



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**JONAS AGUIAR JUNIOR**

**FERRAMENTA PARA CONSTRUÇÃO DE MODELOS PARA ANÁLISE  
ISOGOMÉTRICA DE MATERIAIS COMPÓSITOS**

**FORTALEZA**

**2019**

JONAS AGUIAR JUNIOR

FERRAMENTA PARA CONSTRUÇÃO DE MODELO PARA ANÁLISE  
ISOGOMÉTRICA DE MATERIAIS COMPÓSITOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Evandro Parente Junior

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

A229f Aguiar Junior, Jonas.  
Ferramenta para construção de modelos para análise isogeométrica de materiais compósitos / Jonas Aguiar Junior. – 2019.  
85 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Curso de Engenharia Civil, Fortaleza, 2019.  
Orientação: Prof. Dr. Evandro Parente Junior.

1. NURBS. 2. Análise Isogeométrica. 3. Placas. 4. Materiais Compósitos. I. Título.

CDD 620

---

JONAS AGUIAR JUNIOR

FERRAMENTA PARA CONSTRUÇÃO DE MODELO PARA ANÁLISE  
ISOGOMÉTRICA DE MATERIAIS COMPÓSITOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Aprovada em: 28/11/2019.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Evandro Parente Junior (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. João Batista Marques Sousa Júnior  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

MSc. Elias Saraiva Barroso  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

A Deus.

À minha mãe Antônia pelo amor e incentivo  
que me deu em toda minha vida.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por ter me proporcionado a oportunidade de produzir este trabalho.

À minha mãe e à minha avó por toda dedicação e amor que me deram ao longo de todos os momentos da minha vida. Sem o incentivo delas para que eu pudesse alcançar meus sonhos e o apoio que me passaram quando mais precisei, eu não teria conseguido chegar até aqui.

Ao meu professor orientador, Evandro Parente Junior, pela excelente orientação e por toda a ajuda e incentivo que me deu ao longo desses anos, a quem eu tenho grande admiração pelo exemplo de professor e pesquisador.

Ao professor João Batista Marques Sousa Júnior por aceitar fazer parte da banca examinadora.

Ao colega do LMCV, Elias Saraiva Barroso, pela ajuda e ensinamentos proporcionados nos últimos meses e por aceitar fazer parte da banca examinadora.

A todos os amigos que fiz durante o curso de Engenharia Civil pelo companheirismo, incentivo e ajuda nos momentos difíceis.

À CAPES pelo suporte financeiro ao longo do período como bolsista de Iniciação Acadêmica.

“If I have seen further, it is by standing upon the  
shoulders of giants.”

*Isaac Newton*

## RESUMO

O Método do Elementos Finitos (MEF) é atualmente o método numérico mais utilizado na análise de estruturas. Em alternativa ao MEF, recentemente foi proposta a Análise Isogeométrica (AIG) que utiliza para a representação dos modelos as mesmas funções utilizadas em *softwares* CAD como B-Splines e NURBS. Na AIG é utilizada a mesma formulação isoparamétrica do MEF, porém os deslocamentos são aproximados utilizando as funções que descrevem as geometrias dos elementos. Com isso, elimina-se o erro da aproximação da geometria que ocorre no MEF. Outra vantagem da AIG em relação ao MEF é facilidade do refinamento. As NURBS são descritas por um conjunto de pontos de controle e vetores de valores paramétricos, permitindo representar tanto modelos padrões (quádricas, círculos e cônicas) quanto de forma livre utilizando a mesma base de dados. Contudo, por ser um método ainda recente, poucos *softwares* implementam AIG, sendo mais comuns *softwares* acadêmicos como o FAST desenvolvido no Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará (UFC). Entretanto, a dificuldade de utilização da AIG no FAST se baseia no pré-processamento de dados. Tendo em vista isso, neste trabalho foi realizado uma pesquisa de *softwares* com formulação NURBS com a finalidade de se adotar um como ferramenta de pré-processamento de dados para AIG. Logo, foram tomados critérios de escolha como custo, acessibilidade dos dados das NURBS e comunicação entre os arquivos gerados pelo programa para escolha do *software* de modelagem gráfica utilizando NURBS e o FAST. Assim sendo, optou-se pelo Rhinoceros, *software* bastante utilizado para essa finalidade na comunidade acadêmica, criando modelos de placas para análise lineares, de estabilidade e vibrações. Utilizando o Rhinoceros, criou-se um código em Python capaz de se gerar um arquivo contendo todos os dados das NURBS. Os atributos como carregamento, condições de contorno, tipo de análise e propriedades dos materiais foram associados através do FAST\_ModDef, outro *software* desenvolvido no LMCV, gerando o arquivo de entrada para análise no FAST. As análises foram feitas para materiais isotrópicos e materiais compósitos, comparando os resultados obtidos com a Literatura e MEF, obtendo excelentes resultados.

**Palavras-chave:** NURBS, Análise Isogeométrica, Placas, Materiais Compósitos.

## ABSTRACT

The Finite Element Method (FEM) is currently the most widely used numerical method for structural analysis. The Isogeometric Analysis (IGA) is an alternative to FEM that uses for representation of the models the same functions used in *software* CAD as B-Splines and NURBS. In IGA, the same isoparametric formulation of the FEM is used, but the displacements are approximated using the functions that describe the model geometry. With this, the geometry approach error occurring in FEM is eliminated. Another advantage of IGA over FEM is ease of refinement. NURBS are described by a set of control points and parametric value (*knot vector*), providing representations of both standard models (quadrics, circles and conic sections) and free form using the same database. Because it is an even recent method, there are few programs using IGA, being more common academic *software*, such as FAST developed in the Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização in the Universidade Federal do Ceará, the difficulty of using IGA in FAST is based on the pre-processing of data. In view of this, in this work, research of *software* with NURBS formulation was carried out in order to adopt one as a data pre-processing tool for IGA. Therefore, criteria of choice were taken such as cost, accessibility of NURBS data, and communication between the files generated by the program to choose graphical modeling *software* using NURBS and FAST. Rhinoceros, a *software* widely used for this purpose in the academy community, was adopted in this work to create models for linear analysis, stability, and vibrations analysis. Using Rhinoceros, a Python code was created capable of generating a file containing all NURBS data. Attributes such as loading, contour conditions, type of analysis, and material properties were associated through FAST\_ModDef, other *software* developed in LMCV, generating the input file for analysis in FAST. The analyses were made for isotropic materials and composite materials, comparing the results obtained with the Literature and MEF, obtaining excellent results.

**Keywords:** NURBS, Analysis Isogeometric, Plates, Composite Materials.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Deslocamentos de um ponto na placa (FSDT) .....	18
Figura 2 - Variação de deformações e tensões ao longo da espessura do laminado segundo a Teoria de Lâmina Equivalente.....	21
Figura 3 - Esquema de laminação .....	21
Figura 4 - Sistema de coordenadas de um laminado .....	22
Figura 5 - Seção transversal de modelos de FGM.....	25
Figura 6 - Esquema das etapas de uma análise estrutural.....	28
Figura 7 - Curvas de Bézier cúbicas .....	30
Figura 8 - Contorno de fontes PostScript utilizando curvas de Bézier.....	31
Figura 9 - Efeito da mudança de peso de uma curva Bézier .....	32
Figura 10 - Superfície de Bézier.....	33
Figura 11 – Controle local da curva com alteração da posição de um ponto de controle .....	33
Figura 12 - Funções B-Splines e derivadas .....	35
Figura 13 - Curva B-Spline com inserção de knots ( $\xi = 2$ ) .....	36
Figura 14 - Exemplo de refinamento h de funções quadráticas .....	36
Figura 15 - Exemplo de refinamento p e funções quadráticas para cúbicas.....	37
Figura 16 - Exemplo de refinamento k.....	37
Figura 17 – Semicírculo formado por B-Spline e NURBS .....	38
Figura 18 - Superfície NURBS.....	39
Figura 19 - Efeito do refinamento h .....	40
Figura 20 - Efeito do refinamento p .....	41
Figura 21 - Múltiplos patches em uma placa com furo .....	42
Figura 22 - Curva desenhada no Inkscape.....	52
Figura 23 - Screenshot de uma Ferrari modelada no Inkscape.....	52
Figura 24 - Modelo desenhado no Blender .....	53
Figura 25 - Curva NURBS construída no AutoCAD .....	54
Figura 26 - Área de trabalho do Rhinoceros com superfície modelada .....	56
Figura 27 - EditPythonScript.....	56
Figura 28 - Superfície no FAST_ModDef.....	57
Figura 29 - Superfície criada no Rhinoceros .....	58
Figura 30 - Processo de construção das curvas de uma superfície.....	59
Figura 31 - Barra de comando das curvas no Rhinoceros .....	59

Figura 32 - Barra de comandos do Rhinoceros .....	60
Figura 33 - Barra de comando de superfícies no Rhinoceros – criação de superfícies a partir de 2, 3 ou 4 curvas.....	60
Figura 34 - Mudança de grau da superfície NURBS.....	61
Figura 35 - Barra de comando com mudança de grau da superfície .....	61
Figura 36 - Inserção de knots em uma superfície NURBS.....	62
Figura 37 - Barra de comandos de inserção de knots no Rhinoceros.....	62
Figura 38 - Superfície refinada no Rhinoceros.....	63
Figura 39 - Superfície de placa quadrada .....	64
Figura 40 - Barra de comando de superfícies no Rhinoceros – criação de superfícies a partir de 2 pontos .....	64
Figura 41 - Barra de comando com entrada dos pontos para criação da superfície .....	64
Figura 42 - Superfície de placa quadrada após refinamento .....	65
Figura 43 - Superfície com múltiplos patches.....	66
Figura 44 - Cilindro submetido a pressão interna .....	67
Figura 45 - Modelos isogeométricos do cilindro.....	68
Figura 46 - Gráfico de tensão radial do cilindro em $N/m^2$ .....	69
Figura 47 - Gráfico de tensão circunferencial do cilindro em $N/m^2$ .....	69
Figura 48 - Placa laminada $[0/90]_s$ .....	70
Figura 49 - Modelos inicial e refinado de placa quadrada .....	72
Figura 50 - Gráfico de resultados da placa laminada .....	73
Figura 51 - Divisões de Patches da placa com furo circular central .....	73
Figura 52 - Modelo isogeométrico da placa com furo circular central .....	74
Figura 53 - Discretização da placa com furo central pelo MEF.....	75
Figura 54 - Coeficientes de flambagem para diferentes expoentes .....	76
Figura 55 - Placa com furo em forma de coração.....	77
Figura 56 - Modelo isogeométrico de placa quadrada com furo em forma de coração .....	78

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Peso dos pontos de controle do semicírculo.....	39
Tabela 2 - Resultados do cilindro submetido à pressão interna .....	69
Tabela 3 - Resultados da placa laminada.....	72
Tabela 4 - Resultados para placa isotrópica com furo central .....	75
Tabela 5 - Resultados da placa isotrópica com furo em forma de coração .....	78
Tabela 6 - Resultados da placa laminada com furo em forma de coração .....	80

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>13</b>
<b>1.1</b>	<b>JUSTIFICATIVA</b> .....	<b>14</b>
<b>1.2</b>	<b>OBJETIVOS</b> .....	<b>15</b>
<b>1.2.1</b>	<b>Objetivo Geral</b> .....	<b>15</b>
<b>1.2.2</b>	<b>Objetivos Específicos</b> .....	<b>15</b>
<b>1.3</b>	<b>ORGANIZAÇÃO DO TEXTO</b> .....	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>PLACAS DE MATERIAIS COMPÓSITOS</b> .....	<b>17</b>
<b>2.1</b>	<b>TEORIA DE REISSNER-MINDLIN</b> .....	<b>18</b>
<b>2.2</b>	<b>COMPÓSITOS REFORÇADOS POR FIBRAS</b> .....	<b>19</b>
<b>2.3</b>	<b>MATERIAIS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL</b> .....	<b>24</b>
<b>3</b>	<b>MODELAGEM GEOMÉTRICA</b> .....	<b>28</b>
<b>3.1</b>	<b>CURVAS DE BÉZIER</b> .....	<b>30</b>
<b>3.2</b>	<b>SUPERFÍCIES DE BÉZIER</b> .....	<b>32</b>
<b>3.3</b>	<b>B-SPLINES</b> .....	<b>33</b>
<b>3.4</b>	<b>NURBS</b> .....	<b>38</b>
<b>3.4.1</b>	<b>Inserção de knot e elevação de grau</b> .....	<b>40</b>
<b>3.4.2</b>	<b>Múltiplos Patches</b> .....	<b>41</b>
<b>4</b>	<b>ANÁLISE ISOGOMÉTRICA</b> .....	<b>43</b>
<b>4.1</b>	<b>DESLOCAMENTOS E DEFORMAÇÕES</b> .....	<b>44</b>
<b>4.2</b>	<b>EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO E MATRIZ DE RIGIDEZ</b> .....	<b>45</b>
<b>4.3</b>	<b>ESTABILIDADE</b> .....	<b>47</b>
<b>4.4</b>	<b>FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAÇÃO</b> .....	<b>48</b>
<b>5</b>	<b>FERRAMENTA DE MODELAGEM ISOGOMÉTRICA</b> .....	<b>51</b>
<b>5.1</b>	<b>SOFTWARES DE PRÉ-PROCESSAMENTO DE DADOS</b> .....	<b>51</b>
<b>5.1.1</b>	<b>Inkscape</b> .....	<b>51</b>
<b>5.1.2</b>	<b>Blender</b> .....	<b>53</b>
<b>5.1.3</b>	<b>AutoCAD</b> .....	<b>53</b>
<b>5.1.4</b>	<b>GiD</b> .....	<b>54</b>
<b>5.1.5</b>	<b>Rhinoceros</b> .....	<b>55</b>
<b>5.2</b>	<b>RHINOCEROS COMO FERRAMENTA DE PRÉ-PROCESSAMENTO DE AIG</b> .....	<b>55</b>
<b>5.2.1</b>	<b>Criação de modelo com um único patch</b> .....	<b>58</b>

5.2.2 Criação de modelo com mais de um patch .....	65
6 EXEMPLOS NUMÉRICOS .....	67
6.1 CILINDRO SUBMETIDO À PRESSÃO INTERNA .....	67
6.2 LAMINADO SIMPLEMENTE APOIADO SUBMETIDO À CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA .....	70
6.3 ESTABILIDADE DE PLACA COM FURO CIRCULAR CENTRAL .....	73
6.4 VIBRAÇÃO EM PLACA COM FURO EM FORMA DE CORAÇÃO .....	76
7 CONCLUSÕES .....	81
REFERÊNCIAS .....	83

## 1 INTRODUÇÃO

Os materiais compósitos são formados pela combinação de dois ou mais materiais que unidos formam um novo material com propriedades físicas, mecânicas e químicas superiores (BARBERO, 2011).

Sendo assim, os materiais compósitos reforçados por fibras, são materiais constituídos de matriz polimérica com fibras unidirecionais, postas em lâminas empilhadas e perfeitamente unidas. Esse material tem ganhado espaço em diversas aplicações, como na indústria automobilística, aeronáutica, naval e na engenharia civil, com características que demonstram desempenho superior a outros materiais, como alta resistência à corrosão e à fadiga e elevadas relações rigidez/peso e resistência/peso, além de baixa condutividade térmica.

Com o intuito de se obter componentes estruturais mais leves e com maiores resistências, se tem aumentado a utilização de compósitos laminados cada vez mais esbeltos. No entanto, com o aumento da esbelteza, essas estruturas se tornam cada vez mais flexíveis, podendo ocasionar problemas de estabilidade e grandes deslocamentos. Assim sendo, problemas de estabilidade e não linearidade geométrica deve ser considerada na análise de estruturas laminadas.

Outro exemplo de material compósito trata-se de Materiais com Gradação Funcional (*Functionally Graded Materials* – FGM), possuindo a vantagem de suportar elevadas temperaturas se comparados aos compósitos tradicionais, ganhando cada vez mais destaque no cenário mundial. Em relação aos compósitos laminados, há a eliminação da descontinuidade das tensões com conseqüente eliminação dos problemas relacionados à delaminação.

Os Materiais de Gradação Funcional conseguem unir as melhores propriedades de cada material que o constitui, como por exemplo, a resistência mecânica do aço e a capacidade de suportar elevadas temperaturas da cerâmica, formando um material homogêneo. Dessa forma, esse tipo de material torna-se uma solução em casos de estruturas que necessitem de desempenho superior em diversas características, como por exemplo resistência mecânica e suportar elevadas temperaturas.

Assim sendo, com a finalidade de obter análises em placas e cascas com laminações, geometrias, carregamentos e condições de contorno mais complexas é necessário o uso de métodos computacionais, visto que soluções analíticas só serão possíveis em estruturas com essas características mais simplificadas.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é, atualmente, o método mais utilizado na análise de estruturas. O método numérico é capaz de realizar análises com geometrias,

carregamentos e condições de contorno complexas, além de admitir diferentes combinações de laminações. Com o MEF também é possível a análise considerando os problemas de estabilidade e dinâmica.

Em alternativa ao MEF, foi proposto por Hughes e colaboradores a Análise Isogeométrica (HUGHES, 2005), cujas funções utilizadas para representação da geometria das peças são as mesmas utilizadas por sistemas CAD (*Computer Aided Design*), como as *Basis Spline* (B-Spline) e *Non-Uniform Rational B-Splines* (NURBS). Na AIG é utilizada a mesma formulação isoparamétrica do MEF, sendo que os deslocamentos são aproximados de acordo com as funções que descrevem as geometrias dos elementos. Dessa forma, elimina-se o erro da aproximação da geometria, além de facilitar o refinamento do método.

A dificuldade da AIG se baseia no pré-processamento de dados, na qual é necessário a identificação das NURBS para realização da análise. Alguns *softwares* como Rhinoceros (Rhino3d, 2019), Maya (Autodesk Maya, 2019), AutoCAD (Autodesk AutoCAD, 2019) e Blender (Blender 2.80, 2019) utilizam a formulação NURBS para modelagem geométrica bidimensional e tridimensional.

A partir dos dados obtidos desses *softwares* relacionados às NURBS é possível fazer a AIG utilizando o FAST, que é um programa desenvolvido no Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará (UFC), cuja formulação é baseada tanto no MEF quanto na AIG. Este programa é capaz de realizar análises estáticas e dinâmicas, lineares e não lineares geométricas, além de verificar a estabilidade da estrutura como realizado em Barroso (2015).

Portanto, neste trabalho, buscou-se um *software* capaz de auxiliar como ferramenta de pré-processamento de dados para AIG, de tal forma que melhor se adapte às necessidades no quesito a valores e facilidade de uso. Com isso, se propôs analisar, através da AIG, o comportamento de estruturas formadas a partir dos modelos geométricos obtidos na ferramenta de pré-processamento de dados adotados, e, posteriormente, comparar os resultados obtidos através do FAST (FAST Version 2.1.2, 2019), com os resultados do ABAQUS (ABAQUS User's Manual, 2010), *software* de análise baseado no MEF.

## 1.1 Justificativa

A Análise Isogeométrica possui uma vantagem com relação ao Método dos Elementos Finitos que é a possibilidade de representar tantos modelos matemáticos padrões (quádricas, círculos e cônicas) quanto modelos de forma livre. Entretanto, por se tratar de um

método relativamente novo, existe um número reduzido de *softwares* que implementam AIG em comparação com o MEF. Dessa forma, *softwares* acadêmicos são gerados para realização de AIG, mas a dificuldade resulta no pré-processamento dos modelos geométricos.

Para realizar a análise estrutural, o FAST recebe um arquivo de entrada contendo os dados da geometria do modelo, material, condições de contorno e carregamento. Devido ao tamanho do arquivo de entrada, torna-se impraticável a escrita manual dele. No entanto, foram desenvolvidas interfaces capazes de gerar modelos para AIG, como foi realizado em trabalhos anteriores, como o programa desenvolvido por Rocha (2018).

Todavia, alguns modelos apresentam elevada complexidade, portanto, torna-se necessário o uso de uma ferramenta capaz de gerar modelos complexos. Logo, o presente trabalho justifica-se na necessidade de se obter uma ferramenta capaz de auxiliar no pré-processamento dos dados geométricos para AIG utilizando FAST, para então se realizar análises de estruturas com material isotrópico e ortotrópico.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 *Objetivo Geral*

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma ferramenta que auxilie na realização do pré-processamento de dados para Análise Isogeométrica utilizando o *software* FAST para posterior análise de modelos bidimensionais de placas feitos de materiais homogêneos e compósitos.

### 1.2.2 *Objetivos Específicos*

- (a) Pesquisar e adotar um *software* mais adequado para geração de modelos isogeométricos;
- (b) Criar um mecanismo para exportação da geometria do modelo;
- (c) Criar o arquivo de entrada para análise no FAST;
- (d) Realizar análises lineares, de estabilidade da estrutura e frequências naturais de placas de material compósito;
- (e) Comparar os resultados obtidos na Análise Isogeométrica com os valores da literatura e calculados pelo Método dos Elementos Finitos.

### 1.3 Organização do Texto

O presente trabalho foi dividido em sete capítulos. O Capítulo 2 apresenta uma discussão entre as teorias de Kirchhoff-Love e Reissner-Mindlin, sendo essa última a utilizada neste trabalho. Em seguida são apresentados os principais conceitos de dois materiais compósitos: compósitos reforçados por fibras e material com gradação funcional, mostrando como são calculados os esforços internos nesses materiais.

No Capítulo 3 é apresentada uma revisão de Modelagem Geométrica, com representações de Bézier, B-Spline e NURBS, apresentando conceitos e algoritmos utilizados na formulação da Análise Isogeométrica.

No Capítulo 4 são expostas as expressões utilizadas no cálculo dos deslocamentos, deformações e matriz de rigidez, bem como as equações de equilíbrio do sistema a partir das curvas da AIG. Além disso, nesse capítulo é apresentado conceitos de estabilidade e frequências naturais.

O Capítulo 5 apresenta um breve comentário acima dos *softwares* pesquisados que utilizam a formulação NURBS para representação do modelo geométrico, justificando a escolha do Rhinoceros como ferramenta de pré-processamento de dados para construção de modelos para AIG nesse trabalho. Em seguida é descrito o processo para realização do arquivo de entrada da AIG no FAST utilizando o Rhino e o FAST\_ModDef.

No Capítulo 6 são realizados exemplos numéricos, utilizando tanto material isotrópico quanto material compósito, comparando os resultados obtidos com solução analítica, com a Literatura e MEF.

Por fim, no Capítulo 7 são realizadas as conclusões e comentários finais da monografia.

## 2 PLACAS DE MATERIAIS COMPÓSITOS

O foco deste trabalho é a análise de placas e cascas que são elementos bidimensionais, ou seja, com duas dimensões bem maiores que a terceira correspondente a espessura. A principal diferença entre estes elementos está no fato de as placas serem planas enquanto as cascas podem ser curvas no espaço.

As placas e cascas são encontradas em diversos ramos da engenharia. Em Engenharia Civil e Arquitetura, por exemplo, essas estruturas podem ser encontradas em forma de lajes, tabuleiro de pontes e vigas-paredes. Por outro lado, na Engenharia Naval e Aeronáutica, placas e cascas são encontradas nas estruturas dos navios e fuselagem dos aviões. Nas indústrias petroquímicas e automobilísticas, exemplos dessas estruturas são dadas nos risers e carroceria, respectivamente.

Dessa forma, a análise de placas e cascas são tão importantes na Engenharia. Contudo, análise de placas possui soluções analíticas apenas em casos de estruturas com características mais simplificadas. Portanto, se faz necessário o uso de métodos computacionais para se realizar análises de forma generalizada, como o MEF e AIG.

Segundo Praciano (2018) as teorias mais difundidas na Engenharia para análise de placas e cascas são as teorias de Kirchhoff-Love e de Reissner-Mindlin. Na teoria de Reissner-Mindlin é considerado o efeito do cisalhamento transversal, sendo comumente usada em análise de cascas espessas, mas podendo ser usada também para cascas finas, enquanto a teoria de Kirchhoff-Love esse efeito é desprezado, portanto adequada para análise de cascas finas.

De acordo com Nguyen-Thanh et al. (2011), a teoria de Kirchhoff-Love requer continuidade  $C^1$  do campo deslocamento, sendo difícil de ser obtido em geometrias de forma livre quando uma base de Lagrange é usada. Portanto, torna-se difícil o estudo de cascas por essa teoria utilizando MEF. No entanto, em AIG, as NURBS são capazes de manter essa continuidade no interior do *patch*, tornando interessante o estudo dessa teoria para análise de cascas finas com a utilização de AIG.

Ainda segundo Nguyen-Thanh et al. (2011), na análise de cascas utilizando a teoria de Kirchhoff-Love existem dificuldade na imposição de condições de contorno, tornando-se um problema em estruturas que utilizam NURBS de múltiplos *patches* conectados entre si. Entretanto, na teoria de Reissner-Mindlin, as condições de contorno são impostas facilmente, o que facilita a conectividade entre os *patches*. Dessa forma, para este trabalho será utilizado a teoria de Reissner-Mindlin.

