



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

PEDRO SANTOS MOTA E ARRAES

NÚMEROS DE ENVOLTÓRIA E GEODÉTICO EM CLASSES DE
GRAFOS ORIENTADOS

FORTALEZA

2020

PEDRO SANTOS MOTA E ARRAES

NÚMEROS DE ENVOLTÓRIA E GEODÉTICO EM CLASSES DE GRAFOS
ORIENTADOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. área de concentração: Combinatória.

Orientador: Prof. Dr. Júlio César Silva Araújo

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- A796n Arraes, Pedro Santos Mota e.
Números de Envoltória e Geodético em Classes de Grafos Orientados / Pedro Santos Mota e Arraes. –
2020.
61 f. : il.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação
em Matemática, Fortaleza, 2020.
Orientação: Prof. Dr. Júlio César Silva Araújo.
1. Número de Envoltória. 2. Número Geodético. 3. Grafos Orientados. 4. Convexidade em Grafos. I.
Título.

CDD 510

PEDRO SANTOS MOTA E ARRAES

NÚMEROS DE ENVOLTÓRIA E GEODÉTICO
EM CLASSES DE GRAFOS ORIENTADOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. área de concentração: Combinatória.

Aprovada em: 20 / 02 / 2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Júlio César Silva Araújo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof^a Dra. Ana Shirley Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Rudini Menezes Sampaio
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ignasi Sau Valls
Pesquisador do CNRS, LIRMM, França

RESUMO

Dado um grafo orientado $D = (V, A)$, uma (u, v) -geodésica é um (u, v) -caminho (caminho do vértice u até o v) de menor comprimento. Um subconjunto de vértices $S \subseteq V(D)$ é dito convexo quando esse contém os vértices de todas as (u, v) -geodésicas e de todas as (v, u) -geodésicas, com $u, v \in S$. A envoltória de um conjunto $S \subseteq V(D)$, denotada por $[S]$, é o menor conjunto convexo contendo S ; essa também pode ser definida como a interseção de todos os conjuntos convexos que contêm S . Quando $[S] = V(D)$ dizemos que S é um conjunto de envoltória de D , e o número de envoltória de D é a cardinalidade de um conjunto de envoltória mínimo. Caso cada vértice de D pertença a alguma (u, v) -geodésica com $u, v \in S$, dizemos que S é um conjunto geodético de D . Similarmente, o número geodético de D é a cardinalidade de um conjunto geodético mínimo. Nesta dissertação, além de revisarmos a literatura associada, apresentamos algumas contribuições para esses parâmetros em algumas classes de grafos orientados. A primeira é um limitante superior apertado para torneios, o qual estenderemos para grafos split orientados. Em seguida mostramos que os problemas relacionados a esses parâmetros são NP-completos para grafos bipartidos orientados. No caso do número de envoltória, isso também vale para uma subclasse de bipartidos: os cubos parciais. Para o número geodético, o grafo orientado utilizado na redução não só é bipartido, como também é um grafo direcionado acíclico. Por fim, provamos que é possível obter esses dois parâmetros em tempo polinomial para cactos orientados, uma superclasse de árvores orientadas.

Palavras-chave: Número de envoltória. Número geodético. Grafos orientados. Conectividade em grafos.

ABSTRACT

Given an oriented graph $D = (V, A)$, an (u, v) -geodesic is an (u, v) -path (path from the vertex u to v) of smallest size. A vertex subset $S \subseteq V(D)$ is convex whenever it contains the vertices of every (u, v) -geodesic and every (v, u) -geodesic, with $u, v \in S$. The hull of a set $S \subseteq V(D)$, denoted by $[S]$, is the smallest convex set containing S ; it can also be defined as the intersection of all convex sets containing S . When $[S] = V(D)$, we say that S is a hull set of D , and the hull number of D is the cardinality of a minimum hull set of D . In case each vertex of D belongs to some (u, v) -geodesic with $u, v \in S$, we say that S is a geodetic set of D . Similarly, the geodetic number of D is the cardinality of a minimum geodetic set. In this dissertation, besides reviewing the associated literature, we present a few contributions for these parameters in some classes of oriented graphs. The first one is a tight upper bound for tournaments, which we later extend for oriented split graphs. We also show that the decision problems related to these parameters are NP-complete for oriented bipartite graphs. For the hull number case, this is also true even if restricted to oriented partial cubes, a subclass of oriented bipartite graphs. As for the geodetic number, the oriented graph used in our reduction is not only bipartite, but is also a DAG. At last, we prove that it is possible to obtain both of these parameters in polynomial time when restricted to oriented cacti, a superclass of oriented trees.

Keywords: Hull number. Geodetic Number. Oriented graphs. Convexity in graphs.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – À esquerda temos o grafo G com dois pares de arestas múltiplas e um laço; à direita, temos um grafo simples G' , obtido a partir de G removendo os laços e as arestas múltiplas. Em G , como há duas arestas associadas ao par u_1, u_2 , a notação fica confusa; já em G' isso não ocorre, pois há no máximo uma aresta associada a cada par de vértices de $V(G')$	11
Figura 2 – À esquerda temos o digrafo D com um par de arcos múltiplos, associados a (u_1, u_2) ; dois arcos associados ao mesmo par de vértices com orientações distintas, um a (u_3, u_4) e outro a (u_4, u_3) ; e um laço associado ao par (u_5, u_5) . À direita, temos um grafo orientado D'	12
Figura 3 – O digrafo D_1 à esquerda é um subdigrafo de D' da Figura 2, e o digrafo D_2 à direita é um subdigrafo induzido de D' por $\{v_1, v_2, v_3\}$	14
Figura 4 – Grafo orientado com número de envoltória dois e número geodético três.	18
Figura 5 – Grafo orientado com número de envoltória 4 e número geodético 6. . . .	24
Figura 6 – Exemplo apertado para o Teorema 4.1, quando $n = 5$	36
Figura 7 – À esquerda, temos uma representação do hipercubo de dimensão três; à direita, um cubo parcial isomorfo a um subgrafo de Q_3	41
Figura 8 – Exemplo do grafo orientado construído na prova do Teorema 4.2, para $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\mathcal{F} = \{F_1 = \{1, 2, 3, 4\}, F_2 = \{1, 4\}, F_3 = \{2, 3, 5\}\}$. . .	44

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	PRELIMINARES	11
2.1	Conceitos Gerais	11
2.2	Convexidade	16
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
3.1	Limitantes	21
3.2	Caracterizações	22
3.3	Resultados Existenciais	23
3.4	Espectro geodético	27
3.5	Números de envoltória e geodético orientáveis	29
3.5.1	<i>Analisando isoladamente</i> $hn^-(G)$, $gn^-(G)$, $hn^+(G)$ e $gn^+(G)$. . .	29
3.5.2	<i>Relacionando os números de envoltória e geodético orientáveis</i>	30
4	RESULTADOS	32
4.1	Torneios e Split	32
4.2	NP-completude para grafos bipartidos orientados	37
4.2.1	<i>Número de Envoltória</i>	37
4.2.2	<i>Número Geodético</i>	43
4.3	Algoritmos de tempo polinomial para cactos	45
4.3.1	<i>Número de Envoltória</i>	46
4.3.2	<i>Número Geodético</i>	53
5	CONCLUSÃO	57
	REFERÊNCIAS	59

1 INTRODUÇÃO

A primeira vez que somos apresentados ao termo “convexidade” geralmente é no ensino fundamental, quando estudamos polígonos. Um polígono é dito *convexo* se dados dois pontos dentro da área delimitada por esse, a reta conectando esses pontos também está contida nessa área. Esse, na verdade, é um caso particular de convexidade no espaço euclidiano. Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito *convexo* se dados dois pontos $x, y \in S$, cada ponto da forma $\lambda x + (1 - \lambda)y$ com $\lambda \in [0, 1]$ (ou seja, os pontos compondo o segmento entre x e y) também está em S . Essa definição de convexidade se dá pelo fato de segmentos de reta, na geometria euclidiana, serem as curvas de menor comprimento entre dois pontos; essas são chamadas de *geodésicas*.

De uma maneira mais geral, uma família \mathcal{C} de subconjuntos de um conjunto finito X é dita uma *convexidade* se $\emptyset, X \in \mathcal{C}$ e essa é fechada para interseção. Ou seja, dada uma subfamília $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ não vazia temos $\bigcap \mathcal{C}' \in \mathcal{C}$. Os elementos da família \mathcal{C} são chamados de *conjuntos convexos*. Além disso, outra definição importante é a de *envoltória*: dado $Y \subseteq X$, sua envoltória é o menor conjunto de \mathcal{C} contendo Y . Veja que, se \mathcal{C}' é a família de todos os elementos de \mathcal{C} que contêm Y , $Y' := \bigcap \mathcal{C}' \in \mathcal{C}$ e $Y \subseteq Y'$. Pelo modo como definimos \mathcal{C}' , Y' é o menor elemento de \mathcal{C} contendo Y e, conseqüentemente, sua envoltória. Ademais, $Y \subseteq X$ é um *conjunto de envoltória* se sua envoltória for X .

Essas noções de convexidade podem ser adaptadas para grafos, onde X é o conjunto de vértices do grafo e as curvas são caminhos entre vértices. Nesse caso, um conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ é dito *convexo* se, para qualquer uv -geodésica P (uv -caminho de menor comprimento) com $u, v \in S$, temos que $V(P) \subseteq S$. Essa adaptação foi introduzida por HARARY and NIEMINEN (1981). Fora essa, outros tipos de convexidade têm sido estudadas em grafos. Por exemplo, DUCHET (1988) trata da monofônica, a qual considera caminhos induzidos ao invés de geodésicas; e CENTENO (2009), da convexidade P_3 , que considera caminhos de comprimento dois. Neste trabalho nos restringimos à convexidade geodésica para grafos orientados, com foco nos números de envoltória e geodético definidos a seguir.

Dado um grafo orientado D , a convexidade usada é basicamente a mesma. Um conjunto $S \subseteq V(D)$ é dito *convexo* se, para cada par $u, v \in S$, os vértices de todas as (u, v) -geodésicas e de todas as (v, u) -geodésicas estão em S . Além disso, para qualquer conjunto $S \subseteq V(D)$ (convexo ou não), sua *envoltória* $[S]$ é o menor conjunto convexo contendo S . Dizemos que S é um *conjunto de envoltória* de D quando $[S] = V(D)$; o *número de envoltória* de D , $\overrightarrow{\text{hn}}(D)$, é a cardinalidade de um conjunto de envoltória mínimo. Caso todo vértice de D esteja numa (u, v) -geodésica, com $u, v \in S$, dizemos que S é um *conjunto geodético* de D . Analogamente, o *número geodético* de D , $\overrightarrow{\text{gn}}(D)$, é a cardinalidade de um conjunto geodético mínimo. Além desses parâmetros, DUCHET (1988) definem os números de Carathéodory, Helly e Radon para uma convexidade, os

quais podem ser facilmente adaptados para convexidade em grafos. Outro parâmetro digno de nota é o número de convexidade, definido e trabalhado por CHARTRAND (2002a).

Esses dois parâmetros já foram amplamente trabalhados em grafos não direcionados. EVERETT and SEIDMAN (1985) apresentaram diversos limitantes para o número de envoltória, utilizando ferramentas como os blocos do grafo e sua conectividade local. DOURADO (2009); ARAÚJO (2013); ALBENQUE and KNAUER (2016); DOURADO (2010); CHARTRAND (2002b); BESSY (2018) analisaram esses parâmetros em diferentes classes de grafos, provando a NP-completude em alguns casos e, em outros, encontrando maneiras de obtê-los em tempo polinomial. CHARTRAND (2002b); JIANG (2004); BREŠAR (2011) mostraram resultados sobre esses parâmetros em produtos de grafos, como o cartesiano e o lexicográfico. Além disso, existem variantes desses parâmetros, como os números de envoltória e geodético forçantes trabalhados por TONG (2009), os números geodéticos forçantes mínimo e máximo estudados por CHANG (2006), o número de dominação geodética analisado por HANSBERG and VOLKMANN (2010), e o número de envoltória generalizado estudado por ARAÚJO (2013).

Já para grafos orientados, a maioria dos artigos que encontramos foca nos números de envoltória e geodético orientáveis. Sejam G um grafo não direcionado e S o conjunto dos valores do número de envoltória, para cada possível orientação D de G . O *número de envoltória orientável inferior* e o *número de envoltória orientável superior* de G são definidos respectivamente por $hn^-(G) := \min S$ e $hn^+(G) := \max S$. Os *números geodéticos orientáveis inferior e superior* de G , denotados respectivamente por $gn^-(G)$ e $gn^+(G)$, são definidos analogamente. EVERETT and SEIDMAN (1985); HARARY (1993), além de provarem resultados sobre esses quatro parâmetros, ainda apresentam resultados gerais sobre os parâmetros principais de nossa pesquisa, como caracterização e existência de grafos orientados com determinados números de envoltória e geodético e limitantes para esses. Já LU (2007); DONG (2009) focam no espectro geodético, que é o conjunto de todos os possíveis valores do número geodético para as orientações de um dado grafo G . Enquanto isso, FARRUGIA (2005); DONG (2009); HUNG (2009) focam seus resultados nesses quatro parâmetros.

Em vista disso, decidimos tomar uma abordagem diferente. Neste trabalho, estudamos a complexidade computacional desses parâmetros em grafos orientados, nos restringindo a diferentes classes, bem como melhoramos alguns limitantes já existentes. Para torneios, apresentamos um limitante apertado superior e, em seguida, estendemos esse para splits orientados. No caso dos grafos bipartidos orientados, mostramos que os problemas relacionados aos números de envoltória e geodético são ambos NP-completos. Além disso, conseguimos restringir a NP-completude do número de envoltória para cubos parciais orientados, uma subclasse de bipartidos orientados. Quanto ao número geodético, a demonstração consiste de uma redução do problema NP-completo COBERTURA DE

CONJUNTOS, e o grafo orientado utilizado na mesma é um digrafo acíclico. Em contrapartida, os dois últimos resultados mostram que é possível obter conjuntos de envoltória e geodético mínimos em tempo polinomial para cactos orientados, uma superclasse de árvores orientadas. Todos esses resultados foram apresentados no Latin & American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium (LAGOS) 2019, com resumo escrito por ARAÚJO and ARRAES (2019). Além disso, uma versão completa será submetida a periódico.

No Capítulo 2, apresentamos algumas noções básicas sobre grafos, tanto orientados quanto não orientados, e notações que utilizamos ao longo do texto. Em seguida, na segunda parte desse capítulo, falamos mais detalhadamente sobre noções básicas de convexidade geodésica e sobre os números de envoltória e geodético. Já no Capítulo 3, reunimos alguns resultados que encontramos na literatura relacionados a esses parâmetros em grafos orientados, os quais estão separados por categoria. No Capítulo 4, explanamos os resultados mencionados no parágrafo anterior. Por fim, o Capítulo 5 é dedicado às considerações finais e possíveis linhas de pesquisa para trabalhos futuros.

2 PRELIMINARES

Nesta seção apresentamos definições e notações para que até mesmo um leitor que possua apenas noções básicas de Matemática Discreta possa compreender os resultados apresentados no texto. Na primeira parte estão alguns conceitos gerais sobre grafos e digrafos, como grau dos vértices, subgrafos, conceitos básicos de conexidade, dentre outros. Em seguida, entraremos no campo de convexidade em grafos. As definições nesta seção incluem a de função de intervalo, a de conjuntos convexos em grafos e os números de envoltória e geodético (parâmetros centrais da nossa pesquisa).

2.1 Conceitos Gerais

A rigor, um *grafo* $G = (V, E)$ é uma tripla consistindo de um conjunto de vértices $V = V(G)$, um de arestas $E = E(G)$ e uma relação que associa cada elemento e de $E(G)$ a um par não ordenado de vértices (não necessariamente distintos) de $V(G)$, os quais são as *extremidades* da aresta. Quando existe uma aresta $e \in E(G)$ associada ao par de vértices $u, v \in V(G)$, dizemos que u e v são *adjacentes*. A cardinalidade de $V(G)$ é o *número de vértices* ou *ordem* de G e esse valor é denotado por $n(G)$; analogamente, $m(G)$ denota o *número de arestas* ou *tamanho* de G , que é a cardinalidade de $E(G)$.

Perceba que, pelo modo como definimos grafos, é possível que haja arestas associadas ao mesmo par de vértices, as quais chamamos de *arestas múltiplas*, ou até mesmo arestas cujas extremidades coincidem, as quais recebem o nome de *laços*. Quando um grafo G não possui nenhum desses dois tipos de arestas, dizemos que esse é um grafo *simples*. Nesse caso, veja que podemos representar cada aresta $e \in E(G)$ por uv , onde $u \neq v \in V(G)$ são os vértices compondo o par ao qual e é associado. A Figura 1 abaixo ilustra o que dissemos até agora.

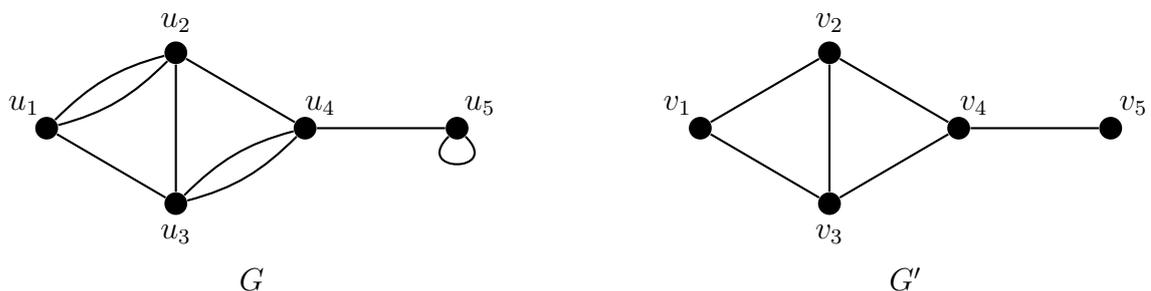


Figura 1: À esquerda temos o grafo G com dois pares de arestas múltiplas e um laço; à direita, temos um grafo simples G' , obtido a partir de G removendo os laços e as arestas múltiplas. Em G , como há duas arestas associadas ao par u_1, u_2 , a notação fica confusa; já em G' isso não ocorre, pois há no máximo uma aresta associada a cada par de vértices de $V(G')$.

Um *digrafo* $D = (V, A)$ é similar a um grafo, a diferença é que ao invés de um conjunto de arestas temos um de arcos $A = A(D)$, e esses são associados a pares

ordenados de vértices. Analogamente, definimos o *número de vértices* $n(D)$ e o *número de arcos* $m(D)$ de um digrafo como o fizemos para grafos. Se $e \in A(D)$ é um arco associado ao par ordenado (u, v) de vértices, além de u e v serem adjacentes dizemos que u é a *cauda* desse arco e v , a *cabeça*. Ademais, também dizemos que o arco e está *orientado* de u para v . Veja que podemos ter arcos $e_1 \neq e_2 \in A(D)$ associados respectivamente ao par (u, v) e ao par (v, u) , ou ambos ao par (u, v) (*arcos múltiplos*); além disso, pode haver $e \in A(D)$ associado a um par ordenado (u, u) (*laço*). Similarmente a grafo simples, definimos um *grafo orientado* como um digrafo no qual não há laços e nem arcos associados a pares ordenados cujas extremidades coincidem (mesmo que a orientação seja diferente). Nesse caso, podemos representar cada arco $e \in A(D)$ pelo par ordenado (u, v) de vértices ao qual esse está associado.

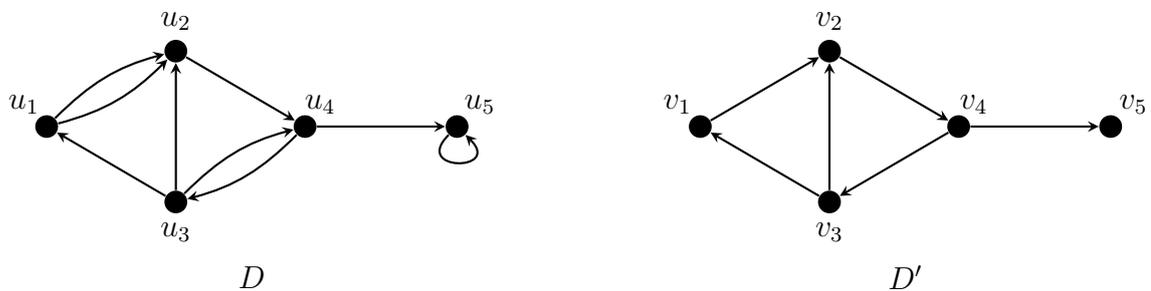


Figura 2: À esquerda temos o digrafo D com um par de arcos múltiplos, associados a (u_1, u_2) ; dois arcos associados ao mesmo par de vértices com orientações distintas, um a (u_3, u_4) e outro a (u_4, u_3) ; e um laço associado ao par (u_5, u_5) . À direita, temos um grafo orientado D' .

Dito isso, definiremos a seguir o que é um *grafo subjacente*. Dado um digrafo D , seu grafo subjacente é um grafo G obtido a partir de D desconsiderando a orientação dos arcos. Por exemplo, os grafos G e G' da Figura 1 são respectivamente os grafos subjacentes do digrafo D e do grafo orientado D' da Figura 2. Ademais, sendo D um digrafo e G seu grafo subjacente, também dizemos que D é uma *orientação* de G . Veja que, pelo modo como definimos um grafo orientado, temos que o grafo subjacente de um grafo orientado é simples e que uma orientação de um grafo simples é um grafo orientado.

Dado um grafo G , é interessante mencionar sobre suas orientações inversas. Sendo D_1 e D_2 orientações de G , dizemos que o grafo orientado D_2 é o *inverso* de D_1 quando, para todo par de vértices $u, v \in V(G)$, $(u, v) \in A(D_1)$ se e somente se $(v, u) \in A(D_2)$. Ou seja, ao inverter a orientação de cada arco de D_1 obtemos o digrafo D_2 , e vice-versa.

Doravante trataremos apenas de grafos simples e grafos orientados *finitos*. Isso quer dizer que, sendo G um grafo e D um digrafo, existem inteiros positivos n_1, n_2, m_1, m_2 tais que $n(G) = n_1$, $m(G) = m_1$, $n(D) = n_2$ e $m(D) = m_2$.

O *grau de entrada* de um vértice $v \in V(D)$ em D é o número de arcos em $A(D)$ que possuem v como cabeça, e esse é denotado por $d_D^-(v)$. Similarmente, o

grau de saída $d_D^+(v)$ de v é o número de arcos que possuem v como cauda. O *grau total* $d_D(v)$ de v é o número de arcos que possuem v como extremidade, de modo que $d_D(v) = d_D^-(v) + d_D^+(v)$. Quando não houver risco de confusão quanto ao digrafo considerado, o índice D não será utilizado. O *grau de entrada mínimo de D* e o *grau de saída mínimo de D* são definidos respectivamente por $\delta^-(D) = \min\{d_D^-(v) \mid v \in V(D)\}$ e $\delta^+(D) = \min\{d_D^+(v) \mid v \in V(D)\}$. O *grau de entrada máximo de D* e o *grau de saída máximo de D* , denotados respectivamente por $\Delta^-(D)$ e $\Delta^+(D)$, são definidos analogamente. Além desses, o *grau máximo de D* e o *grau mínimo de D* são definidos respectivamente como $\delta(D) := \min\{\delta^-(D), \delta^+(D)\}$ e $\Delta(D) := \max\{\Delta^-(D), \Delta^+(D)\}$. Na Figura 2, por exemplo, temos que $\delta^-(D') = d_{D'}^-(v_i) = 1$ para todo $i \in \{1, 2, 4, 5\}$, $\delta^+(D') = d_{D'}^+(v_5) = 0$, $\Delta^-(D') = d_{D'}^-(v_2) = 2$ e $\Delta^+(D') = d_{D'}^+(v_4) = 2$.

