



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RENIVALDO SODRÉ DE SENA

GRÁFICOS SOLITONS DO FLUXO DA CURVATURA MÉDIA

FORTALEZA

2018

RENIVALDO SODRÉ DE SENA

GRÁFICOS SOLITON DO FLUXO DA CURVATURA MÉDIA

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial

Orientador: Prof. Dr. Luciano Mari
Coorientador : Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira

Fortaleza

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S477g Sena, Renivaldo Sodré de.
Gráficos Solitons do Fluxo da Curvatura Média / Renivaldo Sodré de Sena. – 2018.
75 f. : il.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Luciano Mari.
Coorientação: Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira.

1. Solitons. 2. Fluxo da Curvatura Média. 3. Gráfico. 4. Espaço Hiperbólico. I. Título.

CDD 510

RENIVALDO SODRÉ DE SENA

GRÁFICOS SOLITON DO FLUXO DA CURVATURA MÉDIA

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial

Aprovada em: 26/ 09 / 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Luciano Mari (Orientador)
Scuola Normale Superiore (SNS)

Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Rodrigo Avalos
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Prof. Dr. Flávio França Cruz
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que
contribuíram direta ou indiretamente com a
sua realização.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus pela força, a minha família, em especial a minha mãe Glória e a minha irmã Jane, pelo cuidado e pela presença constante. Sem elas não teria conseguido chegar até aqui.

Ao Professor Dr. Luciano Mari pela orientação, paciência, pela impressionante dedicação, disposição em ensinar e entusiasmo em fazer matemática. Exemplo de profissional e pesquisador. Aprendi muito! Não tenho palavras para agradecer.

Ao Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira, pela coorientação, pela disponibilidade e pelas dicas elegantes.

Ao Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa por ter participado da banca e pela orientação inicial, por todo apoio, ajuda e incentivo. Meu muito obrigado.

Aos professores Rodrigo Avalos, Flávio França por terem aceitado participar da banca e pelas contribuições.

Aos Professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará.

Aos colegas da pós-graduação, em especial gostaria de mencionar Davi Ribeiro, Elaine Sampaio, Fabiana Alves dos Santos, Fabrício de Figueredo Oliveira, Francisco Pereira Chaves, Janielly Gonçalves, João Nunes, Leo Ivo, Leonardo Tavares, Rafael Jorge Pontes, Cícero Tiarlos. Em especial a Wanderley de Oliveira Pereira pela força e Eddy-gledson Souza Gama.

Ao Instituto Federal do Ceará, *campus* Tabuleiro do Norte, em especial o Diretor Geral, Francisco Sildemberny Souza, pela compreensão, ao diretor de ensino, Adriano Erique de Oliveira Lima, pelo apoio, força e pela incansável disposição em ajudar. Gente boa, ser humano raro. Aos amigos paraibanos Ruth Helena Fidelis de Sousa Oliveira e Daylson Soares de Lima, pela prontidão em me auxiliar, pelas palavras de encorajamento e a força no dia da defesa. Esses dois são seres humanos gigantes! Aos colegas Tássio Lessa do Nascimento e Túlio Cristiano Soares de Oliveira, pelos muitos conselhos. À Professora Cristiane Cruz, pela ajuda nos textos em inglês e a todos os colegas Professores.

Ao Instituto de Matemática da Universidade Federal da Bahia, por todo ensino. Nessa casa encontrei abrigo. Em destaque o Laboratório de Ensino de Matemática da UFBA - LEMA e a Professora Elinalva Vergasta de Vasconcelos, um dos responsáveis por despertar o desejo de estudar matemática. Aos Professores do LEMA Enaldo Silva Vergasta, Graça Luzia Dominguez Santos, Cristiana Bastos Paiva Valente, Silva Velloso Guimarães e Rita de Cássia de Jesus Silva. Ainda gostaria de mencionar os Professores José Nelson Bastos Barbosa pelo incentivo e Isaac Costa Lázaro, pela orientação na iniciação científica e na monografia de conclusão do Bacharelado em Matemática.

Um agradecimento especial a Professora Dra. Ana Lucia Pinheiro Lima do Instituto de Matemática da UFBA, pela orientação no Mestrado e por todo apoio, pela

força, pelos conselhos durante o mestrado e o doutorado. Com ela não aprendi apenas matemática, mas importantes lições para a vida. Exemplo de profissional e ser humano. Palavras não são suficientes para expressar o meu sentimento de gratidão.

À Professora Eliana Hilda Mota Moreira do Colégio Estadual Manoel Devoto, a qual foi uma das responsáveis por decidir estudar matemática e a Professora Rose Meire Marques pelo incentivo.

À Congregação Batista Lírio dos Vales, em Salvador e a Assembleia de Deus, congregação na Parquelândia, em Fortaleza. Em especial, agradeço a Maria do Socorro Viera Franco, que já não se encontra entre nós, mas batalhou muito por mim em oração. Gratidão e Saudade. Agradeço ainda a Rosângela Ribeiro, pelas muitas ajudas nas tarefas domésticas e na alimentação e a Josué Machado Mota, pela companhia e auxílio nas figuras.

