

Métodos Tensoriais para Estimação Cega de Assinaturas Espaciais em Arranjos Multidimensionais de Sensores

Paulo R. B. Gomes, André L. F. de Almeida, João Paulo C. L. da Costa e João C. M. Mota

Resumo—O problema de estimação de assinaturas e frequências espaciais possui um papel importante na área de processamento de sinais em arranjos que culmina em aplicações práticas como radar, sonar e comunicação sem fio. Neste artigo, esse problema é generalizado para o caso em que um arranjo multidimensional (R -D) de sensores é utilizado no receptor. Inicialmente, tensores de covariância são formulados para fontes com diferentes estruturas de covariância e dois algoritmos iterativos para estimação cega de assinaturas espaciais são derivados. O primeiro algoritmo tensorial proposto trata de uma generalização para o caso R -D em que a matriz de covariância das fontes é não-diagonal e desconhecida, enquanto que o segundo algoritmo tensorial proposto é formulado para o caso das fontes serem descorrelacionadas e explora a simetria dual do tensor de covariância. Os resultados obtidos por meio de simulações computacionais mostram um melhor desempenho desses algoritmos quando comparados com os consolidados ESPRIT matricial e tensorial.

Palavras-Chave—Processamento de sinais em arranjos, estimação de assinaturas espaciais, decomposições tensoriais.

Abstract—Spatial signatures and spatial frequencies estimation problem has an important role in array signal processing that culminates in practical applications such as radar, sonar and wireless communication. In this paper, this problem is generalized to the case in which a multidimensional (R -D) sensor array is used in the receiver. Initially, covariance tensors are formulated to sources with different covariance structures and two iterative algorithms for blind spatial signatures estimation are derived. The first tensor-based proposed algorithm is a generalization for the R -D case where the source's covariance matrix is non-diagonal and unknown, while the second tensor-based proposed algorithm is formulated for the case in which the sources are uncorrelated and exploits the dual-symmetry of the covariance tensor. Simulation results show that our proposed schemes outperform the state-of-the-art matrix-based and tensor-based ESPRIT.

Keywords—Array signal processing, spatial signatures estimation, tensor decompositions.

I. INTRODUÇÃO

O problema de estimação de parâmetros em alta resolução possui um papel fundamental em processamento de sinais em arranjos de sensores com aplicação prática em áreas como radar, sonar, comunicações móveis e sismologia. Em

Paulo R. B. Gomes, André L. F. de Almeida e João C. M. Mota, Grupo de Pesquisa em Telecomunicações sem Fio (GTEL), Departamento de Engenharia de Teleinformática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza-CE, Brasil. João Paulo C. L. da Costa, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, Brasília, Brasil. Instituto de Tecnologia da Informação, Universidade Técnica de Ilmenau, Ilmenau, Turíngia, Alemanha. Instituto Fraunhofer de Circuitos Integrados, Erlangen, Baviera, Alemanha. E-mails: {paulo, andre, mota}@gtel.ufc.br e joaopaulo.dacosta@ene.unb.br. Os autores agradecem a FUNCAP, FAPDF, FINATEC, CAPES e CNPq pelo apoio financeiro concedido.

virtude disso, diversas técnicas com o intuito de aumentar a acurácia das estimativas vêm sendo desenvolvidas no decorrer dos anos. No que diz respeito à estimação da direção de chegada, os métodos mais conhecidos são o *Multiple Signal Classification* (MUSIC) [1] e o *Estimation of Signal Parameters by Rotational Invariance Techniques* (ESPRIT) [2]. Tais métodos apresentam boa acurácia, entretanto, não exploram a estrutura multidimensional dos dados recebidos, que podem abranger várias dimensões como espaço, tempo, frequência e polarização. Nesse sentido, as decomposições tensoriais vêm sendo aplicadas com sucesso em processamento de sinais para estimação de parâmetros, pois fornecem melhores condições de identificabilidade em comparação aos métodos matriciais. Outra vantagem dos métodos tensoriais é o “ganho tensorial” que se reflete em estimativas mais precisas devido a eficiente capacidade de rejeição do ruído [3], [4], [5], [6].

No contexto de métodos tensoriais para estimação cega de assinaturas espaciais, a decomposição *Parallel Factor Analysis* (PARAFAC) [7] é a mais popular em virtude de suas condições de unicidade bem definidas [8]. Como proposto em [9], uma técnica iterativa para a decomposição PARAFAC como *Trilinear Alternating Least Squares* (TALS) pode ser aplicada para estimar as direções de chegada das fontes. Soluções baseadas em forma fechada como o *Standard Tensor ESPRIT* (STE) [10] também são atraentes, pois exploram a estrutura multidimensional dos dados de forma não iterativa. Recentemente em [11], foi proposto no contexto de análise de componentes independentes, um algoritmo iterativo baseado no Problema Procrustes Ortogonal, do inglês *Orthogonal Procrustes Problem* (OPP) e fatoração de Khatri-Rao [12] para uma decomposição PARAFAC com simetria dual. Esta solução explora a propriedade de simetria dual do tensor de dados e pode ser aplicada em técnicas de processamento de sinais em arranjos de sensores baseadas em covariância, como será apresentado no decorrer desse trabalho. Uma atenção especial é dada ao método proposto em [13]. Esse método é baseado na decomposição de Tucker [14] de um tensor de quarta ordem e foi formulado para arranjos com estruturas arbitrárias. Tal abordagem dispensa o conhecimento *a priori* da geometria do arranjo de sensores. Entretanto, uma limitação do método em [13] está associada à necessidade de se transmitir a mesma sequência de símbolos em diferentes blocos de tempo que acarreta numa redução considerável no *throughput* do sistema. A ideia é formular um algoritmo receptor para um arranjo multidimensional (R -D) em que as diferentes dimensões do arranjo são exploradas, dispensando desse modo, a repetição

