análoga à equação de modos massivos do modelo GS [12] A solução da Eq.(8.61) pode ser escrito em termos de Funções de Bessel como

$$\chi(r) = e^{\frac{5}{2}cr} \left[ C_1 J_{\frac{5}{2}} \left( \frac{m_0^2 - R_0^{-2} \beta^2}{c} e^{cr} \right) + C_2 Y_{\frac{5}{2}} \left( \frac{m_0^2 - R_0^{-2} \beta^2}{c} e^{cr} \right) \right], \quad (8.62)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constante. Podemos analisar essa solução para os valores diferentes de  $n$  na figura 66. Próximo da origem, as soluções comportam-se como uma função de Bessel, enquanto que longe da brana, comportam-se parecido com os modos massivos do modelo GS.

No limite de  $r \rightarrow 0$ , ou seja, próximo da brana, fazemos uma expansão em forma de série de Taylor e considerando um caso particular onde  $\lambda = 1$ ,  $\rho = 1$  e  $p = 1$ , a Eq.(8.60) toma

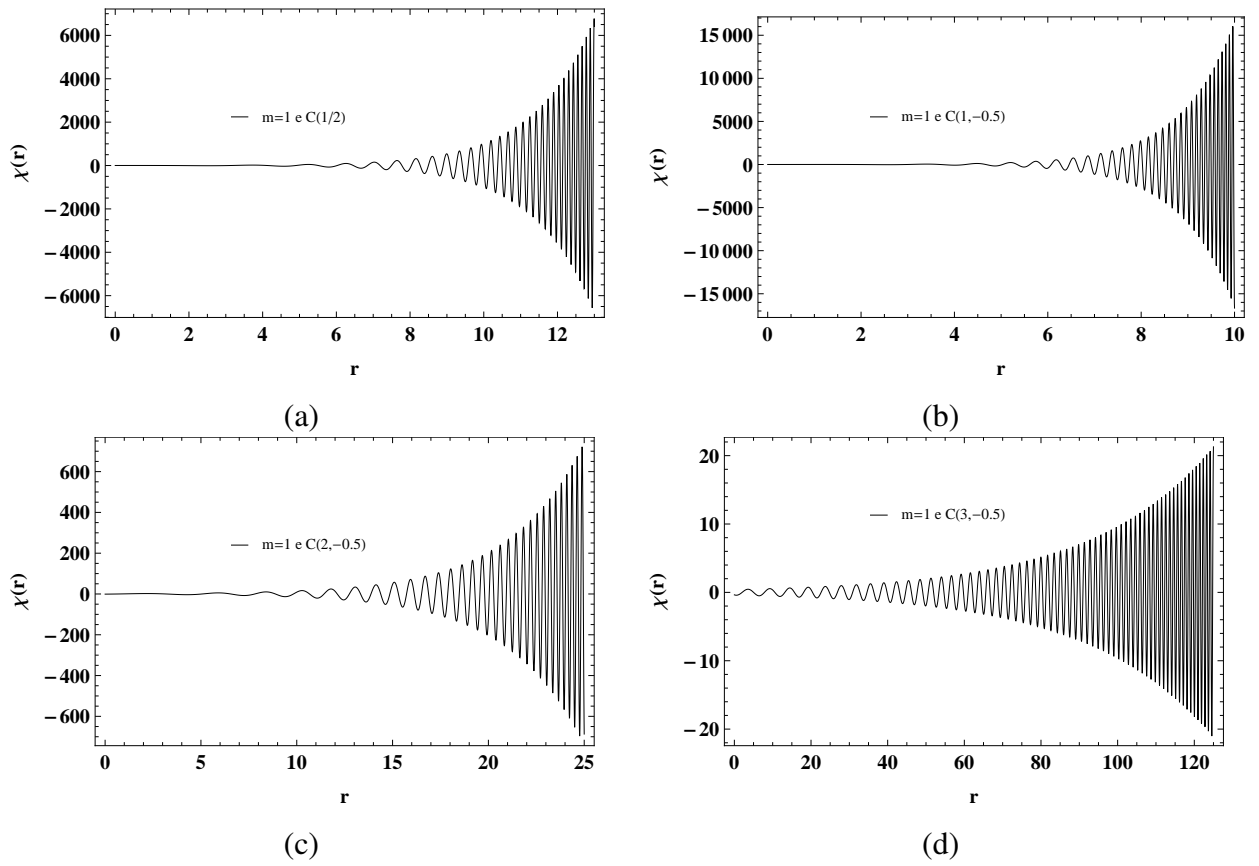


Figura 66:  $\chi(r)$  para  $p = \rho = \lambda = 1$  e  $k = -0.5$ . (a)  $n = 1/2$ . (b)  $n = 1$ . (c)  $n = 2$ . (d)  $n = 3$ . Onde  $m = m_0^2 - R_0^{-2} \beta^2$ .

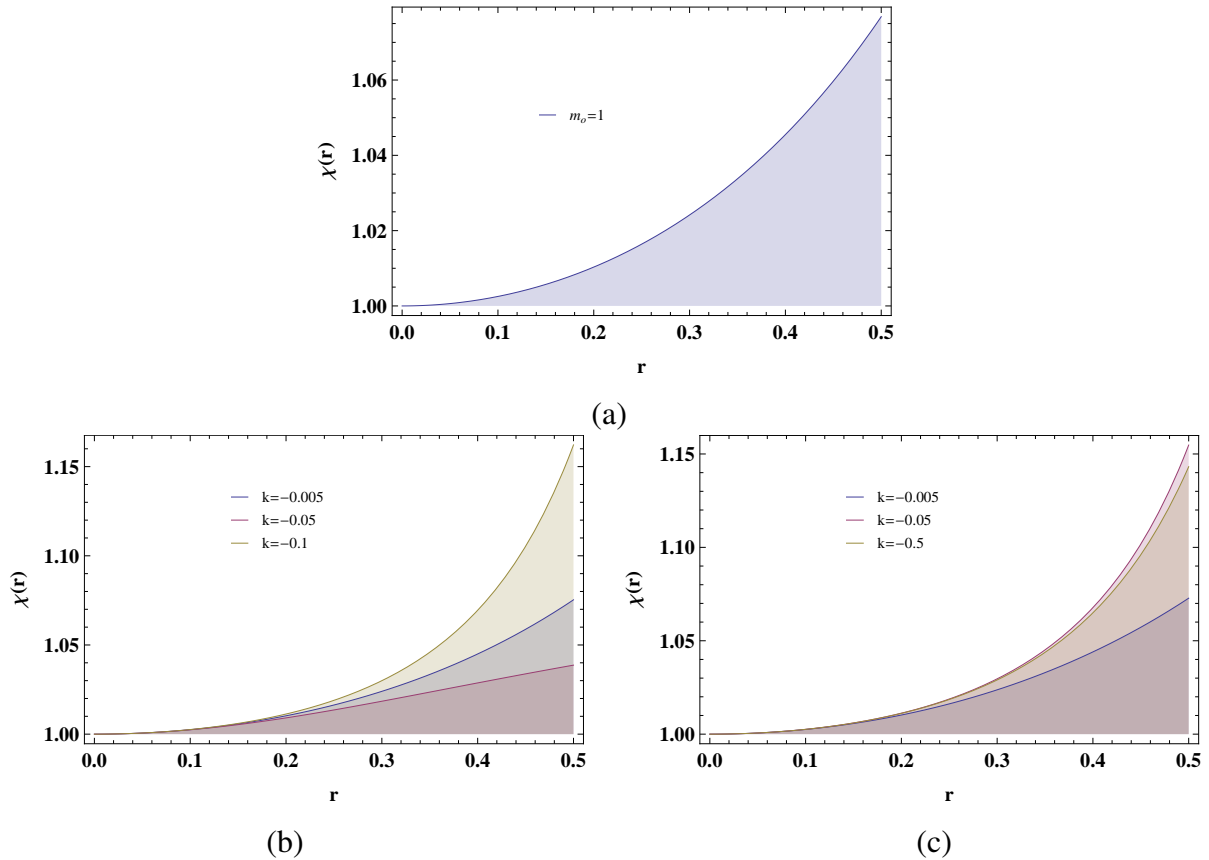


Figura 67:  $\chi(r)$  para  $p = \rho = \lambda = 1$  e  $m_0 = 1$ . (a)  $n = 1$ . (b)  $n = 2$ . (c)  $n = 3$ .

a forma

$$\chi'' - \left\{ \frac{120r^2 + (15kn^2 8^n r^2 + 16r^2 - 24) + 8^n kn[2(2n-1)r^2 - 3]}{3r(8 + 8^n kn)} \right\} \chi' - m_0^2 \chi = 0, \quad (8.63)$$

as soluções são função Hipergeométrica confluentes de Kummer

$$\chi(r) = C_3 {}_1F_1 \left( \frac{12m_0^2 + 3(2)^{3n-1} n k m_0^2}{136 - 2^{3n+1} n k 19(2)^{3n} k n^2}, 1, \frac{136 - 2^{3n+1} n k 19(2)^{3n} k n^2}{12m_0^2 + 3(2)^{3n-1} n k m_0^2} r^2 \right), \quad (8.64)$$

onde  $C_3$  é uma constante. Podemos analisar essa solução para os valores diferentes de  $n$  na figura 67, que mostra como a torção afeta esses modos gravitacionais.

Como mostrado na Fig.(68), a divergência assintótica gravitacional sem massa formam uma torre de estados não localizados [112]. Empregando o método da matriz, resolvemos numericamente a Eq.(8.60), obtendo assim o espectro KK e os respectivos modos massivos. Adotando a condição de contorno usual  $\chi'(0) = \chi'(\infty) = 0$  [12] com um corte em  $r = 6$  e  $N = 1.200$  subdivisões, os primeiros modos massivos são mostrados na Fig.(68), enquanto o espectro é mostrado na Fig.(69)[112].

