



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ARTHUR CARVALHO WALRAVEN DA CUNHA

VÉRTICE-PARTICIONAMENTOS E PROBLEMAS DE DENSIDADE EM GRAFOS
ARESTA-COLORIDOS INFINITOS

FORTALEZA

2020

ARTHUR CARVALHO WALRAVEN DA CUNHA

VÉRTICE-PARTICIONAMENTOS E PROBLEMAS DE DENSIDADE EM GRAFOS
ARESTA-COLORIDOS INFINITOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Combinatória

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- C977v Cunha, Arthur Carvalho Walraven da.
Vértice-particionamentos e problemas de densidade em grafos aresta-coloridos infinitos / Arthur
Carvalho Walraven da Cunha. – 2020.
85 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação
em Matemática, Fortaleza, 2020.
Orientação: Prof. Dr. Fabricio Siqueira Benevides.
1. Coloração de aretas. 2. Partição de vértices. 3. Densidade de subgrafos. 4. Grafos enumeravelmente
infinitos. I. Título.

CDD 510

ARTHUR CARVALHO WALRAVEN DA CUNHA

VÉRTICE-PARTICIONAMENTOS E PROBLEMAS DE DENSIDADE EM GRAFOS
ARESTA-COLORIDOS INFINITOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Combinatória

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof.^a Dr.^a Ana Shirley Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Antonio Josefran de Oliveira Bastos
Universidade Federal do Ceará em Sobral (UFC)

AGRADECIMENTOS

Ao meu amigo e orientador, Fabricio Siqueira Benevides, cujo gênio permitiu que alguém como eu ousasse se tornar um matemático.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Recentemente, duas questões clássicas de combinatória extremal em grafos enumeravelmente infinitos voltaram a receber atenção. Dado r natural, um grafo G , chamado de hospedeiro, e uma família de subgrafos (caminhos, ciclos, grafos completos, etc.), no primeiro problema, estuda-se a quantidade mínima necessária de partes para que seja possível vértice-particionar qualquer r -coloração das arestas de G de forma que cada parte possua um subgrafo gerador na família escolhida. No outro, uma variação do problema de Ramsey, analisa-se a maior densidade, d , tal que qualquer r -coloração das arestas de G contenha um subgrafo monocromático de densidade pelo menos d pertencente à família escolhida. Nesta dissertação, revisamos a literatura referente à versão infinita desses tópicos, rescrevemos algumas demonstrações antigas usando a linguagem de artigos e livros mais recentes e simplificamos outras com auxílio de ultrafiltros não-principais. Também estudamos alguns resultados da variante clássica, correspondente a grafos hospedeiros finitos, e discutimos sua relação com a versão infinita.

Palavras-chave: Coloração de arestas. Partição de vértices. Densidade de subgrafos. Grafos enumeravelmente infinitos

ABSTRACT

Recently, two classical problems on extremal combinatorics of countably infinite graphs have drawn attention once more. Given a natural r , a graph G , called the host graph, and a family of subgraphs (paths, cycles, cliques, etc.), the first problem study the minimum amount of pieces necessary to vertex-partition any r -edge-coloring of G such that each piece contains a spanning subgraph in the chosen family. The other problem, a variation of the Ramsey Problem, analyses the largest density, d , for which any r -edge-coloring of G contains a monochromatic subgraph with density at least d and belongs to the chosen family. In this work we review the literature related to the infinite version of those problems. We also rewrite some old proofs using the terminology of more recent books and papers and present simpler versions of other using non-principal ultrafilters. Finally, we study a few results on the classic version of those problems, on finite host graphs, and discuss it's relation with the infinite version.

Palavras-chave: Edge coloring. Vertex partition. Subgraph density. Countably infinite graphs

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Teste de contagem.	9
Figura 2 – Grafo de convidados.	19
Figura 3 – Um exemplo de particionamento do grafo de convidados.	20
Figura 4 – Particionamento de uma coloração de K_5 em dois caminhos monocromáticos de cores distintas.	22
Figura 5 – O caminho infinito.	25
Figura 6 – Coloração de K_4 cuja partição necessita de ao menos dois caminhos monocromáticos.	26
Figura 7 – Se br é azul podemos cobrir o vértice v por um caminho monocromático azul.	26
Figura 8 – Coloração especial com 4 cores.	28
Figura 9 – Coloração base para um blow-up.	29
Figura 10 – Blow-up do grafo na Figura 9 com $l = 10$	30
Figura 11 – Exemplo de blow-up.	39
Figura 12 – O cubo de um caminho.	43
Figura 13 – Representação de um K_4^3	45
Figura 14 – Exemplo finito de caminho frouxo 4-uniforme.	46
Figura 15 – Exemplo finito de caminho justo 4-uniforme.	48
Figura 16 – Exemplo finito de caminho de Berge 4-uniforme.	49
Figura 17 – Plano afim de ordem 3.	59
Figura 18 – Plano afim de ordem 3 com classes de equivalência destacadas.	60
Figura 19 – Coloração da Figura 10 com uma partição em 3 árvores monocromáticas em destaque.	62
Figura 20 – Exemplo para comparação entre densidade comum e forte.	68
Figura 21 – Exemplos de switches.	75
Figura 22 – Uma representação de \vec{K}_5	76

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	Notação e definições	12
1.2	Ultrafiltros não-principais	16
2	PARTICIONAMENTO EM SUBGRAFOS MONOCROMÁTICOS	19
2.1	Definições	21
2.2	Por caminhos	25
2.2.1	<i>Em grafos hospedeiros finitos</i>	25
2.2.2	<i>Em grafos hospedeiros infinitos</i>	31
2.3	Por ciclos	52
2.3.1	<i>Em grafos hospedeiros finitos</i>	53
2.3.2	<i>Em grafos hospedeiros infinitos</i>	55
2.4	Por grafos conexos	58
2.4.1	<i>Em grafos hospedeiros finitos</i>	58
2.4.2	<i>Em grafos hospedeiros infinitos</i>	61
3	DENSIDADE DE SUBGRAFOS MONOCROMÁTICOS	64
3.1	De caminhos	71
3.1.1	<i>De caminhos orientados</i>	75
3.2	De grafos conexos	79
4	CONCLUSÃO	82
	REFERÊNCIAS	83

1 INTRODUÇÃO

No município de Humaitá (AM) habita uma das sociedades mais interessantes de que se tem notícia: a tribo de caçadores-coletores conhecida como Pirarrã.¹ Considere, por exemplo, a língua desse povo, o *Apaitsiiso*.² Dentre suas várias características únicas,³ o vocabulário não inclui recursos para expressar quantidades exatas. Na tabela abaixo, estão listados *todos* os quantificadores em *Apaitsiiso*.

Quantificador	Tradução aproximada
<i>hói</i>	pouco
<i>hoí</i>	um pouco mais
<i>báagiso</i> ou <i>xaíbái</i>	vários (contável)
<i>xapagí</i> ou <i>xogíí</i>	muito (não-contável)
<i>xogió</i>	tudo
<i>xaibái</i>	metade
<i>xi ába</i>	nada

Tabela 1 – Traduções do artigo [1] considerando algumas críticas do trabalho [2].

A língua não possui algo que funcione como nossos números. Um dos efeitos atribuídos a essa característica é o fato de os pirarrã serem incapazes de contar! Ao serem expostos a situações semelhantes à representada na Figura 1, membros da tribo afirmam haver mais pontos vermelhos que azuis. Note que existem mais pontos azuis, mas os vermelhos estão espalhados em uma área maior.

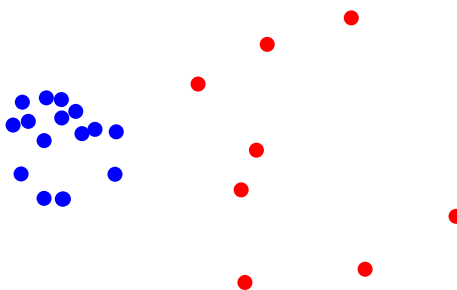


Figura 1 – Teste de contagem.

¹ Nós chamamos eles assim. Esses indígenas se autodenominam *Hiaitiíhi*, que significa algo como “os eretos”.

² Com significado próximo de “aquilo que sai da cabeça”.

³ Ver, por exemplo, o trabalho [1].

Se os pontos são dispostos de maneira a cobrir áreas semelhantes, os indígenas ficam confusos com a pergunta e partem para respostas arbitrárias. O que você faria se um pesquisador exibisse dois pontos azuis e dois vermelhos e perguntasse qual cor tem mais pontos? ⁴

Como um exemplo prático do fenômeno, suponha que um pirarrã saiba que existe uma boa quantidade de frutas sobre a mesa e vê uma criança pegar algumas. Quando perguntado sobre, ele narra o que aconteceu: — Tem *várias* frutas na mesa e a criança pega *um pouco*.⁵ O interessante é que quando questionado sobre mudanças no estado da mesa de frutas, ele afirmam categoricamente que absolutamente nada mudou.⁶ Existiam muitas frutas e continua sendo assim. Apenas quando a remoção deixa “pouco” alimento uma mudança de estado é comunicada.

Apesar dos primeiros parágrafos, este é um texto sobre Combinatória Extremal. Grosso modo, esse ramo da matemática estuda o quão grande (ou pequeno) um sistema deve ser para que possamos garantir a ocorrência de certos padrões. Dito isso, em Combinatória Extremal, é comum investigar o que acontece quando o tamanho de um tipo de sistema é muito grande, na tentativa de entender o comportamento limite de certos parâmetros. Aqui, por sua vez, estudaremos o comportamento combinatório quando o próprio sistema é infinito (o que nem sempre corresponde ao comportamento limite). Mais especificamente consideramos problemas em grafos infinitos.

A referência à tribo Pirarrã é motivada pelo nosso interesse nessa criatura ardilosa: o infinito. Conjuntos ilimitados tem um comportamento estranho, pouco respeitoso com nossa intuição. Adicione um elemento ao conjunto e, em muitos aspectos, obtemos a mesma entidade. Remova metade e é possível que essencialmente nenhuma mudança seja percebida. Talvez pirarrãs se dessem bem com o infinito.

Adições e remoções infinitas de elementos em um conjunto também podem ter comportamento inesperado. Como rápidos exemplos, considere os processos seguintes. Comece com um conjunto vazio e no primeiro passo adicione os naturais de 1 a 10. No segundo passo, remova o 1. No terceiro, adicione os naturais de 11 a 20 e, no quarto, remova o 2. Seguindo o algoritmo, efetivamente, 9 elementos são adicionados ao conjunto a cada duas etapas. Entretanto, se iterarmos o processo infinitamente, temos que qualquer natural n será removido no $(2n)$ -ésimo passo, de

⁴ Essa é uma aproximação dos experimentos. Os pirarrã não parecem ter palavras fixas para cores, o que poderia dificultar um teste baseado nisso.

⁵ Não existe pretérito perfeito em *Apaitsiiso*. Na verdade, sequer existe uma noção exata de tempo.

⁶ Ver [1] e [2] para detalhes acerca dos experimentos.

modo que “terminamos” com o conjunto vazio. Informalmente, fizemos $9 + 9 + 9 + \dots$ e obtivemos “nada”.

Num processo semelhante, iniciemos também com o conjunto vazio. No primeiro passo, adicionamos os naturais de 1 a 9. No segundo, multipliquemos o número 1 por 10, obtendo 10 em seu lugar. No terceiro, adicionamos 11, 12, \dots , 18 e 19 e, no quarto, transformamos o 2 em 20. Como antes, ao seguir o algoritmo adicionamos 9 elementos a cada duas etapas e ao final delas obtemos os mesmos conjuntos: 2, 3, \dots , 10, depois 3, 4, \dots , 20 e assim por diante. Contudo, nessa versão, nenhum elemento é subtraído do conjunto, apenas multiplicado por 10. Ou seja, a soma dos elementos apenas aumenta. Dessa vez, a soma $9 + 9 + 9 + \dots$ nos leva ao infinito.

Com a linguagem e treinamento correto, matemáticos conseguem racionalizar situações como essa e entender o que é falho no raciocínio acima. Veremos que conforme essa linguagem se torna mais íntima da ideia de infinito, nossas ideias soam mais e mais como *Apaitsiiso*. Claro que nunca deixaremos de contar (estamos fazendo combinatória, afinal!), mas nos guiamos por argumentos cada vez menos quantitativos e mais qualitativos. Com o uso de ultrafiltros (não-principais), então, as narrativas se tornam dignas do pirarrã diante da mesa com muitas frutas: seguimos os argumentos sem nos preocupamos muito com os conjuntos “grandes”; para nossos propósitos, a menos que algo dramático aconteça, eles seguem imutáveis.

Nos capítulos seguintes, estudaremos versões infinitas de dois problemas bem conhecidos de Combinatória Extremal. O primeiro é o de *particionamento em subgrafos monocromáticos*, no qual estudamos a melhor forma de decompor colorações das arestas de um grafo hospedeiro em subgrafos de um certo tipo. O outro é o próprio *problema de Ramsey*, amado por todos nós.⁷ Em resumo, esse é o estudo do quão grande um grafo deve ser para que possamos garantir a ocorrência de certos subgrafos monocromáticos em qualquer coloração de suas arestas. Talvez não seja evidente, mas existe uma conexão entre esses problemas e teremos a chance de compreendê-la um pouco melhor.

As variações infinitas dessas questões foram escolhidas por terem atraído interesse recente da comunidade, contando com vários resultados nos últimos anos, mas ainda é um área com bastante potencial para exploração. Não deixaremos, é claro, de mencionar as versões finitas, tanto para fins históricos quanto como apoio ao nosso entendimento geral. Veremos, por exemplo, que

⁷ Definiremos o problema em breve, caso o leitor ainda não o conheça.

as propriedades estranhas dos grafos infinitos permitem que algumas restrições para grafos finitos sejam burladas, abrindo espaço para resultados de outra forma impossíveis. Por outro lado, alguns argumentos finitos resistem bem à mudança de ambiente e seguem funcionando após uns poucos ajustes.

Ao fim do texto, teremos discutido praticamente todos os enunciados referentes às versões infinitas escolhidas, exceto pelo fato de que não cobriremos profunda ou completamente resultados sobre grafos com conjunto de vértices não-enumerável. Ao infinito! Mas não além.

O trabalho tem como público-alvo alunos de graduação interessados em Combinatória Extremal e familiarizados em algum nível com a teoria dos grafos. Entretanto, dada a natureza de uma dissertação, sabemos que o texto passará por ao menos alguns olhos mais experientes. Cientes disso, fizemos algum esforço de reordenação para desobstruir o fluxo da leitura daqueles habituados às definições “padronizadas”, trazendo-as para a Seção 1.1. Apenas as que julgamos passíveis de confusão se mantêm embutidas no texto principal.

Por último, mencionamos que, como típico em Combinatória, muito da nossa discussão é em grande parte elementar. A quantidade mínima de pré-requisitos é uma das coisas mais divertidas da área e prezamos por isso. Contudo, para não nos alongarmos demais, herdamos duas “caixas-pretas”. A primeira é o Lema da Regularidade de Szemerédi e a teoria em torno dele. Essa já se tornou padrão em combinatória extremal e existem várias referências boas acerca do tema. Nos esforçamos para que as discussões se mantivessem inteligíveis mesmo para leitores não tão familiarizados com essa teoria, mas caso existam dificuldades ou interesse, recomendamos as leituras de [3] e [4] (sétima seção) para introduções rápidas. A segunda é a utilização de ultrafiltros não-principais sobre os naturais. Essa é menos usual, então fazemos uma discussão básica sobre esses objetos na Seção 1.2.

1.1 Notação e definições

Nessa seção estabelecemos nossas notações básicas, assumindo familiaridade com a teoria básica dos conjuntos e algum contato prévio com teoria dos grafos. Dentro dessas hipóteses, algumas definições padrão são fornecidas a fim de manter o texto moderadamente auto-contido e de refrescar a memória de leitores que sintam necessidade.

Representamos por \mathbb{N} o conjunto dos números naturais, aqui, entendidos como os inteiros positivos. Até o fim da seção, A é um conjunto, e n natural. Denotamos por $[n]$ conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. A cardinalidade de A (que coincide com sua quantidade de elementos quando A é finito) é simbolizada por $|A|$. Representamos por

$$\binom{A}{n}$$

a coleção de todos os subconjuntos de A com cardinalidade n .⁸ Ademais, vale $\binom{A}{0} = \{\emptyset\}$. Temos, portanto,

$$\left| \binom{A}{n} \right| = \binom{|A|}{n}.$$

Um *grafo* G é um par ordenado (V, E) tal que $E \subseteq \binom{V}{2}$. Desse modo, o termo “grafo” se refere a grafos simples: sem laços ou arestas duplas. Em geral, dado $k \geq 2$ natural, um hipergrafo k -uniforme é um par ordenado (V, E) com $E \subseteq \binom{V}{k}$. Utilizamos as notações $V(G)$ e $E(G)$ para referenciar o conjunto de vértices e o de (hiper)arestas, respectivamente. Ademais, dizemos que G é um grafo *sobre* $V(G)$. Uma aresta $\{u, v\}$ por vezes é representada abreviadamente por uv . Se uv pertence a $E(G)$, afirmamos que u é vizinho de v , ou que u é adjacente a v .

Dado um grafo H , com $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$, dizemos que H é *subgrafo* de G , ou que G contém (uma cópia de) H . Em símbolos, representamos essa relação por $H \subseteq G$.

Dado $V' \subseteq V(G)$, representamos por $G[V']$ o *grafo induzido* por G no conjunto de vértices V' , isto é, o grafo sobre V' que tem por arestas o conjunto $\left\{ e \in E(G) : e \subseteq \binom{V'}{2} \right\}$.

Chamamos de *caminho* um grafo dado por uma sequência de vértices, dois a dois distintos, com arestas entre quaisquer dois vértices consecutivos nessa sequência e nenhuma a mais. Em símbolos, um caminho é um grafo P , com

$$V(P) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad \text{e} \quad E(P) = \{v_i v_{i+1} : i \in [n-1]\}.$$

Dizemos que a sequência (v_1, v_2, \dots, v_n) *determina* P .

No que segue, seja P o caminho determinado pela sequência de vértices (v_1, v_2, \dots, v_n) . Sejam i e j naturais, com $1 \leq i \leq j \leq n$. Afirmamos que P é uma *extensão* do caminho com sequência $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_j)$ ou que P *estende* tal caminho. Repare que, com essa definição, todo caminho é uma extensão de si mesmo.

⁸ $\binom{A}{n}$ é lido como “ A escolhe n ”.

Suponha $P \subseteq G$. Se uv_n é aresta de G , então dizemos que o caminho P' com sequência de vértices $(v_1, v_2, \dots, v_n, u)$ é uma *extensão de P pela aresta uv_n* .

Dados caminhos P_1, P_2, \dots tais que, para todo $i \in \mathbb{N}$, o caminho P_{i+1} é uma extensão de P_i , definimos o *limite da família de caminhos $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}}$* como o grafo P' , onde

$$V(P') = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V(P_i) \quad \text{e} \quad E(P') = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E(P_i).$$

Note que P' é uma extensão de cada P_i e que, como a família pode conter caminhos iguais, não necessariamente P' é infinito.

Um grafo G é dito *conexo* se e somente se contém um caminho entre quaisquer de seus vértices e *desconexo*, caso contrário. Ademais, um grafo conexo tal que a remoção de qualquer aresta torna-o desconexo é chamado de *árvore*.

Chamamos de *ciclo* um grafo obtido a partir de um caminho adicionando-se uma aresta entre seu primeiro e o último vértice. Dessa forma, caminhos com apenas um ou dois vértices são considerados ciclos.

Denotamos por K_n o *grafo completo em n vértices*. Isto é, temos

$$V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad \text{e} \quad E(K_n) = \binom{V(K_n)}{2}.$$

Além disso, nos referimos ao grafo vazio como K_0 e utilizamos o termo *clique* ao falar sobre grafos completos enquanto subgrafos.

Escrevemos $K_{n,n}$ para representar o *grafo bipartido completo simétrico* com partes de tamanho n . Isto é, temos

$$V(K_{n,n}) = \{a_1, \dots, a_n\} \cup \{b_1, \dots, b_n\} \quad \text{e} \quad E(K_{n,n}) = \{a_i b_j : i, j \in [n]\},$$

onde $a_i \neq b_j$, para todos $i, j \in [n]$.

Um *grafo direcionado* é um par ordenado (V, A) , tal que

$$A \subseteq \{(u, v) : u, v \in V\}.$$

Chamamos os elementos em A de arcos. Apesar disso, usamos a notação $E(G)$ para nos referir do conjunto A . Como a definição se dá em termos de pares ordenados, (u, u) é um arco válido e $(u, v) \neq (v, u)$.

Dado $r \in \mathbb{N}$, uma r -coloração das arestas de G , ou uma r -aresta-coloração de G , é uma função de $E(G)$ em $[r]$. A sobrejetividade não é necessária, logo toda r -coloração de arestas é também uma $(r+1)$ -coloração.

Fixada uma r -aresta-coloração de G , dado $v \in V(G)$ e $i \in [r]$, representamos por $N_i(v)$ os vizinhos de v por arestas na cor i . Isto é,

$$N_i(v) = \{u \in V(G) : \{u, v\} \text{ é aresta de } G \text{ e tem cor } i\}.$$

O resultado do procedimento seguinte é chamado de *blow-up* de um grafo. Dada uma coloração, possivelmente de vértices e arestas, de um grafo H , com $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, associe a cada vértice v_i de H um conjunto V_i arbitrário não vazio. qualquer. Então, defina um novo grafo B , com

$$V(B) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$$

e

$$E(B) = \{xy : x, y \in V_i, i \in [n]\} \cup \{xy : x \in V_i, y \in V_j, v_i v_j \in E(H), i, j \in [n]\}.$$

Por fim, dado $xy \in E(B)$, com $x \in V_i$ e $y \in V_j$, se $i \neq j$, atribua a cor da aresta $v_i v_j$ a xy . Se $i = j$, caso os vértices de H também são coloridos, atribua a cor de v_i a xy ; já se nenhuma coloração está associada a $V(H)$, informaremos como proceder (a depender da aplicação que tenha em mente) com as arestas internas a V_i .

Dado $r, k \in \mathbb{N}$ e um grafo H , escrevemos $k \rightarrow (H)_r$ se toda r -coloração das arestas de K_k contém uma cópia de H com todas as arestas em uma mesma cor. Ademais, denotamos por $R_r(H)$ o menor inteiro k para o qual $k \rightarrow (H)_r$, conhecido como *número de Ramsey de H para r cores*. O teorema de Ramsey garante que $R_r(H)$ existe (ou seja, que ele está bem definido).

Com essas últimas definições, podemos enunciar o Teorema de Ramsey.

