



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIA**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**SAMUEL BELO SOBREIRA NETTO**

**GEOMETRIA DIFERENCIAL DAS CURVAS PLANAS**

**FORTALEZA**

**2020**

SAMUEL BELO SOBREIRA NETTO

GEOMETRIA DIFERENCIAL DAS CURVAS PLANAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática do Centro de Ciência da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ernani de Sousa  
Ribeiro Júnior

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

S659g Sobreira Netto, Samuel Belo.

Geometria diferencial das curvas planas / Samuel Belo Sobreira Netto. – 2020.  
38 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,  
Curso de Matemática, Fortaleza, 2020.

Orientação: Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior.

1. Curvas Planas. 2. Curvas Parametrizadas. 3. Diedro de Frenet. 4. Teorema Fundamental das Curvas Planas. I. Título.

CDD 510

---

SAMUEL BELO SOBREIRA NETTO

GEOMETRIA DIFERENCIAL DAS CURVAS PLANAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática do Centro de Ciência da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em: 20 de outubro de 2020

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro  
Júnior (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha família, por acreditarem em mim e me apoiarem sempre que precisei.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Prof. Ernani Ribeiro Júnior por me orientar em meu TCC, pelos conselhos e pela ajuda durante a maior parte da minha graduação.

Ao Prof. Abdênago Alves de Barros por ter me ensinado a usar o Tikz e também pelos seus conselhos durante minha graduação.

Ao Doutorando Elzon César Bezerra Júnior, ao Mestre Victor Gomes Pinto e ao Mestre Peron Marques Filho, pela amizade e por todo o apoio que me deram até aqui.

Aos meus amigos de turma que estiveram sempre comigo e em alguns momentos me deram força para continuar.

A minha família, por terem acreditado em mim e por terem me apoiado durante toda minha vida.

E agradeço a todos os professores por me proporcionarem o conhecimento e o intelecto que me fizeram chegar até aqui.

“A beleza da matemática só se revela a quem a  
persegue mais impacientemente”

(Maryam Mirzakhani)

## RESUMO

Este trabalho apresenta de maneira objetiva o que seria a base da geometria diferencial: as curvas planas. De início, foram apresentadas algumas definições básicas, muito importantes para o estudo das curvas planas, como definir o que é uma curva parametrizada, encontrar vetores tangentes de uma curva, a definição de curva regular e de comprimento de arco. A partir disso, é possível prosseguir para a definição das fórmulas de Frenet no plano. Dessa maneira, são obtidas as ferramentas necessárias para enunciar e provar o Teorema Fundamental das Curvas Planas, um teorema muito importante na geometria diferencial. Por fim, serão apresentados outros dois teoremas, que também se destacam na geometria diferencial, o Teorema das Curvas de Jordan e a Desigualdade Isoperimétrica.

**Palavras-chave:** Curvas Planas. Curvas Parametrizadas. Diedro de Frenet. Teorema Fundamental das Curvas Planas.



## ABSTRACT

This work presents in an objective way what would be differential geometry base: the plane curves. At first, the basic definitions, considered very important for the study of plane curves, were presented, as how to define what is a parametrized curve, how to find tangent vectors of a curve, the definition of regular curve and arc length. From this, it is possible to proceed to the definition of Frenet formulas in the plane. Therefore, the necessary tools to enunciate and prove a very important theorem in differential geometry, the Fundamental Theorem of the Plane Curves, are obtained. Finally, other two theorems will be presented, that also stand out in differential geometry, the Jordan's Curve Theorem and the Isoperimetric Inequality.

**Keywords:** Plane curves. Parameterized Curves. Frenet Dihedron. Fundamental Theorem of plane Curves.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Gráficos de uma reta e uma circunferência de raio 1. . . . .	11
Figura 2 – Circunferência. . . . .	12
Figura 3 – Elipse. . . . .	13
Figura 4 – Ciclóide. . . . .	13
Figura 5 – Curva $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ . . . . .	14
Figura 6 – Curva $\alpha(t) = (t,  t )$ . . . . .	14
Figura 7 – Espiral Logarítmica. . . . .	14
Figura 8 – Vetor tangente ao círculo de raio $r$ num ponto $t$ . . . . .	15
Figura 9 – Reparametrização de uma curva. . . . .	16
Figura 10 – Referencial de Frenet. . . . .	19
Figura 11 – Translação aplicada em uma circunferência. . . . .	21
Figura 12 – Rotação aplicada em um quadrado. . . . .	21
Figura 13 – Movimento rígido aplicado em $\alpha$ . . . . .	26
Figura 14 – Rainha Dido pedindo para cortar a pele de boi. . . . .	27
Figura 15 – Desigualdade Isoperimétrica. . . . .	28
Figura 16 – Curva de Jordan 1. . . . .	31
Figura 17 – Curva de Jordan 2. . . . .	31

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	10
2	CURVAS PLANAS . . . . .	11
2.1	Curvas Parametrizadas . . . . .	12
2.1.1	<i>Exemplos de Curvas Parametrizadas</i> . . . . .	12
2.2	Vetor Tangente de uma curva . . . . .	15
2.3	Curva Regular . . . . .	15
2.4	Comprimento de Arco . . . . .	16
2.5	Fórmulas de Frenet . . . . .	18
2.6	Teorema Fundamental das Curvas Planas . . . . .	20
3	RESULTADOS IMPORTANTES . . . . .	27
3.1	Desigualdade Isoperimétrica . . . . .	27
3.2	Teorema da Curva de Jordan . . . . .	30
4	CONCLUSÃO . . . . .	33
	REFERÊNCIAS . . . . .	34
	APÊNDICES . . . . .	35
	APÊNDICE A – TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE . . . . .	35

## 1 INTRODUÇÃO

A geometria diferencial é o estudo que combina cálculo diferencial com a geometria clássica. Ela se desenvolveu originalmente com estudos em cartografia. Com os anos ela passou a ter grande importância nas áreas de astronomia e engenharia.

Isaac Newton, Pierre de Fermat e Christiaan Huygens deram início ao estudo da geometria diferencial por volta do século XVII, podendo dizer que foram os criadores dessa área. Newton foi o primeiro a estudar a geometria através do cálculo infinitesimal. Fermat descobriu algebricamente como achar tangentes de curvas. Christiaan introduziu evolutas e involutas, provando algumas propriedades de curvas usando esses conceitos.

No século XIX, Carl Friedrich Gauss provou o teorema Egregium, que estabelece uma importante propriedade das superfícies. Já Bernhard Riemann, levou a teoria de Gauss para espaços de dimensões maiores, ele também foi muito importante na teoria das variedades diferenciáveis.

Hoje, a geometria diferencial é dividida em dois aspectos. O primeiro, podendo ser chamado de geometria diferencial clássica, teve início no começo do cálculo. Podemos dizer que a geometria diferencial clássica é o estudo das propriedades locais das curvas e superfícies, ou seja, as propriedades que dependem apenas das proximidades da curva ou da superfície naquele determinado ponto. O segundo aspecto é a geometria diferencial global, que estuda o comportamento da curva ou superfície como um todo. No geral, pode-se dizer que essa parte muito interessante da geometria diferencial é o estudo das superfícies. Porém, nesse trabalho não iremos estudar superfícies ou curvas além da dimensão 2, iremos estudar as curvas no plano que é uma base importante para o estudo dessas outras partes da geometria diferencial.

## 2 CURVAS PLANAS

Todos nós temos uma idéia, pelo menos intuitiva, do que seria uma curva plana. Por exemplo, podemos pensar em uma caneta riscando uma folha de papel, onde a ponta da caneta seria o ponto (partícula) e o traço descrito pela caneta seria a curva, já o papel seria o plano que contém a curva. De modo geral, uma curva plana representa a trajetória de um ponto que está contido em um plano.

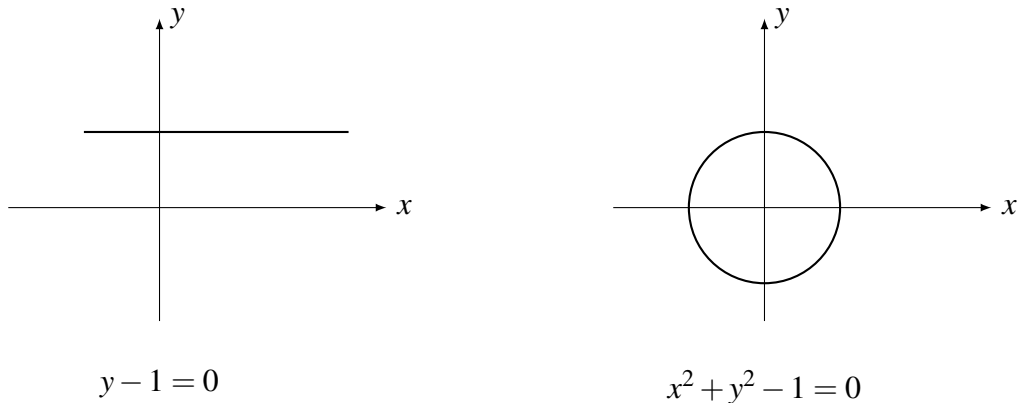
Entrando mais no conceito matemático, na geometria analítica consideramos uma curva como o conjunto dos pontos  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  satisfazendo  $f(x,y) = 0$ , onde  $f$  é uma função de  $x$  e  $y$ . Assim, podemos definir uma curva da seguinte forma.