Aos meus vizinhos e amigos Maria Cláudia Spinola, William Coelho e Leonardo Negri Furini pelo apoio, incentivo e companhia durante o isolamento social por conta da pandemia da Covid-19.

Agradecimentos a Andrea Dantas e Jessyca Soares pela disponibilidade e competência.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil (CNPq).

“Sem sonhos, a vida não tem brilho. Sem metas, os sonhos não têm alicerces. Sem prioridades, os sonhos não se tornam reais.”
(CURY, 2005)

RESUMO

Neste trabalho, investigamos a existência de gráficos que são solitons do fluxo da curvatura média. Sob algumas hipóteses, provamos um resultado que garante a existência de gráficos solitons nos produtos warped $I \times_h M$. Provamos ainda um resultado tipo Jenkins-Serrin, que dá condições para a não existência de solução do problema de Dirichlet para a equação dos solitons gráficos. Finalmente, estudamos gráficos solitons da curvatura média no produto warped $M \times_h \mathbb{R}$.

Palavras-chave: Solitons. Fluxo da curvatura média. Gráficos.

ABSTRACT

We investigate the existence of graphs that are solitons for the flow of the mean curvature. Under some assumptions, we prove the existence of solitons in warped products $I \times_h M$. We also prove a Jenkins-Serrin type result, which gives conditions for the non existence of Dirichlet solution problem for the soliton graph equation. Finally, we study soliton graphs of the mean curvature in the warped product $M \times_h \mathbb{R}$.

Keywords: Solitons. Mean curvature flow. graphs.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Lema 4.1 estima o $\sup u$ no conjunto $\Omega \setminus B_a(y)$ em termos do $\sup u$ no conjunto $\partial\Omega \setminus B_a(y)$	53
Figura 2 – Estimativas do $\sup u$ no Lema 4.2	57
Figura 3 – A função ϕ na prova do Teorema 4.2	62

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	PRELIMINARES	16
2.1	Solitons do Fluxo da Curvatura Média	16
2.2	Solitons no espaço Hiperbólico e solitons na Bola Euclidiana .	21
2.3	Produtos warped do tipo $\bar{M} = I \times_h M$	24
2.4	Produtos warped do tipo $\bar{M} = M \times_h \mathbb{R}$	26
2.5	Gráficos Soliton	28
2.6	Espaços Hölder	30
3	GRÁFICOS EM PRODUTOS WARPED $I \times_h M$	31
3.1	Estimativas A Priori	39
3.1.1	Estimativa da Altura	40
3.1.2	Estimativa Gradiente de Bordo	42
3.1.3	Estimativa Gradiente Interior	44
4	TEOREMA TIPO JENKINS-SERRIN	52
5	GRÁFICOS EM PRODUTOS WARPED $M \times_h \mathbb{R}$	63
5.1	Estimativas de Altura	64
5.2	Estimativas do gradiente na fronteira	66
5.3	Estimativa de Gradiente no Interior	68
6	CONCLUSÃO	72
	REFERÊNCIAS	73

1 INTRODUÇÃO

O fluxo da curvatura média é talvez a equação de evolução geométrica mais estudada das subvariedades em variedades Riemannianas. De modo intuitivo, dizemos que uma família M_t de subvariedades suaves evolui pelo fluxo da curvatura média se o vetor velocidade da subvariedade é dada pelo vetor curvatura média em cada ponto, isto é, a subvariedade move-se em cada ponto na direção do correspondente vetor normal unitário e com velocidade igual a curvatura média naquele ponto.

Fisicamente, o fluxo da curvatura média foi proposto por MULLINS (1956) para descrever a formação de fronteiras de grãos em processos de recozimento de metais. Matematicamente, foi primeiro investigado por Brakke em BRAKKE (1978) e, mais tarde, por Huisken em HUISKEN (1984). Enquanto Brakke usou teoria da medida, Huisken foi pioneiro ao usar abordagem de equações diferenciais parciais. Para descrever singularidades do fluxo, Osher-Sethian introduziu em OSHER and SETHIAN (1988) a formulação de conjuntos de níveis para o fluxo da curvatura média, a qual foi investigada mais tarde por Evans-Spruck nos trabalhos EVANS and SPRUCK (1991), EVANS and SPRUCK (1992a), EVANS and SPRUCK (1992b), EVANS and SPRUCK (1995) e por Chen-Giga-Goto em CHEN, GIGA, and GOTO (1991). Ilmanen mostrou em ILMANEN (1993) a relação entre a formulação de conjuntos de níveis e a abordagem de teoria geométrica da medida. Neste trabalho, seguiremos abordagem de equações diferenciais parciais.