Teorema 1.1.1 (de Ramsey). *Dado $r \in \mathbb{N}$ e um grafo H , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $R_r(H) = k$.*

Teorema 1.1.2 (de Ramsey (versão infinita)). *Dado $r \in \mathbb{N}$, toda r -coloração de $\binom{\mathbb{N}}{2}$ contém um conjunto infinito tal que todo par de elementos nesse subconjunto infinito tem uma mesma cor.*

Note que, na versão infinita do teorema de Ramsey, o número de cores ainda precisa ser finito. (Por exemplo, se houvessem infinitas cores, poderíamos atribuir uma cor diferente para cada

aresta, de modo que não haveria uma clique infinita monocromática). Existe uma versão que trata de uma quantidade infinita de cores, chamada de “Teorema de Ramsey Canônico”, mas não trataremos deste caso.

1.2 Ultrafiltros não-principais

Nesta seção fazemos uma rápida introdução a ultrafiltros não-principais. Embora suficiente para nossos fins, a discussão feita aqui não objetiva a construção de um entendimento profundo desse tópico. Ao o leitor interessado, recomendamos a discussão feita por T. Tao em [5]. Embora focada no uso desses objetos em análise não-padrão, a revisão feita por Tao pode ajudar bastante na formação de uma intuição sobre ultrafiltros não-principais. Para uma referência mais formal, recomendamos o trabalho [6].

Definição 1.1. *Sejam A e $B \subseteq \mathbb{N}$. Uma família \mathcal{U} de subconjuntos dos naturais⁹ é chamada de ultrafiltro não-principal se, e somente se,*

U0. $\emptyset \notin \mathcal{U}$;

U1. (Monotonicidade) Se $A \in \mathcal{U}$ e $A \subseteq B$, então $B \in \mathcal{U}$;

U2. (Fecho por interseções finitas) Se $A \in \mathcal{U}$ e $B \in \mathcal{U}$, então $A \cap B \in \mathcal{U}$;

U3. (Dicotomia) Exatamente um conjunto dentre A e seu complementar pertence a \mathcal{U} ;

U4. (Não-principalidade) Se $A \in \mathcal{U}$, e $B \subseteq \mathbb{N}$ finito, temos que $A \setminus B \in \mathcal{U}$.

Uma família de subconjuntos satisfazendo *U1* e *U2* é chamada *filtro*. Se ela também satisfaz *U0*, é chamada *filtro próprio*.

Se \mathcal{F} é um filtro próprio e satisfaz *U3*, então dizemos que \mathcal{F} é um *ultrafiltro*. A propriedade *U3* equivale à afirmação de que \mathcal{F} não é subconjunto próprio de nenhum outro filtro.

Um ultrafiltro \mathcal{U} que satisfaz *U4* é dito *não-principal*. Em contraste, pode-se demonstrar que todo ultrafiltro principal é da forma $\{A \subseteq \mathbb{N} : n_0 \in A\}$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Mais geralmente, a não-principalidade significa que adições ou remoções de uma quantidade finita de elementos não mudam o fato de um conjunto pertencer ou não ao ultrafiltro. Isso torna claro que \mathcal{U} não contém conjuntos finitos.

⁹ Temos $\mathcal{U} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, onde o $2^{\mathbb{N}}$ é o conjunto das partes de \mathbb{N} , que produz uma ordem parcial pela relação de inclusão. Existe uma definição mais geral de ultra-filtro que se aplica a qualquer ordem parcial.

A existência de ultrafiltros não-principais sobre \mathbb{N} é uma hipótese forte que não pode ser obtida no sistema axiomático Zermelo-Fraenkel, como demonstrado no trabalho [7]. Entretanto, o Axioma da Escolha é suficiente. Aplicaremos ele sob forma do Lema de Zorn.

Lema 1.2.1 (de Zorn). *Se P é um conjunto parcialmente ordenado tal que toda cadeia em P tem um limitante superior, então P contém um elemento maximal.*

Proposição 1.2.1. *Existe um ultrafiltro não-principal sobre \mathbb{N} .*

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que existem filtros próprios sobre \mathbb{N} . Em seguida, usaremos o Lema de Zorn para obter um filtro próprio maximal e, então, mostraremos que este é um ultrafiltro não-principal.

Seja \mathcal{C} a família dos subconjuntos co-finitos de \mathbb{N} , isto é, subconjuntos cujo complementar é finito. Como \mathbb{N} é infinito, temos que $\emptyset \notin \mathcal{C}$. Ademais, se $A \in \mathcal{C}$ e $B \supseteq A$, então o complementar de B está contido no complementar de A , sendo, portanto, também finito. Logo, B é co-finito. Para obter o fecho por interseções finitas, tome A e B em \mathcal{C} . Pela Lei de De Morgan, temos que o complementar de $A \cap B$ é a união dos complementares de A e B . Como estes são conjuntos finitos, vale $A \cap B \in \mathcal{C}$. Assim, fica demonstrado que \mathcal{C} é um filtro próprio sobre os naturais.

Dada uma cadeia de filtros próprios $\{\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots\}$, seja \mathcal{F} a união de cada subconjunto na cadeia, i.e., $\mathcal{F} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_i$. É claro que $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Ademais, dado $A \in \mathcal{F}$ e B , tal que $A \subseteq B$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $A \in \mathcal{F}_n$. Como \mathcal{F}_n é um filtro, temos que $B \in \mathcal{F}_n$ e, portanto, $B \in \mathcal{F}$. Além disso, se A e B pertencem a \mathcal{F} , também podemos encontrar n grande o suficiente para que $A, B \in \mathcal{F}_n$ e concluir que $A \cap B \in \mathcal{F}$. Assim, a família \mathcal{F} , além de cota superior para a cadeia, é também um filtro próprio.

Assim, pelo Lema de Zorn, existe um filtro próprio \mathcal{U} sobre \mathbb{N} que não está estritamente contido em nenhum outro filtro próprio. Desse modo, \mathcal{U} é um ultrafiltro. Para ver que \mathcal{U} não é principal, dado $A \in \mathcal{U}$, suponha por contradição que exista $B \subseteq \mathbb{N}$ finito para o qual $A \setminus B \notin \mathcal{U}$. Escrevendo de outra forma, temos $A \cap (\mathbb{N} \setminus B) \notin \mathcal{U}$. Como A pertence a \mathcal{U} , o fecho por interseção implica que $\mathbb{N} \setminus B$ não pertence ao ultrafiltro. Entretanto, esse é um conjunto co-finito, pois seu complementa é B , que é finito. Isso contradiz o fato de que \mathcal{U} contém o filtro dos conjuntos co-finitos. \square

Elementos de um ultrafiltro não-principal sobre os naturais serão considerados como os subconjuntos “grandes” de \mathbb{N} e afirmações válidas sobre um elemento do ultrafiltro são tomadas

como valendo sobre “quase todos” os elementos de \mathbb{N} . De fato, como uma curiosidade para os leitores familiarizados com teoria da medida, podemos construir um ultrafiltro sobre \mathbb{N} com base em uma medida finitamente aditiva $\mu: 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}$, onde $2^{\mathbb{N}}$ representa a família de todos os conjuntos de naturais. Basta definir \mathcal{U} como $\{A \subseteq \mathbb{N} : \mu(A) = 1\}$. Ademais, se μ atribui medida 0 a conjuntos finitos, então \mathcal{U} é um ultrafiltro não-principal.

A próxima proposição traz uma propriedade simples, mas interessante desses objetos.

Proposição 1.2.2. *Seja \mathcal{U} um ultrafiltro não-principal sobre \mathbb{N} . Se*

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \mathbb{N},$$

é uma partição dos naturais, então exatamente um dos conjuntos A_i pertence a \mathcal{U} .

Demonstração. Suponha por contradição que tenhamos $A_i, A_j \in \mathcal{U}$ distintos. Então, pelo fecho por interseções finitas, vale $A_i \cap A_j \in \mathcal{U}$. Entretanto, como estamos considerando uma partição, temos $A_i \cap A_j = \emptyset$, o que viola $U0$.

Mostraremos que ao menos uma das partes é grande por indução em n . Se $n = 2$, concluímos o resultado imediatamente da propriedade $U3$ (dicotomia). Suponha, então, que a afirmação seja verdadeira para $n - 1$. Desse modo, temos, pelo caso base, que exatamente um dentre os conjuntos $A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}$ e A_n pertence a \mathcal{U} . Se $A_n \in \mathcal{U}$, estamos feitos. Caso contrário, temos $(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \in \mathcal{U}$ e, pela hipótese de indução, existe um único $i \in [n - 1]$ para o qual $A_i \in \mathcal{U}$. □

Esse enunciado nos será bastante útil, pois, como veremos mais tarde, nos ajuda a “colocar os pombos nas casas certas”. Ele também revela um pouco da natureza estranha dos ultrafiltros não-principais: uma de suas consequências é que exatamente um dentre o conjunto dos naturais pares e dos ímpares é grande!

2 PARTICIONAMENTO EM SUBGRAFOS MONOCROMÁTICOS

Imagine que você planeja festejar com todos os seus amigos no decorrer desse ano. Como você é muito popular, não é possível reunir todos os seus colegas em um evento só. Logo, você decide dar várias festas, uma a cada fim de semana; convidando cada amigo seu para somente uma delas.

Distribuir convites de maneira arbitrária seria desperdiçar não só toda a informação que você coletou sobre seus contatos, mas também uma boa introdução para textos sobre particionamento de grafos. Afinal de contas, pessoas interagem de formas diferentes com pares diferentes. Você sabe, por exemplo, que Alice e Bob adoram discutir religião quando se encontram. Já na companhia de Carol, Alice tipicamente conversa sobre epistemologia moderna.

Está aí seu caminho para a glória social: finais de semana temáticos! Se você conseguir arranjar seus amigos de forma que, em cada final de semana, todos os pares de convidados tenham a mesma preferência de tema para conversas, as discussões fluirão maravilhosamente e todos ficarão felizes. Motivado, você está no ponto de preparar um modelo.

Cada amigo será representado por um vértice no grafo de convidados. Se duas pessoas mantêm contato, conectamos os vértices respectivos com uma aresta. A informação sobre as preferências de tópicos pode ser codificada como uma coloração de arestas onde cada um dos temas leves e pouco controversos é uma cor. Vejamos um exemplo.

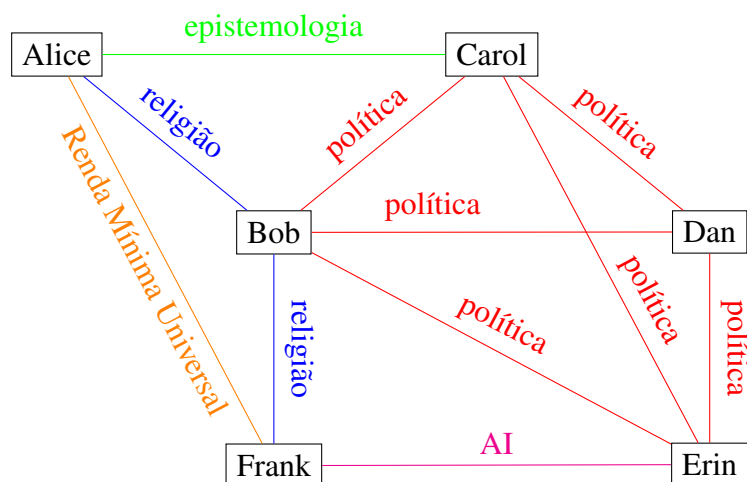


Figura 2 – Grafo de convidados.

Cada amigo será convidado para exatamente um evento, e um final de semana sem convidados não conta como festa. Isso significa que você está buscando particionar os vértices desse grafo, cada parte representando um evento. Traduzida para o modelo, sua estratégia de engenharia social significa que a busca está restrita a particionamentos no qual todas as arestas internas a uma parte tenham uma mesma cor, pouco importando a cor de arestas cruzando partes. Na Figura 3, vemos um exemplo de como isso poderia ser atingido partindo do grafo da Figura 2. Alice e Frank participariam de um final de semana e Bob, Carol, Dan e Erin de outro.

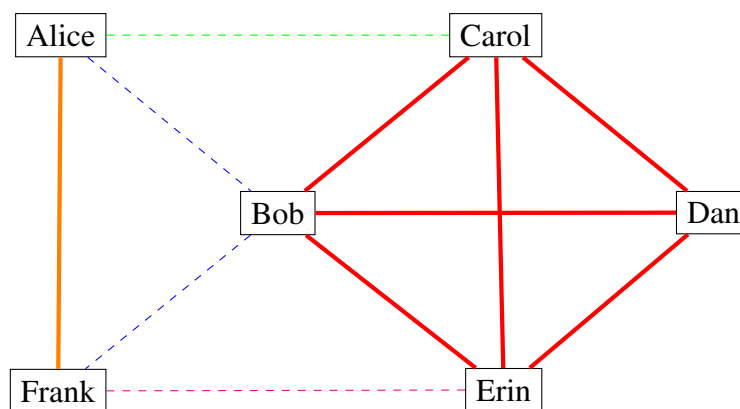


Figura 3 – Um exemplo de particionamento do grafo de convidados.

Será possível organizar as festas perfeitas usando os 52 finais de semana do ano? Qual o mínimo de eventos necessário? Isso depende da quantidade de amigos? Da quantidade de tópicos inofensivos? E se uma modelagem mais refinada introduzir outras restrições? Por exemplo, pode ser que os convidados tenham que ser dispostos em um mesmo lado da sua grande mesa de jantar, de forma que cada um só consiga conversar com seus vizinhos imediatos. Sob essa condição, basta que seja possível formar um caminho hamiltoniano em cada parte com arestas numa mesma cor, não importando a cor das arestas fora do caminho. Com menos arestas para gerenciar, quanto essa organização facilitaria sua tarefa? Outra limitação bastante comum é parte de seus amigos acreditar que o livre arbítrio é uma ilusão e os demais estarem errados acerca do tema. Nessa situação, a fim de maximizar as conversões, você deveria dispor os assentos de forma alternada entre “razoáveis” e “desavisados”. No modelo, isso se traduziria como a busca por um particionamento de um grafo de amigos bipartido em caminhos monocromáticos.

Quando devidamente formalizado, o que será feito em seguida, o problema que você

contempla é conhecido como problema do particionamento em subgrafos monocromáticos, foco deste capítulo. A essa altura, esperamos ter ilustrado a riqueza da subárea e despertado o interesse do leitor, pois, mesmo sem conhecer seu potencial em organização de festas, diversos combinatorialistas se dedicaram a essa área nas últimas décadas.

Neste trabalho, nos concentramos no caso onde você é *muito* popular, possuindo uma quantidade infinita enumerável de amigos. Já a versão finita do problema conta com uma vasta literatura e referenciamos diversos resultados do tipo para fins ilustrativos e de contextualização. Entretanto, não é o objetivo da dissertação cobrir essa variedade completa ou profundamente. Para tanto, recomendamos as referências [8] e [9].

2.1 Definições

Os problemas estudados nesta dissertação tratam de colorações de arestas. Assim, por padrão, o termo *coloração* se refere a uma função (não necessariamente sobrejetiva nem injetiva) com domínio no conjunto de arestas de algum grafo. Contudo, utilizamos colorações de vértices em algumas demonstrações para sinalizar alguma propriedade. Chamaremos a atenção do leitor sempre que fizermos isso. De modo semelhante, o termo *grafo monocromático* descreve uma característica das arestas do grafo.

Definição 2.1. *Dado um grafo colorido G , dizemos que G é monocromático na cor i se todas as arestas de G têm cor i .*

Nas mesmas condições, caso as cores sejam nomeadas, dizemos também que o grafo é *monocromático azul*, *monocromático vermelho*, etc. ou simplesmente *azul*, *vermelho*, etc. É interessante destacar que, com essa definição, K_0 e K_1 são, por vacuidade, grafos monocromáticos em qualquer das cores.

No contexto deste capítulo, estamos interessados em particionar o conjunto de vértices de um grafo colorido, de forma que cada parte possua um subgrafo gerador monocromático pertencente a uma família específica. De outro modo, podemos imaginar que, dada uma coloração, estamos buscando cobrir todos os vértices de um grafo usando subgrafos monocromáticos de um certo tipo; mas como estamos falando de uma partição do conjunto de vértices, os subgrafos utilizados devem ser disjuntos.

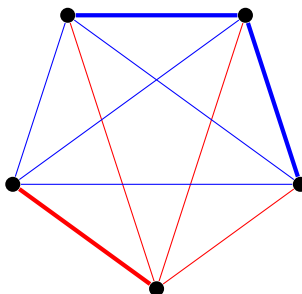


Figura 4 – Particionamento de uma coloração de K_5 em dois caminhos monocromáticos de cores distintas.

Tomando a Figura 4 como exemplo, vemos que, com a coloração dada, é possível cobrir todos os vértices de K_5 com um caminho monocromático azul e um vermelho. Esse claramente não é o único particionamento possível. Poderíamos, por exemplo, usar 5 caminhos unitários, isto é, cópias de K_1 . Todas as famílias de subgrafos que estudaremos incluem K_1 , de modo que todo grafo possui um particionamento trivial em grafo unitários, não importando a coloração considerada. Por outro lado, na Figura 4, não podemos particionar os vértices em um único caminho monocromático. De fato, o centro da estrela geradora vermelha só pode ser coberto por um caminho vermelho. Como o maior caminho vermelho cobre no máximo 3 vértices, um segundo caminho é necessário. Esse fenômeno é uma consequência dessa coloração específica: se todas as arestas fossem vermelhas, um único caminho monocromático bastaria.

A versão extremal desse problema, enfocada nesse capítulo, consiste em, dado um grafo base e uma família de grafos \mathfrak{F} , encontrar a quantidade mínima, k , para a qual toda coloração do grafo base pode ter seus vértices particionados em no máximo k subgrafos monocromáticos pertencentes a \mathfrak{F} . Essa busca por estruturas monocromáticas ao longo de todas as colorações possíveis também é típica da *Teoria Ramsey*. Problemas em Teoria de Ramsey possuem, contudo, outra natureza (já que lá não se busca por uma partição dos vértices). Ainda assim, é de lá que vem a inspiração para a notação utilizada aqui. Mais precisamente, em [10], os autores estabelecem uma notação análoga à “notação flecha” da Teoria de Ramsey, esta popularizada por P. Erdős a partir do artigo [11].

Definição 2.2. *Seja G um grafo, \mathfrak{F} uma classe de grafos e $m, r \in \mathbb{N}$. Denotamos por*

$$G \square (\mathfrak{F})_{r,m}$$

a afirmação de que para toda r -coloração de G existe uma partição dos vértices de G em até m partes

de modo que cada uma delas possua algum elemento de \mathfrak{F} como grafo gerador monocromático.

Se, para cada r -coloração, a partição pode ser obtida a menos de uma quantidade finita de vértices escrevemos

$$G \sqsubset^* (\mathfrak{F})_{r,m}$$

para indicar essa afirmação mais fraca.

A segunda parte da definição só é útil por estarmos interessados em grafos infinitos. O asterisco na notação é uma analogia à notação “=*”, que indica igualdade de conjuntos a menos de uma quantidade finita de elementos.

Para ilustrar o uso da Definição 2.2, vamos escrever nossa observação sobre a possibilidade de cobrir cada vértice com um K_1 como uma proposição.

Proposição 2.1.1. *Seja G um grafo qualquer e \mathfrak{F} uma família de grafos tal que $K_1 \in \mathfrak{F}$. Seja G um grafo de ordem $n > 0$, então para todo $r \in \mathbb{N}$, temos que*

$$G \sqsubset (\mathfrak{F})_{r,n}.$$

Esse resultado simples mostra que, mesmo sendo uma afirmação acerca de todas as colorações possíveis, o conteúdo de $G \sqsubset (\mathfrak{F})_{r,m}$ pode ser trivializado a depender dos argumentos. Com isso, acompanhamos novamente a Teoria de Ramsey, definindo um parâmetro de minimização do número de partes. Para tanto, estabelecemos uma definição análoga à de *número de Ramsey*.

Definição 2.3. *Dado um grafo G , uma família de grafos \mathfrak{F} e um natural r , o número de partição com r cores de G em elementos de \mathfrak{F} , denotado por*

$$PN_r(G, \mathfrak{F})$$

é o menor natural m para o qual $G \sqsubset (\mathfrak{F})_{r,m}$, caso exista algum m , e infinito caso contrário.

Quando não houver ambiguidade, omitimos referências a r , G ou \mathfrak{F} ao mencionarmos o número de partição.

Esse parâmetro quantifica o sucesso da procura por um particionamento da estrutura determinada por G , que chamaremos de *grafo hospedeiro*, em subestruturas monocromáticas restritas

à família \mathfrak{F} , que chamaremos de *classe de partição*. Tudo isso enquanto buscamos minimizar o número máximo de partes necessárias em meio a todas as colorações possíveis.

Também introduzimos uma notação para o caso onde uma quantidade finita de vértices é negligenciada.

Definição 2.4. *Dado um grafo infinito $G = (V, E)$, uma família de grafos \mathfrak{F} e um natural r , escrevemos*

$$\text{PN}_r(G, \mathfrak{F}) =^* m$$

se m é o menor natural para o qual $G \sqsubseteq^ (\mathfrak{F})_{r,m}$, caso exista algum m , e infinito caso contrário.*

Ademais, valem as definições e notações análogas para as relações $<$, \leq , $>$ e \geq .

Nessas definições, nos distanciamos um tanto do comportamento do número de Ramsey por sermos forçados a incluir a possibilidade de que o valor do número de partição seja ilimitado. Isso é fruto do nosso interesse pelo caso onde G é infinito. Se, por exemplo, a família \mathfrak{F} for composta apenas de grafos limitados, é impossível cobrir os vértices de G uma quantidade finita de elementos de \mathfrak{F} .

Perceba que essas definições garantem monotonicidade ao número de partição: se sempre podemos encontrar um particionamento de um grafo em até k partes, também é possível fazê-lo em no máximo $k + 1$ partes. Isso faz com que a analogia com o número de Ramsey se estenda bem ao comportamento lógico da expressão. Queremos dizer com isso que basta exibirmos uma única r -coloração de G para a qual não é possível particionar G em apenas k elementos monocromáticos de \mathfrak{F} para garantirmos que

$$\text{PN}_r(G, \mathfrak{F}) > k.$$

Por outro lado, se demonstrarmos que l elementos monocromáticos são suficientes para toda coloração, fica provado que

$$\text{PN}_r(G, \mathfrak{F}) \leq l.$$

É bem comum, assim como para os números de Ramsey, que a pesquisa acerca dos números de partição inicie com um limitante inferior. Uma coloração que impeça uma cobertura

por menos de k subgrafos monocromáticos é encontrada, motivando indagações sobre ela ser o pior caso. Afinal, se podemos particionar essa coloração "difícil" usando k partes, será que existe alguma outra que requeira mais que isso?

2.2 Por caminhos

Iniciaremos nosso estudo com a família \mathfrak{Path} , consistindo de todos os caminhos finitos (incluindo o K_1) junto ao caminho infinito enumerável. Abaixo, temos a definição formal desse último.