A *vizinhança de entrada* de $S \subseteq V(D)$ em D é o conjunto $N_D^-(S)$ composto por todos os vértices $u \notin S$ tais que (u, v) é um arco de D com $v \in S$. Ademais, dizemos que os vértices desse conjunto são os *vizinhos de entrada de S* . De maneira similar, definimos a *vizinhança de saída* $N_D^+(S)$ de $S \subseteq$ em D e dizemos que os vértices desse conjunto são os *vizinhos de saída de S* . A *vizinhança total* de S é o conjunto definido por $N_D(S) := N_D^-(S) \cup N_D^+(S)$. Quando S possuir apenas um vértice v , nos referiremos à sua vizinhança de entrada como $N_D^-(v)$, e usaremos notações análogas para suas outras vizinhanças. Como estamos considerando apenas grafos orientados, veja que valem as seguintes igualdades: $|N_D^-(v)| = d_D^-(v)$, $|N_D^+(v)| = d_D^+(v)$ e $|N_D(v)| = d_D(v)$. No grafo orientado D' da Figura 2, é possível ver que $N^-(v_2) = \{v_1, v_3\}$ e $N^+(v_2) = \{v_4\}$.

No caso não direcionado, podemos definir o grau e a vizinhança de um vértice e os graus máximo e mínimo do grafo. Dados um grafo G e um vértice $v \in V(G)$, o *grau* de v , denotado por $d_G(v)$, é o número de vezes que v aparece como extremidade de arestas em $E(G)$. A *vizinhança* de v , similar à vizinhança total no caso orientado, é o conjunto $N_G(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$. Veja que, como o grafo é simples, podemos dizer que $|N_G(v)| = d_G(v)$. O *grau máximo de G* e o *grau mínimo de G* , de forma similar ao caso orientado, são definidos respectivamente por $\delta(G) := \min\{d_G(v) \mid v \in V(G)\}$ e $\Delta(G) := \max\{d_G(v) \mid v \in V(G)\}$.

Agora vamos falar de dois tipos importantes de conjuntos de vértices em grafos. Dado um grafo G e $S \subseteq V(G)$, dizemos que S é *estável* ou *independente* quando, para quaisquer $u, v \in S$, uv não é uma aresta de G . Se S for tal que todos os seus vértices são dois-a-dois adjacentes (basicamente o oposto de um conjunto estável), chamamos esse de *clique*. No grafo G' da Figura 1, $\{v_1, v_5\}$ é um conjunto estável, enquanto que $\{v_2, v_3, v_4\}$ e $\{v_1, v_2, v_3\}$ são cliques.

Dados dois grafos orientados $D = (V, A)$ e $D' = (V', A')$, dizemos que D' é um *subdigrafo* de D quando $V(D') \subseteq V(D)$ e, dados $u, v \in V(D')$, $(u, v) \in A(D')$ implica que $(u, v) \in A(D)$. Ademais, caso tenhamos também a inversa dessa última implicação, ou seja, se $(u, v) \in A(D)$ implicar que $(u, v) \in A(D')$ para todo par de vértices $u, v \in V(D')$,

dizemos que D' é um *subdigrafo induzido* de D por $V(D')$, e escrevemos $D' = D[V(D')]$. As noções de subgrafo e subgrafo induzido para grafos não direcionados são análogas, basta desconsiderar a orientação dos arcos. Na Figura 3 abaixo, veja que D_1 é um subdigrafo de D' da Figura 2, porém, não é induzido devido à ausência do arco (v_3, v_2) . Por outro lado, o digrafo D_2 ao lado de D_1 é um subdigrafo induzido de D' por $\{v_1, v_2, v_3\}$.

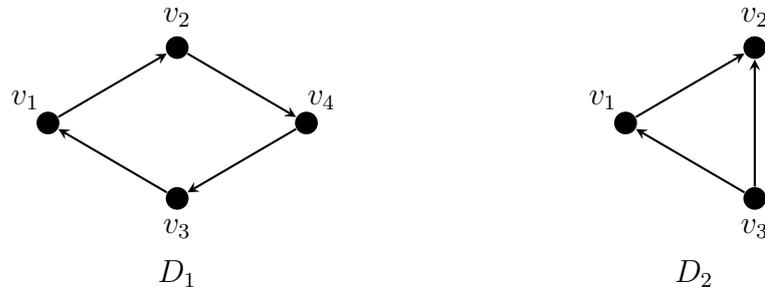


Figura 3: O digrafo D_1 à esquerda é um subdigrafo de D' da Figura 2, e o digrafo D_2 à direita é um subdigrafo induzido de D' por $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Um *passeio* em um digrafo D é uma sequência de vértices e arcos $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$ de modo que $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ para todo $i \in [k]$, onde $[k] = \{1, \dots, k\}$ para todo inteiro positivo k . Para facilitar essa notação em grafos orientados, consideraremos apenas a sequência de vértices (v_0, v_1, \dots, v_k) para representar o passeio (os arcos estão implícitos, pois o grafo subjacente é simples). Um (u, v) -*passeio* é um passeio (v_0, v_1, \dots, v_k) tal que $v_0 = u$ e $v_k = v$. Uma *trilha* é um passeio sem repetição de arcos, ou seja, não há $i \neq j \in [k]$ tais que $v_{i-1} = v_{j-1}$ e $v_i = v_j$ (essa definição é válida apenas para digrafos que não possuem arcos múltiplos, como os grafos orientados). Perceba que em uma trilha podemos ter vértices repetidos sem que o mesmo aconteça com arcos. Quando não há vértices repetidos, esse passeio é dito um *caminho*, ou seja, para todo par $i \neq j \in \{0\} \cup [k]$ temos que $v_i \neq v_j$. Dado um caminho $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$, comumente nos referimos a esse como sendo um subdigrafo P de D tal que $V(P) = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ e $A(P) = \{e_1, \dots, e_k\}$. Além disso, nos referimos ao conjunto composto pelos vértices v_1, \dots, v_{k-1} como o *interior* do caminho P , e esses vértices são ditos *internos* a P . (u, v) -*trilha* e (u, v) -*caminho* são definidos de maneira análoga a um (u, v) -passeio. Essas noções podem ser facilmente adaptadas para grafos, basta desconsiderar a orientação dos arcos. No caso não-orientado, utilizamos a notação uv -caminho para nos referirmos a um caminho entre os vértices u e v , e quando queremos especificar os vértices escrevemos $u = v_0, v_1, \dots, v_k = v$.

Dado um par ordenado $(u, v) \in V(D) \times V(D)$, a *distância* de u para v em D , denotada por $\text{dist}_D(u, v)$, é o menor tamanho possível de um (u, v) -caminho, quando algum existir; caso contrário, definimos $\text{dist}_D(u, v) = \infty$. Um (u, v) -caminho P tal que $m(P) = \text{dist}_D(u, v)$ é dito um (u, v) -*geodésico*. O *diâmetro* de um grafo orientado D é definido por $\text{diam}(D) = \max\{\text{dist}_D(u, v), \text{dist}_D(v, u) \mid u, v \in V(D)\}$. Para obter as versões em grafos não direcionados, novamente basta desconsiderar as orientações.

Com isso em mente, podemos falar de conexidade. Um grafo G é dito *conexo*

quando existir um uv -caminho para todo par de vértices $u \neq v \in V(G)$. Dado $S \subseteq V(G)$, $G[S]$ é dito uma *componente conexa maximal* (ou simplesmente *componente conexa*) de G se esse grafo for conexo e $G[S \cup \{u\}]$, para todo vértice $u \in V(G) \setminus S$, não o for. Um vértice $v \in G$ é dito uma *articulação* se $G - v := G[V(G) \setminus \{v\}]$ possui mais componentes conexas do que G . Quando houver dois uv -caminhos em G internamente disjuntos (ou seja, os interiores não se intersectam) para todo par $u \neq v \in V(G)$, dizemos que G é *2-conexo*. Um *bloco* de G é um subgrafo induzido 2-conexo maximal $B \subseteq G$, ou seja, não existe subgrafo induzido 2-conexo $B' \subseteq G$ tal que $V(B) \subset V(B')$.

Para digrafos, adaptamos essas definições utilizando o grafo subjacente. Por exemplo, dados um grafo orientado D e seu grafo subjacente G , as componentes conexas de D são os subdigrafos induzidos $D[S]$ tais que $G[S]$ é uma componente conexa de G . Conexidade tanto em grafos quanto em digrafos é um assunto extenso, porém não nos aprofundaremos muito nisso, já que essas definições são suficientes para o entendimento desta dissertação.

A seguir, apresentaremos algumas das classes mais conhecidas de grafos simples; em seguida mencionaremos sobre os grafos orientados dessa classe. Um grafo G é dito um *caminho* se existir uma ordenação de seus vértices de modo que $uv \in E(G)$ se e somente se u e v são consecutivos nessa ordenação; o caminho com n vértices é denotado por P_n . A definição de *ciclo* é bastante parecida com a de caminho, a única diferença é que também temos um aresta associada ao par composto pelo primeiro e último vértices da ordenação; similarmente, o ciclo com n vértices é denotado por C_n . Uma *árvore* é um grafo acíclico (que não possui ciclos como subgrafos) e conexo.

O grafo *completo* é aquele cujos vértices são adjacentes dois-a-dois, e o grafo completo com n vértices é denotado por K_n . Para a próxima classe lembraremos a definição de *partição* de um conjunto S : uma família $\{S_1, \dots, S_k\}$ de subconjuntos de S , disjuntos dois-a-dois, tais que $S = \bigcup_{i=1}^k S_i$. Quando for possível particionar o conjunto de vértices em k conjuntos estáveis, dizemos que o grafo é *k-partido*. Dentre esses, o tipo mais estudado é o *bipartido*, ou seja, grafos cujo conjunto de vértices é da forma $A \cup B$, onde A e B são disjuntos e estáveis. Quando um grafo k -partido G possui todas as arestas possíveis, dizemos que G é um grafo *k-partido completo* e o denotamos por K_{n_1, \dots, n_k} , onde $n_i = |A_i|$ para todo $i \in [k]$.

Com isso, vamos apresentar a versão orientada dessas classes. Um grafo orientado D é dito um *caminho orientado* quando seu grafo subjacente G for um caminho e, sendo u_1, \dots, u_n a ordenação dos vértices de G , os arcos são da forma (u_{i-1}, u_i) para todo $i \in [n]$. Um *ciclo orientado* é utilizado para se referir a qualquer orientação de um ciclo. Caso essa orientação seja tal que, dada uma ordenação $\{u_1, \dots, u_n\}$ dos vértices como acima, os arcos são $(u_1, u_2), \dots, (u_{n-1}, u_n), (u_n, u_1)$, dizemos que esse é um *ciclo direcionado*. Dada uma orientação de um grafo completo, nos referimos a esse grafo orientado como *torneio*. Para as outras classes, basta acrescentar um “orientado” ao final do nome

da classe.

Além dessas, existe uma classe de grafos orientados que mencionaremos mais a frente com certa frequência. Um digrafo é dito *acíclico* se esse não possui ciclos direcionados como subgrafos.

Caso o leitor se interesse pelo assunto de grafos (direcionados ou não) e deseje se aprofundar no assunto, recomendamos o livro escrito por BONDY and MURTY (2008).

2.2 Convexidade

Doravante, D representará um grafo orientado finito. As definições abaixo possuem sua versão em grafos não-direcionados, porém não é difícil de fazer a transição.

A *função de intervalo* $I: \mathcal{P}(V(D)) \rightarrow \mathcal{P}(V(D))$ é definida da seguinte forma. Dados dois vértices $u, v \in V(D)$, $I[\{u, v\}]$ é composto pelos vértices u, v e por todos os que estão em alguma (u, v) -geodésica ou em alguma (v, u) -geodésica. Perceba que, se não houver caminhos entre u e v em ambas as direções, $I[\{u, v\}] = \{u, v\}$. Para $S \subseteq V(D)$ com pelo menos três elementos, $I[S]$ é a união de todos os conjuntos $I[\{u, v\}]$ com $u, v \in S$.

Caso o conjunto inicial seja vazio, não há geodésicas para serem analisadas e portanto o conjunto resultante é também o vazio. Se S tiver apenas um vértice, o menor caminho dele para ele mesmo é o caminho com apenas esse vértice e nenhum arco; logo, a função acima retorna o mesmo conjunto unitário. Por fim se $S = V(D)$, como $S \subseteq I[S] \subseteq V(D)$ temos que $I[S] = S$. Esses são os três principais exemplos de elementos fixos da função de intervalo.

Um conjunto de vértices $S \subseteq V(D)$ é dito *convexo* quando ele for um ponto fixo da função de intervalo, ou seja, $I[S] = S$. Em outras palavras, para qualquer (u, v) -geodésica P de modo que $u, v \in S$, todos os vértices de P também estão em S . No parágrafo acima, demos três exemplos triviais de conjuntos convexos: o conjunto vazio, um conjunto unitário e o conjunto de vértices do digrafo. Na geometria euclidiana, um segmento de reta é a curva de menor distância entre dois pontos do espaço. Ademais, um conjunto desse espaço é dito convexo se, para quaisquer dois pontos A e B no conjunto, o segmento de reta \overline{AB} está contido nesse. Veja que as duas definições de convexidade são condizentes.

A *envoltória* de $S \subseteq V(D)$, denotada por $[S]$, é o menor conjunto convexo contendo S . Outra definição para envoltória é que $[S]$ é a interseção de todos os conjuntos convexos contendo S . Suponhamos que haja dois conjuntos convexos distintos A, B contendo S e consideremos $C = A \cap B$, o qual também contém S . Tomando $u, v \in C$, como A e B são convexos, temos que $I[\{u, v\}]$ está contido tanto em A quanto em B , logo também o está em C . Portanto, C também é convexo. Esse é o argumento básico para entender a equivalência entre as duas definições acima.

Além disso, existe uma maneira de obter a envoltória de S utilizando a função

de intervalo. Antes de mostrarmos isso, precisamos de mais uma definição. Para qualquer inteiro positivo n e qualquer conjunto $S \subseteq V(D)$, dizemos que $I^n[S] = I[I^{n-1}[S]]$, onde $I^0[S] := S$.

Lema 2.1. *Seja D um grafo orientado finito. Então, para todo conjunto $S \subseteq V(D)$ existe n inteiro não negativo tal que $I^n[S] = I^{n+1}[S] = [S]$.*

Demonstração. Primeiramente veja que, para todo k inteiro não-negativo, enquanto $I^k[S]$ não for convexo, $I^{k+1}[S]$ terá pelo menos um vértice a mais que esse. Como o grafo orientado em questão é finito, em algum momento obteremos um conjunto convexo; isto é, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $I^n[S] = I^{n+1}[S]$. Dito isso, resta apenas mostrar que esse conjunto convexo é de fato a envoltória de S .

Como $I^n[S]$ é um conjunto convexo que contém S , temos que $[S] \subseteq I^n[S]$. Agora, suponha que esses conjuntos não sejam iguais. Assim, existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $I^{k-1}[S] \subseteq [S]$ e $I^k[S] \not\subseteq [S]$. Nesse caso, existem $u, v \in I^{k-1}[S]$ e uma (u, v) -geodésica P de modo que $V(P) \not\subseteq [S]$, o que contradiz a convexidade de $[S]$. \square

Em posse disso, podemos definir os parâmetros centrais da nossa pesquisa. Quando um conjunto de vértices S possui $V(D)$ como envoltória, chamamos esse de *conjunto de envoltória* de D . Ademais, quando S for um conjunto de envoltória de cardinalidade mínima, o *número de envoltória* do grafo orientado D é $\overrightarrow{\text{hn}}(D) = |S|$. Mais restritamente, se $I[S] = V(D)$ dizemos que S é um *conjunto geodético*. De maneira similar, o *número geodético* de D , denotado por $\overrightarrow{\text{gn}}(D)$, é o tamanho de um conjunto geodético mínimo de D .

Perceba que um conjunto geodético é um conjunto de envoltória com uma condição a mais, a de que $V(D)$ seja obtido já na primeira iteração da função de intervalo. Por causa disso, para todo grafo orientado D temos que

$$\overrightarrow{\text{hn}}(D) \leq \overrightarrow{\text{gn}}(D). \quad (1)$$

Outra consequência é a seguinte: o que afirmarmos ao longo do texto para todo conjunto de envoltória também se aplica para todo conjunto geodético.

Para que esses conceitos fiquem mais claros na mente do leitor, considere o grafo D da Figura 4 abaixo. Como esse grafo tem mais de um vértice e todo conjunto unitário é convexo, todo conjunto de envoltória precisa ter pelo menos dois vértices, ou seja, $\overrightarrow{\text{hn}}(D) \geq 2$. Assim, seja $S = \{u, v\}$. Há quatro (u, v) -caminhos em D : (u, y_1, y_2, v) , (u, x_1, x_2, x_3, v) , $(u, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, v)$ e $(u, y_1, y_2, x_1, x_2, x_3, v)$. Os comprimentos desses são três, quatro, seis e seis (respectivamente); logo, apenas o primeiro é geodésica. Como não há (v, u) -caminhos, $I[S] = \{u, v, y_1, y_2\}$. Além disso, perceba que $(y_2, x_1, x_2, x_3, y_1)$ é o único (y_2, y_1) -caminho, o que faz dele uma geodésica, donde concluímos que $I^2[S] = V(D)$. Consequentemente, S é um conjunto de envoltória de D , e pela desigualdade acima ele

também é mínimo; isso significa que $\overrightarrow{\text{hn}}(D) = 2$.

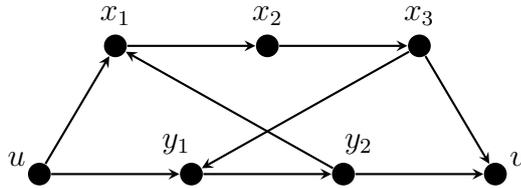


Figura 4: Grafo orientado com número de envoltória dois e número geodético três.

Por outro lado, como $I[S] = V(D) \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$, S não é um conjunto geodético de D . Como u e v devem pertencer a todo conjunto de envoltória (isso será explicado logo em seguida), temos que $\overrightarrow{\text{gn}}(D) \geq 3$. Em vista disso, consideremos o conjunto $S' = \{u, v, x_1\}$. Veja que (x_1, x_2, x_3, v) e $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, v)$ são os únicos (x_1, v) -caminhos em nosso grafo. Portanto S' é um conjunto geodético e, por conseguinte, $\overrightarrow{\text{gn}}(D) = 3$.

Neste ponto, o leitor deve estar se perguntando “por que os vértices u e v pertencem a todo conjunto de envoltória?” Bom, para responder isso primeiro vamos falar sobre um tipo importante de conjunto de vértices. $S \subseteq V(D)$ é dito *co-convexo* se $S^c = V(D) \setminus S$ for convexo. Veja que \emptyset e $V(D)$ são conjuntos trivialmente co-convexos. A importância desses conjuntos está no seguinte fato.

Lema 2.2. *Seja D um grafo orientado. Cada conjunto de envoltória de D intersecta todos os subconjuntos co-convexos de $V(D)$.*

Demonstração. Suponha $S \subseteq V(D)$ um conjunto de envoltória de D e $S' \subseteq V(D)$ um conjunto co-convexo não-vazio tais que $S \cap S' = \emptyset$. Como S^c é convexo e contém S , pela definição de envoltória temos que $[S] \subseteq S^c \subsetneq V(D)$, contradizendo a escolha de S . \square

Essa informação nos ajuda a melhor estimar um conjunto de envoltória ou geodético mínimo. Porém, se o conjunto co-convexo que estivermos analisando for muito grande, pode ocorrer de um vértice dele não ser suficiente (ou seja, esse conjunto contém conjuntos co-convexos menores). Isso nos induz a atentar para os menores conjuntos co-convexos de $V(D)$, mais especificamente os unitários. Se um vértice v compõe um conjunto co-convexo unitário, dizemos que v é *extremal*. Denotamos o conjunto de vértices extremais de D por $\text{Ext}(D)$. Uma consequência natural disso é o seguinte lema, que consta em um artigo de CHARTRAND (2003).

Lema 2.3. *Todo conjunto de envoltória de um grafo orientado D deve conter os vértices extremais desse. Ademais, se o conjunto de vértices extremais de D for um conjunto de envoltória (geodético), então esse é o único conjunto de envoltória (geodético) mínimo de D .*

O fato de o vértice v ser extremal quer dizer que ele não é interior a nenhuma (u, w) -geodésica, para $u, w \in V(D) \setminus \{v\}$ distintos quaisquer. Para que isso ocorra, há duas possibilidades. A primeira é que v também não é interior a caminho algum de D , e isso ocorre quando $d^-(v) = 0$ ou $d^+(v) = 0$. Quando $d^-(v) = 0$, chamamos esse de

transmissor ou *fonte*; caso $d^+(v) = 0$, o chamamos de *receptor* ou *sumidouro*. O segundo caso é quando ele pertence ao interior de caminhos, mas não ao de geodésicas. Para tanto, dados $u \in N^-(v)$ e $w \in N^+(v)$, perceba que (u, v, w) não pode ser geodésica; logo, devemos ter $(u, w) \in A(D)$. Quando isso ocorre para quaisquer u e w desse tipo, dizemos que v é *transitivo*.

No caso não-direcionado, os vértices compondo conjuntos co-convexos unitários são chamado de *simpliciais*. Esses são definidos como tendo uma clique como vizinhança (perceba que também estão inclusos nessa definição vértices de grau um). Se um vértice tiver grau um, ele claramente não pode estar no interior de um caminho. Caso seu grau seja pelo menos dois, como sua vizinhança é uma clique, qualquer caminho contendo um simplicial não é geodésica pois podemos remover esse da sequência de vértices e ainda ter um caminho. Ao contrário do caso orientado, perceba que existe apenas um tipo de simplicial, o que torna a análise menos trabalhosa.

Para finalizar a seção, apresentamos dois resultados simples, porém interessantes. O primeiro se deve a CHARTRAND (2003), e ele relaciona os números de envoltória de grafos orientados inversos. Dados D e D' grafos orientados, de modo que um é o inverso do outro, perceba que as geodésicas de um também estão presentes no outro, a única diferença sendo a orientação dessas. Esse é o argumento base para o resultado abaixo.

Lema 2.4. *Se D' é o inverso de um grafo orientado D , então $\overrightarrow{\text{hn}}(D') = \overrightarrow{\text{hn}}(D)$.*

Veja que, pelo mesmo motivo, podemos afirmar o análogo para os números geodéticos. O próximo resultado tem uma relevância maior no nosso trabalho.

Proposição 2.1. *Sejam D um grafo orientado e D_1, \dots, D_k suas componentes conexas. Então, $\overrightarrow{\text{hn}}(D) = \sum_{i=1}^k \overrightarrow{\text{hn}}(D_i)$ e $\overrightarrow{\text{gn}}(D) = \sum_{i=1}^k \overrightarrow{\text{gn}}(D_i)$.*

Demonstração. Para cada, $i \in [k]$, defina $V_i := V(D_i)$. Sejam $u \in V_i$ e $v \in V_j$ com $i, j \in [k]$ distintos. Como não há uv -caminhos no grafo subjacente de D , também não há (u, v) -caminhos nem (v, u) -caminhos em D , donde segue que $I[\{u, v\}] = \{u, v\}$. Ademais, se u e v pertencerem a um mesmo V_i , todo (u, v) -caminho estará contido em D_i , do contrário esse não seria uma componente conexa. Com isso, provamos utilizando indução que $I^\ell[S] = \bigcup_{i \in [k]} I^\ell[V_i \cap S]$ para todo $\ell \geq 0$ e $S \subseteq V(D)$ arbitrário. Para o caso onde $\ell = 0$, temos que $I^\ell[S] = S$ e o resultado segue sem dificuldades. Assim, suponha que seja verdade para um $\ell - 1$ não negativo.

$$\begin{aligned}
I[I^{\ell-1}[S]] &= \left(\bigcup_{i \in [k]} \left(\bigcup_{u, v \in V_i \cap I^{\ell-1}[S]} I[\{u, v\}] \right) \right) \cup \left(\bigcup_{i \neq j \in [k]} \left(\bigcup_{\substack{u \in V_i \cap I^{\ell-1}[S] \\ v \in V_j \cap I^{\ell-1}[S]}} I[\{u, v\}] \right) \right) \\
&= \left(\bigcup_{i \in [k]} I[V_i \cap I^{\ell-1}[S]] \right) \cup \left(\bigcup_{i \neq j \in [k]} \left(\bigcup_{\substack{u \in V_i \cap I^{\ell-1}[S] \\ v \in V_j \cap I^{\ell-1}[S]}} \{u, v\} \right) \right) \\
&= \left(\bigcup_{i \in [k]} I[V_i \cap I^{\ell-1}[S]] \right) \cup I^{\ell-1}[S] = \bigcup_{i \in [k]} I[V_i \cap I^{\ell-1}[S]] \\
&= \bigcup_{i \in [k]} I \left[V_i \cap \left(\bigcup_{j \in [k]} I^{\ell-1}[V_j \cap S] \right) \right] = \bigcup_{i \in [k]} I[I^{\ell-1}[V_i \cap S]] = \bigcup_{i \in [k]} I^\ell[V_i \cap S].
\end{aligned}$$

Pelo que foi dito no parágrafo anterior, podemos concluir que $I^\ell[S \cap V_i] \subseteq V_i$ para todo $i \in [k]$. Portanto, se S for um conjunto de envoltória mínimo de D temos que existe $\ell \geq 0$ com

$$V(D) = I^\ell[S] = \bigcup_{i \in [k]} I^\ell[V_i \cap S].$$

Isso implica que $V_i = I^\ell[V_i \cap S]$, ou seja, $V_i \cap S$ é um conjunto de envoltória de D_i . Além disso, se esse não fosse mínimo existiria $V'_i \subseteq V_i$ tal que $I^p[V'_i] = V_i$, para algum inteiro positivo p , e $|V'_i| < |V_i \cap S|$. Logo, $S' = (S \setminus V_i) \cup V'_i$ seria um conjunto de envoltória de D com cardinalidade menor do que S , um absurdo. Desse modo, $V_i \cap S$ é um conjunto de envoltória mínimo de D_i , donde segue que $\overrightarrow{\text{hn}}(D) = \sum_{i=1}^k \overrightarrow{\text{hn}}(D_i)$.

