



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MICHAEL DA SILVA INÁCIO

A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

FORTALEZA

2020

MICHAEL DA SILVA INÁCIO

A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marco Magliaro

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

I32d

Inácio, Michael da Silva.

A desigualdade isoperimétrica / Michael da Silva Inácio. – 2020.

30 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Curso de Matemática, Fortaleza, 2020.

Orientação: Prof. Dr. Marco Magliaro.

1. Desigualdade Isoperimétrica. 2. Desigualdades. 3. Séries de Fourier. 4. Medida de Lebesgue. I.
Título.

CDD 510

MICHAEL DA SILVA INÁCIO

A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em: 19 de Outubro de 2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marco Magliaro (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Vincent Jean Henri Grandjean
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha avó, por ser a principal responsável
pela pessoa que me tornei.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Marco Magliaro por ter sido um dos melhores professores que já tive e por me orientar neste trabalho.

À minha avó Maria Leuda por ter cuidado de mim por tantos anos e por sempre incentivar meus estudos.

À minha mãe Karla Jaqueline por me apoiar e me ajudar com tudo que precisei fazendo o melhor que podia por mim.

Aos amigos da graduação pela ajuda ao longo do curso e por compartilhar seus conhecimentos comigo.

Ao Doutorando em Engenharia Elétrica, Ednardo Moreira Rodrigues, e seu assistente, Alan Batista de Oliveira, aluno de graduação em Engenharia Elétrica, pela adequação do *template* utilizado neste trabalho para que o mesmo ficasse de acordo com as normas da biblioteca da Universidade Federal do Ceará (UFC).

“Se vi mais longe foi por estar de pé sobre
ombros de gigantes.”

(Isaac Newton)

RESUMO

Este trabalho apresenta uma demonstração da Desigualdade Isoperimétrica em sua forma clássica utilizando algumas propriedades das séries de Fourier. Além disso, apresenta a demonstração de uma forma generalizada da Desigualdade Isoperimétrica utilizando a desigualdade de Brunn-Minkowski e algumas propriedades da medida de Lebesgue n -dimensional.

Palavras-chave: Desigualdade Isoperimétrica. Desigualdades. Séries de Fourier. Medida de Lebesgue.

ABSTRACT

This work presents a proof of the Isoperimetric Inequality in its classic form using some properties of the Fourier series. In addition, it presents the proof of a generalized form of Isoperimetric Inequality using Brunn-Minkowski inequality and some properties of the n -dimensional Lebesgue measure.

Keywords: Isoperimetric Inequality. Inequalities. Fourier Series. Lebesgue Measure.

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{R}^n	Conjunto das n -uplas de números reais
$f(x^+)$	Limite lateral da função f por valores maiores que x
$f(x^-)$	Limite lateral da função f por valores menores que x
$d(x, y)$	Distância entre os pontos x e y em \mathbb{R}^n
\bar{A}	Fecho do conjunto A
A°	Interior do conjunto A
∂A	Fronteira do conjunto A
B_r	Bola em \mathbb{R}^n de raio r centrada na origem
Γ	Função Gama de Euler

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	SÉRIES DE FOURIER	12
3	A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA	16
4	A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA EM \mathbb{R}^n	19
5	CONCLUSÃO	29
	REFERÊNCIAS	30

1 INTRODUÇÃO

O problema isoperimétrico é um problema do Cálculo das Variações que, curiosamente, no poema épico latino *Eneida*, tem suas origens ligadas à fundação de Cartago por Elisa, conhecida como Dido, irmã do rei Pigmalião de Tiro. Diz a lenda que ela, em uma barganha, obteve a terra que ela conseguisse cercar com o couro de um boi. Então ela cortou o couro em tiras muito finas e cercou um grande terreno em forma semicircular, onde foi construída a cidade. Ela parecia conhecer o problema isoperimétrico, pois escolheu a figura que cerca a maior área possível com um perímetro fixado. Mais especificamente, o problema isoperimétrico afirma que se L é o comprimento de uma curva plana, simples e fechada e A a área que ela cerca, então vale a desigualdade $L^2 \geq 4\pi A$, ocorrendo a igualdade se, e somente se, a curva for um círculo.

Muitos matemáticos se interessaram pelo problema isoperimétrico, seja por interesse geométrico, seja pelas aplicações, e isso levou a várias generalizações em muitas direções, como a desigualdade isoperimétrica para superfícies. Um problema que deriva do teorema isoperimétrico é o de determinar entre todos os polígonos com k lados e um perímetro fixado aquele que possui maior área. A resposta é conhecida: são os polígonos regulares. A desigualdade isoperimétrica também tem ligação com algumas desigualdades analíticas como as desigualdades de Wirtinger e as desigualdades de Sobolev. Apesar da sua fácil formulação, o problema isoperimétrico levou cerca de dois mil anos para ter uma demonstração adequada e as primeiras provas rigorosas foram dadas por Weierstrass e F. Edler utilizando o cálculo, que foi criado somente no século XVII. Desde então, muitas outras provas foram apresentadas.

Quanto às demonstrações puramente geométricas, os gregos antigos conheciam o problema isoperimétrico e deram provas para o resultado, mas as demonstrações da época não atendem aos padrões matemáticos atuais. Jakob Steiner percebeu isso e, na tentativa de provar a desigualdade, utilizou um método baseado em transformar uma figura não circular em outra com mesmo perímetro e área maior. Apesar da sua ideia perspicaz, a prova de Steiner era incompleta. Finalmente, mesmo contrário às expectativas, houveram provas para o problema isoperimétrico dentro da geometria elementar.