Para  $n = 1$ , os modos massivos exibem uma única saliência dentro da brana seme-

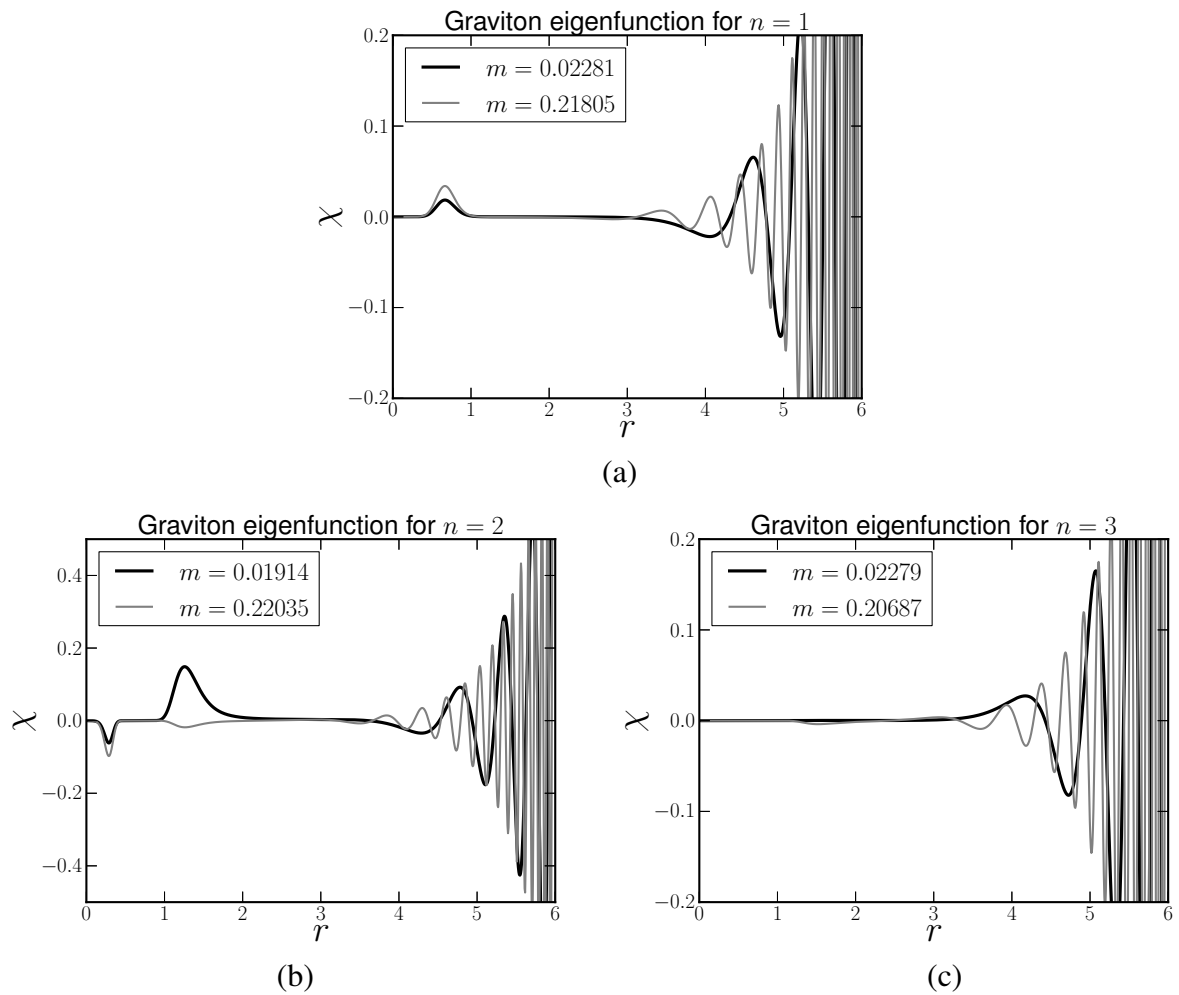


Figura 68: Modos massivos para  $p = \rho = \lambda = 1$ . (a)  $n = 1$ . (b)  $n = 2$ . (c)  $n = 3$ .

lhante a uma corda grossa, enquanto para  $n = 2$  duas saliências aparecem. Isso parece indicar um processo de divisão dos modos massivos dentro da brana conforme ela se divide em branas semelhantes a um anel. Por outro lado, a configuração  $n = 3$  não tem pequenas amplitudes dentro da brana [112].

O espectro mostrado na Fig.(69) revela um comportamento linear usual para pequenas massas [12]. Para  $n = 1$ , o espectro é independente do parâmetro de torção  $k$ , como esperado da expressão Eq.(8.60). Para  $n = 2$  e 3, ao considerar valores opostos de  $k$  o espectro sofre um deslocamento para as primeiras massas. No entanto, à medida que as massas aumentam, seus valores tendem a ser independentes do parâmetro de torção  $k$ , conforme mostrado na Fig.(70)[112].



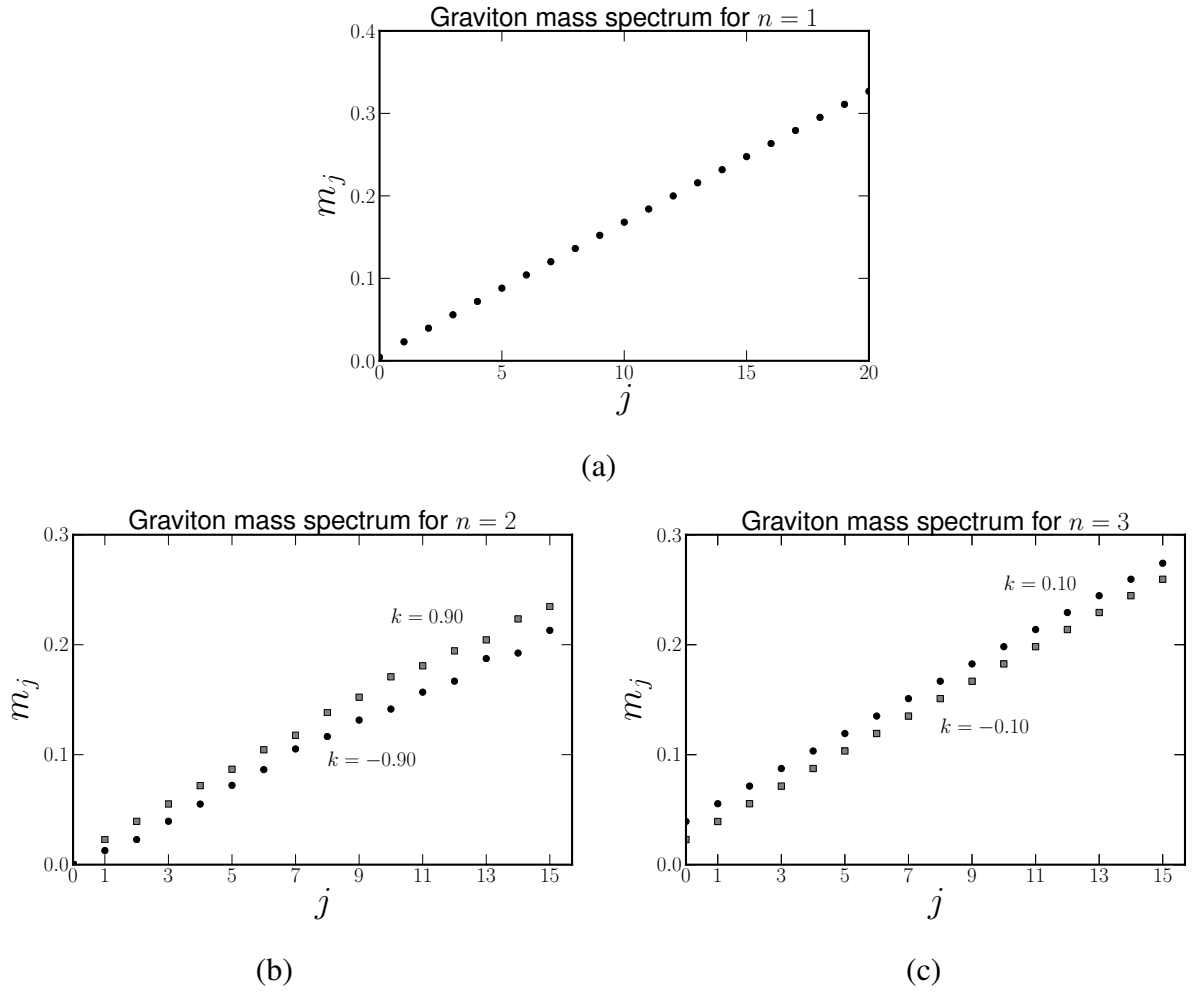


Figura 69: Espectro massivo para  $p = \rho = \lambda = 1$ . (a)  $n = 1$ . (b)  $n = 2$ . (c)  $n = 3$ .

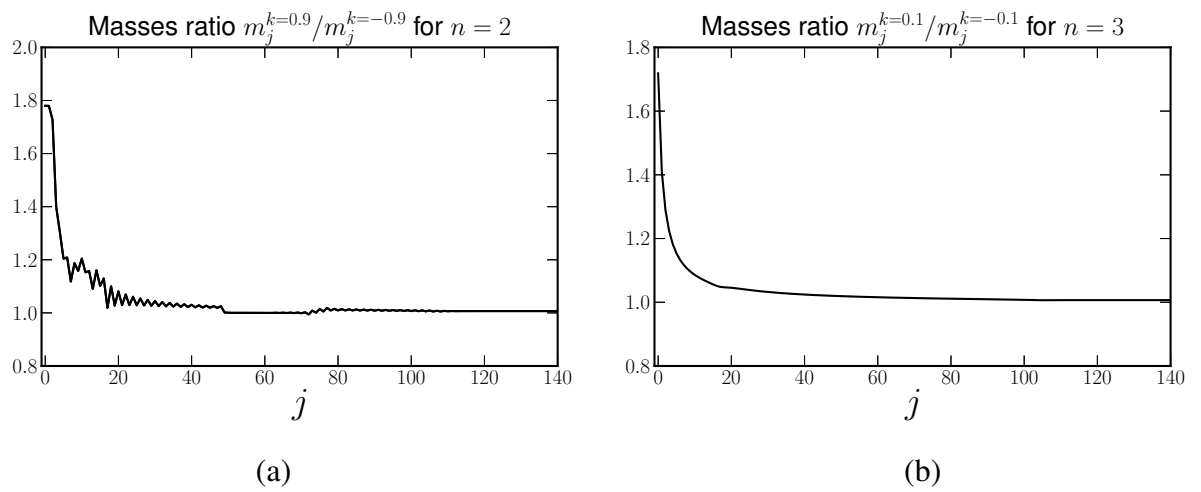


Figura 70: Razão entre as massas KK. (a)  $n = 2$ . (b)  $n = 3$ .