Para o caso do número geodético, basta considerar $\ell = 1$ na argumentação acima. \square

Com esse resultado em mãos concluimos que, se tivermos um grafo orientado desconexo, para encontrar seu número de envoltória (geodético), basta encontrar os números de envoltória (geodéticos) de suas componentes conexas. Portanto, podemos focar nossos esforços apenas nos grafos orientados conexos.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, apresentaremos os resultados que encontramos na literatura sobre os números de envoltória e geodético para grafos orientados. Esses foram divididos em cinco subseções. Na primeira, apresentaremos alguns limitantes para esses parâmetros. Em seguida temos alguns resultados gerais, que não conseguimos encaixar nas outras seções. Na subseção três estão os resultados relacionados à existência de grafos orientados tais que o número de envoltória e/ou o número geodético foi (foram) pré-definido(s).

Depois disso, os resultados focam em novos parâmetros, que ainda estão relacionados aos dois principais. Na quarta subseção apresentamos os espectros de envoltória e geodético além de alguns resultados sobre esses. Por fim, introduzimos os números de envoltória e geodético orientáveis inferior e superior para um grafo não orientado G , que basicamente fornecem limitantes inferiores e superiores para os dois parâmetros centrais desta dissertação

3.1 Limitantes

Doravante, assumiremos que D é um grafo orientado conexo com pelo menos dois vértices. Os dois primeiros limitantes que apresentaremos, um inferior e um superior, valem tanto para o número de envoltória, citado por CHARTRAND (2003), quanto para o geodético, citado por CHARTRAND and ZHANG (2000). Esses são os limitantes mais extremos que existem. Se a ordem de D for n , então

$$2 \leq \overrightarrow{\text{hn}}(D) \leq \overrightarrow{\text{gn}}(D) \leq n. \quad (2)$$

Já sabemos que os subconjuntos unitários de $V(D)$ são convexos; logo, como $|V(D)| \geq 2$, não pode existir conjunto de envoltória com apenas um elemento. Para o limitante superior, basta ver que $V(D)$ é convexo e claramente é um conjunto tanto de envoltória quanto geodético de D .

A seguir, mostraremos que ambos são atingidos. Primeiro, suponha P um caminho direcionado com $V(P) = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $A(P) = \{(v_i, v_{i+1}) \mid 1 \leq i \leq n-1\}$. Como v_1 é uma fonte e v_n é um sumidouro, $\overrightarrow{\text{hn}}(P), \overrightarrow{\text{gn}}(P) \geq 2$. Além disso, perceba que o único (v_1, v_n) -caminho em P é (v_1, v_2, \dots, v_n) , logo $I[\{v_1, v_n\}] = V(P)$. Portanto, $\overrightarrow{\text{hn}}(P) = \overrightarrow{\text{gn}}(P) = 2$. Agora, suponha $A(P) = \{(v_{i-1}, v_i), (v_{i+1}, v_i) \mid 1 \leq i \leq n \text{ par}\}$. Assim, podemos ver que v_i é fonte e v_j é sumidouro para todo i ímpar e todo j par. Logo todo vértice de P é extremal, o que implica em $\text{Ext}(P) = V(P)$ e, conseqüentemente, $\overrightarrow{\text{hn}}(P) = \overrightarrow{\text{gn}}(P) = n$.

O próximo limitante superior faz uso do diâmetro de D . Além disso, ele funciona tanto para $\overrightarrow{\text{hn}}(D)$ quanto para $\overrightarrow{\text{gn}}(D)$, resultados apresentados respectivamente

por CHARTRAND (2003) e CHARTRAND and ZHANG (2000). Com isso, nós dizemos que

$$\overrightarrow{\text{hn}}(D) \leq \overrightarrow{\text{gn}}(D) \leq n - \text{diam}(D) + 1. \quad (3)$$

Sejam $u, v \in V(D)$ tais que $d(u, v) = \text{diam}(D)$. Definamos P como uma (u, v) -geodésica e $S := (V(D) \setminus V(P)) \cup \{u, v\}$. Assim, vemos que $I[S] = V(D)$, donde segue o resultado acima.

3.2 Caracterizações

Na seção anterior, demos limitantes inferior e superior para os dois parâmetros. Seria interessante conhecermos os casos nos quais esses são atingidos. Para o limitante superior, encontramos caracterizações para os grafos orientados D tais que $\overrightarrow{\text{hn}}(D) = n$ e tais que $\overrightarrow{\text{gn}}(D) = n$. Um grafo orientado D é *transitivo* quando $(u, w) \in A(D)$ sempre que houver $v \in V(D)$ tal que $(u, v), (v, w) \in A(D)$.

Proposição 3.1 (CHARTRAND (2003)). *Seja D um grafo orientado não-trivial de ordem n . Então $\overrightarrow{\text{hn}}(D) = n$ se e somente se D é transitivo.*

Proposição 3.2 (CHARTRAND and ZHANG (2000)). *Seja D um grafo orientado não-trivial de ordem n . Então $\overrightarrow{\text{gn}}(D) = n$ se e somente se D é transitivo.*

Observe que as caracterizações acima coincidem. Ou seja, os grafos orientados com número de envoltória igual a n , onde esse representa o número de vértices, são os mesmos grafos orientados com número geodético igual a n .

Se D for transitivo, dado $v \in V(D)$ tal que $d^+(v), d^-(v) > 0$, segue pela definição que v é transitivo; todos os outros vértices são ou transmissores ou receptores. Logo, todos os vértices de D são extremais, donde concluímos que $\overrightarrow{\text{hn}}(D) = \overrightarrow{\text{gn}}(D) = n$. Para a outra implicação, considere a contrapositiva da mesma. Se D não for transitivo, existem vértices $u, v, w \in V(D)$ tais que $(u, v), (v, w) \in A(D)$ e $(u, w) \notin A(D)$. Nesse caso, $I[\{u, w\}]$ possui o vértice v e conseqüentemente $V(D) \setminus \{v\}$ é um conjunto de envoltória e geodético de D , donde segue que $\overrightarrow{\text{hn}}(D), \overrightarrow{\text{gn}}(D) \leq n - 1$.

Para o limitante inferior, infelizmente não encontramos uma caracterização como a acima. Na Seção 3.5 mostramos que grafos (não direcionados) com uma dada característica possuem uma orientação com número de envoltória e geodético dois. Porém, CHARTRAND and ZHANG (2000) apresentaram grafos orientados de número geodético dois com uma característica interessante. A demonstração fornecida no artigo não nos pareceu muito esclarecedora, por isso decidimos apresentar uma mais detalhada.

Proposição 3.3. *Seja D um grafo orientado de ordem pelo menos três. Então todo par de vértices de D é um conjunto geodético se e somente se D é um ciclo direcionado.*

Demonstração. Primeiro suponha D um ciclo direcionado e tome $u, v \in V(D)$ quaisquer.

Como D é um ciclo direcionado, existem um único (u, v) -caminho e um único (v, u) -caminho em D , os quais juntos compõem o ciclo. Portanto, $I[\{u, v\}] = V(D)$.

Assim, seja D um grafo orientado tal que todo par de vértices é um conjunto geodético. Sendo (w, z) um arco arbitrário de D e sabendo que $\{w, z\}$ é um conjunto geodético, cada um dos outros vértices de D está em alguma (z, w) -geodésica. Denotaremos por $P_i = (z = v_0^i, v_1^i, \dots, v_k^i = w)$ uma (z, w) -geodésica arbitrária. Veja que o (v_j^i, w) -caminho contido na (z, w) -geodésica correspondente também é uma geodésica, e tem comprimento $k - j$; isso vale para todo $j \in [k - 1]$.

Consideremos agora o par de vértices z, v_1^i . Pelo mesmo motivo de antes, todos os outros vértices estão em alguma (v_1^i, z) -geodésica. Além disso, como w está em uma dessas geodésicas e $(w, z) \in A(D)$, a geodésica contendo w necessariamente utiliza esse arco. Ademais, como P_i contém uma (v_1^i, w) -geodésica de comprimento $k - 1$, o comprimento de uma (v_1^i, z) -geodésica é k .

Tome $v_j^{i_1}, v_j^{i_2}$ distintos. Sabemos que $\{z, v_j^{i_1}\}$ é um conjunto geodético e conseqüentemente $v_j^{i_2}$ está em alguma $(v_j^{i_1}, z)$ -geodésica ou em alguma $(z, v_j^{i_1})$ -geodésica. Se o primeiro caso ocorrer, como uma $(v_j^{i_1}, z)$ -geodésica contém uma $(v_j^{i_2}, z)$ -geodésica, o comprimento da segunda deve ser menor do que o da primeira. Porém, ambas possuem o mesmo comprimento $k - j + 1$ (de $v_j^{i_2}$ ou $v_j^{i_1}$ para w , e desse para z), donde obtemos uma contradição. Por argumentos análogos, o segundo caso também não pode ocorrer.

Portanto só podemos ter uma (z, w) -geodésica contendo todos os vértices de D . Lembre que isso vale para todo par tal que $(w, z) \in A(D)$. Assim, concluímos que existe um ciclo C contendo todos os vértices de D . Suponha que exista um arco (u, v) que não pertence a esse ciclo. Sendo v' o vizinho de saída de v em C , temos que a (v', v) -geodésica não contém todos os outros vértices, devido ao suposto arco. Com isso, obtemos uma contradição e, conseqüentemente, o resultado desejado. \square

3.3 Resultados Existenciais

Nesta subseção, apresentaremos resultados sobre a existência de grafos orientados que obedecem a certas características. Por exemplo, para qualquer par de naturais $k \leq n$ maiores do que dois, existe um grafo orientado com n vértices e número de envoltória k ? E se incluirmos um terceiro natural m , para representar o número de arcos? Seria possível dizer algo similar sobre o número geodético?

O resultado abaixo responde a primeira pergunta, utilizando um caminho orientado P .

Proposição 3.4 (CHARTRAND (2003)). *Para quaisquer dois inteiros k e n com $2 \leq k \leq n$, existe uma orientação de P_n com ordem n e número de envoltória k .*

Basicamente, para cada par n, k como no enunciado nós orientamos o caminho $P_n = v_1, \dots, v_n$ da seguinte forma. Primeiro, nós orientamos as $k - 2$ primeiras arestas

alternadamente, de modo que v_1, \dots, v_{k-1} sejam vértices extremais. Em seguida, orientamos o restante das arestas de modo que tenhamos um (v_{k-1}, v_n) -caminho. Assim, os vértices extremais do nosso grafo orientado D são exatamente v_1, \dots, v_{k-1}, v_n e temos que $\{v_{k-1}, v_k, \dots, v_n\} \subseteq I[\{v_{k-1}, v_n\}]$, donde segue que $\text{Ext}(D)$ é um conjunto de envoltória. Pelo Lema 2.3, esse é o único conjunto de envoltória mínimo de D . Além disso, como todos os vértices são obtidos na primeira iteração da função de intervalo, esses argumentos também provam a proposição abaixo.

Proposição 3.5 (CHARTRAND and ZHANG (2000)). *Para quaisquer dois inteiros k e n com $2 \leq k \leq n$, existe uma orientação de P_n com ordem n e número geodético k .*

Ainda mais, no mesmo artigo os autores mostram que, na proposição acima, podemos nos restringir a torneios.

Proposição 3.6. *Para quaisquer dois inteiros k e n com $2 \leq k \leq n$, existe um torneio de ordem n e número geodético k .*

A ideia é orientar o K_n para obter um torneio T da seguinte forma. Sendo $V(T) = V(K_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$, para $i \in [n - k + 1]$ orientamos a aresta $v_i v_{i+1}$ como (v_i, v_{i+1}) ; para qualquer outra aresta $v_i v_j$ com $j > i$, nós a orientamos como (v_j, v_i) . Assim, os $k - 2$ vértices de maior índice são extremais e existe uma geodésica orientada contendo o restante dos vértices. Com essa demonstração, é possível adaptar esse resultado para o número de envoltória.

O próximo resultado, por um lado, parece mais geral do que os anteriores. Ele afirma a existência de um grafo orientado D com $\overrightarrow{\text{hn}}(D) = a$ e $\overrightarrow{\text{gn}}(D) = b$, para cada par de inteiros $2 \leq a \leq b$. A diferença é que, ao contrário das Proposições 3.4 e 3.5, o grafo mostrado a seguir possui o número de vértices determinado por a e b . O resultado foi dado por CHARTRAND (2003).

Teorema 3.1. *Para cada par de inteiros a, b com $2 \leq a \leq b$, existe um grafo orientado conexo D tal que $\overrightarrow{\text{hn}}(D) = a$ e $\overrightarrow{\text{gn}}(D) = b$.*

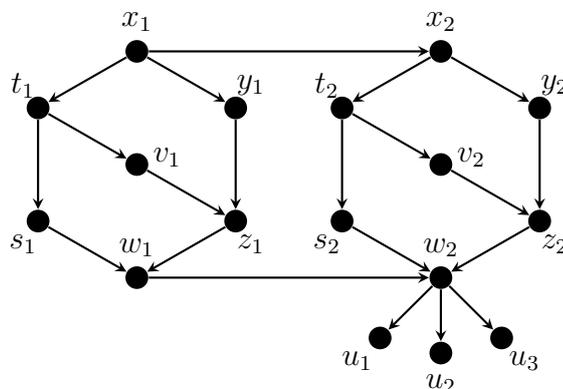


Figura 5: Grafo orientado com número de envoltória 4 e número geodético 6.

Para o caso particular em que $a = 4$ e $b = 6$, o grafo orientado D utilizado na prova é o da Figura 5. Os vértices u_1, u_2, u_3 são sumidouros e x_1 é fonte; como o

Lema 2.3 garante que eles estão em todo conjunto de envoltória, segue que $\overrightarrow{\text{hn}}(D) \geq 4$. As (x_1, u_i) -geodésicas, com $i \in [3]$, cobrem quase todos os vértices, com exceção de v_1 e v_2 . Como (t_j, v_j, z_j) é uma geodésica para $j \in [2]$, temos que $I^2[\{x, u_1, u_2, u_3\}] = V(D)$, donde $\overrightarrow{\text{hn}}(D) = 4$. Em seguida, os autores argumentam que os v_j 's devem estar em um conjunto geodético. Assim, $\{x, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2\}$ é um conjunto geodético mínimo e, conseqüentemente, $\overrightarrow{\text{gn}}(D) = 6$.

No caso geral, se $b = a$ basta usar o grafo orientado das Proposições 3.4 e 3.5. Caso contrário, seja D' o subdigrafo de D induzido pelos vértices $x_1, t_1, y_1, s_1, z_1, w_1, v_1$. O grafo orientado em questão é composto por $b - a$ cópias de D' , sendo essas D_1, D_2, \dots, D_{b-a} , e $a - 1$ vizinhos de saída de $w_{b-a} \in V(D_{b-a})$, sendo esses u_1, \dots, u_{a-1} . Além disso, para todo $i \in [b - a - 1]$, os arcos $(x_i, x_{i+1}), (w_i, w_{i+1})$ também estão nesse grafo. De forma análoga, x_1, u_1, \dots, u_{a-1} devem estar em todo conjunto de envoltória, e v_1, \dots, v_{b-a} devem estar em todo conjunto geodético, e esses são suficientes para compor um conjunto de envoltória com a elementos e um geodético com b elementos.

O próximo resultado é uma generalização da Proposição 3.4. Nessa, tínhamos o caminho P_n com n vértices (e conseqüentemente $n - 1$ arestas) e, para cada $k \in \{2, 3, \dots, n\}$, existia uma orientação D de P_n tal que $\overrightarrow{\text{hn}}(D) = k$. O teorema a seguir afirma que existe um grafo G com n vértices e m arestas (para todo m possível) que satisfaz essa característica. Porém, antes precisamos apresentar alguns resultados que serão utilizados na demonstração.

Lema 3.1 (CHARTRAND (2003)). *Seja D um grafo orientado obtido a partir de um grafo orientado D' adicionando um novo vértice v e os arcos (v, u) para todo vértice $u \in V(D')$. Então, $\overrightarrow{\text{hn}}(D) = \overrightarrow{\text{hn}}(D') + 1$.*

Lema 3.2 (CHARTRAND (2003)). *Seja D um grafo orientado obtido a partir de um grafo orientado D' adicionando um novo vértice v e o arco (v, v') , com $v' \in V(D')$. Se v' for transmissor em D' , então $\overrightarrow{\text{hn}}(D) = \overrightarrow{\text{hn}}(D')$; e se v' for receptor em D' , então $\overrightarrow{\text{hn}}(D) = \overrightarrow{\text{hn}}(D') + 1$.*

Teorema 3.2 (CHARTRAND (2003)). *Para cada par de inteiros n, m com $n - 1 \leq m \leq \binom{n}{2}$, existe um grafo G de ordem n e tamanho m tal que, para cada inteiro k com $2 \leq k \leq n$, existe uma orientação D de G tal que $\overrightarrow{\text{hn}}(D) = k$.*

Demonstração. A seguir provamos que, para cada dois inteiros m, n como no enunciado, existe um grafo conexo G de ordem n e tamanho m com um vértice v tal que G contém um caminho Hamiltoniano começando em v e, para cada $3 \leq k \leq n$, existe orientação de G onde v é transmissor e o número de envoltória é igual a k . Sejam $\{v = v_1, \dots, v_n\}$ o conjunto de vértices de G e v_1, v_2, \dots, v_n um caminho Hamiltoniano. Assim, para cada aresta $v_i v_j$ tal que $j = i + 1$, nós a orientamos como (v_i, v_j) ; caso contrário, como (v_j, v_i) . Logo, o único caminho orientado de v para v_n é um caminho Hamiltoniano, donde temos que o número de envoltória dessa orientação de G é 2. Portanto, nossa afirmação inicial implica no teorema.

A prova será por indução em n . Como os casos onde $n \in \{1, 2\}$ são triviais, assumiremos o caso base como sendo $n = 3$. Caso $n = 3$, temos duas possibilidades para G : ou o caminho P_3 ou o ciclo C_3 . Se G for o caminho, caímos na Proposição 3.4. Caso contrário, sejam $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3\}$. Seja D uma orientação de G tal que $(v_1, v_2), (v_2, v_3) \in A(D)$. Se $(v_1, v_3) \in A(D)$, teremos um vértice extremal de cada tipo, logo $\overrightarrow{\text{hn}}(D) = 3$; se não, teremos um ciclo direcionado, donde segue que $\overrightarrow{\text{hn}}(D) = 2$.

Com isso, suponha que a afirmação vale para $n - 1$. Dividiremos o passo indutivo em dois casos.

Caso 1: $2n - 3 \leq m \leq \binom{n}{2}$. Assim, $2n - 3 - (n - 1) = n - 2 = (n - 1) - 1 \leq m - (n - 1) \leq \binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n(n-1)-2(n-1)}{2} = \binom{n}{2} - (n - 1)$. Pela hipótese de indução, existe um grafo conexo G' de ordem $n - 1$ e tamanho $m - (n - 1)$ tendo um vértice v' como no enunciado. Seja G o grafo conexo tal que $V(G) = V(G') \cup \{v\}$ e $E(G) = E(G') \cup \{vu \mid u \in V(G')\}$, logo a ordem e o tamanho de G são respectivamente n e m . Como existe um caminho Hamiltoniano v', u_2, \dots, u_{n-1} em G' , $v, v', u_2, \dots, u_{n-1}$ é um caminho Hamiltoniano em G . Ou seja, existe orientação de G com número de envoltória 2.

Agora suponha $k \geq 3$. Pela hipótese de indução, para cada $k' = k - 1$ com $2 \leq k' \leq n - 1$, existe orientação D' de G' tal que $\overrightarrow{\text{hn}}(D') = k'$. Seja D uma orientação de G tal que $D[V(G')] = D'$ e $(v, u) \in A(D)$ para todo $u \in V(G')$. Portanto, v é transmissor em D e $\overrightarrow{\text{hn}}(D) = \overrightarrow{\text{hn}}(D') + 1 = k$ pelo Lema 3.1.

Caso 2: $n - 1 \leq m \leq 2n - 4$. Veja que $(n - 1) - 1 \leq m - 1 \leq 2n - 5$. Pela hipótese de indução, existe um grafo conexo G' de ordem $n - 1$ e tamanho $m - 1$ tendo um vértice v' como no enunciado. Seja G o grafo conexo tal que $V(G) = V(G') \cup \{v\}$ e $E(G) = E(G') \cup \{vv'\}$, logo a ordem e o tamanho de G são respectivamente n e m . Como existe um caminho Hamiltoniano v', u_2, \dots, u_{n-1} em G' , $v, v', u_2, \dots, u_{n-1}$ é um caminho Hamiltoniano em G . Ou seja, existe orientação de G com número de envoltória 2.

Para $3 \leq k \leq n - 1$, seja D'_k uma orientação de G' com número de envoltória k e tal que v' é transmissor. Tome D_k a orientação de G tal que $D_k[V(G')] = D'_k$ e $(v, v') \in A(D_k)$. Temos que v é transmissor em D_k e, pelo Lema 3.2, $\overrightarrow{\text{hn}}(D_k) = \overrightarrow{\text{hn}}(D'_k) = k$. Para finalizarmos, sejam D^* o inverso de D'_{n-1} e D_n a orientação de G tal que $D_n[V(G')] = D^*$ e $(v, v') \in A(D_n)$. Pelo Lema 2.4, sabemos que $\overrightarrow{\text{hn}}(D^*) = \overrightarrow{\text{hn}}(D'_{n-1}) = n - 1$. Nesse caso, v é um transmissor em D_n e pelo Lema 3.2, $\overrightarrow{\text{hn}}(D_n) = \overrightarrow{\text{hn}}(D^*) + 1 = n$. \square

CHARTRAND and ZHANG (2000) deixam o mesmo problema em aberto para o número geodético. Porém, eles mostram que existem grafos orientados de ordem n e tamanho m , como no enunciado, com número geodético 2 e n . Apresentaremos esses resultados mais a frente, pois eles envolvem parâmetros que ainda serão introduzidos. Para finalizar a seção, enunciaremos o seguinte resultado.