Neste trabalho, estudaremos a desigualdade isoperimétrica da seguinte maneira: no capítulo 2, apresentaremos algumas noções básicas sobre as séries de Fourier e a Identidade de Parseval. No capítulo 3, apresentaremos uma prova da desigualdade

isoperimétrica no plano usando a teoria elementar das séries de Fourier. No capítulo 4, apresentaremos alguns conceitos relacionados à teoria geométrica da medida, a desigualdade de Brunn-Minkowski e daremos uma demonstração para a desigualdade isoperimétrica em \mathbb{R}^n .

2 SÉRIES DE FOURIER

Em sua busca pela resolução do problema da condução do calor, Fourier desenvolveu um método baseado na tentativa de escrever funções periódicas na forma de séries trigonométricas. As descobertas de Fourier trouxeram como consequência as séries de Fourier, cujas algumas propriedades serão utilizadas mais adiante na demonstração da desigualdade isoperimétrica. A seguir, introduziremos o conceito de séries de Fourier.

Definição 1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável e $2L$ -periódica. Definimos os *coeficientes de Fourier* de f como

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt, \quad \text{com } n \geq 0$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt, \quad \text{com } n \geq 1.$$

Observe que os coeficientes de Fourier estão bem definidos. De fato, como f é integrável e como as funções cosseno e seno são integráveis, os produtos de f pelo cosseno e pelo seno são produtos de funções integráveis e, portanto, também são integráveis.

Definição 2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável e $2L$ -periódica. Definimos e denotamos a *série de Fourier* de f por

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right].$$

Exemplo 1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t$, para $-\pi < t \leq \pi$ e 2π -periódica. Então

os coeficientes de Fourier de f são

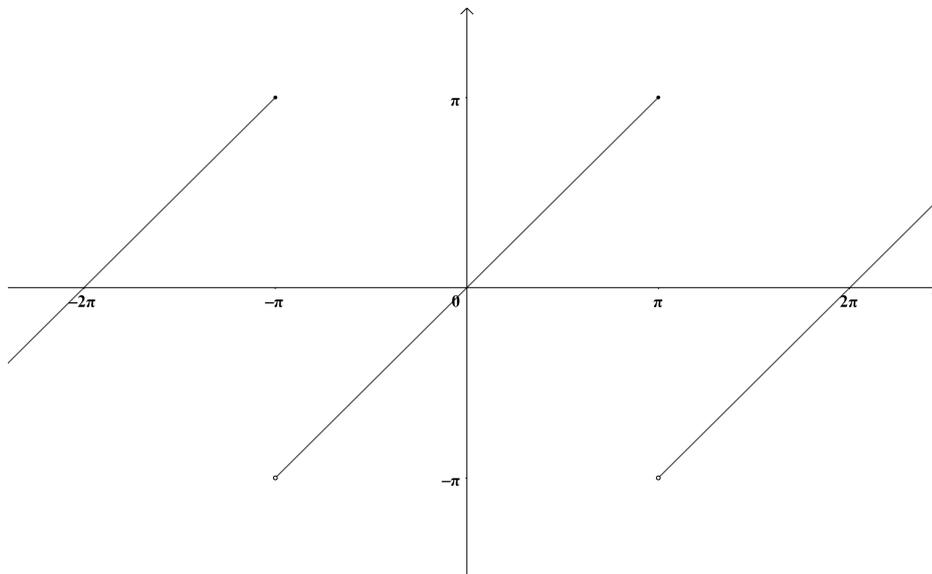
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(0t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt = \left[\frac{t^2}{2\pi} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2 - (-\pi)^2}{2\pi} \\ &= \frac{\pi^2 - \pi^2}{2\pi} = 0, \quad n = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) dt = \left[\frac{t \operatorname{sen}(nt)}{n\pi} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nt) dt \\ &= \left[\frac{\cos(nt)}{n^2\pi} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \operatorname{sen}(nt) dt = \left[\frac{-t \cos(nt)}{n\pi} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) dt \\ &= -\frac{2\pi \cos(n\pi)}{n\pi} + \left[\frac{\operatorname{sen}(nt)}{n^2\pi} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Logo a série de Fourier de f é