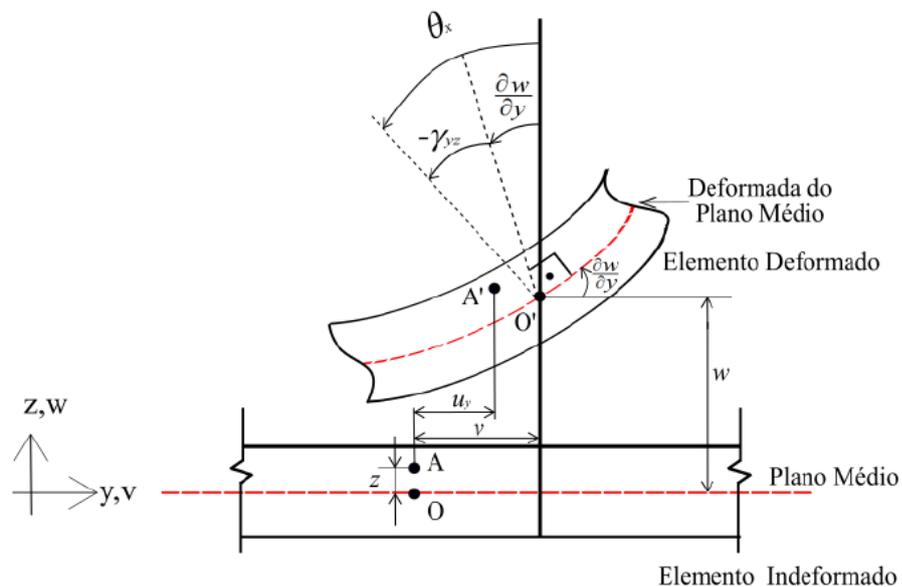
## 2.1 Teoria de Reissner-Mindlin

As hipóteses da teoria de placas de Reissner-Mindlin, também conhecidas como teorias de deformação de cisalhamento de primeira ordem (*First-Order Shear Deformation Theory – FSDT*), que de acordo com Reddy (2004), o campo de deslocamentos é baseado por:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u(x, y) + z\theta_y(x, y) \\ u_y(x, y, z) &= v(x, y) - z\theta_x(x, y) \\ u_z(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são deslocamentos ao longo dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  e  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são as rotações da reta normal ao meio do plano da placa em torno dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente. A Figura 1 mostra esse campo de deslocamentos proveniente das hipóteses da teoria de Reissner-Mindlin, apresentados para deslocamentos nos eixos  $y$  e  $z$ , mas que são válidos também para os eixos  $x$  e  $z$ .

Figura 1 - Deslocamentos de um ponto na placa (FSDT)



Fonte: Praciano (2018)

Dessa forma, é possível observar que quando os deslocamentos são grandes, há uma interação entre os efeitos de membrana e flexão devido a deslocamentos transversais. A seguir tem-se a representação das deformações de membrana  $\epsilon^m$  e curvatura  $\kappa$  e:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Com isso, as deformações de cisalhamento transversais ao plano são dadas como:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \end{bmatrix} \quad (4)$$

Como um dos focos deste trabalho é a análise de estabilidade de placas, será adotada a hipótese de grandes deslocamentos. Isso pode ser feito com o uso das deformações de von Kármán como é apresentado em Praciano (2018), mostrando as deformações de membrana  $\boldsymbol{\varepsilon}^m$  compostas por uma parte linear, proporcionada pelos deslocamentos no plano, e outra parte não linear, devido aos deslocamentos transversais, levando ao acoplamento dos efeitos de membrana flexão.

Além disso, ainda em Praciano (2018) é mostrado que Marguerre estendeu a teoria não linear de placas de von Kármán, revelando que cascas abatidas possuem um acoplamento entre deslocamentos transversais e deformações de membrana devido à curvatura inicial da casca.

## 2.2 Compósitos reforçados por fibras

Materiais compósitos consiste em dois ou mais materiais que juntos produzem propriedades desejáveis que não seria alcançada com algum de seus constituintes separadamente (REDDY, 2004).

Um compósito pode ser formado por fibras imersas em uma matriz polimérica. As fibras de alta resistência (como fibras de carbono) proporcionam ao compósito maior rigidez e

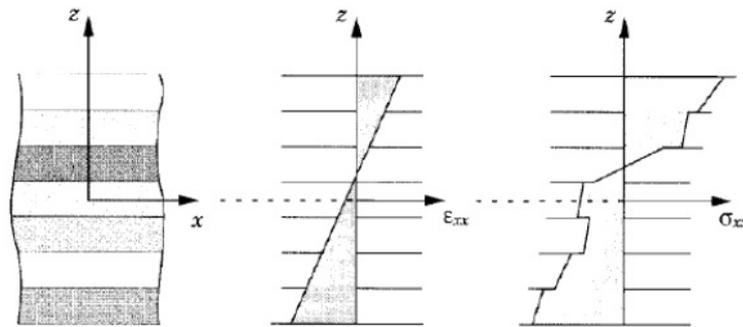
resistência, enquanto a função da matriz polimérica é unir o conjunto de fibras, possibilitando a transferência de carga entre as fibras e os suportes externos, além de proteger as fibras da exposição a intempéries. Com isso, esses materiais têm elevadas relações rigidez/peso e resistência/peso, possibilitando projetos de componentes estruturais leves.

As fibras formadas por um mesmo material seguindo uma mesma direção são chamadas de lâminas. As lâminas quando dispostas e unidas umas sobre as outras, podendo ser de diferentes materiais e direções de fibras, são conhecidos como laminados. Os laminados são assim formados com a finalidade de se alcançar as melhores condições que garantem resistir aos carregamentos pelos quais a estrutura estará submetida. Dessa forma, as fibras são colocadas nas direções que necessitam de maior rigidez e resistência, portanto, tratando-se de um material ortotrópico.

As lâminas por possuírem características diferentes tem seus efeitos combinados para representação do comportamento do laminado. Segundo Ghugal e Shimpi (2001), as teorias que foram originalmente desenvolvidas para placas homogêneas isotrópicas finas, moderadamente grossas e muito grossas são estendidas para material laminado, além de surgirem novas teorias de deformação por cisalhamento desenvolvidas para análise precisa de compósitos laminados. Estas teorias são divididas em duas: as Teorias de Lâmina Equivalente (*Equivalent Single Layer*) e as Teorias de Lâminas Discretas (*Layerwise*).

Nas Teorias de Lâminas Equivalentes o problema passa de tridimensional para bidimensional ao considerar a contribuição de todas as lâminas em uma lâmina equivalente. Dessa forma, são realizadas hipóteses cinemáticas que simplificam o campo de deslocamentos e deformações do laminado, em que as tensões e deformações são descontínuas ao longo da espessura do laminado como é mostrado na Figura 2.

Figura 2 - Variação de deformações e tensões ao longo da espessura do laminado segundo a Teoria de Lâmina Equivalente

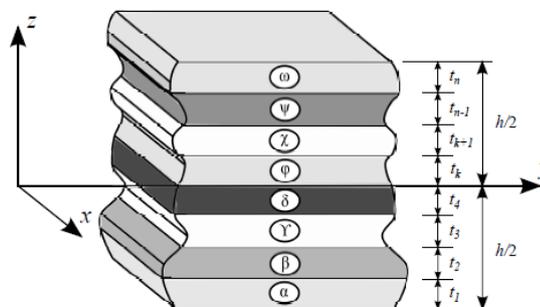


Fonte: Reddy (2004)

Nas Teorias de Lâminas Discretas as lâminas são individualmente modeladas, mantendo o problema tridimensional, portanto obtém de forma mais precisa o campo de deslocamentos e deformações do laminado, tornando capazes de detectar tensões transversais e consequentemente o fenômeno de delaminação.

A Figura 3 mostra o esquema de laminação representada por  $[\alpha/\beta/\gamma/\dots/\omega]$ , em que cada letra representa o ângulo de orientação das fibras, em relação a um eixo de referência e seguindo a ordem de baixo para cima.

Figura 3 - Esquema de laminação



Fonte: Rocha (2013)

Dessa forma, de acordo com o esquema de laminação, em que os ângulos devem estar entre  $-90^\circ$  e  $90^\circ$ , os laminados são classificados quanto a orientação das fibras e em relação à sua simetria. Nos casos em que os laminados possuem somente ângulos de laminações de  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , são chamados de *cross-ply*. Enquanto se possuírem qualquer ângulo de orientação, com pelo menos um diferente de  $0^\circ$  ou  $90^\circ$ , são chamados de *angle-ply*.

No que diz respeito a simetria, os laminados podem ser classificados como simétricos, assimétricos e antissimétricos. O laminado simétrico apresenta simetria ao longo da espessura, do material e da orientação das fibras em relação à sua superfície média. Por exemplo a seguinte laminação  $[0^\circ/45^\circ/45^\circ/0^\circ]$  é simétrica e pode ser representada por  $[0^\circ/45^\circ]_s$ , em

que o índice  $s$  indica a simetria da laminação. Em casos de laminados com um número ímpar de lâminas, o ângulo que não se repete é destacado com um traço sobre ele, como por exemplo  $[45^\circ/-45^\circ/0^\circ/-45^\circ/45^\circ]$  que pode ser representada por  $[45^\circ/-45^\circ/\bar{0}^\circ]_s$ .

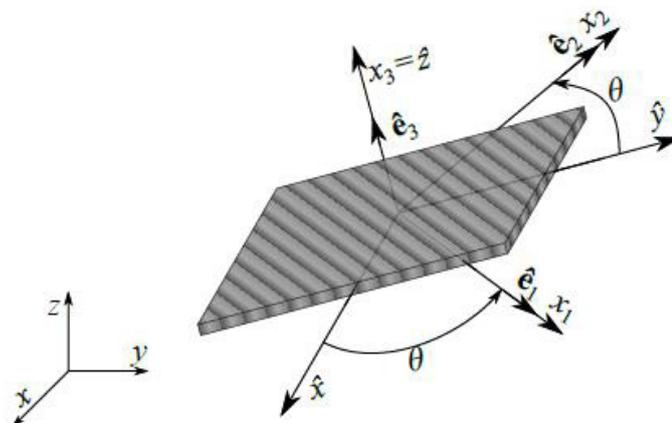
Já os laminados antissimétricos possuem simetria ao longo da espessura e do material, mas antissimetria na orientação das fibras em relação à superfície média. Enquanto os assimétricos não apresentam simetria ao longo da espessura, do material ou orientação de fibras em relação à superfície média.

Além disso, de acordo com Reddy (2004), laminados são ditos balanceados se para cada lâmina acima da superfície média existe outra com mesmo material e espessura, mas com orientação da fibra diferente.

Segundo Barroso (2015), o comportamento mecânico de uma lâmina pode ser apresentado em duas abordagens distintas. Na micromecânica o estudo dos materiais dos compósitos (fibras e matriz) são dados isoladamente e levando em conta a interação entre eles. Já na macromecânica, a análise da lâmina é feita de forma conjunta, ou seja, assume-se que o conjunto entre fibras e matriz da lâmina formem um material compósito e homogêneo.

Dessa forma, abordando a macromecânica, a Figura 4 mostra o sistema de coordenadas global  $(x, y, z)$  de um laminado com fibras unidirecionais. Nesse caso, é apresentado o sistema de coordenadas do material de cada lâmina  $(x_1, x_2, x_3)$ , bem como seus vetores unitários  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ , em que  $x_1$  é a direção paralela a direção das fibras,  $x_2$  está no mesmo plano e perpendicular a  $x_1$  e  $x_3$  é perpendicular à lâmina.

Figura 4 - Sistema de coordenadas de um laminado



Fonte: Barroso (2015)

Reddy (2004) assumiu que a lâmina possui comportamento de um material linear elástico, implicando que a Lei de Hooke generalizada é válida e a relação entre deformações e tensões é dada no plano como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{Q}_s \boldsymbol{\gamma}_1 \quad (6)$$

sendo  $\mathbf{Q}$  a matriz constitutiva da lâmina no sistema de coordenadas locais, cujos termos são dados por:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad Q_{12} = \frac{E_2\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (7)$$

$$Q_{66} = G_{12}; \quad Q_{44} = G_{23}; \quad Q_{55} = G_{13}$$

em que  $E$  representa o módulo de elasticidade,  $G$  o módulo de elasticidade transversal e  $\nu$  o coeficiente de Poisson. Os vetores dados por  $\boldsymbol{\tau}$  e  $\boldsymbol{\gamma}$  são as tensões transversais de cisalhamento e deformações angulares causadas na lâmina.

Na análise de estruturas se torna necessário transformar as tensões na lâmina do sistema local para global. Para tanto são dadas duas matrizes de transformação, uma para as deformações no plano ( $\mathbf{T}$ ) e outra para cisalhamento transversal ( $\mathbf{T}_s$ ), como é mostrado a seguir:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2\sin \theta \cos \theta & 2\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\cos \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (9)$$

dessa forma, as matrizes constitutivas no sistema global são dadas por:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^T \mathbf{Q} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_s = \mathbf{T}_s^T \mathbf{Q}_s \mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \quad (11)$$

As forças e momentos internos podem ser obtidos integrando as tensões ao longo da espessura das lâminas ( $h$ ):

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (12)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (13)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_{xz} \\ V_{yz} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} dz \quad (14)$$

Sendo assim, as tensões resultantes podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^m \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} \rightarrow \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (15)$$

sendo as matrizes **A**, **B**, **D** e **G** os esforços de deformações de membrana, flexão e cisalhamento.

Os termos da matriz **ABDG** são representados como:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}^{(k)} dz & \mathbf{B} &= \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}^{(k)} z dz \\ \mathbf{D} &= \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}^{(k)} z^2 dz & \mathbf{G} &= \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} k_s \bar{\mathbf{Q}}_s^{(k)} dz \end{aligned} \quad (16)$$

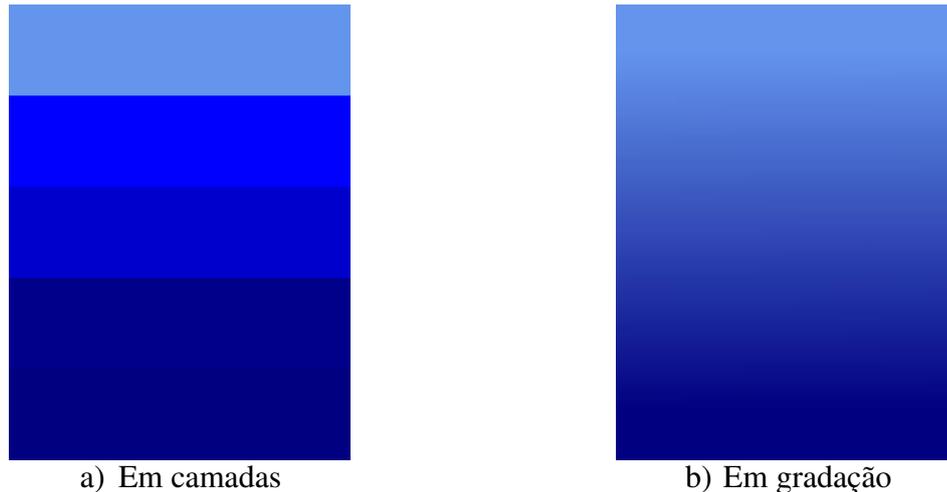
em que  $nl$  é o número de lâminas,  $k$  a lâmina em estudo e  $k_s$  um fator de correção que tem valor de 5/6 para geometrias retangulares.

### 2.3 Materiais com Gradação Funcional

Por mais que os materiais compósitos tradicionais possuam elevadas relações resistência/peso e rigidez/peso, eles são incapazes de resistir a elevadas temperaturas. Dessa forma, os Materiais com Gradação Funcional ou *Functionally Graded Materials* (FGM), tem ganhado destaque. FGM são materiais compósitos constituídos de dois ou mais materiais de forma não homogênea. Segundo Miyamoto et al. (1999), tanto a composição quanto a estrutura do material mudam gradualmente ao longo do volume. Esse material possui diversos campos de estudos como em componentes de reatores nucleares, na indústria aeroespacial, artigo esportivos, lentes de fibras ópticas, entre outros.

FGM são formados por diferentes fases de materiais com propriedades diferentes, em que a fração de volume de cada fase varia gradualmente na direção da gradação, portanto com as propriedades efetivas desse material variando ao longo dessa direção. Dessa forma, segundo Shen (2009), há duas possibilidades para construção de modelo de FGM, conforme a Figura 5.

Figura 5 - Seção transversal de modelos de FGM



Fonte: autor

A primeira imagem da Figura 5 representa uma variação da fração de volume de cerâmica ou metal por partes em cada região, tornando cada camada quase homogênea, enquanto a segunda apresenta uma variação da fração de volume, de cerâmica ou metal, contínua, em que a variação da fração de volume do metal pode ser representada como:

$$V_m = \left( \frac{2z + h}{2h} \right)^N \quad (17)$$

em que  $h$  é a espessura,  $z$  é a coordenada da espessura que varia de  $-h/2$  a  $h/2$ ,  $N$  ( $0 \leq N \leq \infty$ ) é o expoente da variação de volume que proporciona o perfil de variação do material, pelo qual variando esse valor, haverá diversas composições possíveis.

Ainda segundo Shen (2009), as propriedades do FGM devem ser dependentes da temperatura e da posição, sendo modelada pela lei das misturas (modelo de Voigt). Dessa forma, as propriedades  $P$  de cada camada do material, como o módulo de elasticidade  $E$ , o coeficiente de Poisson  $\nu$  e o coeficiente térmico  $\alpha$ , podem ser expressos como:

$$P = \sum_{j=1} P_j V_j \quad (18)$$

em que  $P_j$  e  $V_j$  são as propriedades e a variação da fração de volume do material  $j$  de origem, respectivamente. Além disso, a soma de todas as frações de volume unitária deve ser 1:

$$\sum_{j=1} V_j = 1 \quad (19)$$

De maneira geral, FGM são formados por dois materiais, metal e cerâmica, com isso a Eq. (19) pode ser reescrita como:

$$V_c + V_m = 1 \quad (20)$$

em que  $V_c$  é a fração de volume da cerâmica.

Diferente do que acontece com os compósitos laminados, os FGMs são considerados materiais isotrópicos, portanto não há necessidade de considerar a matriz de transformação  $\mathbf{T}$ . No entanto, como as propriedades variam ao longo da posição  $z$  devido à variação das frações de volume ao longo da espessura, os valores do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson também variam.

Assim como os materiais laminados, considerando FGM com comportamento linear elástico, as relações entre tensões e deformações são dadas através das Eq. (5) e (6), mas com os termos da matriz constitutiva  $\mathbf{Q}$  dada como:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2}; Q_{12} = \frac{E(z)\nu(z)}{1 - \nu(z)^2}; \quad (21)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu(z))}$$

Os esforços são obtidos pela integração das tensões, obtendo:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q}(z) \boldsymbol{\varepsilon} dz \quad (22)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q}(z) \boldsymbol{\varepsilon} z dz \quad (23)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_{xz} \\ V_{yz} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} dz = \int_{-h/2}^{h/2} K_s \mathbf{Q}_s(z) \boldsymbol{\gamma} dz \quad (24)$$

Com isso, a relação constitutiva é dada conforme a Eq. (15), mas com os termos da matriz  $\mathbf{ABDG}$  representados por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q}(z) dz & \mathbf{B} &= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q}(z) z dz \\
 \mathbf{D} &= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q}(z) z^2 dz & \mathbf{G} &= \int_{-h/2}^{h/2} K_s \mathbf{Q}_s(z) dz
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

No Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará (UFC) foram desenvolvidos diversos trabalhos pelos quais exploraram os materiais compósitos (ROCHA, 2013; MORORÓ, 2013; BARROSO, 2015; BARROS, 2016; PRACIANO, 2018; AUAD, 2019). Com isso, foi possível aprofundar o conhecimento a respeito desses materiais necessários para realização deste trabalho.

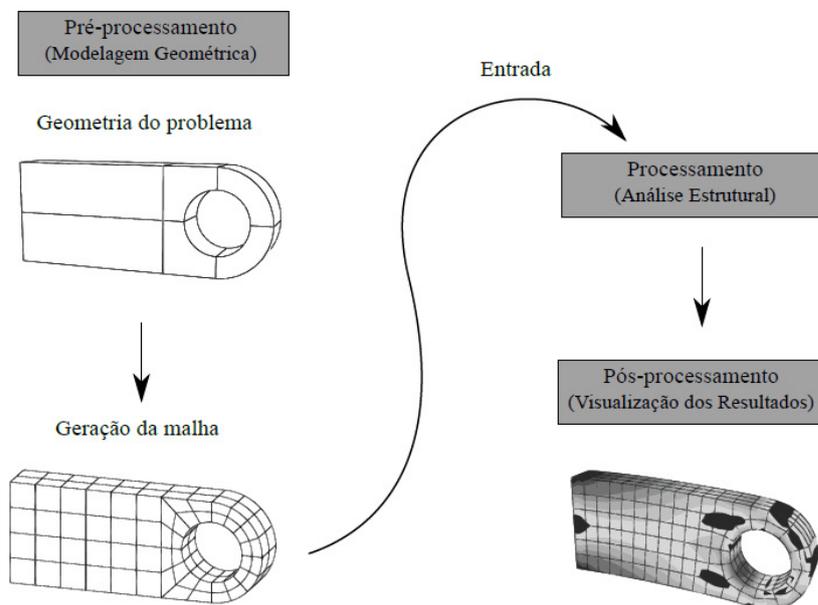
### 3 MODELAGEM GEOMÉTRICA

A Modelagem Geométrica trata-se de um ramo da matemática que utiliza métodos matemáticos e computacionais para descrever formas geométricas de algum objeto. Com isso, tem diversas aplicações na engenharia na criação de modelos para análises dos sólidos e estruturas. Além disso, a Modelagem Geométrica é muito utilizada na indústria cinematográfica na criação de modelagem tridimensional, animações e efeitos especiais.

Dessa forma, a Modelagem Geométrica tem papel fundamental em sistemas CAD (*Computer Aided Design*) formando a base de dados para representação gráfica de objetos bi e tridimensionais. Como exemplos deste tipo de *software* podem ser citados: Rhinoceros, Maya, Blender, AutoCAD, Inkscape (Inkscape Project, 2019) e outros.

Segundo Barroso (2015), atualmente os sistemas CAD têm grande importância na análise estrutural. Isso acontece porque os sistemas de análise estrutural utilizam os dados obtidos pelas ferramentas CAD como pré-processador, em um esquema mostrado Figura 6. Além da geometria do problema é necessário algoritmos para geração de malha, processo fundamental para se obtenha resultados corretos na análise estrutural.

Figura 6 - Esquema das etapas de uma análise estrutural



Fonte: Barroso (2015)

A representação do modelo geométrico em grande parte dos *softwares* CAD é dada por representação pela fronteira (*boundary representation: B-Rep*) ou geometria sólida construtiva (*constructive solid geometry: CSG*).

Em B-Rep o objeto é definido por entidades que limitam suas bordas ou fronteiras (vértices, arestas, faces). Já CSG combina objetos geométricos mais simples como esferas, cubos e cilindros, através de operadores booleanas, translações e rotações. No que diz respeito a AIG, segundo Perduta & Putanowicz (2019), B-Rep é a representação preferida e mais utilizada, embora alguns estudos como feitos por Zuo et al (2015) e Rank el al (2012) tenham tomadas algumas medidas para introdução de modelos CSG para AIG.

Modelos mais complexos são criados a partir da representação de curvas e superfícies. A maneira mais comum de se conceber essas curvas e através de equações explícitas, como o exemplo a seguir da equação de uma parábola no plano  $xy$ :

$$y = ax^2 + b + c \quad (26)$$

No entanto, essa equação pode ser escrita de forma implícita como é mostrado a seguir:

$$C(x, y) = ax^2 + bx + c - y = 0 \quad (27)$$

em que  $C(x, y)$  é a equação implícita. Há situações em que as expressões não são aceitas de maneira explícitas pois as variáveis explícitas não podem ser escritas isoladamente, como:

$$C(x, y) = y \sin x^y - 3x^2 \quad (28)$$

A representação paramétrica é um terceiro tipo de equação utilizada na representação de uma curva. Um exemplo de modelo tratado por funções paramétricas trata-se de uma circunferência de raio unitário com centro na origem:

$$C(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t), \text{ com } 0 \leq t \leq 2\pi \quad (29)$$

em que  $t$  é a variável paramétrica. Essa curva pode ser representada implicitamente da seguinte forma:

$$C(x, y) = \left(x, \sqrt{1 - x^2}\right), \text{ com } 0 \leq x \leq 1 \quad (30)$$

Assim como as curvas, as superfícies podem ser representadas implicitamente. Uma esfera de raio unitário com centro na origem do plano  $xy$ , por exemplo, pode ser descrita como:

$$S(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad (31)$$

Essa equação é descrita de maneira paramétrica como:

$$S(t, u) = (x(t, u), y(t, u), z(t, u)) = (\sin t \cos u, \sin t \sin u, \cos t) \quad (32)$$

com  $0 \leq t \leq 1$  e  $0 \leq u \leq 1$ , sendo  $t$  e  $u$  as variáveis paramétricas. Enquanto uma curva é representada com uma variável paramétrica, em superfícies são necessárias duas variáveis. Dessa forma, a concepção de um sólido se dará através de três variáveis.

