



XXI Congresso Brasileiro  
de Engenharia Química

Fortaleza/CE  
25 a 29 de setembro



XVI Encontro Brasileiro sobre o  
Ensino de Engenharia Química  
Fortaleza/CE  
25 a 29 de setembro

# MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE MÉTODO DIFERENCIAL UTILIZANDO VOLUMES FINITOS PARA PROCESSO DE SECAGEM CONVECTIVA

M. L. MAGALHÃES<sup>1</sup>, F. A. N. FERNANDES<sup>1</sup> e S. J. M. CARTAXO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Química  
E-mail para contato: madson.l.magalhaes@gmail.com

**RESUMO** – *A desidratação térmica demanda um alto consumo de energia em processos industriais. Por este motivo vários estudos vêm sendo realizados nos últimos anos. O processo de secagem é mais significativo em indústrias alimentícias. A secagem envolve os fenômenos de transferência de calor e massa. Este trabalho realiza a modelagem e simulação de um método diferencial tridimensional utilizando volumes finitos para secagem convectiva de sólidos no formato cúbico. A difusividade e o coeficiente pelicular são ajustados pelo método de mínimos quadrados, os perfis do conteúdo de umidade no interior do sólido são obtidos. Utilizaram-se os dados experimentais da secagem convectiva de cubos de maçã (*Malus domestica* L.) nas velocidades 2, 3 e 5 m/s com ar de secagem em 60°C como estudos de caso. Os resultados das simulações mostraram que o método desenvolvido é uma boa alternativa aos métodos analíticos largamente difundidos na literatura, pois a consideração do coeficiente pelicular possibilita uma avaliação da influência da convecção na secagem e a avaliação dos perfis do conteúdo de umidade dentro do sólido.*

## 1. INTRODUÇÃO

O processo de secagem pode ser definido como a operação que tem por objetivo a remoção de água, ou qualquer outro líquido, presente em uma matriz sólida, por meio da aplicação de calor. (McCabe *et al.*, 2001). Estima-se que de 9-25% do consumo de energia da indústria nacional nos países desenvolvidos é atribuído a desidratação térmica (Jangam *et al.*, 2010).

Na secagem convectiva, o calor provém do meio fluido externo. Esta energia vaporiza o líquido contido na superfície. Enquanto a migração, por difusão, do líquido dentro do sólido para a superfície for suficientemente grande para que compense esta vaporização, há uma equivalência entre as transferências externas de calor e massa, caracterizando o período constante de secagem. Quando esta difusão não compensa a vaporização na superfície, a secagem é regida pela difusão interna, caracterizando o período de taxa de secagem decrescente. Em produtos biológicos, geralmente a taxa decrescente é a única observada.

PROMOÇÃO

REALIZAÇÃO

ORGANIZAÇÃO



Muitos métodos analíticos para a taxa decrescente da secagem, largamente difundidos na literatura, são empíricos. Podemos destacar os desenvolvidos por: Page (1949) e Midilli *et al.* (2002). Crank (1975) desenvolveu, a partir da segunda Lei de Fick truncada, soluções para condições de contorno e iniciais variadas para geometrias simples.

Este trabalho visa o desenvolvimento de um modelo diferencial para secagem convectiva e a implementação deste modelo na ferramenta livre Python<sup>®</sup> para obtenção dos parâmetros ajustados, difusividade e coeficiente pelicular, e a obtenção dos perfis do conteúdo de umidade dentro do sólido.