### 8.4.1 Potencial Quântico Analógico

Fazendo a transformação de coordenadas  $dz = e^{-A} dr$  na Eq.(8.60), onde

$$\partial_r = e^{-A} \partial_z \quad e \quad \partial_r^2 = e^{-2A} (\partial_z^2 - \partial_z A \partial_z), \quad (8.65)$$

temos

$$\left[ \partial_z^2 + 2H \partial_z + (m_0^2 - R_0^{-2} e^{2(A-B)} \beta^2) \right] \chi(z) = 0, \quad (8.66)$$

onde

$$H = \frac{1}{2} (3\partial_z A + \partial_z B) + 4e^{-2A} \left\{ 3 [(\partial_z A)^3 - \partial_z A \partial_z^2 A] + 2(\partial_z A)^2 \partial_z B - \partial_z B \partial_z^2 A - \partial_z A \partial_z^2 B \right\} \frac{f_{TT}}{f_T}. \quad (8.67)$$

Introduzindo a decomposição  $\chi(z) = F(z)\Psi(z)$ , onde

$$F(z) = e^{-\frac{1}{2}(3A+B) + \int K(z) dz}, \quad (8.68)$$

com

$$K(z) = -4e^{-2A} \left\{ 3 [(\partial_z A)^3 - \partial_z A \partial_z^2 A] + 2(\partial_z A)^2 \partial_z B - \partial_z B \partial_z^2 A - \partial_z A \partial_z^2 B \right\} \frac{f_{TT}}{f_T}. \quad (8.69)$$

A função  $F(z)$  é introduzida para eliminar os termos de derivadas primeiras. Substituindo a decomposição KK (8.58) na Eq.(8.66), obtemos a equação tipo Schrödinger para a dimensão extra

$$(-\partial_z^2 + U(z)) \Psi(z) = m^2 \Psi(z), \quad (8.70)$$

onde

$$m^2 = m_0^2 - R_0^{-2} e^{2(A-B)} \beta^2, \quad (8.71)$$

é a respetiva massa do graviton KK e o potencial efetivo é

$$U(z) = \partial_z H + H^2. \quad (8.72)$$

A equação do tipo Schrödinger (8.70) pode ser fatorada como

$$(-\partial_z + H) (\partial_z + H) \Psi(z) = m^2 \Psi(z), \quad (8.73)$$

isso representa uma equação de Mecânica Quântica Supersimétrica quando  $\beta = 0$ . Note que para  $m^2 < 0$ , não há graviton quadridimensional, portanto, qualquer solução de brana na teoria de gravidade modificada por  $f(T)$  é estável sob a perturbação do tensor TT. A fim de localizar um graviton KK na brana, o correspondente perfil extra-dimensional  $\Psi(z)$  (também chamado

de modo KK por simplicidade) deve satisfazer a condição de normalização

$$\int |\Psi(z)|^2 dz < \infty. \quad (8.74)$$

A solução do graviton no modo zero (o quadridimensional graviton sem massa) é

$$\Psi_0 = N_0 e^{\frac{1}{2}(3A+B) - \int K(z) dz}, \quad (8.75)$$

onde  $N_0$  é a constante de normalização.

## 8.5 Localização da Gravidade

Nesta sessão, investigamos o problema de localização da gravidade, levando em conta que o graviton no modo zero deve estar localizado na brana. Com a transformação de coordenadas  $dz = e^{-A} dr$  e com o *ansatz* proposto na Eq.(8.30) obtemos que [56, 107, 108]

$$r\lambda = \operatorname{arcsinh}(z\lambda), \quad (8.76)$$

onde  $b = 1$ . Por sua vez, a Eq.(8.31) é rescrita como

$$B(z) = -\ln[\cosh(\operatorname{arcsinh}(z\lambda))] + \ln\left[\tanh\left(\frac{\rho \operatorname{arcsinh}(z\lambda)}{\lambda}\right)\right]. \quad (8.77)$$

Lembrando que  $f(T) = T + kT^n$  onde nesse caso  $T = -4e^{-2A}\partial_z A[3\partial_z A + 2\partial_z B]$ . A função  $H$  assume o valor

$$H = \frac{1}{2}\xi - \left\{ \frac{4^n k(n-1)n \operatorname{csch}^2\left(\frac{2\rho \operatorname{arcsinh}(z\lambda)}{\lambda}\right) (z\lambda^2\xi)^n}{z\xi[1+(z\lambda)^2]} \right\} \\ \times \frac{\sinh\left(\frac{2\rho \operatorname{arcsinh}(z\lambda)}{\lambda}\right)\xi - 4z[1+(z\lambda)^2]^{\frac{3}{2}}\rho^2 \cosh\left(\frac{2\rho \operatorname{arcsinh}(z\lambda)}{\lambda}\right)}{16z\lambda^2[1+(z\lambda)^2]\rho \operatorname{csch}\left(\frac{2\rho \operatorname{arcsinh}(z\lambda)}{\lambda}\right) + [1+(z\lambda)^2]^{\frac{1}{2}}\{nk(4z\lambda^2\xi)^n + z^2[nk\lambda^2(4z\lambda^2\xi)^n - 20\lambda^4]\}}, \quad (8.78)$$

onde

$$\xi = -\frac{5z\lambda^2}{1+(z\lambda)^2} + \frac{4\rho \operatorname{csch}\left(\frac{2\rho \operatorname{arcsinh}(z\lambda)}{\lambda}\right)}{[1+(z\lambda)^2]^{\frac{1}{2}}}, \\ \zeta = -2[1+3(z\lambda)^2+2(z\lambda)^4]\rho + z\lambda^2[1+(z\lambda)^2]^{\frac{1}{2}}[3+2(z\lambda)^2]\sinh\left(\frac{2\rho \operatorname{arcsinh}(z\lambda)}{\lambda}\right). \quad (8.79)$$

Substituindo a Eq.(8.78) na Eq.(8.72), podemos obter o potencial efetivo  $U(z)$ . Ana-

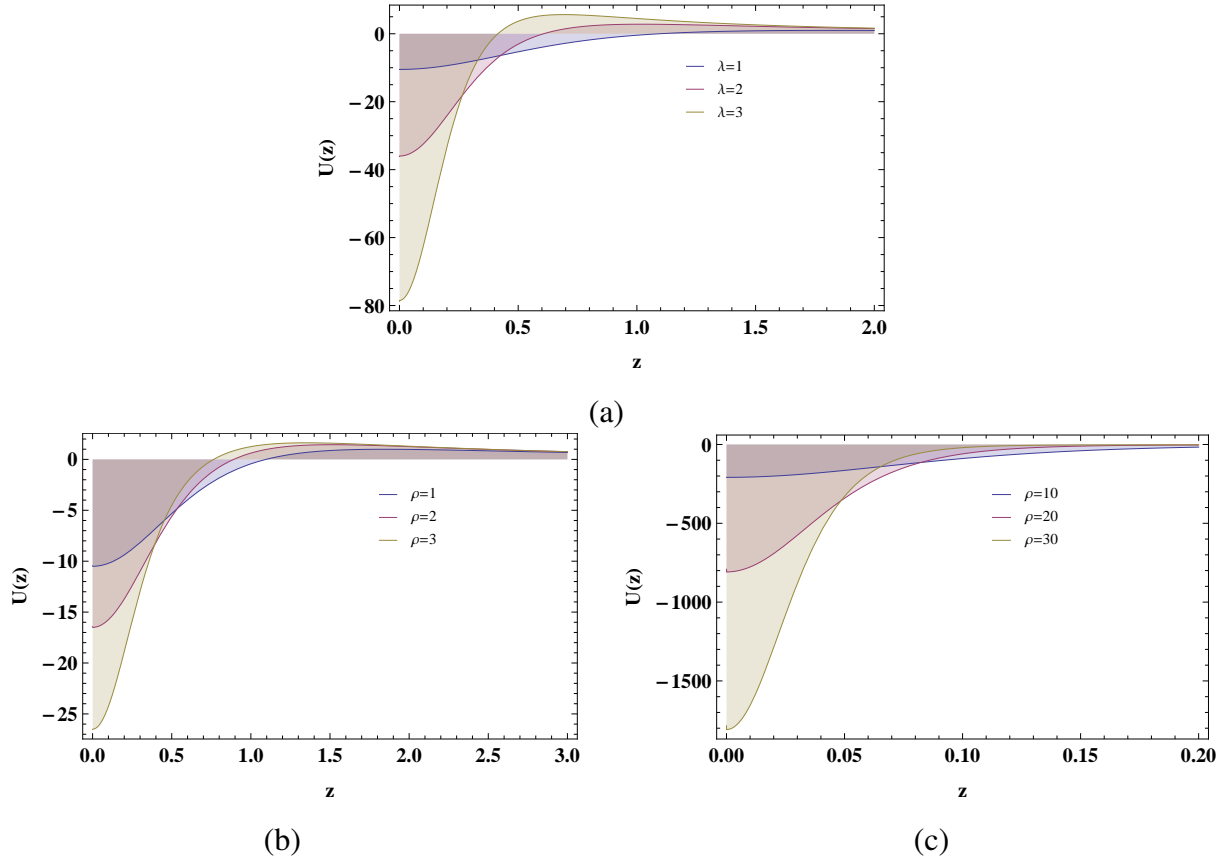


Figura 71: Potencial Efetivo com  $n = p = \rho = 1$ . (a)  $\lambda$  variando. (b)  $\rho$  pequeno. (c)  $\rho$  grande.

lisamos o comportamento desse potencial, onde  $n = 1$ , temos a figura 71, note que esse potencial converge na origem. Interessante nota que para  $n = 2$ , vista na figura 72 o potencial efetivo bem próximo a brana tende ao infinito e quando aumentamos  $k$  esse potencial vai ao menos infinito. Quando analisamos o potencial bem localizado próximo da brana, vemos o surgimento de poços Fig.72(c). Com  $n = 3$  o potencial efetivo, visto na figura 73 bem próximo a brana tende ao infinito e quando aumentamos  $k$  esse potencial vai ao menos infinito. Quando analisamos o potencial bem localizado próximo da brana, vemos o surgimento de poços Fig.73(c).