**Definição 1** *Uma curva é o conjunto  $C$  dos pontos cartesianos que satisfazem a equação  $f(x,y) = 0$ , ou seja,*

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}.$$

**Exemplo 1** *Na figura abaixo temos o exemplo de duas curvas bastante conhecidas, uma reta e uma circunferência.*

Figura 1 – Gráficos de uma reta e uma circunferência de raio 1.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Já na geometria diferencial utilizaremos outro método para pensarmos em curvas planas, que será mais útil em várias situações. No lugar de considerarmos curvas descritas por equações, devemos pensar na curva como sendo o caminho traçado por um ponto, que chamaremos de  $\alpha(t)$ , no plano. Logo, sendo  $\alpha(t)$  o vetor posição no instante  $t$ , a curva será representada por uma função  $\alpha$  de um parâmetro  $t$  que varia num intervalo fechado  $I \subset \mathbb{R}$  com valores  $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$ . Essa curva será representada pelo conjunto dos pontos  $\alpha(t)$  dado por

$C = \{\alpha(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I\}$ . Com isso, podemos ter uma melhor definição para a curva que será dada na próxima seção.

## 2.1 Curvas Parametrizadas

**Definição 2** Uma curva parametrizada diferenciável (ou suave) do plano  $\mathbb{R}^2$  é uma aplicação  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^\infty$ . A variável  $t \in I$  será o parâmetro da curva e os pontos  $\alpha(t)$  da imagem serão chamados traço da curva.

Observe que a aplicação  $\alpha$ , dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , é diferenciável se cada função coordenada  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável.

**Definição 3** Uma curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita fechada se seus pontos inicial e final coincidirem, ou seja,  $\alpha(a) = \alpha(b)$ .

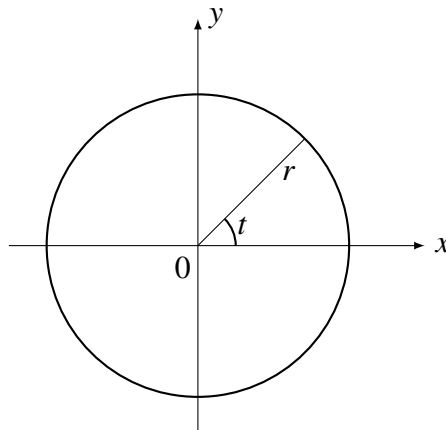
**Definição 4** Diremos que  $\alpha$  é uma curva simples se  $\alpha$  não possui auto interseção, ou seja, se  $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$ , com  $t_1 \neq t_2$ , temos  $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ .

### 2.1.1 Exemplos de Curvas Parametrizadas

Nessa subseção mostraremos alguns exemplos de curvas parametrizadas e suas parametrizações.

**Exemplo 2** A aplicação  $\alpha$ , que para todo  $t \in [0, 2\pi]$  relaciona  $\alpha(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$ , é uma curva parametrizada diferenciável tal que seu traço é uma circunferência de centro na origem e raio igual a  $r$ . Note que  $\alpha$  é uma curva fechada, pois  $\alpha(0) = (r, 0) = \alpha(2\pi)$ .

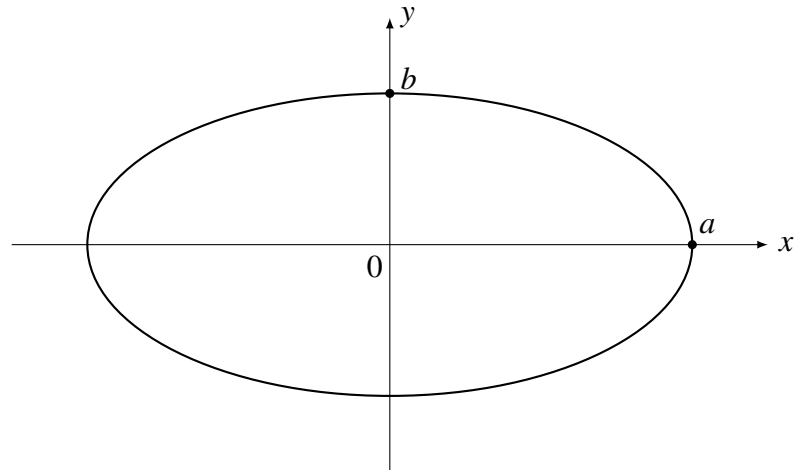
Figura 2 – Circunferência.



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Exemplo 3** A aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada pela equação  $\alpha(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , é uma curva parametrizada diferenciável tal que seu traço é uma elipse com centro na origem, onde  $a$  e  $b$  são números reais positivos e  $a > b$ .

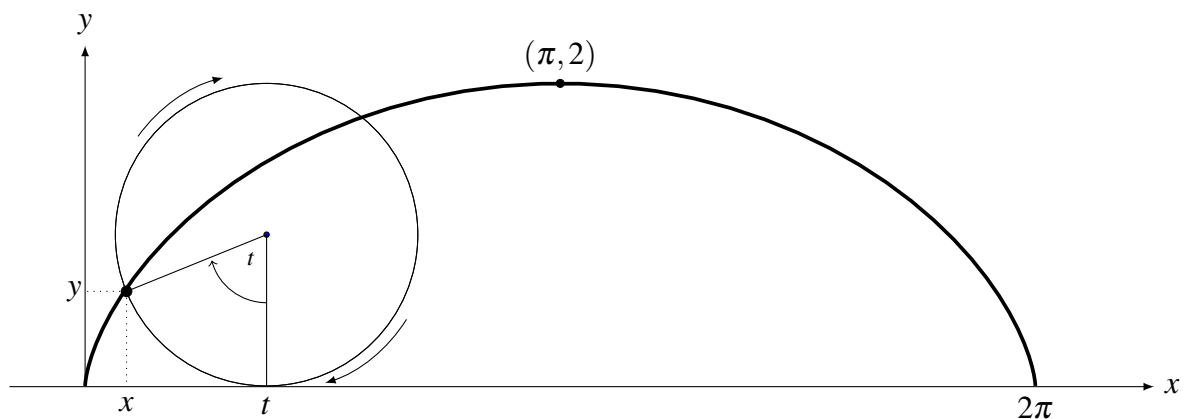
Figura 3 – Elipse.



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Exemplo 4** Considere um círculo de raio 1 no plano  $xy$  girando sem escorregar ao longo do eixo  $Ox$ . A trajetória de um ponto  $(x,y)$  localizado nesse círculo é chamado de ciclóide. A aplicação  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que para todo  $t \in [0, 2\pi]$  relaciona  $\alpha(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ , é a curva parametrizada que representa o ciclóide.

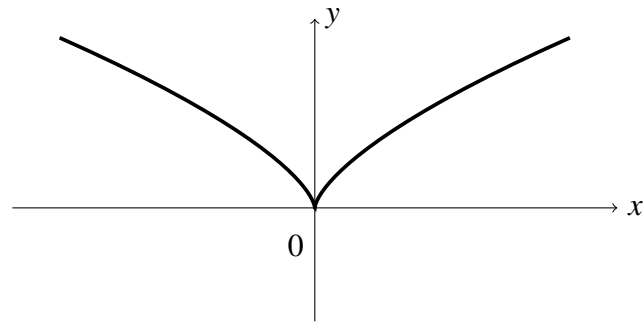
Figura 4 – Ciclóide.



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Exemplo 5** A aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada pela equação  $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , é uma curva diferenciável parametrizada tal que seu traço é dado pela figura abaixo.

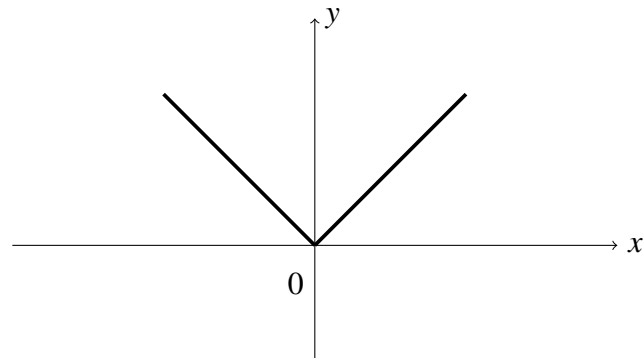
Figura 5 – Curva  $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Exemplo 6** A curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (t, |t|)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , é um exemplo de curva que não é parametrizada diferenciável, pois  $|t|$  não é diferenciável em  $t = 0$ .