## 2. MODELAGEM MATEMÁTICA

Todos os métodos deste trabalho foram implementados e simulados na ferramenta livre Python<sup>®</sup> com o auxílio de seus módulos científicos. Para a obtenção dos parâmetros ótimos de cada método, realizou-se a regressão não-linear por meio da técnica dos mínimos quadrados de Levenberg-Marquardt. A equação de Crank (1975) para um cubo, Equação 1, foi utilizada para comparar os valores obtidos pelo método numérico. Estimaram-se, a partir dos dados experimentais, os valores da umidade crítica e da difusividade da equação de Crank.

$$U(t) = U_{eq} + (U_{crit} - U_{eq}) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(2n+1)^2 \pi^2} \exp\left(-\frac{D(2n+1)^2 \pi^2 t}{4a^2}\right) \right]^3 \quad (1)$$

O método diferencial foi desenvolvido para o período de taxa decrescente da secagem com as seguintes hipóteses simplificadoras:

- A secagem é feita por um secador convectivo com velocidade e temperatura do ar constante;
- O sólido tem formato cúbico definido com dimensões constantes ao longo da secagem;
- O sólido é isotrópico;
- O processo ocorre isotermicamente e na temperatura do ar de secagem;
- Ocorre apenas difusão simples e esta é constante em todo o processo.

A segunda Lei de Fick, Equação 2, rege a difusão no interior do sólido.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

A partir destas hipóteses, foi realizada a discretização da malha do sólido utilizando o método dos volumes finitos. Os parâmetros ajustados para este método foram a difusividade e o coeficiente pelicular externo. Devido ao caráter simétrico, o sólido foi dividido em oito cubos iguais. Apenas um desses cubos é simulado, com a finalidade da redução do esforço computacional. A discretização do

tempo foi realizada pela técnica das diferenças progressivas, já a discretização do espaço foi feita pela técnica das diferenças centradas. Após a discretização, a Equação 2, assume a seguinte forma:

$$U_{t+1,i,j,k} = U_{t,i,j,k} + (D \cdot \Delta t) \left[ \left( \frac{U_{t,i+1,j,k} - 2U_{t,i,j,k} + U_{t,i-1,j,k}}{\Delta x^2} \right) + \left( \frac{U_{t,i,j+1,k} - 2U_{t,i,j,k} + U_{t,i,j-1,k}}{\Delta y^2} \right) + \left( \frac{U_{t,i,j,k+1} - 2U_{t,i,j,k} + U_{t,i,j,k-1}}{\Delta z^2} \right) \right] \quad (3)$$

Nas fronteiras, foram impostas as seguintes condições de contorno:

- Faces superficiais: igualdade entre os fluxos difusivos e convectivos;
- Faces centrais do sólido: valores máximos devido a simetria do sólido.

A resolução da malha foi feita pelo método de Fatoração LU após a imposição das condições de contorno. Para que pudéssemos comparar os dois métodos e os dados experimentais, a integral volumétrica do conteúdo de umidade do método diferencial foi obtida, Equação 4.

$$\bar{U}_t = \int_0^{V_s/8} U_t dV / \int_0^{V_s/8} dV = 8 \left( \sum_{k=0}^a \sum_{j=0}^a \sum_{i=0}^a U_{t,i,j,k} \cdot V_c \right) / V_s \quad (4)$$

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para avaliarmos o método desenvolvido, utilizaram-se os dados experimentais obtidos por Fernandes *et al.* (2015) para secagem convectiva de maçã (*Malus domestica* L.) com 8 mm de aresta, em média, com ar de secagem em aproximadamente 60 °C e nas velocidades 2, 3 e 5 m/s. A Figura 1 apresenta a cinética de secagem das três condições operacionais supracitadas.

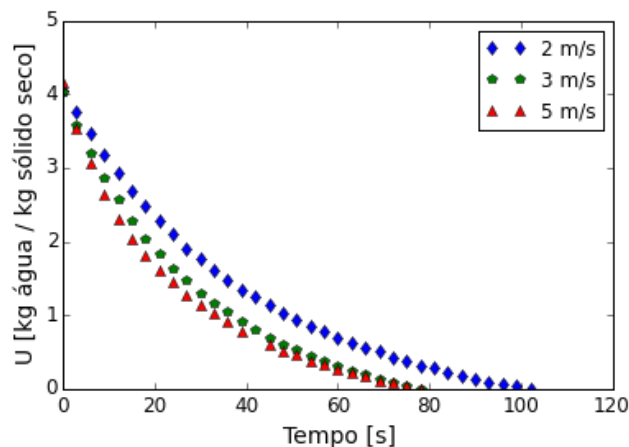


Figura 1 – Cinética de Secagem Convectiva para as velocidades 2, 3 e 5 m/s na temperatura de 60°C.