### 8.5.1 Modo Zero

Fazemos uma análise do modo zero representada na Eq.(8.75) com  $p = 1$ ,  $\lambda = 1$  e  $\rho = 1$  por simplicidade. O modo zero para  $n = 1$  é

$$\Psi_{01} = \frac{N_{01}}{1+z^2} \left( \frac{z^2}{1+z^2} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (8.80)$$

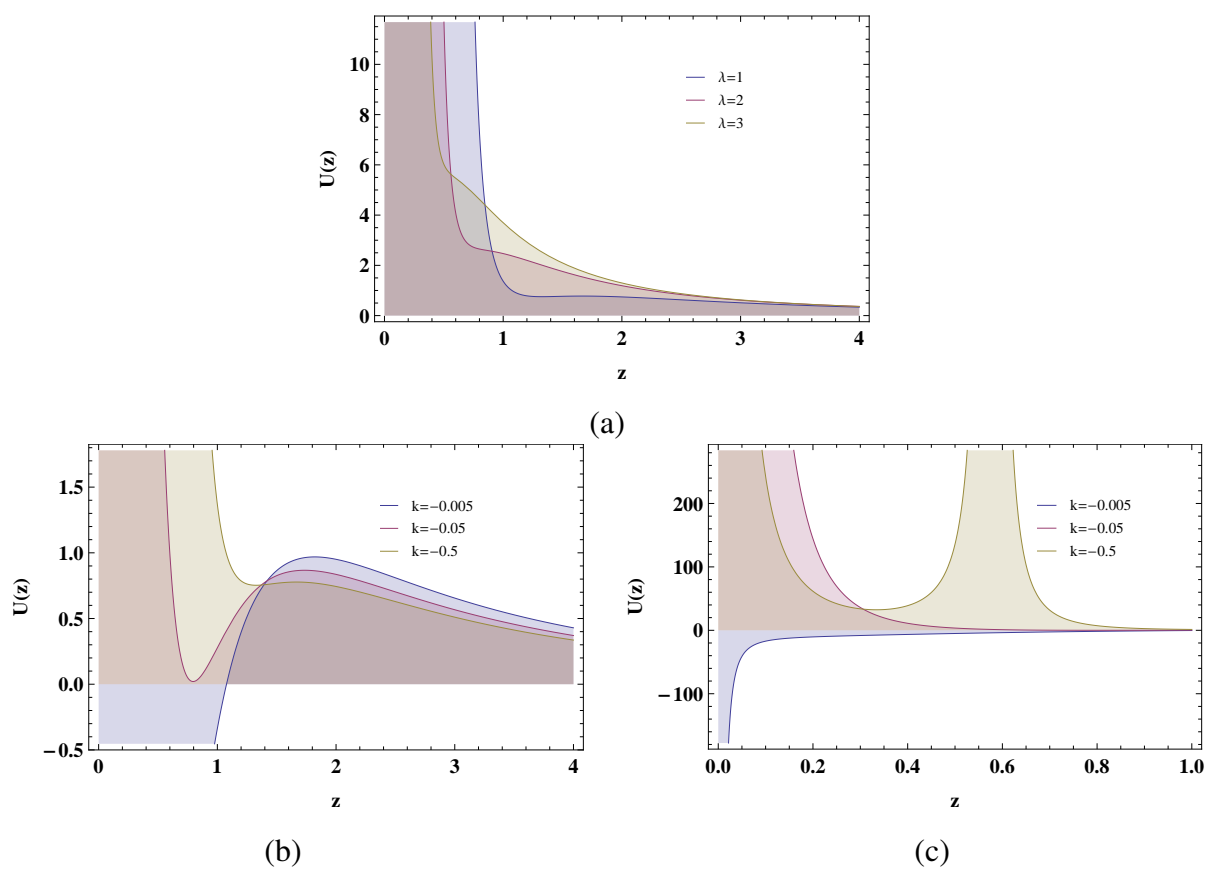


Figura 72: Potencial Efetivo com  $n = 2$ ,  $p = \rho = 1$ . (a)  $\lambda$  variando. (b) e (c)  $\lambda = 1$  e  $k$  variando.

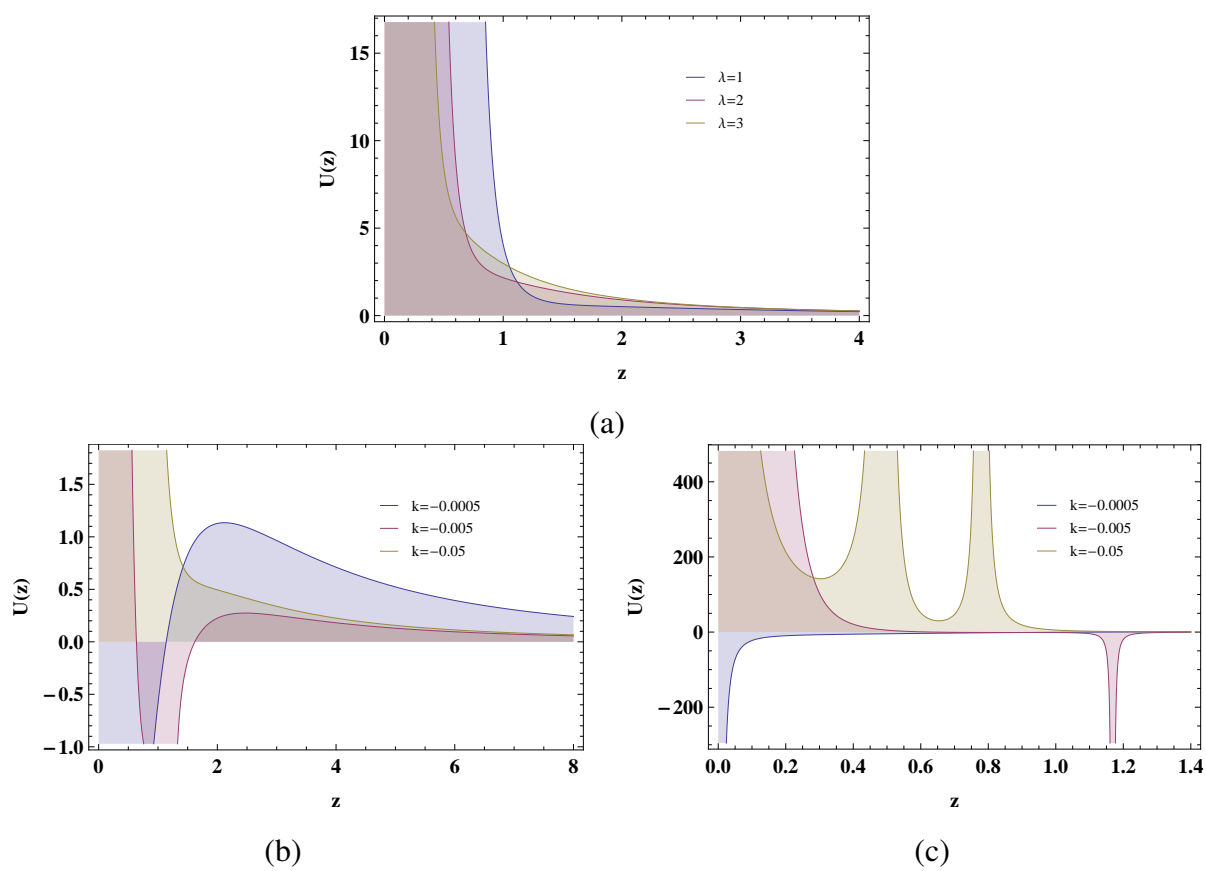


Figura 73: Potencial Efetivo com  $n = 3$ ,  $p = \rho = 1$ . (a)  $\lambda$  variando. (b) e (c)  $\lambda = 1$  e  $k$  variando.

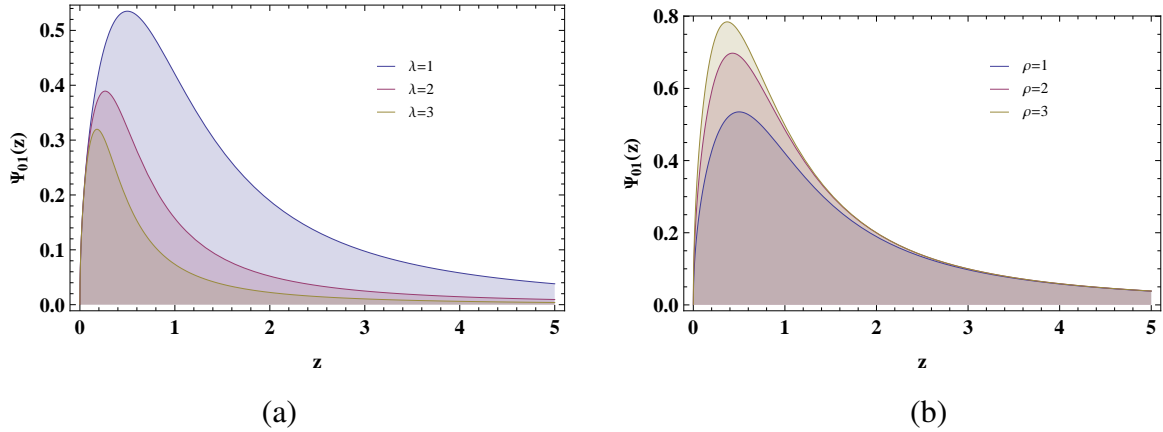


Figura 74: Modo zero para  $n = p = 1$ . (a)  $\rho = 1$  e  $\lambda$  variando. (b)  $\lambda = 1$  e  $\rho$  variando.

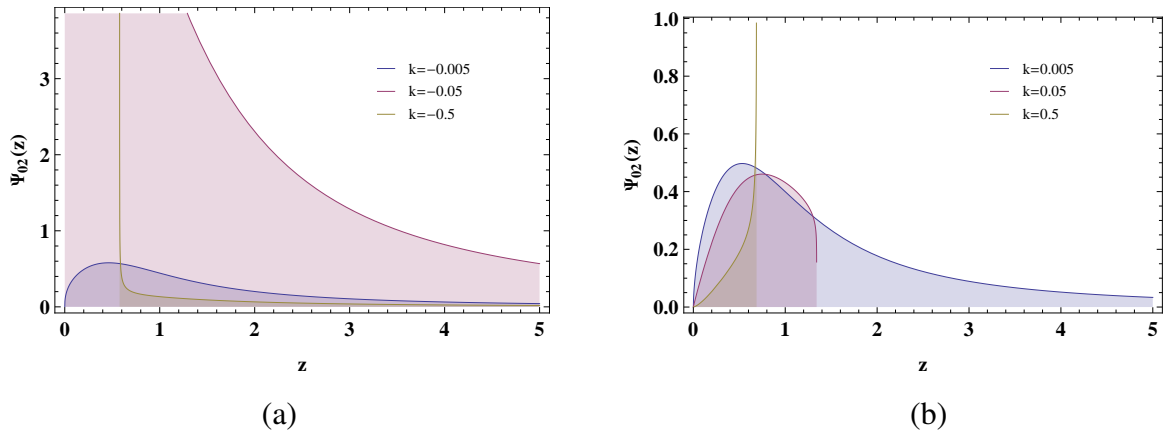


Figura 75: Modo Zero para  $n = 2$ ,  $p = \lambda = \rho = 1$ . (a)  $k < 0$ . (b)  $k > 0$ .

onde  $N_{01} = \sqrt{3}$  é a constante de normalização. O comportamento de  $\Psi_{01}$  é analisado na figura 74. O modo zero para  $n = 2$  é

$$\Psi_{02} = N_{02} \frac{z^{\frac{16k}{1+16k}}}{(1+z^2)^{\frac{13}{14}}} \left( \frac{z^2}{1+z^2} \right)^{\frac{1}{4}} (1+z^2+8k(2-5z))^{-\frac{13}{35} + \frac{1}{2+32k} + \frac{1}{5(40k-1)}}, \quad (8.81)$$

onde  $N_{02}$  é a constante de normalização. O comportamento de  $\Psi_{02}$  é analisado na figura 75. Na Fig.75 (b), analisamos o comportamento de  $\Psi_{02}$  para  $k > 0$  e para esses valores a solução é fisicamente indesejada.