Definição 2.5. Chamamos de caminho infinito enumerável unidirecional, ou simplesmente caminho infinito, o grafo $P_{\mathbb{N}}$, onde

$$V(P_{\mathbb{N}}) = \{v_1, v_2, v_3, \dots\} \quad \text{e} \quad E(P_{\mathbb{N}}) = \{v_i v_{i+1} : i \in \mathbb{N}\}.$$

O termo “unidirecional” na Definição 2.3 é necessário para excluir o caminho “bi-infinito”, infinito em ambas as direções.¹

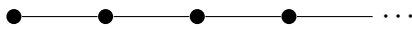


Figura 5 – Para nós, o caminho infinito é ilimitado em apenas uma direção.

Estudaremos o problema de particionamento em caminhos partindo de uma rápida visita à versão com grafos hospedeiros finitos, que possui vários resultados em aberto até hoje. Daí, seguimos para a versão infinita, analisando o comportamento do número de partição para diferentes grafos hospedeiros e para generalizações do conceito de caminho no ambiente de hipergrafos.

2.2.1 Em grafos hospedeiros finitos

Em 1967, A. Gyárfás, numa nota de rodapé de [12], seu primeiro artigo, inicia o estudo dessa família de problemas ao afirmar a proposição abaixo. O autor só forneceria uma demonstração oficial em [8], 16 anos após a publicação da nota. Contudo, não é difícil verificar a afirmação e incluímos uma versão do argumento.

¹ Veremos na Seção 2.3 que tal grafo é o correspondente infinito da ideia de ciclo.

Teorema 2.2.1 (Gerencsér e Gyárfás[12], 1967). *Para todo n natural, com $n \geq 4$, vale*

$$PN_2(K_n, \mathfrak{Path}) = 2.$$

Ademais, há uma partição com caminhos de cores distintas.

Demonstração. Para a 2-coloração do K_4 da Figura 6 abaixo, o centro da estrela azul só pode ser coberto por um caminho monocromático azul. Entretanto, o maior dos caminhos azuis cobre apenas 3 vértices, de modo que existe particionamento que necessita de ao menos dois caminhos monocromáticos. Logo $PN_2(K_n, \mathfrak{Path}) \geq 2$. Resta mostrar que dois caminhos são suficientes para toda 2-coloração.

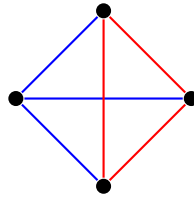


Figura 6 – Ao menos dois caminhos monocromáticos são necessários para cobrir essa coloração de K_4 .

Dado $n \geq 2$ e uma coloração de K_n em azul e vermelho, sejam B e R caminhos monocromáticos vértice-disjuntos, com B azul e R vermelho e de modo que $|V(B) \cup V(R)|$ seja máximo. Suponha, por contradição, que exista $v \notin V(B) \cup V(R)$. Chamando de b e r qualquer das extremidades de B e R respectivamente, se bv estende B ou rv estende R , estamos terminados.

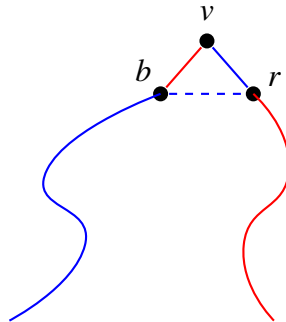


Figura 7 – Se br é azul podemos cobrir o vértice v por um caminho monocromático azul.

Caso contrário, temos que bv é vermelha e rv é azul. Suponha sem perda de generalidade

que br seja também azul (Figura 7). Nesse caso, o par $(B \cup br \cup rv, R - \{r\})$ cobre um vértice a mais que (B, R) , contradizendo sua escolha.

□

Esse teorema mostra, por exemplo, que qualquer coloração escolhida para o K_5 , o grafo representado na Figura 4, permitiria uma partição em 2 caminhos monocromáticos. E muito além disso: o resultado vale não somente para K_5 , mas para qualquer K_n , contanto que $n \geq 4$. O fato de $\text{PN}_2(K_n, \mathfrak{Path})$ ser independente de n não é nem um pouco óbvio. Ainda assim, Gyárfás chegaria a propor a generalidade do resultado com a conjectura seguinte.

Conjectura 2.2.2 (Gyárfás[13], 1989). *Dado $r \in \mathbb{N}$, existe n_0 para o qual, para todo $n > n_0$, vale*

$$\text{PN}_r(K_n, \mathfrak{Path}) = r.$$

Veremos mais tarde o que motivou o autor a propor uma conjectura que, ao menos até esse ponto do texto, parece bastante ambiciosa. Por agora, exploraremos a forma sob a qual a conjectura foi apresentada. O próximo resultado, devida a P. Erdős, A. Gyárfás e L. Pyber, garante que, fixado o número de cores como r , o melhor que podemos almejar é uma partição em r caminhos, isto é,

$$\text{PN}_r(K_n, \mathfrak{Path}) \geq r.$$

Proposição 2.2.3 (Erdős *et al.*[14], 1991). *Para todo $r \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ e coloração de K_n tal que qualquer particionamento dos vértices de K_n em caminhos monocromáticos contém caminhos em cada uma das r cores.*

Demonstração. Dado $r \in \mathbb{N}$, tome $n = \sum_{i=1}^r 2^{i-1}$. Considere a partição de $[n]$ em r conjuntos A_i , onde

$$A_i = \{j : 2^{i-1} \leq j < 2^i\},$$

para $1 \leq i \leq r$. Definimos uma coloração com base nessa partição: para cada $x, y \in [n]$, com $x < y$, a aresta xy recebe a cor correspondente à parte a qual x pertence. Formalmente, a aresta xy recebe a cor

$$\min \{i : A_i \cap \{x, y\} \neq \emptyset\}.$$

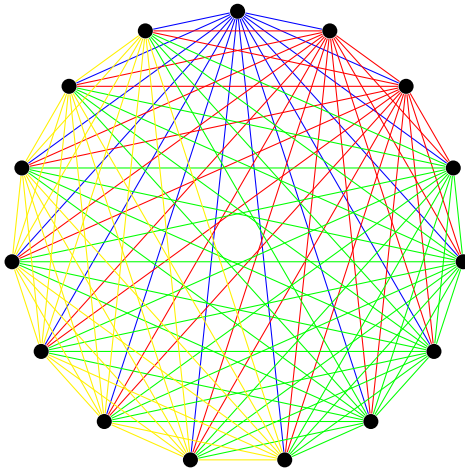


Figura 8 – Coloração especial com 4 cores.

Feito desse modo, a parte $A_1 = \{1\}$ só pode ser coberta por um caminho de cor 1, logo, a fim de cobrir todos os vértices, essa cor deve ser utilizada. Suponha por contradição que uma partição em caminhos não empregue alguma cor $1 < i \leq r$. Caminhos nas cores $1, 2, \dots, i-1$ cobrem no máximo

$$\sum_{j=1}^{i-1} 2^j - 1 = 2^i - 2 < |A_i|$$

vértices de A_i . Como as demais cores, sendo maiores que i , não possuem arestas que incidem em A_i , algum vértice em A_i não é coberto. Isso contradiz o fato de que a partição cobre todos os vértices do grafo. \square

Colorações como a usada na demonstração são particularmente “difíceis” de particionar em subgrafos monocromáticos com baixo grau máximo, como caminhos ou ciclos. Assim, elas são úteis para obter bons limitantes inferiores para o número de partição em grafos desse tipo. Vamos formalizá-la sob forma mais geral.

Definição 2.6. *Seja G um hipergrafo, r um natural e $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r = V(G)$ uma partição dos vértices de G . Definimos a r -coloração especial de G em relação a partição dada atribuindo a cada $e \in E(G)$ a cor*

$$\min \{i \in [r] : e \cap V_i \neq \emptyset\}.$$

Como um exemplo, a 2-coloração usada na primeira parte da demonstração do Teorema 2.2.1, representada na Figura 6, é especial com partes de tamanho 1 e 3.

A Proposição 2.2.6 garante que não podemos usar menos caminhos, mas outra forma natural de fortalecer a conjectura seria pedir um particionamento em subgrafos de cores distintas, como no Teorema 2.2.1. Voltando ao contexto de organização de festas, isso significa que nenhum assunto será tópico de mais de um evento. Entretanto, se exigirmos partes com cores distintas, a Conjectura 2.2.2 não vale. Demonstramos isso na proposição abaixo, estendendo de um comentário feito por Gyárfás no trabalho [8].

Proposição 2.2.4. *Para todo $r \geq 3$, existe natural l suficientemente grande tal que, tomando $n = 4l$, é possível colorir as arestas de K_n com r cores de modo que todo particionamento dos vértices de K_n em caminhos monocromáticos contém caminhos de mesma cor.*

Demonstração. O argumento consistem em transferir, por meio de um blow-up, o comportamento da 3-coloração dos vértices e arestas de K_4 representada na Figura 9 para contexto do enunciado. Note que os vértices também possuem cores! O que nos interessa nessa coloração é o fato de que, usando vértices ou arestas, não podemos particionar os 4 vértices usando exatamente uma unidade (vértice ou aresta) azul, uma vermelha e uma verde.

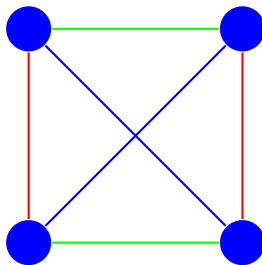


Figura 9 – Coloração base para um blow-up.

De fato, como temos 4 vértices, ao menos uma aresta precisa ser utilizada na cobertura. Se começarmos cobrindo dois vértices com uma aresta vermelha, os dois vértices restantes não podem ser cobertos pela aresta entre eles, pois ela também é vermelha. Além disso, cobri-los individualmente também não é possível, já que ambos são azuis e cada cor deve ser usada uma única vez. Basta então perceber que o caso onde iniciamos com uma aresta azul é semelhante e a cor verde é simétrica em relação à vermelha.

Para passarmos ao ambiente do enunciado, suponha, inicialmente, $r = 3$ e $l > 1$. Faça o blow-up de cada vértice no K_4 em uma cópia de K_l . No total, o processo resulta numa cópia de K_n . Um exemplo do efeito pode ser visto na Figura 10.

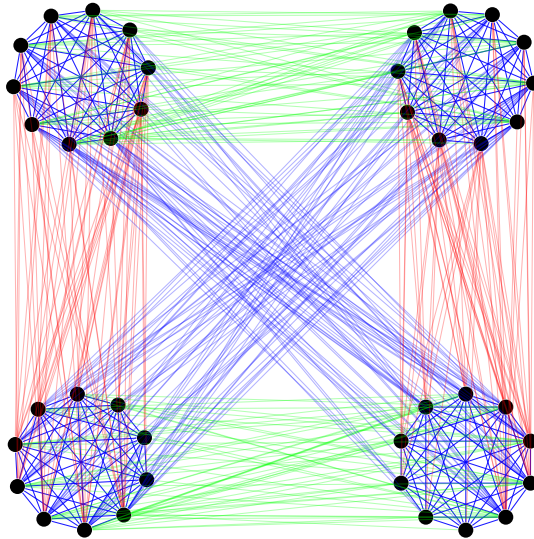


Figura 10 – Blow-up do grafo na Figura 9 com $l = 10$.

Com esse arranjo, particionamentos em caminhos monocromáticos se comportam de forma análoga a particionamentos em vértices e arestas na configuração inicial. Um caminho monocromático maximal cobre apenas uma cópia de K_l , por meio das arestas internas, ou duas, por meio das arestas entre essas cópias. Disso segue o resultado para $r = 3$.

Para $r \geq 4$, usamos o fato de que colorações em aresta não são necessariamente sobrejetivas, de modo que a 3-coloração usada pode ser vista como uma r -coloração. Basta, então, garantir que l seja grande o suficiente para que caminhos com um único vértice nas cores excluídas não sejam relevantes. É suficiente tomar $l \geq r - 1$, por exemplo. \square

De fato, as proposições 2.2.6 e 2.2.4 mostram que não podemos pedir mais da Conjectura 2.2.2.

A demonstração simples do Teorema 2.2.1 esconde o quão desafiadora a conjectura do Gyárfás pode ser. O próprio Erdős atacou o caso $r = 3$. Sem sucesso, segundo [15], o matemático teria oferecido algo entre 25 e 50 dólares americanos como recompensa por uma demonstração para esse caso específico. Erdős ofereceu prêmios do tipo por soluções de vários desafios, chamados *Problemas de Erdős*, alinhando as quantias à seu julgamento sobre a dificuldade do problema. Nem

sempre esse julgamento era certo e o próprio autor mudava frequentemente de ideia quanto ao “valor” do desafio. Por exemplo, pela famosa Conjectura de Collatz, Erdős ofereceu “somente” \$500. Em [16], R. Graham estima que existam alguns milhares de problemas do tipo ainda sem solução conhecida. No caso de sua aposta sobre a Conjectura 2.2.2, o resultado foi recentemente obtido por A. Pokrovskiy.

Teorema 2.2.5 (Pokrovskiy[17], 2014). *Para todo $n \geq 4$, vale*

$$\text{PN}_3(K_n, \mathfrak{A}th) = 3.$$

Além disso, o caso $r = 4$ segue em aberto.

Problema 2.1. *Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ para o qual, para todo $n > n_0$, a igualdade*

$$\text{PN}_4(K_n, \mathfrak{A}th) = 4$$

é verdadeira?

O melhor limitante superior conhecido para $\text{PN}_4(K_n, \mathfrak{A}th)$ é $100 \cdot 4 \cdot \log(4) = 800$, valor vindo de um limitante genérico que apresentaremos na Seção 2.3. Existem muitos outros teoremas sobre o caso finito e recomendamos novamente as leituras [8] e [9] ao leitor interessado nessa versão.

2.2.2 Em grafos hospedeiros infinitos

Agora nos voltamos à versão infinita do problema. Primeiramente, precisamos indicar em qual grafo hospedeiro infinito estamos interessados.

Definição 2.7. *Representamos por $K_{\mathbb{N}}$ o grafo completo (enumerável) sobre infinitos vértices. Isto é,*

$$V(K_{\mathbb{N}}) = \{v_i : i \in \mathbb{N}\} \quad e \quad E(K_{\mathbb{N}}) = \binom{V(K_{\mathbb{N}})}{2}.$$

Devemos esperar que os resultados desta subseção sejam um pouco mais enxutos que seus correspondentes na anterior, pois um único grafo hospedeiro é considerado. Em contrapartida, os resultados da Subseção 2.2.1 são sobre famílias inteiras de grafos hospedeiros.

O limitante inferior para a versão infinita também vem da r -coloração especial.

Proposição 2.2.6. *Para todo $r \in \mathbb{N}$, vale*

$$\text{PN}_r(K_{\mathbb{N}}, \mathfrak{Path}) \geq r.$$

Demonstração. Basta tomar a r -coloração com uma partição $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r = V(K_{\mathbb{N}})$, com $|V_i| = 2^i - 1$, para $1 \leq i < r$, e todos os (infinitos) demais vértices na parte V_r . \square

O resultado inaugural dessa versão do problema foi obtido por Erdős em 1978. Ele diz que o limitante acima é justo para $r = 2$, levando a um enunciado diretamente análogo ao Teorema 2.2.1.

Teorema 2.2.7 (Erdős [18]). *Vale a igualdade*

$$\text{PN}_2(K_{\mathbb{N}}, \mathfrak{Path}) = 2.$$

Além disso é possível obter o particionamento com caminhos de cores distintas.

O argumento que utilizamos para demonstrar o caso finito não se aplica diretamente a esse teorema. Como estamos lidando com uma quantidade ilimitada de vértices, nada impede que a partição que cobre o máximo de vértices deixe infinitos elementos de fora. Se esse for o caso, adicionar um vértice a essa cobertura máxima não leva a uma contradição: as quantidades de vértices cobertos e de não cobertos não mudam.

Curiosamente, segundo [19], Erdős não chegou a publicar o Teorema 2.2.7, mas comunicou o argumento a R. Rado², que generalizou a estratégia para obter, em [18], o Teorema 2.2.8 abaixo. O enunciado é um tanto técnico e tentaremos esclarecer seu significado logo em seguida. Vale notar também que só nos interessa o caso onde a quantidade de vértices é enumerável e a de cores, finita.

Teorema 2.2.8 (Rado[18], 1978). *Dado um conjunto infinito V e $A \subseteq V$, com $|A| \leq |\mathbb{N}| \leq |V|$, seja $\Gamma = (V, E)$ um grafo direcionado tal que:*

- (i) *todos os arcos partem de vértices em A , isto é, $E \subseteq A \times V$;*
- (ii) *para todo $a \in A$, temos $|\{b \in V : (a, b) \notin E\}| < |V|$.*

Suponha que os arcos de Γ recebam cores de um conjunto I . Então, existe $J \subseteq I$ e uma família de caminhos $\{P^j \subseteq \Gamma : j \in J\}$ tal que:

² O mesmo do Teorema de Erdős-Ko-Rado.

R1. os caminhos nessa família são vértice-disjuntos;

R2. a união dos caminhos nessa família cobrem todos os vértices em A ;

e, para todo $j \in J$.

R3. o caminho P^j é monocromático na cor j ;

R4. o caminho P^j possui uma quantidade ímpar de vértices ou é infinito;

R5. os arcos de P^j alternam de sentido, iniciando por um arco no sentido do caminho. Isto é, seguem o padrão

$$\longrightarrow \longleftarrow \longrightarrow \longleftarrow \longrightarrow \longleftarrow \dots$$

A hipótese (ii) significa que os vértices de A têm grau “alto”: cada $a \in A$ é adjacente a todos os vértices de Γ , exceto por uma quantidade ínfima em relação a $|V|$. Por exemplo, se V é enumerável, apenas uma quantidade finita de vértices não é adjacente a cada a . Já as afirmações (i) e *R5*, juntas, garantem que os caminhos não possuem arcos com ambas as extremidades em $V \setminus A$; sempre que o caminho sai de A ele deve voltar para A no passo seguinte. Por fim, (i) e *R4* indicam que, quando finito, o caminho devem começar e terminar em A (mas pode percorrer trechos com uma quantidade par de arestas dentro de A).

A escrita empregada no trabalho [18] reflete bem as mais de quatro décadas passadas desde sua publicação, podendo parecer obscura para um leitor contemporâneo (o próprio teorema não é enunciado na linguagem de grafos, como fizemos). Com isso em mente, e não encontrando trabalhos que prestem esse serviço, decidimos não só reescrever o enunciado, feito acima, mas trazer a linguagem e tipografia moderna para a demonstração original.

Demonstração (do Teorema 2.2.8). De início, o conjunto I tem poucas restrições, possibilitando mesmo uma quantidade infinita não-enumerável de cores! Entretanto, se a quantidade de cores for grande, i.e., se $|I| \geq |A|$, podemos satisfazer o teorema cobrindo A com caminhos unitários de cores distintas. Com um único vértice, um caminho unitário satisfaz *R4* e cumpre *R3* e *R5* por vacuidade, de onde o resultado segue. Assim, podemos assumir

$$|I| < |A|.$$

Dado $u \in A$ e $i \in I$, denotaremos por $N^+(u)$ o conjunto dos vértices que são o final de um arco partindo de u , e por $N_i^+(u)$ os elementos de $N^+(u)$ para os quais o arco em questão tem cor

i. Formalmente, para $i \in I$,

$$N_i^+(u) := \{v \in V : (u, v) \text{ tem cor } i\}$$

e

$$N^+(u) := \{v \in V : (u, v) \in E\}.$$

Primeiramente, fixe uma ordem em A de modo a termos $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. Isso é possível, pois A é enumerável. Ademais, suponha pelo restante da demonstração que o grafo vazio seja um caminho, sendo monocromático em qualquer cor por vacuidade.

Construiremos, por indução em n , conjuntos de caminhos

$$\mathcal{P}_n = \{P_n^j \subseteq \Gamma : j \in I\}$$

satisfazendo as seguintes propriedades para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

P1. os caminhos em \mathcal{P}_n são dois a dois vértice-disjuntos;

P2. os vértices a_1, a_2, \dots, a_n são cobertos por \mathcal{P}_n ;

e para $j \in I$,

P3. o caminho P_n^j é monocromático na cor j ;

P4. se P_n^j não é vazio, então contém uma quantidade ímpar ou infinita de vértices;

P5. se P_n^j não é vazio, então possui padrão de arcos como em R5;

P6. denotando por p^j o último vértice de P_n^j , vale

$$\left| V \cap \bigcap_{j \in J} N_j^+(p^j) \right| = |V|.$$

Por brevidade, faremos

$$D := V \cap \bigcap_{j \in J} N_j^+(p^j).$$

Note que um conjunto de caminhos com essas propriedades satisfaz o enunciado a não ser pelo fato de que não necessariamente todos os vértices de A são cobertos.

Podemos iniciar o processo tomando P_0^j como o caminho vazio monocromático na cor j , para cada $j \in I$. Dito isso, dado $n \geq 1$, suponha que \mathcal{P}_{n-1} satisfaça P1-6. Se \mathcal{P}_{n-1} cobre a_n , tome $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{n-1}$. Caso contrário, construiremos \mathcal{P}_n estendendo algum caminho de \mathcal{P}_{n-1} de

modo que a_n seja coberto e todas as demais propriedades sejam preservadas. Com esse propósito, considerando o conjunto de caminhos \mathcal{P}_{n-1} , começamos mostrando que existe $i \in I$ para o qual

$$|D \cap N_i^+(a_n)| = |V|. \quad (2.1)$$

Suponha por contradição que esse não seja o caso. Isto é, que para todo $i \in I$, tenhamos

$$|D \cap N_i^+(a_n)| < |V|.$$

Como assumimos uma quantidade de cores finita e V é infinito, temos

$$\begin{aligned} |D \cap N^+(a_n)| &= \left| D \cap \bigcup_{i \in I} N_i^+(a_n) \right| \\ &\leq \left| \bigcup_{i \in I} D \cap N_i^+(a_n) \right| \\ &\leq \sum_{i \in I} |D \cap N_i^+(a_n)| \\ &< |V|. \end{aligned}$$

Além disso, a hipótese (ii) implica $|V \setminus N^+(a_n)| < |V|$. Entretanto, isso leva a

$$\begin{aligned} |V| &= |D| \\ &= |D \cap N^+(a_n)| + |D \setminus N^+(a_n)| \\ &\leq |D \cap N^+(a_n)| + |V \setminus N^+(a_n)| \\ &< |V|, \end{aligned}$$

onde a primeira igualdade decorre da propriedade (P6). Mas isso é uma contradição.

Assim, tome $i \in I$ tal que a Equação 2.1 seja válida. Se P_{n-1}^i é vazio, basta adicionar a_n ao caminho e fazer $P_n^j = P_{n-1}^j$ para as demais cores. Por outro lado, se P_{n-1}^i contém vértices, como a quantidade de vértices em cada P_{n-1}^j e de cores são finitas, pela escolha de i e pelo Princípio da Casa dos Pombos Infinito, o conjunto

$$D \cap N_i^+(a_n)$$

contém infinitos vértices não cobertos por nenhum caminho de \mathcal{P}_{n-1} . Seja v um deles. É suficiente, então, tomar P_n^i como a extensão do caminho P_{n-1}^i pelos arcos (p^i, v) e (a_n, v) e fazer $P_n^j = P_{n-1}^j$ para as demais cores.

