UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FRANCISCO JOSÉ CALIXTO DE SOUSA

COMBINAÇÕES AFINS

FORTALEZA-CE
2013

FRANCISCO JOSÉ CALIXTO DE SOUSA

COMBINAÇÕES AFINS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA-CE
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

F697c Sousa, Francisco José Calixto de
Combinações Afins / Francisco José Calixto de Sousa. - 2013.
29 f. : enc. ; 31 cm

Dissertação(mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2013.
Área de concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Álgebra linear. 2. Ensino médio. 3. Números reais. I. Título.

CDD 512.5

FRANCISCO JOSÉ CALIXTO DE SOUSA

COMBINAÇÕES AFINS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 23/03/2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. João Montenegro de Miranda
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dedico este trabalho aos meus pais José Calixto Brito e Inês de Sousa Brito.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus pela sua existência, pelo dom da vida e por todas as bençãos concedidas.

Agradeço aos meus pais, José Calixto Brito e Inês de Sousa Brito pelo amor, apoio e criação.

Agradeço aos meus irmãos Antonio Aldenir Calisto de Sousa, Antonia Iraneide Calisto de Souza e Antonio Evandro Calixto de Sousa pelo apoio e incentivo nas minhas escolhas.

Agradeço aos meus cunhados Maria das Graças de Sousa e Cícero Jovane Fernandes Farias pela boa consideração e amizade.

Agradeço aos meus sobrinhos Luan Calisto de Farias, José Guilherme, Ana Karla Rocha Calisto de Sousa, Kelly Anna Rocha Calisto de Sousa e Eduardo Rocha Calisto, pelo carinho e presença comigo.

Agradeço ao meu professor e orientador Marcelo Ferreira de Melo, pelas aulas, indicações e pronto atendimento ao trabalho de orientação e pelo compromisso contínuo durante todo o programa de mestrado.

Agradeço aos professores, José Afonso de Oliveira, Marcos Ferreira de Melo, José Robério Rogério, José Othon Dantas Lopes, Cleon da Silva Barroso, José Fábio Bezerra Montenegro pelas aulas ministradas e dedicação neste projeto de mestrado.

Agradeço a todos os meus colegas de pós-graduação em matemática da UFC, em especial, a Ricardo Sampaio e Diego Nery, por terem me encorajado a prosseguir nos momentos mais difíceis.

Agradeço a todos os colegas do PROFMAT que contribuíram a distância nas disciplinas do mestrado, em especial, a Elisângelo Lopes e José Xavier, pelas valorosas sugestões nos exercícios.

Agradeço a todos os responsáveis pela criação deste programa de mestrado profissional em matemática em rede nacional, em especial aos professores idealizadores Elon Lages Lima, Eduardo Wagner e Paulo César Pinto Carvalho.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todos que de maneira direta ou indireta contribuíram para que este sonho se realizasse.

“Quem é sábio e tem entendimento entre vocês? Que o demonstre por seu bom procedimento, mediante obras praticadas com a humildade que provém da sabedoria."

Tiago 3:13

RESUMO

Neste trabalho, consideramos combinações afins de vetores de um espaço vetorial com especiais aplicações no ensino médio através da média aritmética ponderada e da desigualdade de Jensen. Verificamos características de transformações lineares de conjuntos específicos nos espaços vetoriais como conjuntos convexos e variedades afins, através do núcleo e da imagem das transformações. Estabelecemos relações entre transformações afins, combinações afins e transformações lineares. Discutimos a dimensão do hiperplano relacionando-o como variedade afim. Vemos que todo subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ com dimensão $n-1$ é um hiperplano, assim como o núcleo de um funcional linear.

Palavras-chave: Combinação afim, Variedade Afim, Transformação Linear, Transformação Afim e Hiperplano.

ABSTRACT

In this paper, we consider combinations of related vectors of a vector space with special applications in high school through the weighted arithmetic mean and the Jensen inequality. We observed characteristics of specific sets of linear transformations in the vector spaces as convex sets and related varieties through the core and image transformations. Established relations between affine transformations, combinations thereof and linear transformations. We discuss the size of the hyperplane relating it as affine variety. We see that all of $\mathbb{R}^n$ vector subspace with dimension $n-1$ is a hyperplane, as the core of a linear functional.
Keywords: Combination order, Variety In order, Linear Transformation, Transformation In order and Hyperplane.

Sumário

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O estudo de equações lineares, comum nos ensinos fundamental e médio é facilitado quando se denota a noção geométrica. A álgebra linear surgiu do estudo detalhado de sistemas de equações lineares e utiliza de alguns conceitos e estruturas fundamentais da matemática, tais como vetores, espaços vetoriais, transformações lineares e matrizes.

Instrumentos básicos relacionados com a solução de sistemas de equações lineares datam da antiguidade, como a eliminação de Gauss, por volta do século II, até os tempos atuais, com os modernos programas de computadores.

A geometria analítica vetorial, que tem uma conotação mais algébrica, ajuda a mostrar o quanto situações presentes na matemática do ensino médio podem ser intuitivamente observadas e posteriormente bem esclarecidas em um âmbito formal generalizado.

A matemática no ensino médio tem caráter aplicativo. E para torná-la uma disciplina mais compreensível, os professores devem levar aos alunos abordagens que vão do real até o imaginário.

Este trabalho procura desenvolver uma abordadem vetorial simplista do ponto de vista da álgebra linear para mostrar ao aluno do ensino médio fatos específicos no plano ou no espaço utilizando noções de espaços vetoriais corelacionadas ao conceito de transformação linear.

No primeiro capítulo, apresentamos a definição de combinação afim, de maneira simples e exemplificada mostramos casos particulares usando números reais. No capítulo seguinte, vemos casos de transformações e suas propriedades, através de conceitos associados aos vistos no ensino médio, como o de domínio e imagem de funções, conjuntos e subconjuntos, além de trazer novos parâmetros como o de núcleo de uma transformação, variedade afim e transformação afim.

No último capítulo abordamos o hiperplano através de exemplos associando-o à variedades afins dentro de um espaço vetorial, expandindo a noção habitual de plano no espaço para outras dimensões. Relaciona-se ainda o conjuto solução de certos sistemas lineares ao conceito de hiperplano.

Capítulo 2

COMBINAÇÃO AFIM

Seja E um espaço vetorial, ou seja, são definidas as operações de adição e de multiplicação por escalar em E. Se $x, y \in E$ e $x \neq y$, a reta que une os pontos x, y é, por definição o conjunto

$$r = \{(1-t)x + ty; t \in \mathbb{R}\}. \tag{2.1}$$

Exemplo 2.1 *Dados os pontos $x = (2, -1, 5)$ e $y = (-3, 4, 2)$ do espaço, a reta r que passa pelos pontos A e B é:*

$$r = \{(1-t)(2, -1, 5) + t(-3, 4, 2); t \in \mathbb{R}\}$$

$$r = \{(2-2t, -1+t, 5-5t) + (-3t, 4t, 2t); t \in \mathbb{R}\}$$

$$r = \{(2-5t, -1+5t, 5-3t); t \in \mathbb{R}\}$$

$$r = \{(2, -1, 5) + t(-5, 5, -3); t \in \mathbb{R}\}$$

Esta reta é portanto uma reta paralela à reta $r' = \{t(-5, 5, -3); t \in \mathbb{R}\}$ deslocada a partir do vetor $\overrightarrow{v} = (2, -1, 5)$. De uma forma grosseira, poderíamos representar r assim:

$$r = r' + \overrightarrow{v}$$

Definição 2.1 *Um subconjunto $V \subset E$ chama-se uma variedade afim quando a reta que une dois pontos quaisquer de V está contida em V. Assim, $V \subset E$ é uma variedade afim se, e somente se, cumpre a condição:*

$$x, y \in V, t \in \mathbb{R} \Rightarrow (1-t)x + ty \in V. \tag{2.2}$$

Outra forma de caracterizar uma variedade afim é fazendo-a como um subespaço vetorial deslocado a partir de um determinado vetor $\overrightarrow{v}$, como no Exemplo 2.1.