## 8.6 Soluções para um Campo Escalar Tipo Votices

Com a ação gravitacional já definida na Eq.(8.10), onde  $\mathcal{L}_m$  é o lagrangiano de matéria para a fonte da geometria, que nesse caso

$$\mathcal{L}_M = -h \left[ \frac{1}{2} \partial^M \Phi \partial_M \Phi^* + V(\Phi) \right], \quad (8.82)$$

onde  $\Phi \equiv \Phi(r, \theta) = \phi(r)e^{i\alpha\theta}$ , por sua vez  $\Phi^* = \phi(r)e^{-i\alpha\theta}$ . O tensor energia-momentum do campo escalar é

$$\mathcal{T}_{MN} = -\frac{1}{2}(\partial_M\Phi\partial_N\Phi^* + \partial_M\Phi^*\partial_N\Phi) + \frac{1}{2}g_{MNg}{}^{PQ}\partial_P\Phi\partial_Q\Phi^* + g_{MN}V, \quad (8.83)$$

e assim para a nossa métrica definida na Eq.(8.1) obtemos

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{1}{2}[\phi'^2 + R_0^{-2}e^{-2B}(\alpha\phi)^2] + V, \\ t_\theta &= -\frac{1}{2}[\phi'^2 - R_0^{-2}e^{-2B}(\alpha\phi)^2] + V, \\ t_r &= \frac{1}{2}[\phi'^2 - R_0^{-2}e^{-2B}(\alpha\phi)^2] + V. \end{aligned} \quad (8.84)$$

Substituindo (8.84) nas equações (8.18), (8.19) e (8.20), temos

$$\frac{1}{2}[\Phi^{*''} + (4A' + B')\Phi^{*'} - R_0^{-2}e^{-2B}\alpha^2\Phi^*] = \frac{\partial V}{\partial\Phi} \quad (8.85)$$

$$\begin{aligned} -\Lambda - \frac{1}{2}[\phi'^2 + R_0^{-2}e^{-2B}(\alpha\phi)^2] - V &= -3A'^2 - 2A'B' + 4^{n-1}k[-A'(3A' + 2B')]^n \\ &+ \frac{1}{2}\left\{1 + 4^{n-1}nk[-A'(3A' + 2B')]^{n-1}\right\}[(3A' + B')(4A' + B') + 3A'' + B''] \\ &- 4^{n-1}kn(n-1)(3A' + B')[ -A'(3A' + 2B')]^{n-2}[A''B' + A'(3A'' + B'')], \end{aligned} \quad (8.86)$$

$$\begin{aligned} -\Lambda + \frac{1}{2}[\phi'^2 - R_0^{-2}e^{-2B}(\alpha\phi)^2] - V &= -3A'^2 - 2A'B' + 4^{n-1}k[-A'(3A' + 2B')]^n \\ &+ 2\left\{1 + 4^{n-1}nk[-A'(3A' + 2B')]^{n-1}\right\}[A'(3A' + B') + A''] \\ &- 4^{n-1}kn(n-1)A'[ -A'(3A' + 2B')]^{n-2}[A''B' + A'(3A'' + B'')], \end{aligned} \quad (8.87)$$

e

$$-\Lambda - \frac{1}{2}[\phi'^2 - R_0^{-2}e^{-2B}(\alpha\phi)^2] - V = A'(3A' + 2B') + (-4)^{n-1}k(2n-1)[A'(3A' + 2B')]^n, \quad (8.88)$$

onde  $\Phi' = \partial_r\Phi$  e  $\phi' = \partial_r\phi$ . Observe que existem apenas duas equações independentes nas equações acima. Somando a equação (8.86) com (8.88) e subtraindo por duas vezes a equação (8.87) temos:

$$\begin{aligned} -2\phi'^2 + R_0^{-2}e^{-2B}(\alpha\phi)^2 &= -4(A'^2 - 7A'B' - B'^2 + 5A'' - B'') \\ &+ 4^{n-2}[-A'(3A' + 2B')]^{n-2}kn\{2(n-1)B'^2A'' - 24A'^4 + 2A'B'[B'^2 - (2n+3)A'' + nB']\} \\ &- 4^{n-2}[-A'(3A' + 2B')]^{n-2}knA'^2[15A'' - 5B'A' - 17B'^2 - 3B'' + 10(n-1)(3A'' + B'')]. \end{aligned} \quad (8.89)$$



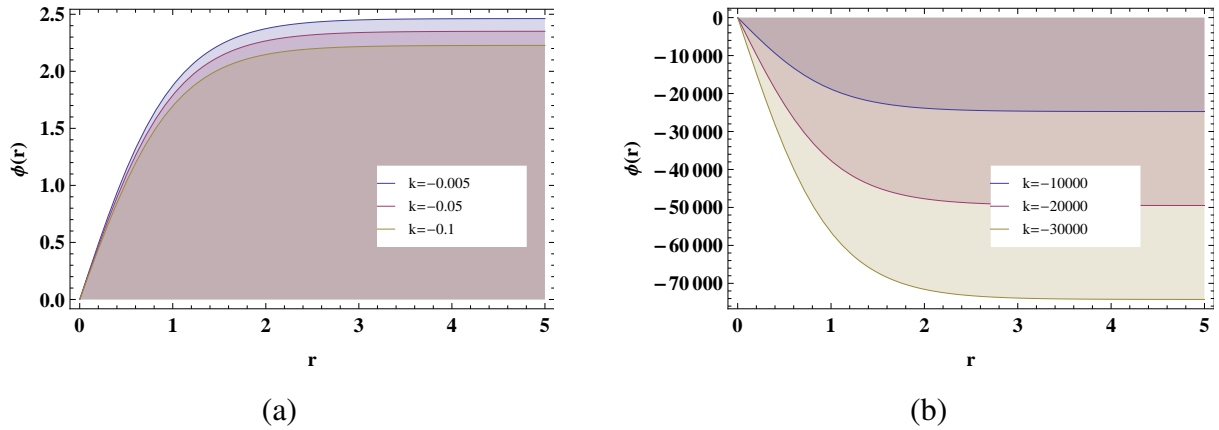


Figura 76: Campo escalar  $\phi(r)$  com  $n = p = \rho = \lambda = 1$ . (a)  $k$  pequeno. (b)  $k$  muito pequeno.

Com o *ansatz* proposto na Eq.(8.30) e com (8.31), podemos reescrever a Eq.(8.89) fazendo  $\alpha = 0$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\rho = 1$  e  $p = 1$

$$\begin{aligned} & \frac{7 \operatorname{sech}^2(r)}{16[9 - 5 \cosh^2(2r)]} [740 - 720 \cosh(2r) + 100 \operatorname{csh}(4r)] \\ & + \frac{7kn \operatorname{sech}^2(r) 4^n [7 \operatorname{sech}^2(r) - 5]^n}{16[9 - 5 \cosh^2(2r)]} [13 + 8n \cosh(2r) + (8n - 13) \cosh(4r)] = 2\phi'^2. \end{aligned} \quad (8.90)$$

Para os caso onde  $\alpha \neq 0$  as soluções de  $\phi(r)$  divergem, então as soluções são interessantes apenas para  $\alpha = 0$ .

### 8.6.1 Solução para $n = 1$

Para  $n = 1$  a Eq.(8.90) fica

$$2\phi'^2 - \frac{7}{2}(1+k) \operatorname{sech}^2(r) = 0, \quad (8.91)$$

que é de facil solução

$$\phi(r) = \frac{7}{2\sqrt{2}}(1+k) \tanh(r), \quad (8.92)$$

que é uma solução muito parecida com *kink*, podemos observar o comportamento dele na figura (76), note que para  $k$  pequenos as soluções são do tipo *kinks*, mas para  $k$  muito pequenos as soluções se tornam do tipo *ant-kinks*.

### 8.6.2 Solução para $n = 2$

Para  $n = 2$  a Eq.(8.90) fica

$$2\phi'^2 - \frac{7}{2} \operatorname{sech}^2(r) [1 + 24k + 8k \operatorname{sech}^2(r)] = 0, \quad (8.93)$$

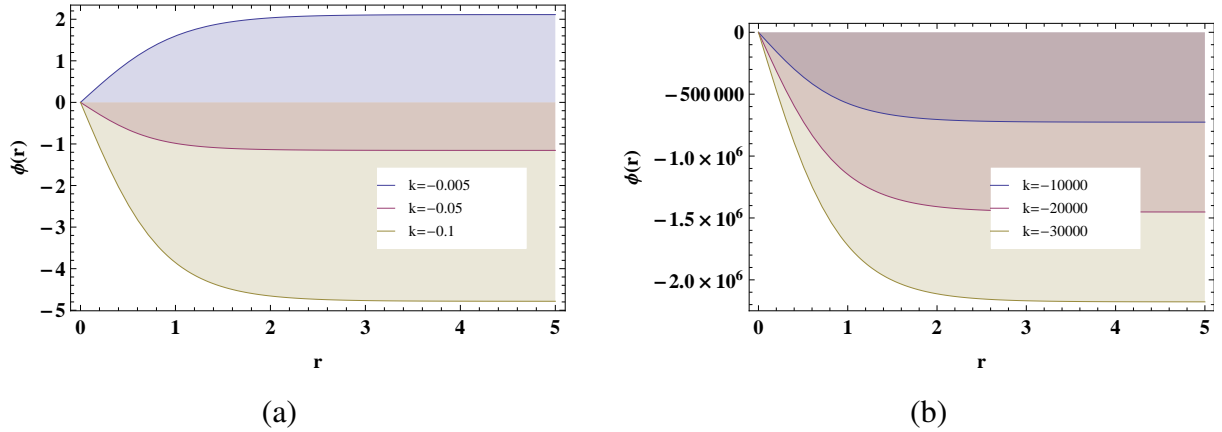


Figura 77: Campo escalar  $\phi(r)$  com  $n = 2$ ,  $p = \rho = \lambda = 1$ . (a)  $k$  pequeno. (b)  $k$  muito pequeno.

que a solução é

$$\phi(r) = \frac{7}{6\sqrt{2}} \tanh(r) [3 + 88k + 8k \operatorname{sech}^2(r)], \quad (8.94)$$

que é uma solução tipo *kink*, podemos observar o comportamento desse campo na figura (77), note que para  $k$  pequenos as soluções são parecidas com *kinks*, mas para  $k$  muito pequenos as soluções se tornam semelhantes a *ant-kinks*.