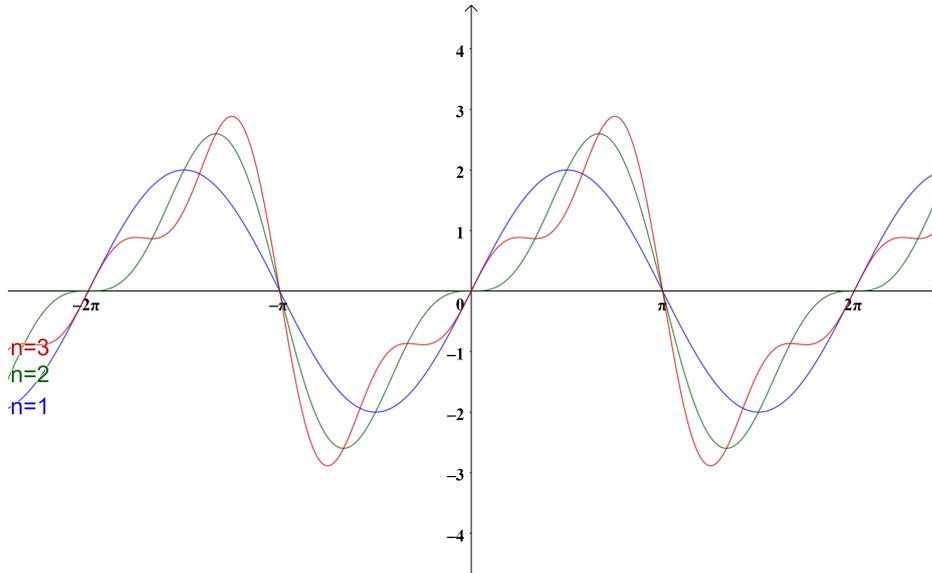
Figura 1 – Gráfico de f



$$f(t) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nt).$$

Também é possível determinar a série de Fourier de uma função derivada f' a partir dos coeficientes de Fourier de f do seguinte modo:

Figura 2 – Gráfico das somas parciais com $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$



Fonte: elaboradas pelo autor.

Proposição 1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e $2L$ -periódica.

Então

$$f'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} \left[b_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) - a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right],$$

onde a_n e b_n são os coeficientes de Fourier de f .

Demonstração. Como f é $2L$ -periódica, temos que sua derivada f' também é periódica e de mesmo período. Além disso, como f é seccionalmente diferenciável, temos que f' é seccionalmente contínua e portanto integrável. Logo a série de Fourier de f' está definida. Sejam a'_0 , a'_n e b'_n , $n \geq 1$, os coeficientes de Fourier de f' . Devemos mostrar que

$$a'_0 = 0, \quad a'_n = \frac{n\pi}{L} b_n \quad \text{e} \quad b'_n = -\frac{n\pi}{L} a_n.$$

Observe que $a'_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(t) dt = f(L) - f(-L) = f(L) - f(L) = 0$. Além disso, usando

integração por partes, temos

$$\begin{aligned}
 a'_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \\
 &= \frac{1}{L} \left[f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L f(t) \left(-\frac{n\pi}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right) dt \right] \\
 &= \frac{1}{L} \left[(f(L) - f(-L)) \cos n\pi + \frac{n\pi}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \right] \\
 &= \frac{1}{L} \left[\frac{n\pi}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \right] \\
 &= \frac{n\pi}{L} \left[\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \right] \\
 &= \frac{n\pi}{L} b_n.
 \end{aligned}$$

A igualdade relacionada a b'_n prova-se de maneira análoga. □

Teorema 1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e $2L$ -periódica. Então a série de Fourier de f converge, em cada t , para a média dos limites laterais de f à esquerda e à direita de t , ou seja,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right] = \frac{1}{2} [f(t^+) + f(t^-)].$$

Observe que, no Teorema 1, se f for contínua, então os limites laterais serão iguais ao valor da função no ponto t , ou seja, a média será $f(t)$. Portanto quando f for contínua, sua série de Fourier convergirá pontualmente para a própria função f .

Teorema 2 (Identidade de Parseval). Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de quadrado integrável e $2L$ -periódica. Então vale a igualdade:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L (f(t))^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Para uma demonstração dos Teoremas 1 e 2, veja FIGUEIREDO, 2007.

Uma aplicação muito interessante da Identidade de Parseval é o cálculo das somas de algumas séries numéricas notáveis. Por exemplo, quando aplicada à função f do exemplo 1, obtemos a soma de uma série harmônica generalizada. Precisamente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3 A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

Nesse capítulo apresentaremos uma demonstração da desigualdade isoperimétrica clássica. Entre as provas presentes na literatura, escolhemos uma que usa a teoria elementar das séries de Fourier, pois trata-se de uma prova simples e elegante que mostra uma ligação interessante entre a geometria e análise.

Lema 1 (Wirtinger). Seja f uma função de classe C^1 , 2π -periódica e tal que $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$.

Então

$$\int_0^{2\pi} (f'(t))^2 dt \geq \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt$$

e a igualdade vale se, e somente se, existirem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(t) = a \cos t + b \sin t$.

Demonstração. Seja

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

a expansão de f em série de Fourier. Observe que $a_0 = 0$. De fato,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$$

por hipótese. Portanto, temos

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt). \quad (3.1)$$

Pela Proposição 1, a expansão em série de Fourier de f' é dada por

$$f'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nt - a_n \sin nt).$$

Agora, pela identidade de Parseval, temos

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (3.2)$$

e

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f'(t))^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2). \quad (3.3)$$

De (3.2) e (3.3), temos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (f'(t))^2 dt - \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \pi n^2 (a_n^2 + b_n^2) - \sum_{n=1}^{\infty} \pi (a_n^2 + b_n^2) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \pi (n^2 - 1) (a_n^2 + b_n^2) \geq 0. \end{aligned}$$

Além disso, a igualdade é satisfeita se, e somente se, $a_n = b_n = 0$, $\forall n > 1$. Como f é de classe C^1 podemos usar o Teorema 1 e temos que f é igual à sua série de Fourier e voltando a (3.1), vemos que f é da forma $f(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t$. \square

Teorema 3 (Desigualdade Isoperimétrica). Entre todas as curvas simples e fechadas de comprimento L do plano, o círculo de circunferência L engloba a área máxima. De modo mais direto, temos a desigualdade seguinte

$$L^2 \geq 4\pi A, \quad (3.4)$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, a curva for o círculo de circunferência L .