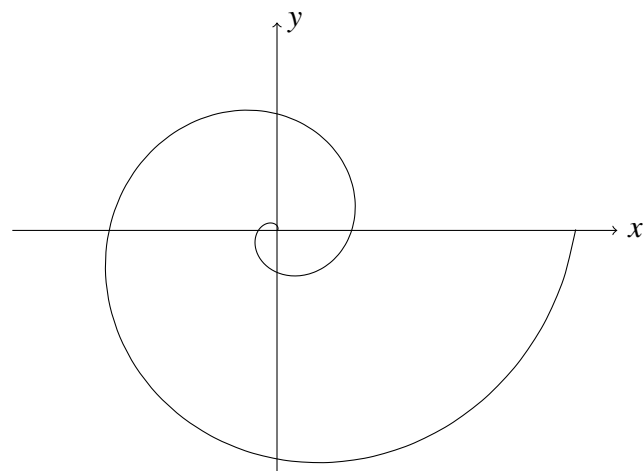
Figura 6 – Curva  $\alpha(t) = (t, |t|)$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Exemplo 7** A curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$  é uma curva parametrizada diferenciável. A curva  $\alpha$  é chamada espiral logarítmica.

Figura 7 – Espiral Logarítmica.



Fonte: Elaborado pelo autor.



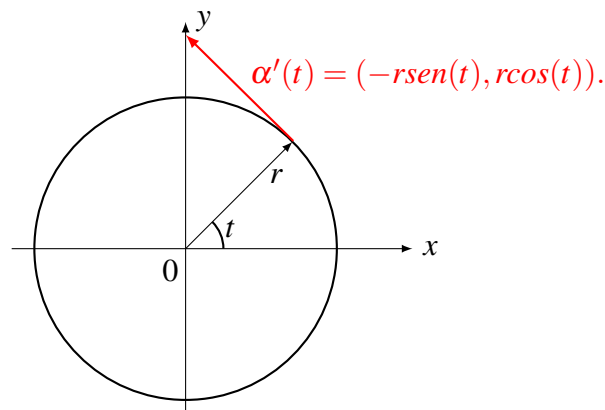
## 2.2 Vetor Tangente de uma curva

Nesta seção mostraremos como determinar o vetor tangente de uma curva.

**Definição 5** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , para todo  $t \in I$ . O vetor  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$  é chamado vetor tangente, ou vetor velocidade, de  $\alpha$  em  $t$ .

**Exemplo 8** Utilizando novamente a curva  $\alpha(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$ , temos que o vetor tangente a  $\alpha$  é dado por  $\alpha'(t) = (-r\sin(t), r\cos(t))$ .

Figura 8 – Vetor tangente ao círculo de raio  $r$  num ponto  $t$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

No Exemplo 5, observe que o vetor velocidade da curva  $\alpha$  é dado por  $\alpha'(t) = (3t^2, 2t)$ , mas para  $t = 0$  temos que  $\alpha(0) = (0, 0)$ , ou seja, a curva  $\alpha$  tem vetor velocidade nulo se  $t = 0$ .

## 2.3 Curva Regular

**Definição 6** Uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  será regular se  $\forall t \in I, \alpha'(t) \neq 0$ . Uma curva é dita não regular quando existe  $t_0 \in I$  tal que  $\alpha'(t_0) = 0$  e diremos que  $t_0$  é um ponto singular de  $\alpha$ .

Um exemplo de curva regular é o círculo de raio  $r$  visto no Exemplo 2, dada por  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  e definida por  $\alpha(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$ . O vetor velocidade  $\alpha'(t) = (-r\sin(t), r\cos(t)) \neq (0, 0), \forall t \in \mathbb{R}$ . De fato, no ponto em que a função seno se anula, a função cosseno é sempre diferente de 0.

Já a curva  $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ , dada no Exemplo 5, não é regular, pois quando  $t = 0$  temos que  $\alpha'(0) = (0, 0)$ , ou seja, o vetor velocidade é nulo quando  $t = 0$ .

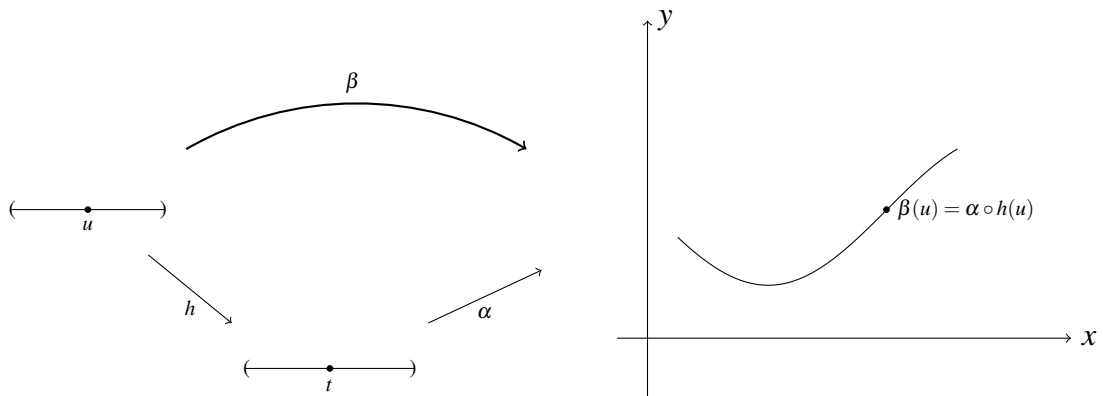
**Definição 7** *Sejam  $I$  e  $J$  intervalos de  $\mathbb{R}$ , uma curva regular  $\alpha : t \in I \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $h : u \in J \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável, cuja derivada de primeira ordem é não nula em todos os pontos de  $J$  e tal que  $h(J) = I$ . Podemos então considerar a nova curva  $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $\beta(u) = \alpha(h(u))$ , que será dita uma reparametrização de  $\alpha$  por  $h$  e terá o mesmo traço de  $\alpha$ . Veja Figura 8.*

**Exemplo 9** *Pelo Exemplo 2 temos que uma parametrização para o círculo de raio 1 é dada por  $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$ . Uma outra parametrização para a circunferência pode ser dada por  $\beta(t) = (\sin(t), \cos(t))$ , basta considerar a função  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $h(t) = \pi/2 - t$ , daí, compondo  $\alpha$  e  $h$ , obteremos  $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por*

$$\beta(t) = (\cos(\frac{\pi}{2} - t), \sin(\frac{\pi}{2} - t)) = (\sin(t), \cos(t)),$$

uma nova parametrização com o mesmo traço de  $\alpha$ .

Figura 9 – Reparametrização de uma curva.



Fonte: Elaborado pelo autor.

## 2.4 Comprimento de Arco

**Definição 8** *Dado  $t_0 \in I$ , o comprimento de arco de uma curva parametrizada regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  a partir do ponto  $t_0$ , é dado por*

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(u)| du,$$

tal que

$$|\alpha(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

é o comprimento do vetor  $\alpha'(t)$ .

**Definição 9** Dizemos que uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento de arco se o comprimento da curva  $\alpha$  de  $t_0$  a  $t_1$ , com  $t_0 \leq t_1$ , é igual a  $t_1 - t_0$ . Ou seja,

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0.$$

Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se,  $|\alpha'(t)| = 1 \forall t \in I$ .

**Exemplo 10** A curva regular  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\alpha(t) = \left( r \cos\left(\frac{t}{r}\right), r \sin\left(\frac{t}{r}\right) \right),$$

$\forall t \in \mathbb{R}$  e  $r \neq 0$ , é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, pois  $|\alpha'(t)| = 1, \forall t \in \mathbb{R}$ . O traço dessa curva é uma circunferência de raio  $r$ .

O próximo resultado mostra que toda curva regular pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco.

**Teorema 2.1** Toda curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  admite uma reparametrização  $\beta$ , tal que  $\beta$  está parametrizada pelo comprimento de arco.

**Demonstração:** Seja  $t_0 \in I$  fixo e consideremos  $s : I \rightarrow J, s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(u)| du$ , a função comprimento de arco a partir de  $t_0$ . Se  $\alpha$  é uma curva regular, então

$$s'(t) = |\alpha'(t)| > 0,$$

isto é,  $s$  é uma função estritamente crescente. Segue-se que existe a função inversa  $h : J \rightarrow I$  de  $s$ . Como  $\forall t \in I, h(s(t)) = t$ , temos que  $\frac{dh}{ds} \frac{ds}{dt} = 1$ . Portanto,

$$\frac{dh}{ds} = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\alpha'(t)|} > 0.$$

Concluimos que  $\beta(s) = \alpha \circ h(s)$ ,  $s \in J$ , é uma reparametrização de  $\alpha$  e

$$\frac{|d\beta|}{|ds|} = \frac{|d\alpha|}{|dt|} \frac{|dh|}{|ds|} = \frac{|\alpha'(t)|}{|\alpha'(t)|} = 1.$$

Dessa forma,  $\beta$  está parametrizada pelo comprimento de arco.