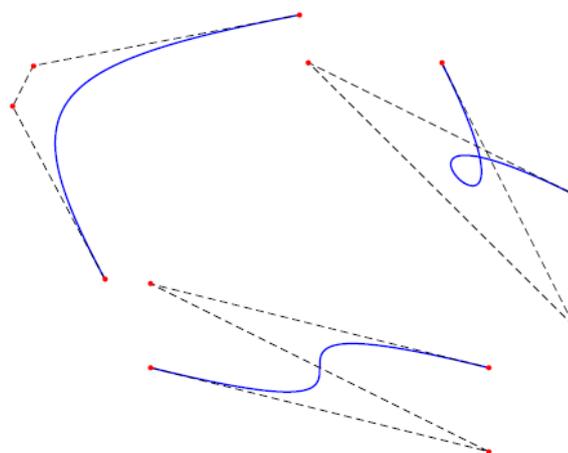
Com a utilização de sistemas CAD através do uso de computadores, as representações paramétricas são dadas através das formulações de Bézier, B-Spline e NURBS.

### 3.1 Curvas de Bézier

As curvas de Bézier são assim chamadas por causa do engenheiro francês Pierre Bézier, quem popularizou essas curvas no uso como ferramenta de projetos e desenhos de automóveis. No entanto, foram criadas por outro engenheiro francês chamado Paul De Casteljau, funcionário de uma fabricante de automóveis. Por mais que o foco da criação das curvas de Bézier fora na aplicação na indústria automobilísticas, muitos *softwares* de computação gráfica fazem uso das curvas de Bézier, como é o caso do Photoshop, para manipulação de imagens, e do Inkscape, para desenho vetorial.

Segundo Sederberg (2014), as curvas de Bézier são formadas por um conjunto de pontos de controle, formando um polígono de controle, no qual a curva de Bézier simula os polígonos de controle. Ainda segundo Sederberg (2014), uma curva de Bézier passa pelos seus primeiros e últimos pontos de controle e é tangente ao polígono de controle nos pontos de controle das extremidades. Além disso, ao mover esses pontos de controle de sua posição, é possível alterar a sua geometria. Na Figura 7 é mostrado exemplos de curvas de Bézier de grau 3 (linhas cheias) através dos polígonos formados pelos pontos de controle (linhas tracejadas).

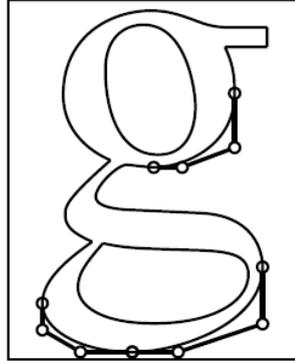
Figura 7 - Curvas de Bézier cúbicas



Fonte: Barroso (2015)

Outra aplicação das curvas de Bézier se dá na criação dos contornos de fontes PostScript, como mostrado na Figura 8.

Figura 8 - Contorno de fontes PostScript utilizando curvas de Bézier



Fonte: Sederberg (2014)

Os pontos de controle que formam as curvas de Bézier são definidos dentro de um intervalo paramétrico, pelo qual a combinação linear desses pontos de controle  $p_i$  formam as curvas de grau  $p$ :

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^{p+1} B_{i,p}(\xi)p_i \quad (33)$$

em que  $\xi$  é a coordenada paramétrica e  $B_{i,p}$  são polinômios de Bernstein de ordem  $p$ . Com a Eq. (33) é possível notar que o número de pontos de controle é igual a  $p + 1$ . Dessa forma, tomando um intervalo paramétrico da curva  $[0,1]$ , conforme Sederberg (2014) os polinômios de Bernstein podem ser calculados como a seguir:

$$B_{i,p}(\xi) = \binom{p}{i} (1 - \xi)^{p-i} \xi^i, i = 0, 1, \dots, p \quad (34)$$

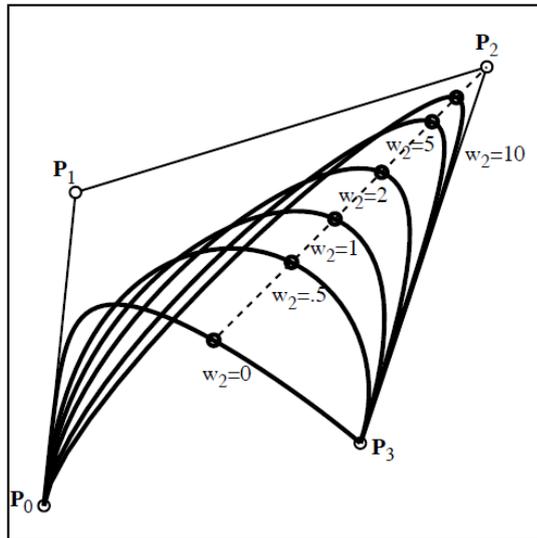
$$\binom{p}{i} = \frac{p!}{i!(p-i)!} \quad (35)$$

Conforme Piegl & Tiller (1997), por mais que funções polinômiais possuam algumas vantagens, existem algumas curvas e superfícies que não podem ser representadas de forma exata, como círculos, elipses, hipérbolas, cilindros, cones, esferas e outros. Dessa forma, a cada ponto de controle é associado a um peso que irá influenciar na representação da curva. A partir de então essas curvas passam a ser chamadas de Bézier racional por serem representadas pela razão de dois polinômios como mostrado:

$$C(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^{p+1} w_i B_{i,p}(\xi) p_i}{\sum_{i=1}^{p+1} w_i B_{i,p}(\xi)} \quad (36)$$

em que  $w_i$  trata-se de cada peso associado a cada ponto de controle  $p_i$ . Analisando a Eq. (36), é possível observar que tendo o peso de cada ponto de controle igual a 1, a equação racional torna-se a tradicional (Eq. (33)). A Figura 9 mostra a influência dos pesos em uma curva.

Figura 9 - Efeito da mudança de peso de uma curva Bézier



Fonte: Sederberg (2014)

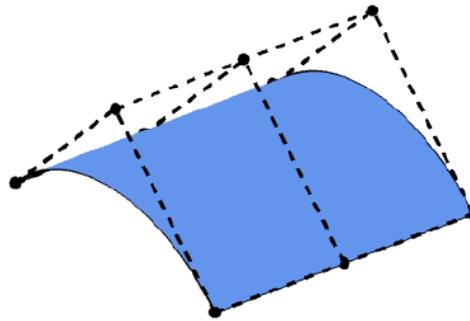
### 3.2 Superfícies de Bézier

Superfícies e sólidos de Bézier são formados por produto tensorial de dois e três polinômios de Bernstein univariantes, respectivamente (ROCHA, 2018). Assim sendo, uma superfície de Bézier racional com grau  $p$  na direção  $\xi$  e  $q$  na direção  $\eta$  é expressa como:

$$S(\xi, \eta) = \frac{\sum_{i=1}^{p+1} \sum_{j=1}^{q+1} w_{ij} B_{i,p}(\xi) B_{j,q}(\eta) \mathbf{P}_{ij}}{\sum_{i=1}^{p+1} \sum_{j=1}^{q+1} w_{ij} B_{i,p}(\xi) B_{j,q}(\eta)} \quad (37)$$

em que  $B_{i,p}(\xi)$  e  $B_{j,q}(\eta)$  são polinômios de Bernstein univariantes da matriz de pontos de controle  $\mathbf{P}$  e  $w_{ij}$  é o peso de cada ponto de controle. A Figura 7 mostra um exemplo de superfície de Bézier.

Figura 10 - Superfície de Bézier

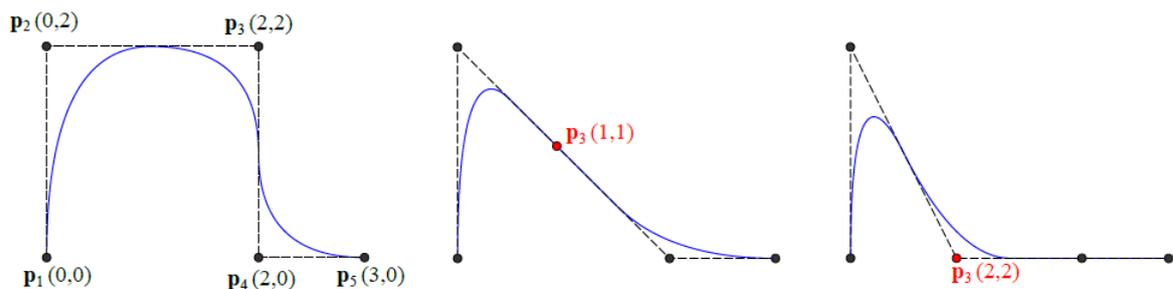


Fonte: Rocha (2018)

### 3.3 B-Splines

Conforme Sederber (2014), curvas B-Splines podem ser consideradas como um método para definir uma sequência de curvas de Bézier de grau  $n$  mantendo a continuidade independentemente de onde os pontos de controle são colocados. Isso acontece, pois, as funções base são limitadas dentro de uma região do espaço paramétrico, chamado de *knots spans*, definido por um vetor de valores paramétricos, os *knots*. Dessa forma, as B-Splines possibilitam o controle da geometria das curvas com a alteração da quantidade e posição dos pontos de controle, como é mostrado na Figura 11.

Figura 11 – Controle local da curva com alteração da posição de um ponto de controle



Fonte: autor

Para Piegl & Tiller (1997), uma curva B-Spline pode ser expressa por uma combinação linear dos pontos de controle  $\mathbf{p}_i$  e as funções base  $N_{i,p}(\xi)$ , como representado a seguir:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{p}_i \quad (38)$$

em que  $n$  é o número de funções bases,  $p$  é o grau da curva e  $\xi$  é a coordenada paramétrica. As funções base são definidas pela fórmula recursiva de Cox-de Boor (PIEGL; TILLER, 1997):

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi_i < \xi < \xi_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (39)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (40)$$

para um vetor de *knots*  $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}]$ , formado por um conjunto de valores das coordenadas paramétricas não negativos e não decrescentes. Além disso, se o vetor *knot* tem seus valores paramétricos variáveis segundo um mesmo valor, então é dito uniforme, caso contrário, será não-uniforme. Por exemplo, o vetor  $\Xi = [0,0,0,1,2,3,4,4,4]$  é uniforme, enquanto o vetor  $\Xi = [0,0,0,2,2,3,3,6,6,6]$  é não-uniforme.

Dessa forma, cada base  $N_{i,p}$  da Eq. (40) contribui ao longo do intervalo paramétrico  $[\xi_1, \xi_{n+p+1}]$ . Ademais, o número de base  $n$  pode ser estimado a partir do grau da curva  $p$  e do tamanho do vetor de *knots*  $ks$ :

$$n = ks - p - 1 \quad (41)$$

Em um vetor *knot* os valores paramétricos internos podem se repetir, sendo o número de repetições de  $\xi_i$  o grau de multiplicidade ( $m$ ) do *knot*. De acordo com Piegl e Tiller (1997), caso a multiplicidade do *knot* interno seja igual ao grau da curva B-Spline ( $m=p$ ), a curva interpolará o ponto de controle em  $\xi_i$ . No entanto, se a multiplicidade dos *knots* externos for  $m = p + 1$ , os pontos de controle serão interpolados. Por este motivo que a maioria dos vetores *knots* das B-Splines que representam uma Análise Isogeométrica possuem multiplicidade de  $p+1$  nos *knots* externos, de forma a garantir a interpolação dos pontos de controle inicial e final. Essa forma de *knots* são chamados de *knots* abertos ou *open knot vectors*.

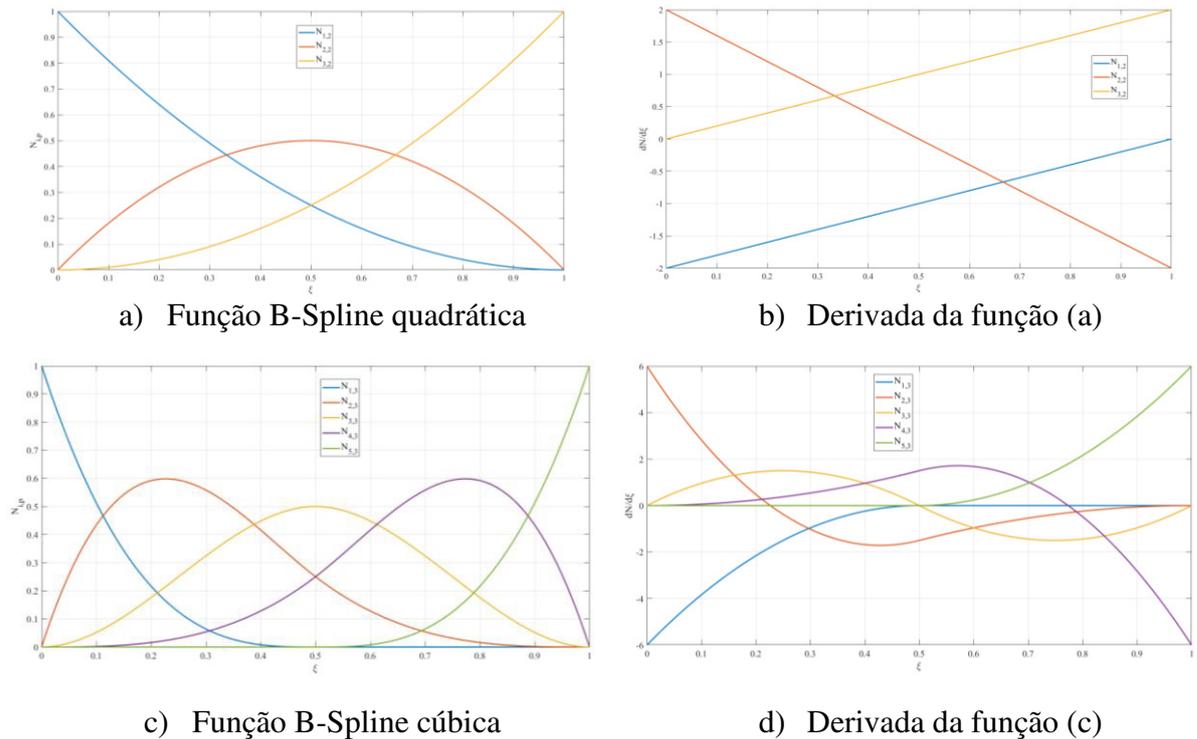
No que diz respeito à Análise Isogeométrica, a primeira derivada das funções base, representada por:

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (42)$$

é utilizada na avaliação da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  da estrutura. O cálculo de derivadas de ordem superior é encontrado em Piegl e Tiller (1997).

A Figura 12 mostra exemplo de funções B-Splines e suas respectivas derivadas. O exemplo do item (a) mostra uma função B-Splines quadrática cujo vetor *knots* é  $\Xi = [0,0,0,1,1,1]$ . Já no item (c) é mostrado uma função B-Spline cúbica cujo vetor *knots* é  $\Xi = [0,0,0,0,1/2,1,1,1,1]$ . Como a função do item (c) possui um *knot span* a mais que a do item (a), portanto ela tem uma função base a mais.

Figura 12 - Funções B-Splines e derivadas



Fonte: autor

Ademais, segundo Piegl & Tiller (1997), nas B-Splines é possível a elevação de grau da curva e a inserção de *knots*, alterando a descrição da curva e mantendo a sua forma. No que diz respeito a elevação de grau das bases de uma B-Spline, a multiplicidade de cada *knots* aumenta em 1, mantendo a continuidade dos *knots* e aumentando o número de pontos de controle. O algoritmo de elevação de grau das curvas B-Splines é mostrado em Piegle & Tiller (1997). Já na adição de um novo *knot* em uma curva B-Spline, o vetor *knots*  $\Xi$  terá um valor  $\xi_i$  a mais, também será incluída uma base  $N_{i,p}$  e um ponto de controle. Diante disso, para manter o formato da geometria, alguns pontos de controle são modificados.

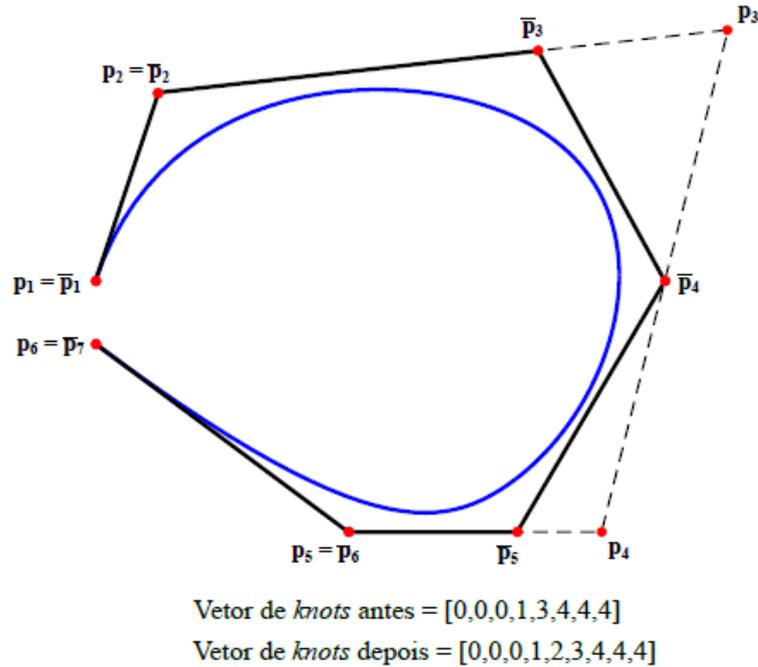
Um exemplo desse efeito é mostrado na dissertação de Barroso (2015), em que foi considerado um vetor de *knots*  $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}]$  e posterior adição de um valor paramétrico  $\bar{\xi} \in [\xi_k, \xi_{k+1}]$ , como mostrado na Figura 13. Os novos pontos de controle  $\bar{\mathbf{p}}$ , segundo Piegl & Tiller (1997), podem ser obtidos a partir dos pontos de controle antigos  $\mathbf{p}$  conforme:

$$\bar{\mathbf{p}}_i = \begin{cases} \mathbf{p}_1, & i = 1 \\ \alpha_i \mathbf{p}_i + (1 - \alpha_i) \mathbf{p}_{i-1}, & 1 < i < h \\ \mathbf{p}_{h-1}, & i = h \end{cases} \quad (43)$$

com  $h$  sendo o tamanho do novo vetor de pontos de controle  $\bar{\mathbf{p}}$  e  $\alpha$  calculado como:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq k - p \\ \frac{\bar{\xi} - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i}, & k - p + 1 \leq i \leq k \\ 0, & i = h. \end{cases} \quad (44)$$

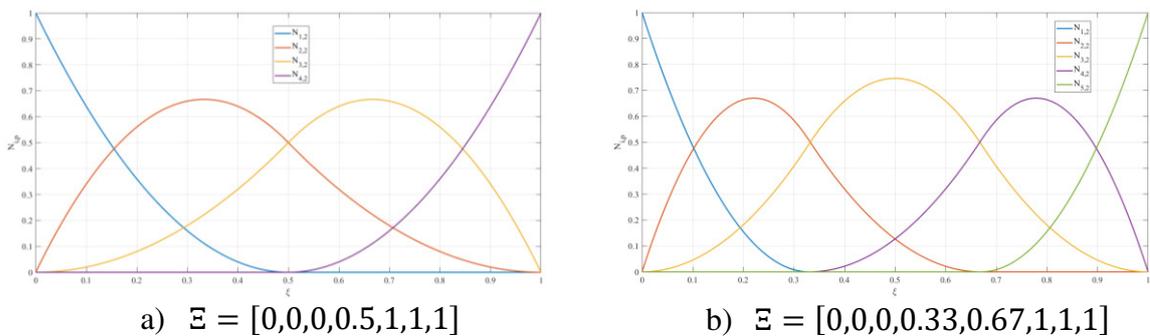
Figura 13 - Curva B-Spline com inserção de knots ( $\bar{\xi} = 2$ )



Fonte: Barroso (2015)

Na Análise Isogeométrica é possível três tipos de refinamentos, utilizando os algoritmos mencionados anteriormente das B-Splines. O refinamento  $h$  consiste na adição de um novo  $knot$  ao vetor  $\Xi$ , como mostrado na Figura 14. Esse tipo de refinamento é similar na AIG é similar ao MEF pelo qual reduz o tamanho do elemento e aumenta o número de elementos da malha.

Figura 14 - Exemplo de refinamento  $h$  de funções quadráticas

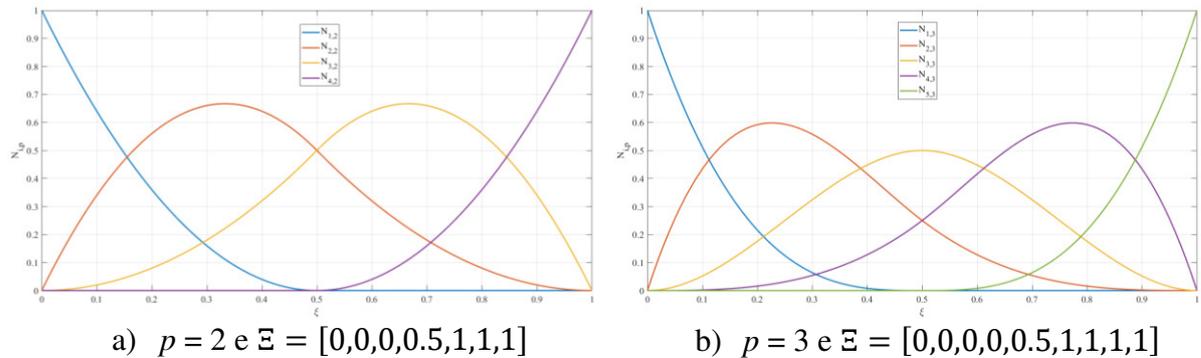


Fonte: autor

O segundo tipo de refinamento trata-se do refinamento  $p$  que equivale a elevação de grau da função B-Spline, conforme é mostrado na Figura 15. Esse tipo de refinamento na

AIG melhora a solução numérica, pois aumenta o número de graus de liberdade, sem alteração no número de *spans*, e, é similar ao refinamento que aumenta o grau dos elementos utilizados no MEF.

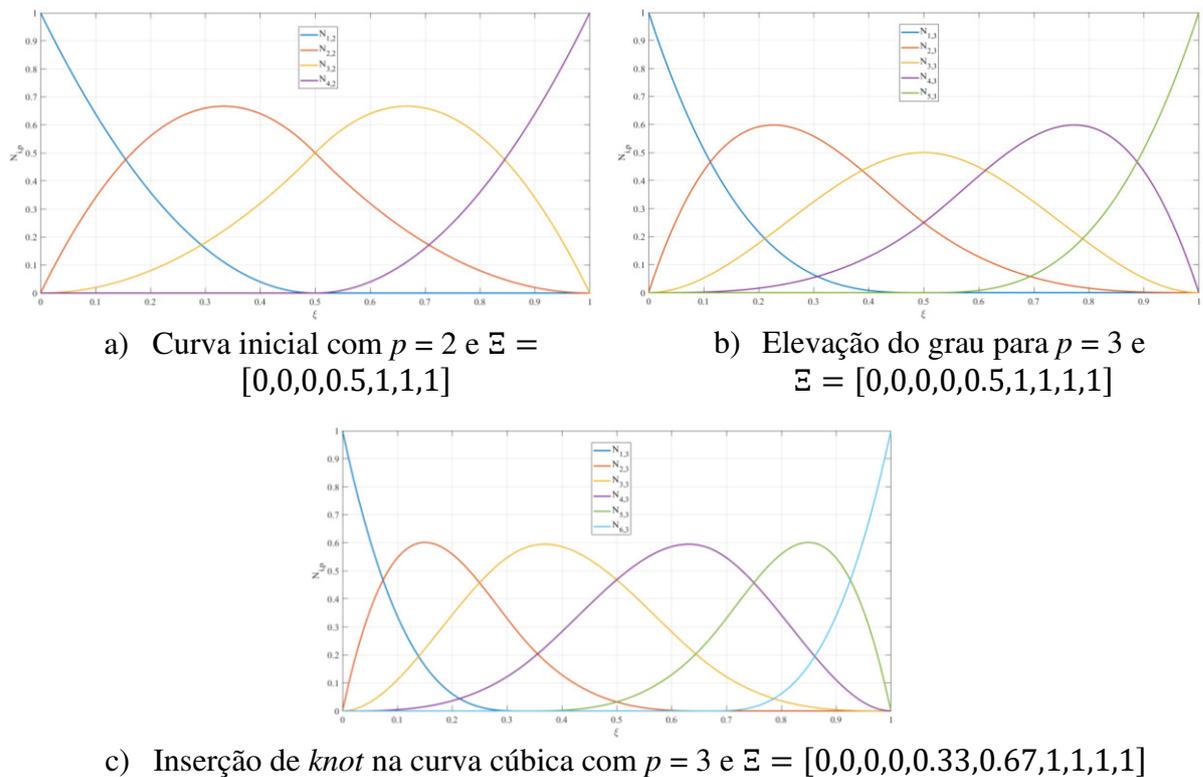
Figura 15 - Exemplo de refinamento  $p$  e funções quadráticas para cúbicas



Fonte: autor

Por fim, o terceiro refinamento compreende ao refinamento  $k$  que é a combinação dos dois refinamentos mencionados anteriormente. Neste refinamento, realiza-se primeiro a elevação do grau e em seguida a inserção de *knots*, aumentando tanto o grau das bases quanto a continuidade entre os elementos. O refinamento  $k$  só é possível na AIG, sendo um diferencial entre a AIG e o MEF. A Figura 16 mostra o processo desse tipo de refinamento.