Demonstração. Faremos aqui a demonstração apenas para curvas de classe C^1 . Observamos inicialmente que se C é uma curva de classe C^1 , fechada, simples e dada parametricamente, então seu comprimento de arco L pode ser expresso como

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

e que a área A delimitada por C também pode ser expressa como uma integral de linha utilizando o Teorema de Green. Precisamente,

$$A = - \int_C y dx = - \int_a^b y \frac{dx}{dt} dt,$$

onde a orientação determinada por C pode ser considerada positiva com relação ao seu interior. Sendo s o parâmetro de arco, fazemos uma reparametrização conveniente de C usando $t = \frac{2\pi}{L}s$ e como s parametriza C em $[0, L]$, t parametriza C em $[0, 2\pi]$. Logo

$$\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right] dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 dt = \frac{L^2}{2\pi}$$

e

$$\begin{aligned} L^2 - 4\pi A &= 2\pi \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 2y \frac{dx}{dt} \right] dt \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{dx}{dt} + y\right)^2 dt + 2\pi \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - y^2 \right] dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

É importante observar que, para utilizar o Lema 1, é necessário que a hipótese $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$ seja satisfeita, o que pode sempre ser contornado fazendo uma escolha conveniente do sistema de coordenadas. Precisamente, escolha o eixo x passando pelo centro de

gravidade da curva. Então, pelo Lema 1, temos que o último membro em (3.5) é ≥ 0 , mostrando a desigualdade. Agora, para que ocorra a igualdade, o segundo membro em (3.5) deve ser igual a 0, ou seja, cada parcela dele deve ser igual a 0. Pelo Lema de Wirtinger, a segunda parcela é igual a 0 se, e somente se, existirem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $y = a \cos t + b \sin t$. Além disso, a primeira parcela será igual a 0 se, e somente se, $\frac{dx}{dt} = -y$. Logo, $x = b \cos t - a \sin t + k$, $k \in \mathbb{R}$. Podemos concluir então que C é um círculo. \square

4 UMA GENERALIZAÇÃO: A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA EM \mathbb{R}^n

Neste capítulo, vamos demonstrar uma das muitas generalizações da desigualdade isoperimétrica, que é sua versão no \mathbb{R}^n . A abordagem usada neste capítulo será diferente da anterior: usaremos a teoria geométrica da medida. Uma vantagem desta abordagem é que não será necessária nenhuma hipótese de regularidade. Em particular, no caso $n = 2$ temos um resultado mais geral do que aquele já demonstrado, pois podemos considerar curvas não diferenciáveis. Antes de enunciar o resultado, algumas definições serão necessárias.

Definição 3. Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}, \quad \lambda A = \{\lambda x : x \in A\}.$$

Em particular,

Proposição 2. Se $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\}$, temos

- (i) $B_r(x) = rB_1(0) + \{x\}$;
- (ii) $B_r(x) + B_s(y) = B_{r+s}(x + y)$,

onde $r, s > 0$.

Demonstração. (i) (\subseteq) Seja $z \in B_r(x)$ e seja $z - x = u$. Então

$$z = u + x = r \left(\frac{1}{r}u \right) + x.$$

Como $|z - x| < r$, temos

$$\left| \frac{1}{r}u \right| = \frac{1}{r}|u| = \frac{1}{r}|z - x| < 1.$$

Assim, concluímos que $z \in rB_1(0) + \{x\}$.

(\supseteq) Seja $z \in rB_1(0) + \{x\}$. Então existe u tal que $z = ru + x$, com $|u| < 1$ e portanto $|z - x| = r|u| < r$. Logo $z \in B_r(x)$.

(ii) Pelo item (i), temos

$$B_r(x) + B_s(y) = rB_1(0) + \{x\} + sB_1(0) + \{y\}$$

e

$$B_{r+s}(x + y) = (r + s)B_1(0) + \{x + y\}.$$

Como $\{x\} + \{y\} = \{x + y\}$, é suficiente mostrar que

$$rB_1(0) + sB_1(0) = (r + s)B_1(0).$$

(\subseteq) Seja $z \in rB_1(0) + sB_1(0)$. Então existem u e v tais que $z = ru + sv$, com $|u| < 1$ e $|v| < 1$. Logo

$$|z| = |ru + sv| \leq |ru| + |sv| = r|u| + s|v| < r + s.$$

Então $z \in B_{r+s}(0)$. Pela parte (i), $z \in (r + s)B_1(0)$.

(\supseteq) Seja $z \in (r + s)B_1(0)$. Então existe u tal que $z = (r + s)u$, com $|u| < 1$. Daí $z = ru + su$ e portanto $z \in rB_1(0) + sB_1(0)$. \square

Definição 4. Se $E \subset \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$, definimos a *distância entre x e E* por

$$d(x, E) = \inf_{y \in E} d(x, y).$$

Dada essa definição, temos as seguintes caracterizações para o interior e para o fecho de E :

Proposição 3. O interior de E é caracterizado por

$$E^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, E^c) > 0\}.$$

Demonstração. Seja $F = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, E^c) > 0\}$.