Por fim, para $j \in I$, tome a união (limite) da família de caminhos $\{P_n^j\}_{n \in \mathbb{N}}$. Se descartarmos os valores de j para os quais o limite é vazio, obtemos J como no enunciado. De fato, dado $n \in \mathbb{N}$, existe $l \in I$, para o qual $a_n \in A$ é coberto por P_n^l . Consequentemente, como o limite da l -ésima família de caminhos é uma extensão de P_n^l , também cobre a_n . As demais propriedades desejadas podem ser demonstradas por contraexemplo minimal escolhendo-se $l \in \mathbb{N}$ adequado e n suficientemente grande de forma a encontrar uma contradição baseada no fato de que o limite da l -ésima família de caminhos é uma extensão de P_n^l , que satisfaz P1-5. \square

O Teorema 2.2.7 assim como uma generalização dele para r cores podem ser obtidos a partir do Teorema 2.2.8, implicando que o limitante da Proposição 2.2.6 é justo, levando ao belíssimo resultado a seguir.

Teorema 2.2.9 (Rado's Path Decomposition Theorem (RPDT)). *Para todo natural r , vale*

$$\text{PN}_r(K_{\mathbb{N}}, \mathfrak{Path}) = r.$$

Ademais, há uma partição em que todos os caminhos não vazios possuem cores distintas.

Demonstração. Dada uma coloração de $K_{\mathbb{N}}$ com r cores, converta cada aresta em dois arcos (de sentidos opostos) com a mesma cor da aresta e aplique o Teorema de Rado com $A = V = \mathbb{N}$ e $|I| = r$. \square

Esse enunciado traz algo que provamos impossível para o caso finito com a Proposição 2.2.4: ele assegura a existência de uma partição com r caminhos monocromáticos de cores distintas. A demonstração da Proposição 2.2.4 falha para o caso infinito porque, com quatro partes infinitas enumeráveis, podemos usar “um terço” da primeira parte, o que ainda é infinito, para cobrir a segunda parte, outro terço para cobrir a terceira e outro para a quarta.

O RPDT é o motivo de Gyárfás ter posto a Conjectura 2.2.2 sob aquela forma. Como o próprio autor comenta no artigo [13], esse é um caso atípico de problema de coloração em arestas, pois se busca estender um resultado infinito para o caso limitado. Esse teorema inspirou intensa pesquisa nas últimas décadas, à qual dedicaremos o restante desse capítulo.

Antes de vermos outros resultados, achamos didático também obter o enunciado sem lançar mão do Teorema 2.2.8. Faremos uma demonstração utilizando ultrafiltros não-principais por acreditarmos que a comparação com a demonstração do Teorema 2.2.8 é uma boa oportunidade

de entender melhor o uso desse recurso em problemas extremais. Nosso argumento é baseada nas ideias do trabalho [10].

Demonstração (do RPDT). Supondo sem perda da generalidade que $K_{\mathbb{N}}$ tenha os naturais por vértices. Seja $c: \binom{\mathbb{N}}{2} \rightarrow [r]$ uma coloração de $K_{\mathbb{N}}$ e \mathcal{U} um ultrafiltro não-principal sobre \mathbb{N} . Dado $X \subseteq \mathbb{N}$, diremos que X é *grande* se e somente se $X \in \mathcal{U}$.

Para todo $x \in \mathbb{N}$, temos que os conjuntos $\{x\}, N_1(x), N_2(x), \dots, N_r(x)$ formam uma partição de \mathbb{N} . Consequentemente, como \mathcal{U} não inclui conjuntos finitos, a Proposição 1.2.2 implica a existência de um único $j \in [r]$ tal que $N_j(x)$ é grande. Atribua a cor j ao natural x .

Pelo fecho por interseções finitas, dados vértices $x, y \in \mathbb{N}$ com uma mesma cor j , temos que $N_j(x) \cap N_j(y)$ é grande e, portanto, infinito. Ademais, para todo $z \in N_j(x) \cap N_j(y)$ temos

$$c(xz) = c(zy) = j.$$

Considere pelo restante da demonstração que o grafo vazio é um caminho. De forma semelhante ao que fizemos na demonstração do Teorema 2.2.8, construiremos, por indução em n , conjuntos de caminhos

$$\mathcal{P}_n = \{P_n^j \subseteq K_{\mathbb{N}} : j \in [r]\}$$

satisfazendo algumas propriedades para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

P1. os caminhos em \mathcal{P}_n são dois a dois vértice-disjuntos;

P2. os naturais $1, 2, \dots, n$ são cobertos por \mathcal{P}_n ;

e para $j \in [r]$,

P3. o caminho P_n^j é monocromático na cor j ;

P4. todos os vértices de P_n^j possuem cor j .

Podemos começar com todos os caminhos vazios, pois todas as propriedades seguem por vacuidade. A partir disso, argumentamos por indução.

Suponha que \mathcal{P}_{n-1} satisfaz as propriedades P1-4. Se \mathcal{P}_{n-1} já cobre n , é suficiente fazer $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{n-1}$. Se esse não for o caso, veremos como estender um caminho de \mathcal{P}_{n-1} de modo a absorver n .

Seja i a cor associada ao natural n . Se P_{n-1}^i é vazio, basta tomar P_n^i como o caminho contendo apenas n . Caso contrário, seja t o último vértice de P_{n-1}^i . Como \mathcal{P}_{n-1} é um conjunto

finito de caminhos finitos, existe $s \in N_i(n) \cap N_i(t)$ não coberto por \mathcal{P}_{n-1} . Basta, então, estender P_{n-1}^i pelas arestas ts e sn e definir P_n^i como o resultado da extensão.

Para finalizar, como na demonstração do Teorema 2.2.8, para cada $j \in [r]$, tome o limite dos caminhos P_n^j com n variando sobre \mathbb{N} e descarte eventuais caminhos vazios. \square

O leitor que tenha tido contato com a demonstração do Teorema de Ramsey pode ter achado o argumento acima familiar. De fato, é simples adaptar a construção feita para obter uma (única) clique monocromática infinita. Em demonstrações mais usuais, a noção de “grande” é a de infinito, mas isso permite que a interseção de conjuntos grandes seja “pequena” (finita). Já se definirmos “grande” com o auxílio de um ultrafiltro não-principal, isso nunca acontece. A técnica também nos ajuda a “pôr os pombos nas casas certas”, nos guiando na escolha das vizinhanças boas pois apenas uma delas é grande. Isso remove a necessidade de algumas das preocupações tomadas, por exemplo, na demonstração do Teorema 2.2.8 e na prova clássica do Teorema de Ramsey para grafos infinitos.

Seguimos nosso estudo nos voltando a resultados semelhantes ao RPDT. Veremos agora duas alternativas interessantes para grafo hospedeiro. Começamos com a versão infinita do grafo bipartido completo.

Definição 2.8. Denotamos por $K_{\mathbb{N},\mathbb{N}}$ o grafo bipartido completo com partes infinitas enumeráveis. Formalmente, $K_{\mathbb{N},\mathbb{N}}$ é o grafo que tem por vértices os naturais e dois vértices são adjacentes se, e somente se, possuem paridade distinta.

Desse modo, os naturais pares formam uma das partes de $K_{\mathbb{N},\mathbb{N}}$ e os ímpares, a outra. Não há mal, porém, em assumir que as partes compreendem cópias distintas de \mathbb{N} .

A coloração especial pode facilmente ser adaptada para $K_{\mathbb{N},\mathbb{N}}$, mostrando, para $r \in \mathbb{N}$, que

$$\text{PN}_r(K_{\mathbb{N},\mathbb{N}}, \mathfrak{Path}) \geq r.$$

Entretanto, se explorarmos a estrutura do grafo, podemos ir além.

Proposição 2.2.10. Para todo r natural, vale

$$\text{PN}_r(K_{\mathbb{N},\mathbb{N}}, \mathfrak{Path}) \geq 2r - 1.$$

Demonstração. É suficiente encontrar uma r -coloração para a qual todo particionamento em caminhos monocromáticos contém ao menos $2r - 1$ caminhos.

Como o resultado é trivial para $r = 1$, suponha $r \geq 2$. Seguiremos como na demonstração da Proposição 2.2.3, transferindo o comportamento de uma coloração finita para o grafo hospedeiro por meio de um blow-up.

Particione as arestas do grafo $K_{r,r}$ em r emparelhamentos perfeitos, isto é, conjuntos de r arestas disjuntas cobrindo todos os vértices de $K_{r,r}$. Considere uma coloração de $K_{r,r}$ onde as arestas do l -ésimo desses emparelhamentos recebem cor l .

Sejam A e B as partes de $K_{\mathbb{N},\mathbb{N}}$. Considere uma partição de A em conjuntos A_i , para $i \in [r]$, tais que A_1, A_2, \dots, A_{r-1} são finitos e A_r é infinito. Considere também uma partição de B em conjuntos B_j , para $j \in [r]$, mas com todos os B_j 's infinitos.

Faça um blow-up da coloração obtida para $K_{r,r}$ substituindo os r vértices de uma das partes pelos conjuntos A_1, \dots, A_r e os da outra pelos conjuntos B_1, \dots, B_r e faça todas as arestas entre A_i e B_j , para todo i, j , da mesma cor da aresta correspondente em $K_{r,r}$. Em contraste com a demonstração da Proposição 2.2.3, não existem arestas internas aos conjuntos A_i e B_j para nos preocuparmos. Um exemplo do efeito desejado pode ser visto na Figura 11.

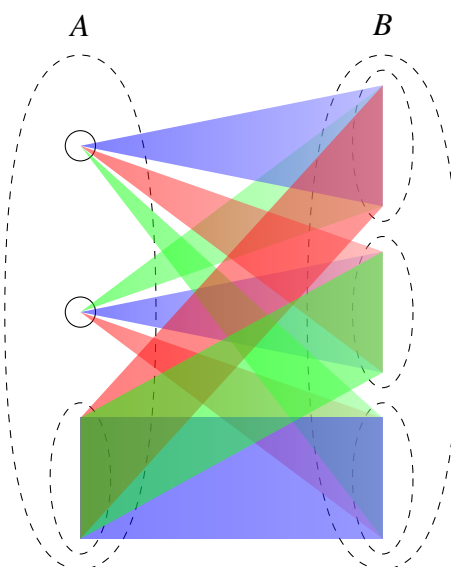


Figura 11 – Exemplo do blow-up descrito, para $r = 3$. Conjuntos infinitos estão indicados por bordas tracejadas.

Note que, na coloração obtida, todo caminho monocromático intersecta no máximo um

dos conjuntos A_i e um dos conjuntos B_j , alternando entre eles. Consequentemente, se um desses caminhos intersecta uma das partes finitas, então esse caminho é finito.

Considere um particionamento em caminhos monocromáticos qualquer da coloração obtida. Para $x \in [r-1]$, o conjunto finito A_x deve ser coberto por, no mínimo, um caminho, necessariamente finito e alternante entre vértices de A_x e de algum B_j , com $j \in [r]$ fixo. Logo, é necessária a existência de ao menos $r-1$ caminhos finitos no particionamento tomado.

Além disso, a união da quantidade finita de caminhos finitos que cobre A_1, \dots, A_{r-1} não inclui todos os vértices de nenhum dos conjuntos ilimitados B_j . Consequentemente, para $y \in [r]$, o conjunto infinito B_y deve ser coberto por, no mínimo, um caminho, alternante entre vértices de B_y e, especificamente, A_r , pois esse é a única parte infinita de A . Decorre disso a existência de mais r caminhos no particionamento considerado. No total, mostramos que ao menos $2r-1$ caminhos são necessários. \square

Na referência [10], M. Elekes, D. Soukup, L. Soukup e Z. Szentmiklóssy atacam problemas de partição estudando conjuntos de vértices para os quais quaisquer dois elementos do conjunto são conectados por infinitos caminhos monocromáticos. Essa abordagem se mostrou bastante frutífera e veremos vários outros resultados obtidos nesse trabalho. Inclusive, os autores comentam que a teoria desenvolvida pode demonstrar que a Proposição 2.2.10 é justa, mas não incluem uma prova explícita em [10]. Fornecemos aqui uma demonstração independente da teoria desenvolvida em [10]. Assim, fica determinado exatamente o comportamento do problema quando o grafo hospedeiro é $K_{\mathbb{N}, \mathbb{N}}$.

Teorema 2.2.11 (Elekes *et al.*[10], 2017). *Para todo r natural, vale*

$$\text{PN}_r(K_{\mathbb{N}, \mathbb{N}}, \mathfrak{Path}) = 2r - 1.$$

Demonstração. À luz da Proposição 2.2.10, basta mostrar que toda r -coloração pode ser particionada em $2r-1$ caminhos.

Sejam A e B as partes de $K_{\mathbb{N}, \mathbb{N}}$. Tome sobre A e B ultrafiltros não-principais \mathcal{U}_A e \mathcal{U}_B , respectivamente. Diremos que um subconjunto de A é grande se e somente se pertence a \mathcal{U}_A . Analogamente, um subconjunto de B é grande se e somente se pertence a \mathcal{U}_B .

Dado $r \in \mathbb{N}$, se $r = 1$, não há o que demonstrar. Supondo $r \geq 2$, considere uma r -coloração qualquer de $K_{\mathbb{N}, \mathbb{N}}$. Para cada $a \in A$, existe um único $i \in [r]$ tal que $N_i(a)$ é grande (em

relação a \mathcal{U}_B). Atribua cor i ao vértice a . Essa coloração de vértices particiona A em conjuntos

$$A_i = \{a \in A : a \text{ tem cor } i\}.$$

Usando coloração análoga, particione B em conjuntos

$$B_j = \{b \in B : b \text{ tem cor } j\}.$$

Finalmente, fixe uma ordem para os elementos de cada um desses conjuntos e suponha sem perda da generalidade que A_r e B_r são grandes.

Trataremos o conjunto A_r de forma diferenciada. Para simplificar a referência aos demais conjuntos, ordene-os e, para $k \in [2r - 1]$, defina C_k como o k -ésimo conjunto na ordem tomada.

Seguiremos no espírito das últimas demonstrações, construindo iterativamente caminhos com propriedades que nos ajudem a demonstrar o teorema. Por um lado, hipóteses mais fortes sobre os caminhos facilitam a conclusão do enunciado. Por outro, podem dificultar o caminhar da indução. Buscamos o equilíbrio mantendo em mente o fato de que A_r e B_r são grandes.

Determinaremos, por indução em n , conjuntos de caminhos

$$\mathcal{P}_n = \left\{ P_n^k \subseteq K_{\mathbb{N}, \mathbb{N}} : k \in [2r - 1] \right\}$$

satisfazendo algumas propriedades para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

- P1. os caminhos em \mathcal{P}_n são dois a dois vértice-disjuntos;
 - P2. os n primeiros vértices de A_r e de cada C_k são cobertos por \mathcal{P}_n ;
- e para $k \in [2r - 1]$,
- P3. o último vértice de P_n^k pertence a C_k ;
 - P4. o caminho P_n^k é monocromático na cor de seu último vértice;
 - P5. o caminho P_{n+1}^k é uma extensão de P_n^k .

Por conveniência, considere novamente o grafo vazio como um caminho. Desse modo, fazer $P_0^k = (\emptyset, \emptyset)$ para todo k define bem \mathcal{P}_0 , pois P1-5 seguem por vacuidade.

Dado $n \in \mathbb{N}$, suponha que \mathcal{P}_{n-1} satisfaz P1-5. Em contraste com o que fizemos nas demonstrações anteriores, definiremos \mathcal{P}_n estendendo, potencialmente, todos os caminhos em cada passo da indução. Para evitar violar P1, trataremos os caminhos um a um, em ordem. Efetivamente, faremos outra indução (finita), em k , para cada passo da indução (infinita) em n .

Dado $k \in [2r - 1]$, suponha que os caminhos P_n^1, \dots, P_n^{k-1} tenham sido definidos. Estenderemos os caminhos de modo semelhante ao que fizemos nas últimas demonstrações. Entretanto, usaremos o caminho cobrindo B_r em um passo adicional a fim de cobrir também A_r . Assim, há dois casos.

Caso 1. $C_k \neq B_r$. Seja x o n -ésimo vértice em C_k . Se algum dos caminhos

$$P_n^1, \dots, P_n^{k-1}, P_{n-1}^k, \dots, P_{n-1}^{2r-1}$$

cobre x , tome $P_n^k = P_{n-1}^k$. Caso contrário, se P_{n-1}^k é vazio, tome $P_n^k = (x, \emptyset)$. Por outro lado, se P_{n-1}^k contém vértices, seja p o último deles. Por P3, os vértices x e p tem uma mesma cor i . Assim, devemos ter $N_i(x)$ e $N_i(p)$ grandes. Conseqüentemente, a interseção desses conjuntos também deve ser grande e, portanto, infinita. Como todos os caminhos considerados são finitos, existe $v \in N_i(x) \cap N_i(p)$ não coberto até esse ponto das induções. Ademais, por P4, o caminho P_{n-1}^k é monocromático na cor i . Logo, é suficiente definir P_n^k como a extensão de P_{n-1}^k pelas arestas pv e vx .

Caso 2. $C_k = B_r$. Se necessário, estenda P_{n-1}^k como no caso 1 de modo a incluir o n -ésimo vértice em B_r . Seja P o caminho obtido. Usaremos o fato de que B_r é grande para cobrir os primeiros vértices em A_r , satisfazendo P2.

Seja y o n -ésimo vértice em A_r . Se y pertence a algum caminho, não há nada a fazer. Caso contrário, como B_r é grande e y tem cor r , o conjunto $B_r \cap N_r(y)$ é infinito. Tome vértices ainda não cobertos u_1 e u_2 nessa interseção. Estenda P por meio do método usado no caso 1 de modo a incluir u_1 e, em seguida, adicione as arestas u_1y e yu_2 . Definir P_n^k como o resultado dessas extensões conclui a indução.

Para encerrar a demonstração, basta tomar os limites dos caminhos P_n^k e descartar quaisquer resultados vazios. \square

Como mais de r caminhos são necessários, não é possível uma partição em caminhos de cores distintas. Ademais, pensando no caso finito, K_{2n} possui aproximadamente o dobro da quantidade de arestas de $K_{n,n}$. Algo semelhante ocorre na relação entre $K_{\mathbb{N}}$ e $K_{\mathbb{N},\mathbb{N}}$, mas a quantidade ilimitada de arestas requer uma descrição em termos de densidade (conceito que estudaremos no Capítulo 3) em vez de cardinalidade. Mesmo sem a definição formal, nossa intuição pode fazer parecer com que o valor obtido no Teorema 2.2.11 não decorre da estrutura de $K_{\mathbb{N},\mathbb{N}}$, mas de sua menor “quantidade” de arestas. Veremos que esse não é o caso estudando o comportamento de uma

família de grafos hospedeiros com densidade de arestas facilmente controlável. Há um candidato perfeito para isso.

Definição 2.9. *Seja $p \in (0, 1)$. O grafo aleatório infinito $G(\mathbb{N}, p)$ é o grafo com \mathbb{N} por vértices e em que cada aresta ocorre de modo independente com probabilidade p .*

Convenientemente, dado $p \in (0, 1)$, a densidade de arestas de $G(\mathbb{N}, p)$ é p . Intuitivamente, isso significa que, embora para valores de p no intervalo aberto $(0, 1)$ o número esperado de arestas de $G(\mathbb{N}, p)$ seja sempre infinito, essas arestas se tornam menos ou mais esparsas conforme p cresce ou diminui. Ainda no trabalho [10], os autores fornecem um enunciado semelhante ao RPDT para essa família de grafos.

Teorema 2.2.12 (Elekes *et al.*[10], 2017). *Para todo natural r e $p \in (0, 1)$, vale*

$$\text{PN}_r(G(\mathbb{N}, p), \mathfrak{Path}) \leq r.$$

Ademais, existe uma tal partição em caminhos de cores distintas.

Se compararmos essa afirmação com o RPDT, vemos, em particular, que não importa quão esparsas as arestas de um grafo em \mathbb{N} sejam. Por si, essa propriedade não dificulta o particionamento em caminhos monocromáticos. Mesmo a existência de uma partição em caminhos de cores distintas persiste. A dificuldade em particionar um $K_{\mathbb{N}, \mathbb{N}}$ colorido vem de sua estrutura, não apenas da densidade.

Tendo visto variações do problema para dois outros grafos hospedeiros, passamos agora a estudar uma generalização do problema de particionamento em caminhos sobre $K_{\mathbb{N}}$. Nos basearemos em uma extensão da família \mathfrak{Path} , a partir da próxima definição.

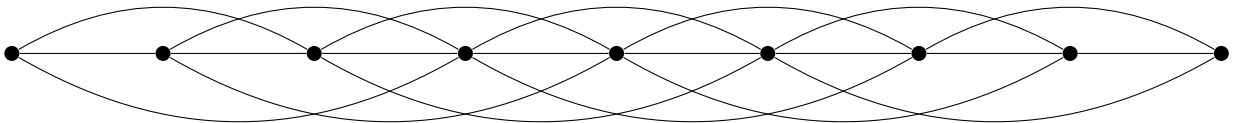


Figura 12 – O cubo de um caminho.

Definição 2.10. *Dado $k \in \mathbb{N}$ e um caminho P com sequência de vértices (p_1, p_2, \dots, p_l) , dizemos que a k -ésima potência de P , denotada por $P^{(k)}$, é o grafo nos mesmos vértices adicionado das*

arestas entre todos os pares de vértices que estão à distância no máximo k . Formalmente,

$$P^{(k)} := \{ V(P), \{ p_i p_j : 1 \leq i < j \leq l, (j-i) \leq k \} \}.$$

Empregaremos a nomenclatura usual da operação de potenciação, i.e., nos referimos à segundo potência de um caminho como seu *quadrado* e à terceira como *cubo*.

Perceba que, para todo caminho P , vale $P^{(1)} = P$. Ademais, considerando o caminho unitário K_1 , temos $(K_1)^{(k)} = K_1$ para todo k natural.

À luz da definição, podemos nos perguntar se é possível obter resultado semelhante ao RPDT para potências de caminhos. A princípio, dado $k \geq 2$, pode existir alguma coloração de $K_{\mathbb{N}}$ para a qual não possamos particionar os naturais em uma quantidade finita de k -ésimas potências de caminhos. O teorema seguinte, outro resultado do artigo [10], assegura que esse não é o caso se nos permitirmos negligenciar uma quantidade finita de vértices. Em essência, o enunciado é obtido por meio de argumento semelhante ao que utilizamos na demonstração do Teorema 2.2.11, construindo vários caminhos simultaneamente. Entretanto, é difícil seguir a indução para as partes finitas e elas são deixadas de lado.