dos símbolos conforme [13].

Neste trabalho, apresentamos duas abordagens tensoriais para o problema de estimação cega de assinaturas espaciais. A partir dos sinais recebidos por um arranjo R -D de sensores, tensores de covariância são formulados e duas soluções são apresentadas para fontes correlacionadas e descorrelacionadas, respectivamente. Para o primeiro cenário, em que a estrutura de covariância das fontes é não-diagonal e desconhecida, o tensor de covariância dos dados recebidos é interpretado como uma decomposição de Tucker de ordem $2R$ e o algoritmo proposto inicialmente em [13], para tensores de quarta ordem, é generalizado para arranjos R -D de sensores. Ao assumirmos fontes descorrelacionadas, o problema recai numa decomposição PARAFAC e um método que explora a simetria dual do tensor de covariância é derivado a partir de [11]. Para cada modelo tensorial, um algoritmo iterativo baseado nos Mínimos Quadrados Alternados, do inglês *Alternating Least Squares* (ALS) é formulado para estimar as assinaturas espaciais das fontes de forma cega. As principais contribuições desse trabalho são: (i) a generalização para arranjos R -D de sensores do método proposto em [13] e (ii) realizar um *link* entre [11] e técnicas baseadas em covariância para estimação de parâmetros em arranjos de sensores. O desempenho desses algoritmos são avaliados por meio de simulações de Monte Carlo e os resultados obtidos mostram um melhor desempenho em comparação ao ESPRIT matricial [2] e tensorial [10].

Este artigo segue a seguinte estrutura: O modelo de sinal para um arranjo R -D de sensores é apresentado na Seção II. Na Seção III o tensor de covariância dos dados recebidos é formulado e os algoritmos para estimação cega de assinaturas espaciais são apresentados. Os resultados de simulação são mostrados e discutidos na Seção IV. Por fim, o artigo é concluído na Seção V.

Notação: Escalares são representados por letras minúsculas a , vetores por letras minúsculas em negrito \mathbf{a} , matrizes por letras maiúsculas em negrito \mathbf{A} e tensores por letras caligráficas em negrito \mathcal{A} . Os símbolos $^T, ^H, \dagger$ e $*$ representam o transposto, conjugado transposto, pseudo-inversa e complexo conjugado, respectivamente. O operador $\text{diag}(\mathbf{a})$ forma uma matriz diagonal a partir do vetor \mathbf{a} . A i -ésima linha de $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I \times R}$ é representada por $\mathbf{A}(i, :)$ em $\mathbb{C}^{1 \times R}$, enquanto sua r -ésima coluna é representada por $\mathbf{A}(:, r)$ em $\mathbb{C}^{I \times 1}$. O operador $\text{vec}(\mathbf{A})$ converte \mathbf{A} em um vetor $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{IR \times 1}$ concatenando as colunas da matriz argumento, enquanto $\text{unvec}_{I \times R}(\mathbf{a})$ é a operação inversa que converte \mathbf{a} como uma matriz $I \times R$. O operador $\|\cdot\|_F$ denota a norma de Frobenius de uma matriz ou tensor. O produto de Kronecker é representado por \otimes . O produto de Khatri-Rao entre as matrizes $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I \times R}$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{J \times R}$, representado por \diamond , é definido como:

$$\mathbf{A} \diamond \mathbf{B} = [\mathbf{A}(:, 1) \otimes \mathbf{B}(:, 1), \dots, \mathbf{A}(:, R) \otimes \mathbf{B}(:, R)]. \quad (1)$$

As operações envolvendo tensores, produto modo- n representado por $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \times_n \mathbf{A}$ e matriciação modo- n representada por $[\mathcal{X}]_{(n)}$ são definidas conforme [15].