2.1 Combinação Afim e Vetores Afim-independentes

Num espaço vetorial E, diz-se que o vetor v é uma *combinação afim* dos vetores $v_1, \cdots, v_r$ quando se tem $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r$, com $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r = 1$.

Exemplo 2.2 *Dados os vetores $v_1 = (1, 0), v_2 = (1, 1), v_3 = (0, 1)$, não colineares, pertencentes ao $\mathbb{R}^2$, qualquer ponto do plano pode ser escrito como combinação afim de v_1, v_2, v_3.*

De fato, fazendo:

$$(x, y) = av_1 + bv_2 + (1 - a - b)v_3; a, b \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

teremos:

$$(x, y) = a(1, 0) + b(1, 1) + (1 - a - b)(0, 1) = (a + b, 1 - a)$$

e obtemos a combinação afim de v_1, v_2, v_3:

$$(x, y) = (1 - y)v_1 + (x + y - 1)v_2 + (-x + 1)v_3. \tag{2.4}$$

Diz-se que os vetores $v_1, \cdots, v_r$ são *afim independentes* quando nenhum deles é uma combinação afim dos demais. No exemplo anterior, o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ são vetores afim independentes pois nenhum escreve-se como combinação afim dos outros.

Exemplo 2.3 *No plano, dados dois vetores não colineares, por exemplo,* $u = (1, 0), v = (0, 1)$, *a reta* $r = \{(1 - t)u + tv; t \in \mathbb{R}\}$ *é o conjunto de todas as combinações afins de* u *e* v.

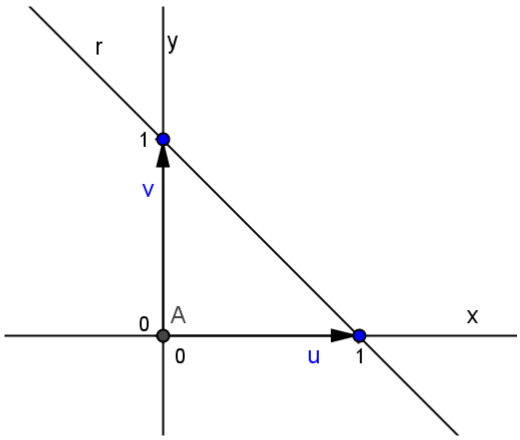

Figura 2.1: r: combinações afins de u e v.

Seja $w \in r$. Note que neste caso $\{u, v, w\}$ não é um o conjunto de vetores afim independentes, pois qualquer um deles escreve-se como combinação afim dos outros.

Proposição 2.1 *Dados os vetores* $v_1, \cdots, v_r$ *do espaço vetorial* E, *as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) Os vetores $v_1, \cdots, v_r$ *são afim-independentes.*

(2) Se $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = 0$ *e* $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r = 0$ *então* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$.

(3) Se $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r$ *com* $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = \sum_{i=1}^{r} \beta_i$ *então* $\alpha_1 = \beta_1, \cdots, \alpha_r = \beta_r$. *Em particular, duas combinações afins dos* v_i *só podem ser iguais quando tiverem os mesmos coeficientes.)*

(4) Os vetores $v_2 - v_1, v_3 - v_1, \cdots, v_r - v_1$ *são L.I. .*

(5) A variedade afim gerada por $v_1, \cdots, v_r$ *tem dimensão* $r - 1$.

Prova:

$(1) \Leftrightarrow (4)$

$(1) \Rightarrow (4)$ Por hipótese, os vetores $v_1, \cdots, v_r$ são afim-independentes, ou seja, nenhum deles é uma combinação afim dos demais. Suponha que os vetores $v_i - v_1 (i = 2, 3, ..., k)$ fossem L.D. Com isso, algum deles seria combinação linear dos anteriores, e então:

$$v_k - v_1 = c_2(v_2 - v_1) + ... + c_{k-1}(v_{k-1} - v_1)$$

$$v_k - v_1 = \sum_{i=2}^{k-1} c_i(v_i - v_1)$$

$$v_k = \sum_{i=2}^{k-1} c_i v_i - \sum_{i=2}^{k-1} c_i v_1 + v_1$$

$$v_k = \left(1 - \sum_{i=2}^{k-1} c_i\right) v_1 + \sum_{i=2}^{k-1} c_i v_i$$

Note que a soma dos coeficientes de $v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}$ é igual a 1 e portanto v_k é uma combinação afim dos demais vetores, o que nos leva a concluir que os vetores $v_i - v_1 (i = 2, 3, ..., k)$ são L.I..

$(4) \Rightarrow (1)$ Por outro lado, se v_k fosse uma combinação linear afim dos anteriores, teríamos

$$v_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_i$$

com $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1} = 1$. E se à igualdade acima adicionarmos $-\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_1$, teremos:

$$v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_1 = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_1$$

$$v_k - v_1 = \sum_{k=1}^{k-1} \alpha_i(v_i - v_1)$$

e, portanto $v_k - v_1$ é combinação linear dos vetores $v_i - v_1$.

$(4) \Rightarrow (2)$ Se a soma dos coeficiente α é nula, a combinação linear na hipótese de (2) pode ser escrita como

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k v_k = \left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_k\right) v_1 + \sum_{k=2}^{r} \alpha_k(v_k - v_1) = \sum_{k=2}^{r} \alpha_k(v_k - v_1) = 0$$

Mas, se vale (4), a última igualdade implica em $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_r = 0$. Enfim, como a soma de todos os coeficiente α_k é 0, devemos ter também $\alpha_1 = 0$.

$(2) \Rightarrow (3)$ Suponha que vale (2), e que $\sum_{k=1}^{r} \alpha_k v_k = \sum_{k=1}^{r} \beta_k v_k$ onde $\sum_{k=1}^{r} \alpha_k = \sum_{k=1}^{r} \beta_k$. Tomando $\gamma_k = \alpha_k - \beta_k$ e rearranjando estas igualdades, vem $\sum_{k=1}^{r} \gamma_k v_k = 0$ onde $\sum_{k=1}^{r} \gamma_k = 0$. Por (2) sabemos que $\gamma_k = 0$ para todo k, isto é, $\alpha_k = \beta_k$ para $k = 1, 2, 3, ..., r$.