As Figuras 2 e 3 apresentam as cinéticas de secagem dos experimentos com velocidade de 2 e 5 m/s, respectivamente

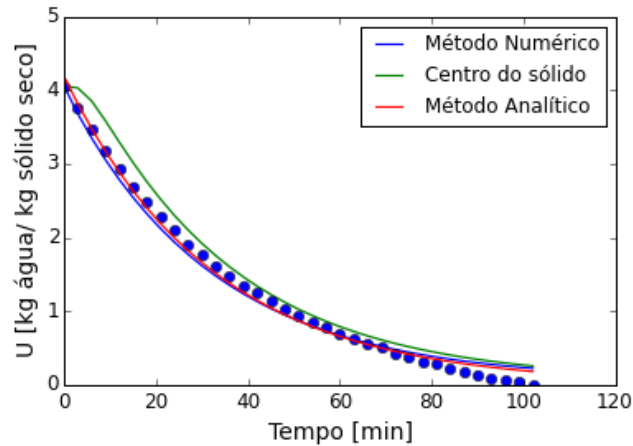


Figura 2 – Cinética de Secagem na condição de 2 m/s.

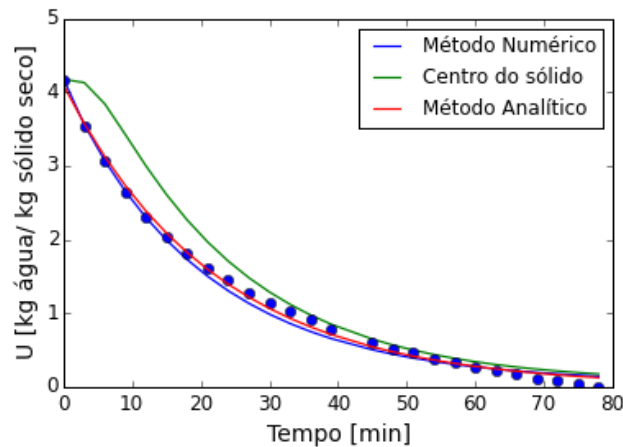


Figura 3 – Cinética de Secagem na condição de 5 m/s.

As Figuras 4, 5 e 6 mostram os perfis do conteúdo de umidade dentro do sólido nos tempos 10, 20 e 30 minutos para os experimentos na velocidade de 2 m/s, respectivamente. As Figuras 7, 8 e 9 mostram os perfis do conteúdo de umidade dentro do sólido nos tempos 10, 20 e 30 minutos para os experimentos na velocidade de 5 m/s, respectivamente.

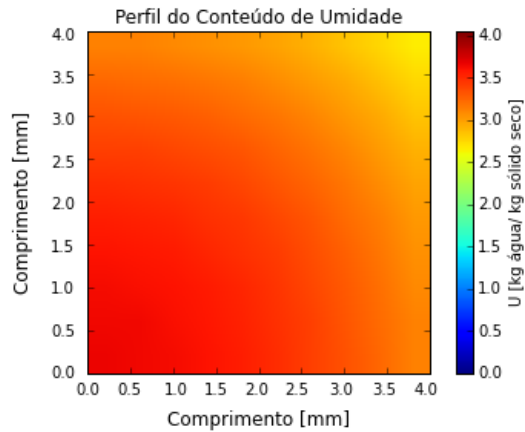


Figura 4 – Conteúdo de Umidade. 2m/s 10min.