II. MODELO DE SINAL

Considere que K observações oriundas da superposição de M fontes de sinais em campo distante e de banda estreita sejam amostradas por um arranjo R -dimensional de sensores

de tamanho $N_1 \times N_2 \times \dots \times N_R$ formado pelo produto externo de R arranjos lineares uniformes de tamanho N_r cada, em que $r = 1, \dots, R$. A matriz $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{N \times K}$ que contém as amostras coletadas na saída do arranjo de sensores é dada por [10]

$$\mathbf{X} = \left(\mathbf{A}^{(1)} \diamond \mathbf{A}^{(2)} \dots \diamond \mathbf{A}^{(R)} \right) \mathbf{S} + \mathbf{V}, \quad (2)$$

em que

- $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(1)} \diamond \mathbf{A}^{(2)} \dots \diamond \mathbf{A}^{(R)} \in \mathbb{C}^{N \times M}$ é a matriz de assinaturas espaciais do arranjo R -D para $r = 1, \dots, R$ e $N = \prod_{r=1}^R N_r$;
- $\mathbf{A}^{(r)} = [\mathbf{a}_1^{(r)}, \dots, \mathbf{a}_M^{(r)}] \in \mathbb{C}^{N_r \times M}$ é a matriz de assinaturas espaciais referente à r -ésima dimensão;
- $\mathbf{a}_m^{(r)} = [1 \quad e^{j\mu_m^{(r)}} \quad e^{j2\mu_m^{(r)}} \quad \dots \quad e^{j(N_r-1)\mu_m^{(r)}}]^T \in \mathbb{C}^{N_r \times 1}$ é a resposta do arranjo na r -ésima dimensão referente à m -ésima frente de onda ($m = 1, \dots, M$) que é função das frequências espaciais $\mu_m^{(r)}$;
- $\mathbf{S} = [\mathbf{s}(1), \dots, \mathbf{s}(K)] \in \mathbb{C}^{M \times K}$ é a matriz que contém os sinais transmitidos pelas fontes;
- $\mathbf{V} = [\mathbf{v}(1), \dots, \mathbf{v}(K)] \in \mathbb{C}^{N \times K}$ é o termo de ruído aditivo Gaussiano branco assumido descorrelacionado em relação aos sinais das fontes.

A partir de (2), a matriz de covariância amostral $\hat{\mathbf{R}} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ dos sinais recebidos no arranjo de sensores é dada por

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}} &\triangleq \frac{1}{K} \mathbf{X} \mathbf{X}^H \approx \mathbf{A} \mathbf{R}_s \mathbf{A}^H + \sigma_v^2 \mathbf{I} \\ &\approx \left(\mathbf{A}^{(1)} \diamond \mathbf{A}^{(2)} \dots \diamond \mathbf{A}^{(R)} \right) \mathbf{R}_s \left(\mathbf{A}^{(1)} \diamond \mathbf{A}^{(2)} \dots \diamond \mathbf{A}^{(R)} \right)^H + \sigma_v^2 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3)$$

em que $\mathbf{R}_s = \frac{1}{K} \mathbf{S} \mathbf{S}^H$ é a matriz de covariância amostral dos sinais das fontes e σ_v^2 é a variância do ruído.

III. MÉTODOS TENSORIAIS PARA ESTIMAÇÃO CEGA DE ASSINATURAS ESPACIAIS

Nesta seção, apresentamos dois algoritmos iterativos para estimação cega de assinaturas espaciais em arranjos R -D de sensores. Inicialmente, uma estrutura multidimensional é formulada a partir da matriz de covariância dos dados recebidos. Em seguida, propomos uma generalização para o caso R -D do método proposto em [13], formulado inicialmente para tensores de quarta ordem. Por fim, realizamos um *link* entre o método proposto em [11] e o problema de estimação de assinaturas espaciais baseado em covariância. Além disso, as principais diferenças entre os algoritmos em relação à estrutura de covariância das fontes e exploração da simetria dual do tensor de dados também são discutidas.

A. Formulação do Tensor de Covariância

Com o intuito de explorar a estrutura multidimensional do sinal recebido, interpretamos aqui que o termo livre de ruído $\mathbf{R}_o = \hat{\mathbf{R}} - \sigma_v^2 \mathbf{I} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ da matriz de covariância (3), representa uma forma matriciada multimodo do tensor de covariância $\mathcal{R}_o \in \mathbb{C}^{N_1 \times N_2 \times \dots \times N_R \times N_1 \times N_2 \times \dots \times N_R}$ definido como

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_o &= \mathcal{R}_s \times_1 \mathbf{A}^{(1)} \times_2 \mathbf{A}^{(2)} \dots \times_R \mathbf{A}^{(R)} \\ &\quad \times_{R+1} \mathbf{A}^{(1)*} \times_{R+2} \mathbf{A}^{(2)*} \dots \times_{2R} \mathbf{A}^{(R)*}, \end{aligned} \quad (4)$$

em que \mathcal{R}_s é o tensor de covariância dos sinais das fontes que possui $2R$ dimensões, cada uma com tamanho M . Note

que esse tensor possui simetria dual, ou seja, a matriz fator relacionada à $(R+r)$ -ésima dimensão é igual a $\mathbf{A}^{(r)*}$ e $N_r = N_{R+r}$ ($r = 1, \dots, R$). O m -ésimo *slice* frontal de \mathcal{R}_s é uma matriz diagonal cuja diagonal principal é dada pela m -ésima coluna de \mathbf{R}_s . Como exemplo, considerando $R = 2$ por simplicidade de notação, a seguinte expressão satisfaz a relação citada anteriormente:

$$\mathcal{R}_s(:, :, m, m) = \text{diag}(\mathbf{R}_s(:, m)) \quad (5)$$

$$m = 1, \dots, M.$$

em que a matriz $\mathcal{R}_s(:, :, m, m) \in \mathbb{C}^{M \times M}$ denota o m -ésimo *slice* frontal de \mathcal{R}_s obtido fixando seus dois últimos modos. O tensor \mathcal{R}_o segue uma decomposição de Tucker [14] simétrica de ordem $2R$ com matrizes fatores $\mathbf{A}^{(r)}$ e $\mathbf{A}^{(r)*}$ para $r = 1, \dots, R$ e tensor núcleo \mathcal{R}_s , respectivamente.

Considerando agora o caso determinístico em que as fontes são descorrelacionadas e possuem variância unitária, o modelo tensorial (4) pode ser reescrito como

$$\mathcal{R}_o = \mathcal{I}_{2R, M} \times_1 \mathbf{A}^{(1)} \times_2 \mathbf{A}^{(2)} \dots \times_R \mathbf{A}^{(R)} \times_{R+1} \mathbf{A}^{(1)*} \times_{R+2} \mathbf{A}^{(2)*} \dots \times_{2R} \mathbf{A}^{(R)*}, \quad (6)$$

em que $\mathcal{I}_{2R, M}$ é um tensor identidade de ordem $2R$ em que cada dimensão possui tamanho M . Os elementos de $\mathcal{I}_{2R, M}$ são iguais a 1 quando todos os índices são iguais e 0 caso contrário. Neste caso, o tensor de covariância \mathcal{R}_o segue uma decomposição PARAFAC [7] simétrica de ordem $2R$.

De forma geral, a decomposição de Tucker não impõe restrições à estrutura do tensor núcleo, o que torna esse modelo mais flexível. No contexto desse trabalho, essa característica reflete numa estrutura arbitrária e desconhecida para a covariância das fontes \mathbf{R}_s que também pode ser estimada a partir de (4). Em contraste, a decomposição PARAFAC em (6) denota um caso particular da decomposição de Tucker quando as fontes são descorrelacionadas.

B. Algoritmo ALS-Tucker

Nosso objetivo é estimar de forma cega as matrizes de assinaturas espaciais $\mathbf{A}^{(r)}$ e $\mathbf{A}^{(r)*}$ ($r = 1, \dots, R$), referentes às diferentes dimensões do arranjo de sensores a partir do tensor de covariância \mathcal{R}_o . Por simplicidade de notação, consideramos a partir desse ponto que $\mathbf{A}^{(R+r)} = \mathbf{A}^{(r)*}$. Em notação matricial, a decomposição de Tucker do tensor de covariância (4), admite a seguinte fatoração em função de suas matrizes fatores e do tensor núcleo [15]:

$$[\mathcal{R}_o]_{(r)} = \mathbf{A}^{(r)} \mathbf{\Delta}^{(r)}, \quad (7)$$

em que por simplicidade de notação, definimos

$$\mathbf{\Delta}^{(r)} = [\mathcal{R}_s]_{(r)} (\mathbf{A}^{(2R)} \otimes \dots \otimes \mathbf{A}^{(r+1)} \otimes \mathbf{A}^{(r-1)} \otimes \dots \otimes \mathbf{A}^{(1)})^T, \quad (8)$$

em que $[\mathcal{R}_o]_{(r)}$ e $[\mathcal{R}_s]_{(r)} \in \mathbb{C}^{M \times M \times \dots \times M}$, $r = 1, \dots, 2R$, denotam as formas matriciadas de \mathcal{R}_o e \mathcal{R}_s no r -ésimo modo, respectivamente.

A partir das formas matriciadas de \mathcal{R}_o um algoritmo iterativo baseado nos Mínimos Quadrados Alternados, do inglês *Alternating Least Squares* (ALS) é formulado para estimar as matrizes de interesse. Uma estimativa para a matriz de assinaturas espaciais $\hat{\mathbf{A}}^{(r)}$ ($r = 1, \dots, 2R$) referente

à r -ésima dimensão do tensor de dados recebido é obtida resolvendo o seguinte problema de mínimos quadrados:

$$\hat{\mathbf{A}}^{(r)} = \arg \min_{\mathbf{A}^{(r)}} \left\| [\mathcal{R}_o]_{(r)} - \mathbf{A}^{(r)} \mathbf{\Delta}^{(r)} \right\|_F^2, \quad (9)$$

cujas solução analítica é dada por

$$\hat{\mathbf{A}}^{(r)} = [\mathcal{R}_o]_{(r)} (\mathbf{\Delta}^{(r)})^\dagger. \quad (10)$$

Conforme discutido na Seção III-A, a decomposição de Tucker não impõe restrições à estrutura do tensor núcleo e sua estimativa torna-se necessária. Sendo \mathbf{R}_s uma matriz com estrutura arbitrária e desconhecida, o seguinte problema de mínimos quadrados é formulado a partir da vetorização da matriz de covariância $\hat{\mathbf{R}}$:

$$\text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_s) = \arg \min_{\mathbf{R}_s} \left\| \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}) - (\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A}) \text{vec}(\mathbf{R}_s) \right\|_F^2, \quad (11)$$

e uma estimativa para $\hat{\mathbf{R}}_s$ é dada por

$$\text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_s) = (\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A})^\dagger \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}), \quad (12)$$

em que $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(1)} \diamond \mathbf{A}^{(2)} \dots \diamond \mathbf{A}^{(R)} \in \mathbb{C}^{N \times M}$.