$(3) \Rightarrow (4)$ Suponha que (3) é válida, e considere uma combinação linear dos vetores $v_k - v_1$ que se anule:

$$\sum_{k=2}^{r} c_k(v_k - v_1) = 0$$

Nosso objetivo é mostrar que estes coeficientes têm de ser nulos, comprovando assim (4). Mas esta igualdade pode ser rearranjada assim:

$$0v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + ... + c_rv_r = (c_2 + c_3 + ... + c_r)v_1 + 0v_2 + 0v_3 + ... + 0v_r$$

que é exatamente a igualdade na hipótese de (3) (note que a soma dos coeficiente do lado esquerdo é sim a soma dos coeficientes do lado direito). Portanto, por (3), temos $c_2 = c_3 = ... = c_r = 0$. E portanto: $v_2 - v_1, v_3 - v_1, ..., v_r - v_1$ são L.I.

$(4) \Leftrightarrow (5)$ Seja F a variedade afim gerada por $v_1, v_2, \cdots, v_r$. Então $F - v_1$ é um espaço vetorial, gerado por $0, v_2 - v_1, \cdots, v_r - v_1,$. Desta forma:

$(4) \Rightarrow (5)$ Se os vetores $v_2 - v_1, v_3 - v_1, \cdots, v_r - v_1$ são L.I. então a dimensão de $F - v_1$ é $r - 1$, ou seja, a dimensão de F é $r - 1$.

$(5) \Rightarrow (4)$ Estes últimos $r - 1$ vetores geram um espaço de dimensão $r - 1$, então eles têm de ser L.I. □

No ensino médio são exemplos de combinações afins de números reais a Média Aritmética Ponderada e a Desigualdade de Jensen.

2.2 Média Aritmética Ponderada como Combinação Afim de Números Reais

Em estatística, no estudo das medidas de tendência central de um conjunto de dados define-se a média aritmética ponderada uma espécie de combinação afim dos dados presentes na lista de frequência através de seus respectivos pesos.

Média Aritmética Simples:

Seja um conjunto de dados $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. A média aritmética simples destes dados é dada por

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{2.5}$$

Exemplo 2.4 *Seja o conjunto* $\{8, 4, 5, 7, 6, 2, 6, 9, 5\}$. *Então a média aritmética é:*

$$\bar{x} = \frac{8 + 4 + 5 + 7 + 6 + 2 + 6 + 9 + 5}{9} = 5, \bar{7}$$

Média Aritmética Ponderada:

Considere um conjunto de dados do tipo $x_1, ..., x_n$ agrupados em distribuições de frequência, sendo que a frequência $f_1, ..., f_n$ observada para cada tipo é o peso do mesmo. A média aritmética ponderada é dada por:

$$\bar{x}_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{f_1x_1 + ... + f_nx_n}{f_1 + ... + f_n}$$

$$\bar{x}_p = \frac{f_1}{f_1 + ... + f_n} x_1 + ... + \frac{f_n}{f_1 + ... + f_n} x_n$$

Tomando $p_i = \frac{f_i}{f_1 + ... + f_n}$

$$\bar{x}_p = p_1 x_1 + ... + p_n x_n$$

$$\bar{x}_p = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{2.6}$$

Note que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, e portanto $\bar{x}_p$ é uma combinação afim dos dados $x_1, ..., x_n$.

2.3 Combinação Afim de Números Reais na Desigualdade de Jensen

Seja $f : V \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa e sejam $\lambda_i \in [0,1]; (i = 1, ..., n)$ tais que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$ Então, para quaisquer $a_i \in V; (i = 1, ..., n)$ vale

$$f(\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n) \leq \lambda_1 f(a_1) + ... + \lambda_n f(a_n) \tag{2.7}$$

Observe o uso de combinações afins de números reais em ambos os lados da desigualdade.

Prova: De fato, por indução, observe que a validade é verificada para $n = 2$.

$$f(\lambda a_1 + (1 - \lambda) a_2) \leq \lambda f(a_1) + (1 - \lambda) f(a_2); \lambda \in [0, 1]$$

Suponha agora que a desigualdade é verdadeira para dado n natural, provemos que é válida também para $n + 1$:

$$f(\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_{n+1} a_{n+1}) \leq \lambda_1 f(a_1) + ... + \lambda_{n+1} f(a_{n+1})$$

Note que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) a_{n+1}$$

Fazendo $t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ temos:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i = t \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{t} a_i + (1 - t)\, a_{n+1}$$

Lembrando que $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{t} = 1$ e pela hipótese de indução que

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{t} a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{t} f(a_i)$$

temos que:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i a_i\right) = tf\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{t}a_i\right) + (1-t)f(a_{n+1})$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i a_i\right) \leq t\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{t}f(a_i) + (1-t)f(a_{n+1})$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i f(a_i)$$

como queríamos mostrar. □

Tal desigualdade mostra que a partir de uma função convexa, a imagem de uma combinação afim de determinados pontos de um domínio fechado é sempre menor do que ou igual a combinação afim das imagens destes pontos do domínios com os respectivos escalares. Observe que quando $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 1/n$ a desigualdade de Jensen nos diz que

$$f\left(\frac{a_1 + ... + a_n}{n}\right) \leq \frac{f(a_1) + ... + f(a_n)}{n}(*),$$

ou seja, $f(m_a(a_1, ..., a_n)) \leq m_a(f(a_1), ..., f(a_n))$. Esta desigualdade de Jensen com escalares todos iguais a $1/n$ mostra resultados interessantes a partir de funções convexas.

Exemplo 2.5 *(Olimpíada Balcânica) Sejam $n > 1$ e $a_1, ..., a_n$ reais positivos com soma 1. Para cada i, seja $b_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_j$. Prove que*

$$\frac{n}{2n-1} \leq \frac{a_1}{1+b_1} + \frac{a_2}{1+b_2} + \cdots + \frac{a_n}{1+b_n}.$$

Veja que $b_i = 1 - a_i$. Temos que provar que:

$$\frac{n}{2n-1} \leq \frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{2-a_n}.$$

Note que a função $f : (-\infty, 2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{2-x}$ é convexa. Para ver isso, basta tomar a sua derivada segunda e observar que é sempre positiva em todo seu domínio. Pela desigualdade de Jensen $(*)$, temos que:

$$f\left(\frac{a_1 + ... + a_n}{n}\right) \leq \frac{f(a_1) + ... + f(a_n)}{n}$$

$$nf\left(\frac{1}{n}\right) \leq f(a_1) + ... + f(a_n)$$

$$n\frac{\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{2-a_n}$$

$$\frac{n}{2n-1} \leq \frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{2-a_n}.$$

Como queríamos mostrar. □

Capítulo 3

TRANSFORMAÇÕES

3.1 Operador Linear e Variedade Afim

Um operador linear do tipo $A(x,y) = (ax+by, cx+dy)$, com $ad-bc \neq 0$ transforma uma reta numa reta, variedades afins de dimensão 1.

Proposição 3.1 *Se $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um operador linear dado por $A(x,y) = (ax+by, cx+dy)$, com $ad-bc \neq 0$, então*

(1) para todo $v \neq 0$ em $\mathbb{R}^2$, tem-se $A.v \neq 0$.

(2) toda reta $R \subset \mathbb{R}^2$ (variedade afim de dimensão 1) é transformada por A numa reta.

(3) A transforma retas paralelas em retas paralelas.