Proposição 3.7 (CHARTRAND and ZHANG (2000)). *Para todo inteiro k , existe um grafo orientado D e um arco $e \in A(D)$ tais que a inversão do sentido de e , produzindo assim o grafo orientado D' , resulta em $\overrightarrow{\text{gn}}(D') = \overrightarrow{\text{gn}}(D) + k$.*

A construção de um tal grafo orientado D é bem simples. Basta tomar dois vértices u e v , $k + 2$ (u, v) -caminhos de comprimento quatro, mais dois vértices w_1, w_2 e os arcos $(u, w_1), (w_2, w_1), (w_2, v)$. Como u, v, w_1, w_2 são extremos e os $k + 2$ caminhos são geodésicos, temos que $\overrightarrow{\text{hn}}(D) = 4$. Invertendo o sentido do arco (w_2, w_1) , obtemos um grafo orientado D' onde (u, w_1, w_2, v) é um (u, v) -geodésico de comprimento três. Assim, no lugar de w_1, w_2 no conjunto de envoltória precisamos de um vértice de cada um dos outros $k + 2$ (u, v) -caminhos, o que resulta em $\overrightarrow{\text{hn}}(D') = 4 - 2 + (k + 2) = 4 + k = \overrightarrow{\text{hn}}(D) + k$.

3.4 Espectro geodético

Dado um grafo G , nós definimos o *espectro geodético* de G , denotado por $S_g(G)$, como o conjunto de valores do número geodético dentre todas as orientações de G . Ou seja, $S_g(G) = \{\overrightarrow{\text{gn}}(D) \mid D \text{ orientação de } G\}$. Veja que podemos definir de forma análoga o *espectro de envoltória* de um grafo G , denotado por $S_h(G)$. Nesta seção apresentaremos o espectro geodético de algumas classes de grafos, além de um resultado de existência.

Anteriormente, havíamos dito que CHARTRAND and ZHANG (2000) deixaram em aberto um problema de existência. O problema era encontrar um grafo G de ordem n e tamanho m , para cada par de inteiros n, m com $n - 1 \leq m \leq \binom{n}{2}$, tal que existe D orientação de G com número geodético k , para todo $2 \leq k \leq n$. No caso do número de envoltória, nós já sabemos que a resposta é positiva. A resposta para esse problema também é positiva para o número geodético, na forma do teorema abaixo.

Teorema 3.3 (CHANG (2004)). *Para quaisquer dois inteiros n, m com $n - 1 \leq m \leq \binom{n}{2}$, existe um grafo G com ordem n , tamanho m e espectro geodético $\{2, \dots, n\}$.*

A prova desse segue os mesmos passos da do Teorema 3.2. Utilizando indução em n , os autores pretendem mostrar que existe um grafo G com um caminho Hamiltoniano e que, para cada $k \in \{3, \dots, n\}$, existe orientação D de G tal que $\overrightarrow{\text{gn}}(D) = k$ e $x \in V(D)$ é uma fonte. Além disso, no passo indutivo eles também analisam os mesmos dois casos que na prova do Teorema 3.2, quando $2n - 3 \leq m \leq \binom{n}{2}$ e quando $n - 1 \leq m \leq 2n - 4$. Veja também que o seguinte corolário é uma consequência direta do Teorema 3.2. é que para todo par n, m como no enunciado, existe um grafo G tal que $S_h(G) = \{2, \dots, n\}$.

Corolário 3.1. *Para quaisquer dois inteiros n, m com $n - 1 \leq m \leq \binom{n}{2}$, existe um grafo G com ordem n , tamanho m e $S_h(G) = \{2, \dots, n\}$.*

Os próximos resultados desta seção tratarão do espectro para classes específicas de grafos. Pelas Proposições 3.4 e 3.5, sabemos que para cada natural k entre dois e n existe uma orientação D de P_n tal que $\overrightarrow{\text{hn}}(D) = \overrightarrow{\text{gn}}(D) = k$. Assim, podemos concluir o

seguinte.

Corolário 3.2. *Para $n \geq 2$, $S_h(P_n) = S_g(P_n) = \{2, \dots, n\}$.*

Até agora, perceba que mostramos apenas grafos com espectro geodético e de envoltória contínuos. Porém, esse nem sempre é o caso, como mostra o seguinte resultado.

Teorema 3.4 (CHANG (2004)). *Para $n \geq 3$, $S_g(C_n) = \{3\} \cup \{2s \mid 1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$.*

Em uma orientação D de C_n , o número de fontes é igual ao número de sumidouros; seja s esse valor. Quando $s = 0$, o ciclo é direcionado e portanto todo par de vértices é um conjunto geodético, como visto na Proposição 3.3. Para $s = 1$, ou a fonte e o sumidouro compõem um conjunto geodético mínimo ou é necessário mais um vértice. Quando $s > 1$, as fontes e sumidouros são suficientes, e isso quer dizer que $\vec{gn}(D) = 2s$. A versão para o espectro de envoltória é um corolário do seguinte resultado, e o argumento é análogo ao anterior.

Proposição 3.8 (CHARTRAND (2003)). *Seja D uma orientação de C_n . Então $\vec{hn}(D) = 3$ ou $\vec{hn}(D) = 2t$ para algum inteiro t com $1 \leq t \leq n/2$.*

Corolário 3.3. *Para $n \geq 3$, $S_h(C_n) = \{3\} \cup \{2s \mid 1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$.*

O próximo resultado é sobre o espectro geodético das árvores. Perceba que, como as folhas de uma árvore T possuem apenas um vizinho, numa orientação de T cada folha será ou uma fonte ou um sumidouro. Assim, sendo ℓ o número de folhas de T , segue que $\vec{gn}(D) \geq \ell$ para toda orientação D de T .

Teorema 3.5 (CHANG (2004)). *Se T é uma árvore com ℓ folhas, $S_g(T) = \{\ell, \ell + 1, \dots, n\}$.*

No artigo, os autores demonstram por indução em n . Primeiro eles analisam quando a árvore T é uma estrela, ou seja, quando existe $v \in V(T)$ tal que $E(T) = \{vu \mid u \in V(T) \setminus \{v\}\}$. Dada uma orientação D de T , para $n = 2$ temos que $\ell = 2$ e conseqüentemente $\vec{gn}(D) = 2$. Caso $n \geq 3$, $\vec{gn}(D) \in \{n - 1, n\}$; quando todas as folhas forem fontes, v será sumidouro e $\vec{gn}(D) = n$; se houver ma folha fonte e uma sumidouro, v está em um geodético entre elas e, assim, $\vec{gn}(D) = n - 1$.

No passo indutivo, os autores escolhem um vértice v de modo que esse possui $d_T(v) - 1$ vizinhos que são folhas. Eles removem essas folhas e aplicam a hipótese de indução na árvore que restou após essa remoção. Em seguida, retornam as folhas e encontram as orientações com os valores desejados para o número geodético.

Pela Proposição 3.6, podemos deduzir que $S_g(K_n) = \{2, \dots, n\}$. O teorema abaixo generaliza esse resultado para grafos r -partidos com grau mínimo pelo menos dois.

Teorema 3.6 (CHANG (2004)). *Se $G = K_{n_1, \dots, n_r}$ é um grafo r -partido completo de ordem n e tal que $\delta(G) \geq 2$, então $S_g(G) = \{2, \dots, n\}$.*

3.5 Números de envoltória e geodético orientáveis

Nesta seção apresentaremos quatro novos parâmetros baseados nos dois já definidos anteriormente. Dentre os artigos que estudamos, a maioria dos resultados tem esses parâmetros como foco.

Seja G um grafo não direcionado. O *número de envoltória orientável superior* e o *número de envoltória orientável inferior* são definidos respectivamente por

$$\begin{aligned} \text{hn}^+(G) &= \max\{\overrightarrow{\text{hn}}(D) \mid D \text{ orientação de } G\} \text{ e} \\ \text{hn}^-(G) &= \min\{\overrightarrow{\text{hn}}(D) \mid D \text{ orientação de } G\}. \end{aligned}$$

Basicamente, esses são respectivamente o maior e o menor valor dentre os elementos de $S_h(G)$. Perceba que, como estamos tratando com grafos finitos, ambos os números estão bem definidos. O *número geodético orientável superior* e o *número geodético orientável inferior* são definidos de maneira análoga por

$$\begin{aligned} \text{gn}^+(G) &= \max\{\overrightarrow{\text{gn}}(D) \mid D \text{ orientação de } G\} \text{ e} \\ \text{gn}^-(G) &= \min\{\overrightarrow{\text{gn}}(D) \mid D \text{ orientação de } G\}. \end{aligned}$$

3.5.1 *Analisando isoladamente* $\text{hn}^-(G)$, $\text{gn}^-(G)$, $\text{hn}^+(G)$ e $\text{gn}^+(G)$

Pelo limitante inferior de (2), temos que $\text{hn}^-(G), \text{gn}^-(G) \geq 2$. Assim, uma pergunta natural a se fazer é quais grafos atingem esse limitante. Infelizmente, não encontramos em nossa pesquisa um resultado que caracterizasse esses grafos. Porém, existe uma classe de grafos cujo número de envoltória orientável inferior atinge esse limite.

Lema 3.3 (CHARTRAND (2003)). *Seja G um grafo conexo de ordem $n \geq 2$. Se G possui um caminho Hamiltoniano, então $\text{hn}^-(G) = 2$.*

Para obter tal orientação de G , seja x_1, \dots, x_n um caminho Hamiltoniano desse grafo. Orientamos cada aresta $x_i x_{i+1}$ desse caminho como (x_i, x_{i+1}) ; e para cada uma das outras arestas $x_i x_j$ com $j > i$, nós a orientamos como (x_j, x_i) . Assim, (x_1, \dots, x_n) é uma geodésica nessa orientação, donde segue que $I[\{x_1, x_n\}] = V(G)$. Esse mesmo resultado vale para o número geodético orientável inferior, e foi mostrado por CHARTRAND and ZHANG (2000).

Lema 3.4. *Seja G um grafo conexo de ordem $n \geq 2$. Se G possui um caminho Hamiltoniano, então $\text{gn}^-(G) = 2$.*

Veja que essa condição é suficiente, contudo não é necessária. Por exemplo, consideremos $K_{2,\ell}$ com $\ell > 3$ e bipartição $\{\{u_1, u_2\}, \{v_1, \dots, v_\ell\}\}$. Veja que esse grafo não possui caminho Hamiltoniano. Ademais, caso orientemos as arestas como (u_1, v_i) e (v_i, u_2) para todo $i \in [\ell]$, temos que $\{u_1, u_2\}$ é um conjunto de envoltória e geodético mínimo (novamente pelo Lema 2.3).

A seguir, apresentaremos agora um limitante superior para $\text{hn}^-(G)$. Dado um grafo G , uma *árvore geradora* de G é uma árvore $T \subseteq G$ tal que $V(T) = V(G)$.

Lema 3.5 (CHARTRAND (2003)). *Seja μ o menor número de folhas em uma árvore geradora do grafo conexo G . Então, $\text{hn}^-(G) \leq \mu$.*

Para obtermos uma orientação D de G com $\overrightarrow{\text{hn}}(D) \leq \mu$, basta proceder da seguinte forma. Sejam T uma árvore geradora de G com folhas v_1, \dots, v_μ . Nós orientamos cada aresta $uv \in E(T)$ como (u, v) se $\text{dist}_T(v_1, v) = \text{dist}_T(v_1, u) + 1$. Para arestas $uv \in E(G) \setminus E(T)$, caso $\text{dist}_T(v_1, u) > \text{dist}_T(v_1, v)$ nós a orientamos como (u, v) e, quando as distâncias forem iguais, escolhemos a orientação arbitrariamente. Assim, os v_1v_i -caminhos em T , para todo $i \in \{2, \dots, \mu\}$, correspondem a geodésicas em D . Como cada vértice de G está em algum desses caminhos, temos que as μ folhas formam um conjunto de envoltória de D . Perceba que esse resultado também vale para o número geodético orientável inferior.

Teorema 3.7 (DONG (2009)). *Seja $\ell(T)$ o número de folhas de uma árvore T . Então, para um grafo G temos que $\text{gn}^-(G) \leq \min\{\ell(T) \mid T \text{ é uma árvore geradora de } G\}$.*

Pelo limitante superior de (2), temos que $\text{hn}^+(G), \text{gn}^+(G) \leq n$. Assim, outra pergunta natural a se fazer é quais grafos atingem esse limitante. Ou seja, se existe uma orientação D de G com número de envoltória ou geodético n . Pelas Proposições 3.1 e 3.2, sabemos que os grafos orientados que atingem esse limite são os transitivos. Nesse caso, quando D é transitivo dizemos que ele é uma *orientação transitiva* de G . Desse resultado extraímos o seguinte corolário para o número geodético; no caso do número de envoltória, já existe um resultado.

Corolário 3.4. *Seja G um grafo conexo de ordem pelo menos dois. Então, $\text{gn}^+(G) = n$ se e somente se G possui uma orientação transitiva. se e somente se $\text{gn}^+(G) = n$.*

Proposição 3.9 ((CHARTRAND, 2003)). *Seja G um grafo conexo de ordem pelo menos dois. Então, $\text{gn}^+(G) = n$ se e somente se G possui uma orientação transitiva. se e somente se $\text{gn}^+(G) = n$.*

(CHARTRAND and ZHANG, 2000) mostram que os grafos bipartidos de ordem pelo menos dois atingem esse valor para o número geodético orientável superior.

3.5.2 Relacionando os números de envoltória e geodético orientáveis

A seguir focaremos nas relações entre os quatro parâmetros. Primeiramente, lembre que conjunto geodético é um tipo particular de conjunto de envoltória. Ou seja, é possível que haja um conjunto de envoltória menor do que o menor conjunto geodético; se não, o menor conjunto de envoltória coincide em cardinalidade com o menor conjunto geodético. Portanto, segue que $\overrightarrow{\text{hn}}(D) \leq \overrightarrow{\text{gn}}(D)$ para todo digrafo D . Assim, dados um grafo G arbitrário e D uma orientação desse tal que $\overrightarrow{\text{gn}}(D) = \text{gn}^-(G)$, temos que $\text{hn}^-(G) \leq \overrightarrow{\text{hn}}(D) \leq \overrightarrow{\text{gn}}(D) = \text{gn}^-(G)$. Em suma, $\text{hn}^-(G) \leq \text{gn}^-(G)$ para todo grafo G . Utilizando argumentos análogos, é possível concluir que $\text{hn}^+(G) \leq \text{gn}^+(G)$ para todo

grafo G .

Quanto aos números de envoltória orientáveis inferior e superior, como um é o mínimo e o outro é o máximo, fica claro que $hn^-(G) \leq hn^+(G)$ para todo grafo G . Pelo mesmo motivo, também temos $gn^-(G) \leq gn^+(G)$. Caso valha a igualdade, isso implicaria que os valores do número de envoltória (geodético) de todas as possíveis orientações de um grafo são os mesmos. À primeira vista parece estranho que, se tomarmos um grafo de ordem e tamanho grandes, todas as orientações desse tenham o mesmo número de envoltória ou o mesmo número geodético. De fato, ambas as desigualdades são estritas.

Teorema 3.8 (FARRUGIA (2005)). *Para todo grafo conexo G com pelo menos três vértices, temos que $hn^-(G) < hn^+(G)$ e $gn^-(G) < gn^+(G)$.*

Com isso, temos que $hn^-(G) < hn^+(G) \leq gn^+(G)$ e $hn^-(G) \leq gn^-(G) < gn^+(G)$. Assim, resta apenas estabelecer uma relação entre $gn^-(G)$ e $hn^+(G)$. O seguinte resultado responde essa questão.

Teorema 3.9 (HUNG (2009)). *Para todo grafo conexo G com pelo menos três vértices, temos que $gn^-(G) < hn^+(G)$.*

Desse modo podemos dizer que, para todo grafo conexo de ordem pelo menos três,

$$hn^-(G) \leq gn^-(G) < hn^+(G) \leq gn^+(G). \quad (4)$$

As únicas igualdades restantes são entre os números orientáveis inferiores e entre os superiores. Veja que não podemos nos desfazer dessas, pois há exemplos onde as mesmas valem. Pelo Corolário 3.2 temos que $hn^-(P) = gn^-(P) = 2$ e $hn^+(P) = gn^+(P) = n$, onde P é um caminho não-orientado e $n = |V(P)|$.

4 RESULTADOS

Apresentamos a seguir os resultados obtidos durante a pesquisa, os quais estão divididos em três subseções. A primeira trata do mais simples: um limitante superior apertado para o número de envoltória em torneios, que será estendido para grafos split orientados. Já na segunda, exploramos a complexidade computacional de determinar os números de envoltória e geodético em grafos bipartidos orientados. Para o número de envoltória, mostramos que o problema é NP-difícil, mesmo restrito à subclasse de grafos bipartidos denominada de cubos parciais. Quanto ao número geodético, o problema continua NP-difícil mesmo para grafos bipartidos com orientação acíclica. Por fim, mostramos que esses dois parâmetros em grafos cacto orientados podem ser obtidos em tempo polinomial.

4.1 Torneios e Split

Um grafo G é dito *split* quando existe uma partição $\{S, C\}$ de seu conjunto de vértices tal que S é um conjunto estável e C é uma clique. O problema do número de envoltória para grafos split já foi estudado por DOURADO (2009). Dado um grafo split $G = (S \cup C, E)$ tal que S é um conjunto estável maximal e C é uma clique, eles provaram que $hn(G) \in \{|\text{Ext}(G)|, |S|, |S+1|\}$ e esse também pode ser obtido em tempo polinomial. Veja que em um grafo split $G = (S \cup C, E)$, todos os vértices de S são simpliciais, logo eles estão em todo conjunto de envoltória de G . Porém, dada uma orientação D de G , pode ser que nenhum dos vértices de S seja extremal em D . Sabemos que os extremais de S precisam estar em todos os conjuntos de envoltória de D , mas ainda precisamos analisar os outros vértices de S . O lema a seguir nos garante que esses serão obtidos, caso tenhamos os vértices de C .

Lema 4.1. *Se $D = (S \cup C, A)$ é um grafo split orientado, então $S \setminus \text{Ext}(D) \subseteq I[C]$.*

Demonstração. Seja $v \in S$ não extremal arbitrário. Por definição, devem existir $u, w \in C$ tais que $(u, v), (v, w), (w, u) \in A(D)$. Como a menor (u, w) -geodésica tem comprimento pelo menos dois temos que $v \in I[\{u, w\}]$, o que implica em $v \in I[C]$. \square

Ou seja, se obtivermos um conjunto $S' \subset C$ tal que $I^k[S'] \supseteq C$ para algum k natural, $S' \cup (S \cap \text{Ext}(D))$ será um conjunto de envoltória de D . Com isso, focaremos no problema do número de envoltória para torneios. Doravante, a menos que seja dito o contrário, T denotará um torneio. Primeiro observamos que, além de serem necessários no conjunto de envoltória, os vértices extremais de T não são tão importantes para a finalidade desse conjunto. Isso ocorre pois, dados $u, v \in V(T)$ onde um deles é extremal, não há (u, v) -geodésica com interior não vazio.

Lema 4.2. *Sejam T um torneio e $u, v \in V(T)$ distintos tais que $u \in \text{Ext}(T)$. Então $I[\{u, v\}] = \{u, v\}$.*

Demonstração. Primeiro, suponhamos que u seja uma fonte. Como T é um torneio, o único (u, v) -caminho é o composto apenas pelo arco (u, v) . Ademais, como $d^-(u) = 0$, não há (v, u) -caminhos em T . Portanto, $I[\{u, v\}] = \{u, v\}$. O caso onde u é sumidouro é análogo.

Por fim, suponhamos u transitivo. Sem perda de generalidade, assumimos que $(u, v) \in A(T)$; ou seja, há apenas uma (u, v) -geodésica. Assim, seja $(v = v_0, v_1, \dots, v_k = u)$ um (v, u) -caminho qualquer; claramente devemos ter $k \geq 2$. Veja que não pode existir $i \in [k-1]$ tal que $(v_i, u), (u, v_{i-1}) \in A(T)$, já que $(v_{i-1}, v_i) \in A(T)$ e u é transitivo. Como $(v_{k-1}, u) \in A(T)$, pelo que dissemos antes devemos ter $(v_{k-2}, u) \in A(T)$, o que por sua vez implica que $(v_{k-3}, u) \in A(T)$. Seguindo essa linha de raciocínio eventualmente obteremos $(v_1, u) \in A(T)$. Porém, como $(u, v) \in A(T)$, obtemos uma contradição ao fato de u ser transitivo. Com isso, concluímos que não existe (v, u) -caminho, donde temos que $I[\{u, v\}] = \{u, v\}$. \square

Em particular, os vértices extremais não influenciarão de maneira significativa as envoltórias de um conjunto $S \subseteq V(T)$.

Corolário 4.1. *Sejam T um torneio e $S \subseteq V(T)$ com partição $\{S', S''\}$ tal que $S' = S \cap \text{Ext}(T)$. Então $I[S] = S' \cup I[S'']$ e, conseqüentemente, $[S] = S' \cup [S'']$.*

Demonstração. Por definição e pelo Lema 4.2, temos que

$$\begin{aligned} I[S] &= \bigcup_{u,v \in S} I[\{u, v\}] \\ &= \left(\bigcup_{u,v \in S'} I[\{u, v\}] \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{u \in S' \\ v \in S''}} I[\{u, v\}] \right) \cup \left(\bigcup_{u,v \in S''} I[\{u, v\}] \right) \\ &= S' \cup (S' \cup S'') \cup I[S''] = S' \cup I[S'']. \end{aligned}$$

Ademais, sabemos que $S'' \cap \text{Ext}(T) = \emptyset$, donde segue que $I[S''] \cap \text{Ext}(T) = \emptyset$. Ou seja, a equação anterior também vale para $I[S]$ e o resultado segue por indução no número de iterações da função I . Logo, eventualmente obteremos $I[I^k[S]] = I^k[S] = I^k[S''] \cup S' = [S''] \cup S'$. \square

Corolário 4.2. *Seja T um torneio. S é um conjunto de envoltória de T se, e somente se, $\text{Ext}(T) \subseteq S$ e $[S \setminus \text{Ext}(T)] = V(T) \setminus \text{Ext}(T)$.*

Com isso, precisamos apenas focar nos vértices não extremais de T . Sendo $v \in V(T)$ um tal vértice, pela definição devem existir $u, w \in V(T)$ tais que $(u, v), (v, w), (w, u) \in A(T)$. Como esses vértices e arcos compõem um ciclo direcionado, podemos afirmar que u e w também não são extremais e que v está contido em uma (u, w) -geodésica. Além disso, cada vértice não extremal de T pertence a um C_3 direcionado contido em T

Assim, para todo $S \subseteq V(T)$ definimos $\hat{I}[S] := S \cup \{v \in V(T) \mid \text{existem } u, w \in S \text{ tais que } u, v, w \text{ compõem um ciclo direcionado em } T\}$. Também definimos $\widehat{[S]}$

analogamente a $[S]$, utilizando \hat{I} ao invés da função de intervalo convencional. Veja que os vértices de $\hat{I}[S] \setminus S$ são obtidos por meio de geodésicas de tamanho dois, donde concluímos que $\hat{I}[S] \subseteq I[S]$.

A razão para definirmos essa função está no fato de pretendermos mais à frente estender nossa análise para grafos split orientados. Lembre-se que, em um grafo split orientado $D = (S \cup C, A)$, pode haver vértices não extremos no conjunto estável. Suponha que haja uma (u, v) -geodésica P no torneio $D[C]$ com mais do que um vértice interno. Se existir $w \in S$ de modo que (u, w, v) é um caminho em D , então P não será uma geodésica em D . Porém, veja que isso não afeta as geodésicas com apenas um vértice interno. Nosso objetivo é obter um conjunto de envoltória para $D[C]$ que mantenha a propriedade em D , ou seja, $I_D^k[S'] \supseteq C$ para algum natural k . Vendo que $S' \subseteq C$ tal que $\widehat{[S']}_{D[C]} = C$ satisfaz essa propriedade, focaremos em encontrar um conjunto como S' .

Lema 4.3. *Se T é um torneio, então existe $S \subseteq V(T) \setminus \text{Ext}(T)$ tal que $|S| \leq \frac{2}{3}(|V(T) \setminus \text{Ext}(T)|)$ e $\widehat{[S]} = V(T) \setminus \text{Ext}(T)$.*

Demonstração. Para facilitar a escrita, denotamos $X := \text{Ext}(T)$ e $V := V(T) \setminus X$. Dado $v \in V$, sabemos que existem $u, w \in V$ tais que $(u, v), (v, w), (w, u) \in A(T)$. Assim, vemos que uma (u, w) -geodésica deve ter comprimento pelo menos dois, donde segue que (u, v, w) é uma geodésica e conseqüentemente $v \in \hat{I}\{u, w\}$.