**Exemplo 11** Seja  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$  a parametrização da espiral logarítmica (Exemplo 7). Seu comprimento de arco de 0 a  $t$  é dado por

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(u)| du = \sqrt{2}(e^t - 1).$$

Aplicando a inversa, segue que

$$t(s) = \ln \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right)$$

e, portanto, uma parametrização por comprimento de arco para a espiral logarítmica é dada por  $\beta(s) = \alpha(t(s))$ , tal que

$$\beta(s) = \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \left( \cos \ln \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right), \sin \ln \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right).$$

## 2.5 Fórmulas de Frenet

Antes de apresentarmos as fórmulas de Frenet, recordaremos algumas propriedades do produto escalar de vetores em  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ , definimos sua norma (ou comprimento) por

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Geometricamente,  $|u|$  é a distância do ponto  $(u_1, u_2)$  à origem  $(0, 0)$ . Sejam agora  $u = (u_1, u_2)$  e  $v = (v_1, v_2)$ ,  $u, v \in \mathbb{R}^2$ , e seja  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , o ângulo formado pelos segmentos  $Ou$  e  $Ov$ . O produto escalar  $u \cdot v$  (ou também  $\langle u, v \rangle$ ) é dado por

$$u \cdot v = |u||v|\cos(\theta).$$

Dados  $u, v, w \in \mathbb{R}^2$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , valem as seguintes propriedades:

1. Considere  $u$  e  $v$  vetores não nulos. Então  $u \cdot v = 0$  se, e somente se,  $u$  é ortogonal a  $v$ , ou seja, o ângulo formado por esses dois vetores é igual a  $\pi/2$ .
2.  $u \cdot v = v \cdot u$ .
3.  $\lambda(u \cdot v) = \lambda u \cdot v = u \cdot \lambda v$ .
4.  $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$ .

Uma formulação bastante útil para o produto escalar pode ser obtida da seguinte maneira. Sejam  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$ . Dados  $i, j = 1, 2$ , temos que  $e_i \cdot e_j = 1$  se  $i = j$ , pois o

ângulo entre eles é 0, e que  $e_i \cdot e_j = 0$  se  $i \neq j$ , pois o ângulo entre eles é  $\pi$ . Dessa forma, se escrevermos

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 \quad \text{e} \quad v = v_1 e_1 + v_2 e_2,$$

e utilizarmos as propriedades vistas acima, obtemos  $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$ .

Consideraremos uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizada pelo comprimento de arco. Temos então  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ ,  $\forall s \in I$ . Notemos que  $\alpha'(s) \neq 0, \forall s \in I$ . Dessa forma, denotaremos por  $T(s)$  o vetor tangente a  $\alpha$  em  $s$ . Ou seja,

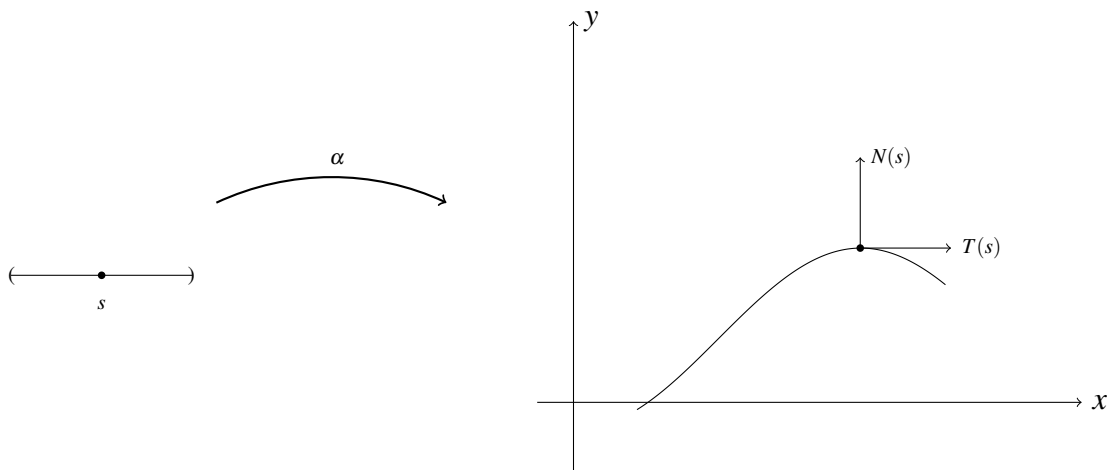
$$T(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s)).$$

Fica definido, assim, como  $N(s)$  o vetor normal unitário ortogonal a  $T(s)$  tal que a base ortogonal formada por esses dois vetores seja positiva. Temos então

$$N(s) = (-y'(s), x'(s)).$$

O conjunto dos vetores  $T(s)$  e  $N(s)$  é dito referencial de Frenet da curva  $\alpha$  em  $s$ .

Figura 10 – Referencial de Frenet.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Notemos que  $T(s)$  e  $N(s)$  são funções de  $I$  em  $\mathbb{R}^2$ , diferenciáveis e, para todo  $s \in I$ , os vetores  $T'(s)$  e  $N'(s)$  podem ser escritos como combinação linear de  $T(s)$  e  $N(s)$ . Como  $\langle T(s), T(s) \rangle = 1$ , temos que  $\langle T'(s), T(s) \rangle = 0$ , ou seja,  $T'(s)$  é paralelo a  $N(s)$ . Então existe uma função  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$T'(s) = k(s)N(s)$$

e  $k(s)$  é chamada curvatura de  $\alpha$  em  $s \in I$ . Da mesma forma,  $\langle N(s), N(s) \rangle = 1$ , então  $\langle N'(s), N(s) \rangle = 0$ , ou seja,  $N'(s)$  é múltiplo de  $T(s)$  e existe uma função  $c : J \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$N'(s) = c(s)T(s) \Rightarrow \langle T(s), N'(s) \rangle = c(s).$$

Observemos agora que  $\langle T(s), N(s) \rangle = 0$ , daí

$$\langle T'(s), N(s) \rangle + \langle T(s), N'(s) \rangle = 0,$$

ou seja,

$$\langle T(s), N'(s) \rangle = -k(s).$$

Logo,  $c(s) = -k(s)$  e portanto

$$N'(s) = -k(s)T(s).$$

Temos então que o referencial de Frenet  $T(s)$  e  $N(s)$  satisfaz as seguintes equações

$$T'(s) = k(s)N(s)$$

e

$$N'(s) = -k(s)T(s),$$

que são chamadas fórmulas de Frenet das curvas planas.

## 2.6 Teorema Fundamental das Curvas Planas

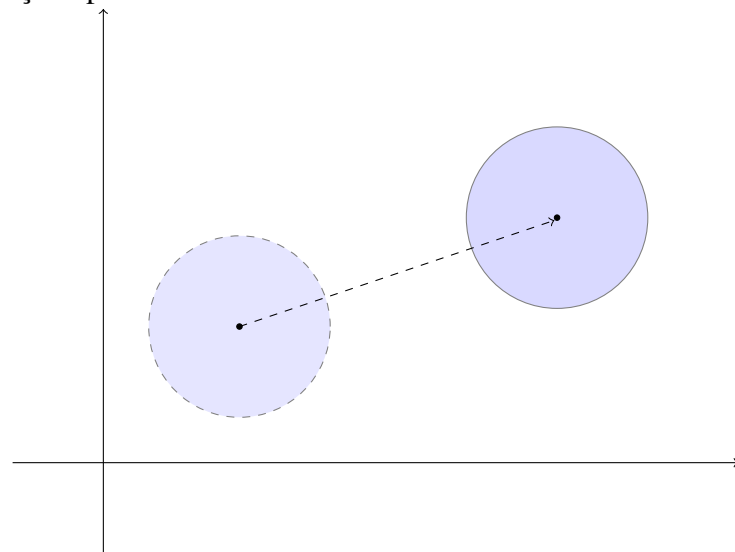
O teorema fundamental das curvas planas mostra que a função curvatura determina uma curva a menos de um movimento rígido. Antes de demonstrar o teorema vamos definir o que é um movimento rígido e apresentar algumas propriedades.

**Definição 10** *Movimento rígido é uma aplicação que descola uma curva sem alterar suas propriedades, preservando ângulos, distância entre pontos e, portanto, preservando formas e tamanho.*

Mostraremos agora duas propriedades, a translação e a rotação.

A translação é um movimento que certo objeto faz, de forma paralela e em linha reta, de um lugar para outro.

Figura 11 – Translação aplicada em uma circunferência.