Prova:

(1) Suponha existir $v = (x,y)$ tal que $A(v) = 0$, teríamos:

$$A(x,y) = (ax+by, cx+dy) = 0$$

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira por d, a segunda por b e subtraindo, obtemos $(ad-bc)x = 0$. E como $ad-bc \neq 0$, forçosamente $x = 0$. Analogamente, multiplicando a primeira por c, a segunda por a e subtraindo, obtemos $(bc-ad)x = 0$. E como $ad-bc \neq 0$, forçosamente $y = 0$. Portanto, $A(v) = 0 \Rightarrow v = 0$, ou seja, pela contrapositiva, $v \neq 0 \Rightarrow A(v) \neq 0$.

(2) Como toda reta é uma variedade afim de dimensão 1, podemos escrever $r = v_0 + F$ onde F é o conjunto dos múltiplos de algum vetor $v \neq 0$. Portanto, $A(r) = A(v_0) + A(F)$ será Av_0 mais o conjunto dos múltiplos de Av. Por (a), $A(v) \neq 0$, então $A(r) = A(v_0) +$ (subespaço de dimensão 1) será também uma reta.

(3) De fato, se as retas r e r_1 são paralelas, então $r_1 = v_0 + r$ para algum vetor $v_0 \neq 0$. Neste caso, $A(r_1) = A(v_0) + A(r)$, ou seja, a reta Ar_1 é a reta $A(r)$ transladada por $A(v_0)$ que, por (a), não é nulo. $\square$

Exemplo 3.1 *Considere a reta $r = \{(x, x+1) \in \mathbb{R}^2\}$ e a transformação linear $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $A(x,y) = (2x+y, x-2y)$. Note que $2.(-2) - 1.1 = -5 \neq 0$, então*

$$A(r) = (2x + (x+1), x - 2(x+1))$$

$$A(r) = (3x + 1, -x - 2) = x(3, -1) + (1, -2).$$

é a imagem de r através de A que é uma reta paralela ao vetor $(3, -1)$ deslocada a partir da origem pelo vetor $(1, -2)$.

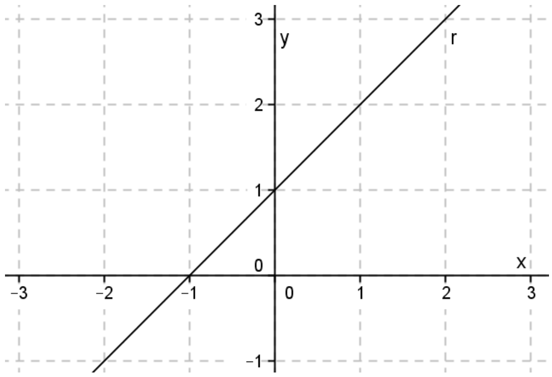

Figura 3.1: Reta r

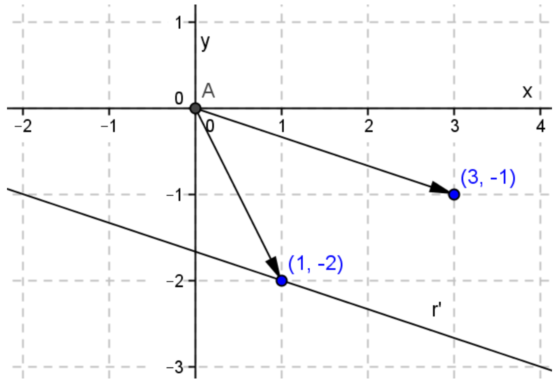

Figura 3.2: Reta $r' = A(r)$

Variedades afins de dimensão 1 no $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 3.2 *Determine α de modo que as retas perpendiculares em $\mathbb{R}^2$, de equações $y = \alpha x$ e $y = -x/\alpha$ sejam transformadas em retas perpendiculares pelo operador linear $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $A(x, y) = (2x + 3y, x - 2y)$.*

Solução: A reta $y = \alpha x$ é o conjunto dos múltiplos do vetor $v_1 = (1, \alpha)$, enquanto a reta perpendicular $y = -x/\alpha$ é o conjunto dos múltiplos do vetor $v_2 = (-\alpha, 1)$. Para que as retas transformadas sejam perpendiculares, precisamos que $A(v_1) = (2 + 3\alpha, 1 - 2\alpha)$ seja perpendicular a $A(v_2) = (-2\alpha + 3, -\alpha - 2)$, isto é, que o produto dos coeficiente angulares das retas geradas por estes vetores seja -1:

$$\frac{1 - 2\alpha}{2 + 3\alpha} \frac{\alpha + 2}{2\alpha - 3} = -1 \Rightarrow -2\alpha^2 - 3\alpha + 2 = -6\alpha^2 + 5\alpha + 6 \Rightarrow$$

$$\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \pm \sqrt{2}$$

Assim duas retas perpendiculares $y = (1 - \sqrt{2})x$ e $y = (1 + \sqrt{2})x$ se transformam por A em retas perpendiculares.

3.2 Imagem de Convexo

Seja $A : E \to F$ uma transformação linear. A imagem de A é o subconjunto dos vetores $w = A(v) \in F$ que são as imagens de elementos de E pela transformação A. Seja E um espaço vetorial e u e $v \in E$. O segmento de reta de extremidades u e v é por definição, o conjunto

$$[u, v] = \{(1 - t)u + tv; 0 \leq t \leq 1\}. \tag{3.1}$$

Definição 3.1 *Um conjunto $X \subset E$ chama-se convexo quando $u, v \in X \Rightarrow [u, v] \subset X$.*

De fato, por exemplo, dados três pontos do plano A, B e C não colineares, o triângulo ABC que tem estes pontos como vértices é convexo, pois dados quaisquer dois pontos pertencentes a este triângulo o segmento de reta que tem estes dois pontos como extremidades está contido em ABC.

Proposição 3.2 *Uma transformação linear $A : E \to F$ transforma todo conjunto convexo $C \subset E$ num conjunto convexo $A(C) \subset F$.*

Prova: Sejam $A(u), A(v) \in A(C) \subset F$. Como C é um conjunto convexo, temos:

$$w = tu + (1-t)v; 0 \leq t \leq 1$$

Logo $A(w) \in A(C)$ isto é:

$$A(w) = A(tu + (1-t)v) = A(tu) + A((1-t)v) = tA(u) + (1-t)A(v).$$

Se $A(u), A(v) \in A(C)$ então $tA(u) + (1-t)A(v) \in A(C)$ para $0 \leq t \leq 1$ mostrando que $A(C) \subset F$ também é um conjunto convexo. $\square$

Exemplo 3.3 *Considere o conjunto convexo $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x - y \leq 2\}$ e a transformação linear $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $A(x,y) = (-2x + y, 3x - y)$, onde $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 2x + y \geq -2\}$. Como S_1 é convexo dados $u, v \in S_1$ temos que $(1-t)u + tv \in S_1$ e A é linear temos que S_2 também é convexo, pois dados $A(u), A(v) \in S_2$ temos que $(1-t)A(u) + tA(v) \in S_2$.*