### 8.6.3 Solução para $n = 3$

Para  $n = 3$  a Eq.(8.90) fica

$$2\phi'^2 - \frac{7}{2} \operatorname{sech}^2(r) \{1 - 2640k + 48k [16 + 51 \cosh(2r)] \operatorname{sech}^4(r)\} = 0, \quad (8.95)$$

que a solução é

$$\phi(r) = \frac{7}{2\sqrt{2}} \tanh(r) [1 - 272k + 1184k \operatorname{sech}^2(r) - 336k \operatorname{sech}^4(r)], \quad (8.96)$$

que é uma solução tipo *kink* deformados, podemos observar o comportamento desse campo na figura (78), note que para  $k$  pequenos as soluções são do tipo *kinks*, mas para  $k$  muito pequenos as soluções se tornam do tipo *kinks* deformados.

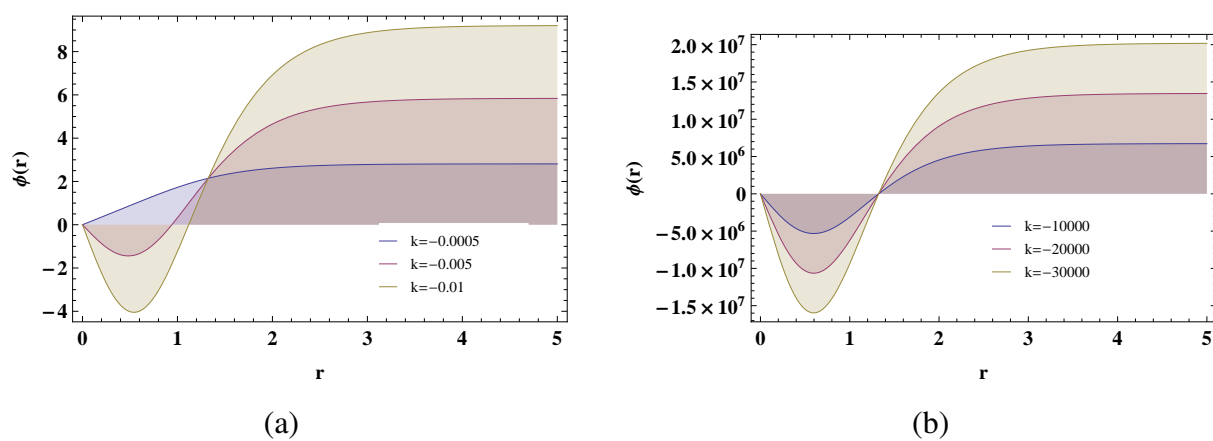


Figura 78: Campo escalar  $\phi(r)$  com  $n = 3$ ,  $p = \rho = \lambda = 1$ . (a)  $k$  pequeno. (b)  $k$  muito pequeno.

## 9 CONCLUSÃO

Apesar de seu grande sucesso a RG apresenta algumas lacunas a serem preenchidas, que servem de motivação para entender e estudar novas representações da gravidade. A teoria da gravidade teleparalela aparece como uma tentativa de preencher algumas dessas lacunas, descrevendo a mesma gravitação da RG, porém usando a torção em vez da curvatura e apresenta uma descrição em termos de uma teoria de calibre, similar ao eletromagnetismo. Mas, o teleparalelismo não preenche todas as lacunas, sendo necessário uma generalização dessa teoria, surgindo então a gravidade  $f(T)$ . A teoria da gravidade  $f(T)$  é tão poderosa que nos dá a expectativa de preencher as lacunas deixadas pela RG e unificar varias extensões interessantes da gravidade além da RG.

Nesta dissertação, foram apresentadas noções e definições básicas de gravitação, gravidade teleparalela e gravidade  $f(T)$  nos capítulos 2, 3 e 6 respectivamente. Motivados pela ideia de estudar novas representações da gravidade e solucionar as lacunas que surgem da RG e unificação, os capítulos 4 e 5 introduzem um cenário de dimensões extras abordado em teoria de mundo-brana com cinco e seis dimensões. No capítulo 7 descrevemos o mundo-brana em 5D na gravidade  $f(T)$ .

No Cap.8 descrevemos o mundo-brana em 6D na gravidade  $f(T)$ . Encontramos as soluções de vácuo com constante cosmológica para  $n = 1/2, 1, 2, 3$ , sendo  $f(T) = T + kT^n$ , onde observamos que assintoticamente, a geometria do bulk converge para um espaço-tempo  $AdS_6$ , cuja constante cosmológica é produzida pelos parâmetros  $k$  e  $n$ . Encontramos as soluções internas e externas para  $n = 1, 2, 3$ , onde utilizamos um *ansatz* de brana espessa  $e^{2A(r)} = \cosh^{-2b}(\lambda r)$  e  $B(r) = -\ln[\cosh^{-b}(\lambda r)] + \ln[\tanh(\rho r)]$ . Analisamos o comportamento das perturbações gravitacionais. Por fim, definimos a lagrangiana de matéria como a de um campo escalar complexo e analisamos as soluções do campo para  $n = 1, 2, 3$ .

De maneira geral, estudamos os efeitos da torção em um mundo-brana tipo-corda na gravidade  $f(T)$ . Observamos que os parâmetros de torção produzem uma estrutura interna na brana que faz com que ela tenda a mudar de fase, de uma única brana para sub-branas, que leva a estruturas semelhantes a anéis. A densidade de energia que existe nas branas divididas se torna mais notável com o aumento da contribuição de torção. Isso indica que o efeito geométrico da torção influencia na distribuição da densidade de energia. Podemos notar que os parâmetros  $p$ ,  $\rho$  e  $\lambda$  do *ansatz* são os principais responsáveis pela distância entre as branas divididas, que também determinam a espessura.

A brana espessa tipo-corda sofre uma transição de fase evidenciada pelos componentes da densidade de energia com a variação dos parâmetros de torção. Os picos adicionais

na densidade de energia no núcleo da brana sugerem a formação de um estruturas como anéis em torno da brana inicial na origem. Para o caso  $n = 1$ , com a diminuição do parâmetro  $k$  já obtemos um resultado interessante que é a geração de uma pressão negativa. Para  $n = 2$  vemos que quando diminuimos o parâmetro  $k$  obtemos outro resultado interessante que é a quebra espontânea da brana. Com  $n = 3$  obtemos apenas pressões negativas, e quando diminuimos o parâmetro  $k$  obtemos o outro resultado interessante que é o surgimento de três máximos que representa a quebra espontânea da brana em uma estrutura como um anel em torno da brana.

A equação de Einstein modificada por  $f(T)$  nos leva a uma torre gravitacional de massa com flutuações que se propagam para o *bulk*. A interação dos modos massivos com a torção é mais intensa no interior do núcleo da brana, onde a amplitude e a taxa de crescimento dependem do parâmetro  $k$  da torção.

A análise do potencial analógico de Schrödinger revela os efeitos da torção nos modos KK. Ao contrário do mundo-brana em tipo-corda baseado na RG, a torção remove a divergência do poço de potencial na origem para  $n = 1$ , independentemente do valor de  $k$ . Para  $n = 2$ , o potencial se transforma em uma barreira infinita à medida que  $k$  aumenta. Encontramos uma configuração interessante para  $n = 3$  onde múltiplos poços e barreira são formados deslocados da origem. Como resultado, a torção mudou o modo sem massa da origem. Para  $k > 0$ , o modo sem massa é submetido a uma transição, tornando-se não localizada à medida que  $k$  aumenta.

Ao assumir um campo escalar complexo como fonte, descobrimos que as soluções divergem para  $\alpha \neq 0$  e não geram soluções topológicas, então as soluções são interessantes apenas para  $\alpha = 0$  que são deformadas do tipo vórtice controladas pelos parâmetros  $n$  e  $k$  da torção. Para  $n = 1, 2$  as soluções são do tipo *kinks*, mas quando menor for  $k$  as soluções passam por uma transição do tipo *kinks* para *ant-kinks*. Para  $n = 3$  as soluções são do tipo *kinks*, porém ao assumir valores muito pequenos de  $k$  as soluções se tornam do tipo *kinks* deformados. O valor esperado de vácuo e o perfil do campo escalar dentro do núcleo são controlados pelos parâmetros de torção. Para  $\alpha = 0$ , o campo escalar complexo que adotamos se transforma em um campo escalar real dependendo apenas da variável radial.

Uma explicação provável para a variável  $k$  é que  $k$  pode estar relacionado à evolução do universo [56]. Observe que a temperatura do fundo cosmológico é um parâmetro com características relevantes para a evolução do universo. Podemos assim, reconhecer  $k$  como uma função da temperatura. Portanto, podemos então dizer que existem temperaturas críticas, nas quais, a brana se divide [110, 111].

É interessante ressaltar que somos os pioneiros em estudar o comportamento de uma gravidade teleparalela modificada por  $f(T)$  em um cenário de mundo-brana tipo-corda em 6D, todos os nossos resultados são contribuições originais. Como resultado dessa dissertação,

temos um artigo submetido com o título: *Thick string-like braneworlds in  $f(T)$  gravity* [112].