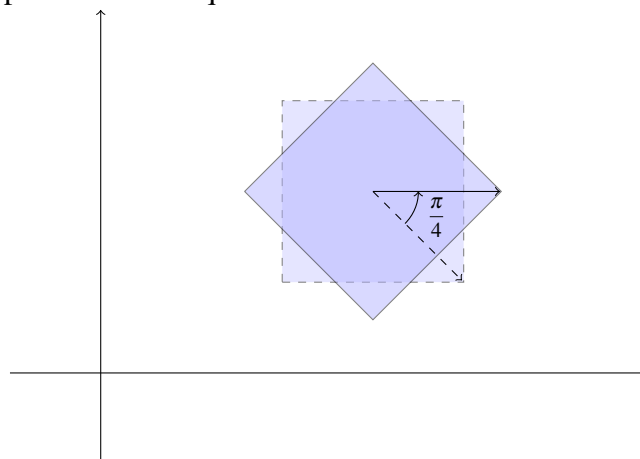
Fonte: Elaborado pelo autor.

Já a rotação, acontece a partir de um giro do objeto em um certo ângulo. A matriz associada a uma rotação por um ângulo  $\theta$  é

$$R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

O exemplo abaixo mostra a rotação de um quadrado em  $\frac{\pi}{4}$  radianos a partir do seu centro.

Figura 12 – Rotação aplicada em um quadrado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Usando a translação e a rotação podemos definir um movimento rígido numa curva como uma aplicação  $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $M = T_a \circ R_{\theta}$ , que desloca a curva sem alterar suas

propriedades. Tal deslocamento, é uma composição de uma translação  $T_a$  definida pela direção do vetor  $a$ , isto é,  $T_a(v) = v + a$ , com uma rotação  $R_\theta$  de centro na origem no sentido anti-horário pelo ângulo  $\theta$ , isto é,

$$R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta).$$

Tendo todas essas definições em mãos, então podemos enunciar e demonstrar o Teorema Fundamental das Curvas Planas.

**Teorema 2.2 (Teorema fundamental das curvas planas)**

- i) Seja  $k(s)$  uma função diferenciável, com  $s \in I \subset \mathbb{R}$ , então existe uma curva regular  $\alpha(s)$ , parametrizada pelo comprimento de arco, cuja curvatura é  $k(s)$ ;*
- ii) A curva  $\alpha(s)$  é única quando fixamos  $\alpha(s_0) = p_0 = (x_0, y_0)$  e  $\alpha'(s_0) = v_0$ , onde  $v_0$  é um vetor unitário de  $\mathbb{R}^2$ ;*
- iii) Se duas curvas  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizadas pelo comprimento de arco têm a mesma curvatura, então diferem por um movimento rígido, ou seja, existe uma rotação  $L$  e uma translação  $T$  em  $\mathbb{R}^2$  tal que*

$$\alpha(s) = (L \circ T)(\beta(s)).$$

**Demonstração:**

**i)** Seja  $\theta(s) = \int_{s_0}^s k(\xi) d\xi$ , tal que  $s_0 \in I$  é fixo. Fixaremos um ponto  $p_0 = (x_0, y_0)$  de  $\mathbb{R}^2$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Definimos uma curva  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  por

$$x(s) = x_0 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(s) + \lambda) ds,$$

$$y(s) = y_0 + \int_{s_0}^s \sin(\theta(s) + \lambda) ds.$$

Note que a curva  $\alpha$  definida desta forma está parametrizada pelo comprimento de arco  $s$  e sua curvatura é  $k(s)$ . Sabendo que o referencial de Frenet é dado por

$$T(s) = \alpha'(s) = (\cos(\theta(s) + \lambda), \sin(\theta(s) + \lambda))$$

e

$$N(s) = (-\sin(\theta(s) + \lambda), \cos(\theta(s) + \lambda)),$$

temos daí que  $|\alpha'(s)| = 1$  e a curvatura de  $\alpha$  é



$$\langle T'(s), N(s) \rangle = \theta'(s) = k(s).$$

**ii)** Seja  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , tal que a curvatura é  $k(s)$ , temos das equações de Frenet que

$$T'(s) = k(s)(-y'(s), x'(s)),$$

Ou seja,  $x(s)$  e  $y(s)$  satisfazem as equações

$$x''(s) = -k(s)y'(s),$$

$$y''(s) = -k(s)x'(s).$$

Daí, segue do teorema de unicidade de solução do sistema de equações diferenciais (Apêndice A) que, fixados  $\alpha(s_0) = p_0$  e  $\alpha'(s) = v_0$ , a curva  $\alpha$  é única.

**iii)** Sejam  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  duas curvas parametrizadas pelo comprimento de arco tais que  $k_\alpha(s) = k_\beta(s) = k(s)$  para todo  $s \in I$ . Então, existem funções  $\theta, \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciáveis tais que

$$\alpha'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)), \quad \beta'(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s))$$

e

$$\theta'(s) = \varphi'(s) = k(s),$$

para todo  $s \in I$ .

Seja  $c_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(s) = \theta(s) + c_0$ . Então, sendo  $\alpha(s_0) = p_0 = (x_0, y_0)$  e  $\beta(s_0) = p_1 = (x_1, y_1)$ , temos:

$$\alpha(s) = \left( x_0 + \int_{s_0}^s \cos \theta(t) dt, y_0 + \int_{s_0}^s \sin \theta(t) dt \right)$$

e

$$\begin{aligned} \beta(s) &= \left( x_1 + \int_{s_0}^s \cos \varphi(t) dt, y_1 + \int_{s_0}^s \sin \varphi(t) dt \right) \\ &= \left( x_1 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(s) + c_0) dt, y_1 + \int_{s_0}^s \sin(\theta(s) + c_0) dt \right) \\ &= (x_1, y_1) + \left( \int_{s_0}^s (\cos c_0 \cos \theta(t) - \sin c_0 \sin \theta(t)) dt, \right. \\ &\quad \left. \int_{s_0}^s (\cos c_0 \sin \theta(t) - \sin c_0 \cos \theta(t)) dt \right). \end{aligned}$$

Como  $x(s) - x_0 = \int_{s_0}^s \cos \theta(t) dt$  e  $y(s) - y_0 = \int_{s_0}^s \text{sen } \theta(t) dt$ , onde  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , temos que

$$\beta(s) = p_1 + (\cos c_0(x(s) - x_0) - \text{sen } c_0(y(s) - y_0), \\ \cos c_0(y(s) - y_0) + \text{sen } c_0(x(s) - x_0)).$$

Logo,  $\beta(s) = p_1 + R_{c_0}(\alpha(s) - p_0)$ , onde  $R_{c_0} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a rotação positiva do ângulo  $c_0$  em torno da origem, cuja matriz na base canônica é

$$\begin{pmatrix} \cos(c_0) & -\text{sen}(c_0) \\ \text{sen}(c_0) & \cos(c_0) \end{pmatrix}.$$

Portanto,  $\beta(s) = p_1 + R_{c_0}(\alpha(s)) - R_{c_0}(p_0) = T_a \circ R_{c_0}(\alpha(s))$ , onde  $T_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a translação dada por  $T_a(p) = p + a$ , com  $a = p_1 - R_{c_0}(p_0)$ . Temos também que  $\beta = (R_{c_0} \circ T_b) \circ \alpha$ , onde  $T_b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a translação dada por  $T_b(p) = p + b$ , com  $b = R_{c_0}^{-1}(p_1) - p_0 = R_{-c_0}(p_1) - p_0$ .

Mostraremos agora um exemplo utilizando o Teorema Fundamental das Curvas Planas, onde duas curvas com mesma curvatura e parametrizadas pelo comprimento de arco são diferentes a menos de um movimento rígido.

**Exemplo 12** Considere as curvas  $\alpha, \beta : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definidas por

$$\alpha(s) = \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \left( \cos \ln \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right), \text{sen} \ln \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right) \right)$$

e

$$\beta(s) = (1, 1) + \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \left( -\text{sen} \ln \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right), \cos \ln \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right) \right).$$

Temos que

$$\alpha'(s) = \left( -\text{sen} \ln \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right), \cos \ln \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

e

$$\beta'(s) = \left( -\cos \ln \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right), -\text{sen} \ln \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right),$$

portanto  $|\alpha'(s)| = |\beta'(s)| = 1$ . Logo,  $\alpha$  e  $\beta$  estão parametrizadas pelo comprimento de arco.