A seguir, construímos S iterativamente e provamos que, a cada passo da construção, $|S| \leq \frac{2}{3}|\widehat{[S]}|$ e, para todo $v \in \widehat{[S]}$, existem $u, w \in \widehat{[S]}$ tais que u, v, w compõem um C_3 direcionado em T . Começamos com $S = \{u_1, u_2\}$ de modo que u_1, u_2 pertençam a um mesmo C_3 direcionado. Esse fato já nos fornece a desigualdade e que a propriedade vale para u_1 e u_2 . Além disso, por definição, para qualquer $v \in \hat{I}^k[S] \setminus \hat{I}^{k-1}[S]$ com $k \geq 1$, existem $u, w \in \hat{I}^{k-1}[S]$ tais que u, v, w compõem um C_3 direcionado em T . Isso implica que a propriedade também vale para $v \in \widehat{[S]} \setminus S$, donde temos que S satisfaz o que pedimos.

Caso haja um vértice $v \in V \setminus \widehat{[S]}$, sabemos que existem $v_1, v_2 \in V$ tais que $(v, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v) \in A(T)$. Não podemos ter $v_1, v_2 \in \widehat{[S]}$, do contrário isso implicaria que $v \in \widehat{[S]}$. Suponha então, sem perda de generalidade, que $v_1 \in \widehat{[S]}$ e $v_2 \notin \widehat{[S]}$. Assim, pela hipótese sabemos que existem $v_3, v_4 \in \widehat{[S]}$ tais que $(v_1, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1) \in A(T)$. Caso $(v_2, v_4) \in A(T)$ teríamos um C_3 direcionado com vértices v_1, v_2, v_4 ; logo, devemos ter $(v_4, v_2) \in A(T)$. Similarmente, o arco (v_3, v) resultaria em um C_3 direcionado de vértices v, v_1, v_3 , donde temos que $(v, v_3) \in A(T)$. Porém, agora atingimos uma contradição: tanto o arco (v, v_4) quanto o (v_4, v) implicam na existência de um C_3 direcionado, um com vértices v, v_4, v_2 e outro com v, v_3, v_4 , respectivamente. Ou seja, essa situação também não pode ocorrer.

Com isso, a única opção aceitável é que $v_1, v_2 \in V \setminus \widehat{[S]}$. Defina $S' = S \cup \{v_1, v_2\}$, donde temos $\widehat{[S]} \cup \{v, v_1, v_2\} \subseteq \widehat{[S']}$. Como $|S'| = |S| + 2$ e $|\widehat{[S']}| \geq |\widehat{[S]}| + 3$, a desigualdade vale para S' . Vamos então mostrar que a propriedade vale para S' . Para todo $v \in \widehat{[S']} \setminus S'$, a propriedade vale por definição; e para todo $v \in S$, ela vale pela hipótese. Logo, resta

apenas analisar os vértices em $S' \setminus S$, que são justamente v_1, v_2 . Visto que v, v_1, v_2 compõem um C_3 direcionado, nós obtemos o resultado desejado. Assim, definimos $S := S'$.

Repetindo esse processo iterativamente, a cada passo nós obtemos um conjunto da maneira que queríamos. Ademais, como T é finito, em algum momento S será tal que $[\widehat{S}] = V \setminus \text{Ext}(T)$ e, conseqüentemente, nós paramos de aplicar o processo acima. Nesse ponto, veja que $|S| \leq \frac{2}{3}|\widehat{S}| = \frac{2}{3}|V \setminus \text{Ext}(T)|$. Portanto, S satisfaz as condições do enunciado. \square

Com o que provamos até então, podemos encontrar um conjunto de envoltória em um torneio T . Além disso, esse conjunto é limitado superiormente por uma função em $|V(T)|$ e $|\text{Ext}(T)|$, o que resulta em um limitante para o número de envoltória. A seguir, fora do fato mencionado, mostraremos também que existem torneios cujo número de envoltória é igual ao valor desse limitante.

Para tanto, precisamos apresentar mais uma definição. Sejam D e D' grafos orientados. O *produto lexicográfico* de D por D' , denotado por $D[D']$, é o grafo orientado que satisfaz o seguinte. $V(D[D']) = V(D) \times V(D')$ e $((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \in A(D[D'])$ se, e somente se, ou $(u_1, u_2) \in A(D)$ ou $u_1 = u_2$ e $(v_1, v_2) \in A(D')$. Dito de outra forma, para cada vértice v de D tomamos uma cópia de D' , denotada por D'_v , e se $(u, v) \in A(D)$ então adicionamos todos os arcos $((u, u'), (v, v'))$ tais que $u' \in V(D'_u)$ e $v' \in V(D'_v)$. Além disso, diremos que um torneio transitivo é um grafo completo com orientação transitiva.

Teorema 4.1. *Se T é um torneio, então $\overrightarrow{\text{hn}}(T) \leq |\text{Ext}(T)| + \frac{2}{3}|V(T) \setminus \text{Ext}(T)|$ e esse limitante é apertado.*

Demonstração. Pelo Corolário 4.2, todo conjunto de envoltória S de T precisa não só conter $\text{Ext}(T)$, como também ser tal que $[S \setminus \text{Ext}(T)] = V(T) \setminus \text{Ext}(T)$. O Lema 4.3 garante que existe $S' \subseteq V \setminus \text{Ext}(T)$ tal que $|S'| \leq \frac{2}{3}|V(T) \setminus \text{Ext}(T)|$ e $[\widehat{S}'] = V(T) \setminus \text{Ext}(T)$. Como $[\widehat{S}'] \subseteq [S']$, definindo $S := \text{Ext}(T) \cup S'$ obtemos um conjunto de envoltória de cardinalidade no máximo $|\text{Ext}(T)| + \frac{2}{3}|V(T) \setminus \text{Ext}(T)|$, donde segue o resultado.

A fim de mostrar que esse limitante é apertado, construímos um torneio T tal que $\overrightarrow{\text{hn}}(T) = |\text{Ext}(T)| + \frac{2}{3}(|V(T) \setminus \text{Ext}(T)|)$. Para facilitar os argumentos, nosso torneio não possuirá vértices extremos. Seja T_1 um torneio transitivo tal que $V(T_1) = [n]$ e $A(T_1) = \{(i, j) \mid i, j \in [n] \text{ e } i < j\}$. Ademais, seja T_2 um C_3 direcionado com $V(T_2) = \{u, v, w\}$ e $A(T_2) = \{(u, v), (v, w), (w, u)\}$. Nosso torneio será $T = T_1[T_2]$. A Figura 6 ilustra esse grafo orientado quando $n = 5$.

Para cada $i \in [n]$, defina T_2^i como a cópia de T_2 correspondendo ao vértice i de T_1 . Tome $(i, x), (j, y) \in V(T)$ tais que $i < j$, donde segue que $((i, x), (j, y)) \in A(T)$. A existência de um $((j, y), (i, x))$ -caminho implica que há vértices $(i', x'), (j', y') \in V(T)$ tais que $i' < j'$ e $((j', y'), (i', x')) \in A(T)$, contradizendo a definição de T_1 . Esse argumento também elimina a possibilidade de um $((i, x), (i, y))$ -caminho que não está contido em T_2^i . Assim, concluímos que para todo $S \subseteq V(T)$ temos $I[S] = \bigcup_{i=1}^n I[S \cap V(T_2^i)]$ e

$I[S \cap V(T_2^i)] \subseteq V(T_2^i)$ para todo $i \in [n]$. Portanto, $[S] = V(T)$ se e somente se $[S \cap V(T_2^i)] = V(T_2^i)$ para todo $i \in [n]$, o que significa que $\vec{\text{hn}}(T) = \sum_{i=1}^n \vec{\text{hn}}(T_2^i) = n \vec{\text{hn}}(T_2)$.

Como T_2 possui mais de dois vértices, temos que $\vec{\text{hn}}(T_2) \geq 2$; e pela definição desse grafo orientado, segue que $\vec{\text{hn}}(T_2) = 2$. Desse modo, concluímos que $\vec{\text{hn}}(T) = 2n = \frac{2}{3}3n = \frac{2}{3}|V(T)|$. \square

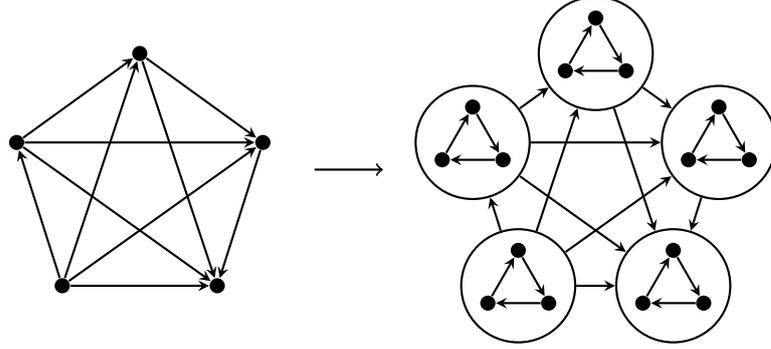


Figura 6: Exemplo apertado para o Teorema 4.1, quando $n = 5$.

Retornamos aos grafos split. Pelo que comentamos logo após o Corolário 4.2, um conjunto como o que consta no Teorema 4.1 é exatamente o que procurávamos. Ou seja, em um grafo split orientado $D = (S \cup C, A)$, é possível encontrar um conjunto $C' \subseteq C \setminus \text{Ext}(D[C])$ tal que $[C' \cup \text{Ext}(D[C])] \supseteq C$; além disso, $|C'| \leq \frac{2}{3}(C \setminus \text{Ext}(D[C]))$. Também mencionamos que $S \setminus \text{Ext}(D) \subseteq I[C]$, donde deduzimos o seguinte resultado.

Corolário 4.3. *Seja $D = (S \cup C, A)$ um grafo split orientado tal que S é maximal e $|C| \geq 2$. Então, $\vec{\text{hn}}(D) \leq |\text{Ext}(D) \cap S| + |\text{Ext}(D[C])| + \frac{2}{3}|C \setminus \text{Ext}(D[C])|$ e esse limitante é apertado.*

Demonstração. Pelo Lema 4.3, sabemos que existe $S' \subseteq C \setminus \text{Ext}(D[C])$ tal que $|S'| \leq \frac{2}{3}|C \setminus \text{Ext}(D[C])|$ e $[\widehat{S'}]_{D[C]} = C \setminus \text{Ext}(D[C])$. Veja que, se houver (u, v) -geodésicas em D intersectando S tais que $u, v \in C$, essas possuem comprimento pelo menos dois. Portanto, elas não afetam as geodésicas em $D[C]$ de comprimento no máximo dois, donde temos que $[\widehat{S'}]_{D[C]} \subseteq [\widehat{S'}]_D$. Também temos que $[\widehat{S'}]_D$ possui os vértices não extremais em S , pelo Lema 4.1. Desse modo, concluímos que $S' \cup \text{Ext}(D[C]) \cup (\text{Ext}(D) \cap S)$ é um conjunto de envoltória de D , cuja cardinalidade respeita o limitante do enunciado.

Para provar que esse limitante é apertado, basta perceber que um torneio é um caso particular de split orientado. Como $S = \emptyset$ em um torneio e o Teorema 4.1 afirma que o limitante é apertado para torneios, segue o resultado. \square

Uma pergunta interessante a se fazer é se um limitante parecido pode ser encontrado para o número geodético em torneios, e se esse pode ser estendido para grafos split orientados. Para o número de envoltória, nós construímos um conjunto no Lema 4.3 de maneira iterativa. Nessa construção, por considerarmos a envoltória do conjunto, alguns casos foram descartados pois levavam a uma contradição. Se apenas uma aplicação

da função de intervalo for permitida (no caso do conjunto geodético), esses casos precisam ser considerados, o que complica a análise.

Outro problema que ainda se encontra em aberto é a complexidade computacional para determinar ambos os parâmetros quando o grafo orientado é um grafo split orientado, ou até mesmo um torneio.

4.2 NP-completude para grafos bipartidos orientados

Nesta seção provamos que, dado um grafo bipartido orientado D e um inteiro positivo k , decidir se $\overrightarrow{\text{hn}}(D) \leq k$ ou $\overrightarrow{\text{gn}}(D) \leq k$ são ambos problemas NP-completos. Primeiro estudamos o número de envoltória em cubos parciais, uma subclasse de grafos bipartidos. Em seguida, fazemos uma redução do problema de cobertura de conjuntos para o número geodético em grafos bipartidos orientados acíclicos. Para mais detalhes sobre Complexidade Computacional, sugerimos o livro de GAREY and JOHNSON (1990).

4.2.1 Número de Envoltória

No caso não orientado, ARAÚJO (2013) provaram que determinar o número de envoltória de um grafo é NP-difícil, até mesmo para grafos bipartidos. Veja que, trocando cada aresta do grafo por um par de arcos em direções opostas, obteríamos um digrafo cujos caminhos entre cada par de vértices (em ambos os sentidos) seriam os mesmos do caso não direcionado. Assim, poderíamos adaptar esse resultado para o caso direcionado. Porém, como consideramos apenas grafos orientados, esses pares de arcos não são admitidos. A fim de obter algo parecido, ao invés de pares de arcos, substituímos cada aresta por um par de caminhos orientados de comprimento dois, com sentidos opostos.

Seja $G_{\overrightarrow{C_4}}$ o grafo orientado obtido a partir de G trocando cada aresta por um C_4 direcionado. Mais formalmente, dado um grafo G com $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, seja $G_{\overrightarrow{C_4}}$ o grafo orientado tal que $V(G_{\overrightarrow{C_4}}) = V(G) \cup \{v_{i,j}, v_{j,i} \mid v_i v_j \in E(G)\}$ e $A(G_{\overrightarrow{C_4}}) = \{(v_i, v_{i,j}), (v_{i,j}, v_j), (v_j, v_{j,i}), (v_{j,i}, v_i) \mid v_i v_j \in E(G)\}$. Pela definição, percebemos que os únicos vizinhos de cada v_i são os vértices da forma $v_{i,j}, v_{j,i}$, e os de cada $v_{i,j}$ são apenas v_i e v_j . Portanto $G_{\overrightarrow{C_4}}$ é bipartido, com bipartição $\{V(G), V(G_{\overrightarrow{C_4}}) \setminus V(G)\}$.

O primeiro detalhe importante sobre esse procedimento é que ele “dobrou” o tamanho de cada caminho. Em outras palavras, se tivermos um caminho $P = v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ de comprimento k em G , também teremos os caminhos $P_1 = (v_{i_0}, v_{i_0, i_1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}, i_k}, v_{i_k})$ e $P_2 = (v_{i_k}, v_{i_k, i_{k-1}}, v_{i_{k-1}}, \dots, v_{i_1, i_0}, v_{i_0})$ em $G_{\overrightarrow{C_4}}$, ambos de comprimento $2k$. Ademais, a existência de um caminho como P_1 em $G_{\overrightarrow{C_4}}$ implica na existência de um como P_2 em $G_{\overrightarrow{C_4}}$, o qual pode ser pensado como o “reverso de P_1 ”. Não só isso, como também implica na existência de um caminho como P em G . Chamamos P_1, P_2 e P de *caminhos correspondentes*; ainda mais, dizemos que P_1 e P_2 são caminhos *inversos*.

Veja que para uma $v_i v_j$ -geodésica de comprimento $d = \text{dist}_G(v_i, v_j)$ em G , com

$v_i, v_j \in V(G)$ arbitrários, temos os caminhos correspondentes de v_i para v_j e de v_j para v_i , ambos em $G_{\overrightarrow{C_4}}$ e de comprimento $2d$. Isso implica que $\text{dist}_{G_{\overrightarrow{C_4}}}(v_i, v_j), \text{dist}_{G_{\overrightarrow{C_4}}}(v_j, v_i) \leq 2d = 2 \text{dist}_G(v_i, v_j)$. Para uma (v_i, v_j) -geodésica P_1 de comprimento $2d' = \text{dist}_{G_{\overrightarrow{C_4}}}(v_i, v_j)$, os seus caminhos correspondentes são um (v_j, v_i) -caminho em $G_{\overrightarrow{C_4}}$ de comprimento $2d'$ e um $v_i v_j$ -caminho em G de comprimento d' . Assim, temos que $2 \text{dist}_G(v_i, v_j), \text{dist}_{G_{\overrightarrow{C_4}}}(v_j, v_i) \leq 2d' = \text{dist}_{G_{\overrightarrow{C_4}}}(v_i, v_j)$. Como para uma (v_j, v_i) -geodésica P_2 vale o análogo, a partir das desigualdades concluímos que $2 \text{dist}_G(v_i, v_j) = \text{dist}_{G_{\overrightarrow{C_4}}}(v_i, v_j) = \text{dist}_{G_{\overrightarrow{C_4}}}(v_j, v_i)$ para todo par $v_i, v_j \in V(G)$, com $i \neq j$. Consequentemente, os caminhos correspondentes de uma geodésica (esteja essa em G ou em $G_{\overrightarrow{C_4}}$) também são geodésicas (em seus respectivos grafos).

Para o primeiro resultado sobre essa transformação, o grafo não precisa ser bipartido.

Lema 4.4. *Dado um grafo G , se S é um conjunto de envoltória de G então ele também é um de $G_{\overrightarrow{C_4}}$. Consequentemente, $\overrightarrow{\text{hn}}(G_{\overrightarrow{C_4}}) \leq \text{hn}(G)$.*

Demonstração. Seja S um conjunto de envoltória de G . Como $S \subseteq V(G)$, toda geodésica considerada para obter $I_{G_{\overrightarrow{C_4}}}[S]$ possui uma geodésica correspondente em G , e o mesmo é válido para $I_G[S]$. Assim, temos que $I_G[S] = I_{G_{\overrightarrow{C_4}}}[S] \cap V(G)$. Como há vértices do tipo $v_{i,j}$ em $I_{G_{\overrightarrow{C_4}}}[S]$, podemos afirmar que $I_G^k[S] \subseteq I_{G_{\overrightarrow{C_4}}}^k[S] \cap V(G)$ para todo $k \geq 2$. Sabemos que $[S]_G \subseteq I_{G_{\overrightarrow{C_4}}}^k[S]$ para algum natural k e que todo vértice $v_{i,j}$ está em uma (v_i, v_j) -geodésica. Portanto $I_{G_{\overrightarrow{C_4}}}^{k+1}[S] \supseteq V(G_{\overrightarrow{C_4}})$.

Além disso, seja S um conjunto de envoltória mínimo de G . Como ele também é um conjunto de envoltória de $G_{\overrightarrow{C_4}}$, temos que $\overrightarrow{\text{hn}}(G_{\overrightarrow{C_4}}) \leq |S| = \text{hn}(G)$. \square

A seguir mostramos o inverso do lema acima: a partir de cada conjunto de envoltória de $G_{\overrightarrow{C_4}}$, podemos obter um conjunto de envoltória de G com no máximo a mesma cardinalidade. Porém, agora precisamos que o grafo seja bipartido.

Proposição 4.1. *Seja G um grafo bipartido conexo e S um conjunto de envoltória de $G_{\overrightarrow{C_4}}$. Então, existe um conjunto de envoltória S' de G tal que $|S'| \leq |S|$. Portanto, $\text{hn}(G) \leq \overrightarrow{\text{hn}}(G_{\overrightarrow{C_4}})$.*

Demonstração. Vamos construir outro conjunto de envoltória S' de $G_{\overrightarrow{C_4}}$ tal que $|S'| \leq |S|$ e $S' \subseteq V(G)$. Devido aos caminhos correspondentes, deduzimos que S' também é um conjunto de envoltória de G e que a proposição é válida.

Se $S \subseteq V(G)$, tomamos $S' = S$ e não há nada mais a fazer. Se não, definimos inicialmente $S_0 := S$. Em seguida, para cada $d > 0$, se $S_{d-1} \not\subseteq V(G)$ construímos S_d a partir de S_{d-1} da seguinte forma. Substituímos vértices de $S_{d-1} \setminus V(G)$ por no máximo a mesma quantidade de vértices de $V(G)$, de modo que S_d ainda seja um conjunto de envoltória de $G_{\overrightarrow{C_4}}$.

Seja $v_{i,j} \in S_{d-1} \setminus V(G)$. Suponha que existem $u \in S_{d-1}$ diferente de $v_{i,j}$ e uma $(v_{i,j}, u)$ -geodésica \overrightarrow{P} contendo v_i . Como $N^+(v_{i,j}) = \{v_j\}$, temos que $\overrightarrow{P} =$

$(v_{i,j}, v_j, v_{j,i}, v_i, \dots, u)$, donde notamos que existe uma (v_j, u) -geodésica contida em \vec{P} que possui o vértice v_i . Definindo $S_d = (S_{d-1} \setminus \{v_{i,j}\}) \cup \{v_j\}$ temos $v_i, v_j \in I[S_d]$, o que implica que $v_{i,j} \in I^2[S_d]$. Logo $S_{d-1} \subseteq I^2[S_d]$ e, conseqüentemente, $V(G_{\vec{C}_4}) = [S_{d-1}] \subseteq [S_d]$. Se existir uma $(u, v_{i,j})$ -geodésica contendo v_j , tomamos $S_d = (S_{d-1} \setminus \{v_{i,j}\}) \cup \{v_i\}$.

Caso não exista um tal vértice em S_{d-1} , então para todo $u \in S_{d-1} \setminus \{v_{i,j}\}$ as $(v_{i,j}, u)$ -geodésicas não contêm v_i e as $(u, v_{i,j})$ -geodésicas não contêm v_j . Assim, tome $u \in S_{d-1} \setminus \{v_{i,j}\}$. Sejam P_1 e P_2 respectivamente uma $(v_{i,j}, u)$ -geodésica e uma $(u, v_{i,j})$ -geodésica. Caso $(V(P_1) \cap V(P_2)) \setminus \{v_{i,j}, u\}$ não seja vazio, tome u' nesse conjunto o mais próximo possível de $v_{i,j}$, isto é, tal que $m(v_{i,j}, u') := \min\{\text{dist}(u', v_{i,j}), \text{dist}(v_{i,j}, u')\}$ seja o menor possível. Se houver r, s tais que $u' = v_{r,s}$, segue que v_r, v_s pertencem a ambos $V(P_1)$ e $V(P_2)$. Perceba que o $(v_{i,j}, v_r)$ -caminho contido em P_1 e o $(v_s, v_{i,j})$ -caminho contido em P_2 são de fato geodésicas, donde concluímos que $\text{dist}(v_{i,j}, v_r) = \text{dist}(v_{i,j}, u') - 1$ e $\text{dist}(v_s, v_{i,j}) = \text{dist}(u', v_{i,j}) - 1$. Disso temos que $m(v_{i,j}, v_r)$ ou $m(v_{i,j}, v_s)$ é menor do que $m(v_{i,j}, u')$, contradizendo a escolha de u' . Portanto, devemos ter $u' \in V(G)$.

Observe que a (v_j, u') -geodésica P'_1 contida em P_1 possui um número par de arcos, q_1 da forma $(v_r, v_{r,s})$ e q_1 da forma $(v_{r,s}, v_s)$; logo, seu comprimento é $2q_1$. O análogo vale para a (u', v_i) -geodésica P'_2 contida em P_2 , cujo comprimento é igual a $2q_2$. Agora, tome P o (u', v_j) -caminho inverso a P'_1 . Veja que podemos estender P para obter um (u', v_i) -caminho de comprimento $2q_1 + 2$ contendo v_j , o qual não pode ser uma geodésica devido ao caso no qual estamos trabalhando. Assim $2q_1 + 2 > 2q_2$ e conseqüentemente $q_1 \geq q_2$; analogamente obtemos $q_2 \geq q_1$, donde segue $q_1 = q_2$. Com isso, vemos que os caminhos P'_1, P'_2 juntamente com os arcos $(v_i, v_{i,j}), (v_{i,j}, v_j)$ formam um ciclo direcionado de comprimento $2q_1 + 2q_2 + 2 = 2(2q_1 + 1)$. Em G , esse corresponde a um ciclo de comprimento $2q_1 + 1$, contradizendo o fato de G ser bipartido. Como a existência de um u' sempre resulta em uma contradição, devemos ter $V(P_1) \cap V(P_2) = \{v_{i,j}, u\}$.