## REFERÊNCIAS

- [1] SMITH, S. The Mass of the Virgo Cluster. *The Astrophysical Journal*, v. 83, p. 23, 1936. ISSN 0004-637X.
- [2] ZWICKY, F. On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae. *ibid*, v. 86, p. 217, 1937.
- [3] ROBERTS, M. S.; ROTS, A. H. Comparison of Rotation Curves of Different Galaxy Types. *Astronomy and Astrophysics*, v. 24, p. 483, 1973.
- [4] RUBIN, V. C.; FORD, W. K. J.; THONNARD, N. Extended Rotation Curves of High-Luminosity Spiral Galaxies. IV. Systematic Dynamical Properties, *Sa<sup>^</sup>Sc. Astrophys.J. Lett*, v. 255, p. L107, 1978. ISSN 1098-6596.
- [5] EDERY, A. The bright side of dark matter. *Physical Review Letters*, v. 83, n. 20, p. 3990–3992, 1999. ISSN 10797114.
- [6] DVALI, G.; GABADADZE, G.; PORRATI, M. 4D gravity on a brane in 5D Minkowski space. *Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics*, v. 485, n. 1-3, p. 208–214, 2000. ISSN 03702693.
- [7] RANDALL, L. *Warped Passages Unraveling the Mysteries of the Universe's Hidden Dimensions*. [S.l.: s.n.], 2005. 231 p. ISBN 9780060531089.
- [8] KALUZA, T. On the Unification Problem in Physics. *Math. Phys.*, K1, n. 14, p. 966–972, 1921. ISSN 02182718.
- [9] KLEIN, O. Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English). *Z. Phys.*, v. 37, p. 895–906, 1936.
- [10] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Physical Review Letters*, v. 83, n. 17, p. 3370–3373, 1999. ISSN 10797114.
- [11] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. An alternative to compactification. *Physical Review Letters*, v. 83, n. 23, p. 4690–4693, 1999. ISSN 10797114.
- [12] GHERGHETTA, T.; SHAPOSHNIKOV, M. Localizing Gravity on a String-Like Defect in Six Dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, v. 85, p. 240, 2000.
- [13] ODA, I. Bosonic Fields in the String-like Defect Model. *Phys. Rev. D*, v. 62, p. 126009, 2000.
- [14] ODA, I. Localization of Matters on a String-like Defect. *Phys. Lett. B*, v. 496, p. 133, 2000.
- [15] LIU, Y. X.; ZHAO, L.; DUAN, Y. S. Localization of fermions on a string-like defect. *Journal of High Energy Physics*, v. 704, n. 4, p. 97, 2007. ISSN 11266708.
- [16] LIU, Y. X. et al. Fermions in self-dual vortex background on a string-like defect. *Nuclear Physics B*, v. 785, n. 3, p. 234–245, 2007. ISSN 05503213.

- [17] TINYAKOV, P.; ZULETA, K. Thin-string limit of the 6D stringlike defect model. *Physical Review D*, v. 64, n. 2, p. 4–6, 2001. ISSN 05562821.
- [18] GIOVANNINI, M.; MEYER, H.; SHAPOSHNIKOV, M. Warped compactification on Abelian vortex in six dimensions. *Nuclear Physics B*, v. 619, n. 1-3, p. 615–645, 2001. ISSN 05503213.
- [19] TORREALBA, R. S. Localized gravity on topological Abelian Higgs strings. *General Relativity and Gravitation*, v. 42, n. 8, p. 1831–1844, 2010. ISSN 00017701.
- [20] Torrealba S., R. S. Localizing gauge fields on a topological Abelian string and the Coulomb law. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, v. 82, n. 2, p. 1–16, 2010. ISSN 15507998.
- [21] SOUSA, L. J.; CRUZ, W. T.; ALMEIDA, C. A. Tensor gauge field localization on a string-like defect. *Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics*, v. 711, n. 1, p. 97–103, 2012. ISSN 03702693.
- [22] SOUSA, L. J. S.; SILVA, C. A. S.; ALMEIDA, C. A. S. Brane bounce-type configurations in a string-like scenario. *Phys. Lett. B*, v. 718, p. 579, 2012.
- [23] SOUSA, L.; CRUZ, W.; ALMEIDA, C. Six-dimensional standing-wave braneworld with normal matter as source. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, v. 89, n. 6, p. 1–26, 2014. ISSN 15502368.
- [24] SILVA, J. E.; ALMEIDA, C. A. Scalar field localization on 3-branes placed at a warped resolved conifold. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, v. 84, n. 8, 2011. ISSN 15507998.
- [25] COSTA, F. W.; SILVA, J. E.; ALMEIDA, C. A. Gauge vector field localization on a 3-brane placed in a warped transverse resolved conifold. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, v. 87, n. 12, p. 39–43, 2013. ISSN 15507998.
- [26] VERAS, D. F. et al. Gravitational Kaluza-Klein modes in the string-cigar braneworld. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, v. 91, n. 6, 2015. ISSN 15502368.
- [27] ARAÚJO, J. C. et al. A smoothed string-like braneworld in six dimensions. *European Physical Journal C*, v. 75, n. 3, p. 1–8, 2015. ISSN 14346052.
- [28] DANTAS, D. M.; da Rocha, R.; ALMEIDA, C. A. Exotic Elko on string-like defects in six dimensions. *Epl*, v. 117, n. 5, p. 1–16, 2017. ISSN 12864854.
- [29] DANTAS, D. M. Aspectos gerais do confinamento de campos em mundos brana não fatorizáveis de seis dimensões com enfoque na localização de férmions de Dirac, Rarita-Schwinger e Elko. *Universidade Federal do Ceará (UFC), Fortaleza, CE, 2016 (Tese)*.
- [30] GIOVANNINI, M.; Le Bé, J. V.; RIEDERER, S. Zero modes of six-dimensional Abelian vortices. *Classical and Quantum Gravity*, v. 19, n. 12, p. 3357–3385, 2002. ISSN 02649381.
- [31] FRÈRE, J. M. et al. Neutrino hierarchy and fermion spectrum from a single family in six dimensions: Realistic predictions. *Journal of High Energy Physics*, v. 1308, n. 8, p. 78, 2013. ISSN 10298479.



- [32] ARUN, M. T.; SAHA, P. Gravitons in multiply warped scenarios: At 750GeV and beyond. *Pramana - Journal of Physics*, v. 88, n. 6, p. 1–18, 2017. ISSN 03044289.
- [33] ARUN, M. T.; CHOUDHURY, D. Bulk gauge and matter fields in nested warping: II. Symmetry breaking and phenomenological consequences. *Journal of High Energy Physics*, v. 1509, n. 4, p. 202, 2016. ISSN 10298479.
- [34] ANDRADE, V. C. de; PEREIRA, J. G. Gravitational Lorentz force and the description of the gravitational interaction. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, v. 56, n. 8, p. 4689–4695, 1997. ISSN 15502368.
- [35] ALDROVANDI, R.; Pereira, J, G. *An introduction to teleparallel gravity*. Sao Paulo: [s.n.], 2010. 211 p.
- [36] ARCOS, H. I.; PEREIRA, J. G. Torsion Gravity: a Reappraisal. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 13, p. 2193, 2004.
- [37] SOUSA, A. A.; MOURA, J. S.; PEREIRA, R. B. Energy in an expanding universe in the teleparallel geometry. *Brazilian Journal of Physics*, v. 40, n. 1, p. 1–8, 2010. ISSN 01039733.
- [38] WALD, R. M. *General Relativity*. Chicago: [s.n.], 1984. 491 p.
- [39] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York: [s.n.], 1974. v. 25. 65–65 p. ISSN 0031-9112.
- [40] BENGOCHEA, G. R.; FERRARO, R. Dark torsion as the cosmic speed-up. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, v. 79, n. 12, p. 1–5, 2009. ISSN 15507998.
- [41] FERRARO, R.; FIORINI, F. Modified teleparallel gravity: Inflation without an inflaton. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, v. 75, n. 8, p. 1–5, 2007. ISSN 15507998.
- [42] FERRARO, R.; FIORINI, F. On Born-Infeld Gravity in Weitzenbock spacetime. *Phys. Rev. D*, v. 78, n. 0, p. 124019, 2008.
- [43] LINDER, E. V. Einstein's other gravity and the acceleration of the Universe. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, v. 81, n. 12, p. 127301, 2010. ISSN 15507998.
- [44] SOTIRIOU, T. P.; LI, B.; BARROW, J. D. Generalizations of teleparallel gravity and local Lorentz symmetry. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, v. 83, n. 10, p. 104030, 2011. ISSN 15507998.
- [45] WU, P.; YU, H. Observational constraints on  $f(T)$  theory. *Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics*, v. 693, n. 4, p. 415–420, 2010. ISSN 03702693.
- [46] BENGOCHEA, G. R. Observational information for  $f(T)$  theories and dark torsion. *Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics*, v. 695, n. 5, p. 405–411, 2011. ISSN 03702693.
- [47] MYRZAKULOV, R. Accelerating universe from  $F(T)$  gravity. *European Physical Journal C*, v. 71, n. 9, p. 1752, 2011. ISSN 14346052.

- [48] MYRZAKULOV, R.  $f(T)$  gravity and k-essence. *General Relativity and Gravitation*, v. 44, n. 12, p. 3059–3080, 2012. ISSN 00017701.
- [49] SHAIDO, Y. A.; SUGAMOTO, A. Accelerating cosmology in modified gravity with scalar field. *General Relativity and Gravitation*, v. 37, n. 5, p. 953–958, 2005. ISSN 00017701.
- [50] WU, P.; YU, H.  $f(T)$  models with phantom divide line crossing. *European Physical Journal C*, v. 71, n. 2, p. 1552, 2011. ISSN 14346052.
- [51] FAROOQ, M. U. et al. Reconstruction of  $f(T)$  and  $f(R)$  gravity according to  $(m, n)$ -type holographic dark energy. *Canadian Journal of Physics*, v. 91, n. 9, p. 703–708, 2013. ISSN 00084204.
- [52] KARAMI, K.; ABDOLMALEKI, A.  $f(T)$  modified teleparallel gravity as an alternative for holographic and new agegraphic dark energy models. *Research in Astronomy and Astrophysics*, v. 13, n. 7, p. 757–771, 2013. ISSN 16744527.
- [53] CHEN, S. H. et al. Cosmological perturbations in  $f(T)$  gravity. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, v. 83, n. 2, p. 23508, 2011. ISSN 15507998.
- [54] DENT, J. B.; DUTTA, S.; SARIDAKIS, E. N.  $f(T)$  gravity mimicking dynamical dark energy. Background and perturbation analysis. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 1101, n. 1, p. 9, 2011. ISSN 14757516.
- [55] ZHENG, R.; HUANG, Q. G. Growth factor in  $f(T)$  gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 1103, n. 3, p. 2, 2011. ISSN 14757516.
- [56] YANG, J. et al. Thick brane split caused by spacetime torsion. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, v. 85, n. 8, p. 1–10, 2012. ISSN 15507998.
- [57] WANG, J. et al. Braneworld in  $f(T)$  Gravity Theory with Noncanonical Scalar Matter Field. p. 1–11, 2018.
- [58] MENEZES, R. First Order Formalism for Thick Branes in Modified Teleparallel Gravity. *Phys. Rev. D*, v. 89, n. 12, p. 125007, 2014.
- [59] WANG, J. et al. Braneworld in  $f(T)$  Gravity Theory with Noncanonical Scalar Matter Field. *Phys. Rev. D*, v. 98, n. 8, p. 084046, 2018.
- [60] YANG, K. et al. Domain wall brane in a reduced Born-Infeld- $f(T)$  theory. *Phys. Lett. B*, v. 782, p. 170–175, 2018.
- [61] GUO, W. D. et al. Thick brane in mimetic  $f(T)$  gravity. *Phys. Lett. B*, v. 800, p. 135099, 2020.
- [62] LIU, D.; REBOUCAS, M. J. Energy conditions bounds on  $f(T)$  gravity. *Phys. Rev. D*, v. 86, p. 083515, 2012.
- [63] GUO, W. D. et al. Tensor perturbations of  $f(T)$  branes. *Physical Review D*, v. 93, n. 4, p. 1–8, 2016. ISSN 24700029.
- [64] KOBAYASHI, S.; NOMIZU, K. *Foundations of Differential Geometry*. New York: [s.n.], 1964. 349–396 p.