(\subseteq) Seja $x \in E^\circ$. Então $\exists r > 0$ tal que $B_r(x) \subset E$. Seja $y \in E^c$. Então $|x - y| \geq r$, pois se $|x - y| < r$ teríamos $y \in E$, o que é absurdo. Logo

$$\inf_{y \in E^c} |x - y| \geq r > 0.$$

Então $x_0 \in F$.

(\supseteq) Seja $x \in F$. Então $d(x, E^c) > 0$ e seja $l = d(x, E^c)$. Tome $r = \frac{l}{2}$ e seja $y \in B_r(x)$. Como $|x - y| < r < l$ e l é ínfimo, $y \notin E^c$. Logo $y \in E$ e, pela arbitrariedade de y , temos $B_r(x) \subseteq E$. Portanto, $x \in E^\circ$. \square

Proposição 4. O fecho de E é caracterizado por

$$\bar{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, E) = 0\}.$$

Demonstração. Seja $F = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, E) = 0\}$.

(\subseteq) Seja $x \in \bar{E}$. Então $\forall r > 0$, $\exists x_r$ tal que $x_r \in B_r(x) \cap E$. Suponha, por absurdo, que

$$d(x, E) = \inf_{y \in E} |x - y| = \delta > 0.$$

Para $r = \frac{\delta}{2}$, temos que existe x_r tal que $x_r \in E$ e $|x - x_r| < r$. Isso é absurdo, pois contraria o fato que δ é ínfimo. Logo $d(x, E) = 0$, ou seja, $x \in F$.

(\supseteq) Seja $x \in F$. Vamos mostrar que $\forall r > 0$, $\exists x_r \in B_r(x) \cap E$. Seja $r > 0$. Como $d(x, E) = 0$, temos que $\exists y_r \in E$ tal que $|x - y_r| < r$, ou seja, $y_r \in B_r(x) \cap E$. Portanto basta tomar $x_r = y_r$. \square

Definição 5. Definimos a *vizinhança tubular* de E por

$$E_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists y \in E \text{ tal que } |x - y| < r\}.$$

Proposição 5. Vale a seguinte propriedade para a vizinhança tubular de E :

$$E_r = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, E) < r\} = E + B_r(0) = \bar{E} + B_r(0).$$

Demonstração. Seja $F = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, E) < r\}$. Vamos mostrar que

- (i) $E_r \subseteq F$;
- (ii) $F \subseteq E + B_r(0)$;
- (iii) $E + B_r(0) \subseteq \bar{E} + B_r(0)$;
- (iv) $\bar{E} + B_r(0) \subseteq E_r$.

(i) Seja $x \in E_r$. Seja $y \in E$ tal que $|x - y| < r$. Temos

$$d(x, E) = \inf_{z \in E} |x - z| \leq |x - y| < r.$$

Portanto $x \in F$.

(ii) Seja $x \in F$. Como $d(x, E) < r$, existe $y \in E$ tal que $|x - y| < r$. Seja $u = x - y$ e então $|u| < r$. Logo $x = y + u$, com $y \in E$ e $u \in B_r(0)$. Portanto $x \in E + B_r(0)$.

(iii) Seja $x \in E + B_r(0)$. Então existem $y \in E$ e $u \in B_r(0)$ tais que $x = y + u$. Mas como $E \subseteq \bar{E}$, temos que $y \in \bar{E}$, ou seja, $x \in \bar{E} + B_r(0)$.

(iv) Seja $x \in \bar{E} + B_r(0)$. Então existem $z \in \bar{E}$ e $u \in B_r(0)$ tais que $x = z + u$. Pela Proposição 4, temos $d(z, E) = 0$. Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $w \in E$ tal que $|z - w| < \varepsilon$. Tome $\varepsilon = r - |u| > 0$ e seja $y \in E$ tal que $|z - y| < r - |u|$. Pela desigualdade triangular,

temos

$$\begin{aligned}
 |x - y| &\leq |x - z| + |z - y| \\
 &= |u| + |z - y| \\
 &< |u| + (r - |u|) \\
 &= r,
 \end{aligned}$$

ou seja, $x \in E_r$. □

Dado um conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ mensurável, adotaremos como medida de volume de E a medida de Lebesgue n -dimensional de E e denotaremos por $V(E)$.

Proposição 6. Seja $\omega_n = V(B_1(0))$ o volume da bola unitária em \mathbb{R}^n . Então

$$\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

Em particular, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = \pi$, $\omega_3 = \frac{4}{3}\pi$ etc.

Teorema 4 (Desigualdade de Brunn-Minkowski). Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$, com $A, B \neq \emptyset$. Então

$$V(A + B)^{\frac{1}{n}} \geq V(A)^{\frac{1}{n}} + V(B)^{\frac{1}{n}}.$$

Para uma demonstração do Teorema 4, veja FEDERER, 1969.

Lema 2. Se $D \subset \mathbb{R}^n$, $V(\bar{D}) < +\infty$ e $0 < r < +\infty$, então

- (i) $V(D_r \setminus \bar{D}) \geq nV(\bar{D})^{\frac{n-1}{n}} \omega_n^{\frac{1}{n}} r$;
- (ii) $V(D^\circ \setminus T(r)) \geq nV(T(r))^{\frac{n-1}{n}} \omega_n^{\frac{1}{n}} r$,

onde $T(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, D^c) \geq r\}$.