Teorema 2.2.13 (Elekes *et al.*[10], 2017). *Para todos $r, k \in \mathbb{N}$, vale*

$$\text{PN}_r(K_{\mathbb{N}}, k\text{-th Power of Path}) \leq^* r^{(k-1)r+1}.$$

Recorde que o “*” na desigualdade sinaliza que uma quantidade finita de vértices pode ficar fora das “partições”. Isso introduz uma sutileza ao resultado. Como a ocorrência de exatamente um caminho em cada cor está fora de questão e consideramos vértices isolados como potências de caminhos monocromáticos, podemos ter a impressão de que é possível fortalecer o resultado cobrindo a quantidade finita de vértices remanescentes usando caminhos unitários. Assim, obteríamos, para toda coloração r -coloração, uma partição em uma quantidade finita de caminhos. Entretanto, essa quantidade específica pode depender da coloração. Isto é, existe a possibilidade de que para cada $l \in \mathbb{N}$ haja uma coloração de $K_{\mathbb{N}}$ onde ao menos l vértices fiquem de fora da cobertura. Isso impediria um limitante superior dependendo apenas de k e r . Ainda não se sabe se uma família de colorações com esse comportamento existe, levando ao problema abaixo, proposto em [10].

Problema 2.2. *Dados $k, r \in \mathbb{N}$, existe $M(k, r) \in \mathbb{N}$ para o qual a expressão*

$$\text{PN}_r(K_{\mathbb{N}}, k\text{-th Power of Path}) \leq M$$

é verdadeira?

Um resultado finito relacionado, devido a A. Pokrovskiy, garante que dados $k, n \in \mathbb{N}$, toda 2-coloração de K_n pode ser particionada em k caminhos monocromáticos na primeira cor e uma k -ésima potência de caminho na segunda. Apoiados nesse fato, os autores de [10] conseguem controlar o comportamento das partes finitas e determinam o valor exato da questão acima quando $r = k = 2$.

Teorema 2.2.14 (Elekes *et al.*[10], 2017). *Vale a igualdade*

$$\text{PN}_2(K_{\mathbb{N}}, \mathfrak{S}\text{quare of Path}) = 4.$$

Para outros valores não-triviais de k e r o problema 2.2 segue em aberto.

Agora nosso estudo das extensões do RPDT envereda para a generalização do grafo hospedeiro. Uma forma natural de fazer isso é usar o fato de que grafos simples são um caso particular de hipergrafo uniforme. Assim, podemos generalizar $K_{\mathbb{N}}$ como abaixo.

Definição 2.11. Dado $k \in \mathbb{N}$, denotamos por $K_{\mathbb{N}}^k$ o hipergrafo k -uniforme completo com os naturais por vértices. Isto é,

$$V(K_{\mathbb{N}}^k) = \{v_i : i \in \mathbb{N}\} \quad e \quad E(K_{\mathbb{N}}^k) = \binom{\mathbb{N}}{k}.$$

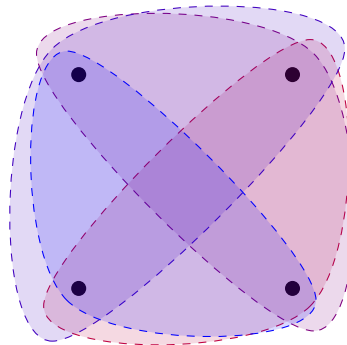


Figura 13 – Representação de um K_4^3 .

Temos $K_{\mathbb{N}}^2 = K_{\mathbb{N}}$. Ademais, dado um hipergrafo k -uniforme colorido, repare que, qualquer conjunto com menos de k vértices é aceito como um caminho monocromático em qualquer

cor. Essa é uma generalização da ideia de que consideramos um único vértice como caminho monocromático no contexto de grafos simples.

No ambiente de hipergrafos uniformes, temos diversas generalizações possíveis para a noção de caminho. Estudaremos as principais, começando com a seguinte.



Figura 14 – Exemplo finito de caminho frouxo 4-uniforme.

Definição 2.12. *Dado $k \geq 2$, chamamos de caminho frouxo (loose path) o hipergrafo k -uniforme determinado por uma sequência finita ou unidirecionalmente infinita de hiperarestas tal que apenas hiperarestas consecutivas se intersectam e sempre o fazem em um único vértice.*

Quando $k = 2$, essa definição se reduz à de caminhos usuais. Apesar disso, para esses tipos de grafo, a existência de resultados similares ao RPDT não é imediata; apenas em 2013, Gyárfás e G. Sárközy mostraram que um resultado inteiramente análogo é válido.

Teorema 2.2.15 (Gyárfás e Sárközy[20], 2013). *Para todos $k, r \in \mathbb{N}$, com $k \geq 2$, vale*

$$\text{PN}_r(K_{\mathbb{N}}^k, \text{Loose Path}) = r.$$

Com caminhos monocromáticos de cores distintas.

Se $k = 2$, temos o RPDT. Ademais, o limitante inferior vem também da r -coloração especial, mas com uma partição em pedaços maiores, a depender de k . É suficiente tomar uma partição

$$V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r = V(K_{\mathbb{N}}^k)$$

onde, para $1 \leq i < r$, temos $|V_i| = k^{i-1}$ e todos os demais vértices pertencem a V_r .

Para obter a igualdade, os autores se apoiam no Teorema de Ramsey para hipergrafos uniformes infinitos. Entretanto, obtemos outra demonstração generalizando o argumento que empregamos na prova do Teorema 2.2.11.

Demonstração do Teorema 2.2.15. Se $r = 1$, não há o que demonstrar. Dados $k, r \in \mathbb{N}$, com $k, r \geq 2$, suponha sem perda de generalidade que $V(K_{\mathbb{N}}^k) = \mathbb{N}$ e seja \mathcal{U} um ultrafiltro não-principal sobre os naturais. Ademais, seja $c: \binom{\mathbb{N}}{k} \rightarrow [r]$ uma r -coloração qualquer de $K_{\mathbb{N}}^k$.

Em busca de generalizar nossa demonstração do Teorema 2.2.11, dado $A \in \binom{\mathbb{N}}{k-1}$ e $i \in [r]$, defina

$$N_i(A) = \{x \subseteq \mathbb{N} \setminus A : c(\{x\} \cup A) = i\}.$$

Generalizaremos a coloração de vértices usada anteriormente definindo uma coloração para os conjuntos com $k - 1$ elementos.

Note que, como antes, a união

$$A \cup N_1(A) \cup N_2(A) \cup \dots \cup N_r(A)$$

define uma partição dos naturais. Assim, para cada $A \in \binom{\mathbb{N}}{k-1}$, existe um único $i \in [r]$ para o qual $N_i(A)$ é grande em relação a \mathcal{U} . Considere, pois, uma segunda coloração $d: \binom{\mathbb{N}}{k-1} \rightarrow [r]$ dada por

$$A \mapsto i : N_i(A) \in \mathcal{U}.$$

Por agora, aceite conjuntos vazios como caminhos frouxos, por vacuidade, monocromáticos em qualquer cor. Seguiremos como antes, definindo, por indução em n , conjuntos de r caminhos frouxos finitos

$$P_n = \{P_n^j \subseteq K_{\mathbb{N}} : j \in [r]\}$$

satisfazendo as propriedades seguintes para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

P1. os caminhos em P_n são dois a dois vértice-disjuntos;

P2. os naturais $1, 2, \dots, n$ são cobertos por P_n ;

e para $j \in [r]$,

P3. o caminho P_n^j é monocromático na cor j (em relação a c);

P4. o conjunto dos últimos $k - 1$ vértices de P_n^j possui cor j (em relação a d).

Iniciamos com P_0 contendo r caminhos frouxos vazios. Para o passo de indução, dado $n \in \mathbb{N}$, suponha que P_{n-1} satisfaz as propriedades P1-4. Se P_{n-1} já cobre n , o passo está feito. Se esse não for o caso, estenderemos um caminho frouxo de P_{n-1} de modo a incluir n sem violar P1-4.

Seja A o conjunto formado por n e outros $k - 2$ naturais ainda não cobertos por P_{n-1} e seja $i = d(a)$. Se P_{n-1}^i é vazio, basta fazer $P_n^i = (\{A\}, \emptyset)$, pois conjuntos com menos de k vértices são considerados caminhos frouxos. Caso contrário, pelo último argumento, o caminho P_{n-1}^i contém ao menos $k - 1$ vértices. Assim, seja T o conjunto dos últimos $k - 1$ vértices de P_{n-1}^i . Como $N_i(A) \cap N_i(A)$ é grande e P_{n-1} cobre uma quantidade finita de vértices, existe $s \in N_i(A) \cap N_i(A)$ não coberto por P_{n-1} . Perceba que $(\{s\} \cup T) \cap (\{s\} \cup A) = \{s\}$. Desse modo, para concluir o passo de indução, basta adicionar as hiperarestas $\{s\} \cup T$ e $\{s\} \cup A$ a P_{n-1}^i e definir P_n^i como o resultado, considerando os vértices de A como os últimos de P_n^i .

Por fim, tome os limites dos caminhos frouxos em P_n e descarte eventuais caminhos vazios. □

A referência [20] trata principalmente de particionamento em ciclos, e iremos retomá-la na Seção 2.3. Entretanto, ainda na discussão sobre caminhos, os autores propõem um problema acerca de particionamentos em um outro tipo de caminho, definido abaixo.

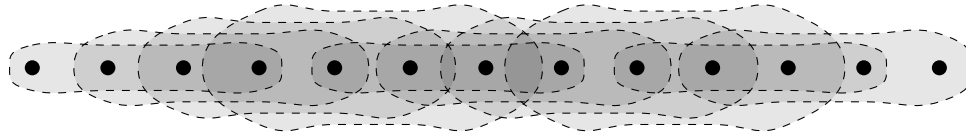


Figura 15 – Exemplo finito de caminho justo 4-uniforme.

Definição 2.13. *Dado $k \geq 2$, chamamos de caminho justo (tight path) o hipergrafo k -uniforme determinado por uma sequência finita ou unidirecionalmente infinita de vértices onde o conjunto de hiperarestas consiste nos conjuntos de k vértices consecutivos da sequência.*

Aqui, a palavra “justo” tem o sentido de “apertado” e em oposição a “frouxo”, o que as Figuras 14 e 15 devem ajudar a ilustrar. Dizemos que essa é uma definição mais restritiva pois dada uma sequência de vértices, a Definição 2.12 permite diversos caminhos frouxos sobre essa sequência, em princípio. Já para caminhos justos, há uma única opção. A sequência determina completamente o caminho.

A questão deixada pelo trabalho [20] indaga, especificamente, se, dada uma 2-coloração das arestas de $K_{\mathbb{N}}^3$, seria sempre possível obter uma partição em 2 caminhos justos monocromáticos.

Em [10], os autores não só respondem essa pergunta, como também obtêm um resultado para caminhos justos diretamente análogo ao RPDT.

Teorema 2.2.16 (Elekes *et al.*[10], 2017). *Para todos $k, r \in \mathbb{N}$, com $k \geq 2$, vale*

$$\text{PN}_r \left(K_{\mathbb{N}}^k, \text{Right Path} \right) = r.$$

Ademais, existe uma tal partição em caminhos de cores distintas.

Novamente o caso $k = 2$ se reduz ao RPDT e o limitante inferior vem da r -coloração especial com partição em $r - 1$ partes finitas de tamanho k^{i-1} e uma infinita. A igualdade é obtida de maneira semelhante à demonstração de Gyárfás e Sárközy para o Teorema 2.2.15, apoiada pelo Teorema de Ramsey. Alguns cuidados a mais são necessários, pois, como vimos, a relação entre novos vértices em caminhos justos e os anteriores é mais forte que em um caminho frouxo.

Tire um momento para apreciar a transição suave das definições de caminho frouxo e justo e mesmo da definição de coloração especial para todos os valores de k . Sempre acompanhados de um resultado perfeitamente análogo ao RPDT e de um limitante inferior perfeitamente análogo à Proposição 2.2.3.

Romperemos com esse padrão ao introduzir um conceito de caminho anárquico o suficiente, o de caminhos de Berge. Esse é o último dentre os conceitos amplamente utilizados de caminhos em hipergrafos.

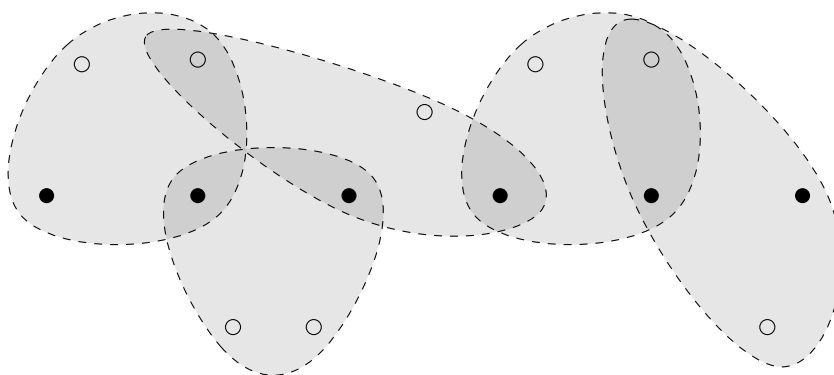


Figura 16 – Exemplo finito de caminho de Berge 4-uniforme.

Definição 2.14. *Dado $k \geq 2$, chamamos de caminho de Berge (Berge path) um hipergrafo k -uniforme determinado por uma sequência $v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_3 \dots$ (possivelmente infinita) alternada entre vértices*

e arestas, tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \subseteq e_i$ para todo i possível e não há repetição de vértices ou arestas. O conjunto $\cup\{v_i\}$ é chamado de núcleo (core) do caminho.

Como a Figura 16 ilustra ao destacar vértices do núcleo com preenchimento em preto, embora $\cup\{v_i\} \subseteq \cup e_i$, a igualdade só é necessariamente verdadeira quando $k = 2$.

Essa definição restringe pouquíssimo o modo em que arestas consecutivas se intersectam. De fato, caminhos frouxos e justos são caminhos de Berge, logo tanto o Teorema 2.2.15 quanto o 2.2.16 já garantem que

$$\text{PN}_r \left(K_{\mathbb{N}}^k, \text{Berge Path} \right) \leq r.$$

Assim, se pudermos empregar novamente a coloração especial usada nos outros casos, não há o que demonstrar. Curiosamente, isso não é possível. A Definição 2.14 não impede que uma hiperaresta de um caminho de Berge intersecte mais que duas outras desse mesmo caminho. Isso permite, para $k \geq 3$, por exemplo, um particionamento em um único caminho de Berge para a r -coloração da partição

$$V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r = V(K_{\mathbb{N}}^3),$$

com $|V_i| = k^{i-1}$ para $i \in [r-1]$, e V_r infinito. Fixe uma ordem para os $V(K_{\mathbb{N}}^3)$, digamos $V(K_{\mathbb{N}}^3) = \{v_1, v_2, \dots\}$ e suponha sem perda de generalidade que tenhamos $V_1 = \{v_1\}$.

Basta então seguir por indução: inicie o caminho com a hiperaresta $\{v_1, v_2, v_2\}$, de cor 1 e se v_n é o último vértice do caminho, estenda-o por meio da hiperaresta $\{v_1, v_n, v_{n+1}\}$, que também possui cor 1.

Esse comportamento abre uma janela para encontrarmos partições em menos de r caminhos de Berge monocromáticos. Assim, fazemos uma pergunta, a essa altura, natural.

Problema 2.3. Dado $k, r \in \mathbb{N}$, com $k \geq 2$, para qual função f a expressão

$$\text{PN}_r \left(K_{\mathbb{N}}^k, \text{Berge Path} \right) = f(r, k)$$

é verdadeira? E se exigirmos uma partição em caminhos de cores distintas?

No trabalho bastante recente [21], S. Bustamante, J. Corsten e N. Frankl buscam um resultado do tipo, obtendo sucesso para partições em núcleos de caminhos de Berge usando menos de

r partes. Note que ao empregar os núcleos como estrutura de particionamento apenas os vértices nos núcleos dos caminhos precisam ser disjuntos, de modo que os caminhos em si podem se intersectar.

Teorema 2.2.17 (Bustamante *et al.*[21], 2020). *Para todos $k, r \in \mathbb{N}$, com $k \geq 2$, vale*

$$\text{PN}_r \left(K_{\mathbb{N}}^k, \text{Core of Berge Path} \right) = \left\lceil \frac{r}{k-1} \right\rceil.$$

Ademais, existe uma tal partição em caminhos de cores distintas.

Observe que, novamente, quando $k = 2$ o resultado se reduz precisamente ao RPDT.

É possível refinar a definição de caminho de Berge para incorporar o grau de interseção entre arestas do caminho. Usando essa definição, podemos apreciar uma versão ainda mais geral do último teorema.

Definição 2.15. *Dado $k \geq 2$, seja $B = (V, E)$ um hipergrafo k -uniforme, com V possivelmente infinito e $E = \{e_1, e_2, \dots\}$. Além disso, seja $U = \{u_1, u_2, \dots\}$ um subconjunto de V . Dado $t \in \mathbb{N}$, com $2 \leq t \leq k$, dizemos que B é um caminho de Berge t -justo com núcleo U se e somente se, para todo i , tem-se*

$$\{u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+t-1}\} \subseteq e_i.$$

Temos $\bigcup \{u_i\} \subseteq \bigcup e_i$ com igualdade se $t = k$, onde a definição se converte na de caminhos justos. Quando $k = 2$, obrigatoriamente temos $t = k$ e obtemos, novamente, a noção usual de caminhos em grafos. Já se $t = 2$ e k é qualquer, temos a definição de caminhos de Berge. Com isso, o resultado seguinte, obtido em [21], generaliza não só o RPDT, mas o Teorema 2.2.17 e o Teorema 2.2.16.

Teorema 2.2.18 (Bustamante *et al.*[21], 2020). *Para todos $k, r, t \in \mathbb{N}$, com $2 \leq t \leq k$, vale*

$$\text{PN}_r \left(K_{\mathbb{N}}^k, \text{Core of } t\text{-tight Berge Path} \right) = \left\lceil \frac{r}{k-t+1} \right\rceil.$$

Ademais, existe uma tal partição em caminhos de cores distintas.

Caminhos frouxos não são contemplados pela Definição 2.15 porque interseções entre hiperarestas de um caminho t -justo não necessariamente são unitárias.

Os autores garantem o limitante inferior por meio de uma construção explícita. Na verdade, eles mostram que não podemos melhorar o teorema anterior mesmo se permitirmos

caminhos nas mesmas cores, chegando a um resultado significativamente mais forte que algo como a Proposição 2.2.3.

Teorema 2.2.19 (Bustamante *et al.*[21], 2020). *Para todos $r, k, t \in \mathbb{N}$, com $2 \leq t \leq k$, existe coloração de $K_{\mathbb{N}}^k$ para a qual não se pode particionar os naturais em menos de $\lceil \frac{r}{k-t+1} \rceil$ núcleos de caminhos de Berge t -justos monocromáticos.*

A coloração exibida lembra uma coloração especial, mas se baseia em agrupamentos das cores $1, 2, \dots, r$ em subconjuntos de tamanho t . Ademais, os autores mencionam que o tamanho das partes é bem maior que o necessário, mas suficiente, claro.

A demonstração da igualdade se fundamenta nas ideias do Teorema 2.2.16. Mas os autores argumentam com base em, dada uma r -coloração de $K_{\mathbb{N}}^k$, infinitas multi-colorações de $K_{\mathbb{N}}^j$, para $2 \leq j \leq r-1$. O Teorema de Ramsey é então aplicado repetidas vezes para encontrar sequências de cliques monocromáticas em $K_{\mathbb{N}}^j$. Por fim, essas sequências de cliques são usadas para escolher bem uma última multi-coloração, dessa vez dos vértices, de modo que a cor do vértice garanta boas propriedades para suas vizinhança. Disso, o argumento segue por indução, como em nas últimas demonstrações.

No futuro, investigar as ideias desse artigo buscando aplicar ultrafiltros não-principais (ou mesmo ultrafiltros de Ramsey), talvez não só simplifique o argumento original, mas revele uma teoria comum que ajude com outros resultados. Algo parecido ocorre com o argumento original por traz do RPDT e a teoria desenvolvida no trabalho [10].

2.3 Por ciclos

Nessa seção estudaremos a variação do problema de particionamento em estruturas monocromáticas onde a classe de estruturas em questão é a classe $\mathcal{C}_{\text{cycle}}$, composta pelos ciclos finitos e pelo ciclo infinito, definido em seguida. Pelo bem da elegância, consideramos como ciclos os grafos K_1 e K_2 .

Definição 2.16. *Chamamos de caminho bi-infinito enumerável, ou simplesmente ciclo infinito o grafo $C_{\mathbb{N}} = (V, E)$, onde*

$$V = \{\dots, v_{-2}, v_{-1}, v_0, v_1, v_2, \dots\} \quad \text{e} \quad E = \{v_i v_{i+1} : i \in \mathbb{Z}\}.$$

Pensando no caso finito, em comparação com a classe \mathfrak{Path} , estudada na Seção 2.2, particionamentos com a classe \mathcal{Cycle} são mais “difíceis” de encontrar. Isso, porque todo particionamento em ciclos monocromáticos pode ser facilmente convertido em um particionamento em caminhos: basta remover uma aresta qualquer de cada ciclo.³ Já a recíproca não é necessariamente verdadeira. Desse modo, dados naturais r e n , temos

$$PN_r(K_n, \mathfrak{Path}) \leq PN_r(K_n, \mathcal{Cycle}).$$

Relações análogas valem para famílias de outros tipos de caminhos e seus correspondentes para ciclos.

2.3.1 Em grafos hospedeiros finitos

Nesta subseção incluímos uma rápida revisão dos resultados finitos acerca do problema de particionamento em ciclos monocromáticos. Objetivamos ilustrar como o passo aparentemente pequeno de \mathfrak{Path} para \mathcal{Cycle} pode implicar uma quantidade significativa de resistência. Chamamos atenção para as datas e intervalos entre resultados em comparação com seus eventuais análogos na Seção 2.2. Também convidamos o leitor mais experiente a notar as técnicas mencionadas e os nomes envolvidos no esforço.

Em 1979, J. Lehel conjectura que o Teorema 2.2.1 continuaria válido com ciclos em vez de caminhos, ou seja, que valeria

$$PN_2(K_n, \mathcal{Cycle}) = 2,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. A primeira referência a essa conjectura que encontramos foi a tese de [22], de 1979.

Gyárfás, em 1983, atacou o problema. Recorde que esse é o matemático que propôs a versão para caminhos numa nota de rodapé, fornecendo uma demonstração simples pouco depois. Já para a conjectura de Lehel, o autor conseguiu demonstrar o resultado apenas se fosse permitido um vértice na interseção dos ciclos.