Figura 16 - Exemplo de refinamento  $k$



Fonte: autor

### 3.4 NURBS

Assim como ocorre com as curvas de Bézier, as B-Splines não são capazes de representar de forma exata elementos como circunferências e elipses, pois esse tipo de curva não é representado por polinômios. Portanto, é necessário associar a cada ponto de controle um peso, como feito nas curvas de Bézier. Com isso, as NURBS (*Non Uniform Rational B-Splines*) são B-Splines de base racionais com vetores *knots* não uniformes.

Dessa forma, as NURBS são bastante utilizadas na modelagem geométrica com a utilização de *softwares* como Rhinoceros e AutoCAD, por serem capazes de representar geometricamente tanto modelos matemáticos padrões (cônicas e quádricas, por exemplo) quanto modelos de forma livre, fazendo-se uso da mesma base de dados de ambos os modelos.

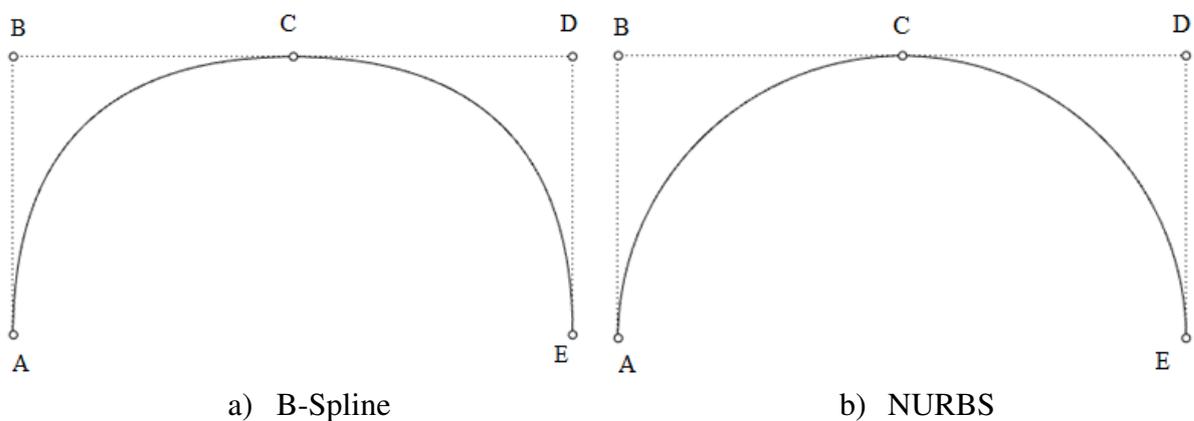
Assim sendo, as curvas NURBS são uma combinação linear de funções de base racional  $R(\xi)_i$  de grau  $p$  e pontos de controle  $p_i$ . Uma curva NURBS pode ser expressa como:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R(\xi)_i p_i \quad (45)$$

$$R(\xi)_i = \frac{w_i N_{i,p}(\xi)}{\sum_{i=1}^n w_i N_{i,p}(\xi)} \quad (46)$$

em que  $w_i$  é o peso associado a cada ponto de controle e  $N_{i,p}(\xi)$  é a função de base do ponto. A Figura 17 mostra a diferença entre um semicírculo formado por B-Spline e NURBS, enquanto que a Tabela 1 mostra os pesos dos pontos de controle das curvas dessa figura.

Figura 17 – Semicírculo formado por B-Spline e NURBS



Fonte: autor

Tabela 1 - Peso dos pontos de controle do semicírculo

	B-Spline	NURBS
A	1.0000	1.0000
B	1.0000	0.7071
C	1.0000	1.0000
D	1.0000	0.7071
E	1.0000	1.0000

Fonte: autor

De maneira semelhante do que acontece com as superfícies Bézier, as superfícies NURBS são formadas pelo produto de duas funções de base univariantes, expressa por:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R(\xi, \eta)_{ij} \mathbf{P}_{ij} \quad (47)$$

em que  $\mathbf{P}_{ij}$  é o ponto de controle e  $R(\xi, \eta)$  é a função de base racional bivariante representada por:

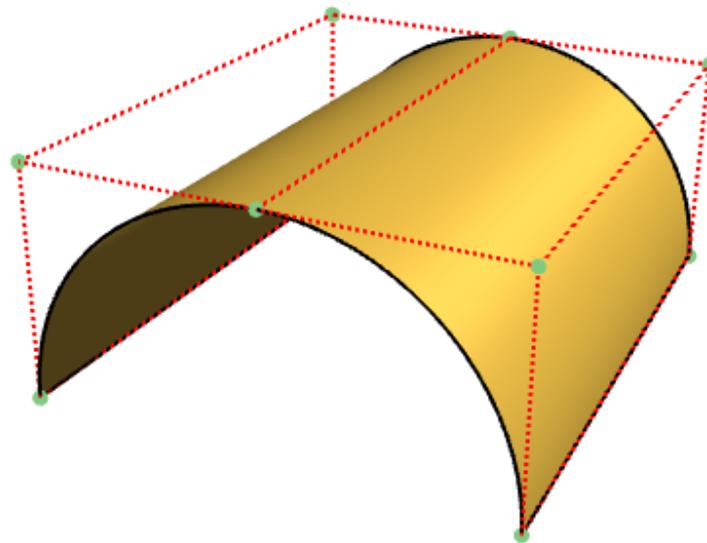
$$R(\xi, \eta)_{ij} = \frac{w_{ij} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta)}{W(\xi, \eta)} \quad (48)$$

em que  $W(\xi, \eta)$  é a função peso biavante dada por:

$$W(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) \quad (49)$$

A Figura 18 ilustra um exemplo de superfície NURBS.

Figura 18 - Superfície NURBS



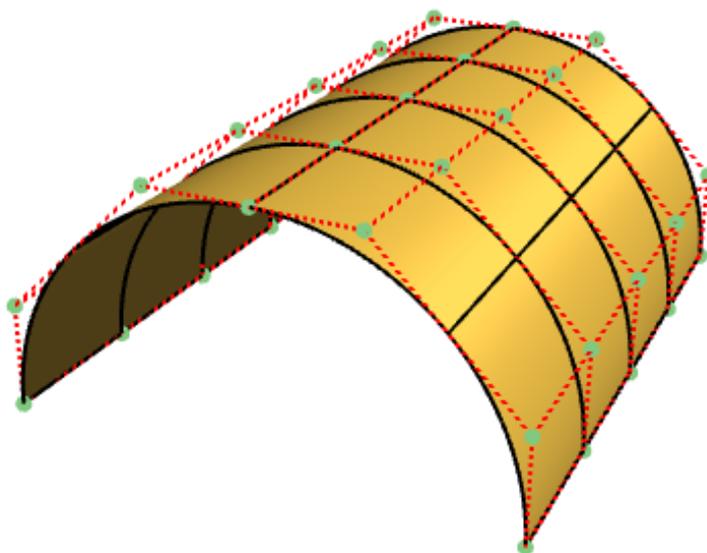
Fonte: autor

### 3.4.1 Inserção de knot e elevação de grau

Segundo Piegl & Tiller (1997), o refinamento das NURBS se dá utilizando algoritmos de inserção *knot* e *elevação de grau*. Esses algoritmos são semelhantes aos comentados anteriormente para B-Splines, sendo que NURBS são como B-Splines com quatro coordenadas, sendo a quarta coordenada o peso do ponto de controle. Dessa forma, a única diferença consiste em escrever os pontos no espaço  $R^4$  e após a aplicação do algoritmo, projetar novamente para o espaço  $R^3$ .

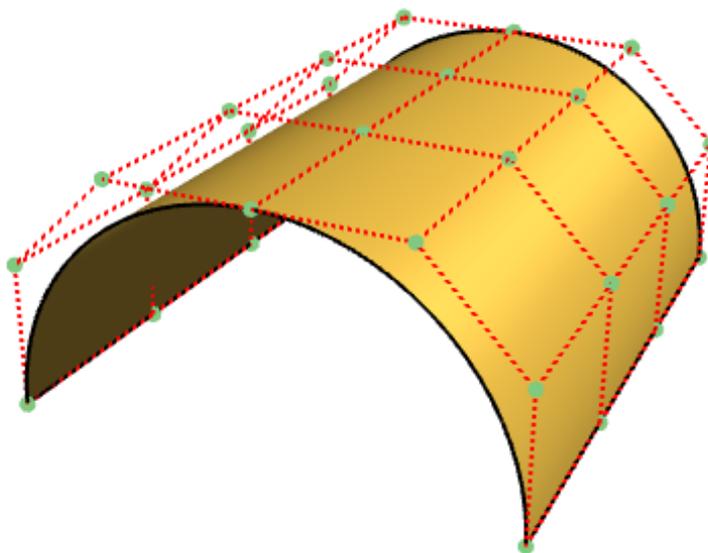
Dessa forma, assim como foi mostrado os tipos de refinamentos em curvas B-Splines, em superfícies NURBS a inserção de *knot* trata-se do refinamento *h* como é mostrado na Figura 19 o efeito do refinamento *h* no modelo da Figura 18.

Figura 19 - Efeito do refinamento *h*



Fonte: autor

A *elevação de grau*, também semelhante a B-Spline, é o tipo de refinamento equivalente ao *p* atuando no aumento de grau das curvas, mantendo a continuidade original em cada *knot*. A Figura 20 mostra o efeito do refinamento *p* no modelo da Figura 18. O refinamento *k* que é a combinação dos dois já mencionados

Figura 20 - Efeito do refinamento  $p$ 

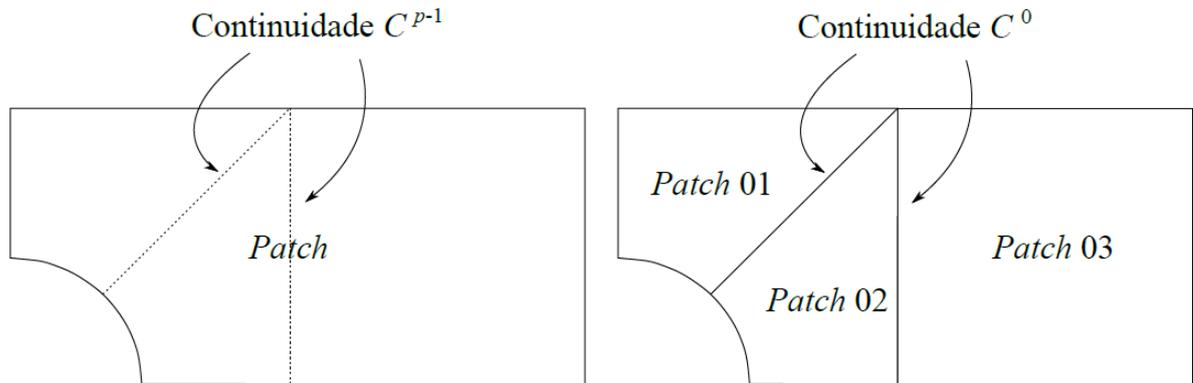
Fonte: autor

### 3.4.2 Múltiplos Patches

Segundo Barroso (2015), por mais que frequentemente as NURBS consigam ser eficientes na representação de geometrias complexas, muitas vezes pode ser útil a utilização de múltiplas entidades (curvas, superfícies ou sólidos) para representar o modelo. Isso acontece, por exemplo, em modelos nos quais existem várias regiões que apresentem diferentes atributos, como material, carregamento e condições de contorno, sendo necessário representar essas regiões de maneira distinta.

No entanto, conforme Barros (2016), a utilização de vários *patches* leva a uma redução na continuidade nas suas fronteiras, como mostra na Figura 21, em que uma superfície de uma placa com furo pode ser modelada com um único *patch* ou de maneira simplificada com 3 *patches*.

Figura 21 - Múltiplos patches em uma placa com furo



Fonte: Barroso (2015)

A utilização de múltiplos *patches* ajuda na construção do modelo, no entanto a continuidade do modelo é reduzida para  $C^0$  nas regiões de contorno dos *patches*. Dessa forma, para que durante a Análise Isogeométrica não ocorra erros é necessário garantir a continuidade dos elementos, que segundo Rocha (2018), os pontos de controle de cada *patch* devem ser bem definidos e compartilhados

## 4 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA

A Análise Isogeométrica foi proposta por Hughes e colaboradores (HUGHES, 2005) e trata-se de um método alternativo ao Método dos Elementos Finitos, que é o método numérico mais utilizado para análise estrutural. A principal diferença entre os dois métodos é a capacidade de ter a geometria do modelo representada de forma exata na AIG.

Conforme Hughes (2005), a representação exata da geometria do modelo é dada pois na AIG utiliza a mesma ideia da formulação isoparamétrica do MEF, mas na sequência invertida, em que os deslocamentos no interior do sólido são aproximados utilizando as mesmas funções utilizadas para definir a geometria do sólido (e.g. B-Splines e NURBS). Com isso é possível manter e garantir a convergência para a solução do problema.

A formulação cinemática da teoria de Reissner-Mindlin, apresentada anteriormente, é adotada para análise de placas e cascas abatidas. Geralmente as análises estruturais utilizadas em problemas de otimização são feitas considerando o regime linear, por ser bem mais simples e rápida do que a não linear, além de proporcionar resultados satisfatórios em muitos casos.

No entanto, em estruturas próximas ao colapso é verificado comportamento não linear, devido a grandes deslocamentos, flambagem, fissuração entre outros. Portanto, se faz necessário considerar os efeitos da não linearidade para uma análise mais realista. Em Barros (2016) é apresentada análise não linear na avaliação do comportamento não linear, físico e geométrico, de placas e cascas abatidas utilizando uma abordagem na AIG.

Na dissertação de Praciano (2018), com o objetivo de avaliar a estabilidade de placas e cascas abatidas através da AIG, com base nas teorias de Reissner-Mindlin e Marguerre, foi desenvolvido o elemento isogeométrico de casca abatida utilizando a formulação Lagrangeana Total na consideração de deformações e rotações moderadas, além de expor as expressões para os cálculos da matriz de rigidez a partir das curvas da AIG para solução do equilíbrio do sistema.

Além disso, em Praciano *et al.* (2019) é apresentando uma metodologia baseada em Análise Isogeométrica para o estudo de estabilidade de placas e cascas abatidas laminadas, na qual a geometria e campo de deslocamentos são descritos usando funções NURBS, utilizando um esquema de integração apropriado para evitar o problema de travamento de placas e cascas de paredes finas.

Ademais, o presente trabalho também almeja o estudo de vibrações livres em placas, pelo qual foi tomado definições de modelos contínuos descritos por Rao (2009) e Chopra (1995).

#### 4.1 Deslocamentos e deformações

No MEF são utilizadas funções polinomiais na interpolação dos deslocamentos dos elementos, que na sua formulação isoparamétrica pode descrever de forma aproximada sua geometria. Contrariando o MEF, na AIG essa sequência é invertida, em que a formulação isoparamétrica os deslocamentos são aproximados utilizando as funções que definem a geometria, no caso as NURBS.

Assim sendo, a geometria de uma casca abatida é descrita por superfícies NURBS como:

$$x = \sum_{i=1}^{n_c} R_i x_i; \quad y = \sum_{i=1}^{n_c} R_i y_i; \quad z_0 = \sum_{i=1}^{n_c} R_i z_{0i} \quad (50)$$

em que  $R_i$  é dado na Eq. (48) e  $n_c$  é o número de pontos de controle na superfície.

No elemento de casca abatida os elementos de membrana e transversais ( $u$ ,  $v$  e  $w$ ) e as rotações da superfície média ( $\theta_x$  e  $\theta_y$ ) são interpolados a partir de cinco graus de liberdade nos pontos de controle como:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{n_c} R_i u_i; & v &= \sum_{i=1}^{n_c} R_i v_i; & w &= \sum_{i=1}^{n_c} R_i w_i; \\ \theta_x &= \sum_{i=1}^{n_c} R_i \theta_{xi}; & \theta_y &= \sum_{i=1}^{n_c} R_i \theta_{yi} \end{aligned} \quad (51)$$

em notação matricial, tem-se:

$$\mathbf{u} = \mathbf{R} \mathbf{u}_e \quad (52)$$

em que  $\mathbf{u}$  é o vetor que representa os deslocamentos na superfície média,  $\mathbf{u}_e$  é vetor de deslocamentos dos pontos de controle e  $\mathbf{R}$  é a matriz das funções de forma dada por:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2 \quad \dots \quad \mathbf{R}_{mn}] \quad (53)$$

e a matriz associada a cada ponto de controle é:

$$\mathbf{R}_i = R_i \mathbf{I}_{5 \times 5} \quad (54)$$

em que  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade.

Contudo, conforme Praciano (2018) o vetor das deformações está relacionado com o vetor deslocamentos dos pontos de controle  $\mathbf{u}_e$  por meio da matriz  $\mathbf{B}$ . Dessa forma, as deformações generalizadas podem ser escritas como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^m \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0^m \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_L^m \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{u}_e \quad (55)$$

Os termos da matriz  $\mathbf{B}$  são dados pela combinação das Eq. (51) e Eq. (55), apresentados por Praciano (2019) como:

$$\mathbf{B}_0^m = \begin{bmatrix} R_{k,x} & 0 & Z_x R_{x,y} & 0 & 0 \\ 0 & R_{k,y} & Z_y R_{k,y} & 0 & 0 \\ R_{k,y} & R_{k,x} & Z_x R_{k,y} + Z_y R_{k,x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\mathbf{B}_0^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & R_{k,x} \\ 0 & 0 & 0 & -R_{k,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_{k,x} & R_{k,y} \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\mathbf{B}_0^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{k,x} & 0 & R_k \\ 0 & 0 & R_{k,y} & -R_k & 0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$\mathbf{B}_L^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & W_x R_{k,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_y R_{k,y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_x R_{k,y} + W_y R_{k,x} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (59)$$

Com isso a Eq. (55) pode ser reescrita como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^m \\ \mathbf{B}_0^b \\ \mathbf{B}_0^s \end{bmatrix} \mathbf{u}_e + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_L^m \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}_e = \left( \mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L \right) \mathbf{u}_e = \mathbf{B}\mathbf{u}_e. \quad (60)$$

## 4.2 Equações de equilíbrio e matriz de rigidez

Com isso, as equações de equilíbrio do sistema podem ser obtidas fazendo a variação do trabalho virtual interno igual a variação virtual externa conforme:

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext} \quad (61)$$

em que:

$$\delta W_{int} = \int_{V_0} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dV_0 = \int_{A_0} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^m)^T \mathbf{N} dA_0 + \int_{A_0} \delta \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{M} dA_0 + \int_{A_0} \delta \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{V} dA_0 \quad (62)$$

$$\delta W_{ext} = \int_{V_0} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV_0 + \int_{A_0} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dA_0 + \sum_{i=1}^n \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{p}_i = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (63)$$

em que  $\delta W_{int}$  e  $\delta W_{ext}$  são as variações de trabalho interno e externo, respectivamente,  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  é a deformação virtual correspondente ao deslocamento virtual infinitesimal de  $\delta \mathbf{u}$ , o vetor  $\mathbf{b}$  representa as forças de corpo, o vetor  $\mathbf{q}$  corresponde as forças de superfícies em  $A_0$ , o vetor das tensões generalizadas é dado por  $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \{\mathbf{N} \quad \mathbf{M} \quad \mathbf{V}\}^T$ ,  $\delta \mathbf{u}_i$  é o deslocamento virtual no ponto de aplicação  $\mathbf{p}_i$ , correspondentes as cargas concentradas atuantes em  $n$  pontos na estrutura, e, por fim,  $\mathbf{f}$  é o vetor de cargas externas. Como a formulação Lagrangean Total está sendo aplicada, as integrações são realizadas em torno da área e volume iniciais  $A_0$  e  $V_0$ .

Em Barros (2016) é relacionado os incrementos de deformação  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  com os incrementos de deslocamentos nodais  $\delta \mathbf{u}_e$ . Dessa forma, é descrito o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) da seguinte forma:

$$\delta \mathbf{u}^T \left( \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dA_0 - \mathbf{f} \right) = 0 \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{u}) = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dA_0 \quad (64)$$

em que  $\mathbf{g}(\mathbf{u})$  é o vetor das forças internas, que depende dos deslocamentos da estrutura. Por fim, considerando os deslocamentos virtuais  $\delta \mathbf{u}$  como arbitrários, a condição de equilíbrio do sistema é dada como:

$$\mathbf{r} = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (65)$$

Para a solução das equações de equilíbrio não lineares e o traçado do caminho de equilíbrio é necessário a utilização de métodos incrementais-iterativos em que cada passo é realizada através do Método de Newton-Rapshon, baseado na linearização das equações de equilíbrio da Eq. (54), no qual utiliza a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_T$ , correspondente à variação do resíduo  $\mathbf{r}$  em relação aos deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$ . O desenvolvimento da matriz de rigidez tangente pode ser encontrado em Barros (2016) e é representada por:

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma \quad (66)$$

em que  $\mathbf{K}_L$  é a Matriz de Rigidez dada por:

$$\mathbf{K}_L = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \mathbf{u}} dA_0 = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_t \bar{\mathbf{B}} dA_0 \quad (67)$$

e a Matriz de Rigidez Geométrica  $\mathbf{K}_\sigma$  é dada por:

$$\mathbf{K}_\sigma = \int_{A_0} \frac{\delta \bar{\mathbf{B}}^T}{\delta \mathbf{u}} \hat{\boldsymbol{\sigma}} dA_0 = \int_{A_0} \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G} dA_0 \quad (68)$$

sendo  $\mathbf{C}_t$  a matriz que define a lei constitutiva do material, dada por  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_t$ , sendo  $\mathbf{C}$  dado na Eq. (15), e:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & R_{k,x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & R_{k,y} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \quad (70)$$

A Eq. (65) do equilíbrio do sistema em uma estrutura com  $n$  graus de liberdade é representada por um sistema com  $n$  equações. Para descrever uma curva carga-deslocamento os deslocamentos  $\mathbf{u}$  e um fator de carga  $\lambda$ , tal que  $\mathbf{f} = \lambda\mathbf{q}$ , devem ser determinados, resultando em  $n + 1$  incógnitas com  $n$  equações:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \lambda\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (71)$$

Dessa forma, por terem número diferentes as incógnitas e as equações de equilíbrio, o sistema de soluções não pode ser solucionado de forma direta, sendo necessário métodos como o Método do Controle de Carga, Controle de Deslocamento e Comprimento de Arco (CRISFIELD, 1991).

Com isso, a aplicação do Método de Newton-Raphson torna as equações de equilíbrio representadas linearmente como:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \delta \lambda \Rightarrow \mathbf{r}_n = \mathbf{r} + \mathbf{K}_T \delta \mathbf{u} - \delta \lambda \mathbf{q} \quad (72)$$

Entretanto, como se trata de um método iterativo, Parente Junior *et al.* (2006) concluiu que o Método de Newton-Raphson atinge a convergência com uma tolerância  $tol$  tal qual a seguinte condição:

$$\frac{\|\mathbf{r}\|}{\max(1, \|\mathbf{q}\|)} \leq tol \quad (73)$$

O método do Controle de Carga é a forma mais simples de resolver o sistema de  $n + 1$  equações. Este método não será descrito nesse texto, mas poderá ser encontrado em Crisfield (1991), Parente *et al.* (2006) e Rocha (2013).

### 4.3 Estabilidade

A perda de estabilidade, a capacidade de carga da estrutura e sensibilidade dela às imperfeições iniciais são características fundamentais para análise de placas e cascas, encontradas em um estudo do comportamento pós-crítico. Segundo Praciano (2018), o método do comprimento de arco e outros métodos de análise não linear só capturam o caminho fundamental de estruturas com flambagem de bifurcação. Dessa forma, se faz necessário

abordagens numéricas de estabilidade que demandam a avaliação de pontos críticos e determinação de caminhos.