Pela análise feita no parágrafo anterior, $u \in V(G)$ contradiria o fato de G ser bipartido. Assuma então, sem perda de generalidade, que $u = v_{k,\ell}$ para algum par k, ℓ . Lembre-se que estamos trabalhando no caso onde não há $(u, v_{i,j})$ -geodésicas nem $(v_{i,j}, u)$ -geodésicas contendo ambos v_k e v_ℓ . A seguir provamos que podemos definir $S_d := (S_{d-1} \setminus \{v_{i,j}, u\}) \cup \{v_i, v_k\}$, de modo que esse ainda cumpre nossas condições.

Analisemos uma (v_i, v_k) -geodésica P_3 que não usa nem v_j nem v_ℓ e tem comprimento $2p$. Seja P''_1 a (v_j, v_k) -geodésica contida em P_1 , a qual também tem comprimento par; perceba que $||A(P_3)| - |A(P''_1)||$ deve ser par. Caso $|A(P_3)| = |A(P''_1)|$, teríamos um ciclo direcionado de comprimento $4p + 2$, o qual possui um ciclo correspondente em G de comprimento ímpar. Se $|A(P_3)| \leq |A(P''_1)| - 2$, considere o caminho $P'_3 = (v_{i,j}, v_j, v_{j,i}, v_i, \dots, v_k, v_{k,\ell})$ contendo P_3 e com comprimento $|A(P'_3)| = |A(P_3)| + 4 \leq |A(P''_1)| + 2 = |A(P_1)|$. Conseqüentemente P'_3 seria uma $(v_{i,j}, v_{k,\ell})$ -geodésica contendo ambos v_i e v_j , contradizendo a hipótese para esse caso. Portanto $|A(P_3)| \geq |A(P''_1)| + 2$. O argumento é análogo para as (v_j, v_ℓ) -geodésicas que não contêm v_i, v_k . Logo, o (v_i, v_k) -

caminho P'_1 com $V(P'_1) = V(P''_1) \cup \{v_i, v_{i,j}\}$ e $A(P'_1) = A(P''_1) \cup \{(v_i, v_{i,j}), (v_{i,j}, v_j)\}$ é uma geodésica. Definindo o (v_k, v_i) -caminho P'_2 analogamente, concluímos que esse também é uma geodésica. Portanto, denotando $S_d := (S_{d-1} \setminus \{v_{i,j}, v_{k,l}\}) \cup \{v_i, v_k\}$ temos que $v_{i,j}, v_{k,l} \in V(P'_1) \cup V(P'_2) \subset I[S_d]$, o que por sua vez implica em $S_{d-1} \subset I[S_d]$ e consequentemente $V(D) \subseteq [S_{d-1}] \subseteq [S_d]$.

Seguindo esses passos indutivamente obtemos um conjunto de envoltória $S' \subset V(G)$ para $G_{\overrightarrow{C_4}}$. Note que pode ter havido $v_{i,j}, v_{k,l} \in S_d$ com $\{i, j\} \cap \{k, l\} \neq \emptyset$ que foram trocados pelo mesmo vértice de $V(G)$. Agora, basta provarmos que S' também é um conjunto de envoltória de G . Mostraremos por indução em k que $I_G^k[S'] = I_{G_{\overrightarrow{C_4}}}^k[S'] \cap V(G)$.

Como $S' \subset V(G)$, para todos os pares de vértices $v_i, v_j \in S'$, toda (v_i, v_j) -geodésica possui sua $v_i v_j$ -geodésica correspondente em G . Assim, para $k = 1$ o resultado é direto. Suponha que esse também é verdade para $k - 1$. Sabendo que $I_G^{k-1}[S'] = I_{G_{\overrightarrow{C_4}}}^{k-1}[S'] \cap V(G)$, pelo mesmo argumento usado acima segue que $I_G^k[S'] = I[I_{G_{\overrightarrow{C_4}}}^{k-1}[S'] \cap V(G)] \cap V(G) \subseteq I_{G_{\overrightarrow{C_4}}}^k[S'] \cap V(G)$. Para concluir a demonstração, provaremos que $I_{G_{\overrightarrow{C_4}}}^k[S'] \cap V(G) \subseteq I_G^k[S']$.

Tomando $u \in \left(I_{G_{\overrightarrow{C_4}}}^k[S'] \cap V(G) \right) \setminus I_G^{k-1}[S']$, sabemos que existem $u_1, u_2 \in I_{G_{\overrightarrow{C_4}}}^{k-1}[S']$ tais que u é interno a alguma (u_1, u_2) -geodésica. Se ambos u_1 e u_2 forem vértices de G , claramente temos $u \in I_G^k[S']$. Suponha que haja distintos $i, j \in [n(G)]$ tais que $u_1 = v_{i,j}$. Como $S' \subset V(G)$, seja $k' \in [k - 1]$ tal que $u_1 \notin I_{G_{\overrightarrow{C_4}}}^{k'-1}[S']$ e $u_1 \in I_{G_{\overrightarrow{C_4}}}^{k'}[S']$. Assim, existem $u_3, u_4 \in I_{G_{\overrightarrow{C_4}}}^{k'-1}[S']$ tais que u_1 faz parte de uma (u_3, u_4) -geodésica. Sabemos que tanto o grau de entrada quanto o de saída de u_1 são um, o que significa que $v_i, v_j \in I_{G_{\overrightarrow{C_4}}}^{k'}[S']$. Defina u'_1 como u_1 se esse pertencer a $V(G)$, e como v_j caso contrário. Defina u'_2 de maneira similar. De qualquer modo temos uma (u'_1, u'_2) -geodésica contida na (u_1, u_2) -geodésica mencionada antes. Com isso, podemos afirmar que $u \in I_G^k[S']$. \square

Corolário 4.4. *Se G for um grafo bipartido, então $\text{hn}(G) = \overrightarrow{\text{hn}}(G_{\overrightarrow{C_4}})$.*

Assim, combinando o resultado de ARAÚJO (2013) com o corolário acima deduzimos que, dado um grafo bipartido orientado D e um inteiro positivo k , decidir se $\overrightarrow{\text{hn}}(D) \leq k$ é um problema NP-completo. Além disso, essa redução também pode ser aplicada para cubos parciais, uma subclasse de grafos bipartidos, definida a seguir.

O *grafo hipercubo de dimensão n* , Q_n , é um grafo com conjunto de vértices $V(Q_n) = \{0, 1\}^n$. Expressamos seus vértices por $v = (v^1, \dots, v^n)$, onde $v^i \in \{0, 1\}$ para cada $i \in [n]$; (v_1, \dots, v_n) é dita uma n -*upla*, com *entradas* v_1, \dots, v_n . O conjunto de arestas desse grafo é $E(Q_n) = \{uv \mid \exists! i \in [n] \text{ tal que } u^i \neq v^i\}$. O grafo G é um *cubo parcial* se existem um inteiro positivo n e uma função injetiva $\phi : V(G) \rightarrow V(Q_n)$ tal que $\text{dist}_G(u, v) = \text{dist}_{Q_n}(\phi(u), \phi(v))$ para todo par $u, v \in V(G)$. Para facilitar, consideramos que G é um subgrafo de um hipercubo Q_n , de modo que as distâncias entre os vértices de G são as mesmas que em Q_n . Na Figura 7, estão exemplificados o hipercubo de dimensão três e um cubo parcial. O lema a seguir associa a distância entre dois vértices de um hipercubo com o número de entradas distintas entre as respectivas n -uplas.

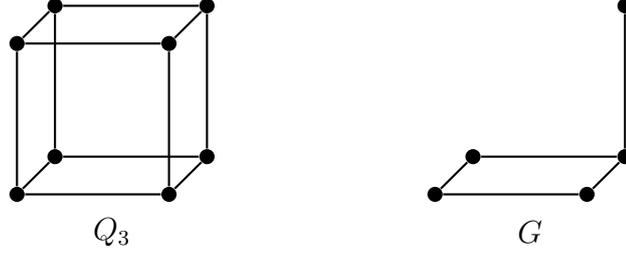


Figura 7: À esquerda, temos uma representação do hipercubo de dimensão três; à direita, um cubo parcial isomorfo a um subgrafo de Q_3 .

Lema 4.5. *Sejam u, v vértices de um cubo parcial Q_n possuindo k entradas distintas. Então $\text{dist}_{Q_n}(u, v) = k$.*

Demonstração. Sejam m_1, \dots, m_k as entradas nas quais u e v diferem. Para cada $i \in [k]$ tome v_i indutivamente tal que esse e v_{i-1} diferem apenas na entrada m_i , com $v_0 = u$. Assim, como cada par v_{i-1}, v_i difere em uma entrada distinta dos outros pares, temos que u e v_k diferem exatamente nas entradas m_1, \dots, m_k , donde segue que $v_k = v$. Ademais, $u = v_0, v_1, \dots, v_k = v$ é um caminho em Q_n , o que implica que $\text{dist}_{Q_n}(u, v) \leq k$. Se valer a desigualdade estrita, existiria um uv -caminho de comprimento menor do que k . Porém, pelo que dissemos anteriormente, isso implicaria que u e v possuem um número menor de entradas diferentes do que k . Desse modo, concluímos que $\text{dist}_{Q_n}(u, v) = k$. \square

ALBENQUE and KNAUER (2016) mostraram que computar o número de envoltória para cubos parciais também é NP-difícil. Assim, precisamos apenas mostrar que o procedimento descrito anteriormente aplicado em um cubo parcial retorna um cubo parcial orientado.

Proposição 4.2. *Se G é um cubo parcial, então $G_{\vec{C}_4}$ é um cubo parcial orientado.*

Demonstração. Seja G um cubo parcial com $V(G) = \{v_1, \dots, v_\ell\}$. Se k é o menor natural tal que $G \subseteq Q_k$, cada vértice de G pode ser considerado como um elemento de $\{0, 1\}^k$. Assim, seja $H \subseteq Q_{2k}$ um grafo inicialmente tal que $V(H) = \{u_1, \dots, u_\ell\} \subseteq \{0, 1\}^{2k}$ e, para cada $u_i = (u_i^1, u_i^2, \dots, u_i^{2k})$ temos que $u_i^{2j-1} = u_i^{2j} = v_i^j$ para todo $j \in [k]$. Note que cada par de vértices u_i, u_j difere em um número par de entradas.

Tome dois vértices distintos $u_i, u_j \in V(H)$ tais que existe apenas um $m \in [k]$ tal que $u_i^{2m-1} = u_i^{2m} \neq u_j^{2m-1} = u_j^{2m}$ (note que v_i, v_j são adjacentes em G). Ou seja, $u_i = (u_i^1, \dots, u_i^{2m-2}, u_i^{2m-1}, u_i^{2m}, u_i^{2m+1}, \dots, u_i^{2k})$ e $u_j = (u_j^1, \dots, u_j^{2m-2}, u_j^{2m-1}, u_j^{2m}, u_j^{2m+1}, \dots, u_j^{2k})$. Para cada par de vértices desse tipo adicione $u_{i,j} = (u_i^1, \dots, u_i^{2m-1}, u_j^{2m}, u_i^{2m+1}, \dots, u_i^{2k})$ e $u_{j,i} = (u_j^1, \dots, u_j^{2m-2}, u_j^{2m-1}, u_i^{2m}, \dots, u_i^{2k})$ a $V(H)$, os quais diferem na $(2m-1)$ -ésima e na $2m$ -ésima entradas. Note também que ambos u_i e u_j diferem em exatamente uma entrada para ambos $u_{i,j}$ e $u_{j,i}$. Além disso, adicione os arcos $u_i u_{i,j}, u_{i,j} u_j, u_j u_{j,i}, u_{j,i} u_i$ a $E(H)$, os quais se orientados como $(u_i, u_{i,j}), (u_{i,j}, u_j), (u_j, u_{j,i}), (u_{j,i}, u_i)$ resultam no grafo orientado $G_{\vec{C}_4}$.

A seguir analisamos cada tipo de par de vértices de H . Se nosso par for do tipo u_p, u_q já sabemos que eles possuem ao menos duas entradas distintas e não são adjacentes. Se for $u_p, u_{q,r}$ com $p \in \{q, r\}$, também sabemos que eles possuem apenas uma entrada diferente e são adjacentes. Agora tome $p, q, r \in [l]$ tais que $u_{p,q} \in V(H)$ e esse não é adjacente a u_r . Defina $m : \{1, \dots, l\}^2 \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$ como $m(i, j) = 0$ se ou $i = j$ ou se u_i, u_j não são adjacentes, e como o único $m \in [k]$ tal que $u_i^{2m} \neq u_j^{2m}$ para todo outro par (i, j) . Como $u_r \neq u_p, u_q$ deve haver $m \in [k] \setminus \{m(p, q)\}$ tal que $u_r^{2m-1} = u_r^{2m} \neq u_p^{2m-1} = u_p^{2m}$. Sabemos que a $(2m - 1)$ -ésima e a $2m$ -ésima entradas de u_p e de $u_{p,q}$ são iguais, logo u_r e $u_{p,q}$ possuem pelo menos duas entradas diferentes.

O último caso é um par $u_{p,q}, u_{r,s}$. Se $\text{dist}_G(v_i, v_j) = 1$ para todo $i \in \{p, q\}$ e todo $j \in \{r, s\}$, como v_p e v_q são adjacentes teríamos triângulos em G , o que é impossível pois esse é bipartido. Logo, existem $i \in \{p, q\}$ e $j \in \{r, s\}$ tais que $\text{dist}_G(v_i, v_j) \geq 2$, o que implica que existem $m_1, \dots, m_t \in [k]$ tais que $v_i^{m_t} \neq v_j^{m_t}$ para todo $m \in \{m_1, \dots, m_t\}$ e $t = \text{dist}_G(v_i, v_j)$ pelo Lema 4.5. Suponha que exista $m \in \{m_1, \dots, m_t\}$ diferente de $m(p, q)$ e de $m(r, s)$, então $u_p^{2m-1} = u_p^{2m} = u_q^{2m-1} = u_q^{2m} \neq u_r^{2m-1} = u_r^{2m} = u_s^{2m-1} = u_s^{2m}$. Consequentemente, $u_{p,q}$ e $u_{r,s}$ possuem pelo menos duas entradas distintas. Do contrário temos $t = 2$, $m_1 = m(p, q)$ e $m_2 = m(r, s)$, sem perda de generalidade. Note que $u_r^{2m_1-1} = u_r^{2m_1} = u_s^{2m_1-1} = u_s^{2m_1}$ e $u_p^{2m_1-1} = u_p^{2m_1} \neq u_q^{2m_1-1} = u_q^{2m_1}$, o que quer dizer que ou as $(2m_1 - 1)$ -ésimas ou as $2m_1$ -ésimas posições de $u_{p,q}$ e de $u_{r,s}$ são diferentes. Analogamente, o mesmo pode ser dito sobre ou as $(2m_2 - 1)$ -ésimas ou as $2m_2$ -ésimas posições desses vértices, donde temos que $u_{p,q}$ e $u_{r,s}$ diferem em pelo menos duas entradas. Portanto, juntando os argumentos desses últimos dois parágrafos com a construção de H , concluímos que dois vértices de H são adjacentes se, e somente se, eles possuem apenas uma entrada distinta.

Assim, resta apenas mostrar que $\text{dist}_H(u, v) = \text{dist}_{Q_{2k}}(u, v)$ para todo par $u, v \in V(H)$. Primeiro considere u_i e u_j . Se v_i e v_j possuem p entradas diferentes, então seus vértices correspondentes em H diferem em $2p$ entradas, donde segue pelo Lema 4.5 que $\text{dist}_{Q_{2k}}(u_i, u_j) = 2p$. Como G é um cubo parcial, pelo mesmo lema citado antes sabemos que $\text{dist}_G(v_i, v_j) = \text{dist}_{Q_k}(v_i, v_j) = p$, logo temos um $v_i v_j$ -caminho de comprimento p em G . Devido à construção de H , também temos nele um $u_i u_j$ -caminho de comprimento $2p$. Suponha que há em H um $u_i u_j$ -caminho de comprimento $q < 2p$. Como os vértices vizinhos em H são aqueles diferindo em exatamente uma entrada, então os vértices nas extremidades desse caminho possuem no máximo q entradas distintas, uma contradição. Logo $\text{dist}_H(u_i, u_j) = 2p$.

A seguir, analisamos a distância entre $u_{i,j}$ e $u_{r,s}$. Sejam $\{u, u'\} = \{u_i, u_j\}$ e $\{v, v'\} = \{v_i, v_j\}$ de modo que u e v estão o mais próximo possível. Por essa definição, segue que $\text{dist}_H(u_{i,j}, u_{r,s}) = 2 + \text{dist}_H(u, v) = 2(p + 1)$, onde $2p$ é o número de entradas distintas de u e v . Como u e v diferem de uma entrada respectivamente para $u_{i,j}$ e $u_{r,s}$, devemos ter $2p + 2$ entradas distintas entre $u_{i,j}$ e $u_{r,s}$. Pelo Lema 4.5, segue que

$\text{dist}_{Q_{2k}}(u_{i,j}, u_{r,s}) = 2p + 2$. Com isso, concluímos que $\text{dist}_H(u_{i,j}, u_{r,s}) = \text{dist}_{Q_{2k}}(u_{i,j}, u_{r,s})$.

O argumento para o caso onde os vértices são u_i e $u_{r,s}$ é análogo ao do parágrafo anterior. \square

Corolário 4.5. *Dado um cubo parcial orientado D e um inteiro positivo k , é NP-completo decidir se $\overrightarrow{\text{hn}}(D) \leq k$.*

4.2.2 Número Geodético

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que o problema a seguir é NP-completo.

NÚMERO GEODÉTICO

Entrada: Grafo orientado D e um inteiro positivo k

Saída: $\overrightarrow{\text{gn}}(D) \leq k$?

Para tanto, fazemos uma redução do seguinte conhecido problema.

COBERTURA DE CONJUNTO

Entrada: $U = \{1, \dots, n\}, \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(U)$ tal que $\bigcup \mathcal{F} = U$ e um inteiro positivo k

Saída: Existe $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ tal que $\bigcup \mathcal{F}' = U$ e $|\mathcal{F}'| \leq k$?

Teorema 4.2. *NÚMERO GEODÉTICO é um problema NP-completo, mesmo se o grafo orientado D da entrada não tiver ciclos direcionados e seu grafo subjacente for bipartido.*

Demonstração. Dado um conjunto $S \subseteq V(D)$, é possível computar (u, v) -geodésicas para todo par $u, v \in V(D)$ e decidir se S é um conjunto geodético em tempo polinomial, similarmente ao caso não-direcionado mostrado por BESSY (2018). Consequentemente, o problema pertence a NP.

Assim, resta mostrar que o problema NÚMERO GEODÉTICO é NP-difícil. Para tanto, como mencionamos antes do teorema, fazemos uma redução do problema COBERTURA DE CONJUNTO. Seja $(U = \{1, \dots, n\}, \mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}, k)$ uma instância desse problema. A seguir, construímos um grafo orientado D associado à instância (U, \mathcal{F}, k) .

O conjunto de vértices de D é composto por dois subconjuntos de vértices X e Y mais três vértices u, v e w . Em X existe um vértice x_i correspondendo a $F_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \in [m]$. Em Y existe um vértice y_j correspondendo a $j \in U$ para todo $j \in [n]$.

Para o conjunto de arcos, temos que $(x_i, y_j) \in A(D)$ quando $j \in F_i$, para todo $i \in [m]$ e todo $j \in [n]$. Ademais $(u, x_i), (x_i, w) \in A(D)$ para todo $i \in [m]$, $(y_j, v) \in A(D)$ para todo $j \in [n]$ e finalmente $(u, v) \in A(D)$.

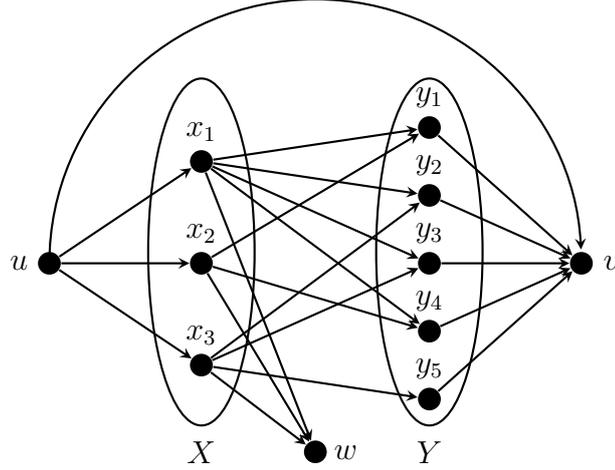


Figura 8: Exemplo do grafo orientado construído na prova do Teorema 4.2, para $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\mathcal{F} = \{F_1 = \{1, 2, 3, 4\}, F_2 = \{1, 4\}, F_3 = \{2, 3, 5\}\}$.

Pela construção e com auxílio da Figura 8, D é claramente um grafo direcionado acíclico cujo grafo subjacente é bipartido, com partição $V(D) = (X \cup \{v\}) \cup (Y \cup \{u, w\})$. Note que u é fonte e v, w são sumidouros, logo eles estão em todo conjunto geodético. Além disso, $(u, w) \notin A(D)$ e (u, x_i, w) é um caminho em D para todo $x_i \in X$. E como $(u, v) \in A(D)$, nós temos $I[\{u, v, w\}] = X \cup \{u, v, w\}$. Ou seja, ao buscar um conjunto geodético S de D , nós precisamos nos preocupar apenas em obter os vértices de Y em $I[S]$.

Provamos agora que (U, \mathcal{F}, k) é uma instância positiva do problema COBERTURA DE CONJUNTO se, e somente se, $\vec{\text{gn}}(D) \leq k+3$. Seja $\mathcal{F}' = \{F_i \mid i \in \mathcal{I}\} \subseteq \mathcal{F}$ para algum $\mathcal{I} \subseteq [m]$ tal que $\bigcup \mathcal{F}' = U$ e $|\mathcal{I}| \leq k$. Com isso, tomamos $X' = \{x_i \mid i \in \mathcal{I}\} \cup \{u, v, w\}$, o qual possui cardinalidade no máximo $k+3$. Assim, para todo $y_j \in Y$ existe $x_i \in X'$ tal que $(x_i, y_j) \in A(D)$, donde obtemos a geodésica (x_i, y_j, v) . Portanto $y_j \in I[X']$ e consequentemente X' é um conjunto geodético de D .

Por outro lado, seja S um conjunto geodético de D com no máximo $k+3$ vértices. Como $u, v, w \in S$, no máximo k vértices de S pertencem a $X \cup Y$. Se houver $y_j \in S$, considere um $x_i \in X$ tal que $(x_i, y_j) \in A(D)$, o qual pode estar em S . Como $N_D^+(y_j) = \{v\}$, observe que substituindo y_j por x_i em S (ou simplesmente eliminando, caso $x_i \in S$) obtemos outro conjunto geodético S' de cardinalidade inferior ou igual à de S . Logo, sem perda de generalidade, assumimos que $(S \setminus \{u, v, w\}) \subseteq X$. Pelo que já argumentamos, concluímos que cada vértice de Y possui um vizinho de entrada em $S \setminus \{u, v, w\}$. Seja $\mathcal{I} = \{i \in [m] \mid x_i \in S\}$. Podemos observar que a família $\mathcal{F}' = \{F_i \in \mathcal{F} \mid i \in \mathcal{I}\}$ satisfaz $\bigcup \mathcal{F}' = U$ e $|\mathcal{F}'| \leq k$. \square

Veja que a redução acima também é parametrizada. Sabendo que o problema COBERTURA DE CONJUNTOS é $W[2]$ -difícil quando o parâmetro é o valor da solução, concluímos que decidir se $\vec{\text{gn}}(D) \leq k$ também é $W[2]$ -difícil com parâmetro k . Para detalhes

sobre Complexidade Parametrizada, sugerimos o livro escrito por CYGAN (2015).

4.3 Algoritmos de tempo polinomial para cactos

Para finalizar esta seção, mostramos como obter um conjunto de envoltória e um geodético mínimos em grafos cacto orientados, classe que definimos logo adiante.

Antes de partirmos para essa classe, analisamos uma subclasse bastante conhecida (e até já mencionada) de cactos orientados: as árvores orientadas. Já comentamos sobre o número geodético nessa classe com o Teorema 3.5. Porém, os autores focam na existência de uma orientação com um dado número geodético, ao invés de como obter o valor desse parâmetro para uma árvore com uma dada orientação. Nosso objetivo é justamente esse.