Sendo as Equações (10) e (12) funções não-lineares nos parâmetros a serem estimados, o problema de estimação cega de assinaturas espaciais pode ser resolvido utilizando uma solução iterativa clássica baseada em ALS [16], [17]. A ideia básica do algoritmo é estimar uma matriz fator enquanto as outras permanecem fixas com os valores obtidos em iterações anteriores. Este procedimento é repetido até a convergência do algoritmo. O pseudo-código com a generalização para arranjos R-D do método proposto em [13] é apresentado a seguir:

Pseudo-Código do Algoritmo ALS-Tucker

-
1. Inicialize $\hat{\mathbf{A}}^{(r)} \in \mathbb{C}^{N_r \times M}$ para $r = 2, \dots, 2R$ e o tensor núcleo $\hat{\mathcal{R}}_s$ de forma aleatória.
 2. Para $r = 1, \dots, 2R$
 - Obtenha uma estimativa para $\hat{\mathbf{A}}^{(r)}$:

$$\hat{\mathbf{A}}^{(r)} = [\mathcal{R}]_{(r)} (\mathbf{\Delta}^{(r)})^\dagger.$$
 - **observação:** A matriz $\mathbf{\Delta}^{(r)}$ é atualizada fixando $\hat{\mathbf{A}}^{(r)}$ calculado na dimensão anterior.
 - fim
 3. Obtenha uma estimativa para $\hat{\mathbf{R}}_s$:

$$\text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_s) = (\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A})^\dagger \text{vec}(\hat{\mathbf{R}});$$

$$\hat{\mathbf{R}}_s = \text{unvec}_{M \times M}(\text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_s)).$$
 4. Reconstrua $\hat{\mathcal{R}}_s$ a partir da matriz $\hat{\mathbf{R}}_s$.
 5. Repita os passos 2-4 até a convergência.
-

Nessa abordagem, as matrizes fatores são tratadas como variáveis independentes, ou seja, a simetria dual do tensor de covariância não é explorada. Nesse caso, uma estimativa final para a matriz de assinaturas espaciais referente à r -ésima dimensão do arranjo é dada por:

$$\hat{\mathbf{A}}_{\text{final}}^{(r)} = \frac{\hat{\mathbf{A}}^{(r)} + \hat{\mathbf{A}}^{(R+r)*}}{2}. \quad (13)$$

C. Algoritmo ALS-ProKraft

Nesta seção, fazemos um *link* entre o algoritmo ALS-ProKraft proposto em [11] e o problema de estimação cega de assinaturas espaciais baseado em covariância. A ideia principal desse algoritmo é explorar a estrutura simétrica da decomposição PARAFAC descrita em (6). A seguir, o algoritmo é formulado para o contexto desse trabalho. Uma descrição mais detalhada sobre o método pode ser encontrada na referência original.

A forma matriciada multimodo da decomposição PARAFAC em (6) pode ser reescrita como segue

$$\mathbf{R}_{\text{mm}} = \left(\mathbf{A}^{(1)} \diamond \dots \diamond \mathbf{A}^{(R)} \right) \left(\mathbf{A}^{(1)} \diamond \dots \diamond \mathbf{A}^{(R)} \right)^{\text{H}}, \quad (14)$$

que assume a seguinte fatoração

$$\mathbf{R}_{\text{mm}} = \mathbf{R}_{\text{mm}}^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\mathbf{R}_{\text{mm}}^{\frac{1}{2}} \right)^{\text{H}}, \quad (15)$$

em que $\mathbf{R}_{\text{mm}}^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{C}^{N \times M}$ pode ser obtida a partir da decomposição em valores singulares da matriz \mathbf{R}_{mm} dada por

$$\mathbf{R}_{\text{mm}} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^{\text{H}}, \quad (16)$$

e obedece a seguinte estrutura

$$\mathbf{R}_{\text{mm}}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{U}^{[M]} \cdot \mathbf{\Sigma}^{[M]} \cdot \mathbf{T}^{\text{H}} = \left(\mathbf{A}^{(1)} \diamond \dots \diamond \mathbf{A}^{(R)} \right), \quad (17)$$

em que $\mathbf{U}^{[M]} \in \mathbb{C}^{N \times M}$ é formada pelas primeiras M colunas da matriz \mathbf{U} e $\mathbf{\Sigma}^{[M]} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ é uma matriz diagonal que contém os M valores singulares dominantes de \mathbf{R}_{mm} . A matriz \mathbf{T} representa um fator de rotação unitário.