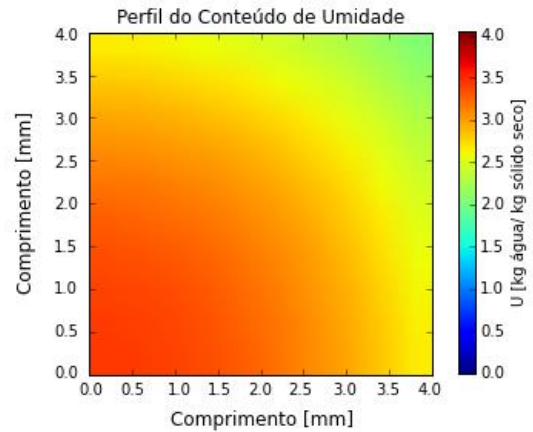


Figura 7 – Conteúdo de Umidade. 5m/s 10min.

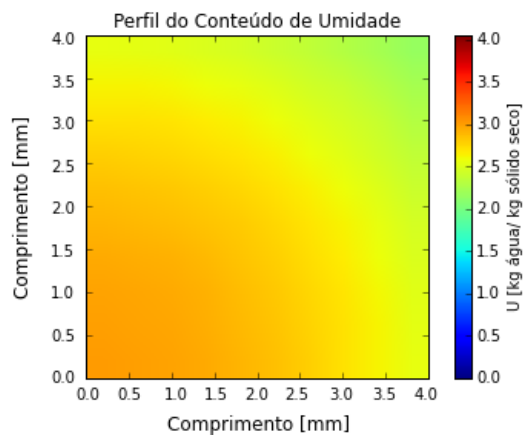


Figura 5 – Conteúdo de Umidade. 2m/s 20min.

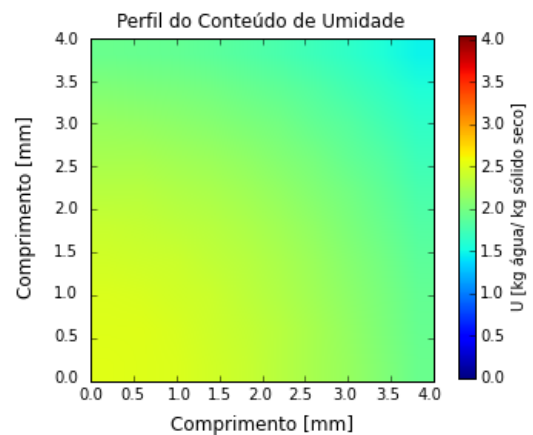


Figura 8 – Conteúdo de Umidade. 5m/s 20min.

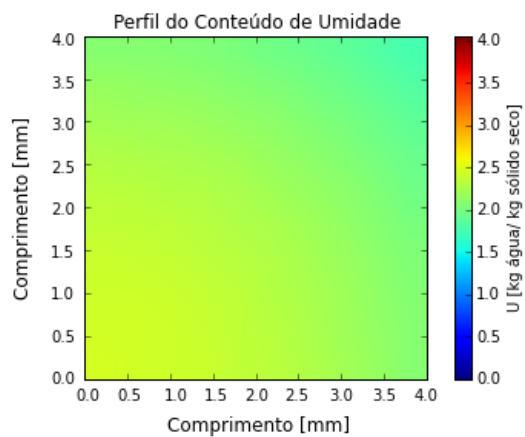


Figura 6 – Conteúdo de Umidade. 2m/s 30min.

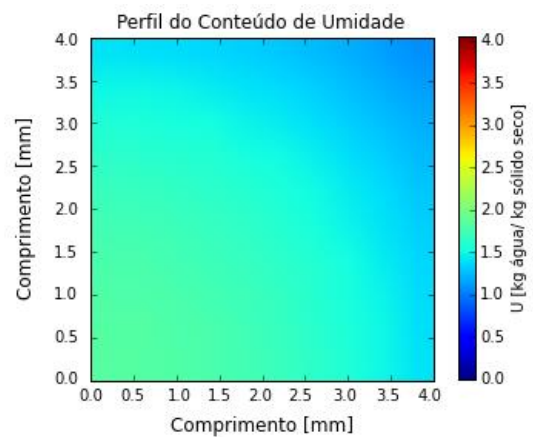


Figura 9 – Conteúdo de Umidade. 5m/s 30min.