Note agora que

$$\alpha''(s) = \frac{\sqrt{2}}{s + \sqrt{2}} \left( -\cos \ln \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right), -\text{sen} \ln \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

e

$$\beta''(s) = \frac{\sqrt{2}}{s + \sqrt{2}} \left( \operatorname{sen} \ln \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right), -\operatorname{cos} \ln \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right).$$

Logo,  $k_\alpha = |\alpha''(s)| = \frac{\sqrt{2}}{s + \sqrt{2}}$  e  $k_\beta = |\beta''(s)| = \frac{\sqrt{2}}{s + \sqrt{2}}$ , para todo  $s$ . Então, existem funções  $\theta, \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciáveis tais que

$$\alpha'(s) = (\cos \theta(s), \operatorname{sen} \theta(s)), \quad \beta'(s) = (\cos \varphi(s), \operatorname{sen} \varphi(s))$$

e

$$\theta'(s) = \varphi'(s) = k(s),$$

para todo  $s \in I$ . Seja  $c_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(s) = \theta(s) + c_0$ . Sendo  $\alpha(0) = (1, 0)$  e  $\beta(0) = (1, 2)$ , obtemos

$$\beta(s) = (1, 1) + (\cos c_0(x(s) - 1) - \operatorname{sen} c_0 \cdot y(s), \cos c_0 \cdot y(s) + \operatorname{sen} c_0(x(s) - 1)).$$

Logo,  $\beta(s) = (1, 1) + R_{c_0}(\alpha(s)) - R_{c_0}(1, 0) = T_a \circ R_{c_0}(\alpha)$ , onde  $R_{c_0} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a rotação positiva do ângulo  $c_0$  em torno da origem, cuja matriz na base canônica é

$$\begin{pmatrix} \cos(c_0) & -\operatorname{sen}(c_0) \\ \operatorname{sen}(c_0) & \cos(c_0) \end{pmatrix}$$

e  $T_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a translação dada por  $T_a(x) = x + a$  com  $a = (1, 2) - R_{c_0}(1, 0)$ . Vamos agora descobrir o valor de  $c_0$ . Temos

$$A = \begin{pmatrix} \cos(c_0) & -\operatorname{sen}(c_0) \\ \operatorname{sen}(c_0) & \cos(c_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \cos \ln \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \\ \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{sen} \ln \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \end{pmatrix},$$

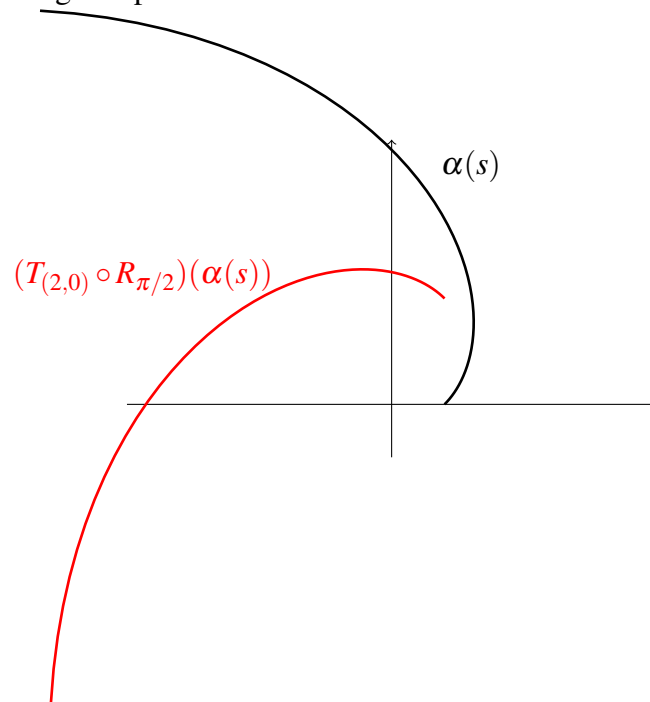
mas

$$A = \begin{pmatrix} \left( -\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{sen} \ln \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \\ \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \cos \ln \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \end{pmatrix}.$$

Igualando as matrizes e fazendo os devidos cálculos, obtemos que  $c_0 = \frac{\pi}{2}$ , portanto  $a = (1,2) - R_{\pi/2}(1,0) = (1,2) - (0,1) = (1,1)$ . Logo  $\beta(s) = (T_{(1,1)} \circ R_{\pi/2})(\alpha(s))$ .

A figura abaixo representa a curva  $\alpha$  e a curva  $\beta$ .

Figura 13 – Movimento rígido aplicado em  $\alpha$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3 RESULTADOS IMPORTANTES

#### 3.1 Desigualdade Isoperimétrica

O estudo matemático do problema isoperimétrico e problemas relacionados realmente começou a se destacar com o advento do cálculo, quando matemáticos como Newton, Leibniz, Bernoulli e outros desenvolveram formas sistemáticas de estudar problemas de otimização com base no cálculo e dentro de alguns poucos anos estavam estudando problemas do cálculo das variações, ou seja, o problema de encontrar um caminho otimizado ou forma de curva dentre algumas classes de curvas.

O que pode ter sido o primeiro aparecimento do problema isoperimétrico, é conhecido como a lenda da Rainha Dido. Dido (ou Alyssa) foi, segundo a lenda, a primeira rainha de Cartago. Dido fugiu da cidade de Tiro (hoje Líbano) depois que seu marido foi assassinado pelo próprio rei, Pigmalião, de quem era irmã. Chegando ao Norte da África, acompanhada de alguns inimigos do irmão, ela escolheu a colina de Byrsa para se estabelecer. Sem nada para oferecer, Dido pediu aos habitantes um pouco de terra, tendo-lhe sido concedido que tomasse tanta quanta pudesse conter numa pele de boi. Dido mandou cortar a pele de boi em tiras muito finas que depois de atadas formaram um longo fio com que delimitou um território bastante vasto. E foi nesse pedaço de terra que ela construiu a cidade de Cartago.

Figura 14 – Rainha Dido pedindo para cortar a pele de boi.



*Dido Purchases Land for the Foundation of Carthage.* Engraving by Matthäus Merian the Elder, in *Historische Chronica*, Frankfurt a.M., 1630. Dido's people cut the hide of an ox into thin strips and try to enclose a maximal domain.

Fonte: <https://faculty.math.illinois.edu/laugesen/dido-isoperimetry-history.pdf>

Esta história da fundação de Cartago ficou conhecida com o nome de "Problema de Dido", que pode ser enunciado como: "Dada uma curva de comprimento finito, qual é a forma que esta curva deve ter para que a sua área seja máxima?".

O próximo teorema envolve o seguinte problema. *De todas as curvas simples fechadas no plano e de comprimento  $l$ , qual delas limita a maior área?*

**Teorema 3.1** *Seja  $C$  uma curva plana simples e fechada com comprimento  $l$ , e seja  $A$  a área da região limitada por  $C$ . Então*

$$l^2 \geq 4\pi A$$

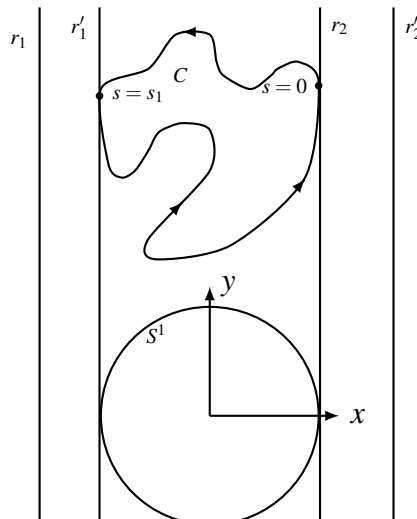
*e teremos a igualdade se, e somente se,  $C$  for um círculo.*

**Demonstração:** Utilizaremos a seguinte fórmula, pelo teorema de Green, para a área  $A$  limitada por uma curva simples e fechada com orientação positiva  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , tal que  $t \in [a, b]$  é um parâmetro arbitrário:

$$A = - \int_a^b y(t)x'(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2} \int_a^b x(t)y'(t) - y(t)x'(t)dt. \quad (3.1)$$

Sejam  $r_1$  e  $r_2$  duas retas paralelas que não intersectam a curva  $C$ , e considere o movimento dessas retas até que elas encostem em  $C$  pela primeira vez. Assim obtemos duas retas paralelas,  $r'_1$  e  $r'_2$ , que são tangentes a curva  $C$ , de tal forma que  $C$  está completamente contida na faixa limitada por  $r'_1$  e  $r'_2$ . Veja figura abaixo.

Figura 15 – Desigualdade Isoperimétrica.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Agora, considere um círculo  $S^1$  que seja tangente a  $r'_1$  e  $r'_2$  e não intersecte  $C$ . Vamos considerar o sistema de coordenadas cartesianas de tal forma que a origem coincida com o centro do círculo e o eixo das abscissas seja perpendicular as retas  $r'_1$  e  $r'_2$ . Agora, parametrizamos  $C$  pelo comprimento de arco,  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , de modo que  $C$  tenha orientação positiva e seus pontos de tangência com  $r_1$  e  $r_2$  sejam, respectivamente,  $s = 0$  e  $s = s_1$ . Vamos supor que a equação de  $S^1$  é

$$\bar{\alpha}(s) = (\bar{x}(s), \bar{y}(s)) = (x(s), \bar{y}(s)), s \in [0, l].$$

Então, pela Equação (3.1) e chamando de  $\bar{A}$  a área da região limitada por  $S^1$ , vamos obter

$$A = \int_0^l xy' ds \quad \text{e} \quad \bar{A} = \pi r^2 = - \int_0^l \bar{y}x' ds.$$

Daí,

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &= \int_0^l xy' - \int_0^l \bar{y}x' ds \\ &= \int_0^l (xy' - \bar{y}x') ds \\ &= \int_0^l [(x', y') \cdot (-\bar{y}, x)] ds. \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &\leq \int_0^l |\alpha'| |\bar{\alpha}| ds \\ &= \int_0^l |\bar{\alpha}| ds \\ &= lr. \end{aligned} \tag{3.2}$$