A flambagem ocorre quando a matriz de rigidez tangente é singular nos pontos críticos (limite e bifurcação), portanto:

$$\det \mathbf{K}(\mathbf{u}, \lambda) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (74)$$

O ponto crítico pode ser encontrado com a condição de autovalor nulo:

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}, \lambda) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}, \text{ com } \|\boldsymbol{\phi}\| = 1 \quad (75)$$

em que  $\boldsymbol{\phi}$  é o autovetor associado representando o modo flambagem. Com isso a condição crítica é dada por:

$$\mathbf{K}_T \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (76)$$

em que  $\mathbf{K}_T$  é dado pela Eq. (66) resultando em:

$$(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}. \quad (77)$$

Dessa forma, considerando o deslocamento pré-crítico  $\mathbf{u}_{cr}$  aproximadamente nulo, então  $\mathbf{B}_L$  da Eq. (60) será nula, então:

$$\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_0 \quad (78)$$

portanto:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\sigma. \quad (79)$$

Sendo os deslocamentos pré-críticos  $\mathbf{u}_{cr}$  desprezíveis, então os deslocamentos, tensões e esforços internos podem ser encontrados através de uma análise linear e a Matriz de Rigidez Geométrica é proporcional ao carregamento aplicado:

$$\mathbf{K}_\sigma = \lambda \bar{\mathbf{K}}_\sigma \quad (80)$$

gerando um problema de Autovalor Generalizado:

$$(\mathbf{K}_0 + \lambda \bar{\mathbf{K}}_\sigma) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (81)$$

sendo  $\lambda$  a carga crítica e  $\boldsymbol{\phi}$  modo crítico.

Comentários mais detalhados a respeito de estabilidade de estruturas e modo de flambagem são encontrados em Parente *et al.* (2006) e Praciano *et al.* (2019).

#### 4.4 Frequências naturais e modos de vibração

Segundo Rao (2009), vibração ou oscilação é qualquer movimento que se repita após um intervalo de tempo. A vibração pode ocorrer em duas situações: vibração livre e

vibração forçada. A vibração livre ocorre quando nenhuma força age sobre o sistema, enquanto vibração forçada acontece quando o sistema está sujeito a uma força externa. Outra classificação para vibração é se ela é amortecida ou não amortecida. Caso haja perda/dissipação de energia por atrito ou outra resistência durante a oscilação, trata-se de vibração amortecida, caso contrário, será vibração não amortecida.

As ações dinâmicas podem ser classificadas em ações periódicas, impulsivas e ações sísmicas. O foco deste trabalho são os movimentos periódicos, em que se caracterizam por apresentarem um comportamento cíclico. Dessa forma, um exemplo clássico de sistemas com um grau de liberdade dinâmico é o sistema massa-mola que foi descrito por Rao (2009) e Chopra (1995), em que a equação de equilíbrio é dada por:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad (82)$$

em que  $m$  é a massa do corpo em movimento,  $c$  é a constante de amortecimento viscoso,  $k$  é a rigidez da mola,  $\ddot{u}(t)$  é a aceleração,  $\dot{u}(t)$  é a velocidade,  $u(t)$  é o deslocamento e  $p(t)$  é uma força de excitação exercida sobre o corpo. Quando a força de excitação é nula, diz-se que a vibração é livre. Em caso de vibrações livre em sistema não amortecido a Eq. (82) pode ser expressa como:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (83)$$

em que a resposta representa um movimento harmônico simples e o deslocamento é dado por:

$$u(t) = A \cos(\omega t) \quad (84)$$

onde  $A$  é amplitude e  $\omega$  é a frequência de oscilação.

No entanto, as estruturas são consideradas como modelos contínuos, em que os problemas que envolvem comportamento mecânico são solucionados com discretização dos modelos contínuos. Essa discretização generaliza o modelo de um grau de liberdade para múltiplos graus de liberdade. Chopra (1995) utiliza um sistema simples de um edifício de dois pavimentos para apresentar um sistema com dois graus de liberdade e posteriormente generalizar para múltiplos grau de liberdade. Assim sendo, a equação de equilíbrio apresentada para um grau de liberdade na Eq. (82) é mostrada a seguir para múltiplos graus de liberdade:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P}(t) \quad (85)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa,  $\mathbf{C}$  é a matriz de amortecimento,  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez,  $\mathbf{P}(t)$  é o vetor de carga,  $\ddot{\mathbf{u}}$  é o vetor de aceleração,  $\dot{\mathbf{u}}$  é o vetor de velocidade e  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamento.

Os vetores de velocidade e aceleração podem ser obtidos a partir da Eq. (52) como:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}\mathbf{u}_e \quad (86)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}\mathbf{u}_e \quad (87)$$

e a matriz de massa é dada por:

$$\mathbf{M} = \int_A \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{R} dA. \quad (88)$$

Como feito para um grau de liberdade, considerando vibração livre e sem amortecimento para múltiplos graus de liberdade, resultando:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (89)$$

A solução para a Eq. (89) irá resultar em um problema de autovalores generalizados, com o objetivo de encontrar o autopar  $(\lambda_n, \mathbf{u}_n)$  no n-ésimo modo de vibração, sendo autovalor  $\lambda$  e autovetor  $\mathbf{u}$ . O autovalor é dado como:

$$\lambda_n = \omega_n^2 \quad (90)$$

em que  $\omega_n$  é a frequência natural do n-ésimo modo de vibração, sendo representada como:

$$\omega = 2\pi f. \quad (91)$$

## 5 FERRAMENTA DE MODELAGEM ISOGOMÉTRICA

A dificuldade da AIG está baseada no pré-processamento de dados para modelagem das NURBS na análise estrutural. Dessa forma, sistemas CAD tem grande importância na análise de estruturas, pois são utilizados como ferramentas de pré-processamento de dados da geometria do modelo.

Como a AIG é um método computacional desenvolvido recentemente, não existe uma grande disponibilidade de softwares comerciais como ocorre com o MEF, sendo mais comum softwares acadêmicos como o FAST. No entanto, para melhor utilização do FAST, é necessário o uso de uma ferramenta de pré-processamento de dados para AIG.

Alguns softwares utilizam a formulação NURBS para modelagem geométrica bidimensional e tridimensional. Perduta & Putanowicz (2019) discutem algumas ferramentas e artifícios populares usados para pré-processamento de dados para AIG. Baseado nisso, foi realizada uma pesquisa de diversos softwares CAD, pelo qual foi feita uma avaliação de cada um com a finalidade de se verificar critérios como custo, acessibilidade dos dados das NURBS e comunicação entre os arquivos gerados de saída e arquivos de entrada no FAST.

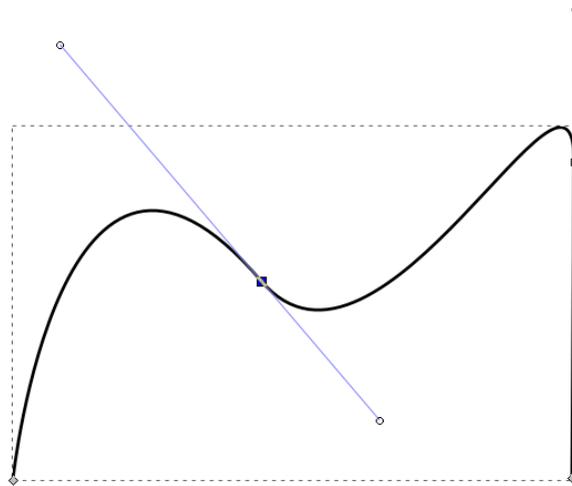
### 5.1 Softwares de pré-processamento de dados

Nesta seção será mostrado alguns softwares de sistema CAD populares com facilidade em modelagem da geometria em NURBS, indicando algumas características que os fazem ser possíveis na utilização como ferramenta de pré-processador de AIG.

#### 5.1.1 *Inkscape*

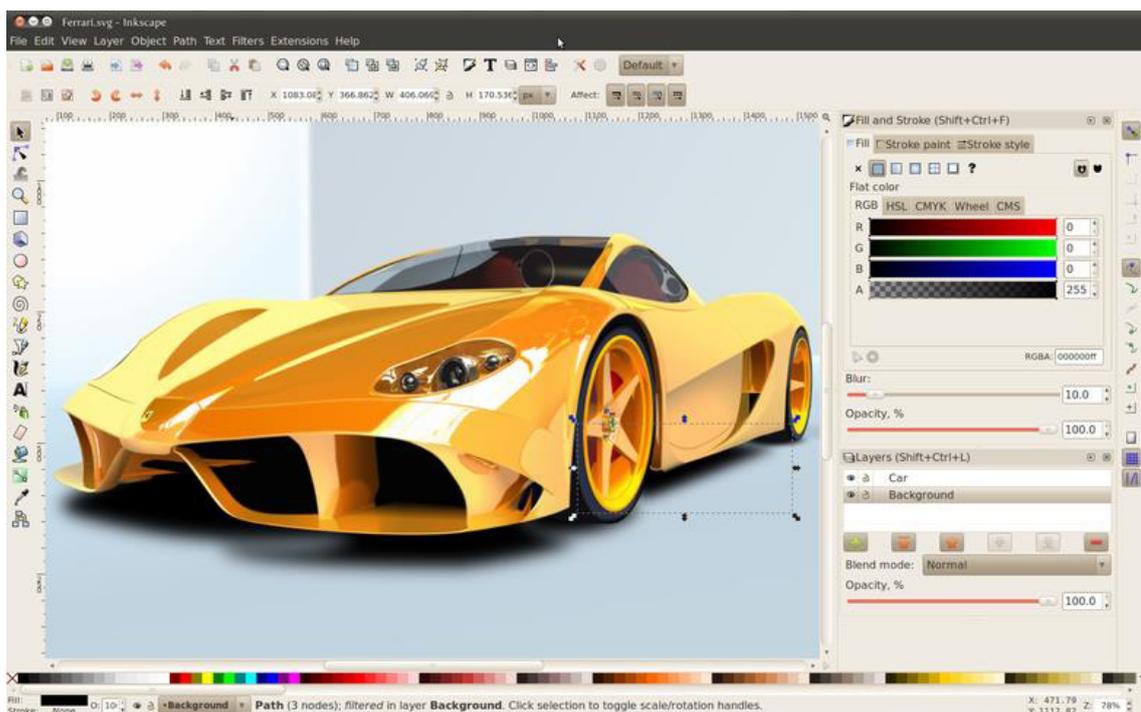
Inkscape é um software livre de edição de gráfico vetoriais. Ele pode ser usado como uma ferramenta de pré-processamento ao gerar arquivos SVG (*scalable vector graphics*), obtendo dados de curvas de Bézier que podem ser analisados. A Figura 22 mostra uma curva desenhada utilizando o Inkscape e a Figura 23 mostra uma ilustração de uma Ferrari de Gilles Pinard no qual foram utilizadas técnicas que dão destaque à imagem.

Figura 22 - Curva desenhada no Inkscape



Fonte: autor

Figura 23 - Screenshot de uma Ferrari modelada no Inkscape



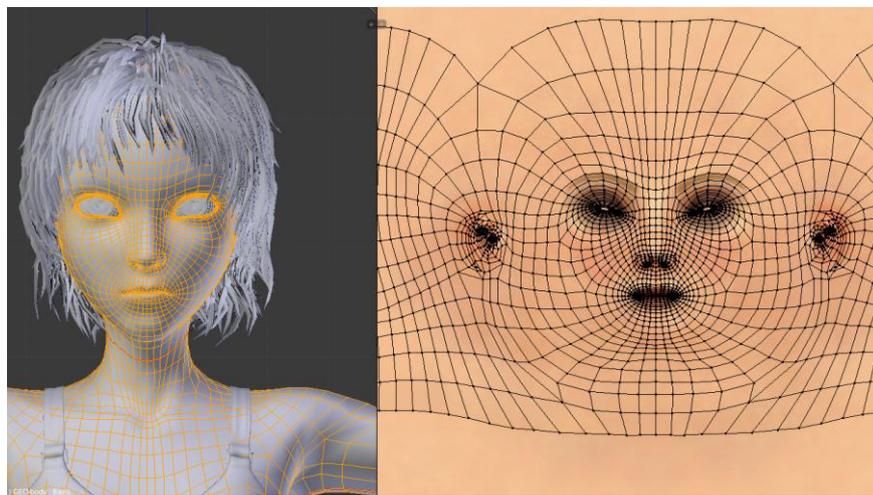
Fonte: autor

No entanto, na criação de superfícies, foco deste trabalho, por serem criadas através de caminhos, não é possível a modelagem de superfícies de Bézier utilizando esse software. Uma forma de realizar esse procedimento seria descrever as bordas das superfícies utilizando curvas de Bézier e em seguida interpolar os dados para encontrar os pontos internos.

### 5.1.2 Blender

Blender é um software livre de criação 3D bastante utilizado em modelagem, animação, renderização, simulação e em ferramentas de produção de vídeos e jogos. Este software fornece suporte para modelagem B-Rep com malhas poligonais e algumas ferramentas NURBS, mas o modelo é essencialmente poligonal com bordas retas. A Figura 24 mostra um exemplo de modelos desenhado no software, pelo qual a partir de da malha são usadas texturas para criação da imagem.

Figura 24 - Modelo desenhado no Blender



Fonte: Site do Blender 2.80 (2019)

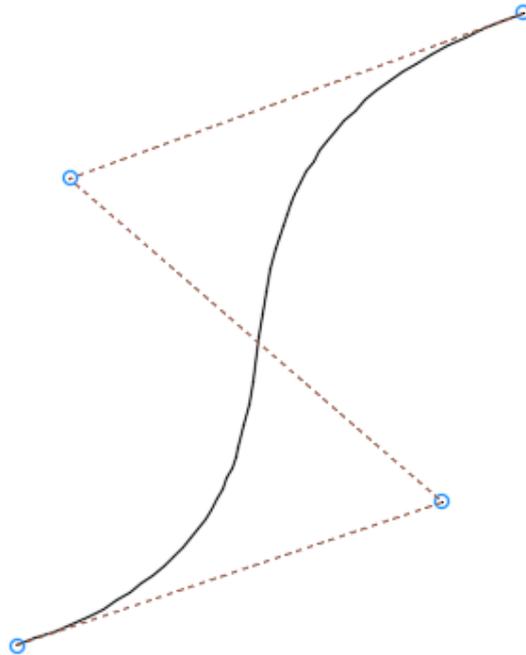
Dessa forma, modelos adequados para AIG não podem ser completamente gerados no Blender. No entanto, Perduta & Putanowicz (2019) sugere a combinação do uso do Blender com Python e Asymptote, uma linguagem orientada a gráficos vetoriais usada na preparação de ilustrações científicas. A função do Blender será gerar uma malha poligonal que descreve a topologia da decomposição do domínio geométrico em patches, no qual Python facilitará a leitura dessas informações no Asymptote (Asymptote 2.59, 2019), onde será criado um script que leia a malha dos patches e sobreponha a geometria do domínio modelado nos vértices da malha, aresta e faces.

### 5.1.3 AutoCAD

AutoCAD é bastante conhecido dentre os diversos softwares CAD de modelagem 2D e 3D. Ele pode ser usado como ferramenta de pré-processamento de AIG por suportar modelagem NURBS para criação de curvas e superfícies. A Figura 25 mostra exemplos de

curvas feitas no *software*. Os modelos podem ser salvos em formato de arquivo binário padrão (DWG) ou ASCII (DXF) e exportados em IGES, sendo facilmente acessados os dados das NURBS.

Figura 25 - Curva NURBS construída no AutoCAD



Fonte: autor

As curvas NURBS no AutoCAD podem ser criadas ajustando-as a pontos de dados ou modelando curvas com pontos de controle. Além disso, o programa possui ferramentas de reconstrução de curvas adicionando pontos de controle, modificando suas posições ou alterando o peso e elevando o grau da curva.

No entanto, no que diz respeito à AIG, garantir a continuidade entre os *patches* de uma superfície gerada no AutoCAD seria realizada com mais dificuldade de se comparada ao que foi feito com Rhino, como será visto mais adiante. Isso se dá porque o acesso dos dados das NURBS seria feito através de arquivos IGES.

#### 5.1.4 GiD

O GiD é um pré e pós-processador universal para simulações numéricas, apresentando recursos de pré e pós-processamento e visualização de resultados para AIG de dados de geometrias de NURBS. Ele possui recursos para converter qualquer malha de superfície em superfície NURBS. Além disso os dados do modelo podem ser importados e exportados em arquivos de vários formatos (IGES, STEP, DXF, Rhino). Um fator que

dificultou a escolha do GiD se deu ao fato de não ser um software livre e com versão de teste válida por apenas 30 dias.

### 5.1.5 *Rhinoceros*

O Rhinoceros é um software especialmente projetado para modelagem em NURBS, no qual os modelos são preparados em 3DM, mas podem ser facilmente exportados em IGES e de fácil acesso aos dados das NURBS.

A geometria do modelo criado no Rhino pode ser facilmente modificada. Além disso, este software possui uma série de vantagens quando usado como ferramenta de pré-processamento de AIG, como disponibilidade no acesso aos dados das NURBS: mudança nos pontos de controle, modificações nos vetores knots e elevação de grau das funções base.

Outro fator interessante do Rhino é o suporte dado para linguagens de script, utilizando este recurso é possível escrever código em Python para pré-processamento de dados, gerando um arquivo de saída com as informações do modelo. Por fim, o Rhino possui uma versão de teste disponível por 90 dias, pelo qual foi possível aprofundar-se na utilização do software.

## 5.2 Rhinoceros como ferramenta de pré-processamento de AIG

Dentre os softwares mencionados anteriormente, o adotado foi o Rhinoceros, sendo ele o mais comum na comunidade acadêmica no uso de ferramenta como pré-processamento de AIG, como o Kiwi!3D (Kiwi!3D version BETA 0.3.0, 2019) que é um plug-in para Grasshopper (linguagem de programação para geração de modelos tridimensionais no Rhinoceros) e Rhinoceros, no qual realiza AIG.

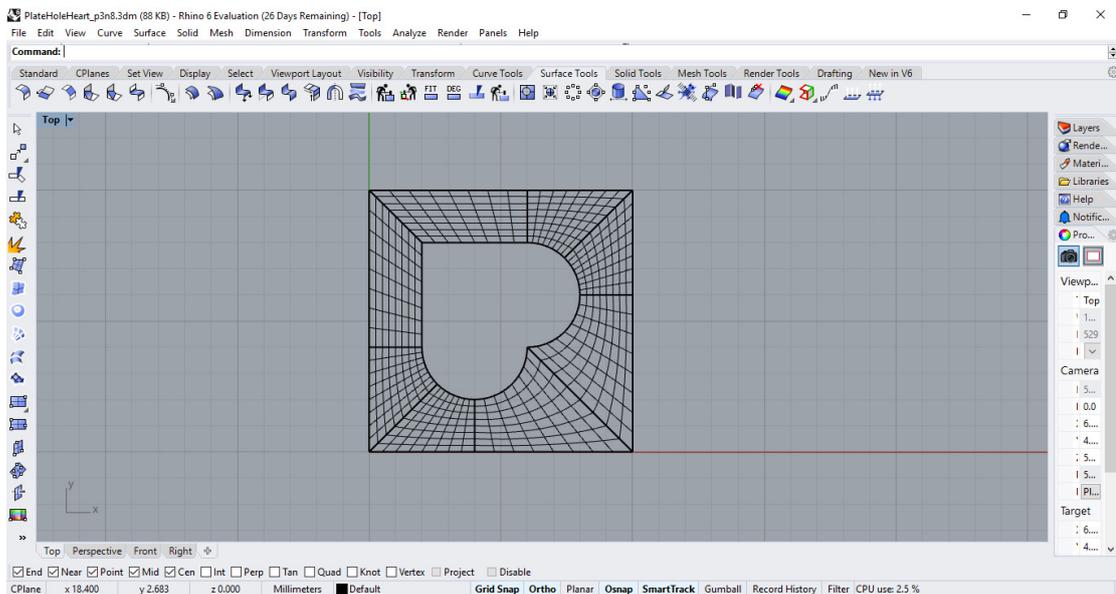
Utilizando o Python Script no Rhino, foi criado um código no qual gera um arquivo .msh contendo todas as informações da geometria do modelo, como as coordenadas dos pontos de controle, peso dos pontos de controle e *knot span*. A seguir está listado os passos necessários para criação de um arquivo de entrada para análise de uma placa no FAST utilizados no Rhino:

- 1) Como o foco deste trabalho é a análise de placas, o primeiro passo é a criação de superfícies NURBS no Rhino que pode ser feita de duas maneiras: com a criação de curvas e posteriormente a de superfícies a partir dessas curvas ou a criação de superfícies de imediato;
- 2) Elevar o grau das funções a partir da direção indicada;

- 3) Inserir os *knots* nas direções indicadas;
- 4) Executar a rotina escrita em linguagem Python para conversão do modelo NURBS para o formato \*.msh, na pasta a ser selecionada pelo usuário.

Os três primeiros tópicos anteriores são representados pela superfície criada no *software* como mostra a Figura 26, enquanto a Figura 27 mostra o código na tela do EditPythonScript. Exemplos mais detalhados de criação de modelos com um único *patch* e múltiplos *patches* serão mostrados em seções posteriores desse capítulo.

Figura 26 - Área de trabalho do Rhinoceros com superfície modelada



Fonte: autor

Figura 27 - EditPythonScript

```

Rhino Python Editor - C:\Users\jones\OneDrive\Documents\UFC\PO\FAST_ModDef\SurfaceFinal.py
File Edit Debug Tools Help
> python>
> rhinoscriptsyntax
> scriptcontext
> Rhino
> Eto

SurfaceFinal.py
1 import rhinoscriptsyntax as rs
2 import Rhino
3 import os
4 import scriptcontext
5 import System.Guid
6 import Rhino.Geometry as rg
7 import array
8 import collections
9 from System import Array
10 from Rhino.Commands import Result
11 from operator import itemgetter, attrgetter, methodcaller
12
13 import clr
14
15 surfaces = rs.ObjectsByType(0, select=True)
16 brep = rs.coerosebrep(surfaces[0])
17 surf = rs.coerocesurface(surfaces[0])
18
19 fout = open('PlateHoleHeart.msh','w')
20 #fout.write('Nodes: \n')
21 vertices = brep.Vertices
22 #for v in vertices:
23 #    fout.write('\t%d: [%s]\n' % (v.VertexIndex, v.Location))
24
25 total_controlpts = []
26 patches = []
27 knotspan = []
28 knotmult = []
29 elements = []
30 gr = []

[0.0, 0.3658683905932744, 0.70710678118664702, 1.0606601717798212, 1.4142135623730948, 1.7677669529663691, 2.1213203485656483, 2.4740737341629159, 2.8284271247461903]
64
Output Variables Call Stack

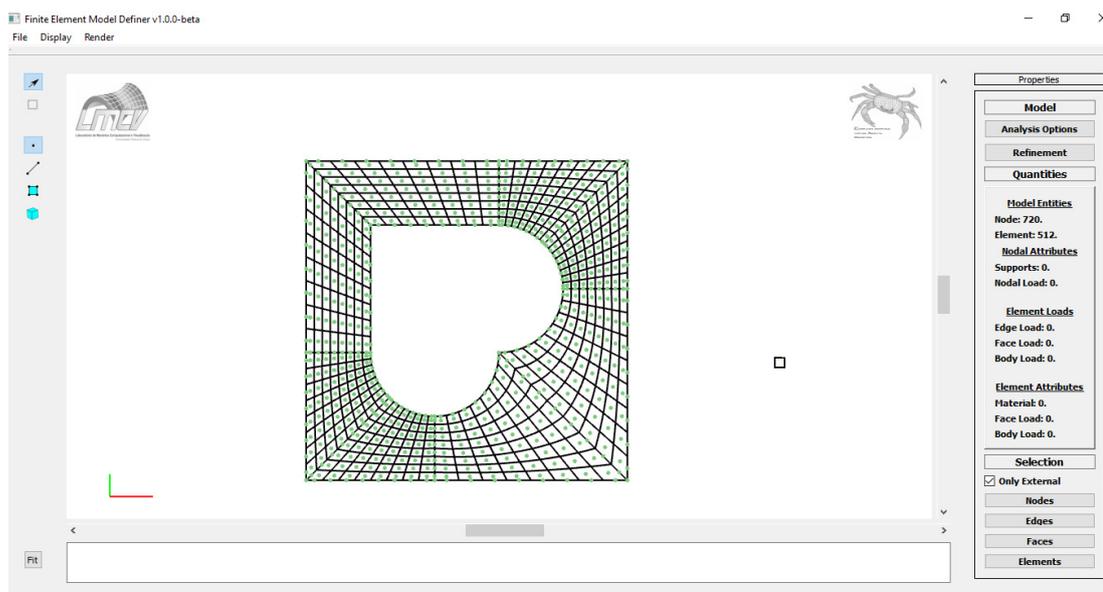
```

Fonte:autor

O arquivo .msh contém todos os dados da geometria do modelo, no entanto para realização da análise é necessário acrescentar as condições de contorno, carregamento, tipo de análise e material. Apesar de ser possível realizar este procedimento manualmente, exigiria um esforço exagerado. Outra maneira seria modificar o código em Python para utilização de diferentes layers ao longo das curvas e superfícies que pudessem ser lidas e indicadas como carregamento, condições de contorno e material.