As Tabelas 1 e 2 mostram os valores dos parâmetros ajustados pela regressão não-linear dos métodos analítico e numérico, respectivamente.

Tabela 1. Parâmetros do método analítico ajustados.

	Velocidade de 2 m/s	Velocidade de 3 m/s	Velocidade de 5 m/s
<b>Difusividade</b>	1.11e-9 m <sup>2</sup> /s	1.47e-9 m <sup>2</sup> /s	1.62e-9 m <sup>2</sup> /s
<b>Umidade Crítica</b>	7.86 kg água/ kg de sólido seco	7.73 kg água/ kg de sólido seco	7.67 kg água/ kg de sólido seco
<b>Coefficiente de determinação</b>	0.99	0.99	0.99

Tabela 2. Parâmetros do método numérico ajustados.

	Velocidade de 2 m/s	Velocidade de 3 m/s	Velocidade de 5 m/s
<b>Difusividade</b>	7.82e-8 m <sup>2</sup> /s	7.82e-8 m <sup>2</sup> /s	7.82e-8 m <sup>2</sup> /s
<b>Coefficiente Pelicular</b>	7.70e-6 m/s	1.03e-5 m/s	1.30e-5 m/s
<b>Número de Biot de Massa</b>	0.13	0.17	0.22
<b>Coefficiente de determinação</b>	0.99	0.99	0.99

Observamos, a partir da Figura 1, que com o aumento da velocidade do ar, uma maior taxa de secagem ocorre. Isso é explicado pela resistência externa, que se concentra na camada limite. Quanto maior a velocidade, maior o número de Reynolds e menor espessura da camada limite, assim, menor resistência.

Observamos nas Figuras 2 e 3 que os perfis do conteúdo de umidade médio obtidos pelos dois métodos se aproximam na maior parte do processo, mas o valor do conteúdo de umidade no centro do sólido desvia-se consideravelmente no começo do processo e, ao longo da secagem, se aproxima dos valores médios. Este desvio é explicado pelo fato de que a difusividade governa a transferência de massa, assim, um tempo maior é necessário para que se comece a alterar de maneira significativa o conteúdo de umidade no centro do sólido. Os desvios entre o conteúdo de umidade central e os valores médios são mais acentuados com o aumento da velocidade, pois a resistência externa diminui, fazendo com que as regiões superficiais sejam mais secas, gerando maiores gradientes.

Percebemos pelos perfis do conteúdo de umidade dentro do sólido que, mesmo em geometrias simples e sólidos com pequenas dimensões, existem zonas úmidas centrais, principalmente no começo



XXI Congresso Brasileiro  
de Engenharia Química

Fortaleza/CE  
25 a 29 de setembro



XVI Encontro Brasileiro sobre o  
Ensino de Engenharia Química  
Fortaleza/CE  
25 a 29 de setembro

da secagem. Estes perfis só podem ser encontrados em modelos que utilizam parâmetros distribuídos, como desenvolvido neste trabalho. Percebemos que, devido a menor resistência externa, os perfis da condição de 5 m/s apresentam gradientes maiores e que o conteúdo de umidade dentro do sólido é sempre menor do que nas outras condições.

Na Tabela 1 percebemos que os valores das difusividades aparentes ajustadas no método analítico aumentam com o aumento da velocidade do ar. Matematicamente faz sentido, pois sabemos que com o aumento da velocidade do ar uma maior taxa de secagem é obtida, mas quando avaliamos pelo ponto de vista físico isso não era esperado, pois a difusividade é função basicamente da temperatura, da matriz sólida e do líquido que está se difundindo, em todos os casos simulados estes três parâmetros são iguais, assim o valor da difusividade deve ser o mesmo. Já que o método analítico contempla apenas a difusividade como resistência à transferência de massa, todas as variações são absorvidas por este parâmetro. Para uma avaliação inicial, este modelo é de grande importância, pois oferece valores que norteiam o comportamento da secagem de maneira rápida, mas ele não oferta informações sobre a influência da convecção. Observou-se que os valores da umidade crítica variaram levemente, ratificando o caráter empírico deste parâmetro.