Somente em 1998, algum progresso foi obtido no sentido de remover o vértice comum! No artigo [23], T. Łuczak, V. Rödl e E. Szemerédi empregam o Lema da Regularidade e introduzem

³ Note que a remoção de uma aresta transforma um ciclo finito em um caminho nos mesmos vértices, enquanto que um ciclo infinito se converte em dois caminhos infinitos cuja união cobre os vértices do ciclo original.

algumas técnicas novas para provar a validade da conjectura de Lehel para grafos suficientemente grandes. Uma década depois, P. Allen consegue, em [24], provar o resultado sem o uso do Lema da Regularidade, mas ainda restrito a grafos de ordem alta.

Finalmente, em 2010, S. Bessy e S. Thomassé obtêm uma demonstração elementar, por indução e relativamente curta, mas nem por isso simples, para a conjectura em sua forma original. No trabalho [25] eles trazem o resultado abaixo.

Teorema 2.3.1 (Bessy e Thomassé[25], 2010). *Para todo $n \in \mathbb{N}$, vale*

$$\text{PN}_2(K_n, \mathcal{C}\eta\text{c}\ell\epsilon) = 2.$$

Ademais, existe uma tal partição em um ciclo de cada cor.

Talvez a experiência da Seção 2.2 tenha diluído a surpresa, mas, como para caminhos, não é imediato que o valor de $\text{PN}_r(K_n, \mathcal{C}\eta\text{c}\ell\epsilon)$ não dependa de n , mesmo para $r = 2$. Em 1991, Erdős, Gyárfás e Pyber mostraram no trabalho [14] que esse é o caso para todo r . Naturalmente, esse resultado motivou os autores a propor uma versão para ciclos da Conjectura 2.2.2.

Conjectura 2.3.2 (Erdős *et al.*[14], 1991). *Dado $r \in \mathbb{N}$, existe natural n_0 para o qual, para todo $n > n_0$, vale*

$$\text{PN}_r(K_n, \mathcal{C}\eta\text{c}\ell\epsilon) = r.$$

Pela relação entre o número de partição em ciclos e em caminhos, o limitante da Proposição 2.2.3 também vale para $\mathcal{C}\eta\text{c}\ell\epsilon$. De modo que a Conjectura 2.3.2 não se sustenta caso utilizemos um valor menor que r do lado direito da igualdade. O mesmo acontece com a coloração usada na demonstração da Proposição 2.2.4, removendo a possibilidade de partições com um ciclo em cada cor para todas as colorações possíveis.

A sincronia com a Seção 2.2 até então pode indicar que o história segue com o estudo da Conjectura 2.3.2 para outros valores de r . Entretanto, o mesmo matemático que obteve o Teorema 2.2.5, o caso $r = 3$ da Conjectura 2.2.2, em outro trabalho mostrou que a Conjectura 2.3.2 não vale para outros valores de r .

Teorema 2.3.3 (Pokrovskiy[17], 2014). *Para todo $r \geq 3$, existe natural n_0 para o qual, para todo $n > n_0$, existe uma r -coloração de K_n em que não se pode particionar os vértices de K_n em ciclos*

monocromáticos. Desse modo,

$$\text{PN}_r(K_n, \mathcal{C}hcl\epsilon) > r.$$

Claro que esse resultado não impediu que a busca por valores de $\text{PN}_r(K_n, \mathcal{C}hcl\epsilon)$ no caso finito seguisse como um problema importante até os dias atuais. O melhor limitante superior conhecido é dado pelo enunciado seguinte.

Teorema 2.3.4 (Gyárfás *et al.*[26], 2006). *Dado $r \geq 2$, existe natural n_0 para o qual, para todo $n > n_0$ vale*

$$\text{PN}_r(K_n, \mathcal{C}hcl\epsilon) \leq 100r \log r.$$

Tendo em mente que o Teorema 2.3.3 implica que o valor de $\text{PN}_r(K_n, \mathcal{C}hcl\epsilon)$ é pelo menos linear em r , vemos que o Lema da Regularidade, usado na demonstração, leva a um excelente limitante. De fato, esse também é o limitante vigente para caminhos, que, recordemos, ainda está de pé. Com isso, podemos resumir o estado da arte do problema com as desigualdades

$$\text{PN}_r(K_n, \mathcal{C}hcl\epsilon) > r,$$

$$\text{PN}_r(K_n, \mathfrak{P}ath) \leq \text{PN}_r(K_n, \mathcal{C}hcl\epsilon) \leq 100r \log r,$$

que são válidas desde que n seja suficientemente grande.

2.3.2 *Em grafos hospedeiros infinitos*

O Teorema 2.2.8 não leva imediatamente a um resultado análogo ao RPDT. Isto é, não se deriva diretamente dele que

$$\text{PN}_r(K_{\mathbb{N}}, \mathcal{C}hcl\epsilon) = r.$$

Encontrar ciclos infinitos não é difícil, basta estender ambas as extremidades do caminho ao longo da indução. Por outro lado, conectar o primeiro e o último vértice dos caminhos finitos pode ser desafiador. De fato, não encontramos referência a uma versão infinita da Conjectura 2.3.2. O resultado surge recentemente na literatura já sob uma forma mais geral. Apesar disso, vamos escrevê-lo separadamente a título de referência futura.

Teorema 2.3.5 (Elekes *et al.*[10], 2017). *Para todo natural r , vale*

$$\text{PN}_r(K_{\mathbb{N}}, \text{Cycle}) = r.$$

Ademais, existe uma tal partição em ciclos de cores distintas.

A mesma coloração especial que usamos para limitar o número de partição para caminhos se aplica aqui. Também vemos que a coloração dada na Proposição 2.2.4 novamente falha para o caso infinito, pois uma única parte é capaz de cobrir todas as demais.

Como mencionamos, o Teorema 2.3.5 vem de um resultado mais geral, já no contexto de hipergrafos k -uniformes. Nesse ambiente temos as mesmas generalizações para o conceito de ciclo que para o de caminho: justo, frouxo, de Berge e t -justo de Berge. Não definiremos essas variações explicitamente pois são traduções diretas das definições 2.13, 2.12, 2.14 e 2.15, com os caminhos bi-infinitos assumindo as vezes do caminho unidirecionalmente infinito. Como na Seção 2.2, tratando de hipergrafos k -uniformes, incluímos nesses conceitos de ciclo qualquer conjunto com até k vértices.

Feitas essas observações, trazemos o enunciado análogo ao Teorema 2.2.16 para particionamento em ciclos justos.

Teorema 2.3.6 (Elekes *et al.*[10], 2017). *Para todos $k, r \in \mathbb{N}$, com $k \geq 2$, vale*

$$\text{PN}_r(K_{\mathbb{N}}^k, \text{Right Cycle}) = r.$$

Ademais, existe uma tal partição em ciclos justos de cores distintas.

Esse resultado é obtido numa extensão da demonstração do Teorema 2.2.16, usando o Teorema de Ramsey a cada passo da indução para fechar os ciclos finitos.

O artigo [21] discute a transferência dos outros resultados sobre caminhos k -uniformes para o contexto de ciclos. Os autores afirmam valer um resultado diretamente semelhante ao Teorema 2.2.15.

Teorema 2.3.7 (Bustamante *et al.*[21], 2020). *Para todos $k, r \in \mathbb{N}$, com $k \geq 2$, vale*

$$\text{PN}_r(K_{\mathbb{N}}^k, \text{Loose Cycle}) = r.$$

Ademais, existe uma tal partição em ciclos frouxos de cores distintas.

Também vale um análogo ao Teorema 2.2.18.

Teorema 2.3.8 (Bustamante *et al.*[21], 2020). *Para todos $k, r \in \mathbb{N}$, com $k \geq 2$, vale*

$$\text{PN}_r(K_{\mathbb{N}}^k, \text{Core of Berge Cycle}) = \left\lceil \frac{r}{k-1} \right\rceil.$$

Com uma partição em ciclos de cores distintas.

Com isso e com o Teorema 2.3.6 temos que os casos $t = 2$ e $t = k$ do Teorema 2.2.18 migram suavemente para ciclos. Entretanto, para outros valores de t o processo de “fechar” os ciclos finitos encontra resistência. Como a quantidade de ciclos finitos em cada partição é limitada, o resultado vale se permitirmos que uma quantidade finita de vértices fique de fora do particionamento.

Teorema 2.3.9 (Bustamante *et al.*[21], 2020). *Para todos $k, r, t \in \mathbb{N}$, com $2 \leq t \leq k$, vale*

$$\text{PN}_r(K_{\mathbb{N}}, \text{Core of } t\text{-tight Berge Cycle}) \leq^* \left\lceil \frac{r}{k-t+1} \right\rceil.$$

Com uma partição em ciclos de cores distintas.

O trabalho [27], tese de doutorado de um dos autores de [21], discorre sobre ainda outra generalização do conceito de ciclo. Segue a definição.

Definição 2.17. *Dado $k \geq 2$ e $1 \leq l \leq k-1$, seja $C = (V, E)$ um hipergrafo k -uniforme, com*

$$V = \{\dots, v_{-2}, v_{-1}, v_0, v_1, v_2, \dots\} \quad \text{e} \quad E = \{\dots, e_{-2}, e_{-1}, e_0, e_1, e_2, \dots\},$$

sequências possivelmente infinitas. Dizemos que C é um l -ciclo se cada hiperaresta contém k elementos (ciclicamente) consecutivos de V , duas hiperarestas se intersectam se, e somente se, são (ciclicamente) consecutivas e a interseção ocorre em exatamente l vértices.

Podemos ver essa definição como uma generalização da ideia de ciclos frouxos, já que quando $l = 1$ recaímos nisso. Embora esse conceito seja conhecido, seu estudo em problemas de particionamento, para grafos finitos ou infinitos, parece ter se concentrado em ciclos frouxos. De qualquer forma, por completude, incluímos um enunciado em torno da Definição 2.17, obtido por Bustamante em trabalho conjunto com M. Stein.

Teorema 2.3.10 (Bustamante[27], 2018). *Para todo $k \geq 2$ e $l \leq k/2$*

$$\text{PN}_2 \left(K_{\mathbb{N}}^k, l\text{-cycle} \right) =^* 2.$$

Com uma partição em ciclos de cores distintas.

Vale notar que a quantidade máxima de vértices não cobertos é função de k e l , especificamente, no máximo $5(k-l) - 1$ vértices ficam de fora da partição.

2.4 Por grafos conexos

Nesta seção, em contraste com as seções anteriores, estudaremos o número de partição de uma família determinada não por uma estrutura específica, mas por uma propriedade: a conectividade. Formalizemos a nomenclatura. Essa mudança em relação às Seções 2.2 e 2.3 faz com que possamos considerar “bem mais” grafos em busca de um particionamento. Dado $n \in \mathbb{N}$, a menos de isomorfismo, existe apenas um ciclo e um caminho em n vértices, enquanto diversos grafos conexos não-isomórficos podem ser construídos sobre os mesmos n vértices. De fato, caminhos e ciclos são grafos conexos de modo que, para todo grafo G e natural r , podemos relacionar o número de partição nessas famílias com a desigualdade

$$\text{PN}_r(G, \text{Cycle}) \geq \text{PN}_r(G, \text{Path}) \geq \text{PN}_r(G, \text{Connected}).$$

Logo, herdamos os resultados que vimos até então como limitantes superiores.

Sabemos que todo grafo conexo contém uma árvore como subgrafo gerador, isto é, incluindo todos os vértices do grafo. Por esse motivo, a busca por uma partição dos vértices do grafo hospedeiro em subgrafos conexos monocromáticos é equivalente à busca por uma partição em árvores monocromáticas. Nesse trabalho optamos por falar em termos de grafos conexos.

2.4.1 Em grafos hospedeiros finitos

Talvez um bom indicativo de como nosso problema muda de figura quando consideramos grafos conexos seja o fato de podermos particionar colorações especiais em um único grafo conexo monocromático. De fato, para qualquer partição, basta ver que um único vértice na primeira parte é adjacente a todos os demais por arestas na primeira cor. Isso significa que, pela primeira vez, existe

chance de obtermos particionamentos para r -colorações do grafo completo em menos de r partes, resta saber o quão menos.

Nosso novo limitante inferior se baseia em uma ideia vinda da Geometria de Incidência, que inspira uma coloração de arestas na qual é particularmente difícil de encontrar subgrafos conexos monocromáticos grandes. Resumidamente, se $r \in \mathbb{N}$ é potência de um número primo, existe uma geometria (não-euclidiana) na qual é possível organizar r^2 pontos e $r^2 + r$ retas de modo que

1. quaisquer dois pontos estão contidos em uma reta;
2. toda reta contém ao menos dois pontos;
3. dada uma reta e um ponto, existe uma única reta contendo o ponto e paralela à reta dada;
4. existem três pontos não colineares.

Um arranjo satisfazendo esses axiomas é chamado de *plano afim de ordem r* . Se representarmos algumas retas como curvas é possível visualizar esses objetos, como na Figura 17.

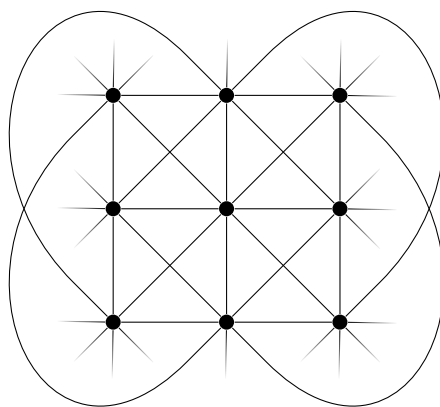


Figura 17 – Plano afim de ordem 3.

Para nós, a propriedade interessante desses arranjos é o fato de que a relação de paralelismo particiona as retas de um plano afim de ordem r em $r + 1$ classes de equivalência, cada uma com r retas e cada reta com r pontos, como ilustrado na Figura 18.

Vejamos agora como isso pode ser traduzido em uma coloração do grafo completo com a demonstração de um limitante inferior.

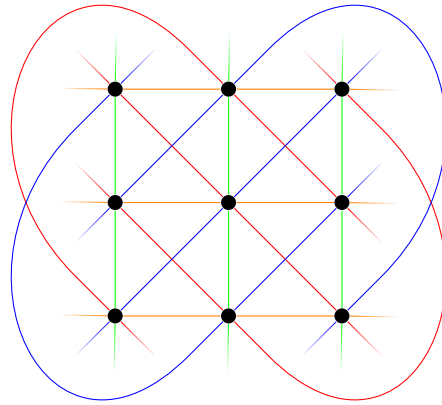


Figura 18 – Plano afim de ordem 3 com classes de equivalência destacadas.

Proposição 2.4.1 (Erdős *et al.*[14], 1991). *Se existe plano projetivo de ordem $r - 1$, então, para $n = (r - 1)^2$, vale*

$$\text{PN}_r(K_n, \text{Connected}) \geq r - 1.$$

Demonstração. Associando os vértices de K_n ao pontos do plano afim de ordem $r - 1$, atribua cor i a aresta uv se e somente se a reta que passa por u e v pertence à i -ésima classe de equivalência para relação de paralelismo nesse plano.

Pelas propriedades dos planos afins, um subgrafo monocromático está restrito à uma única reta, cobrindo, portanto, no máximo $r - 1$ vértices. Assim, com $r - 2$ subgrafos monocromáticos, podemos cobrir no máximo $(r - 2)(r - 1) < (r - 1)^2 = n$ vértices. \square

Note que a coloração das arestas K_4 usada na demonstração da Proposição 2.2.4 pode ser obtida de forma semelhante a partir do plano afim de ordem 2.

No mesmo trabalho, os autores da proposição anterior conjecturaram que o resultado é justo.

Conjectura 2.4.2 (Erdős *et al.*[14], 1991). *Para todo $r \geq 2$, vale*

$$\text{PN}_r(K_n, \text{Connected}) = r - 1.$$

O caso $r = 2$ dessa conjectura equivale a uma observação clássica de teoria dos grafos, devida a Erdős e Rado que diz que ou um grafo ou o seu complementar é conexo. Ademais, ainda no mesmo trabalho os autores obtêm uma demonstração curta e elementar do caso $r = 3$.

Teorema 2.4.3 (Erdős *et al.*[14], 1991). *A expressão*

$$\text{PN}_3(K_n, \text{Connected}) = 2$$

é verdadeira.

Poucos anos depois, Haxell e Kohayakawa, por meio de uma demonstração elementar surpreendentemente curta, chegaram bem perto de demonstrar a Conjectura 2.4.2 para n grande.

Teorema 2.4.4 (Haxell e Kohayakawa[28], 1996). *Para todo $r \geq 2$, existe $n_0(r) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, vale*

$$\text{PN}_r(K_n, \text{Connected}) \leq r.$$

Ademais, existe uma tal partição em grafos conexos de cores distintas.

Junto à Proposição 2.4.1, se o número de partição do grafo completo em árvores for independente de n , esse resultado deixa pouca margem para questionar a Conjectura 2.4.2. Além disso, vemos que a flexibilidade do conceito de grafo conexo é suficiente para contornar a Proposição 2.2.4. De fato, a coloração usada na prova da proposição não oferece resistência para um particionamento em 3 partes conexas de cores distintas.

Até onde sabemos, não há nenhum resultado que impeça a Conjectura 2.4.2 de ser fortalecida para pedir partições em grafos conexos de cores distintas.

O trabalho recente [29] discute o caso finito em mais detalhes além de provar o Teorema 2.4.4 para valores menores de n_0 .

2.4.2 Em grafos hospedeiros infinitos

Diferentemente das seções anteriores, a versão infinita do problema de partição em subgrafos conexos está em situação bem próxima da versão limitada. O trabalho [30] parece ter sido o primeiro a documentar que a coloração baseada no plano projetivo pode ser melhor adaptada

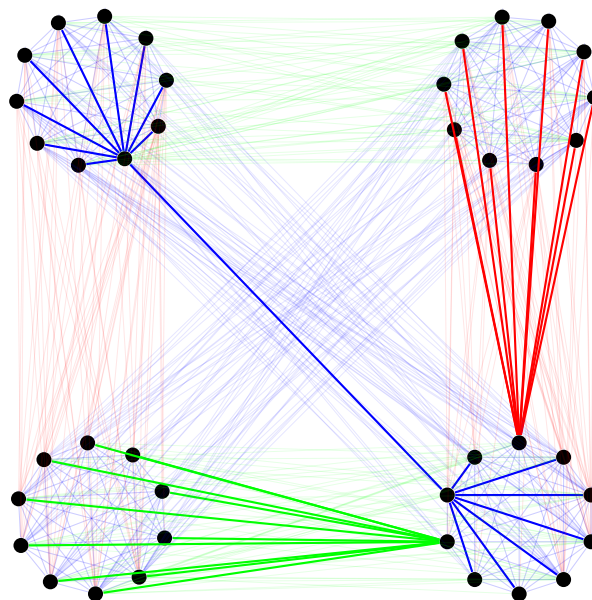


Figura 19 – Coloração da Figura 10 com uma partição em 3 árvores monocromáticas em destaque.

para grafos infinitos se aplicarmos um procedimento parecido com o que fizemos na Proposição 2.2.4. Basta fazer o blow-up dos $(r - 1)^2$ em cópias de $K_{\mathbb{N}}$ e colorir as arestas dentro das cópias de qualquer forma. Como antes, um grafo conexo monocromático cobre no máximo $r - 1$ partes, de modo que ao menos $r - 1$ grafos do tipo são necessários para cobrir todos vértices.

Proposição 2.4.5 (DeBiasio e McKenney[30], 2019). *Se existe plano projetivo de ordem $r - 1$, então vale*

$$\text{PN}_r(K_{\mathbb{N}}, \text{Connected}) \geq r - 1.$$

Com isso em mente, não há motivo para não compreender a Conjectura 2.4.2 como se estendendo para grafos infinitos.

Conjectura 2.4.6 (Erdős *et al.*[14], 1991). *Para todo $r \geq 2$, vale*

$$\text{PN}_r(K_{\mathbb{N}}, \text{Connected}) = r - 1.$$

A observação de Erdős e Rado pode ser facilmente transportada para grafos infinitos, isto é, toda 2-coloração de $K_{\mathbb{N}}$ contém um subgrafo conexo monocromático gerador, o que garante o caso $r = 2$ da conjectura. Ademais, ainda no trabalho [14], os autores afirmam que uma versão infinita do Teorema 2.4.3 foi obtida por Z. Nagy e Z. Szentmiklosy, o que garante o caso $r = 3$. Infelizmente, o resultado foi comunicado pessoalmente e não sabemos se chegou a ser publicado.

Teorema 2.4.7 (Nagy e Szentmiklosy, ver [14]). *A expressão*

$$\text{PN}_3(K_{\mathbb{N}}, \text{Connected}) = 2$$

é verdadeira.

Finalmente, o Teorema 2.4.4 também possui uma versão infinita. Esse resultado já era conhecido quando o artigo [14] foi publicado.

Teorema 2.4.8 (Hajnal *et al.*[31], 1987). *Para todo $r \geq 2$, vale*

$$\text{PN}_r(K_{\mathbb{N}}, \text{Connected}) \leq r.$$

Infelizmente, não conseguimos acesso direto a essa referência.

3 DENSIDADE DE SUBGRAFOS MONOCROMÁTICOS

Neste capítulo discutimos problemas do tipo Ramsey em grafos infinitos. Uma tentativa de fazer isso de forma direta não seria interessante, já que a versão infinita do Teorema de Ramsey para grafos simples garante que qualquer 2-coloração das arestas de $K_{\mathbb{N}}$ contém uma clique infinita monocromática e, portanto, uma cópia monocromática de qualquer grafo ilimitado. Esse fenômeno nos leva a buscar outros conceitos de “tamanho” de grafos infinitos.

Muitos matemáticos passam pela experiência de fazer uma disciplina introdutória e descobrir errada a intuição de que existem, por exemplo, “menos” números pares que naturais. Embora esse seja um importante prelúdio do tipo de tratamento que a intuição do jovem receberá nos próximos anos, a ideia não está completamente desalinhada da lógica. O comportamento esperado apenas não se manifesta em termos de cardinalidade, mas de densidade. Vamos formalizar esse conceito partindo da versão finita.

Definição 3.1. *Dado $n \in \mathbb{N}$ e $A \subseteq [n]$, a densidade de A em $[n]$, ou simplesmente densidade de A quando n está claro, é definida pela expressão*

$$d(A) = \frac{|A|}{n}.$$

O caminho natural para derivar um conceito semelhante para densidade de conjuntos infinitos é tomar o limite da expressão na definição acima.

Definição 3.2. *Dado $A \subseteq \mathbb{N}$, a densidade assintótica de A nos naturais, ou simplesmente densidade assintótica de A quando não houver ambiguidade, é definida pela expressão*

$$d(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap [n]|}{n},$$

caso tal limite exista.

De fato, essa definição converge com nossa intuição. Por exemplo, o conjunto dos naturais tem densidade assintótica $1/2$ e qualquer conjunto finito tem densidade nula, como esperado. O inconveniente da Definição 3.2, é que, como o texto indica, o limite embutido pode não existir.