Demonstração. (i) Observe primeiro que $\bar{D} \subseteq D_r$, pois se $x \in \bar{D}$, pela Proposição 3 temos $d(x, D) = 0 < r$ e então $x \in D_r$. Como D_r é aberto e \bar{D} é fechado, ambos são mensuráveis e vale que

$$V(D_r \setminus \bar{D}) = V(D_r) - V(\bar{D}). \tag{4.1}$$

Por outro lado, pela desigualdade de Brunn-Minkowski,

$$\begin{aligned}
V(D_r) &= V(\bar{D} + B_r) \\
&\geq \left[V(\bar{D})^{\frac{1}{n}} + V(B_r)^{\frac{1}{n}} \right]^n \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} V(\bar{D})^{\frac{n-k}{n}} (\omega_n^{\frac{1}{n}} r)^k \\
&\geq V(\bar{D}) + nV(\bar{D})^{\frac{n-1}{n}} \omega_n^{\frac{1}{n}} r.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$V(D_r) - V(\bar{D}) \geq nV(\bar{D})^{\frac{n-1}{n}} \omega_n^{\frac{1}{n}} r. \quad (4.2)$$

Por (4.1) e (4.2), concluímos que

$$V(D_r \setminus \bar{D}) \geq nV(\bar{D})^{\frac{n-1}{n}} \omega_n^{\frac{1}{n}} r.$$

(ii) Observamos agora que $T(r)_r = T(r) + B_r \subseteq D^\circ$. De fato, seja $x \in T(r)_r$. Pela Proposição 3, devemos mostrar $d(x, D^c) > 0$. Sabemos que $d(x, T(r)) < r$ e $d(y, D^c) \geq r$ para $y \in T(r)$. Sejam $z \in D^c$ e $y \in T(r)$. Então $|y - z| \geq r$ e pela desigualdade triangular,

$$|x - y| + |x - z| \geq |y - z| \geq r$$

o que implica

$$\inf_{y \in T(r)} |x - y| + |x - z| \geq r.$$

Ou seja, $d(x, T(r)) + |x - z| \geq r$. Logo

$$d(x, T(r)) + \inf_{z \in D^c} |x - z| \geq r$$

e, daí, $d(x, T(r)) + d(x, D^c) \geq r$. Assim,

$$d(x, D^c) \geq r - d(x, T(r)) > r - r = 0,$$

ou seja, $d(x, D^c) > 0$. Então $x \in D^\circ$, concluindo que $T(r)_r \subseteq D^\circ$.

Como D° é aberto e $T(r)$ é fechado temos que ambos são mensuráveis e como $T(r) \subseteq D^\circ$, vale que

$$V(D^\circ \setminus T(r)) = V(D^\circ) - V(T(r)). \quad (4.3)$$

Pelo mesmo raciocínio de (i), temos

$$V(T(r)_r) - V(T(r)) \geq nV(T(r)) \frac{n-1}{n} \omega_n^{\frac{1}{n}} r.$$

Como $T(r)_r \subseteq D^\circ$, temos $V(D^\circ) \geq V(T(r)_r)$ e

$$V(D^\circ) - V(T(r)) \geq nV(T(r)) \frac{n-1}{n} \omega_n^{\frac{1}{n}} r. \quad (4.4)$$

Por (4.3) e (4.4), temos

$$V(D^\circ \setminus T(r)) \geq nV(T(r)) \frac{n-1}{n} \omega_n^{\frac{1}{n}} r.$$

□

Definição 6. Definimos o *conteúdo de Minkowski k -dimensional* do conjunto E como

$$M_k(E) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{V(E_r)}{\omega_{n-k} r^{n-k}}, \quad \text{para } 1 \leq k \leq n-1.$$

Exemplo 2. Seja $E = S_r^{n-1}$ a esfera de dimensão $n-1$ e de raio r . Então

$$E_\rho = B_{r+\rho} \setminus \bar{B}_{r-\rho}$$

e

$$\begin{aligned} V(E_\rho) &= \omega_n(r+\rho)^n - \omega_n(r-\rho)^n \\ &= \omega_n \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^{n-k} \rho^k - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k r^{n-k} \rho^k \right] \\ &= \omega_n [2nr^{n-1}\rho + o(\rho)] \quad \text{para } \rho \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Logo

$$M_k(S_r^{n-1}) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\omega_n [2nr^{n-1}\rho + o(\rho)]}{\omega_{n-k} \rho^{n-k}} = \begin{cases} +\infty & \text{para } k < n-1, \\ n\omega_n r^{n-1} & \text{para } k = n-1, \\ 0 & \text{para } k = n. \end{cases}$$

Adotaremos M_{n-1} como definição da medida de área $n-1$ dimensional em \mathbb{R}^n . Denotaremos, por simplicidade, $M_{n-1}(S) = A(S)$ para um conjunto S . Pode ser provado que o conteúdo de Minkowski $(n-1)$ -dimensional dá o mesmo resultado das fórmulas do cálculo, pelo menos para objetos suficientemente regulares.

A seguir definimos o que são esses “objetos suficientemente regulares”.