Para o caso não direcionado, HARARY (1993) citaram em seu artigo que o número geodético de uma árvore é igual ao número de folhas da mesma. A necessidade de termos esses vértices se deve ao fato de eles serem simpliciais, enquanto que a suficiência está no seguinte. Dado um vértice v de grau pelo menos dois é possível obter dois caminhos internamente disjuntos entre v e duas folhas distintas, donde temos assim um caminho P entre duas folhas tal que $v \in V(P)$. Como esse caminho é único (pois o grafo considerado é uma árvore), v pertence a uma geodésica entre dois vértices simpliciais. Também podemos concluir disso que o conjunto de vértices simpliciais de uma árvore é um conjunto de envoltória mínimo. O argumento para árvores orientadas é similar.

Teorema 4.3. *Seja T uma árvore orientada. Então, $\text{Ext}(T)$ é tanto um conjunto de envoltória mínimo quanto um geodético mínimo de T . Consequentemente, $\overrightarrow{\text{hn}}(T) = \overrightarrow{\text{gn}}(T) = |\text{Ext}(T)|$.*

Demonstração. Sejam $u \in V(T)$ um vértice não extremal e $P = (v_1, \dots, u, \dots, v_2)$ um caminho maximal em T que contém u . Devido à maximalidade desse, devemos ter ou $d^-(v_1) = 0$ ou $N^-(v_1) \subseteq V(P)$. Como a segunda alternativa implicaria na existência de um ciclo em T , o que é impossível pois T é uma árvore, segue que $d^-(v_1) = 0$. Analogamente concluímos que $d^+(v_2) = 0$. Ou seja, v_1 e v_2 são extremais. Ademais, como existe apenas um v_1v_2 -caminho no grafo subjacente de T , P é uma geodésica por unicidade e consequentemente $u \in I[\{v_1, v_2\}]$. Portanto, $I[\text{Ext}(T)] = V(T)$. \square

Assim, ambos os números de envoltória e geodético de árvores orientadas, uma subclasse também de grafos bipartidos orientados, podem ser computados em tempo polinomial. Esse resultado nos levou a trabalhar em cactos, uma superclasse de grafos árvore. Um grafo é um *cacto* se cada um de seus blocos for ou uma aresta ou um ciclo. Consequentemente, todo ciclo é um ciclo induzido e dois ciclos se intersectam em no máximo um vértice. Nesse caso, ao contrário das árvores, os vértices extremais podem não ser suficientes. Seria necessário tomar, além desses, certos vértices não extremais.

Para cactos (não direcionados), ARAÚJO (2013) e EKIM (2012) propuseram algoritmos para computar os números de envoltória e geodético em tempo polinomial, respectivamente. No caso do geodético, o resultado dos autores é sobre uma super classe de cacto, chamada de *bloco-cacto*, na qual cada bloco ou é um grafo completo ou é um ciclo.

Quanto ao número de envoltória, é interessante apresentarmos mais detalhes sobre o resultado, já que as demonstrações dos nossos próprios seguem uma ideia similar. No artigo, os autores mostram um resultado válido para qualquer grafo G , o qual aplicado a cactos induz o algoritmo mencionado. Sejam $S \subseteq V(G)$ o conjunto das articulações de G e G_1, \dots, G_k os blocos de G . Também tomamos, para todo $i \in [k]$, $S_i \subseteq V(G_i)$ um conjunto de envoltória mínimo de G_i que contém todas as articulações de G presentes em G_i . O resultado basicamente afirma que $\left(\bigcup_{i=1}^k S_i\right) \setminus S$ é um conjunto de envoltória mínimo de G . Se G for um cacto, basta analisar os seus ciclos, já que cada um dos outros blocos possui apenas uma aresta cujas extremidades são ambas articulações.

4.3.1 Número de Envoltória

Como mencionamos anteriormente, há casos em que é necessário tomar alguns vértices não extremais para se obter um conjunto de envoltória de um cacto orientado. Assim como em um cacto não direcionado, alguns desses vértices estão em ciclos. Porém, ao contrário do que ARAÚJO (2013) fazem no artigo, nós especificamos quais são esses ciclos.

Pelo restante desta seção, denotamos por D e C , respectivamente, um cacto orientado e um ciclo de D . Sendo $H \subseteq D$ arbitrário, dizemos que v é um vértice extremal em H quando v é um vértice extremal de $D[V(H)]$. Perceba que v pode ser extremal em H e não ser extremal em D . Seguindo essa lógica, denotamos por $\text{Ext}(H)$ o conjunto de vértices extremais em H .

Seja $u \in V(C)$ uma articulação de D . Se houver um arco $(u, v) \in A(D) \setminus A(C)$, dizemos que u é uma articulação *transmissora* de C . Analogamente, existindo $(v, u) \in A(D) \setminus A(C)$, dizemos que u é uma articulação *receptora*. Perceba que podemos ter uma articulação que é tanto receptora quanto transmissora.

A seguir definimos alguns tipos de ciclos que serão de suma importância para nosso estudo. Um ciclo $C \subseteq D$ é chamado de *ciclo folha* se possui apenas uma articulação. Já um *ciclo armadilha* é aquele que possui ou apenas articulações receptoras ou apenas articulações transmissoras. No primeiro caso dizemos que esse é um *ciclo armadilha receptor* e no segundo, um *ciclo armadilha transmissor*. Por fim, dizemos que C é *insatisfatório* se ele for de um dos três seguintes tipos:

Tipo 1: C é um ciclo armadilha;

Tipo 2: C é um ciclo direcionado que é folha e não é armadilha;

Tipo 3: há exatamente dois vértices em $\text{Ext}(C)$, digamos u e v , tais que os dois (u, v) -caminhos em C possuem comprimentos diferentes e o mais longo não possui vértices internos que são articulações de D .

Caso C não satisfaça nenhum desses, dizemos que ele é *satisfatório*.

Devido ao que foi dito no início desta subseção, o leitor já deve imaginar a importância desses ciclos. Pelo Lema 2.2 sabemos que todo conjunto de envoltória de D intersecta qualquer conjunto co-convexo do mesmo. A seguir mostramos que cada ciclo insatisfatório contém um conjunto co-convexo e descrevemos como são esses conjuntos para cada tipo de ciclo.

Lema 4.6. *Sejam D um cacto orientado e $C \subseteq D$ um ciclo insatisfatório. Então, $V(C)$ contém um conjunto co-convexo S e:*

- (a) *se C for do tipo 1, então $S = V(C)$;*
- (b) *se C for do tipo 2, então $S = V(C) \setminus \{w\}$ onde w é a articulação de C em D ;*
- (c) *se C for do tipo 3 com $\text{Ext}(C) = \{u, v\}$, então S é o interior do (u, v) -caminho mais longo.*

Além disso, esses conjuntos co-convexos são disjuntos dois-a-dois.

Demonstração. Primeiro, seja C um ciclo armadilha receptor. Suponha que haja $u_1, u_2 \in N_D(V(C))$ distintos e uma (u_1, u_2) -geodésica P cujos vértices internos estão em $V(C)$. Assim, temos $v \in V(C)$ tal que $(u_1, v) \in A(D)$, contradizendo a escolha de C . Se C for um ciclo armadilha transmissor, o argumento é análogo.

Agora, sejam C um ciclo insatisfatório do tipo 2 e $w \in V(C)$ sua única articulação em D . Ou seja, se houvesse um caminho como o sugerido no parágrafo anterior, esse utilizaria os arcos $(u_1, w), (w, u_2)$. Portanto, o único vértice de $V(C)$ que pode ser interno a tal caminho é o próprio w .

Considere agora C um ciclo insatisfatório do tipo 3, com articulações u, v como na definição. Para que um caminho como o descrito no primeiro parágrafo intersecte o (u, v) -caminho mais longo, ele deve utilizar as articulações u e v . Porém, esse não seria uma geodésica pois há um (u, v) -caminho mais curto (o qual de fato faz parte de uma tal geodésica).

Por fim, resta provar que quaisquer dois desses conjuntos co-convexos não se intersectam. Se houvesse interseção, os vértices dessa seriam articulações em ambos os ciclos. Dois ciclos armadilha não se intersectam, do contrário qualquer vértice em comum seria uma articulação tanto receptora quanto transmissora para ambos. Considerando dois ciclos insatisfatórios C_1 e C_2 , de modo C_1 não seja armadilha, veja que o conjunto co-convexo S contido em C_1 não possui articulações. Portanto, S não intersecta nenhum outro ciclo. \square

Corolário 4.6. *Se D é um cacto orientado e $S \subseteq V(D)$ é um conjunto de envoltória desse, então S possui um vértice de cada ciclo insatisfatório.*

Com isso, sabemos que, em um conjunto de envoltória de um cacto orientado, é preciso tomar os vértices extremais e um de cada ciclo insatisfatório. Na sequência, mostramos que isso basta para formar um conjunto de envoltória.

Lembre que, no caso não direcionado, as articulações de um cacto G não são consideradas no conjunto de envoltória final. Isso acontece porque, dada uma geodésica P entre dois vértices de blocos distintos, esse caminho é obtido pela composição de geodésicas cujas extremidades são ou uma articulação de G ou uma das extremidades de P . Além disso, cada uma dessas geodésicas menores está contida em um bloco. Porém, se adicionarmos uma orientação a esse cacto, a análise desses caminhos deve ser mais minuciosa. Esse é justamente o propósito dos próximos dois resultados.

Lema 4.7. *Sejam D um cacto orientado e $u \in V(D)$. Para todo $v \in N^+(u)$ existe um caminho maximal $P = (v_0, v_1, \dots, v_q)$ com $u = v_0$ e $v = v_1$ tal que ou v_q é extremal ou existe $k \geq 0$ tal que os vértices v_k, v_{k+1}, \dots, v_q compõem um ciclo insatisfatório C de tipo 1 ou 2. O análogo também vale para todo $v \in N^-(u)$.*

Demonstração. Considere todos os caminhos maximais (começando em u) da forma $P = (v_0 = u, v_1 = v, v_2, \dots, v_q)$. Temos duas opções: ou $d^+(v_q) = 0$ ou $N^+(v_q) \subseteq V(P)$. Se a primeira ocorrer, então v_q é extremal. Do contrário temos $N^+(v_q) \subseteq V(P)$, e como $d^+(v_q) \geq 2$ implicaria na existência de dois ciclos com mais do que um vértice em comum, também temos $d^+(v_q) = 1$. Além disso, isso nos dá um ciclo direcionado C cujos vértices estão contidos em P . Caso C seja um ciclo insatisfatório ou do tipo 1 ou do tipo 2, estamos satisfeitos. Observe também que, como C é direcionado, esse não pode ser insatisfatório do tipo 3.

Assuma então que todo caminho maximal como descrito acima termina em um ciclo satisfatório C . Tome P o caminho maximal que intersecta o maior número de ciclos em D e sejam C_1, \dots, C_n esses ciclos de modo que C_i é o i -ésimo ciclo que P intersecta (com respeito à sua orientação) para todo $i \in [n]$. Suponha que existem $i \neq j \in [n]$ tais que $C_i = C_j$. Como P não repete vértices, existe um caminho (v_r, \dots, v_s) contido em P tal que $v_r \neq v_s \in V(C_i)$ e nenhum dos vértices internos está em C_i . Assim, $G[V(P) \cup V(C_i)]$ seria 2-conexo e, portanto, teríamos um bloco que não é um vértice e nem um ciclo. Logo, esses ciclos são dois-a-dois distintos.

Como C_n é um ciclo satisfatório direcionado, existe um arco $(w_1, w_2) \in A(D)$ com $w_1 \in V(C_n) \setminus \{v_q\}$ e $w_2 \notin V(C_n)$. Portanto, podemos tomar outro caminho maximal $P^* = (u, v, v_2, \dots, w_1, w_2, \dots, v_{q'})$ terminando em um ciclo satisfatório tal que $P \cap P^* = (u, v, v_2, \dots, w_1)$. Veja que P^* intersecta pelo menos um ciclo a mais do que P , contradizendo assim a escolha desse último. Com isso, obtemos o resultado desejado.

Para caminhos maximais da forma $(v_0, v_1, \dots, v_{q-1} = v, v_q = u)$, o argumento é análogo. \square

Com isso, seja S um conjunto de vértices de um cacto orientado D composto

pelos vértices extremais de D e por um vértice de cada ciclo insatisfatório. Para qualquer vértice $v \in V(D)$ não extremal, sabemos que é possível obter um caminho, que utiliza v , entre dois vértices de S . Porém, isso não garante a existência de uma geodésica desse tipo. Por outro lado, há vértices tais que a ausência de uma geodésica assim implicaria em um bloco proibido para um cacto. A seguir, apresentamos algumas restrições para esses caminhos.

Lema 4.8. *Sejam D um cacto orientado, $C \subseteq D$ um ciclo, $u, v \in V(D)$ distintos e P um (u, v) -caminho.*

1. *Se houver $w \in V(P)$ que não pertence a ciclo algum de D então todo (u, v) -caminho possui w .*
2. *Seja $(w_1, \dots, w_q) = P' \subseteq P \cap C$ máximo com $q \geq 2$. Então:*
 - (a) *todo (u, v) -caminho intersecta C ; e*
 - (b) *w_1, w_q são os mesmos para todo (u, v) -caminho.*

Demonstração. No primeiro caso, por contradição suponha que existe um (u, v) -caminho P^* que não contém w . Sejam $u = v_1, v_2, \dots, v_r = v$ os vértices em ambos P e P^* , ordenados de acordo com a orientação desses caminhos. Tome $i \in [r - 1]$ tal que w pertence ao (v_i, v_{i+1}) -caminho contido em P . Os dois (v_i, v_{i+1}) -caminhos (um contido em P e o outro, em P^*) são internamente disjuntos, logo combinados formam um ciclo. Isso contradiz a escolha de w .

Para o segundo item, novamente por contradição, assuma que existe outro (u, v) -caminho $P^* \subseteq D$ que não intersecta C . Utilizando argumentos análogos aos do parágrafo anterior, obtemos um bloco contendo C que não é um ciclo. Assim, o item 2.a está provado.

Caso $u \in V(C)$, veja que $u = w_1$; portanto, w_1 será o mesmo para todo (u, v) -caminho. Caso contrário, suponha que existe um (u, v) -caminho $P^* \subseteq D$ diferente de P intersectando C com $P'' := P^* \cap C$, cujo primeiro vértice desse é $w'_1 \neq w_1$. Como $u \in V(P) \cap V(P^*)$, seja u' o último vértice nessa interseção (com respeito à orientação de P) antes de C . Assim C , o (u', w_1) -caminho contido em P e o (u', w'_1) -caminho contido em P^* estão no mesmo bloco, o que mais uma vez contradiz o fato de D ser um cacto. O argumento para w_q é análogo. \square

O corolário a seguir é uma combinação os Lemas 4.7 e 4.8, o qual é amplamente utilizado nas próximas demonstrações.

Corolário 4.7. *Sejam D um cacto orientado e S um conjunto composto pelos vértices extremais de D e por um de cada ciclo insatisfatório. Considere também $C \subseteq D$ um ciclo e $u, v \in V(C)$ tais que há um (u, v) -caminho contido em C e cada um deles ou está em S ou é uma articulação, receptora no caso de u e transmissora no caso de v , ou ambos. Então, existem $w_1, w_2 \in S$ de modo que todo (w_1, w_2) -caminho contém um (u, v) -caminho. Ademais, caso $u \in S$ temos que $w_1 = u$; o análogo vale para v e w_2 .*

Demonstração. Seja P um (u, v) -caminho contido em C . No caso onde $u \in S$, defina $w_1 := u$. Assuma agora que u seja uma articulação e que não esteja em S . Pelo Lema 4.7, existe um caminho $P' = (v_0, \dots, v_{q-2}, u', u)$. Se v_0 for extremal, ele pertence a S ; ademais, defina $w_1 := v_0$. Senão, existe $k > 0$ tal que os vértices v_0, v_1, \dots, v_k compõem um ciclo insatisfatório C' de tipo ou 1 ou 2; nesse caso, tome $w_1 \in S \cap V(C')$ (o qual existe pelo Corolário 4.6). Perceba que, independente do caso, há um (w_1, u) -caminho contido em P' . De maneira análoga, defina w_2 com respeito a v . Assim, podemos obter um (w_1, w_2) -caminho que contém P . Pelo Lema 4.8, concluímos que todo (w_1, w_2) -caminho contém um (u, v) -caminho. \square

A seguir, mostramos que existe um conjunto de envoltória mínimo composto pelos vértices extremais e por um de cada ciclo insatisfatório. Não só isso, como também é possível obter todo o conjunto de vértices do cacto orientado a partir desse conjunto em poucas iterações da função de intervalo. Antes de procedermos, vamos apresentar alguns detalhes sobre como os vértices extremais podem ocorrer em ciclos orientados.

Lema 4.9. *Seja C um ciclo orientado.*

1. *Se $|V(C)| = 3$, então ou $\text{Ext}(C) = V(C)$ e há exatamente um vértice extremal de cada tipo no ciclo ou esse é um ciclo direcionado sem vértices extremais;*
2. *Se $|V(C)| \geq 4$, então esse não possui vértices transitivos e o número de fontes é igual ao de sumidouros.*

Demonstração. Primeiro seja C um ciclo com três vértices u, v, w . Se u for transitivo então $(v, u), (u, w), (v, w) \in A(C)$, sem perda de generalidade, donde temos que v é uma fonte e w , um sumidouro. Se u for uma fonte então $(u, v), (u, w) \in A(C)$; conseqüentemente, um dos outros dois vértices é um sumidouro enquanto o outro é transitivo, qualquer que seja a orientação da aresta vw . Para o caso em que u é sumidouro, o argumento é análogo. Por último assumimos que u não é extremal, donde temos $(w, u), (u, v), (v, w) \in A(C)$ sem perda de generalidade; perceba que, neste caso, C é um ciclo direcionado sem vértices extremais.

A seguir desenvolveremos o caso onde $|V(C)| \geq 4$. Se houver um vértice transitivo v no ciclo, então também existem $u, w \in V(C)$ tais que $(u, v), (v, w), (u, w) \in A(C)$. Porém esses vértices e arcos já compõem um ciclo, contradizendo nossa suposição inicial, portanto C não possui vértices transitivos.

Perceba que o número de arcos em C é igual à soma dos graus de entrada dos vértices, e também à soma do grau de saída dos vértices. Para um vértice não extremal de C , ambos os seus graus de entrada e de saída são um; para uma fonte, o grau de saída é dois e o de entrada é zero; e para um sumidouro, o grau de entrada é dois e o de saída é zero. Assim, concluímos que a quantidade de fontes em C é igual à de sumidouros. \square

Teorema 4.4. *Seja D um cacto orientado. Todo conjunto de envoltória mínimo de D é composto pelos vértices de $\text{Ext}(D)$ e por exatamente um, que não é extremal e nem*

articulação, de cada ciclo insatisfatório. Além disso, existe um tal conjunto de envoltório S tal que $I[S]$ contém todos os vértices que não estão em ciclos satisfatórios e $I^2[S] = V(D)$.

Demonstração. Devido ao Lema 2.3 e ao Corolário 4.6, sabemos que um conjunto de envoltória de um cacto orientado D precisa pelo menos dos vértices mencionados no enunciado. Para comprovar a validade do resultado, basta mostrar que existe um conjunto de envoltória mínimo S que respeita as condições do enunciado. Inicialmente, assumamos que S é composto pelos vértices extremais e por um (ainda não determinado) de cada ciclo insatisfatório. A seguir, analisamos isoladamente cada ciclo insatisfatório (determinando iterativamente os vértices de S), cada vértice não pertencente a ciclo algum de D e, por fim, cada ciclo satisfatório. No restante da prova, C será um ciclo de D .

Seja C um ciclo armadilha receptor (o argumento para ciclos armadilhas transmissores é análogo). Tome $u, u' \in V(C)$ tais que $(u, u') \in A(C)$ e u' é uma articulação. Veja que o (u', u) -caminho P contido em C utiliza todos os vértices do ciclo. Ademais, considere que $u \in S$. Pelo Corolário 4.7, existem $w_1, w_2 \in S$ (onde $w_1 = u$) tais que todo (w_1, w_2) -caminho contém um (u', u) -caminho. Como P é o único (u', u) -caminho, então todo (w_1, w_2) -caminho contém P , em particular as geodésicas. Visto que $V(P) = V(C)$, concluímos que $V(C) \subseteq I[S]$.

Agora sejam C um ciclo insatisfatório do tipo 2 e $u \in V(C)$ sua articulação, a qual é tanto receptora quanto transmissora. Com isso, tome $v \in V(D) \setminus V(C)$ tal que $(v, u) \in A(D)$ como o vértice de C em S . Pelo Corolário 4.7, existe $w_1 \in S$ de modo que todo (w_1, v) -caminho contém o único (u, v) -caminho, o qual utiliza todos os vértices do ciclo C . Logo, $V(C) \subseteq I[S]$.

A seguir analisamos o caso onde C é um ciclo insatisfatório do tipo 3 tal que u_1 e u_2 são respectivamente fonte e sumidouro em C . Tome v o vizinho de saída de u_1 , interno ao (u_1, u_2) -caminho mais longo em C , como o vértice em $V(C) \cap S$. Veja que se u_1 for extremal também em D então $u_1 \in S$; caso contrário, existe $(u'_1, u_1) \in A(D) \setminus A(C)$, donde segue que u_1 é articulação receptora. O análogo também pode ser dito sobre u_2 . O Corolário 4.7 garante a existência de $w_1, w_2 \in S$ de modo que cada (w_1, w_2) -caminho contém algum dos (u_1, u_2) -caminhos. Assim, as (w_1, w_2) -geodésicas contêm a (u_1, u_2) -geodésica. Ademais, também pelo Corolário 4.7, existe $w'_2 \in S$ tal que todos os (v, w'_2) -caminhos, em particular as geodésicas, contêm o (v, u_2) -caminho em C . Como a (u_1, u_2) -geodésica e o (v, u_2) -caminho juntos utilizam todos os vértices de C , temos que $V(C) \in I[S]$. Com isso, terminamos de definir todos os vértices de S .

Considere agora $v \in V(D)$ um vértice não extremal que não pertence a nenhum dos ciclos de D . Assim, tanto seu grau de entrada quanto o de saída são positivos. Pelos Lemas 4.7 e 4.8, existe uma (u, w) -geodésica contendo v tal que $u, w \in S$, donde segue $v \in I[S]$. Mostramos então que todos os vértices de D que não estão em ciclos satisfatórios estão contidos em $I[S]$.

Resta então analisar os ciclos satisfatórios de D . Primeiro, seja C um ciclo satisfatório com pelo menos quatro vértices. Pelo Lema 4.9, sabemos que esse ciclo possui um número par de vértices extremais, onde uma metade é fonte e a outra metade é sumidouro. Essa análise será dividida em três casos.

Caso 1: $\text{Ext}(C) \geq 4$. Dado $v \in V(C)$ arbitrário, perceba que um caminho maximal em C que utiliza esse vértice possui uma fonte e um sumidouro de C como extremidades, a saber u_1 e u_2 respectivamente. Ademais, como há outros vértices extremais no resto do ciclo, esse (u_1, u_2) -caminho é único e, portanto, uma geodésica. Se u_1 não for extremal transmissor também em D , então ele deve ser uma articulação receptora; note que podemos afirmar o análogo para u_2 . Pelo Corolário 4.7, existem $w_1, w_2 \in S$ tais que todo (w_1, w_2) -caminho contém o (u_1, u_2) -caminho. Assim, concluímos que $v \in I[S]$; como isso vale para todo vértice de C , temos $V(C) \subseteq I[S]$.