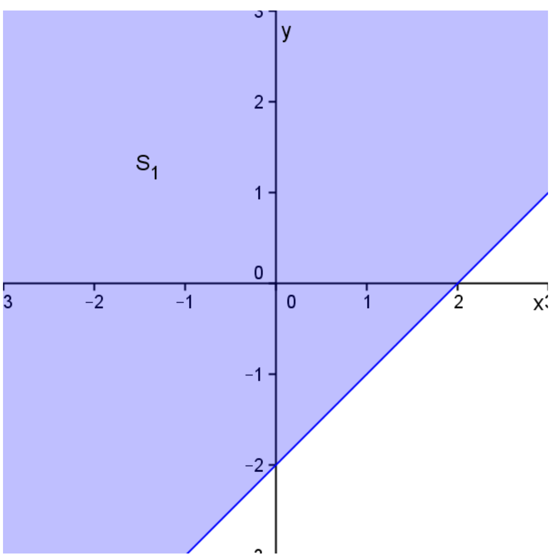

Figura 3.3: Convexo S_1

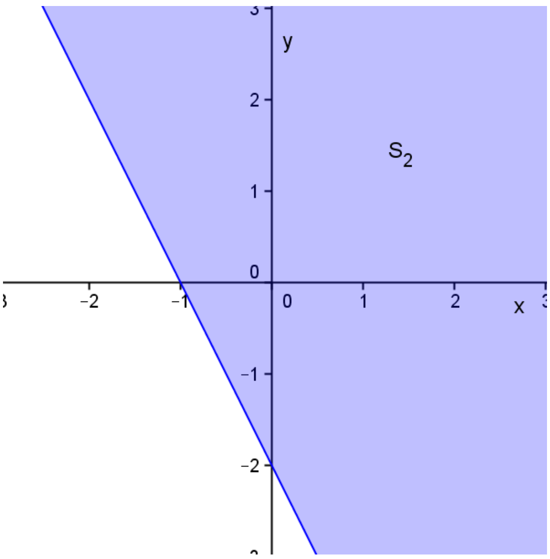

Figura 3.4: Convexo $S_2 = A(S_1)$

3.3 Imagem e Variedade Afim

Sendo E e F espaços vetoriais e $A : E \to F$ uma tranformação linear entre estes espaços, a imagem de um subespaço vetorial de E é através de A é um subespaço vetorial de F, assim como a imagem inversa de um subespaço vetorial de F é um subespaço vetorial de E.

Proposição 3.3 *Se $E' \subset E, F' \subset F$ são subespaços vetoriais e $A : E \to F$ é uma transformação linear, então $A(E') = \{Av; v \in E'\}$ é um subespaço de F e $A^{-1}(F') = \{v \in E; Av \in F'\}$ é um subespaço de E.*

Prova:

(i) $A(E')$ (a imagem de E' pela transformação A) é subespaço de F:
* Como E' é subespaço de E, $0_E \in E'$; portanto, $A(0_E) = 0_F \in A(E')$;
* Sejam w_1, w_2 vetores de $A(E')$. Então $w_1 = Av_1$ e $w_2 = Av_2$ para um par de vetores v_1, v_2 de E'. Mas então $w_1 + w_2 = A(v_1) + A(v_2) = A(v_1 + v_2)$ também é o transformado de alguém de E' (a saber, de $v_1 + v_2$ que pertence a E' pois E' é subespaço), isto é, $w_1 + w_2 \in A(E')$;
* Para todo real c, tem-se $cw_1 = cA(v_1) = A(cv_1)$, isto é, $cw \in A(E')$ (já que $cv_1 \in E'$). E com isso, $A(E')$ é subespaço de F.

(ii) $A^{-1}(F')$ (o conjunto de todos vetores de E cujos transformados estão em F') é subespaço de E:
* Como $A(0_E) = 0_F \in A(F')$ (pois F' é subespaço), temos que $0_E \in A^{-1}(F')$;
* Sejam v_1, v_2 vetores de $A^{-1}(F')$, isto é, vetores que satisfazem $Av_1, Av_2 \in F'$. Como F' é subespaço, $A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2) \in F'$, ou seja, $v_1 + v_2 \in A^{-1}(F')$;
* Sendo $v_1 \in A^{-1}(F') \Leftrightarrow A(v_1) \in F' \Rightarrow cA(v) = A(cv) \in F' \Leftrightarrow cv \in A^{-1}(F')$. Logo, $A^{-1}(F')$ é subespaço de E. □

Exemplo 3.4 *Considere a transformação linear $A : XY \to XZ$ onde XY é o plano determinado pelos eixos X e Y e XZ é o plano determinado pelos eixos X e Z onde $A(x, y, 0) = (x, 0, y)$. Sejam $M \subset XY$ e $N \subset XZ$ subespaços vetoriais tais que $M = \{(x, x, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ e $N = \{(x, 0, -x) \in \mathbb{R}^3\}$. Pelo que mostramos acima $A(M) = \{(x, 0, x) \in \mathbb{R}^3\}$ e $A^{-1}(N) = \{(x, -x, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ também são subespaços vetoriais respectivamente de XZ e de XY.*

Sendo E e F espaços vetoriais e $A : E \to F$ uma tranformação linear entre estes espaços, a imagem de uma variedade afim em E é através de A uma variedade afim em F e ainda a imagem inversa de uma variedade afim em F é uma variedade afim em E.

Proposição 3.4 *Se $V \subset E$ e $W \subset F$ são variedades afins, então que os conjuntos $A(V) \subset F$ e $A^{-1}(W) \subset E$, definidos analogamente, são também variedades afins.*

Prova:

(i) $A(V)$ é variedade afim: V é uma variedade afim podemos escrevê-la como $V = v_0 + E'$ para algum vetor $v_0 \in V$ e um espaço vetorial E'. Aplicando A temos:

$$A(V) = A(v_0) + A(E')$$

Como $A(v_0)$ é um vetor de $A(V)$ e E' é um subespaço vetorial de F, concluimos que $A(V)$ é uma variedade afim em F.

(ii) $A^{-1}(W)$ é variedade afim: Sejam $v_1, v_2 \in A^{-1}(W)$, isto é, $A(v_1), A(v_2) \in W$. Como W é variedade afim, temos que $\alpha A(v_1) + \beta A(v_2) \in W$, com $\alpha + \beta = 1$. Assim, como A é linear, temos que $A(\alpha v_1 + \beta v_2) \in W$, isto é, $\alpha v_1 + \beta v_2 \in A^{-1}(W)$. E portanto $A^{-1}(W)$ é uma variedade afim em E.

É necessário ter cuidado com a aplicação

$$W = \{w_0\} + F' \Rightarrow A^{-1}(W) = A^{-1}(w_0) + A(F')$$

pois $A^{-1}(w_0)$ pode não representar apenas um vetor, mas sim um conjunto de vetores. □

Exemplo 3.5 *Supondo agora que $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $A(x,y,z) = (x,z,y)$ e as variedades afins $M' = \{(x,x,1) \in \mathbb{R}^3\}$ e $N' = \{(x,1,-x) \in \mathbb{R}^3\}$. Pelo que mostramos acima $A(M') = \{(x,1,x) \in \mathbb{R}^3\}$ e $A^{-1}(N') = \{(x,-x,1) \in \mathbb{R}^3\}$ também são variedades afins de $\mathbb{R}^3$.*

3.4 Variedade Afim Paralela ao Núcleo

Seja $A : E \to F$ uma transformação linear. O núcleo de A é o conjunto dos vetores $v \in E$ tais que $A(v) = 0$. O núcleo $N(A) = \{v \in E; A(v) = 0\}$ é um subespaço vetorial de E, pois se $v_1, v_2 \in N(A)$ e se $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ então $A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 A(v_1) + \alpha_2 A(v_2) = 0$, ou seja, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in N(E)$.