No entanto, no laboratório foi desenvolvido um software chamado FAST\_ModDef, no qual pode-se ler um arquivo .msh com os dados geométricos, no qual se torna possível acessar o modelo, tanto para AIG quanto para MEF, para então aplicar os atributos. A Figura 28 mostra uma superfície criada no Rhinoceros, mas acessada no FAST\_ModDef pronta para ter atributos associados ao modelo.

Figura 28 - Superfície no FAST\_ModDef



Fonte: autor

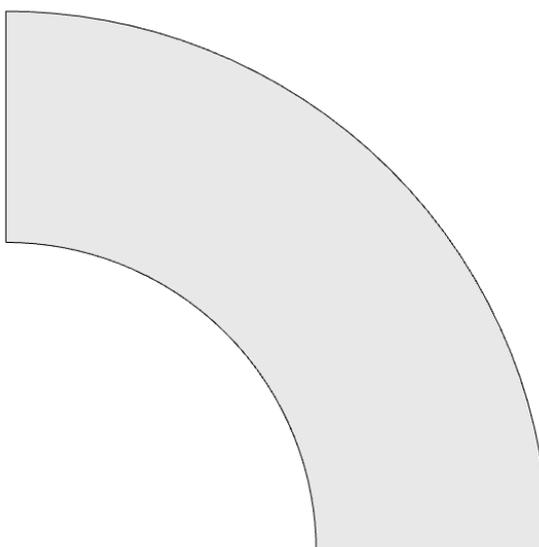
No caso de NURBS, os pontos de controle podem ser selecionados para aplicar as condições de contorno e os elementos para adicionar carregamento. Além disso, no FAST\_ModDef também é possível adicionar as características do material, seção transversal e o tipo de análise. Por fim, será gerado um arquivo .dat, que é o arquivo de entrada para o FAST, pronto para realização da AIG. Exemplos de criação de modelos e associação de atributos utilizando o FAST\_ModDef são mostrados nas seções seguintes.

### 5.2.1 Criação de modelo com um único patch

Esta seção tem como finalidade de mostrar a criação de modelos de superfícies com um único *patch* no Rhinoceros, elevar o grau das funções de base e inserir *knots*, para posteriormente ser criado o arquivo msh da geometria do modelo e aberto no FAST\_ModDef para associar os atributos para uma posterior análise estrutural. Os passos adotados serão os mesmos mencionados anteriormente, mas agora com mais detalhes no uso do *software* Rhinoceros.

O primeiro exemplo é mostrado na Figura 29. O primeiro passo para criação do modelo é criar a superfície. Para este exemplo a superfície pode ser criada a partir de curvas que limitam seu interior e em seguida criar superfície a partir dessas curvas.

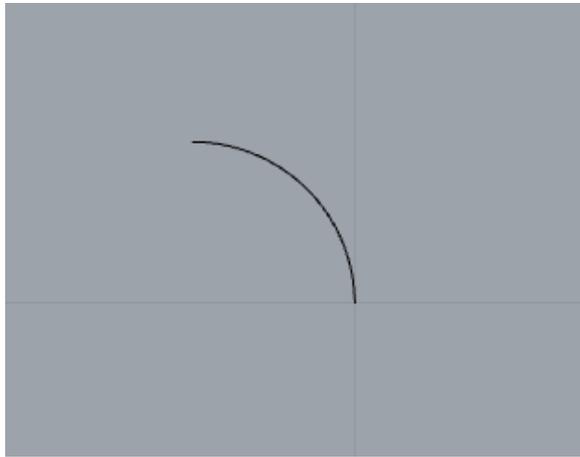
Figura 29 - Superfície criada no Rhinoceros



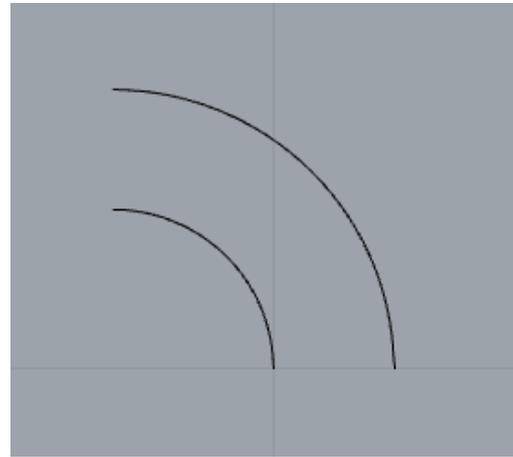
Fonte: autor

As curvas da Figura 29 são dadas a partir da criação de duas curvas retas e dois arcos, como é mostrado na Figura 30, utilizando as ferramentas disponíveis na barra de comandos de curvas no Rhinoceros como é mostrado na Figura 31. Além disso, os pontos de entrada para criação destas curvas podem ser adicionados a partir das coordenadas dos pontos exigidos pelos comandos, como é mostrado na barra de comandos da Figura 32.

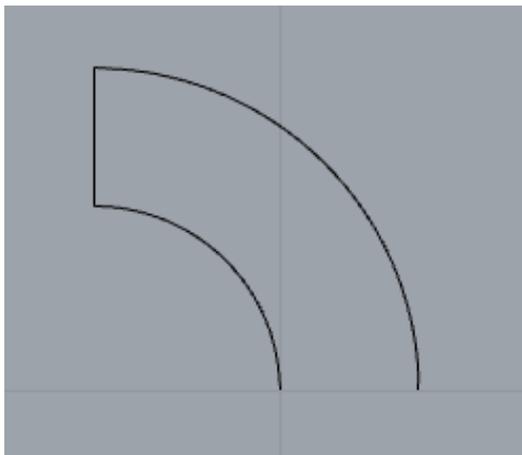
Figura 30 - Processo de construção das curvas de uma superfície



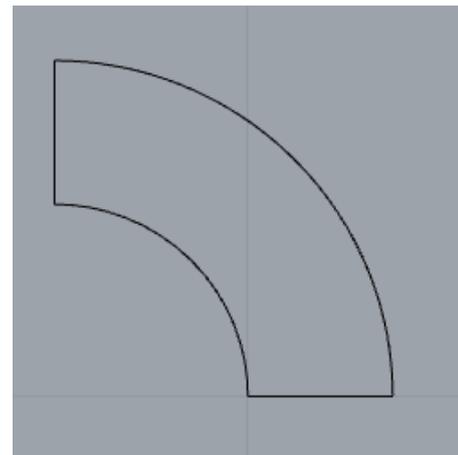
a) Criação do primeiro arco



b) Criação do segundo arco



c) Criação da primeira reta



d) Criação da segunda reta

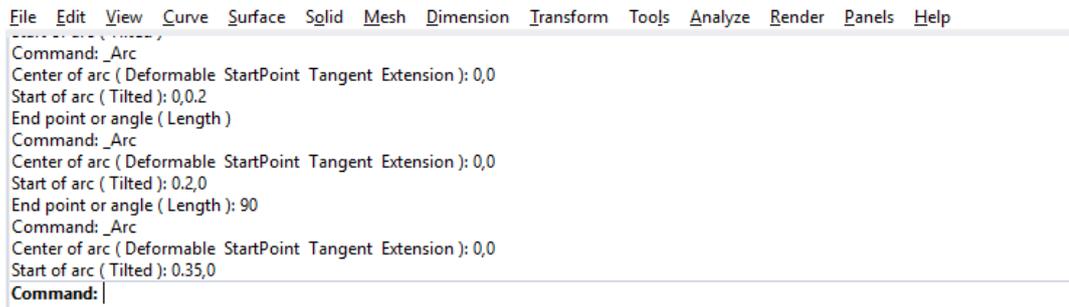
Fonte: autor

Figura 31 - Barra de comando das curvas no Rhinoceros



Fonte: autor

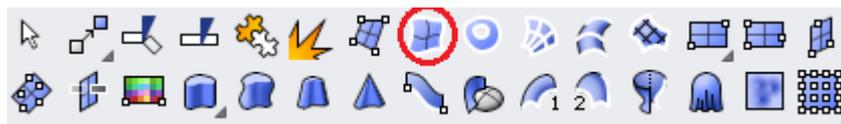
Figura 32 - Barra de comandos do Rhinoceros



Fonte: autor

Com as arestas do modelo criadas, é possível criar a superfície utilizando o comando da Figura 33, pelo qual selecionando de duas a quatro curvas, cria-se uma superfície. Em seguida, as curvas podem ser excluídas, sobrando apenas a superfície.

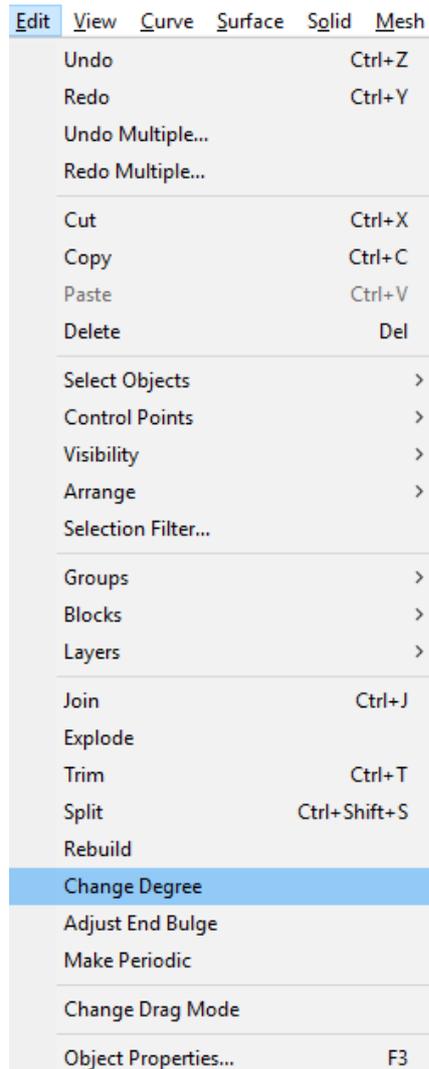
Figura 33 - Barra de comando de superfícies no Rhinoceros – criação de superfícies a partir de 2, 3 ou 4 curvas



Fonte: autor

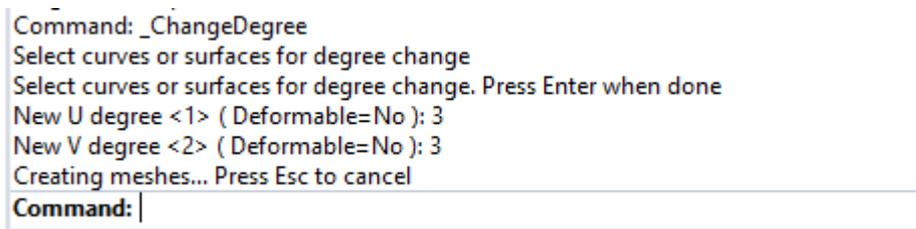
Em seguida, para elevar-se o grau da superfície, clica-se no tópico Edit e depois Change Degree (Figura 34), no qual será pedido para selecionar a superfície e em seguida para digitar o número do grau desejado, conforme mostrado na barra de comandos da Figura 35.

Figura 34 - Mudança de grau da superfície NURBS



Fonte: autor

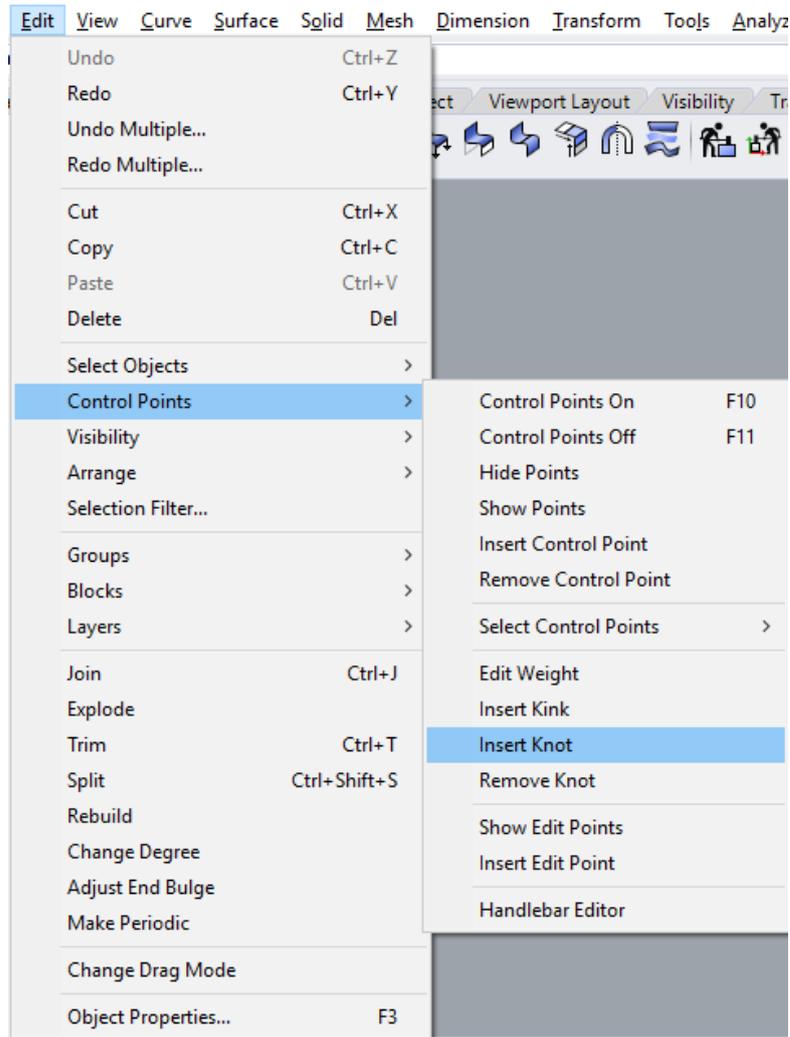
Figura 35 - Barra de comando com mudança de grau da superfície



Fonte: autor

Feito isso, o próximo passo é a inserção de *knots* clicando no tópico Edit, seguido de Control Points, e, finalmente Insert Knot, como é mostrado na XXX.

Figura 36 - Inserção de knots em uma superfície NURBS



Fonte: autor

Ao selecionar essa opção, é interessante notar que o Rhinoceros fornece algumas opções de ferramenta como é mostrado na Figura 37, pelo qual é seleciona-se a direção a ser inserido os *knots* e simetria entre eles.

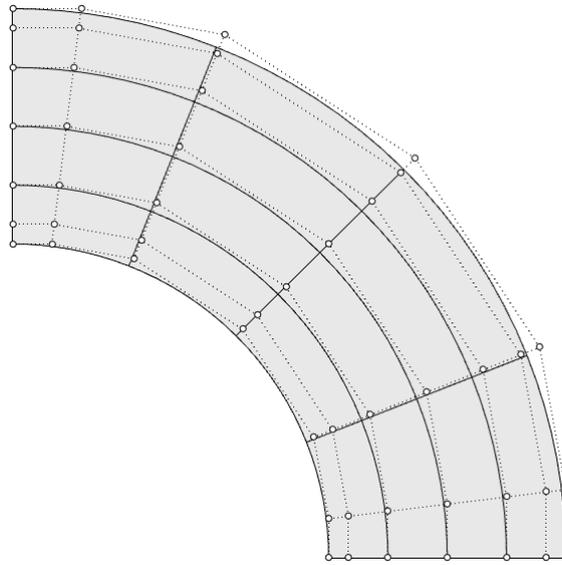
Figura 37 - Barra de comandos de inserção de *knots* no Rhinoceros

```
Command: _InsertKnot
Select curve or surface for knot insertion
Point on surface to add knot. Press Enter when done ( Automatic Midpoints=No Symmetrical=No Direction=U Toggle ): M
Point on surface to add knot. Press Enter when done ( Automatic Midpoints=Yes Symmetrical=No Direction=U Toggle ): S
Point on surface to add knot. Press Enter when done ( Automatic Midpoints=Yes Symmetrical=Yes Direction=U Toggle ):
```

Fonte: autor

Feito isso, é interessante analisar a malha do modelo selecionando a opção de mostrar os pontos de controle clicando F10 como mostra a Figura 36. Com isso a Figura 29 passar a ser mostrada conforme a Figura 38.

Figura 38 - Superfície refinada no Rhinoceros

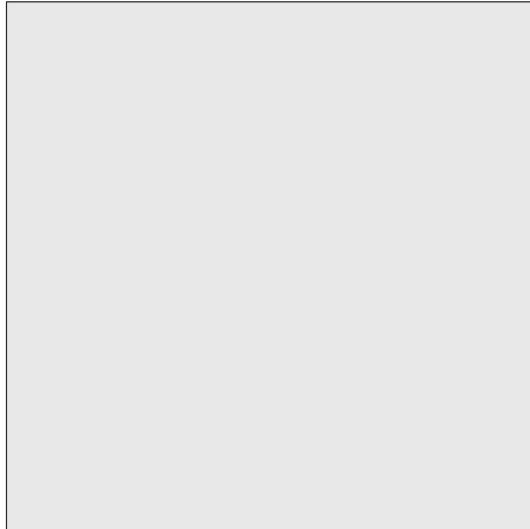


Fonte: autor

O passo seguinte é digitar `EditPythonScript` na barra de comandos para abrir o código em Python mostrado na Figura 27 e então submeter para geração do arquivo `msh` dentro da pasta do `FAST_ModDef`. Finalmente será aberto esse arquivo no `FAST_ModDef` de maneira semelhante a superfície mostrada na Figura 28, no qual será selecionados os pontos de controle que terão as condições de contorno adotadas, as arestas que receberão o carregamento e os elementos para adição do material. O material é criado adicionando suas propriedades e o tipo de análise também deve ser selecionada. Com isso, o arquivo é salvo em formato `.dat` e estará pronto para ser realizada análise no FAST.

Um outro exemplo, uma placa quadrada (Figura 39), pode ser feita da mesma forma como a superfície do exemplo anterior ou criar a superfície diretamente, não sendo necessária a criação das curvas de arestas.

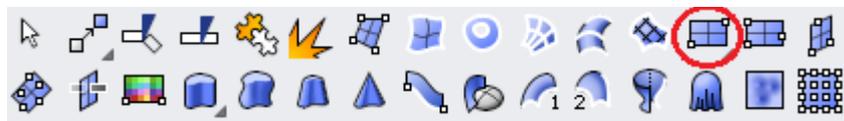
Figura 39 - Superfície de placa quadrada



Fonte: autor

Essa forma se dá selecionando a opção da Figura 40 pelo qual cria uma superfície quadrada a partir da seleção de dois pontos que podem ser adicionados através das coordenadas na barra de comandos conforme Figura 41.

Figura 40 - Barra de comando de superfícies no Rhinoceros – criação de superfícies a partir de 2 pontos



Fonte: autor

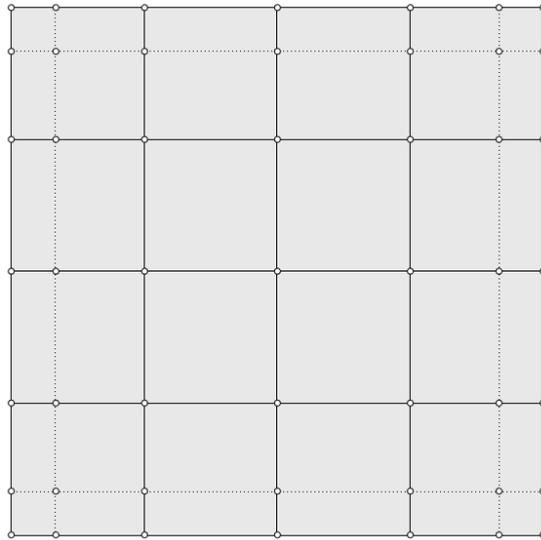
Figura 41 - Barra de comando com entrada dos pontos para criação da superfície

```
Command: _Plane
First corner of plane (3Point Vertical Center AroundCurve Deformable): 0,0
Other corner or length (3Point): 2,2
Command:
```

Fonte: autor

Os passos seguintes desse modelo são semelhantes ao mencionados anteriormente como elevação de grau (Figura 34), inserção de *knots* (Figura 36) e geração do arquivo msh utilizando o código em Python (Figura 27). O resultado do modelo é mostrado na XXX. Feito isso, resta apenas associar os atributos no FAST\_ModDef para então realizar as análises no FAST.

Figura 42 - Superfície de placa quadrada após refinamento



Fonte: autor

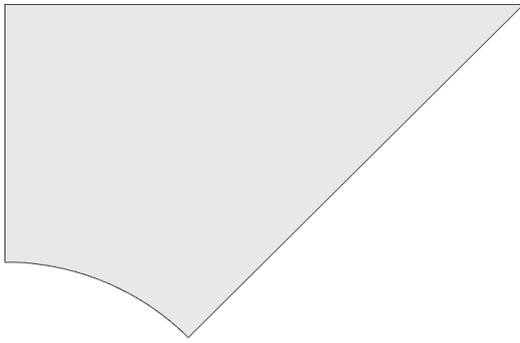
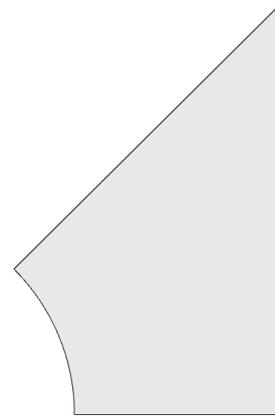
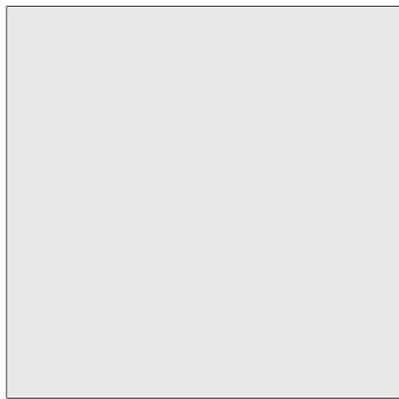
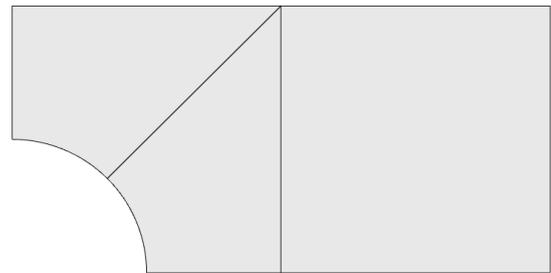
### 5.2.2 Criação de modelo com mais de um patch

Na seção anterior foi mostrado exemplos de modelos criados no Rhinoceros com um único *patch*. No entanto, formas mais complexas são melhores representadas para AIG utilizando modelos com múltiplos *patches*. Esse tópico busca mostrar como é criado o arquivo msh de um modelo com múltiplos *patches* feito no Rhino.

De maneira semelhante como para modelagem de formas com um *patch* como foram feitos anteriormente, nesse exemplo cada *patch* é feito de separadamente. Após a criação dos *patches* eles são alocados juntos utilizando o comando Move do Rhino para movê-los. A Figura 43 mostra os diferentes *patches* desse exemplo e o modelo final após a união deles.

A elevação de grau e inserção de *knots* da superfície são feitas individualmente para cada *patch*. Um passo importante na modelagem de superfícies com múltiplos *patches* como essa é usar o comando Join do Rhinoceros, reconhecendo os múltiplos *patches* como uma Polysurface e garantindo a continuidade entre os *patches*.

Finalmente, para concluir o arquivo de análise no FAST, basta realizar o restante do processo que foram feitos para as superfícies com único *patch* como mostrado anteriormente.

Figura 43 - Superfície com múltiplos *patches*a) Primeiro *patch*b) Segundo *patch*c) Terceiro *patch*d) Superfície com múltiplos *patches*

Fonte: autor

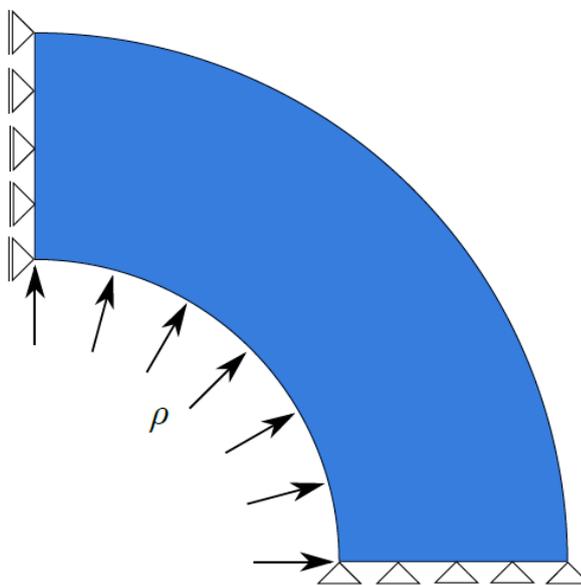
## 6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste tópico são apresentados exemplos de modelos isogeométricos utilizando o código em Python, a partir do qual é possível gerar um arquivo de saída com o conjunto de dados da geometria desenhada no Rhinoceros. Feito isso, foram realizadas análises de exemplos numéricos obtidos no FAST e validadas com resultados presentes na literatura e utilizando elementos finitos. Com isso, foram abordados exemplos de análise de placas tanto com um único patch quanto com múltiplos patches, considerando placas homogêneas, laminadas e FGM.