Definição 7. Um conjunto não vazio $S \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de *hipersuperfície* de classe C^k , $k \in \mathbb{N}$, ou C^∞ , se para todo $p \in S$ existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, uma vizinhança aberta V de p em \mathbb{R}^n e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$ tal que

- (i) $X : U \rightarrow V \cap S$ é de classe C^k ou C^∞ .
- (ii) $X : U \rightarrow V \cap S$ é um homeomorfismo.
- (iii) $(dX)_q : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetivo, para todo $q \in U$.

Intuitivamente, uma hipersuperfície é um subconjunto do \mathbb{R}^n localmente euclidiano de dimensão $n - 1$, o que significa que cada ponto desse conjunto tem uma vizinhança homeomorfa a um aberto de \mathbb{R}^{n-1} , e esse homeomorfismo é suave.

Observemos que $V(B_r) = \omega_n r^n$ e $A(S_r^{n-1}) = n\omega_n r^{n-1}$. Logo, no caso da bola,

$$A^n = n^n \omega_n V^{n-1}.$$

A desigualdade isoperimétrica no \mathbb{R}^n é então expressa por

Teorema 5. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um domínio com $V(\bar{D}) < +\infty$. Seja V o seu volume e A a área do conjunto que é sua fronteira. Então

$$A^n \geq n^n \omega_n V^{n-1}.$$

Demonstração. Vamos começar mostrando que

- (i) $D_r \setminus \bar{D} \subseteq (\partial D)_r$;
- (ii) $D^\circ \setminus T(r) \subseteq (\partial D)_r$;
- (iii) $(D_r \setminus \bar{D}) \cap (D^\circ \setminus T(r)) = \emptyset$.

(i) Seja $x \in D_r \setminus \bar{D}$. Pela Proposição 3, $0 < d(x, D) < r$. Vamos mostrar que

$$\exists y \in \partial D, |x - y| < r.$$

Seja $d = d(x, D)$. Temos que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in D$ tal que

$$d \leq |x - y_n| < d + \frac{1}{n}. \quad (4.5)$$

Como $\{y_n\}$ é uma sequência limitada, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass temos que $\{y_n\}$ possui uma subsequência convergente. Portanto existe y tal que, a menos de passar a uma subsequência, $y_n \rightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$. Tomando o limite com $n \rightarrow \infty$ na desigualdade (4.5) temos, pelo Teorema do Confronto,

$$|x - y| = d.$$

Como $d < r$, resta mostrar que $y \in \partial D$. Como $y_n \rightarrow y$ e $y_n \in D$, temos que $y \in \bar{D}$. Como $\bar{D} = D^\circ \cup \partial D$, vamos mostrar que $y \notin D^\circ$. Suponha, por absurdo, que seja falso. Seja

$s > 0$ tal que $B_s(y) \subseteq D$. Como $d > 0$, tome $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{s}{2^k} < d$. Observe que

$$u = y + \frac{s}{2^k} \frac{x - y}{|x - y|}$$

é um elemento de $B_s(y)$, pois $|u - y| = \frac{s}{2^k} < s$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} |x - u| &= \left| x - y - \frac{s}{2^k} \frac{x - y}{|x - y|} \right| \\ &= \left| \frac{x - y}{|x - y|} \left(|x - y| - \frac{s}{2^k} \right) \right| \\ &= \left| |x - y| - \frac{s}{2^k} \right| \\ &= d - \frac{s}{2^k}. \end{aligned}$$

Isso é absurdo, pois $u \in D$ e $|x - u| < d(x, D)$. Portanto concluímos que $y \in \partial D$.

(ii) Seja $x \in D^\circ \setminus T(r)$. Pela Proposição 3, $0 < d(x, D^c) < r$. Devemos mostrar que

$$\exists y \in \partial D, |x - y| < r. \quad (4.6)$$

Com um argumento análogo ao do item anterior, conseguimos mostrar que

$$\exists y \in \partial D^c, |x - y| < r.$$

Como D e D^c possuem a mesma fronteira, vale (4.6) e segue o resultado.

(iii) Suponha, por absurdo, que a afirmação seja falsa e seja $x \in (D_r \setminus \bar{D}) \cap (D^\circ \setminus T(r))$.

Observe que $x \in D^\circ$ e $x \notin \bar{D}$. Isso é absurdo, pois $D^\circ \subset \bar{D}$.

Agora, por (i), (ii) e (iii) e pelo Lema 2, temos

$$\begin{aligned} V((\partial D)_r) &\geq V(D_r \setminus \bar{D}) + V((D^\circ \setminus T(r))) \\ &\geq n \omega_n^{\frac{1}{n}} r \left[V(\bar{D})^{\frac{n-1}{n}} + V(T(r))^{\frac{n-1}{n}} \right]. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} A(\partial D) &= \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{V((\partial D)_r)}{\omega_1 r} \\ &\geq \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{n \omega_n^{\frac{1}{n}}}{2} \left[V(\bar{D})^{\frac{n-1}{n}} + V(T(r))^{\frac{n-1}{n}} \right]. \end{aligned}$$

Mas para $r \searrow 0$, $V(T(r)) \nearrow V(D^\circ)$. De fato, dados conjuntos mensuráveis A_k , onde $k \in \mathbb{N}$, como V é a medida de Lebesgue n -dimensional, V possui as seguintes propriedades:

- (a) Se $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ e $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, então $V(A_k) \rightarrow V(A)$ para $k \rightarrow \infty$.