A Equação (17) descreve um Problema Procrustes Ortogonal, do inglês *Orthogonal Procrustes Problem* (OPP) [18], em que \mathbf{T} é uma matriz de transformação que mapeia $\mathbf{U}^{[M]} \cdot \mathbf{\Sigma}^{[M]}$ para $\left(\mathbf{A}^{(1)} \diamond \dots \diamond \mathbf{A}^{(R)} \right)$ tal que $\mathbf{U}^{[M]} \cdot \mathbf{\Sigma}^{[M]} \cdot \mathbf{T}^{\text{H}} = \left(\mathbf{A}^{(1)} \diamond \dots \diamond \mathbf{A}^{(R)} \right)$. De acordo com [18] uma estimativa eficiente para \mathbf{T} é obtida minimizando a norma de Frobenius do erro residual:

$$\arg \min_{\mathbf{T}} \left\| \mathbf{U}^{[M]} \cdot \mathbf{\Sigma}^{[M]} \cdot \mathbf{T}^{\text{H}} - \left(\mathbf{A}^{(1)} \diamond \dots \diamond \mathbf{A}^{(R)} \right) \right\|_{\text{F}}. \quad (18)$$

Este problema pode ser resolvido usando as bases da decomposição em valores singulares da matriz

$$\left(\mathbf{A}^{(1)} \diamond \dots \diamond \mathbf{A}^{(R)} \right)^{\text{H}} \cdot \mathbf{U}^{[M]} \cdot \mathbf{\Sigma}^{[M]} = \mathbf{U}_P \cdot \mathbf{\Sigma}_P \cdot \mathbf{V}_P^{\text{H}}, \quad (19)$$

levando à seguinte solução conforme [18]

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{U}_P \cdot \mathbf{V}_P^{\text{H}}. \quad (20)$$

A partir das Equações (17) e (20), um algoritmo ALS iterativo é formulado para estimar as assinaturas espaciais a partir da decomposição PARAFAC (6). Primeiro, estimativas individuais para cada matriz fator $\hat{\mathbf{A}}^{(r)}$, $r = 1, \dots, R$, são obtidas aplicando a Fatorização Khatri-Rao para Mínimos Quadrados, do inglês *Least Squares Khatri-Rao Factorization* (LS-KRF) multidimensional na matriz total $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}^{(1)} \diamond \hat{\mathbf{A}}^{(2)} \dots \diamond \hat{\mathbf{A}}^{(R)}$. Para maiores detalhes e acesso ao pseudo-código desse algoritmo consultar a referência original [11]. Em seguida, $\hat{\mathbf{T}}$ é obtida a partir de (20). O pseudo-código do algoritmo ALS-ProKraft para estimação cega de assinaturas espaciais é apresentado a seguir:

Pseudo-Código do Algoritmo ALS-ProKraft

-
- $i = 0$; Inicialize $\hat{\mathbf{T}}_{(i=0)} = \mathbf{I}_M$.
 1. Obtenha $\mathbf{U}^{[M]}$ e $\mathbf{\Sigma}^{[M]}$ a partir da SVD de \mathbf{R}_{mm} .
 2. $i = i + 1$;
 3. Obtenha as estimativas para $\hat{\mathbf{A}}_{(i)}^{(r)}$ para $r = 1, \dots, R$ aplicando o algoritmo LS-KRF multidimensional em $\mathbf{U}^{[M]} \cdot \mathbf{\Sigma}^{[M]} \cdot \hat{\mathbf{T}}_{(i-1)}^{\text{H}}$.
 4. Calcule a decomposição em valores singulares da matriz $\left(\hat{\mathbf{A}}_{(i)}^{(1)} \diamond \dots \diamond \hat{\mathbf{A}}_{(i)}^{(R)} \right)^{\text{H}} \cdot \mathbf{U}^{[M]} \cdot \mathbf{\Sigma}^{[M]} = \mathbf{U}_P \cdot \mathbf{\Sigma}_P \cdot \mathbf{V}_P^{\text{H}}$ e obtenha $\hat{\mathbf{T}}_{(i)} = \mathbf{U}_P \cdot \mathbf{V}_P^{\text{H}}$.
 5. Repita os passos 2-4 até a convergência.
-

Nas duas abordagens apresentadas, as estimativas finais para as matrizes de assinaturas espaciais são obtidas após a convergência dos algoritmos, declarada quando $|e_{(i)} - e_{(i-1)}| \leq 10^{-6}$, em que $e_{(i)}$ denota o erro residual na i -ésima iteração definido como

$$e_{(i)} = \left\| \mathbf{R} - \hat{\mathbf{R}}_{(i)} \right\|_{\text{F}}^2, \quad (21)$$

em que $\hat{\mathbf{R}}_{(i)}$ é o tensor de covariância reconstruído a partir das matrizes fatores e do tensor núcleo estimados. Como o algoritmo ALS-ProKraft explora a simetria dual do tensor de dados, o procedimento (13) é desnecessário nesse caso.