### 6.1 Cilindro submetido à pressão interna

O primeiro modelo, baseado na dissertação de Barroso (2015), trata-se de um cilindro espesso de material isotrópico submetido a pressão interna. O raio interno e externo desse cilindro são 0.20m e 0.35m, respectivamente, com comprimento de 1.00m. Com isso, foi realizado uma análise linear desse cilindro submetido a pressão interna, conforme mostrado na Figura 44.

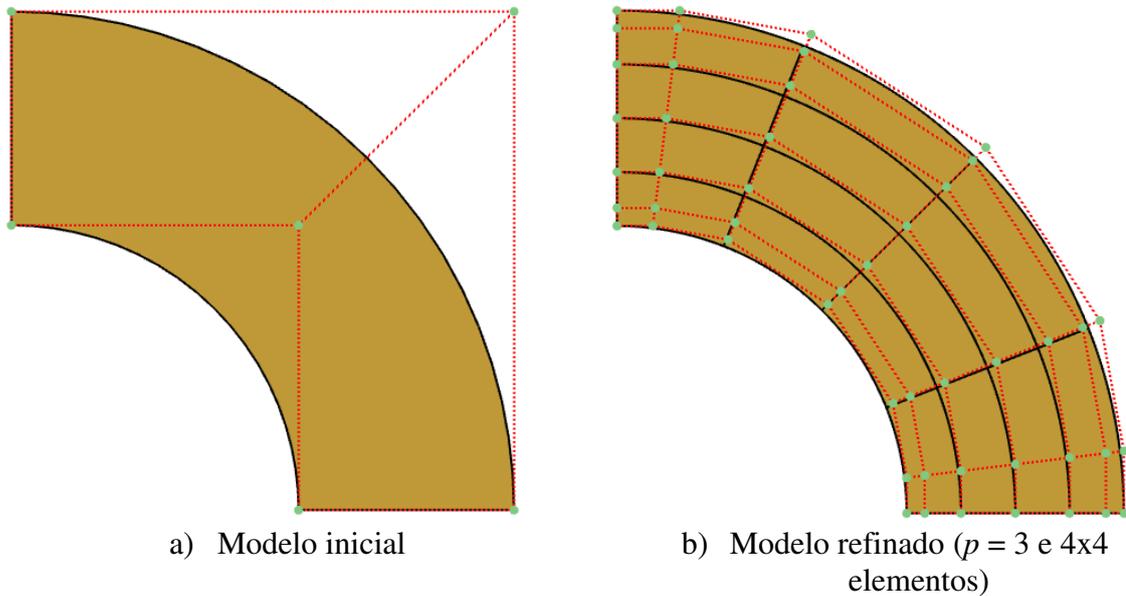
Figura 44 - Cilindro submetido a pressão interna



Fonte: Barroso (2015)

A fim de se verificar os resultados, comparando com a solução analítica (Solução de Lamé) mostrada na dissertação de Barroso (2015), elevou-se o grau da função para cúbica, e, em seguida, discretizou-se a malha em 4 elementos (2x2), 9 elementos (3x3) e 16 elementos (4x4). A Figura 45 mostra o modelo inicial e o modelo refinado (4x4) de grau cúbico.

Figura 45 - Modelos isogeometricos do cilindro



Fonte: autor

A Solução de Lamé é dada em coordenadas polares por:

$$u(r) = \left( \frac{1-\nu}{E} \frac{R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} r + \frac{1+\nu}{E} \frac{R_i^2 R_e^2}{(R_e^2 - R_i^2)r} \right) \rho \quad r \in [R_i, R_e] \quad (92)$$

$$\sigma_r(r) = -\rho \frac{(R_e^2 - r^2)R_i^2}{(R_e^2 - R_i^2)r^2} \quad (93)$$

$$\sigma_\theta(r) = -\rho \frac{(R_e^2 + r^2)R_i^2}{(R_e^2 - R_i^2)r^2} \quad (94)$$

onde  $u(r)$  é o deslocamento radial,  $R_e$  é o raio externo do cilindro,  $R_i$  é o raio interno do cilindro,  $\sigma_r(r)$  é a tensão radial e  $\sigma_\theta(r)$  é a tensão circunferencial.

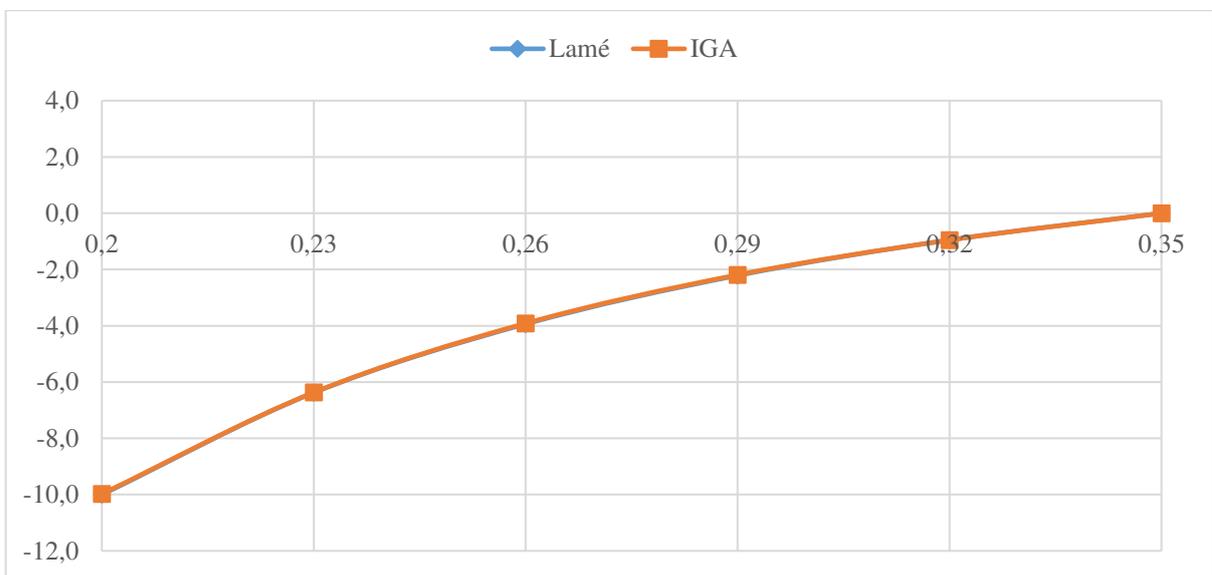
Foi adotado para as propriedades do material: módulo de elasticidade de  $10^6$  N/m<sup>2</sup> e coeficiente de Poisson de 0.2. A pressão interna atribuída a esse cilindro foi de 10 N/m<sup>2</sup>. Assim sendo, comparou-se os resultados obtidos para o deslocamento radial em  $r = 0.2m$  para este exemplo com refinamento  $k$  passando para grau cúbico e inserindo os *knots* obtendo os resultados mostrados na Tabela 2, anulando as diferenças em uma malha de 16 elementos. As diferenças foram calculadas por  $(Analítica - AIG)/Analítica$ .

Tabela 2 - Resultados do cilindro submetido à pressão interna

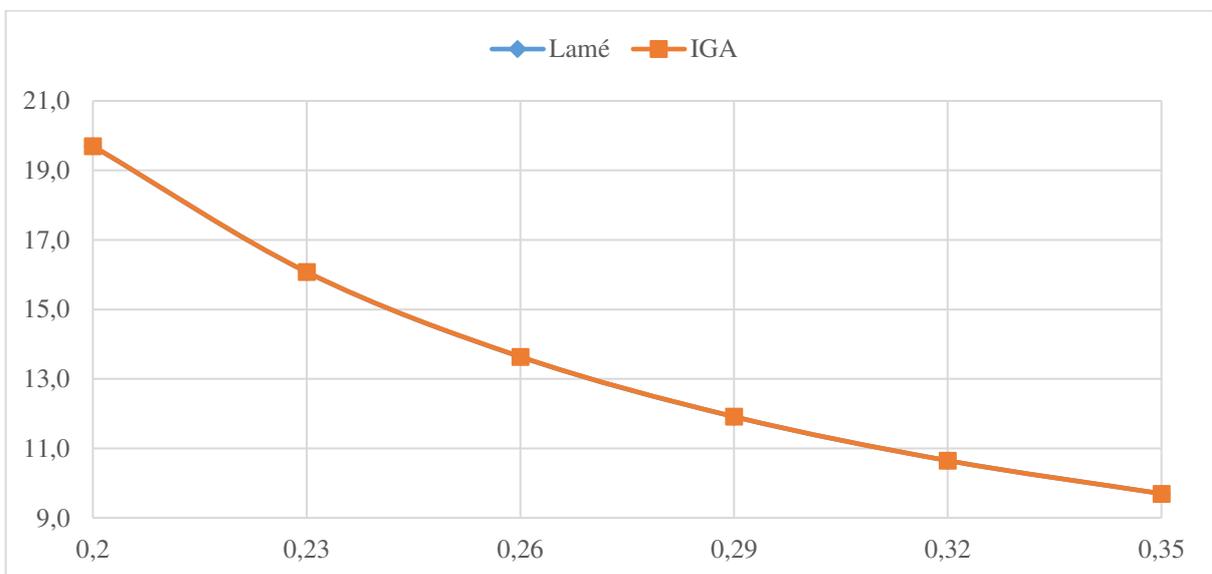
Resultado	(2x2)	(3x3)	(4x4)
Deslocamento no centro	3.06845E-06	4.33285E-06	4.33939E-06
Dif(%)	-41.42%	-0.15%	0.00%
Analítico		4.33939E-06	

Fonte: autor

Com isso, utilizando a malha mais refinada, verificou-se as tensões radial e circunferencial ao longo do raio do cilindro como é mostrado na Figura 46 e Figura 47, em N/m<sup>2</sup>, obtendo excelentes resultados.

Figura 46 - Gráfico de tensão radial do cilindro em N/m<sup>2</sup>

Fonte: autor

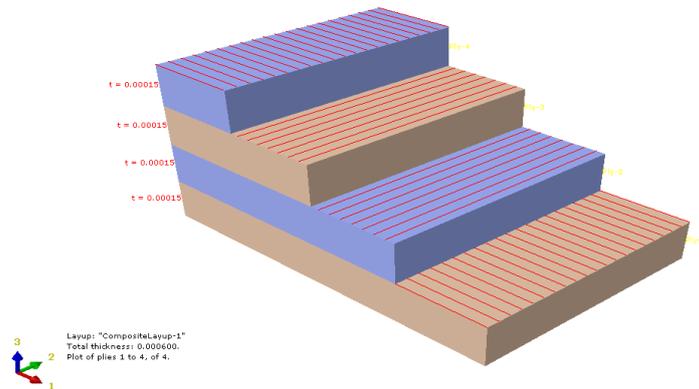
Figura 47 - Gráfico de tensão circunferencial do cilindro em N/m<sup>2</sup>

Fonte: autor

## 6.2 Laminado simplesmente apoiado submetido à carga uniformemente distribuída

O segundo exemplo numérico foi utilizado um compósito laminado, composto de quatro camadas, ou lâminas, apresentando ângulos de laminação de  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , ou seja, um laminado *cross-ply* e simétrico da seguinte configuração  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  mostrado na Figura 48.

Figura 48 - Placa laminada  $[0/90]_s$



Fonte: autor

Com isso, aplicou-se esse compósito como uma placa quadrada (4m x 4m) simplesmente apoiada e submetida a carga uniformemente distribuída de  $1.0 \text{ kN/m}^2$ , cuja espessura de cada camada é de  $0.0005 \text{ m}$ . As propriedades consideradas do material da lâmina são:  $E_1 = 25.0 \text{ GPa}$ ,  $E_2 = 1.0 \text{ GPa}$ ,  $E_3 = 1.0 \text{ GPa}$ ,  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0.5 \text{ GPa}$  e  $\nu_{12} = 0.25$ .

Diante das condições de contorno da placa retangular, para solução analítica fez-se uso da solução de Navier (REDDY, 2004), em que o deslocamento é expandido em um valor trigonométrico duplo (série de Fourier):

$$w_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (95)$$

$$W_{mn} = \frac{Q_{mn}}{d_{mn}} \quad (96)$$

$$Q_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mn} \quad (97)$$

$$d_{mn} = \frac{\pi^4}{b^4} [D_{11}m^4s^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2n^2s^2 + D_{22}n^4] \quad (98)$$

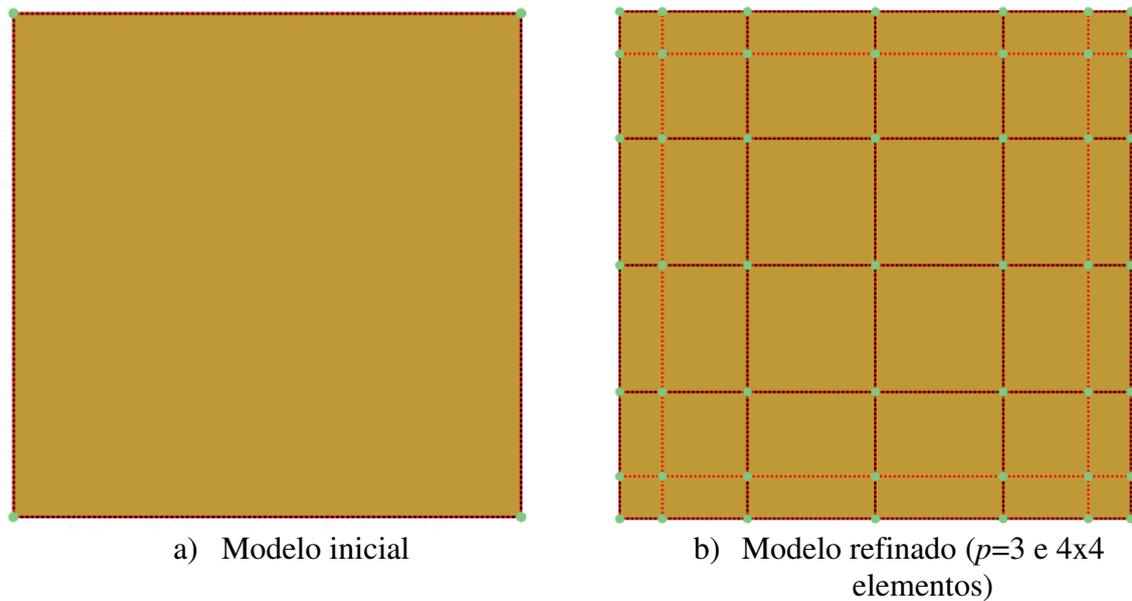
A Eq. (95), dada as condições de contorno da placa simplesmente apoiada, satisfaz essas condições para cálculo da solução analítica da deflexão transversal. Assim sendo, a Eq. (96) representa o valor de  $W_{mn}$  que são coeficientes a serem determinados, em que a flexão estática, na ausência de efeitos térmicos e no plano de forças da placa laminada, é satisfeita em todos os lugares do domínio da placa.

O coeficiente  $Q_{mn}$  varia para cada tipo de carregamento, no caso da carga distribuída uniformemente, esse coeficiente é representado pela Eq. (97). Por fim, na Eq. (98), o termo  $s$  representa a proporção da placa dada pela razão  $b/a$  e os termos denotados por  $D$  são retirados da matriz  $\mathbf{D}$ , ou seja, da matriz de rigidez a flexão do laminado, em que essa matriz é calculada fazendo-se uso de um programa feito em linguagem de MATLAB. Com isso, foi criado um outro programa em MATLAB que realizasse os cálculos dessas equações, obtendo-se os valores de deflexões máximas.

Na análise utilizando Método dos Elementos Finitos, criou-se um modelo no software ABAQUS, para então obter-se as deflexões máximas no centro da placa, variando a discretização da malha do modelo. Neste modelo foi utilizado elemento de casca com integração reduzida S8R.

Por fim, assim como foi feito no exemplo do cilindro, para este modelo foi criado um modelo isogeométrico utilizando o Rhinoceros e o FAST\_ModDef. Com isso, elevou-se o grau da função para cúbica e em seguida discretizou-se a malha em 4 elementos (2x2), 16 elementos (4x4), 64 elementos (8x8) e 256 elementos (16x16), para estudar a convergência da análise isogeométrica. O modelo inicial com funções lineares e modelo refinado com função cúbica e 16 elementos são representados na Figura 49.

Figura 49 - Modelos inicial e refinado de placa quadrada



Fonte: autor

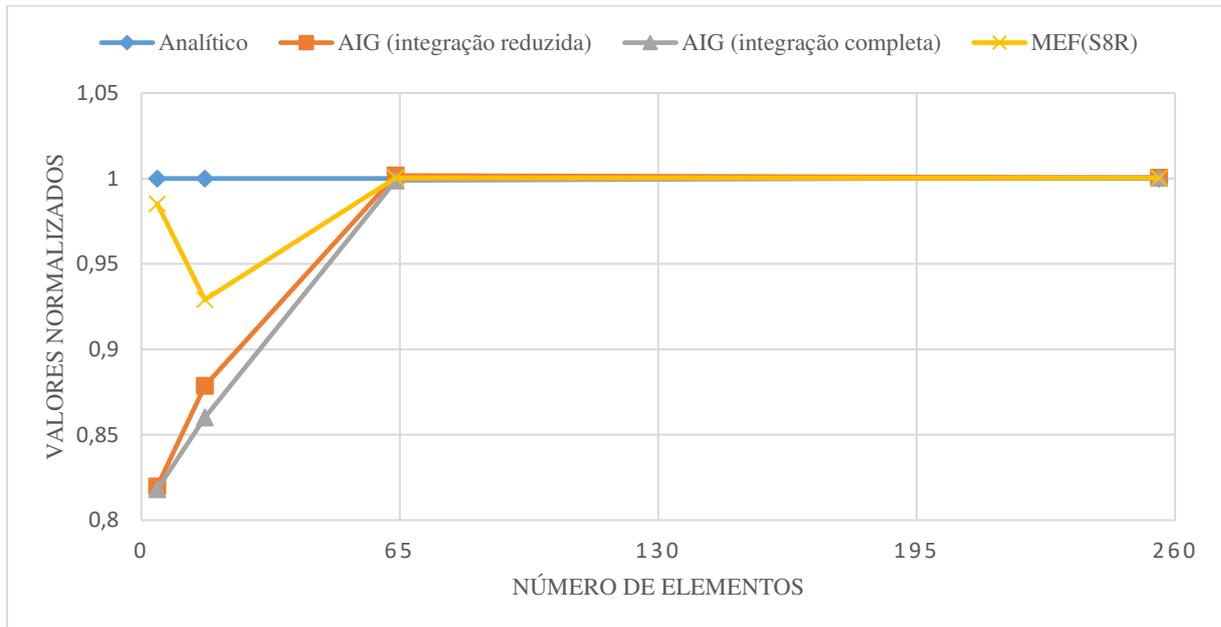
Em seguida, com os dados da geometria do modelo, adicionou-se as condições de contorno da placa simplesmente apoiada. Finalmente, os resultados obtidos para MEF (S8R) e AIG ( $p=3$ ), com integração reduzida e completa, são comparados com a solução de Navier ( $-2.174977E+02$  m) e mostrados na Tabela 3. Observa-se que os resultados convergem para a solução analítica à medida que a discretização é melhorada, como esperado, tanto para AIG quanto MEF. Essa observação é melhor observada no gráfico da Figura 50 em que os valores são normalizados em relação a solução analítica.

Tabela 3 - Resultados da placa laminada

Resultado	(2x2)	(4x4)	(8x8)	(16x16)
MEF (S8R)	-2.14259E+02	-2.02064E+02	-2.17580E+02	-2.17572E+02
Diferença	1.49%	7.10%	0.04%	0.03%
AIG (integração completa)	-1.77929E+02	-1.87086E+02	-2.17234E+02	-2.17641E+02
Diferença	18.19%	13.98%	0.12%	0.07%
AIG (integração reduzida)	-1.78311E+02	-1.91094E+02	-2.17876E+02	-2.17597E+02
Diferença	18.02%	12.14%	0.17%	0.05%

Fonte: autor

Figura 50 - Gráfico de resultados da placa laminada

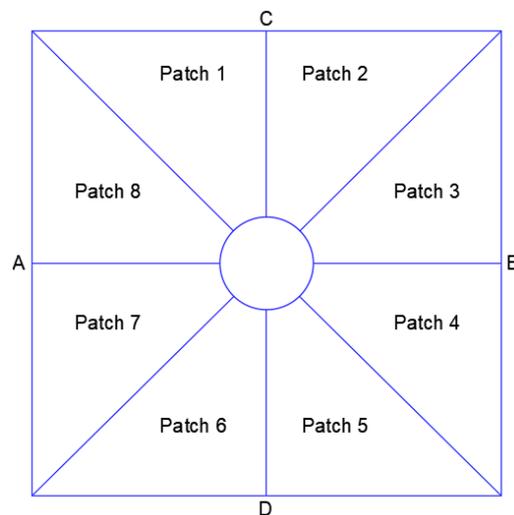


Fonte: autor

### 6.3 Estabilidade de placa com furo circular central

Neste exemplo será analisado o comportamento de uma placa simplesmente apoiada com furo central. A análise dessa placa será realizada para material isotrópico e FGM. Primeiro com material isotrópico, foi criado o modelo da placa com furo dividida em 8 patches, com tamanho do lado  $a = 100$  mm, diâmetro do furo  $d = 20$  mm e espessura de 0.001m, conforme é mostrado na Figura 51.

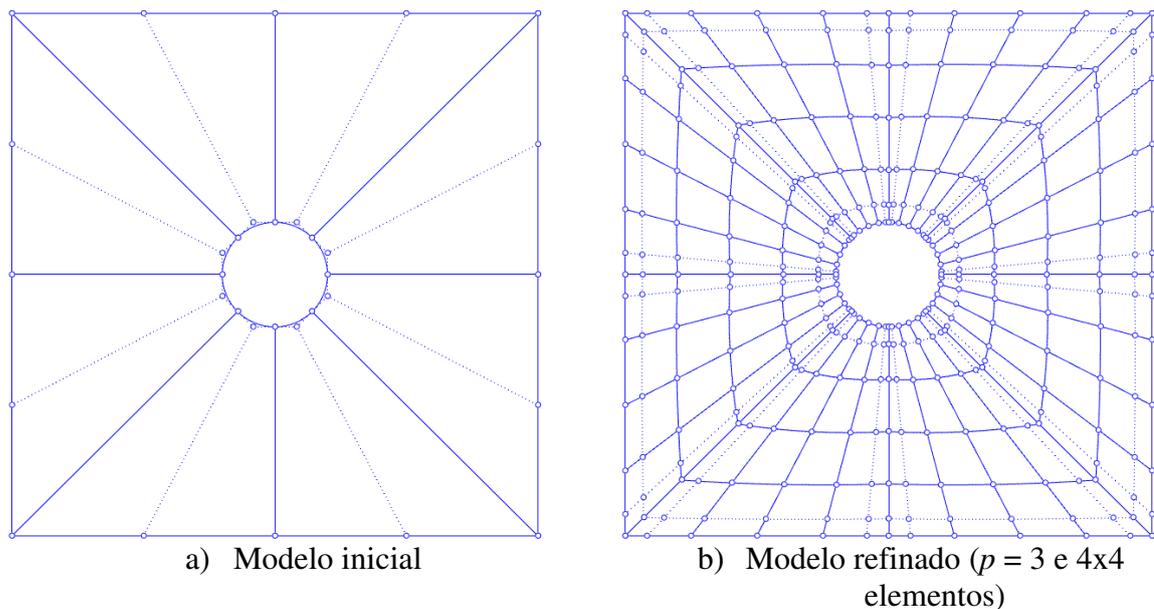
Figura 51 - Divisões de Patches da placa com furo circular central



Fonte: autor

As condições de contorno adotadas foram  $w = 0$  em todos os lados,  $v = 0$  em A e B e  $u = 0$  em C e D de acordo com a Figura 51. A Figura 52 mostra o modelo isogeométrico inicial e refinado cúbico e com malha de  $4 \times 4$  elementos em cada patch. O modelo final utilizado na análise possui grau cúbico e malha de  $16 \times 16$  elementos em cada patch, constituindo-se assim com 2736 pontos de controle e 2048 elementos. As propriedades do material são módulo de elasticidade  $E = 210$  GPa e coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ .

Figura 52 - Modelo isogeométrico da placa com furo circular central



Fonte: autor

O resultado da carga crítica para esse tipo de problema não possui solução analítica. No entanto, criou-se um modelo utilizando MEF no ABAQUS, discretizado em 10000 elementos, conforme a malha mostrada na Figura 53, utilizando elemento de casca S8R, obtendo o resultado com a finalidade de comparar com a AIG com integração completa e reduzida. Além disso, também se comparou com o resultado obtido por Singh et al (2012), que usa uma técnica de elementos finitos para resolver problema de flambagem da placa usando um elemento quadrilateral de oito nós e cinemática da placa baseada na Teoria de Reissner-Mindlin, normalizando com  $N_{cr} a^2 / E h^3$ .

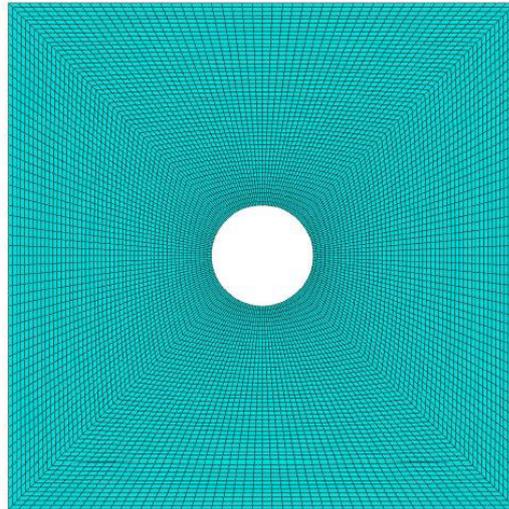
Os resultados obtidos são mostrados na Tabela 4, obtendo resultados idênticos de MEF e AIG. Observa-se que tanto para uma integração reduzida, quanto integração completa apresentam o mesmo resultado, isso pode acontecer para malhas bem discretizadas. Em seguida, será realizado a análise dessa placa para material FGM.

Tabela 4 - Resultados para placa isotrópica com furo central

MEF (S8R)	AIG (reduzida)	AIG (completa)	Singh (2012)
3.15	3.15	3.15	3.15

Fonte: autor

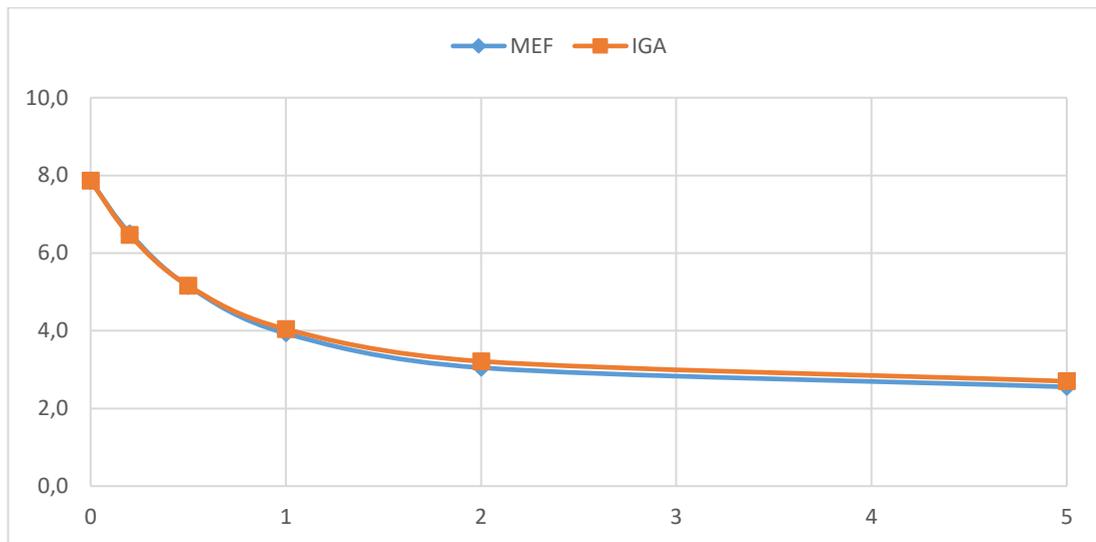
Figura 53 - Discretização da placa com furo central pelo MEF



Fonte: autor

Utilizando o material FGM, constituído por metal ( $E_m = 70$  GPa) e cerâmica ( $E_c = 380$  GPa) e considerado o coeficiente de Poisson constante e  $\nu = 0.3$ , algumas alterações na geometria dessa placa serão realizadas, mas mantendo a mesma discretização da malha. Agora se tratará de uma placa quadrada com lado  $a = 10$ m, espessura  $h = 0.1$ m e raio do furo  $r = 1$ m e engastada conforme realizado por Auad et al (2019), cujo cinemática do modelo é baseada na Teoria de Reissner-Mindlin. Os resultados da AIG foram comparados com os resultados do MEF, utilizando elemento S8R, para diferentes expoentes de variação de volume, mostrados na Figura 54, para os parâmetros normalizados com  $N_{cr}a^2/Eh^3$ .

Figura 54 - Coeficientes de flambagem para diferentes expoentes



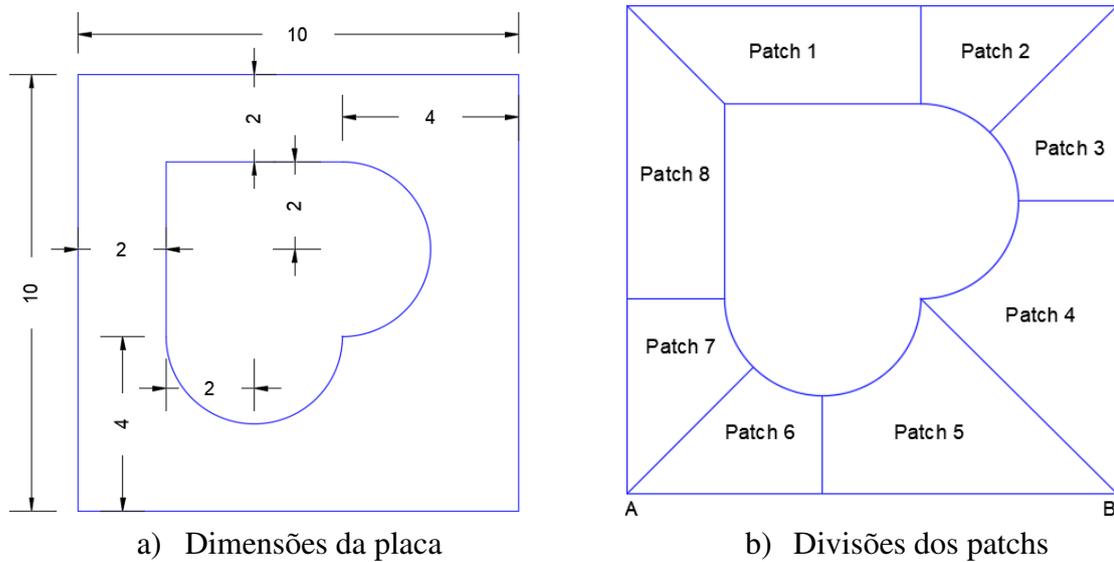
Fonte: autor

Os resultados apresentaram a mesma tendência, porém se distanciando um pouco à medida em que se aumentou o expoente de variação de volume. Além disso, a tendência da curva mostra que medida em que se aumenta o expoente de variação de volume, diminuí-se os coeficientes de flambagem.

#### 6.4 Vibração em placa com furo em forma de coração

Este exemplo consiste na análise de vibração de uma placa quadrada com um furo em forma de coração e simplesmente apoiada ( $w = 0$  em todos os lados e  $u = v = 0$  em A e B da Figura 55) e divididas em 8 patches, cujas dimensões são mostradas e divisões dos patches no modelo isogeométrico são mostrados na Figura 55, com material isotrópico e compósito laminado.

Figura 55 - Placa com furo em forma de coração



Fonte: autor

Primeiro realizou-se a análise dessa placa com um material isotrópico, verificando o autovalor do primeiro modo de vibração. Para tanto, utilizou um parâmetro adimensional dado por:

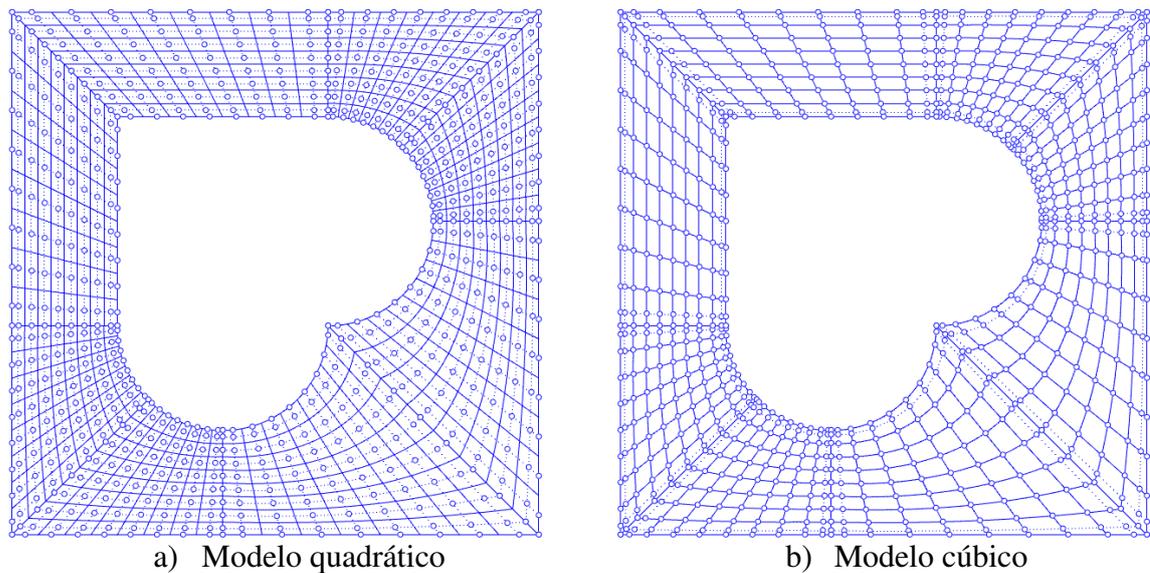
$$\Omega = \left( \frac{\omega^2 \rho t a^4}{D} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (99)$$

em que:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (100)$$

Para isso, fez-se uso do refinamento  $k$  para elevar o grau da função inicial para quadrática e cúbica, seguida de inserção de *knots* dividindo cada patch em 64 elementos (8x8), conforme Figura 56. O modelo quadrático foi composto por 720 pontos de controle, enquanto o modelo cúbico foi composto por 880 pontos de controle, ambos com 512 elementos.

Figura 56 - Modelo isogeométrico de placa quadrada com furo em forma de coração



Fonte: autor

As propriedades do material utilizado para essa análise são:  $E = 200$  GPa,  $\rho = 8000$  kg/m<sup>3</sup>,  $\nu = 0.3$  e espessura  $t = 0.05$  m. Por se tratar de um exemplo que não possui solução analítica, os resultados obtidos da AIG, com integração reduzida e completa, foram comparados com os resultados obtidos pelo MEF em um modelo realizado no ABAQUS, utilizando elemento S8R e elemento SRTI65 (elemento de casca fina triangular de 6 nós, usando 5 graus de liberdade por nó), e, com resultados obtidos por Liu et al (2018), no qual utiliza malha triangular com alta resolução e manutenção da geometria das curvas NURBS de entrada, no qual uma formulação de placa de Kirchhoff é implementada no algoritmo. Os resultados obtidos são mostrados Tabela 5.

Tabela 5 - Resultados da placa isotrópica com furo em forma de coração

Análise	AIG (reduzida)		AIG (completa)		MEF		Liu et al (2018)
Malha	Quadrática	Cúbica	Quadrática	Cúbica	S8R	SRTI65	
$\Omega$	4.9087	4.9058	4.9175	4.9060	4.8992	4.9041	5.0386

Fonte: autor

Com isso, observa-se que os resultados obtidos através da AIG e do MEF com material isotrópico estão próximos entre si, com uma diferença maior em relação aos resultados obtidos por Liu et al (2018). Tanto o elemento SRTI65 do ABAQUS quanto a formulação utilizada por Liu et al (2018) são baseados em teorias de casca fina, ao contrário da formulação utilizada na AIG para este trabalho. No entanto, mesmo com formulações de teorias diferentes, os resultados do elemento SRTI65 ficam mais próximos dos resultados da AIG com funções de base cúbica realizada nesse trabalho do que os resultados obtidos por Liu et al

(2018). O fato de terem teorias diferentes e com resultados próximos se dá pela espessura da placa ser muito fina, não gerando um valor significativo no termo referente ao efeito do cisalhamento.

Com relação a integração reduzida e completa da AIG, a diferença é muito pequena pois se trata de uma malha já bem discretizada. Além disso, não houve uma grande diferença ao elevar-se o grau das funções, isso acontece por causa do número de *knot spans* ser um valor consideravelmente bem discretizado.

Em seguida, a análise foi realizada com material compósito laminado cujas propriedades são dadas com: razões entre os módulos de elasticidade  $E_1/E_2 = 2.45$  e  $G_{12}/E_2 = 0.48$ , coeficiente de Poisson  $\nu_{12} = 0.23$  e densidade  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$ . A espessura da placa foi de  $h = 0.06 \text{ m}$ , sendo composta por três lâminas de  $0.02 \text{ m}$  cada, dispostas em diferentes orientações, formando laminados *cross-ply* e *angly-ply*. Neste caso, as frequências naturais foram normalizadas segundo o parâmetro:

$$\beta = \left( \frac{\omega^2 \rho h a^4}{D} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (101)$$

em que:

$$D = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}. \quad (102)$$

Os resultados obtidos para AIG com integração reduzida e completa, utilizando as mesmas condições de contorno mencionadas anteriormente e malha, destes modelos foram comparados pela AIG feita por Shojaee et al (2012), no qual também utilizou modelos quadráticos (880 pontos de controle e 640 elementos) e cúbicos (576 pontos de controle e 192 elementos) baseada na Teoria Clássica de Placas, representados por IGA-Q e IGA-C, respectivamente. Vale ressaltar que os resultados obtidos por Shojaee et al (2012) foram comparados com resultados já obtidos na literatura. As comparações são mostradas na Tabela 6.

Tabela 6 - Resultados da placa laminada com furo em forma de coração

Laminação	MEF		AIG (Completa)		AIG (Reduzida)		Shojaee et al (2012)	
	S8R	SRTI65	Quadrática	Cúbica	Quadrática	Cúbica	IGA-Q	IGA-C
(0°,0°,0°)	17.786	17.837	17.907	17.835	17.856	17.833	18.288	18.194
(15°,-15°,15°)	18.663	18.718	18.385	18.300	18.324	18.299	19.020	18.912
(30°,-30°,30°)	20.110	20.172	19.514	19.411	19.442	19.409	20.448	20.316
(45°,-45°,45°)	20.786	20.853	20.069	19.957	19.992	19.955	21.128	20.982
(0°,90°,0°)	17.794	17.845	17.916	17.843	17.865	17.842	18.284	18.190

Fonte: autor

Os resultados obtidos para laminados *cross-ply* utilizando o elemento SRTI65 e AIG, mesmo com formulações diferentes, como mencionadas anteriormente, estão bem próximos. Já para os laminados *angle-ply*, os resultados obtidos por Shojaee et al (2012) ficaram bem próximos do elemento SRTI65. Algumas diferenças podem ocorrer principalmente pela malha adotada e o número de graus de liberdade e por terem sido utilizadas formulações de teorias diferentes.

## 7 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi realizado uma pesquisa de *softwares* CAD com formulação NURBS com finalidade de se adotar algum como ferramenta de pré-processador de AIG para o FAST. Dentre os *softwares* estudados, o escolhido foi o Rhinoceros, por ser o mais utilizado no meio acadêmico com essa finalidade, possuir suporte para linguagem de script em Python e permitir o acesso em uma duração de três meses.

Assim sendo, foi desenvolvido um código em Python capaz de escrever um arquivo tipo .msh, contendo todas as informações da geometria do modelo: pontos de controle e seus respectivos pesos, *knot spans* e elementos. Este arquivo é utilizado no FAST\_ModDef para então ser adicionado os atributos da análise como propriedades do material, condições de contorno, carregamento e tipo de análise a ser realizada, salvando o arquivo gerado em formato .dat. Finalmente, com este arquivo é possível a realização da AIG utilizando o FAST.

O código abrange superfícies 2D e 3D, porém o foco deste trabalho foi superfícies planas. Portanto, alguns exemplos numéricos foram realizados para validar o código desenvolvido no Rhino como ferramenta de pré-processamento de AIG no FAST, no qual toda a modelagem geométrica é realizada no *software*, incluindo os tipos de refinamento.

O primeiro exemplo trata-se de um cilindro submetido à pressão interna de material isotrópico, contendo um único patch, no qual refinando o modelo para cúbico e discretizando a malha, os resultados foram convergindo para solução analítica, em que a diferença se tornou nula já para uma malha de 4x4 elementos.

Em seguida, na análise da placa submetida à carga uniformemente distribuída, utilizou material compósito laminado com solução analítica e comparou os resultados obtidos com o MEF. Assim como o exemplo do cilindro, os resultados convergiram à medida em que se discretiza a malha do modelo.

Uma das principais vantagens da AIG em relação ao MEF é capacidade das NURBS representarem de forma exata a geometria do modelo. Os dois últimos exemplos buscaram-se mostrar essa vantagem. Trata-se de placas quadradas com furos, em que através do MEF não é possível representar de forma exata essa geometria, levando a uma discretização da malha com muitos elementos para se obter bons resultados.

Para a placa com furo central circular foi realizada uma análise de estabilidade que não possui solução analítica. Dessa forma realizou-se primeiro a análise com material isotrópico, comparando com o MEF para uma malha com muitos elementos e graus de liberdade e com resultados obtidos na Literatura. Observou-se que a malha adotada neste trabalho resulta

em bons resultados. Com isso, utilizando esse modelo, realizou-se a mesma análise com material FGM, verificando que à medida em que se aumenta o expoente de variação de volume, diminui a carga crítica.

Por fim, o último exemplo numérico trata de uma placa com furo em forma de coração, também sem solução analítica. Para este exemplo realizou-se a análise dinâmica para obter as vibrações dessa placa para material isotrópico e laminado com diferentes orientações. Os resultados obtidos foram comparados com resultados obtidos na Literatura e MEF, obtendo valores aceitáveis.

Com isso, foram obtidos resultados que validam o código desenvolvido no Rhinoceros como uma ferramenta de pré-processador para Análise Isogeométrica no FAST de placas tanto para material isotrópico quanto materiais compósitos.

## REFERÊNCIAS

ABAQUS. (2010). **ABAQUS User's Manual**. Providence, Rhode Island, USA: Dassault Systèmes. Simulia Corporation ABAQUS vs. 6. 11.

ADOBE. **Adobe Photoshop**. Disponível em: <[https://www.adobe.com/br/products/photoshop.html?promoid=1NZGDDSP&mv=other&orig\\_ref=https%3A%2F%2Fwww.photoshop.com%2F](https://www.adobe.com/br/products/photoshop.html?promoid=1NZGDDSP&mv=other&orig_ref=https%3A%2F%2Fwww.photoshop.com%2F)>. Acesso em: 28 de maio de 2019.

AUAD, S. P.; PRACIANO, J. S. C.; BARROSO E. S.; SOUSA JR., J. B. M.; PARENTE JUNIOR, E.; Isogeometric Analysis of FGM plates. **Materials Today: Proceedings**, v. 8, p. 738-746, 2019.

ASYMPTOTE. **Asymptote: The Vector Graphics Language**. Disponível em: <<http://asymptote.sourceforge.net/>>. Acesso em: 05 de novembro de 2019.

AUTODESK. **AutoCAD**. Disponível em: <<https://www.autodesk.com.br/products/autocad/overview>>. Acesso em: 20 de maio de 2019.

AUTODESK. **Maya**. Disponível em: <<https://www.autodesk.com.br/products/maya/overview>>. Acesso em: 20 de maio de 2019.

BARBERO, E. J. **Introduction to composite materials design**. 2nd. ed. Taylor & Francis, 1999.

BARROSO, Elias Saraiva. **Análise e otimização de estruturas laminadas utilizando a formulação isogeométrica**. 2015. 161 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

BARROS, Pedro Sanderson Bastos. **Abordagem isogeométrica para o estudo da estabilidade de compósitos laminados considerando falha progressiva**. 2016. 141 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.

BLENDER. **Blender 2.80**. Disponível em: <<https://www.blender.org/>>. Acesso em: 20 de maio de 2019.

CERVO, Amado L.; BERVIAN, Pedro A.; SILVA, Roberto da. **Metodologia científica**. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4. ed. Madison: John Wiley & Sons, Inc, 2002.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**, vol. 1, England: John Wiley and Sons, 1991.

D'AGUIAR, Savanna Cristina Medeiros. **Estabilidade de colunas de material compósito reforçado por fibras**. 2017. 117 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa

de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.

FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **A First Course in Finite Elements**. 1. ed. John Wiley & Sons, Inc, 2007.

GHUGAL, Y. M.; SHIMPI, R. P. A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, v. 20, p. 252-272, 2011.

HUGHES, T.; COTTETRL, J.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, n. 39-41, p. 4135-4295, 2005.

INKSCAPE. **Inkscape project**. Disponível em: <<https://inkscape.org/pt-br/>>. Acesso em: 20 de maio de 2019.

LIU, N.; JEFFERS, A. E. A geometrically exact isogeometric Kirchhoff plate: Feature-preserving automatic meshing and  $C^1$  rational triangular Bézier spline discretizations. **Int J Numer Methods Eng**. 2018; 115:395-409.

KIWI!3D. **Kiwi!3D**. Disponível em: < [www.kiwi3d.com](http://www.kiwi3d.com)>. Acesso em: 05 de novembro de 2019.

NGUYEN-THANH, N.; KIENDL, J.; NGUYEN-XUAN, H.; WÜCHNER, R.; BLETZINGER, KU U.; BAZILEVS, Y.; RABCZUK, T. Rotation free isogeometric thin shell analysis using PHT-splines. **Computer Methods Applied Mechanics and Engineering**, v. 200, p.3410-3424, 2011.

PARENTE JUNIOR, E. **FAST Version 2.1.2**: User's manual. Fortaleza, 2019. 32p.

PARENTE JUNIOR, E.; HOLANDA A. S.; SILVA, S. M. A. Tracing nonlinear equilibrium paths of structures subjected to thermal loading. **Computational Mechanics**, v. 38, p. 505-520, 2006.

PERDUTA, A.; PUTANOWICZ, R. Tools and techniques for building models for isogeometric analysis. **Advances in Engineering Software**, v. 127, p. 70-81, 2019.

PIEGL, L.; TILLER, W. **The nurbs book (monographs in visual communication)**. 2. ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997.

PRACIANO, Jamires Sousa Cordeiro. **Análise da estabilidade de estruturas laminadas e de materiais com gradação funcional utilizando uma formulação isogeométrica**. 2018, 101 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará.

PRACIANO, Jamires Sousa Cordeiro; BARROS, Pedro Sanderson Bastos; BARROSO, Elias Saraiva; JUNIOR, Evandro Parente; HOLANDA, Áurea Silva de; JUNIOR, João Batista M. Sousa. An isogeometric formulation for stability analysis of laminated plates and shallow shells. **Thin-Walled Structures**, v. 143, 2019.

RAO, SINGIRESU S. **Vibrações Mecânicas**. 4. Ed. Printice Hall Brasil, 2009.

RANK, E.; RUESS, M.; KOLLMANNBERGER, S.; SCHILLINGER, D.; DUSTER, A. Geometric modeling, isogeometric analysis and the finite cell method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 249-252, p. 104-115, 2012.

REDDY, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis**. 2. Ed. Florida: CRC Press, 2004.

RHINOCEROS. **Rhino3d**. Disponível em: <<https://www.rhino3d.com/>>. Acesso em: 20 de maio de 2019.

ROCHA, Iuri Barcelos Carneiro Montenegro da. **Análise e otimização de cascas laminadas considerando não-linearidade e falha progressiva**. 2013. 159 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará.

ROCHA, Pedro Luiz Ribeiro. **Desenvolvimento de um pré-processador para análise de estabilidade e perfis estruturais de paredes finas**. 2018. 104 f. Monografia - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.

SEDERBER, T. W. Computer aided geometric design course notes, October 2014.

SINGH, S.; KULKARNI, K.; PANDEY, R.; SINGH, H.; Buckling analysis of thin rectangular plates with cutouts subjected to partial edge compression using FEM. **Journal of Engineering, Design and Technology**, v. 10, p. 128-142, 2012.

SHOJAEE, S.; VALIZADEH, N.; IZADPANA, E.; BUI, T.; VU, T.; Free vibration and buckling analysis of laminated composite plates using the NURBS-based isogeometric finite element method. **Composite Structures**, v. 94, p. 1677-1693, 2012.

ZUO, B-Q.; HUANG, Z-D.; WANG, Y-W.; WU, Z-J. Isogeometric analysis for CSG models. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 285, p. 102-124, 2015.