(b) Se $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ e $V(A_1) < +\infty$, então $V(A_k) \rightarrow V(A)$ para $k \rightarrow \infty$. Observe que $r < s \implies T(r) \supseteq T(s)$. Seja $\{r_k\}$ tal que $r_k \searrow 0$. Então $T(r_{k+1}) \supseteq T(r_k)$ para cada k e

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} T(r_k) = D^\circ.$$

Por (a), e como $T(r_k) \subseteq D^\circ$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que $V(T(r_k)) \nearrow V(D^\circ)$. Então, para $r \searrow 0$, $V(T(r))$ é crescente e limitada superiormente por $V(D^\circ)$. Portanto o limite existe finito e $V(T(r)) \nearrow V(D^\circ)$. Assim, provamos a afirmação. Logo

$$A(\partial D) \geq \frac{n\omega_n^{\frac{1}{n}}}{2} \left(V(\bar{D})^{\frac{n-1}{n}} + V(D^\circ)^{\frac{n-1}{n}} \right).$$

Se $A(\partial D) = +\infty$, não há nada para provar.

Se $A(\partial D) < +\infty$, então $V(\partial D) = 0$. Para provar isso, observamos que $r < s \implies E_r \subseteq E_s$.

Logo dada $\{r_k\}$ tal que $r_k \searrow 0$, temos $E_{r_{k+1}} \subseteq E_{r_k}$ para todo k e

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{r_k} = \bar{E}.$$

Por (b), e como $E_{r_k} \supseteq \bar{E}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se $V(E_{r_1}) < +\infty$, temos que $V(E_{r_k}) \searrow V(\bar{E})$. Então, para $r \searrow 0$, $V(E_r)$ é decrescente e limitada inferiormente por $V(\bar{E})$. Portanto o limite existe finito e $V(E_r) \searrow V(\bar{E})$. Suponha então que $A(\partial D) = A < +\infty$. Ou seja,

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{V((\partial D)_r)}{2r} = A.$$

Então A é o menor valor limite de

$$f(r) = \frac{V((\partial D)_r)}{2r}$$

para $r \rightarrow 0$. Logo, existe $\{r_k\}$, com $r_k \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$ tal que

$$f(r_k) = \frac{V((\partial D)_{r_k})}{2r_k} \rightarrow A.$$

Daí, fixado $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(r_m) < A + \varepsilon$, ou seja,

$$V((\partial D)_{r_m}) < 2(A + \varepsilon)r_m.$$

Portanto existe r tal que $V((\partial D)_r) < +\infty$. Então, como ∂D é igual ao seu próprio fecho e como $V((\partial D)_r) < +\infty$ para algum r , temos por (b) que

$$V(\partial D) = \lim_{r \rightarrow 0} V((\partial D)_r).$$

Por hipótese, temos

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{V((\partial D)_r)}{2r} = A(\partial D) < +\infty$$

e então, como observado anteriormente, existe uma sequência de números reais positivos $\{r_k\}$ tal que $r_k \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$ e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{V((\partial D)_{r_k})}{2r_k} = A(\partial D).$$

Portanto

$$V(\partial D) = \lim_{k \rightarrow \infty} V((\partial D)_{r_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{V((\partial D)_{r_k})}{2r_k} \cdot 2r_k = A(\partial D) \cdot 0 = 0.$$

Logo $V(\bar{D}) = V(D^\circ) = V(D)$ e

$$A(\partial D) \geq n\omega_n^{\frac{1}{n}} V(D)^{\frac{n-1}{n}}$$

que é a desigualdade isoperimétrica. □

Observação: A abordagem da desigualdade isoperimétrica em \mathbb{R}^n que foi dada neste capítulo permite tratar o problema com grande generalidade e em hipóteses de regularidade muito fracas. Nesta formulação, a desigualdade é satisfeita trivialmente com o igual se $D = B_r(a)$ para algum $r \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^n$. Porém, diferentemente do que ocorre com a desigualdade isoperimétrica em \mathbb{R}^2 como foi formulada no capítulo 3, aqui o caso da igualdade não é necessariamente satisfeito somente por bolas, como pode ser facilmente verificado considerando como exemplo o caso da bola furada. A fim de obter a validade do caso da igualdade somente para as bolas, seriam necessárias hipóteses adicionais, como a convexidade e uma maior regularidade do domínio. Não aprofundaremos aqui este aspecto.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentada e demonstrada a desigualdade isoperimétrica, uma desigualdade muito antiga que, apesar de muito tempo ter se passado até que fosse demonstrada rigorosamente, hoje dispõe de variadas demonstrações e apresentamos aqui uma elementar utilizando apenas séries de Fourier. Além do caso clássico, mostramos também que ela aparece em ambientes como os espaços \mathbb{R}^n através de uma generalização que demonstramos a partir de conceitos relacionados à teoria geométrica da medida.

REFERÊNCIAS

FEDERER, H. **Geometric measure theory**. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1969.

FIGUEIREDO, D. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. ISBN 978-85-244-0120-6.

OSSERMAN, R. The isoperimetric inequality. **Bulletin of the american mathematical society**, v. 84, n. 6, p. 1182–1238, 11 1978.

SIEGEL, A. A historical review of the isoperimetric theorem in 2-d, and its place in elementary plane geometry. 01 2003.