A igualdade se verifica apenas se  $\alpha'$  é um múltiplo de  $\bar{\alpha}$ , ou seja, se, e somente se,

$$\alpha' = (x', y') = \frac{1}{r}(-\bar{y}, x).$$

De fato

$$\begin{aligned} \int_0^l [(x', y') \cdot (-\bar{y}, x)] ds &= \int_0^l [(x', y') \cdot r(x', y')] ds \\ &= \int_0^l r(x'^2 + y'^2) ds \\ &= \int_0^l r|\alpha'|^2 ds \\ &= lr. \end{aligned}$$

Além disso, a igualdade implica que  $y' = \frac{1}{r}x$ . Utilizando a desigualdade das médias aritmética e geométrica, vale que

$$\sqrt{A\pi r^2} \leq \frac{1}{2}(A + \pi r^2) \leq \frac{1}{2}lr. \quad (3.3)$$

Logo

$$4\pi A \leq l^2.$$

Suponha agora que vale  $4\pi A = l^2$ . Daí, teremos igualdades em (3.2) e (3.3). Segue então, de (3.3), que  $\sqrt{A\pi r^2} = \frac{1}{2}(A + \pi r^2)$ , ou seja,  $A = \pi r^2$ . Assim,  $l = 2\pi r$  e com isso  $r$  não depende da escolha da direção de  $L$ . Além disso, como vale a igualdade em (3.2), vale que  $y' = \frac{1}{r}x$ . Como  $r$  não depende da direção de  $L$ , podemos aplicar a mesma construção com retas perpendiculares a  $L$ . Obtemos então que  $x' = \frac{1}{r}y$ . Logo  $|\alpha'|^2 = 1 = (x')^2 + (y')^2 = \frac{1}{r^2}(x^2 + y^2)$ , isto é,  $x^2 + y^2 = r^2$ , e portanto  $C$  é um círculo.

### 3.2 Teorema da Curva de Jordan

O matemático Camille Jordan, no final do século XIX, em seus estudos sobre análise complexa, chegou ao seguinte resultado topológico: Dada uma curva fechada e simples, é possível dividir o plano em duas regiões abertas, uma limitada e outra não, cuja fronteira comum entre elas é a curva dada. Porém, a demonstração dada por Camille Jordan para esse teorema não estava correta, a primeira demonstração correta só foi obtida no início do século XX.

Antes de enunciarmos esse teorema, iremos definir formalmente o que seria uma curva de Jordan e um caminho conexo.

**Definição 11** *Uma curva de Jordan é uma curva parametrizada  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  simples e fechada, ou seja,  $\forall i, j \in [a, b)$ , com  $i \neq j$  temos que  $\alpha(i) \neq \alpha(j)$  e  $\alpha(a) = \alpha(b)$ .*

**Definição 12** *Um conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  é conexo por caminhos se  $\forall p_1, p_2 \in A$  existe uma curva contínua em  $A$  com extremos em  $p_1$  e  $p_2$ .*

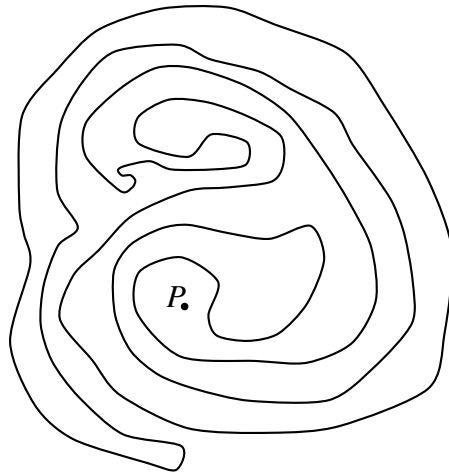
**Teorema 3.2** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva contínua e de Jordan. Então, o complementar do seu traço é a união de dois conjuntos conexos por caminhos, não vazios e a fronteira de cada um é dado pelo traço de  $\alpha$ .*



Embora este teorema seja bem intuitivo a sua demonstração é bastante complexa, não tentaremos demonstrá-lo aqui, mas apresentaremos um fato bastante interessante sobre as curvas de Jordan.

Primeiro, observe a curva de Jordan abaixo e tente dizer se o ponto  $P$  está dentro ou fora desta curva.

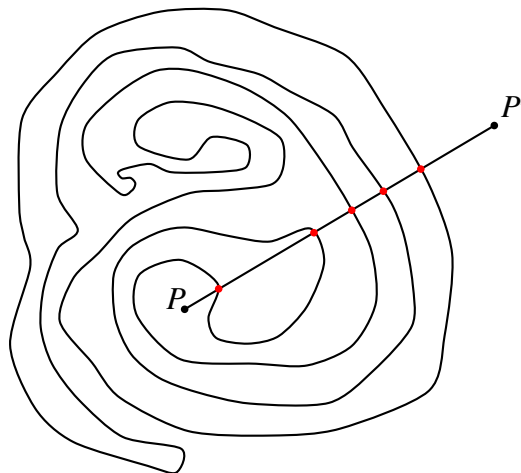
Figura 16 – Curva de Jordan 1.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para resolver esse problema, devemos primeiro traçar um segmento de reta do ponto  $P$  até outro ponto, digamos  $P'$ , fora da curva. Após traçarmos o segmento iremos contar quantas vezes ele corta a curva. Veja figura abaixo

Figura 17 – Curva de Jordan 2.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Agora, para saber se o ponto  $P$  está fora ou dentro da curva, devemos observar quantas vezes o segmento  $\overline{PP'}$  corta a curva de Jordan. Se a semi-reta cruzar a curva um número ímpar de vezes, então o ponto está dentro da curva, agora se a semi-reta cruzar a curva um número par de vezes, o ponto estará fora.

Note que no nosso exemplo a semi-reta  $\overline{PP'}$  cruza a curva cinco vezes, ou seja, um número ímpar de vezes, logo o nosso ponto  $P$  está dentro da curva.

É bem intuitivo e simples entender o motivo disso acontecer. Podemos pensar numa bola e num campo de futebol. Se a bola estiver dentro do campo, então basta ela cruzar uma vez qualquer extremidade para sair. Logo, um número ímpar de vezes. Se a bola voltar para dentro do campo, ela precisará cruzar mais uma vez alguma extremidade, mas para sair ela precisará cruzá-la mais uma vez e assim por diante. Ou seja, qualquer coisa que estiver dentro do campo deve sempre cruzar suas extremidades um número ímpar de vezes para poder sair. Agora se a bola estiver fora do campo, o raciocínio será o mesmo, para ela entrar no campo e sair novamente, precisará cruzar alguma extremidade um número par de vezes, e assim por diante.

## 4 CONCLUSÃO

A geometria diferencial das curvas planas é bem útil quando quermos mostrar resultados que não conseguimos provas utilizando a geometria euclidiana. E nesse trabalho foi apresentado algum desses resultados, sempre tentando ser o mais didático possível com exemplos gráficos e sem muita complexidade nos enunciados.

O principal objetivo desse trabalho foi apresentar o estudo das curvas planas dentro da geometria diferencial. Onde mostramos a definição de uma curva parametrizada e avançamos até chegar no Teorema Fundamental das Curvas Planas, que era o principal objetivo do trabalho. Além disso, apresentamos também a desigualdade isoperimétrica e o Teorema das Curvas de Jordan.

Espero que esse trabalho sirva de fonte de estudo e incentivo para muitos alunos, sejam de qual for a área, que queiram conhecer um pouco sobre a geometria diferencial.

## REFERÊNCIAS

- ALENCAR, H. **Geometria Diferencial das Curvas Planas**. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2003.
- ASHBAUGH, M.; BENGURIA, R. **Overview of the Subject of Isoperimetry**. Disponível em: <<https://faculty.math.illinois.edu/~laugesen/dido-isoperimetry-history.pdf>>.
- BROCKVELD, L. de L. Um estudo sobre curvas no plano e no espaço. **TCC — IMPA**.
- CARMO, M. P. do. **Elementos da Geometria Diferencial**. [S.l.]: Coleção Textos Universitários, 1971.
- CARMO, M. P. do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 6ª. ed. [S.l.]: Coleção Textos Universitários, 1976.
- COURSES ucla. **Local existence and uniqueness theorem**. Disponível em: <<http://www.cs.ucr.edu/~craigs/ucla-courses/135.2.16s/proof-local.pdf>>.
- DELGADO, J.; FRENSEL, K. **Geometria Diferencial I**. 2017. Disponível em: <<http://www.professores.uff.br/katiafrensel/wp-content/uploads/sites/115/delightful-downloads/2019/09/gdif.pdf>>.
- GAGE, M.; HAMILTON, R. The heat equation shrinking convex plane curve. **Journal of Differential Geometry**, 1986.
- HIPERATIVO, S. . **Dentro ou fora? O Teorema da Curva de Jordan**. 2009. Disponível em: <<https://www.sedentario.org/colunas/duvida-razoavel/dentro-ou-fora-2-15872>>. Acesso em: 31 março 2020.
- LOPES, L.; MONTENEGRO, J. **Evolução de curvas planas pela curvatura**. 1. ed. Endereço: Gráfica UFMG, 1998. v. 1.
- SANTANA, J. E. M. de. Evolução de curvas planas pela curvatura. **Dissertação de Mestrado, IMPA — IMPA** — IMPA, 28 de junho de 2007.
- TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2ª. ed. [S.l.]: Edgar Blücher Ltda., 1988.