Proposição 3.5 *Para todo $b \in Im(A)$, o conjunto $V = \{x \in E; A(x) = b\}$, formado pelas soluções do sistema linear $A(x) = b$, é uma variedade afim em E, paralela ao núcleo $N(A)$.*

Prova: Fixando $x_0 \in V$ tal que $A(x_0) = b$, vamos mostrar que V é uma variedade afim da forma $V = \{x_0\} + N(A)$. Inicialmente, seja $x \in V$, então $x = x_0 + (x - x_0) = x_0 + v$, onde $v = x - x_0$. Logo, $b = A(x) = A(x_0 + v) = A(x_0) + A(v) = b + A(v)$. E sendo $A(v) = 0$, temos $v \in N(A)$. Portanto, $x \in \{x_0\} + N(A)$ e $V \subset \{x_0\} + N(A)$. Por outro lado, seja $x \in \{x_0\} + N(A)$, ou seja, $x = x_0 + v$, com $v \in N(A)$, então $A(x) = A(x_0 + v) = A(x_0) + A(v) = b + 0 = b$. Logo $x \in V$ e com $\{x_0\} + N(A) \subset V$ concluímos que $V = \{x_0\} + N(A)$ é uma variedade afim. $\square$

Exemplo 3.6 *Seja $A : E \to F$ uma transformação linear, onde E e F são subconjuntos do conjunto de matrizes 3 por 1 e $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ a matriz transformação. Fixando $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in Im(A)$ teremos o sistema de equações lineares com 3 equações e 3 incógnitas:*

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

que escalonado reduz-se a

$$\begin{cases} x + 2y + \frac{z}{2} = \frac{1}{2} \\ y - \frac{3z}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

com soluções são do tipo

$$(x,y,z) = \left(\frac{3-7\lambda}{2}, \frac{-1+3\lambda}{2}, \lambda\right); \lambda \in \mathbb{R}.$$

Este sistema linear é possível e indeterminado e seu conjunto solução é:

$$V = \left\{\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) + \lambda\left(-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, 1\right); \lambda \in \mathbb{R}\right\},$$

$V = \{x_0\} + N(A)$, onde $x_0 = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ é uma solução particular do sistema do nosso exemplo com $A(x_0) = b$ e

$$N(A) = \left\{\lambda\left(-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, 1\right); \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

é o núcleo da transformação A, solução do seu sistema homogêneo associado. Portanto, V é um variedade afim paralela ao $N(A)$. Geometricamente esta variedade afim é uma reta no espaço, onde V representa o subespaço $N(A)$ deslocado através do vetor x_0 a partir da origem.

3.5 Transformação Afim

Definição 3.2 *Uma transformação $T : E \to F$, entre espaços vetoriais, chama-se afim quando se tem $T((1-t)u + tv) = (1-t)Tu + tTv$ para quaisquer $u, v \in E$ e $t \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 3.7 *Considere as transformações a seguir:*
a) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T_1(x, y) = (x + y, 2x - y)$.
b) $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T_2(x, y) = (2x - 1, 3y + 2)$.
c) $T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T_3(x, y) = (2\sin x, 3^y)$.
Veja que T_1 é uma transformação linear, pois dados $u, v \in \mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{R}$, temos:

$$T_1(u + v) = T_1(u) + T_1(v)$$
$$T_1(k.u) = k.T_1(u).$$

Além disso, $T_1(0, 0) = (0, 0)$.

Note que T_2 não é uma transformação linear, pois $T_2(0, 0) = (-1, 2) \neq (0, 0)$. De fato, note que $T_2(x, y) = (2x, 3y) + (-1, 2)$ é a translação de uma transformação linear $T' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T'(x, y) = (2x, 3y)$ através do vetor $(-1, 2)$. Verifquemos então que T_2 é uma transformação afim. Dados $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, temos:

$$\begin{aligned}
T_2((1-t)u + tv) &= T_2((1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2)) \\
&= T_2((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2) \\
&= (2[(1-t)x_1 + tx_2], 3[(1-t)y_1 + ty_2]) + (-1, 2) \\
&= (1-t)(2x_1, 3y_1) + t(2x_2, 3y_2) + (1-t)(-1, 2) + t(-1, 2) \\
&= (1-t)[(2x_1, 3y_1) + (-1, 2)] + t[(2x_2, 3y_2) + (-1, 2)] \\
&= (1-t)T_2(x_1, y_1) + tT_2(x_2, y_2) \\
&= (1-t)T_2u + tT_2v.
\end{aligned}$$

Finalmente, T_3 não é uma transformação linear, pois $T_3(0, 0) = (0, 1) \neq (0, 0)$, e nem afim, pois neste caso,

$$\begin{aligned}
T_3((1-t)u + tv) &= T_3((1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2)) \\
&= T_3((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2) \\
&= (2\sin[(1-t)x_1 + tx_2], 3^{(1-t)y_1 + ty_2}) \\
&\neq (1-t)[(2\sin x_1, 3^{y_1})] + t(2\sin x_2, 3^{y_2}) \\
&= (1-t)T_3(x_1, y_1) + tT_3(x_2, y_2) \\
&= (1-t)T_3u + tT_3v.
\end{aligned}$$

Proposição 3.6 *Dada a transformação afim $T : E \to F$, prove:*

(i) Se $T(0) = 0$ então $T(\alpha v) = \alpha T(v)$ e $T(u + v) = Tu + Tv$ para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$, $u, v \in E$.
(ii) Para todo $b \in F$ a transformação $S : E \to F$, definida por $Sv = Tv + b$ também é afim.
(iii) Toda variedade afim $V \subset E$ é transformada por T numa variedade afim $V' \subset F$.

Prova:

(i) De fato, se $T(0) = 0$:

$$T((1-\alpha).0 + \alpha v) = (1-\alpha)T(0) + \alpha T(v) = \alpha T(v)$$

Colocando $\alpha = 1/2$:

$$T\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\right) = \frac{1}{2}T(u) + \frac{1}{2}T(v)$$

$$T(u+v) = 2.T\left(\frac{u+v}{2}\right) = T(u) + T(v)$$

(ii) Veja que

$$\begin{aligned} S((1-t)u + tv) &= T((1-t)u + tv) + b \\ &= (1-t)T(u) + tT(v) + (1-t)b + tb \\ &= (1-t)(T(u) + b) + t(T(v) + b) \\ &= (1-t)S(u) + tS(v) \end{aligned}$$

mostrando que S é afim.