Para ver isso, considere o conjunto $B_n = [2^{n-1}, 2^n - 1]$ dos naturais com exatamente n dígitos em sua representação binária. Ao tomar

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_{2i},$$

e estudar o comportamento da sequência

$$d_n = \frac{|A \cap [n]|}{n},$$

vemos que não ocorre convergência. De fato, existe uma subsequência de $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergindo para

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \cdots = \frac{2}{3}$$

e outra convergindo para

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1}{3}.$$

Assim, o limite da sequência não existe, de modo que a densidade assintótica desse conjunto não está definida.

Por outro lado, na Definição 3.2 tomamos o limite de uma sequência de valores no intervalo $[0, 1]$. Como os limites superior e inferior de uma sequência limitada sempre existem, podemos, partindo desses conceitos, derivar boas definições de densidade superior e inferior, como abaixo.

Definição 3.3. *Dado $A \subseteq \mathbb{N}$, definimos a densidade superior de A nos naturais, ou simplesmente densidade superior de A , e a densidade inferior de A , respectivamente, pelas expressões*

$$\bar{d}(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap [n]|}{n}$$

e

$$\underline{d}(A) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap [n]|}{n}.$$

Das definições de limite superior e limite inferior, temos

$$\underline{d}(A) \leq \bar{d}(A),$$

para todo $A \subseteq \mathbb{N}$, com igualdade se e somente se a densidade assintótica estiver definida.

Como ilustração, pode-se demonstrar que o conjunto

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_{2^i},$$

usado como exemplo há pouco, tem densidade superior $2/3$ e densidade inferior $1/3$, enquanto que o conjunto dos naturais pares tem densidade superior e inferior igual a $1/2$.

Se trocarmos o conjunto A por uma sequência (ou por elementos de uma ordem total), podemos construir medidas de densidade que incorporem a ordem de A . Aqui empregaremos a seguinte medida de densidade de sequências.

Definição 3.4. *Dada uma sequência de naturais distintos $A = (a_1, a_2, a_3, \dots)$, definimos a densidade superior forte de A nos naturais, ou simplesmente densidade superior forte de A , e a densidade inferior forte de A , respectivamente, pelas expressões*

$$\overline{ds}(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n}$$

e

$$\underline{ds}(A) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n},$$

onde $f(n) = \max \{ m : \{ a_1, \dots, a_m \} \subseteq [n] \}$.

Também temos, pela relação entre os limites superior e inferior, que

$$\underline{ds}(A) \leq \overline{ds}(A),$$

para toda sequência A de naturais distintos.

Em comparação com a noção de densidade assintótica, para calcular a densidade forte contamos, para cada n , os elementos da sequência que além de pertencerem a $[n]$ também têm todos os seus antecessores em $[n]$. Ademais, essas medidas coincidem caso a sequência em questão seja crescente. Isso deixa claro que o conceito de densidade forte é mais restritivo que o de densidade assintótica. Consequentemente, para quaisquer naturais a_1, a_2, \dots distintos, vale

$$\overline{ds}((a_1, a_2, \dots)) \leq \overline{d}(\{a_1, a_2, \dots\})$$

e

$$\underline{ds}((a_1, a_2, \dots)) \leq \underline{d}(\{a_1, a_2, \dots\}).$$

Como exemplo da desigualdade estrita, tomemos conjuntos dos naturais, que tem densidade superior 1, claro. Agora, considere a sequência em que nas posições de índice par

são listados os múltiplos de 3 e nas posições ímpares os demais naturais, em ordem crescente. Isso leva a uma reordenação dos naturais: 1, 3, 2, 6, 4, 9, 5, 12, 7, 15... Ou seja, $a_{2n} = 3n$ e $a_{2n-1} = 3(n-1)/2 + 1$ se n é ímpar; e $3n/2 - 1$ se n é par. Essa sequência tem densidade superior $2/3$, pois, sendo f a função na Definição 3.4, temos $f(3k) = f(3k+1) = f(3k+2) = 2k+1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

A fim de trazer as medidas definidas para o ambiente de grafos infinitos, é necessário fixar uma ordem total para os vértices do grafo. Sem isso, se considerarmos, por exemplo, uma r -coloração de $K_{\mathbb{N}}$, o Teorema de Ramsey garante uma clique monocromática infinita. Assim, sempre é possível ordenar os vértices de $K_{\mathbb{N}}$ de modo a encontrar uma cópia monocromática de qualquer subgrafo infinito com densidade 1. Por esse motivo, em contraste com o que fizemos no Capítulo 2, todos os grafos considerados nesse capítulo têm por vértices algum subconjunto de \mathbb{N} e a ordem considerada será a usual a menos que indiquemos o contrário. Partindo dessas hipóteses, passamos às definições formais.

Definição 3.5. *Dado um grafo $G = ([n], E)$ e $H \subseteq G$, definimos a densidade de H em G , ou simplesmente densidade de H na ausência de ambiguidade, pela expressão*

$$d(H, G) = d(V(H))$$

Ademais, omitiremos o segundo argumento caso esteja claro qual grafo faz as vezes de G .

Definimos analogamente a densidade assintótica, densidade superior e a densidade inferior de H em G empregando as respectivas noções de densidade de conjuntos infinitos. Sendo a definição de densidade assintótica restrita a existência do limite associado.

Perceba que essas medidas, por si, não incorporam muito da estrutura do subgrafo, pois apenas o conjunto dos vértices é levado em conta. Entretanto, como fixamos uma ordem, possibilitamos o estudo da densidade de sequências de vértices, o que permite que na definição seguinte busquemos embutir informação sobre o grau de conectividade do subgrafo em questão.

Definição 3.6. *Dado um grafo infinito $G = (\mathbb{N}, E)$ e $H \subseteq G$ conexo, definimos a densidade superior forte de H em G , ou simplesmente densidade superior forte de H na ausência de ambiguidade, pela expressão*

$$\overline{ds}(H, G) = \sup_{V \in \pi} \overline{ds}(V)$$

onde π é o conjunto de todas as ordenações (v_1, v_2, \dots) de $V(H)$ (mantendo a ordem dos demais vértices de G) tais que, para todo $k \geq 1$, o grafo $H[\{v_1, v_2, \dots, v_k\}]$ é conexo. Ademais, omitiremos o segundo argumento caso esteja claro qual grafo faz as vezes de G .

Definimos a densidade inferior forte de H em G analogamente empregando a densidade inferior forte de seqüências.

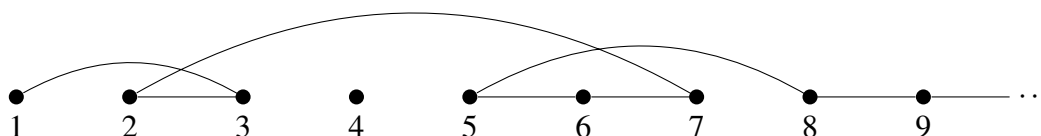


Figura 20 – Até o vértice 6, o caminho mostrado tem densidade $5/6$ e densidade forte $3/6$.

Para ver que o conjunto de permutações π não é vazio, basta tomar uma árvore geradora do subgrafo conexo em questão e ordená-la seguindo uma busca em profundidade.

Uma nota interessante é que no lugar dessas medidas de “tamanho de um subconjunto de \mathbb{N} ”, é possível obter uma noção mais geral baseada em *ideais sobre os naturais*. O conceito de ideal é o dual do de filtro. Já a ideia de ultrafiltro, tem como dual a de *ideal primo*. Não nos aprofundaremos nessa linha, mas, caso o leitor se interesse, existe literatura acerca desses conceitos no contexto da teoria de Ramsey. Por exemplo, a revisão bibliográfica [32] e os artigos [33] e [34].

Agora que definimos medidas de tamanho mais interessantes, buscaremos uma conexão com a teoria de Ramsey a partir do ambiente de grafos infinitos.

Fixados um número de cores r e uma seqüência de grafos G_1, G_2, G_3, \dots de determinada classe e tal que G_k possui k vértices (por exemplo G_k poderia ser uma clique, um caminho, etc), um problema clássico é estudar o comportamento do número de Ramsey de G_k para r cores, como uma função de k :

$$f(k) = R_r(G_k). \quad (3.1)$$

Lembre-se de que o valor de $f(k)$ é o menor n tal que toda r -coloração das arestas de K_n possui uma cópia monocromática de G_k . Quando $f(k)$ é crescente, estudar $f(k)$ é equivalente ao problema inverso de, dado $n \in \mathbb{N}$, encontrar

$$g(n) = \max \{ k \in \mathbb{N} : k \rightarrow (G_k)_r \}, \quad (3.2)$$

pois, a menos de pisos e tetos, as funções f e g são inversas. Também de forma equivalente, podemos pensar na proporção de vértices, $d(n) = g(n)/n$, da parte monocromática em relação ao todo.

No caso de grafos infinitos, é mais adequado generalizar a última das formulações acima. De fato, o Teorema de Ramsey nos garante uma cópia monocromática infinita de qualquer grafo em toda r -coloração de $K_{\mathbb{N}}$. Logo, a versão direta do problema de Ramsey é trivial (informalmente, pense como se $f(|\mathbb{N}|) = \infty$); mas a pergunta sobre $d(n)$ pode ser generalizada para um problema de densidade em grafos infinitos, que permanece em aberto para várias famílias de grafos. Formalizamos essa abordagem com os parâmetros de estudo da próxima definição.

Definição 3.7. *Dado um grafo infinito G , uma família de grafos \mathfrak{F} e um natural r , denotamos por*

$$D_r(G, \mathfrak{F})$$

o supremo do conjunto dos reais d para os quais toda r -coloração das arestas de G contém uma cópia monocromática de algum elemento de \mathfrak{F} com densidade assintótica maior ou igual a d .

Definições análogas valem para os conceitos de densidade superior, inferior, superior forte e inferior forte, empregando as notações \overline{D} , \underline{D} , \overline{D}_s e \underline{D}_s , respectivamente.

O fato de a densidade assintótica não necessariamente estar definida é negligenciado no texto acima pois usaremos essa versão específica apenas para grafos hospedeiros finitos.

Como na Definição 2.3, o grafo hospedeiro G estabelece a estrutura a qual restringimos a busca por uma subestrutura monocromática, esta, por sua vez, restrita a \mathfrak{F} , a família de interesse.

Em alinhamento com a teoria de Ramsey, caso seja demonstrado que toda r -coloração das arestas de um grafo infinito G contém um elemento monocromático de \mathfrak{F} com densidade, digamos, superior a ao menos d , fica provado que

$$\overline{D}_r(G, \mathfrak{F}) \geq d.$$

Por outro lado, fornecer uma r -coloração onde a densidade superior de qualquer elemento monocromático de \mathfrak{F} é no máximo d demonstra que

$$\overline{D}_r(G, \mathfrak{F}) \leq d.$$

Uma sutileza é que, ao contrário do caso finito, tal exemplo não elimina a possibilidade de igualdade. Isso ocorre porque a Definição 3.7 se dá em termos do supremo de um conjunto de reais, que pode

não pertencer ao conjunto. Além disso, perceba que, comparado com a Definição 2.3, a configuração como problema de maximização inverte o sentido das desigualdades.

A relação entre medidas de densidade superior e inferior garante, para todo grafo G , família de subgrafos \mathfrak{F} e natural r , as desigualdades

$$\underline{D}_r(G, \mathfrak{F}) \leq \overline{D}_r(G, \mathfrak{F}),$$

com igualdade se e somente se $D_r(G, \mathfrak{F})$ estiver definido, e

$$\underline{D}_{s_r}(G, \mathfrak{F}) \leq \overline{D}_{s_r}(G, \mathfrak{F}).$$

Ademais, sob as mesmas hipóteses, como o conceito de densidade forte é mais restritivo que o de densidade usual, temos também

$$\overline{D}_{s_r}(G, \mathfrak{F}) \leq \overline{D}_r(G, \mathfrak{F})$$

e

$$\underline{D}_{s_r}(G, \mathfrak{F}) \leq \underline{D}_r(G, \mathfrak{F}).$$

Embora o estudo desses parâmetros de forma mais geral tenha sido introduzido em 1993 no trabalho [35], talvez o artigo [36], de 1964, tenha sido o primeiro artigo a investigar as implicações da teoria de Ramsey do ponto de vista de densidade de grafos infinitos. Nele, Erdős nota que se particionarmos os naturais em intervalos de tamanho crescente a uma taxa suficientemente alta, podemos induzir uma coloração onde cliques monocromáticas possuem densidade arbitrariamente baixa. Basta colorir arestas entre elementos de um mesmo intervalo com a cor azul e as demais com vermelho. Feito isso, não existem cliques infinitas azuis e a distância entre vértices de uma clique vermelha cresce conforme a taxa de crescimento dos intervalos usados na partição. Isso demonstra o próximo resultado.

Proposição 3.0.1 (Erdős[36], 1964). *A expressão*

$$\overline{D}_2(K_{\mathbb{N}}, \mathfrak{Clique}) = 0$$

é verdadeira.

De certo modo, isso é esperado, pois, considerando a função f dada na Equação 3.1 e G_k como uma clique, sabemos pela demonstração da versão finita do Teorema de Ramsey que $f(k) \leq 2^{2^k}$. Consequentemente, a função $g(n)$ dada na equação 3.2 é limitada superiormente por $\log(\log(n))$, de modo que $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n)/n = 0$. Basta, então, notar que nesse caso esse limite tende a $D_2(K_{\mathbb{N}}, \text{Clique}) = 0$.

Ainda assim, dado o papel clássico do estudo de cliques na Teoria de Ramsey, a proposição anterior pode parecer um tanto frustrante. Entretanto, veremos no restante do capítulo que o comportamento de classes de grafos mais esparsos pode ser bastante interessante.

3.1 De caminhos

Um dos primeiros resultados de Teoria de Ramsey para grafos finitos foi obtido por Gyárfás em trabalho conjunto com L. Gerencsér, e diz que

$$R_2(P_k) = \left\lfloor \frac{3k}{2} - 1 \right\rfloor.$$

De outro modo, toda 2-coloração das arestas de K_n contém um caminho monocromático com ao menos $\lceil (2n+1)/3 \rceil$ vértices e que existe coloração que realiza o valor exato. Do ponto de vista de densidade, temos o enunciado seguinte.

Teorema 3.1.1 (Gerencsér e Gyárfás[37], 1967). *Para todo $n \in \mathbb{N}$, a expressão*

$$D_2(K_n, \text{Path}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3n}$$

é verdadeira.

O primeiro objetivo dessa seção é estudar versões infinitas desse teorema. Historicamente, o esforço começa mais de 30 anos depois da Proposição 3.0.1, quando Erdős, juntamente a F. Galvin, retorna a versão infinita do problema de densidade de subgrafos monocromáticos com o trabalho [35]. Para começar, os autores mostram uma 2-coloração das arestas de $K_{\mathbb{N}}$ em que toda família de grafos sem vértices isolados e com grau máximo limitado, como caminhos, tem densidade inferior zero.

Teorema 3.1.2 (Erdős e Galvin[35], 1993). *Dado $r \in \mathbb{N}$, com $r \geq 2$, a expressão*

$$\underline{D}_2(K_{\mathbb{N}}, \text{Bounded } \Delta) = 0$$

é verdadeira.

Demonstração. Como, dado $r \geq 3$, toda 2-coloração é uma r -coloração, é suficiente mostrarmos uma coloração com apenas 2 cores.

Seja A_1, A_2, A_3, \dots uma sequência de intervalos consecutivos de naturais tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_1| + \dots + |A_{n-1}|}{|A_n|} = 0.$$

Note que os conjuntos A_i formam uma partição de \mathbb{N} . Agora considere

$$I_1 \cup I_2 \cup \dots = \{A_1, A_2, \dots\}$$

uma partição do conjunto $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ com cada I_i infinito. Finalmente, considere uma última partição, esta de $E(K_{\mathbb{N}})$, com partes

$$E_i = \bigcup_{n \in I_i} \{xy : x \in A_n, y \in \mathbb{N}, x < y\}.$$

Dado $G \subseteq K_{\mathbb{N}}$ com grau máximo Δ e sem vértices isolados, suponha que $E(G)$ não intersekte algum E_j . Então, para todo $n \in I_j$, como as arestas do tipo xy com $x \in A_n$ e $y > x$ pertencem a E_j , temos que os vértices em $V(G) \cap A_n$ são adjacentes a vértices em $V(G) \cap (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$. Assim, vale

$$|V(G) \cap A_n| \leq \Delta \cdot (|A_1| + \dots + |A_{n-1}|).$$

Pela taxa de crescimento dos intervalos $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e pelo fato de I_j ser infinito, fica determinada uma sequência de conjuntos de vértices de G com densidade nula, logo o limite inferior da densidade deve ser também nulo.

Para concluir o enunciado, basta atribuir cor 1 às arestas em, digamos, E_1 e cor 2 às demais. Assim, se G é monocromático na cor 1, então, por exemplo, $E(G) \cap E_2 = \emptyset$, e se G tem cor 2, então $E(G) \cap E_1 = \emptyset$. \square

A relação entre as medidas de densidade encerra o problema também para densidade inferior forte.

Corolário 3.1.3. *Dado $r \in \mathbb{N}$, com $r \geq 2$, a expressão*

$$\underline{Ds}_r(K_{\mathbb{N}}, \mathfrak{Bounded} \Delta) = 0$$

é verdadeira.

O comportamento da densidade superior forte se revela mais interessante. Ainda no trabalho [35], Erdős e Galvin estabelecem limitantes não triviais para 2-colorações.

Teorema 3.1.4 (Erdős e Galvin[35], 1993). *A expressão*

$$\frac{1}{3 + \sqrt{3}} \leq \overline{Ds}_2(K_{\mathbb{N}}, \mathfrak{Path}) \leq \frac{2}{3}$$

é verdadeira.

Esses limitantes não foram melhorados por décadas, até que um trabalho recente, de autoria de L. DeBiasio e P. McKenney reacendeu a pesquisa relacionada não só a essa versão do problema, mas ao problema de densidade de subgrafos monocromáticos infinitos como um todo. Como [35], o artigo [30] apresenta diversos resultados e motivou muito do estudo recente relacionado a esse tipo de problemas de densidade. Um desses resultados mostra que o limitante superior no Teorema 3.1.4 é justo.

Teorema 3.1.5 (DeBiasio e McKenney[30], 2019). *A expressão*

$$\overline{Ds}_2(K_{\mathbb{N}}, \mathfrak{Path}) = 2/3$$

é verdadeira.

Resta a discussão sobre a densidade superior (fraca) de caminhos em 2-colorações dos naturais. Essa medida se mostrou mais desafiadora. Como vimos com o RPDT, toda r -coloração das arestas de $K_{\mathbb{N}}$ pode ter seus vértices particionados em r caminhos monocromáticos. Isso implica que ao menos um dos caminhos deve ter densidade superior maior ou igual a $1/r$. Assim, temos o corolário seguinte.

Corolário 3.1.6 (Rado[18], 1978). *Para todo $r \in \mathbb{N}$, a expressão*

$$\overline{D}_r(K_{\mathbb{N}}, \mathfrak{Path}) \geq 1/r$$

é verdadeira.

Já em [35], Erdős e Galvin melhoram esse limitante inferior para $r = 2$ e também encontram uma cota superior. Os autores demonstram que

$$2/3 \leq \overline{D}_2(K_{\mathbb{N}}, \mathfrak{Path}) \leq 8/9.$$

O trabalho [30] melhora o limitante inferior para $3/4$ e conjectura que o superior seja justo. Antes mesmo da versão final de [30] ser publicada, A. Lo, N. Sanhueza-Matamala e G. Wango fortalecem o limitante inferior, obtendo em [38] o valor um tanto alienígena $(9 + \sqrt{17})/16 \approx 0.82019$. O problema é finalmente solucionado pouco depois, ficando determinado um valor não menos exótico.

Teorema 3.1.7 (Corsten *et al.*[39], 2019). *A expressão*

$$\overline{D}_2(K_{\mathbb{N}}, \mathfrak{Path}) = \frac{12 + \sqrt{8}}{17} \approx 0.87226.$$

é verdadeira.

Esse teorema, junto ao 3.1.2 nos diz que, para duas cores não há espaço para um resultado acerca da densidade assintótica de caminhos.

Para três ou mais cores, o problema foi estudado já nos trabalhos de Erdős e Galvin, onde os autores fornecem uma coloração tal que todo caminho tem densidade superior forte nula.

Teorema 3.1.8 (Erdős e Galvin[35], 1993). *Para todo $r \geq 3$, a expressão*

$$\overline{D}_{S_r}(K_{\mathbb{N}}, \mathfrak{Path}) = 0$$

é verdadeira.

Levando em conta o Teorema 3.1.5, é surpreendente que a função \overline{DS} dependa tão fortemente do parâmetro r .

Quanto à densidade superior, o Corolário 3.1.6 é atualmente o melhor limitante inferior para mais de 2 cores. O trabalho [35] impõe um limitante superior já bem apertado, restringindo o problema à desigualdade

$$1/r \leq \overline{D}_r(K_{\mathbb{N}}, \mathfrak{Path}) \leq 2/r.$$

DeBiasio e McKenney também melhoram esse resultado, obtendo o menor limitante superior conhecido por meio de uma coloração baseada no Postulado de Bertrand.

Teorema 3.1.9 (DeBiasio e McKenney[30], 2019). *Dado $r \geq 3$, seja q a maior potência de número primo tal que $q \leq r - 1$. Nessas condições, a desigualdade*

$$\overline{D}_r(K_{\mathbb{N}}, \mathfrak{Path}) \leq 1/q$$

é verdadeira.

Particularmente para 3 cores, o Corolário 3.1.6 e o Teorema 3.1.9 restringem o problema da densidade superior de caminhos infinitos monocromáticos à desigualdade

$$1/3 \leq \overline{D}_3(K_{\mathbb{N}}, \mathfrak{Path}) \leq 1/2.$$

O caso finito foi resolvido por Gyárfás, Ruszinkó, Sárközy e Szemerédi no trabalho [40], que demonstra que, para n suficientemente grande,

$$D_3(K_n, \mathfrak{Path}) = 1/2.$$

Esse resultado motivou DeBiasio e McKenney a conjecturar que o limitante superior na última inequação seja justo.

Conjectura 3.1.10 (DeBiasio e McKenney[30], 2019). *A expressão*

$$D_3(K_{\mathbb{N}}, \mathfrak{Path}) = 1/2$$

é verdadeira.

3.1.1 De caminhos orientados

No Capítulo 2, não estudamos grafos orientados profundamente, sendo o Teorema 2.2.8 o único resultado do tipo até esse ponto do texto. Desse modo, começaremos essa subseção formalizando algumas definições básicas sobre caminhos direcionados.

Podemos ver na Figura 21 que caminhos direcionados podem ter diferentes graus de “desordem”. Estudaremos a influência dessa propriedade sobre a densidade dos caminhos e, para tanto, nomeamos a seguir os vértices onde essa desordem ocorre.