IV. SIMULAÇÕES

Nesta seção, apresentamos alguns resultados de simulação e avaliamos o desempenho dos algoritmos tensoriais propostos para arranjos R -D ALS-Tucker e ALS-ProKraft. Os resultados obtidos representam a média de 1000 realizações de Monte Carlo independentes. Em cada experimento é considerado um arranjo retangular uniforme posicionado no plano x - z . A m -ésima frente de onda possui direção de chegada $\{\alpha_m, \beta_m\}_{m=1}^M$, em que α_m e β_m são os ângulos de elevação e azimute, respectivamente.

Na Figura 1, avaliamos o desempenho em termos da raiz quadrada do erro quadrático médio, do inglês *Root Mean Square Error* (RMSE) das frequências espaciais estimadas $\hat{\mu}_m^{(r)}$ em função da relação sinal-ruído (SNR). No caso de arranjos retangulares uniformes, as relações entre direção de chegada e frequências espaciais são dadas por $\mu_m^{(1)} = \frac{2\pi \cdot d^{(1)} \cdot \cos \alpha_m}{\lambda}$ e $\mu_m^{(2)} = \frac{2\pi \cdot d^{(2)} \cdot \sin \alpha_m \cdot \cos \beta_m}{\lambda}$, em que $d^{(r)}$ é a distância entre os sensores na r -ésima dimensão. Em cada experimento consideramos modulação BPSK, $N = 64$ sensores (i.e. N_1 e N_2 iguais a 8) e que a matriz de covariância dos dados recebidos (3) é calculada a partir de um número reduzido de $K = 10$ amostras. O RMSE total é definido como:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\text{E} \left\{ \sum_{r=1}^R \sum_{m=1}^M \left(\mu_m^{(r)} - \hat{\mu}_m^{(r)} \right)^2 \right\}}. \quad (22)$$

Nota-se que os algoritmos ALS-Tucker e ALS-ProKraft apresentam desempenhos equivalentes. Entretanto, quando comparados aos métodos matricial *Standard ESPRIT* (SE) [2] e tensorial *Standard Tensor ESPRIT* (STE) [10], eles apresentam maior acurácia em praticamente todo o intervalo de SNR considerado. É importante ressaltar que no ALS-Tucker, a matriz de covariância das fontes possui uma estrutura

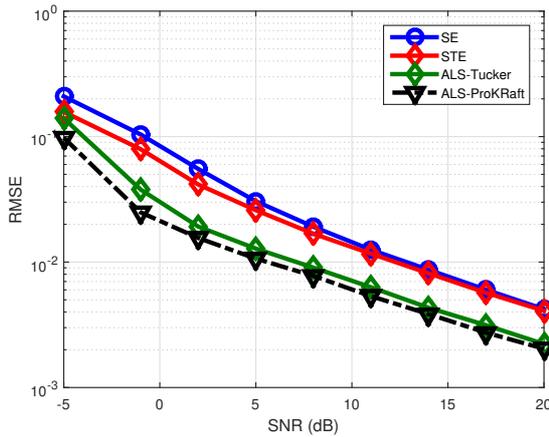
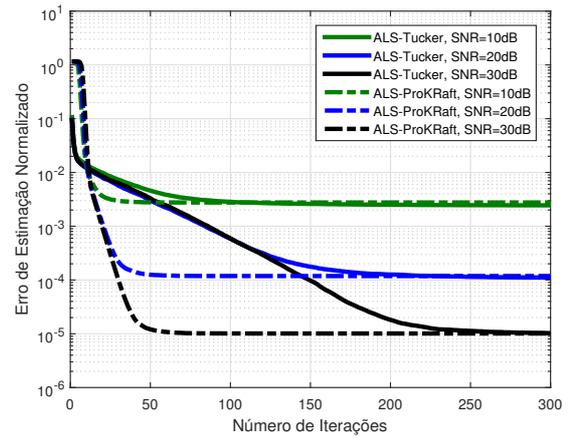
Fig. 1. RMSE total vs. SNR ($N = 64$, $K = 10$, $\{30^\circ, 55^\circ\}$ e $\{45^\circ, 60^\circ\}$).

Fig. 2. Convergência dos algoritmos ALS-Tucker e ALS-ProKRaft.

arbitrária e desconhecida obtida a partir de 10 amostras BPSK aleatórias que seguem uma distribuição normal, enquanto que no ALS-ProKRaft é utilizada uma sequência de Hadamard que garante a ortogonalidade entre os sinais das fontes, o que torna a abordagem via decomposição de Tucker mais atraente em cenários em que a decorrelação das fontes não é garantida.

Na Figura 2, avaliamos a convergência dos algoritmos ALS-Tucker e ALS-ProKRaft. Nesse experimento, os valores medianos do erro de estimação normalizado $e_{(i)}/N^{(2R)}$ são plotados em função do número de iterações para diferentes valores de SNR. Nota-se que o algoritmo ALS-ProKRaft apresenta uma convergência rápida em comparação ao ALS-Tucker. Esse comportamento é esperado, pois o ALS-ProKRaft explora a simetria dual do tensor de dados que resulta em estimar metade das matrizes fatores em relação à abordagem ALS-Tucker.