## APÊNDICE A – TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE

**Teorema A.1** *Seja  $f(x, y)$  uma função contínua de duas variáveis, tal que  $f$  seja Lipschitz em  $y$ , ou seja,  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$  na região retangular  $R$  definida por  $x \in [a, b]$  e  $y \in [c, d]$ . Se  $x_0 \in (a, b)$  e  $y_0 \in (c, d)$ , então a EDO*

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0 \quad (\text{A.1})$$

*tem uma única solução  $y = y(x)$  no intervalo  $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$  para algum  $h > 0$ .*

**Demonstração:** A prova será dividida em 5 passos:

1. Escolher  $h$ .
2. Mostrar que a EDO (A.1) é equivalente a

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (\text{A.2})$$

3. Definir a sequência  $y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt$ , onde  $y_0(x) = y_0$ .
4. Mostrar que a sequência  $y_n(x)$  converge para a função  $y(x)$ .
5. Seja  $\bar{y}(x)$  satisfazendo (A.2), então  $\bar{y}(x) = y(x)$ .

### Parte 1

A maior complicação com a prova do teorema local com o teorema global é que ele garante que  $f(x, y)$  só se aplique dentro do retângulo  $R$ . Isso nos força a limitar nosso foco a um intervalo  $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ , onde podemos escolher  $h$  para ter as propriedades que precisamos para a demonstração.

Primeiro, note que  $|f(x, y)|$  é contínua na região  $R$  que é limitada e fechada, logo possui um máximo. Podemos então escrever  $|f(x, y)| \leq M$ , para algum  $M$ . Vamos escolher  $h$  tal que

$$[x_0 - h, x_0 + h] \subseteq [a, b] \quad (\text{A.3})$$

$$[y_0 - Mh, y_0 + Mh] \subseteq [c, d] \quad (\text{A.4})$$

$$Kh < 1. \quad (\text{A.5})$$

Note que (A.3) e (A.4) valem para  $h$  suficientemente pequeno, já que  $(x_0, y_0)$  está no interior de  $R$  e não na fronteira. Seja  $S = [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - Mh, y_0 + Mh]$  a região retangular restrita, observe que  $S \subseteq R$ .

## Parte 2

O argumento apresentado no caso global é igualmente válido no caso local, exceto que devemos ter cuidado para garantir que  $y(x) \in [c, d]$ .

Primeiro, mostraremos que, restrita a  $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ , uma solução para (A.1) está em  $S$ . A prova será feita por contradição, começaremos supondo que  $|y(x_1) - y_0| > Mh$  para algum  $x_1 \in [x_0 - h, x_0 + h]$ . Pela continuidade de  $y(x)$ , também podemos mostrar que podemos escolher  $x_2 \in (x_0 - h, x_0 + h)$  tal que

- i  $|y(x_2) - y_0| = Mh$
- ii  $|y(x) - y_0| < Mh$  para  $|x - x_0| < |x_2 - x_0| < h$ .

O teorema do valor médio garante a existencia de um  $\xi$  entre  $x$  e  $x_0$  tal que

$$\left| \frac{y(x_2) - y(x_0)}{x_2 - x_0} \right| = |y'(\xi)| = |f(\xi, y(\xi))| \leq M.$$

Note que  $|\xi - x_0| < |x_2 - x_0|$ , tal que  $|y(\xi) - y_0| < Mh$ . Como  $(\xi, y(\xi)) \in S$ , as hipóteses em  $f(x, y)$  se aplicam. Finalmente

$$\left| \frac{y(x_2) - y(x_0)}{x_2 - x_0} \right| > \frac{|y(x_2) - y(x_0)|}{h} = \frac{Mh}{h} = M$$

e isso nos dá a contradição que queríamos. Segue daí que  $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$  implica  $|y(x) - y_0| \leq Mh$ , para que a solução esteja em  $S$ .

## Parte 3

Defina a sequência

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt, \quad y_0(x) = y_0. \quad (\text{A.6})$$

Essa sequência é chamada interação de Picard. Para essa sequência ser usada, devemos mostrar que ela está em  $S$ . Se  $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$  então

$$|y_n(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt \right| \leq Mh. \quad (\text{A.7})$$

Note que isso deve ser usado indutivamente, uma vez que  $y_{n-1} \in [c, d]$ . Para  $n = 0$  é trivial, que permite que o limite acima seja aplicado indutivamente. Todas as interações de Picard estão no retângulo  $S$ .

## Parte 4

Precisamos mostrar que  $y_n \rightarrow y(x)$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Essa prova equivale a mostrar que a interação de picard é uma contração e depois provar o teorema do ponto fixo de Banach. A prova é um pouco mais simples do que isso, já que há mais contexto disponível.

### *Aproximações Consecutivas Limitadas*

Observe que  $|y_0(x) - y_1(x)|$  é contínuo no intervalo limitado e fechado  $[a, b]$ , então ele deve assumir um valor máximo nesse intervalo. Portanto, para algum  $M$ , podemos escrever  $|y_0(x) - y_1(x)| < M$ . A chave para delimitar intervalos subsequentes é usar a continuidade de Lipschitz para relacionar diferenças consecutivas (assumindo  $x > x_0$ )

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, y_{n-2}(t)) dt \right| \quad (\text{A.8})$$

$$= \left| \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y_{n-2}(t)) dt \right| \quad (\text{A.9})$$

$$\leq \int_{x_0}^x |f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y_{n-2}(t))| dt \quad (\text{A.10})$$

$$\leq \int_{x_0}^x K |y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)| dt \quad (\text{A.11})$$

$$= K \int_{x_0}^x |y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)| dt. \quad (\text{A.12})$$

Isso nos leva a seguinte sequência de diferenças

$$|y_1(x) - y_0| \leq M$$

$$|y_2(x) - y_1| \leq K \int_{x_0}^x |y_1(x) - y_0(x)| dt \leq K \int_{x_0}^x M dt = Mkh$$

$$|y_3(x) - y_2| \leq K \int_{x_0}^x |y_2(x) - y_1(x)| dt \leq K \int_{x_0}^x MKh dt = (Mkh)^2$$

⋮

$$|y_n(x) - y_{n-1}| \leq K \int_{x_0}^x |y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)| dt \leq K \int_{x_0}^x M(Kh)^{n-2} dt = (Mkh)^{n-1}.$$

Esse limite foi assumido com  $x > x_0$ , pois, caso contrário, muitas integrais seriam negativas.

Poderíamos assumir o argumento com  $x < x_0$  e obteríamos o mesmo resultado.

### *Convergência*

Podemos expressar os termos da sequência como uma soma telescópica

$$y_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^n (y_k(x) - y_{k-1}(x)). \quad (\text{A.13})$$

Se  $y_n \rightarrow y(x)$ , então

$$y(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (y_k(x) - y_{k-1}(x)). \quad (\text{A.14})$$

Note que essa é apenas a definição de uma série infinita. O limite existe se, e somente se, essa série converge. Então

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M(Kh)^{k-1} = \frac{M}{1 - Kh} \quad (\text{A.15})$$

converge já que  $Kh < 1$ ,  $y_n \rightarrow y(x)$ . Vimos agora o motivo de  $Kh < 1$  que tomamos ao escolher  $h$ .

## Parte 5

Agora, vamos mostrar a unicidade. Assumiremos que  $y$  e  $\bar{y}$  são duas soluções para (A.2). Seja  $Q = \max_x |\bar{y}(x) - y(x)|$ .

$$Q = \max_x |\bar{y}(x) - y(x)| \quad (\text{A.16})$$

$$= \max_x \left| \int_{x_0}^x f(t, \bar{y}(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right| \quad (\text{A.17})$$

$$\leq \max_x \int_{x_0}^x |f(t, \bar{y}(t)) - f(t, y(t))| dt \quad (\text{A.18})$$

$$\leq K \max_x \int_{x_0}^x |\bar{y}(t) - y(t)| dt \quad (\text{A.19})$$

$$\leq K \max_x \int_{x_0}^x Q dt \quad (\text{A.20})$$

$$\leq K \max_x Qh \quad (\text{A.21})$$

$$= KhQ. \quad (\text{A.22})$$

Note que  $Kh < 1$  e  $Q \geq 0$ , concluímos que  $Q = 0$ . Então  $\bar{y} = y$ . Como as soluções são iguais, a solução é única. Assim, terminamos a demonstração do teorema.