(iii) Se $V \subseteq E$ é variedade afim, dados $u, v \in V$ e $t \in \mathbb{R}$ então $(1-t)u + tv \in V$. Seja $V' = T(V) \subseteq F$, como $T(u), T(v) \in V'$ e além disso $T((1-t)u + tv) = (1-t)T(u) + tT(v) \in V'$, temos que $V' = T(V)$ é uma variedade afim. □

Proposição 3.7 *$T : E \to F$ é uma transformação afim se, e somente se, existe uma transformação linear $A \in L(E; F)$ e $b \in F$ tais que $T(v) = A(v) + b$ para todo $v \in E$.*

Prova: Seja T afim, e defina $A : E \to F$ por $A(v) = T(v) - T(0)$. Note que A é afim (item (ii)); como $A(0) = T(0) - T(0) = 0$, então A é linear (item (i)). Tomando $b = T(0)$, concluímos que $T(v) = A(v) + b$ onde A é linear. Por outro lado, se $T(v) = A(v) + b$, então

$$\begin{aligned} T((1-t)u + tv) &= A((1-t)u + tv) + b \\ &= (1-t)A(u) + tA(v) + (1-t)b + tb \\ &= (1-t)(A(u) + b) + t(T(v) + b) \\ &= (1-t)T(u) + tT(v) \end{aligned}$$

mostrando que T é afim. □

Proposição 3.8 *Numa transformação afim $T : E \to F$, entre espaços vetoriais, dados $v_i \in E$ e $t_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$; $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, a transformação afim de uma combinação afim de $v_1, ..., v_n$ é a combinação afim de $T(v_1), ..., T(v_n)$*

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} t_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} t_i T(v_i). \tag{3.2}$$

Em outras palavras, toda transformação afim preserva combinação afim.

Prova: Para dois vetores a igualdade é verdadeira pela própria definição de transformação afim. Sejam $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}$; $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$. Note que algum $t_i \neq 1$, caso contrário $\sum_{i=1}^{n} t_i = n$. Sem perda de generalidade suponha $t_n \neq 1$, com isso

$$t_1 + ... + t_{n-1} = 1 - t_n$$

$$\frac{t_1}{1-t_n} + ... + \frac{t_{n-1}}{1-t_n} = 1$$

E atribuiremos $t'_i = \frac{t_i}{1-t_n}$.

Pelo passo indutivo suponha que a transformação afim preserva combinação afim para $n-1$ vetores, ou seja

$$T(t'_1 v_1 + ... + t'_{n-1} v_{n-1}) = t'_1 T(v_1) + ... + t'_{n-1} T(v_{n-1})$$

Com isso

$$\begin{aligned} &T(t_1 v_1 + ... + t_{n-1} v_{n-1} + t_n v_n) \\ &= T\left((1-t_n)\left(\frac{t_1}{1-t_n} v_1 + ... + \frac{t_{n-1}}{1-t_n} v_{n-1}\right) + t_n v_n\right) \\ &= (1-t_n) T\left(\frac{t_1}{1-t_n} v_1 + ... + \frac{t_{n-1}}{1-t_n} v_{n-1}\right) + t_n T(v_n) \\ &= (1-t_n)\left[\left(\frac{t_1}{1-t_n}\right) T(v_1) + ... + \left(\frac{t_{n-1}}{1-t_n}\right) T(v_{n-1})\right] + t_n T(v_n) \\ &= t_1 T(v_1) + ... + t_n T(v_n) \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar. $\square$

Capítulo 4

O HIPERPLANO

4.1 Dimensão de Hiperplano e Variedade Afim

Se os coeficientes $a_1, \cdots, a_n$ não são todos iguais a zero, o hiperplano

$$H = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$$

é um subespaço vetorial de dimensão $n-1$ em $\mathbb{R}^n$. Com efeito, admitindo (por simplicidade) que $a_n \neq 0$, vemos que

$$v = (x_1, \cdots, x_n) \in H \Leftrightarrow x_n = -\frac{a_1}{a_n}x_1 - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_{n-1}.$$

$$v = \left(x_1, \cdots, x_{n-1}, -\frac{a_1}{a_n}x_1 - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_{n-1}\right)$$

$$v = x_1\left(1, 0, \cdots, 0, -\frac{a_1}{a_n}\right) + \cdots + x_{n-1}\left(0, 0, \cdots, 1, -\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$$

$$v = \sum_{i=1}^{n-1} x_iv_i$$

Em particular, para todo $i = 1, \cdots, n-1$, o vetor

$$v_i = \left(0, \cdots, 1, \cdots, 0, -\frac{a_i}{a_n}\right),$$

cuja i-ésima coordenada é 1, a última é $-a_i/a_n$ e as demais são zero, pertence a H. Veja portanto que H é gerado por $\beta = \{v_1, \cdots, v_{n-1}\}$ e ainda que β é linearmente independente pois dados os escalares b_i com $i = 1, \cdots, n-1$ e a combinação nula

$$\sum_{i=1}^{n-1} b_iv_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(0, \cdots, b_i, \cdots, -\frac{a_ib_i}{a_n}\right) = 0$$

$$\left(b_1, 0, \cdots, 0, -\frac{a_1b_1}{a_n}\right) + \cdots + \left(0, \cdots, 0, b_{n-1}, -\frac{a_{n-1}b_{n-1}}{a_n}\right) = 0$$

$$\left(b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}, -\frac{a_1 b_1 + \cdots + a_{n-1} b_{n-1}}{a_n}\right) = 0$$

$b_i = 0$ para todos $i = 1, \cdots, n-1$.

Além disso, o vetores $v_1, \cdots, v_{n-1}$ são L.I., uma vez que existe a combinação

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$$

como se vê facilmente. Logo o subespaço H tem dimensão $n-1$ ou n. Como $H \neq \mathbb{R}^n$ (por exemplo, o vetor $v = (0, \cdots, 0, a_n)$ não pertence a H. Diz-se que a variedade afim $V \subset E$ tem dimensão r quando $V = x + F$, onde o subespaço vetorial $F \subset E$ tem dimensão r.

Exemplo 4.1 *$H_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x - y = 0\}$ é um subespaço vetorial de dimensão 1 em $\mathbb{R}^2$. Todo vetor $v \in H$ escreve-se como $v = x_1(1, 2); x_1 \in \mathbb{R}$.*

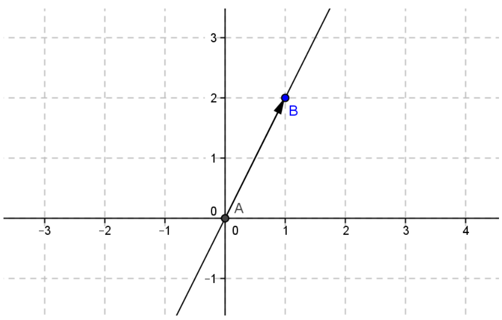

Figura 4.1: Hiperplano H_1 do $\mathbb{R}^2$.

O hiperplano do $\mathbb{R}^2$ é uma reta.

Exemplo 4.2 *$H_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - 3y + z = 0\}$ é um subespaço vetorial de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$. Todo vetor $v \in H$ escreve-se como $v = x_1(1, 0, -2) + x_2(0, 1, 3); x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.*

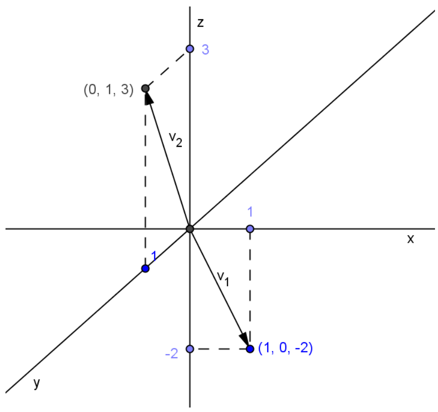

Figura 4.2: Hiperplano H_2 do $\mathbb{R}^3$ formado a partir de v_1 e v_2.

O hiperplano do $\mathbb{R}^3$ é um plano.