V. CONCLUSÃO

Neste artigo, apresentamos duas abordagens tensoriais para o problema de estimação cega de assinaturas espaciais, baseadas nas decomposições de Tucker e PARAFAC. Inicialmente, propomos uma generalização para arranjos R -D de um método proposto na literatura para tensores de quarta ordem. Em seguida, realizamos um *link* entre o algoritmo ALS-ProKRaft e o problema de estimação de assinaturas espaciais baseado em covariância. A principal diferença entre os métodos se traduz na estrutura de covariância das fontes de modo que, em cenários realísticos, em que a covariância é calculada a partir de um número reduzido de amostras o algoritmo ALS-Tucker torna-se preferível, pois assume uma estrutura de covariância arbitrária e desconhecida para os sinais das fontes. Em contrapartida, quando as fontes são decorrelacionadas, a exploração da simetria dual do tensor de dados no ALS-ProKRaft proporciona uma acurácia de estimação equivalente ao método anterior com um número menor de iterações. Quando confrontados com outras técnicas com solução fechada baseadas em ESPRIT, os algoritmos iterativos se mostraram mais eficientes, apresentando ganhos significativos em termos do erro de estimação.

REFERÊNCIAS

- [1] R. O. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. 34, no. 3, pp. 276-280, 1986.
- [2] R. Roy and T. Kailath, "ESPRIT-Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques," *IEEE Trans. on Acoustic Speech and Signal Processing*, vol. 37, no. 7, pp. 984-995, 1989.
- [3] J. P. C. L. da Costa, F. Roemer, M. Haardt, and R. T. de Souza Jr, "Multi-dimensional model order selection," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2011, no. 1, pp. 1-13, 2011.
- [4] F. Roemer, "Advanced algebraic concepts for efficient multi-channel signal processing," PhD thesis, Ilmenau University of Technology, Ilmenau, 2013.
- [5] J. P. C. L. da Costa, K. Liu, H. C. So, F. Roemer, M. Haardt, and S. Schwarz, "Multidimensional prewhitening for enhanced signal reconstruction and parameter estimation in colored noise with Kronecker correlation structure," *Signal Processing*, Elsevier publisher, vol. 93, Iss 11, Nov 2013, pp. 3209-3226.
- [6] J. P. C. L. da Costa, "Parameter Estimation Techniques for Multi-Dimensional Array Signal Processing," Shaker Publisher, Aachen, Germany, Mar. 2010.
- [7] R. Harshman, "Foundations of the PARAFAC procedure: models and conditions for an explanatory multimodal factor analysis," *UCLA Working Papers in Phonetics*, vol. 16, no. 1, 1970.
- [8] R. A. Harshman and M. E. Lundy, "Uniqueness proof for a family of models sharing features of Tucker's three-mode factor analysis and PARAFAC/CANDECOMP," *Psychometrika*, vol. 61, pp. 133-154, 1996.
- [9] N. D. Sidiropoulos, R. Bro and G. B. Giannakis, "Parallel Factor Analysis in Sensor Array Processing," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 48, no. 8, p. 2377-2388, 2000.
- [10] M. Haardt, F. Roemer and G. Del Galdo, "Higher-Order SVD-Based subspace estimation to improve the parameter estimation accuracy in multidimensional harmonic retrieval problems," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 7, p. 3198-3213, 2008.
- [11] M. Weis, F. Roemer, M. Haardt, and P. Husar, "Dual-Symmetric Parallel Factor Analysis using Procrustes Estimation and Khatri-Rao Factorization," *20th EUSIPCO European Signal Processing Conference*, Bucharest, Romania, Aug. 2012.
- [12] F. Roemer and M. Haardt, "Tensor-Based channel estimation (TENICE for two-way relaying with multiple antennas and spatial reuse)," *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech and Sig. Proc. (ICASSP 2009)*, Taipei, Taiwan, Apr. 2019.
- [13] Paulo R. B. Gomes, André L. F. de Almeida and João Paulo C. L. da Costa, "Fourth-order tensor method for blind spatial signature estimation," *IEEE International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing (ICASSP'14)*, May. 2014, Florence, Italy.
- [14] L. R. Tucker, "Implications of factor analysis of three-way matrices for measurement of change," *Problems in Measuring Change*, C. W. Harris, ed., University of Wisconsin Press, 1963, p. 122-137.
- [15] T. G. Kolda and B. W. Bader, "Tensor decompositions and applications," *Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 51, no. 3, p. 45, 2009.
- [16] R. Bro, "Multi-way analysis in the food industry: Models, algorithms and applications," PhD. dissertation, University of Amsterdam, Amsterdam, 1998.
- [17] A. Smilde, R. Bro and P. Geladi, "Multi-way analysis," Wiley, 2004.
- [18] P. H. Schonemann, "A generalized solution of the orthogonal Procrustes problem," *Psychometrika*, vol. 31, no. 1, pp. 1-10, Mar 1966.