- [65] ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. G. An Introduction to General Relativity. *Lecture Notes in Physics*, v. 721, p. 91–104, 2007. ISSN 00758450.
- [66] RAMOND, P. *Field Theory: A Modern Primer*. 2. ed. Florida: [s.n.], 1990. 353 p. ISBN 0201304503.
- [67] FOCK, V.; IVANENKO, D. On a possible geometric interpretation of relativistic quantum theory. *Z. Phys*, v. 54, p. 798, 1929.
- [68] FOCK, V. Geometrization of the Dirac theory of electrons. *Z. Phys*, v. 57, n. May, p. 261–277, 1929.
- [69] ALDROVANDI, R.; BARROS, P. B.; PEREIRA, J. G. Gravitation as Anholonomy. *General Relativity and Gravitation*, v. 35, n. 6, p. 991–1005, 2003. ISSN 00017701.
- [70] VLADIMIR, N. P.; ANDREI, O. B.; YURI, N. O. *Gauge Approach and Quantization Methods in Gravity Theory*. Moscow Nauka: [s.n.], 2017. 362 p.
- [71] JIMÉNEZ, J. B.; HEISENBERG, L.; KOIVISTO, T. S. The geometrical trinity of gravity. *Universe*, v. 5, n. 7, 2019. ISSN 22181997.
- [72] KONOPLEVA, N. P.; POPOV, V. N. *Gauge Fields*. New York: [s.n.], 1981. 264 p.
- [73] ANDRADE, V. C. de; GUILLEN, L. C.; PEREIRA, J. G. Gravitational energy-momentum density in teleparallel gravity. *Physical Review Letters*, v. 84, n. 20, p. 4533–4536, 2000. ISSN 10797114.
- [74] HAYASHI, K.; SHIRAFUJI, T. New general relativity. *Physical Review D*, v. 19, n. 12, p. 3524–3553, 1979. ISSN 05562821.
- [75] LUCAS, T. G.; PEREIRA, J. G. Hodge dual for soldered bundles. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 42, p. 3, 2008.
- [76] MALUF, J. W. Hamiltonian formulation of the teleparallel description of general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, v. 35, p. 335, 1994.
- [77] MALUF, J. W.; KNEIP, A. Gravitational energy of conical defects. *Journal of Mathematical Physics*, v. 38, p. 458, 1997.
- [78] ANDRADE, V. C. de; GUILLEN, L. C. T.; PEREIRA, J. G. Teleparallel gravity: an overview. *World Scientific*, p. 1022–1023, 2002.
- [79] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *The Classical Theory of Fields*. Pergamon. [S.l.: s.n.], 1975. v. 1. 402 p. ISBN 0080181767.
- [80] BARROW, J. D. *The Constants of Nature; From Alpha to Omega-The Numbers that Encode the Deepest Secrets of the Universe*. New York: [s.n.], 2002.
- [81] GABELLA, M. The Randall-Sundrum Model. *IPPC, EPFL*, 2006.
- [82] SILVA, J. E. G.; ALMEIDA, C. A. S. Scalar field localization on 3-branes placed at a warped resolved conifold. *Phys. Rev. D*, v. 84, p. 085027, 2011.
- [83] COSTA, F. W. V. et al. Gauge fields in a string-cigar braneworld. *Class. Quant. Grav*, v. 30, p. 25005, 2013.

- [84] SILVA, J. E. et al. Regular string-like braneworlds. *European Physical Journal C*, v. 79, n. 1, p. 1–14, 2019. ISSN 14346052.
- [85] OLASAGASTI, I.; VILENKIN, A. Gravity of higher-dimensional global defects. v. 62, n. July, p. 1–7, 2000.
- [86] GIOVANNINI, M.; MEYER, H.; SHAPOSHNIKOV, M. Warped compactification on Abelian vortex in six dimensions. *Nuclear Physics B*, v. 619, p. 615–645, 2001.
- [87] LIU, Y. X. et al. Fermion Localization and Resonances on A de Sitter Thick Brane. *JHEP*, v. 704, p. 97, 2007.
- [88] TINYAKOV, P.; ZULETA, K. Thin-string limit of the 6D stringlike defect model. *Phys. Rev. D*, v. 64, n. June, p. 9–11, 2001.
- [89] BRIHAYE, Y. et al. Inflating baby-Skyrme branes in six dimensions. *Phys. Rev. D*, v. 82, p. 106002, 2010.
- [90] UTIYAMA, R.; DEWITT, B. S. Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields. *Journal of Mathematical Physics*, v. 3, n. 4, p. 608–618, 1962. ISSN 00222488.
- [91] STELLE, K. S. Renormalization of higher-derivative quantum gravity. *Physical Review D*, v. 16, n. 4, p. 953–969, 1977. ISSN 05562821.
- [92] PERLMUTTER, S.; AL et. Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 High-Redshift Supernovae. *The Astrophysical Journal*, v. 517, n. 2, p. 565–586, 1999. ISSN 0004-637X.
- [93] RIESS, A. G.; AL et. The Rise Time of Nearby Type Ia Supernovae. *The Astronomical Journal*, v. 118, n. 6, p. 2675–2688, 1999. ISSN 00046256.
- [94] TONRY, J. L.; AL et. Cosmological Results from High- z Supernovae . *The Astrophysical Journal*, v. 594, n. 1, p. 1–24, 2003. ISSN 0004-637X.
- [95] PERLMUTTER, S.; AL et. Cosmology from Type Ia Supernovae. *Bull. Am. Astron. Soc.*, v. 29, p. 1351, 1998.
- [96] ASTIER, P.; AL et. The supernova legacy survey: Measurement of  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$  and  $w$  from the first year data set. *Astronomy and Astrophysics*, v. 447, n. 1, p. 31–48, 2006. ISSN 14320746.
- [97] EISENSTEIN, D. J.; AL et. Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies. *The Astrophysical Journal*, v. 633, n. 2, p. 560–574, 2005. ISSN 0004-637X.
- [98] SPERGEL, D. N.; AL et. Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe ( WMAP ) Observations: Implications for Cosmology . *The Astrophysical Journal Supplement Series*, v. 170, n. 2, p. 377–408, 2007. ISSN 0067-0049.
- [99] BENNETT, C. L.; AL et. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe ( WMAP ) Observations: Preliminary Maps and Basic Results . *The Astrophysical Journal Supplement Series*, v. 148, n. 1, p. 1–27, 2003. ISSN 0067-0049.

- [100] STOMPOR, R.; AL et. Cosmological Implications of the MAXIMA-1 High-Resolution Cosmic Microwave Background Anisotropy Measurement. *The Astrophysical Journal*, v. 561, n. 1, p. L7–L10, 2001. ISSN 0004637X.
- [101] SPERGEL, D. N.; AL et. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe ( WMAP ) Observations: Determination of Cosmological Parameters . *The Astrophysical Journal Supplement Series*, v. 148, n. 1, p. 175–194, 2003. ISSN 0067-0049.
- [102] KOMATSU, E.; AL et. Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP\*) observations: Cosmological interpretation. *Astrophysical Journal, Supplement Series*, v. 192, n. 2, 2011. ISSN 00670049.
- [103] BRANS, C.; DICKE, R. H. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Physical Review*, v. 124, n. 3, p. 925–935, 1961. ISSN 0031899X.
- [104] BEKENSTEIN, J. D. Relativistic gravitation theory for the modified Newtonian dynamics paradigm. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, v. 70, n. 8, p. 1–28, 2004. ISSN 15502368.
- [105] SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V. F (R) theories of gravity. *Reviews of Modern Physics*, v. 82, n. 1, p. 451–497, 2010. ISSN 00346861.
- [106] BAMBA, K. et al. No further gravitational wave modes in  $F(T)$  gravity. *Phys. Lett. B*, v. 727, p. 194–198, 2013.
- [107] BAZEIA, D. et al. Braneworld solutions for  $F(R)$  models with non-constant curvature. *Phys. Lett. B*, v. 729, p. 127–135, 2014.
- [108] GREMM, M. Four-dimensional gravity on a thick domain wall. *Phys. Lett. B*, v. 478, p. 434–438, 2000.
- [109] AFONSO, V. I. et al.  $f(R)$ -Brane. *Phys. Lett. B*, v. 658, p. 71–76, 2007.
- [110] CAMPOS, A. Critical phenomena of thick branes in warped spacetimes. *Physical Review Letters*, v. 88, n. 14, p. 1–4, 2002. ISSN 00319007.
- [111] ZHAO, Z. H. et al. Effects of temperature on thick branes and the fermion (quasi-)localization. *Journal of High Energy Physics*, v. 1106, n. 6, p. 45, 2011. ISSN 10298479.
- [112] MOREIRA, A. R. P. et al. Thick string-like braneworlds in  $f(T)$  gravity. <https://arxiv.org/abs/2006.06891>.
- [113] KEHAGIAS, A. A Conical Tear Drop as a Vacuum-Energy Drain for the Solution of the Cosmological Constant Problem. *Phys. Lett. B*, v. 600, p. 133, 2004.
- [114] GOGBERASHVILI, M.; AGUILAR, A. H.; MALAGON-MOREJON, D. An Anisotropic Standing Wave Braneworld and Associated Sturm-Liouville Problem. *Class. Quant. Grav.*, v. 29, p. 025007, 2012.