Definição 3.8. *Em um caminho orientado, chamamos de out-switch (resp. in-switch) um vértice com grau de entrada (resp. saída) igual a zero em relação ao caminho.*

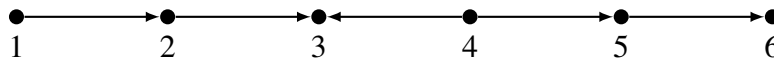


Figura 21 – Os vértices 1 e 4 são out-switches e os vértices 3 e 6 são in-switches.

Note que as pontas de um caminho sempre são switches, de modo que um caminho finito contém ao menos dois switches e um infinito, ao menos um. Denotamos a classe dos grafos

com switches apenas em suas extremidades por *Well-directed Path* e chamamos grafos desse tipo de *bem-direcionados*. Já a classe dos grafos onde todos os vértices são switches é denotada por *Anti-directed Path* e os grafos nessa classe são chamados *anti-direcionados*. Do ponto de vista de densidade de grafos infinitos, caminhos com uma quantidade finita de switches são indistinguíveis de caminhos bem-direcionados, já que todos os switches estão contidos em um seguimento inicial finito que não influencia no limite embutido nas medidas de densidade. De forma semelhante, caminhos infinitos onde a quantidade de vértices que não são switches é finita se comportam como caminhos anti-direcionados para fins de densidade.

Quanto ao grafo hospedeiro, é natural tomar uma orientação simétrica do grafo completo, como na definição abaixo.

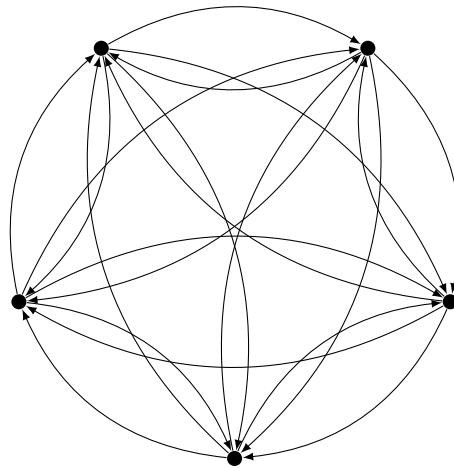


Figura 22 – Uma representação de \vec{K}_5 .

Definição 3.9. Denotamos por \vec{K}_n o digrafo simples completo e simétrico sobre $[n]$. Formalmente, temos $\vec{K}_n = ([n], A)$, onde

$$A = \{(i, j) : i, j \in [n], i \neq j\}.$$

Estendemos a definição analogamente, empregando a notação $\vec{K}_{\mathbb{N}}$, para o caso infinito enumerável.

Essas definições são suficientes para nosso estudo da densidade de caminhos monocromáticos orientados. Como de costume, partimos da versão finita, derivada do número de Ramsey.

Teorema 3.1.11 (Raynaud[41], 1973). *A expressão*

$$D_2 \left(\vec{K}_n, \text{Well-directed Path} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$$

é verdadeira.

Curiosamente, qualquer que seja a quantidade de cores, esse comportamento não se transfere para a versão infinita para nenhum dos conceitos de densidade que consideramos.

Teorema 3.1.12 (DeBiasio e McKenney[30], 2019). *Para todo $r \geq 2$, a expressão*

$$\bar{D}_r \left(\vec{K}_{\mathbb{N}}, \text{Well-directed Path} \right) = 0$$

é verdadeira.

Para $r \geq 3$, os autores asseguram a igualdade exibindo uma coloração onde todo caminho monocromático bem-orientado tem densidade superior nula. Já para $r = 2$, os autores mostram que, dado $\varepsilon > 0$, é possível construir uma coloração onde caminhos monocromáticos bem-direcionados tem densidade no máximo ε . Embora isso seja suficiente para o teorema, é interessante perguntar se é possível construir uma 2-coloração onde caminhos bem-direcionados tenham de fato densidade superior 0. Dois trabalhos independentes obtiveram uma coloração com essas propriedades.

Teorema 3.1.13 (Corsten *et al.*[39], 2019 e Bürger *et al.*[42], 2018). *Existe 2-coloração das arestas de $\vec{K}_{\mathbb{N}}$ onde todo caminho bem-direcionado possui densidade superior nula.*

Para caminhos anti-direcionados a coisa muda de figura. Recorde que no Capítulo 2 o RPDT foi obtido a partir do Teorema 2.2.8, o qual faz afirmações sobre caminhos anti-direcionados. Entretanto, negligenciamos esse fato ao enunciar o RPDT, que pode, pois, ser colocado sob uma forma mais forte.

Teorema 3.1.14 (Rado[18], 1978). *Para todo $r \in \mathbb{N}$, temos*

$$PN_r \left(\vec{K}_{\mathbb{N}}, \text{Anti-directed Path} \right) = r.$$

Com uma partição em um caminho de cada cor.

Como os demais resultados de partição, esse implica um limitante para o problema de densidade associado.

Corolário 3.1.15. *Para todo $r \in \mathbb{N}$, a expressão*

$$\bar{D}_r \left(\vec{K}_{\mathbb{N}}, \text{Anti-directed Path} \right) \geq 1/r$$

é verdadeira.

Se compararmos esse corolário com o Teorema 3.1.12, vemos que a orientação do caminhos influencia bastante no comportamento de \bar{D} . De fato, DeBiasio e McKenney demonstram que uma quantidade infinita de switches já é suficiente para garantir densidade superior positiva.

Teorema 3.1.16 (DeBiasio e McKenney[30], 2019). *Para todo $r \in \mathbb{N}$ a expressão*

$$\bar{D}_r \left(\vec{K}_{\mathbb{N}}, \text{Infinitely-switched Path} \right) > 0$$

é verdadeira.

Na verdade os autores demonstram que o resultado vale mesmo se fixarmos um elemento da família. Isto é, eles garantem que, para cada caminho com infinitos switches específico, toda r -coloração das arestas de $\vec{K}_{\mathbb{N}}$ contém uma cópia monocromática desse caminho com densidade superior positiva.

DeBiasio e McKenney naturalmente se perguntam se seria possível estabelecer um limitante inferior absoluto. Isso não ocorre caso a solução para o problema abaixo seja afirmativa.

Problema 3.1. *É verdade que para todo $\varepsilon > 0$ existe caminho com infinitos switches P e 2-coloração de $\vec{K}_{\mathbb{N}}$ tal que toda cópia monocromática de P tem densidade superior menor que ε ?*

Os autores desconfiam que uma quantificação da distribuição dos switches no caminhos permita resultados mais precisos que talvez capturem a transição entre o Corolário 3.1.15 e Teorema 3.1.16. Essa quantificação pode ser feita, por exemplo, empregando uma função indicadora da posição dos switches no caminho. Isto é, dada uma função crescente $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ e um caminho orientado $P_f = v_1 v_2 v_3 \dots$ tal que $v_{f(i)}$ podemos estudar uma cota inferior para a densidade superior de cópias monocromáticas de P . Por exemplo, se f é constante, temos caminhos anti-direcionados, para os quais temos o limitante inferior do Corolário 3.1.15. Que tipo de resultado podemos obter quando f cresce mais depressa?

3.2 De grafos conexos

Nessa seção estudaremos o problema de densidade de subgrafos monocromáticos para a classe dos grafos conexos. O trabalho [30] introduziu a versão infinita do problema recentemente, por isso grande parte dos resultados vem de lá.

Como vimos na Seção 2.4, ou um grafo ou seu complementar é conexo. Isso equivale à afirmação de que toda 2-coloração de K_n contém um grafo conexo com densidade 1. Gyárfás obteve uma extensão desse resultado para uma quantidade arbitrária de cores, num raro exemplo onde o exato Número de Ramsey é conhecido para infinitos valores de r . Enunciado na configuração de densidade, temos o teorema abaixo.

Teorema 3.2.1 (Gyárfás[43], 1977). *Para todo $r \geq 2$, temos*

$$D_r(K_n, \text{Connected}) \geq \frac{1}{r-1}.$$

Com igualdade se $r-1$ é potência de primo e $(r-1)^2$ divide n .

A possibilidade de igualdade vem da existência do plano projetivo quando $r-1$ é potência de primo.

Uma versão muito mais forte do Teorema de Gyárfás é a Conjectura de Ryser. Um caso especial dela afirma que, para todo $r \geq 2$, qualquer r -coloração das arestas de K_n pode ter seus vértices cobertos por $r-1$ cópias monocromáticas de grafos conexos. Consequentemente, um dos subgrafos monocromáticos deve ter densidade superior pelo menos $1/(r+1)$, de modo que esse caso particular da conjectura implica o Teorema 3.2.1. Em termos de densidade, temos o enunciado seguinte.

Conjectura 3.2.2 (de Ryser). *Para todo $r \geq 2$, a expressão*

$$D_r(K_n, \text{Connected}) \geq \frac{1}{r-1}.$$

é verdadeira.

Atualmente, sabemos da validade dessa restrição da Conjectura de Ryser para $r \leq 5$, o que foi demonstrado por Z. Tuza no trabalho [44].

Passando ao caso infinito, como a observação da conectividade de um grafo ou de seu complementar pode ser facilmente estendida para grafos sobre os naturais, temos densidade superior e inferior máxima para grafos conexos em 2-colorações, isto é,

$$D_2(K_{\mathbb{N}}, \text{Connected}) = 1.$$

Entretanto, para $r \geq 3$ cores, o trabalho [30] mostra que não há espaço para resultados não triviais sobre densidade inferior de grafos conexos.

Teorema 3.2.3 (DeBiasio e McKenney[30], 2019). *Para todo $r \geq 3$, a expressão*

$$\underline{D}_r(K_{\mathbb{N}}, \text{Connected}) = 0.$$

é verdadeira.

Como caminhos são conexos, o limitante do Corolário 3.1.6 também se aplica para grafos conexos. Com isso, não podemos esperar por um resultado acerca da densidade assintótica de grafos conexos em colorações com mais de duas cores.

Segundo o trabalho [30], o caso $r = 3$ da Conjectura de Ryser pode ser estendido para grafos infinitos, conseqüentemente, vale

$$\overline{D}_3(K_{\mathbb{N}}, \text{Connected}) \geq 1/2, \tag{3.3}$$

o que é melhor que o limitante vindo do Corolário 3.1.6. Ademais, o Teorema 2.4.8 também leva a um limitante inferior.

Teorema 3.2.4 (DeBiasio e McKenney[30], 2019). *Para todo $r \geq 2$ tal que $r - 1$ é potência de primo, a expressão*

$$\overline{D}_r(K_{\mathbb{N}}, \text{Connected}) \leq \frac{1}{r-1}$$

é verdadeira.

Em conjunto com a desigualdade 3.3, o último teorema encerra, para 3 cores, o problema de densidade superior de subgrafos conexos monocromáticos. Temos,

$$\overline{D}_3(K_{\mathbb{N}}, \text{Connected}) = 1/2.$$

Ao estudarem o problema para densidade superior forte de grafos conexos, DeBiasio e McKenney encontram comportamento semelhante ao que acabamos de ver para densidade superior. Nesse contexto, como antes, a observação de Erdős e Rado pode ser estendida a grafos infinitos, mas dessa vez somente para densidade superior forte.

Teorema 3.2.5 (DeBiasio e McKenney[30], 2019). *A expressão*

$$\overline{Ds}_2(K_{\mathbb{N}}, \text{Connected}) = 1$$

é verdadeira.

Para densidade inferior forte, os autores fornecem um exemplo de 2-coloração onde todo grafo conexo tem densidade nula.

Teorema 3.2.6 (DeBiasio e McKenney[30], 2019). *A expressão*

$$\underline{Ds}_2(K_{\mathbb{N}}, \text{Connected}) = 0$$

é verdadeira.

O mesmo trabalho também obtém um limitante análogo ao vindo da Conjectura de Ryser no caso $r = 3$.

Teorema 3.2.7 (DeBiasio e McKenney[30], 2019). *A expressão*

$$\overline{Ds}_3(K_{\mathbb{N}}, \text{Connected}) = 1/2$$

é verdadeira.

O limitante superior vem do Teorema 3.2.4 e da relação entre densidade superior e superior forte. Isso leva à conjectura seguinte.

Conjectura 3.2.8 (DeBiasio e McKenney[30], 2019). *Para todo $r \geq 4$, a expressão*

$$\overline{D}_r(K_{\mathbb{N}}, \text{Connected}) \geq \overline{Ds}_r(K_{\mathbb{N}}, \text{Connected}) \geq \frac{1}{r-1}$$

é verdadeira.

Vimos que os caso $r = 2$ e $r = 3$ são válidos. Ademais, tendo em vista o Teorema 3.2.4, a validade da conjectura determinaria exatamente o problema de densidade superior e de densidade superior forte para grafos conexos para valores de r tais que existe plano projetivo de ordem $r - 1$.

4 CONCLUSÃO

Diversos resultados sobre versões infinitas de problemas de combinatória extremal têm sido obtidos nos últimos anos, e outros devem surgir nos próximos. Nesta dissertação, focamos em dois desses problemas e discutimos grande parte da literatura associada, buscando tornar a introdução à área mais simples. Nesse sentido, estudamos conexões com versões finitas dessas questões, ilustrando suas relações com a variante ilimitada. Também reescrevemos o enunciado e a demonstração do Teorema de Rado usando a linguagem da teoria dos grafos e explicitamos alguns argumentos omitidos nos trabalhos de referência, por exemplo, demonstrando os limitantes inferior e superior de $\text{PN}_r(K_{\mathbb{N},\mathbb{N}}, \mathfrak{Path})$, anunciados no trabalho [10]. Finalmente, fornecemos uma rápida introdução a ultrafiltros não-principais e trouxemos diversos exemplos do seu uso em combinatória extremal, inclusive, ilustramos sua utilidade como alternativa ao Teorema de Ramsey ao simplificar a demonstração de Gyárfás e Sárközy para o limitante superior de $\text{PN}_r(K_{\mathbb{N}}^k, \text{Loose Path})$.

REFERÊNCIAS

- 1 EVERETT, D. Cultural constraints on grammar and cognition in pirahã another look at the design features of human language. **Current Anthropology**, v. 46, n. 4, p. 621–646, 2005.
- 2 NEVINS, A.; PESETSKY, D.; RODRIGUES, C. Pirahã exceptionality: A reassessment. **Language**, Linguistic Society of America, v. 85, n. 2, p. 355–404, 2009. ISSN 00978507, 15350665.
- 3 KOMLÓS, J.; SIMONOVITS, M. Szemerédi’s regularity lemma and its applications in graph theory. Citeseer, 1996.
- 4 KÜHN, D.; OSTHUS, D. Embedding large subgraphs into dense graphs. **arXiv preprint arXiv:0901.3541**, 2009.
- 5 TAO, T. C.-S. **What’s new**. Wordpress, 2005. Acessado em: 02/04/2020. Disponível em: <<https://terrytao.wordpress.com/>>.
- 6 KUNEN, K. **Set theory, volume 34 of Studies in Logic**. [S.l.]: London). College Publications, London, 2011.
- 7 FEFERMAN, S. Some applications of the notions of forcing and generic sets. In: ADDISON, J.; HENKIN, L.; TARSKI, A. (Ed.). **The Theory of Models**. [S.l.]: North-Holland, 2014, (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics). p. 89 – 95. ISBN 978-0-7204-2233-7.
- 8 GYÁRFÁS, A. Vertex covers by monochromatic pieces — a survey of results and problems. **Discrete Mathematics**, v. 339, n. 7, p. 1970 – 1977, 2016. ISSN 0012-365X. 7th Cracow Conference on Graph Theory, Rytro 2014.
- 9 KANO, M.; LI, X. Monochromatic and heterochromatic subgraphs in edge-colored graphs - a survey. **Graphs and Combinatorics**, v. 24, n. 4, p. 237–263, Sep 2008. ISSN 1435-5914.
- 10 ELEKES, M.; SOUKUP, D. T.; SOUKUP, L.; SZENTMIKLÓSSY, Z. Decompositions of edge-colored infinite complete graphs into monochromatic paths. **Discrete Mathematics**, v. 340, n. 8, p. 2053 – 2069, 2017. ISSN 0012-365X.
- 11 ERDŐS, P.; HAJNAL, A.; MATE, A.; RADO, R. Combinatorial set theory: Partition relations for cardinals. **Studies in Logic and the Foundations of Mathematics**, v. 106, 1984.
- 12 GERENCSÉR, L.; GYÁRFÁS, A. On ramsey-type problems. **Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math**, v. 10, p. 167–170, 1967.
- 13 GYÁRFÁS, A. Covering complete graphs by monochromatic paths. In: _____. **Irregularities of Partitions**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1989. p. 89–91. ISBN 978-3-642-61324-1.
- 14 ERDŐS, P.; GYÁRFÁS, A.; PYBER, L. Vertex coverings by monochromatic cycles and trees. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, v. 51, n. 1, p. 90 – 95, 1991. ISSN 0095-8956.

- 15 GYÁRFÁS, A. Monochromatic path covers. **Congressus Numerantium**, UTILITAS MATHEMATICA PUBLISHING INC, p. 201–202, 1995.
- 16 SEIFE, C. Erdős’s hard-to-win prizes still draw bounty hunters. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 296, n. 5565, p. 39–40, 2002. ISSN 0036-8075.
- 17 POKROVSKIY, A. Partitioning edge-coloured complete graphs into monochromatic cycles and paths. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, v. 106, p. 70 – 97, 2014. ISSN 0095-8956.
- 18 RADO, R. Monochromatic paths in graphs. In: BOLLOBÁS, B. (Ed.). **Advances in Graph Theory**. [S.l.]: Elsevier, 1978, (Annals of Discrete Mathematics, v. 3). p. 191 – 194.
- 19 CHOLAK, P. A.; IGUSA, G.; PATEY, L.; SOSKOVA, M. I.; TURETSKY, D. The rado path decomposition theorem. **Israel Journal of Mathematics**, Springer Science and Business Media LLC, Aug 2019. ISSN 1565-8511.
- 20 GYÁRFÁS, A.; SÁRKÖZY, G. N. Monochromatic path and cycle partitions in hypergraphs. **the electronic journal of combinatorics**, v. 20, n. 1, p. 18, 2013.
- 21 BUSTAMANTE, S.; CORSTEN, J.; FRANKL, N. Partitioning infinite hypergraphs into few monochromatic berge-paths. **Graphs and Combinatorics**, Jan 2020. ISSN 1435-5914.
- 22 AYEL, J. Sur l’existence de deux cycles supplémentaires unicolores. **Disjoints et De Couleurs Différentes Dans un Graphe Complet Bicolore (Ph. D. thesis)**, Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 1979.
- 23 ŁUCZAK, T.; RÖDL, V.; SZEMERÉDI, E. Partitioning two-coloured complete graphs into two monochromatic cycles. **Combinatorics, Probability and Computing**, Cambridge University Press, v. 7, n. 4, p. 423–436, 1998.
- 24 ALLEN, P. Covering two-edge-coloured complete graphs with two disjoint monochromatic cycles. **Combinatorics, Probability and Computing**, Cambridge University Press, v. 17, n. 4, p. 471–486, 2008.
- 25 BESSY, S.; THOMASSÉ, S. Partitioning a graph into a cycle and an anticycle, a proof of lehel’s conjecture. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, v. 100, n. 2, p. 176 – 180, 2010. ISSN 0095-8956.
- 26 GYÁRFÁS, A.; RUSZINKÓ, M.; SÁRKÖZY, G. N.; SZEMERÉDI, E. An improved bound for the monochromatic cycle partition number. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, v. 96, n. 6, p. 855 – 873, 2006. ISSN 0095-8956.
- 27 BUSTAMANTE, S. **Hypergraph cycle partitions**. Tese (Doutorado) — Ph. D. Thesis, Universidad de Chile, 2018.
- 28 HAXELL, P. E.; KOHAYAKAWA, Y. Partitioning by monochromatic trees. **journal of combinatorial theory, Series B**, Academic Press, v. 68, n. 2, p. 218–222, 1996.

- 29 BAL, D.; DEBIASIO, L. Partitioning random graphs into monochromatic components. **The Electronic Journal of Combinatorics**, The Electronic Journal of Combinatorics, v. 24, n. 1, Feb 2017. ISSN 1077-8926.
- 30 DEBIASIO, L.; MCKENNEY, P. Density of monochromatic infinite subgraphs. **Combinatorica**, v. 39, n. 4, p. 847–878, Aug 2019. ISSN 1439-6912.
- 31 HAJNAL, A.; KOMJÁTH, P.; SOUKUP, L.; SZALKAI, I. Decompositions of edge colored infinite complete graphs. In: **Colloq. Math. Soc. János Bolyai**. [S.l.: s.n.], 1987. v. 52, p. 277–280.
- 32 HRUŠÁK, M. Combinatorics of filters and ideals, set theory and its applications, 29–69. **Contemp. Math**, v. 533, p. 345–352, 2011.
- 33 MATHIAS, A. R. Happy families. **Annals of Mathematical logic**, North-Holland, v. 12, n. 1, p. 59–111, 1977.
- 34 FARAH, I. Semiselective coideals. **Mathematika**, London Mathematical Society, v. 45, n. 1, p. 79–103, 1998.
- 35 ERDÖS, P.; GALVIN, F. Monochromatic infinite paths. **Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 113, n. 1, p. 59 – 70, 1993. ISSN 0012-365X.
- 36 ERDÖS, P. Some remarks on ramsay’s theorem. **Canadian Mathematical Bulletin**, Cambridge University Press, v. 7, n. 4, p. 619–622, 1964.
- 37 GERENCSÉR, L.; GYÁRFÁS, A. On ramsey-type problems. **Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math**, v. 10, p. 167–170, 1967.
- 38 LO, A.; SANHUEZA-MATAMALA, N.; WANG, G. **Density of monochromatic infinite paths**. 2018.
- 39 CORSTEN, J.; DEBIASIO, L.; LAMAISSON, A.; LANG, R. Upper density of monochromatic infinite paths. **Advances in Combinatorics**, Alliance of Diamond Open Access Journals, Oct 2019. ISSN 2517-5599.
- 40 GYÁRFÁS, A.; RUSZINKÓ, M.; SÁRKÖZY, G. N.; SZEMERÉDI, E. Three-color ramsey numbers for paths. **Combinatorica**, Citeseer, v. 27, n. 1, p. 35–69, 2007.
- 41 RAYNAUD, H. Sur le circuit hamiltonien bi-coloré dans les graphes orientés. **Periodica Mathematica Hungarica**, Akadémiai Kiadó, co-published with Springer Science+ Business Media, v. 3, n. 3-4, p. 289–297, 1973.
- 42 BÜRGER, C.; DEBIASIO, L.; GUGGIARI, H.; PITZ, M. Partitioning edge-coloured complete symmetric digraphs into monochromatic complete subgraphs. **Discrete Mathematics**, v. 341, n. 11, p. 3134 – 3140, 2018. ISSN 0012-365X.
- 43 GYÁRFÁS, A. Partition coverings and blocking sets in hypergraphs. **Communications of the Computer and Automation Institute of the Hungarian Academy of Sciences**, v. 71, p. 62, 1977.
- 44 TUZA, Z. Some special cases of ryser’s conjecture. **Unpublished manuscripts**, 1979.