Caso 2: $\text{Ext}(C) = 2$. Sejam u_1 e u_2 respectivamente a fonte e o sumidouro de C . Pelos argumentos utilizados no caso anterior, o Corolário 4.7 garante a existência de $w_1, w_2 \in S$ de modo que cada (w_1, w_2) -caminho contém um (u_1, u_2) -caminho. Se ambos os caminhos de u_1 para u_2 em C forem geodésicas, temos que $V(C) \subseteq I[S]$. Caso contrário, até então podemos concluir que apenas os vértices da geodésica estão em $I[S]$. Como C é satisfatório, existe uma articulação v interna a C , o (u_1, u_2) -caminho mais longo; sem perda de generalidade, suponha que v seja receptora. Novamente pelo Corolário 4.7, sabemos que existem $w'_1, w'_2 \in S$ tais que todo (w'_1, w'_2) -caminho contém o (v, u_2) -caminho; ou seja, os vértices desse estão em $I[S]$. Se $(u_1, v) \in A(D)$, temos que $V(C) \subseteq I[S]$; senão, com $u_1, v \in I[S]$, concluímos que os vértices do (u_1, v) -caminho estão em $I^2[S]$, donde segue $V(C) \subseteq I^2[S]$.

Caso 3: $\text{Ext}(C) = 0$. Veja que C é um ciclo direcionado, o qual não é armadilha nem folha. Ou seja, existem articulações distintas, v_1 receptora e v_2 transmissora, em C . Pelo Corolário 4.7 existem $w_1, w_2 \in S$ tais que todo (w_1, w_2) -caminho contém o (v_1, v_2) -caminho P , implicando em $V(P) \subseteq I[S]$. Portanto, como $v_1, v_2 \in I[S]$ todos os vértices no (v_2, v_1) -caminho estão em $I^2[S]$, donde concluímos que $V(C) \subseteq I^2[S]$.

Por fim, considere o caso onde C possui apenas três vértices u, v, w . Se C for direcionado, a análise é basicamente a mesma que a do Caso 3 acima. Logo, novamente pelo Lema 4.9, podemos afirmar sem perda de generalidade que u é receptor (em C), v é transitivo (em C) e w é transmissor (em C). Utilizando argumentos repetitivos e o Corolário 4.7, podemos concluir que $u, w \in I[S]$. Se v for transitivo também em D , então $v \in S$; senão, é porque ele é uma articulação de C . Assim, pelos mesmos argumentos repetitivos concluímos que $v \in I[S]$. Consequentemente: $u, v, w \in I[S]$. \square

A prova acima argumenta como escolher os vértices dos ciclos insatisfatórios. Todos esses vértices podem ser encontrados em tempo linear. Assim, também é possível obter $\overrightarrow{\text{hn}}(D)$ para todo cacto orientado D em tempo linear.

Além disso, há um detalhe nessa prova muito útil para a próxima seção. Todo

ciclo satisfatório C possuindo vértices que não estão em $I[S]$ tem ordem pelo menos quatro e no máximo dois vértices extremais.

4.3.2 Número Geodético

Pelo Teorema 4.4, a partir de um conjunto de envoltória mínimo S , sabemos que é possível obter o conjunto de vértices do cacto orientado em no máximo duas iterações da função de intervalo. Isso nos motivou a buscar um conjunto geodético mínimo, pois esse parece não distar muito de um de envoltória mínimo. Como os vértices de S são do tipo que todo conjunto de envoltória (em particular os geodéticos) necessitam, nosso objetivo é adicionar vértices a S de modo a obter um conjunto geodético mínimo. Pelo Teorema 4.4 e pelo comentário ressaltado no final da seção anterior, os vértices que não estão em $I[S]$ pertencem a ciclos satisfatórios com ordem pelo menos quatro e no máximo dois vértices extremais neles. Assim, nós estudamos esses ciclos para saber quais desses possuem vértices exclusivamente em $I^2[S]$. Como resultado, definimos a seguir os *ciclos falsamente satisfatórios*. Esses podem ser de dois tipos:

Tipo 1: $\text{Ext}(C) = \{u_1, u_2\}$, u_1 é a fonte e u_2 é o sumidouro. Os (u_1, u_2) -caminhos possuem comprimentos distintos, sendo P o mais longo. P possui comprimento pelo menos três e um de seus vértices internos é uma articulação em D . Além disso:

- (a) Se houver uma articulação receptora v_1 interna a P , o (u_1, v_1) -caminho tem comprimento ao menos dois;
- (b) Se houver uma articulação transmissora v_2 interna a P , o (v_2, u_2) -caminho tem comprimento ao menos dois;
- (c) Se houver distintas articulações, v_1 receptora e v_2 transmissora, internas a P , temos $P = (u_1, \dots, v_2, \dots, v_1, \dots, u_2)$. Ademais, o (v_2, v_1) -caminho também possui comprimento pelo menos dois.

Tipo 2: O ciclo C é direcionado e possui duas articulações distintas, v'_1 receptora e v'_2 transmissora, tais que:

- (a) $\text{dist}_C(v'_2, v'_1) \geq 2$; e
- (b) todas as outras articulações são internas a $P = (w_0, w_1, \dots, w_{k-1}, w_k)$, onde $w_0 = v'_1$ e $w_k = v'_2$. Além disso, se w_i for uma articulação receptora e w_j , uma transmissora, então $i \leq j$ para todo $i, j \in \{0, 1, \dots, k\}$.

Se C for um ciclo satisfatório que não se encaixa em nenhuma dessas definições, dizemos que ele é *verdadeiramente satisfatório*.

Lema 4.10. *Sejam D um cacto orientado e $C \subseteq D$ um ciclo satisfatório.*

- (1) *Se C for verdadeiramente satisfatório e S for um conjunto de envoltória mínimo de D então $V(C) \subseteq I[S]$;*
- (2) *Se C for falsamente satisfatório então $I[S'] \not\subseteq V(C)$, onde $S' = N(V(C)) \cup (\text{Ext}(D) \cap V(C))$. Ademais, sejam $u_1, u_2, v_1, v_2, v'_1, v'_2$ como na definição acima. Os vértices que*

não estão em $I[S']$ são os seguintes:

- (a) Se C for do tipo 1, os vértices internos ao (w_1, w_2) -caminho com $w_1 \in \{u_1, v_2\}$ e $w_2 \in \{u_2, v_1\}$ de modo que $\text{dist}(w_1, w_2)$ é a menor possível;
- (b) se C for do tipo 2, os vértices internos ao (v'_2, v'_1) -caminho.

Além disso, nenhum desses vértices é uma articulação.

Demonstração. Primeiro analisamos os ciclos verdadeiramente satisfatórios, dividindo nos mesmos casos do Lema 4.9. Seja C um ciclo com pelo menos quatro vértices extremais em C . Dado $v \in V(C)$, perceba que um caminho maximal em C que utiliza esse vértice possui uma fonte e um sumidouro de C como extremidades, a saber u_1 e u_2 , respectivamente. Como há outros vértices extremais no resto do ciclo, o (u_1, u_2) -caminho mencionado é único e, portanto, uma geodésica. Se u_1 não for extremal transmissor em D , então ele deve ser uma articulação receptora de C ; note que o análogo vale para u_2 . Nós então temos um (w_1, w_2) -caminho contendo o (u_1, u_2) -caminho em C . Pelo Corolário 4.7, existem $w_1, w_2 \in S$ tais que todo (w_1, w_2) -caminho contém o (u_1, u_2) -caminho, implicando que $v \in I[S]$. Como isso vale para qualquer $v \in V(C)$, temos que $V(C) \subseteq I[S]$.

A seguir, suponha que $\text{Ext}(C) = \{u_1, u_2\}$, com u_1 fonte e u_2 sumidouro. Pelo Corolário 4.7, há dois vértices em S , w_1 e w_2 , tais que todo (w_1, w_2) -caminho contém um (u_1, u_2) -caminho. Ademais, sabemos que os vértices de uma (u_1, u_2) -geodésica estão em $I[S]$. Se ambos os caminhos forem geodésicas estamos satisfeitos. Se não, assuma que existe uma articulação receptora v_1 em C , interna ao (u_1, u_2) -caminho mais longo P e tal que $\text{dist}_P(u_1, v_1)$ é mínimo. Caso não haja articulações transmissoras internas a P , como C é verdadeiramente satisfatório temos que $(u_1, v_1) \in A(D)$. Novamente pelo Corolário 4.7, concluímos que os vértices do (v_1, u_2) -caminho estão em $I[S]$ e, conseqüentemente, todos os de C . Não havendo articulações receptoras internas a P , tomamos analogamente v_2 uma articulação transmissora no interior desse caminho e adaptamos os argumentos para concluir que $V(C) \subseteq I[S]$. Caso tenhamos articulações tanto receptoras quanto transmissoras internas a P , tomamos v_1 e v_2 como antes. Além disso, por C ser verdadeiramente satisfatório, temos que todo vértice de P está no (u_1, v_2) -caminho ou no (v_1, u_2) -caminho. Utilizando mais uma vez o Corolário 4.7, deduzimos que $V(C) \subseteq I[S]$.

Agora seja C um ciclo direcionado e que não é armadilha e nem folha. Conseqüentemente, podemos tomar articulações $v_1 \neq v_2 \in V(C)$ tais que v_1 é receptora, v_2 é transmissora e $\text{dist}(v_1, v_2)$ é a maior possível. Pelo Corolário 4.7 existe uma (w_1, w_2) -geodésica contendo o (v_1, v_2) -caminho, onde $w_1, w_2 \in S$. Se $(v_2, v_1) \in A(C)$, o (v_1, v_2) -caminho utiliza todos os vértices de C ; conseqüentemente, $V(C) \subseteq I[S]$. Se não, pelo modo como escolhemos v_1 e v_2 , temos que toda outra articulação de C é interna ao (v_1, v_2) -caminho. Como C não é falsamente satisfatório do tipo 2, existem duas articulações distintas, v_3 receptora v_4 transmissora, tais que o (v_1, v_2) -caminho contém o (v_4, v_3) -caminho. Ademais, note que o (v_3, v_4) -caminho contém o (v_2, v_1) -caminho. Mais uma vez pelo Corolário 4.7 existem $w_3, w_4 \in S$ e uma (w_3, w_4) -geodésica contendo o (v_3, v_4) -caminho em

C . Portanto, $V(C) \subseteq I[S]$.

Para o último caso dos ciclos verdadeiramente satisfatórios, suponha que C possui apenas três vértices: u transmissor, v transitivo e w receptor. Se u não for extremal em D , então existe $(u', u) \in A(D)$ de modo que $u' \notin V(C)$, donde segue que u é articulação em D ; perceba que o análogo vale para w . Pelo Corolário 4.7 existem $w_1, w_2 \in S$ tais que todo (w_1, w_2) -caminho contém o arco (u, w) , incluindo as geodésicas. No caso de v , se esse for extremal também em D então ele já pertence a S ; caso contrário, ele é uma articulação de D . Supondo, sem perda de generalidade, que v é uma articulação receptora, novamente pelo Corolário 4.7 concluímos que (v, w) está contido em uma (w'_1, w'_2) -geodésica com $w'_1, w'_2 \in S$. Com isso, concluímos que $u, v, w \in I[S]$.

Feito isso, trataremos dos casos onde C é falsamente satisfatório. Sejam C do tipo 1 e u_1, u_2 respectivamente a fonte e o sumidouro em C . Se há apenas articulações receptoras internas ao (u_1, u_2) -caminho mais longo, sendo v_1 aquela cujo $\text{dist}_C(u_1, v_1)$ é o menor possível, pela definição de ciclo insatisfatório há ao menos um vértice no (u_1, v_1) -caminho. Por argumentos já utilizados envolvendo o Corolário 4.7, segue que os vértices da (u_1, u_2) -geodésica e do (v_1, u_2) -caminho estão em $I[S]$ e conseqüentemente em $I[S']$. Contudo, os internos ao (u_1, v_1) -caminho não serão incluídos em $I[S']$, e nenhum deles é articulação. O caso no qual há apenas articulações transitivas internas ao (u_1, u_2) -caminho mais longo é análogo. Supomos então que há v_1 e v_2 articulações, respectivamente receptora e transmissora, internas a esse caminho tais que $\text{dist}_C(v_2, v_1)$ é o menor possível. Logo, afirmamos que os vértices do (u_1, v_2) -caminho e do (v_1, u_2) -caminho estão em $I[S']$ (pelos mesmos argumentos repetitivos). Porém, os vértices internos ao (v_2, v_1) -caminho (dos quais há pelo menos um e nenhum desses é articulação) não estão em $I[S']$.

Assuma agora que C seja do tipo 2, donde temos articulações v_1 , receptora, e v_2 , transmissora, tais que as outras articulações de C estão no (v_1, v_2) -caminho P . Ademais, se $P = (v_1 = u_0, u_1, \dots, u_k = v_2)$ e u_i, u_j são articulações respectivamente receptora e transmissora, temos que $i \leq j$. Utilizando novamente o Corolário 4.7 temos que todos os vértices de qualquer (u_i, u_j) -caminho estão em $I[S']$, sendo esses os únicos. Veja que o (v_1, v_2) -caminho contém cada um desses vértices. Porém, os vértices internos ao (v_2, v_1) -caminho não estão em $I[S']$ e nenhum desses é articulação. Como há pelo menos um vértice desse tipo, segue que $V(C) \not\subseteq I[S']$. \square

Corolário 4.8. *Sejam D um cacto orientado, C um ciclo falsamente satisfatório de D e $S \subseteq V(D)$ um conjunto de envoltória que não possui nenhum dos vértices mencionados no item 2 do Lema 4.10. Então $I[S] \not\supseteq V(C)$. Portanto, todo conjunto geodético intersecta os ciclos falsamente satisfatórios de D .*

Pelo corolário acima, se quisermos um conjunto geodético S' , esse deve intersectar todos os ciclos falsamente satisfatórios. O seguinte teorema afirma que um vértice de cada ciclo falsamente satisfatório é o suficiente.

Teorema 4.5. *Seja D um cacto orientado. Então todo conjunto geodético mínimo é*

composto pelos vértices extremais e um, que não é extremal e nem articulação, de cada ciclo insatisfatório e de cada ciclo falsamente satisfatório.

Demonstração. Pelo Lema 2.3 e pelos Corolários 4.6 e 4.8, sabemos que os vértices do enunciado são necessários para todo conjunto geodético de D . O Teorema 4.4 garante a existência de um conjunto de envoltória mínimo S de D composto pelos vértices extremais e por um, que não é extremal e nem articulação, de cada ciclo insatisfatório. Além disso, os únicos vértices que não estão em $I[S]$ estão nos ciclos satisfatórios. O Lema 4.10 restringe ainda mais os vértices que faltam, afirmando que esses estão nos ciclos falsamente satisfatórios. Assim, só precisamos mostrar que adicionando os vértices remanescentes do enunciado a S é o suficiente para que esse seja um conjunto geodético, o qual conseqüentemente será mínimo.

Se C for um ciclo falsamente satisfatório do tipo 1, seja P o (u_1, u_2) -caminho mais longo em C . Tome $w \in N^+(u_1) \cap V(P)$ para adicionar a S . Mais uma vez pelo Corolário 4.7 existem $w_1, w_2, w_3 = w, w_4 \in S$ tais que a (u_1, u_2) -geodésica e o (w, u_2) -caminho estão contidos, respectivamente, em alguma (w_1, w_2) -geodésica e em alguma (w_3, w_4) -geodésica. Como o (w, u_2) -caminho utiliza todos os vértices internos de P , isso implica que $V(C) \subseteq I[S]$.

Por fim, sejam C um ciclo falsamente satisfatório do tipo 2 e v'_1, v'_2 como na definição. Tomamos $w \in N^+(v'_2) \cap V(C)$ para adicionar a S . Novamente pelo Corolário 4.7, existem $w_1 = w, w_2 \in S$ e uma (w_1, w_2) -geodésica contendo o (w, v'_2) -caminho de C , o qual utiliza todos os vértices de C . Portanto, $V(C) \subseteq I[S]$. \square

Mais uma vez, tal conjunto geodético mínimo pode ser encontrado em tempo linear apenas analisando os ciclos e determinando quais são (verdadeiramente/falsamente) satisfatórios e insatisfatórios.

5 CONCLUSÃO

Na Seção 3 apresentamos os resultados encontrados na literatura sobre os números de envoltória e geodético para grafos orientados que julgamos mais pertinentes. Pelo que vimos, há dois focos para esses resultados. Nas Seções 3.3 e 3.4, os resultados tratam da existência de grafos orientados com número(s) de envoltória e/ou geodético predeterminado(s). Enquanto nas Seções 3.1 e 3.5, o foco estava em apresentar limitantes para esses dois parâmetros. A maioria desses resultados se encontra na segunda dentre essas seções, e o método utilizado para apresentar esses limitantes foi através de outros quatro parâmetros, definidos na seção. Em qualquer uma dessas seções, um método bastante utilizado nos resultados foi o de restringir a classe do grafo, o qual também adotamos.

Na Seção 4 estão os resultados obtidos em nossa pesquisa, os quais foram apresentados no LAGOS 2019. Primeiro, apresentamos um limitante superior apertado para o número de envoltória restrito a torneios e grafos split orientados.

Em seguida, analisamos a complexidade dos problemas relacionados aos dois parâmetros principais em grafos bipartidos orientados. Para o do número de envoltória, mostramos que esse é NP-completo; não só isso, como também fomos capazes de restringir a NP-completude para a classe de cubos parciais orientados. Para tanto, provamos que para cada grafo bipartido (cubo parcial) G existe um grafo bipartido (cubo parcial) orientado $G_{\vec{C}_4}$ tal que $\overrightarrow{\text{hn}}(G_{\vec{C}_4}) = \text{hn}(G)$. Como ARAÚJO (2013) (ALBENQUE and KNAUER (2016)) mostraram que esse problema para grafos bipartidos (cubos parciais) não-orientados é NP-completo, o resultado segue. No caso do problema do número geodético, fizemos uma redução do problema COBERTURA DE CONJUNTOS para grafos bipartidos orientados, os quais também são digrafos acíclicos. Ademais, essa redução também mostra que o problema é W[2]-difícil parametrizado pelo valor da solução.

Por fim, mostramos que ambos esses parâmetros podem ser determinados em tempo polinomial para cactos orientados. Descobrimos que em cactos orientados há ciclos, os quais chamamos de insatisfatórios, tais que todo conjunto de envoltória (e consequentemente todo conjunto geodético) contém um vértice não-extremal de cada um desses ciclos. Além disso, há também os ciclos falsamente satisfatórios (dos quais nenhum é insatisfatório), tais que todo conjunto geodético contém um vértice não-extremal de cada um desses ciclos. Provamos que esses vértices, juntamente com os extremais do grafo orientado, são suficientes para gerar um número de envoltória/geodético mínimo. Assim, encontrar o valor desses parâmetros é equivalente a encontrar o número de vértices extremais e o de ciclos insatisfatórios e falsamente satisfatórios.

Uma possível linha de pesquisa futura é tentar aplicar um método similar ao utilizado na primeira parte da Seção 4.2. Ou seja, sabendo que o problema do número de envoltória ou o do geodético, restrito a uma classe de grafos não-orientados, pertence

uma dada classe de complexidade, é possível utilizar esse para mostrar algo similar para o caso orientado?

Outra possibilidade, como já mencionado no final da Seção 4.1, é tentar encontrar um limitante semelhante ao mostrado na mesma para o número geodético restrito a torneios ou grafos split orientados, ou até mesmo melhorar o já existente. Ainda mais, a complexidade computacional de ambos os parâmetros para essas duas classes de grafos orientados ainda é desconhecida.

Mais um possível caminho seria pesquisar sobre esses parâmetros em outras classes de grafos orientados: cografos, grafos planares, grafos com largura em árvore limitada, dentre outras. Será possível encontrar uma classe de grafos \mathcal{G} tal que, para $G \in \mathcal{G}$ e D uma orientação desse, o problema relacionado a $\text{hn}(G)$ pertence a uma classe de complexidade, enquanto que o relacionado a $\overrightarrow{\text{hn}}(D)$ pertence a outra? A mesma pergunta também pode ser feita para o número geodético.

REFERÊNCIAS

- ALBENQUE, Marie; KNAUER, Kolja. Convexity in partial cubes: The hull number. *Discrete Mathematics*, v. 339, n. 2, p. 866 – 876, 2016.
- ARAÚJO, J. et al. On the hull number of some graph classes. *Theoretical Computer Science*, v. 475, p. 1 – 12, 2013.
- ARAÚJO, Julio; ARRAES, Pedro. Hull and Geodetic Numbers for Some Classes of Oriented Graphs. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, v. 346, p. 77–88, 2019.
- BESSY, S. et al. The Geodetic Hull Number is Hard for Chordal Graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v. 32, n. 1, p. 543–547, 2018.
- BONDY, J.A.; MURTY, U.S.R. *Graph Theory*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1. ed., 2008.
- BREŠAR, Boštjan et al. The geodetic number of the lexicographic product of graphs. *Discrete Mathematics*, v. 311, n. 16, p. 1693 – 1698, 2011.
- CENTENO, Carmen C. et al. On the Convexity of Paths of Length Two in Undirected Graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 32, p. 11 – 18, 2009. DIMAP Workshop on Algorithmic Graph Theory.
- CHANG, Gerard J. et al. Geodetic spectra of graphs. *European Journal of Combinatorics*, v. 25, n. 3, p. 383 – 391, 2004.
- CHANG, Jou-Ming et al. The lower and upper forcing geodetic numbers of block–cactus graphs. *European Journal of Operational Research*, v. 175, n. 1, p. 238 – 245, 2006.
- CHARTRAND, Gary; ZHANG, Ping. The Geodetic Number of an Oriented Graph. *European Journal of Combinatorics*, v. 21, n. 2, p. 181 – 189, 2000.
- CHARTRAND, Gary et al. The Convexity Number of a Graph. *Graphs and Combinatorics*, v. 18, n. 2, p. 209–217, 2002a.
- CHARTRAND, Gary et al. On the geodetic number of a graph. *Networks*, v. 39, n. 1, p. 1–6, 2002b.
- CHARTRAND, Gary et al. The hull number of an oriented graph. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, v. 2003, n. 36, p. 2265–2275, 2003.

- CYGAN, Marek et al. *Parameterized algorithms*, v. 4. Springer, 2015.
- DONG, Lin et al. The upper and lower geodetic numbers of graphs. *Ars Combin*, v. 91, p. 401–409, 2009.
- DOURADO, Mitre C. et al. On the computation of the hull number of a graph. *Discrete Mathematics*, v. 309, n. 18, p. 5668 – 5674, 2009. Combinatorics 2006, A Meeting in Celebration of Pavol Hell’s 60th Birthday (May 15, 2006).
- DOURADO, Mitre C. et al. Some remarks on the geodetic number of a graph. *Discrete Mathematics*, v. 310, n. 4, p. 832 – 837, 2010.
- DUCHET, Pierre. Convex sets in graphs, II. Minimal path convexity. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 44, n. 3, p. 307 – 316, 1988.
- EKIM, Tmaz et al. Computing Minimum Geodetic Sets of Proper Interval Graphs. David Fernández-Baca (Ed.), *LATIN 2012: Theoretical Informatics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012, p. 279–290.
- EVERETT, Martin G.; SEIDMAN, Stephen B. The hull number of a graph. *Discrete Mathematics*, v. 57, n. 3, p. 217 – 223, 1985.
- FARRUGIA, Alastair. Orientable convexity, geodetic and hull numbers in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 148, n. 3, p. 256 – 262, 2005.
- GAREY, Michael R.; JOHNSON, David S. *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*. New York, NY, USA: W. H. Freeman & Co., 1990.
- HANSBERG, A.; VOLKMANN, L. On the geodetic and geodetic domination numbers of a graph. *Discrete Mathematics*, v. 310, n. 15, p. 2140 – 2146, 2010.
- HARARY, Frank; NIEMINEN, Juhani. Convexity in graphs. *J. Differential Geom.*, v. 16, n. 2, p. 185–190, 1981.
- HARARY, Frank et al. The geodetic number of a graph. *Mathematical and Computer Modelling*, v. 17, n. 11, p. 89 – 95, 1993.
- HUNG, Jung-Ting et al. The hull and geodetic numbers of orientations of graphs. *Discrete Mathematics*, v. 309, n. 8, p. 2134 – 2139, 2009.
- JIANG, Tao et al. Geodesic convexity and Cartesian products in graphs. *Graphs and Combinatorics*, *submitted*, 2004.
- LU, Chang-hong. The geodetic numbers of graphs and digraphs. *Science in China*

Series A: Mathematics, v. 50, n. 8, p. 1163–1172, 2007.

TONG, Li-Da. The forcing hull and forcing geodetic numbers of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 157, n. 5, p. 1159 – 1163, 2009.