4.2 Subespaço e Hiperplano

Seja $H \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial de dimensão $n-1$. Tome uma base $V \subset H$, formada pelos vetores $v_1, \cdots, v_{n-1}$, onde $v_i = (\alpha_i, \cdots, \alpha_{in}), i = 1, \cdots, n-1$. Usando o fato de que o sistema de equações lineares $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} a_j = 0$, com $n-1$ equações e n incógnitas admite uma solução não-trivial podemos concluir que existem n números $a_1, \cdots, a_n$ tais que $v = (x_1, \cdots, x_n)$ pertence a H se, e somente se, $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$. (Todo subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ com dimensão $n-1$ é um hiperplano, isto é o conjunto das soluções de uma equação linear homogênea.)

Com efeito, considere o sistema cujas incógnitas são $a_1, a_2, ..., a_n$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \alpha_{11}a_1 & + & \alpha_{12}a_2 & + & ... & + & \alpha_{1n}a_n & = & 0 \\ \alpha_{21}a_1 & + & \alpha_{22}a_2 & + & ... & + & \alpha_{2n}a_n & = & 0 \\ & & & & ... & & & & \\ \alpha_{n-1,1}a_1 & + & \alpha_{n-1,2}a_2 & + & ... & + & \alpha_{n-1,n}a_n & = & 0 \end{array}\right.$$

Ele é um sistema linear com n incógnitas e $n-1$ equações, então admite uma solução não trivial, que será denotada simplesmente por $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Seja

$$F = \{v = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = 0\}.$$

Já sabemos que F é um subespaço $\mathbb{R}^n$ de dimensão $n-1$. O objetivo do problema é mostrar que $F = H$. De fato, note que cada um dos vetores

$$v_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, ..., \alpha_{1n}), v_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, ..., \alpha_{2n}), ..., v_{n-1} = (\alpha_{n-1,1}, \alpha_{n-1,2}, ..., \alpha_{n-1,n})$$

têm coordenadas que satisfazem a equação que define F, ou seja, $\{v_1, v_2, ..., v_{n-1}\} \subseteq F$. Mas, como tais vetores geram H, temos então que $S(\{v_1, v_2, ..., v_{n-1}\}) = H \subseteq S(F) = F$. Mas, como $H \subseteq F$ e dim H = dim $F = n-1$, temos $H = F$.

Exemplo 4.3 *Seja H um subconjunto do $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2 que tem base $V = \{(1,2,0), (0,3,1)\}$. O sistema linear de equações criadas a partir dos vetores da base V:*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & & & = & 0 \\ & & 3y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

admite a solução $(2,-1,3)$.
Seja $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y + 3z = 0\}$, um subespaço $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2, um hiperplano.

Proposição 4.1 *(Núcleo e Hiperplano) O núcleo de um funcional linear não-nulo $f : E \to \mathbb{R}$ é um hiperplano $H \subset E$.*

Sejam $a_1, \cdots, a_n$ números reais e $\{v_1, \cdots, v_n\}$ um conjunto de vetores geradores não nulos do espaço vetorial E. Se $f : E \to \mathbb{R}$ é um funcional linear, temos que $\mathcal{N}(f)$ é todo vetor $v \in E$ tal que $f(v) = 0$. Como todo vetor $v \neq 0$ pode ser escrito da forma $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$, com pelo menos um a_i diferente de zero, podemos concluir que $f(v) = f(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = f(a_1 v_1) + \cdots + f(a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n) = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n = 0$, onde pelo menos um w_i é um número real não nulo. Sendo assim, a equação homogênea $a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n = 0$ têm infinitas soluções, o que caracteriza o hiperplano.

Exemplo 4.4 *Seja o funcional linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $f(x,y) = 2x - 3y$. O núcleo de f é o hiperplano $H = \{(x,y); 2x - 3y = 0\}$.*

O Teorema do Núcleo e da Imagem indica que dados E, F espaços vetoriais de dimensão finita. Para toda transformação linear $A : E \to F$ tem-se dim $E =$ dim $N(A)+$ dim $Im(A)$. Através dele poderemos dar uma outra justificativa para o fato de um hiperplano $H \in \mathbb{R}^n$ ter dimensão $n-1$.

Proposição 4.2 *(Hiperplano e Funcional Linear) Se dim $E = n$ e $f : E \to \mathbb{R}$ é um funcional linear não nulo, então o núcleo de f é um subespaço vetorial de dimensão $n-1$ em E.*

De fato, f não nulo implica $Im(f) = \mathbb{R}$ logo dim $Im(f) = 1$ e dim $N(f) =$ dim $E-$ dim $Im(f) = n-1$. Ora, o hiperplano

$$H = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$$

é o núcleo do funcional linear não nulo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definido por

$$f(x_1, \cdots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n.$$

Exemplo 4.5 *Considerando o funcional linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ com $f(x, y, z) = x + 2y - 3z$. O núcleo de f é o hiperplano $H = \{(x, y, z); x + 2y - 3z = 0\}$ de dimensão 2, uma unidade a menos da dimensão 3 do domínio $\mathbb{R}^3$ do funcional linear.*

Capítulo 5

CONCLUSÃO

Neste trabalho mostramos alguns conceitos vistos em Álgebra Linear como de dependência e independência linear de vetores no plano e no espaço, associamos características específicas apresentadas por elementos destes espaços euclidianos através de exemplos.

Tais percepções ajudam ao aperfeiçoamento docente levando em conta o desenvolvimento destes tópicos em sala de aula a fim de enriquecer o conhecimento do aluno. Fez-se também uma expanação sobre transformações lineares e afins no plano e no espaço para associar aos conceitos estudados na educação básica, muito embora em determinados momentos fosse necessário usar termos não reconhecíveis a tais alunos.

Ainda fora abordado de maneira associativa aos demais tópicos do trabalho o conceitos e exemplos que tratassem da ideia de hiperplano para que o professor do ensino médio possa assimilar os conhecimentos previstos e propor noções em suas aulas visando o enriquecimento intelectual das aulas de matemática.

Por fim, este trabalho baseou-se também, mesmo que de forma particular, num dos objetivos principais do Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional em Matemática que é de estimular a melhoria do ensino de matemática nas escolas brasileiras. Sendo assim, espero que este trabalho enriqueça os conhecimentos de professores de matemática ou que pelo menos os reavive.

Referências Bibliográficas

[1] Bueno, H. P. *Álgebra Linear - um segundo curso.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[2] Costa, B. *Álgebra Linear.* São Paulo: Harbra, 1986.

[3] Dante, L. R. *Matemática: contexto e aplicações.* São Paulo: Ática, 2010.

[4] Filho, M. F. de A. *Geometria Analítica e Álgebra Linear.* Fortaleza: Ediçẽs Livro Técnico, 2003.

[5] Lima, E. L. *Álgebra Linear.* Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2011. (Coleção matemática universitária)

[6] Lima, E. L. *Geometria Analítica e Álgebra Linear.* Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2011. (Coleção matemática universitária)

[7] Neto, A. C. M. *Desigualdades Elementares.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1999. (Revista Eureka n.5.)

[8] Oliveira, K. I. M.; Fernández, A. J. C. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. (Coleção olimpíadas de matemática)

[9] Teixeira, R. C. *Álgebra Linear. Exercícios e soluções.* Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2012. (Coleção matemática universitária)