Observou-se na Tabela 2 que os valores ajustados das difusividades pelo método numérico foram os mesmos, a igualdade deste parâmetro nas três condições possui consistência matemática e física, pois apenas a velocidade do ar foi alterada entre os experimentos. Percebemos que, com o aumento da velocidade, maiores valores do coeficiente pelicular foram obtidos, pois a resistência externa diminui.

Tão importante quanto a estimativa das resistências, interna e externa, é a avaliação da influência de cada uma no fenômeno. Devido a isto, o número de Biot de Massa foi calculado. Observamos na Tabela 2 que o valor deste número adimensional aumenta com o aumento da velocidade, confirmando a menor influência da camada limite externa. Vale ressaltar que na velocidade 2 m/s o valor deste número adimensional aproximou-se do valor limítrofe, 0.1, indicando que a influência das resistências interna e externa foi semelhante. Os coeficientes de determinação para os três casos mostraram que os dois modelos representaram bem os dados experimentais.

## 4. CONCLUSÃO

O modelo diferencial proposto neste trabalho mostrou-se uma boa alternativa para o estudo do processo de secagem, em especial para produtos biológicos, pois oferece o perfil do conteúdo de umidade no interior do sólido ao longo do processo de secagem. Estes perfis mostram as possíveis zonas úmidas, que afetam diretamente na qualidade e segurança de produtos biológicos devido a proliferação de micro-organismos.

Este trabalho também avalia o número de Biot de Massa, fornecendo assim, informações pertinentes as resistências interna e externa. A partir dos casos simulados, percebeu-se que, com o aumento da velocidade do ar de secagem, a influência da resistência externa diminui, os gradientes de umidade aumentam e conseqüentemente a taxa de secagem é maior.

PROMOÇÃO

REALIZAÇÃO

ORGANIZAÇÃO



## 5. NOMENCLATURA

a	Metade da aresta do cubo [m]
D	Difusividade efetiva da água no sólido [m <sup>2</sup> /s]
n	Número de termos
t	Tempo [s]
$\bar{U}_t$	Conteúdo de umidade média em base seca [kg <sub>água</sub> /kg <sub>sólido seco</sub> ]
U(t)	Conteúdo de umidade em base seca [kg <sub>água</sub> /kg <sub>sólido seco</sub> ]
U <sub>crit</sub>	Umidade crítica [kg <sub>água</sub> /kg <sub>sólido seco</sub> ]
U <sub>eq</sub>	Umidade de equilíbrio [kg <sub>água</sub> /kg <sub>sólido seco</sub> ]
V <sub>c</sub>	Volume de controle [m <sup>3</sup> ]
V <sub>s</sub>	Volume do sólido [m <sup>3</sup> ]

## 6. REFERÊNCIAS

- CRANK, J. (1975). The mathematics of diffusion (2nd ed., p. 414). Glasgow: Oxford University Press.
- FERNANDES, F. A. N., RODRIGUES, S., CÁRCEL, J. A., GARCÍA-PÉREZ, J. V., *Ultrasound-Assisted Air-Drying of apple (Malus domestica L.) and Its Effects on the Vitamin of the Dried Product*. Food Bioprocess Technol., v. 8, p. 1503-1511, 2015.
- JANGAM, S. V., LAW, C. L., MUJUMDAR, A. S. *Drying of Foods, Vegetables and Fruits. Vol. 1*, ISBN – 798-981-08-6759-1, 2010.
- McCABE, W. L.; SMITH, J. C.; HARRIOT, P. *Units Operations of Chemical Engineering*. 6.<sup>a</sup> ed., Ed. McGraw-Hill, 2001, pp. 773-811.
- MIDILLI, A.; KUCUK, H.; YAPAR, Z. A new model for single-layer drying. *Drying Technology*, 20(7), 2002, pp. 1503–1513.
- PAGE, G. E. *Factors influencing the maximum rates of air drying shelled corn in thin layers*. Unpublished Master Thesis, Purdue University, Lafayette, IN, USA. 1949.