Equações de evolução podem desenvolver singularidades, isto é, a solução pode deixar de ser suave em tempo finito. Por exemplo, é conhecido que subvariedades compactas e sem bordo do espaço Euclidiano permanecem suave por um tempo finito durante sua evolução pelo fluxo da curvatura média e então desenvolvem uma singularidade. Veja (SMOCZYK, 2012). Assim, um tópico interessante nessa teoria é o estudo do comportamento das singularidades. Em HUISKEN (1990), Huisken classificou as singularidades do fluxo da curvatura média em singularidades do tipo I e singularidades do tipo II, dependendo do controle ou não da segunda forma fundamental II. Dizemos que uma variedade M^n tem singularidade do tipo I se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\max_{M_t} |\text{II}| \leq \frac{C}{T-t},$$

para todo $t \in [0, T)$. Caso contrário, são chamadas de singularidades do tipo II. A norma da segunda forma fundamental próximo de uma singularidade do tipo I é bem controlada, por definição. Por outro lado, é muito mais difícil de se lidar com as singularidades do tipo II.

Um tipo particular de solução do fluxo da curvatura média são aquelas que evoluem pelo fluxo por meio do movimento de um grupo a um parâmetro de transformações conformes da variedade ambiente. Tais soluções mantêm a forma à medida que o fluxo

evolui e são chamadas de solitons. Observe que, equivalentemente, solitons são soluções que se movem ao longo das curvas integrais de campos de Killing conforme. Três classes importantes de solitons do fluxo de curvatura média são self-shrinkers, self-expanders e os translating no espaço Euclidiano. Os dois primeiros evoluem por uma homotetia, enquanto este último por uma translação. A palavra soliton foi cunhada por Kruskal e Zabusky em seu trabalho fundamental ZABUSKY and KRUSKAL (1965) sobre equações Korteweg-de Vries. Nesse trabalho, eles observaram que esta equação não linear possui a chamada solução “traveling wave solutions” a qual se comporta como solução da equação da onda linear. Tais soluções também foram chamadas de “solitiray waves”, ondas solitárias. Como a interação dessas soluções lembra o comportamento de partículas elementares (como um “próton”), Kruskal e Zabusky criaram o palavra “soliton”. Esta denominação tem sido usada na geometria para soluções que se movem sob a ação de grupos de isometria, embora geralmente não haja propriedade de interação.

As soluções soliton possuem propriedades geométricas e analíticas interessante. Além disso, seu estudo é fundamental para se entender o comportamento das singularidades do fluxo, uma vez que os solitons aparecem como blow ups das singularidades do fluxo da curvatura média. Veja MANTEGAZZA (2011), HUNGERBUHLER and SMOCZYK (2000), HUNGERBUHLER and ROOST (2009).

Inicialmente o estudo dos solitons se deu no espaço Euclidiano. Muitos trabalhos estudaram soluções autossimilares do fluxo da curvatura média no espaço Euclidiano, podemos citar COLDING and MINICOZZI II (2012), COLDING and MINICOZZI II (2015) e COLDING, MINICOZZI II, and PEDERSEN (2015). No trabalho ALÍAS, LIRA, and RIGOLI (2020), os autores introduziram a noção geral de soliton do fluxo da curvatura média e, assim, abrangeram espaços com curvatura seccional constantes, produtos Riemannianos e mais geralmente, espaços produto warped.

Dizemos que uma imersão $\psi : M^m \rightarrow N^{n+1}$ é um soliton do fluxo da curvatura média com respeito ao campo X do fibrado tangente de N se $cX^\perp = \mathbf{H}$ ao longo de ψ para uma constante $c \in \mathbb{R}$.

Os self-shrinkers e self-expanders Euclidianos, estudados amplamente na literatura, são casos particulares da definição acima, escolhendo X como sendo o vetor posição em $N = \mathbb{R}^{n+1}$ e, respectivamente, constantes $c < 0$ e $c > 0$. Da mesma forma, os solitons translating no produto $N = \mathbb{R} \times P$ são solitons do fluxo da curvatura média com respeito ao campo paralelo que gera as translações ao longo do fator \mathbb{R} .

O estudo da evolução de gráficos completos em R^{n+1} foi feito em ECKER and HUISKEN (1989), sendo os resultados melhorados em ECKER and HUISKEN (1991). Em UNTERBERGER (2003) ou (UNTERBERGER, 1998), o autor estudou a evolução de gráficos pelo fluxo da curvatura média no espaço hiperbólico.

Após \mathbb{H}^{n+1} , outros ambientes naturais para tentar estender os resultados de Ecker e Huisken são produtos $M \times \mathbb{R}$ ou, mais geralmente, produtos warped $M \times_h \mathbb{R}$ ou

$\mathbb{R} \times_h M$. O estudo nesse espaço foi feito no trabalho BORISENKO and MIQUEL (2012).

Nesta tese, estudamos gráficos solitons do fluxo da curvatura média em produtos warped.

Seja $\bar{M} = I \times_h M$ um produto warped, com coordenadas (s, x) , e seja $t = \int_{s_0}^s \frac{d\sigma}{h(\sigma)}$ o parâmetro do fluxo do campo conforme $X = h(s)\partial_s$, $\lambda(t) = h(s(t))$ e $\rho(t) = \frac{\lambda_t}{\lambda}$. A seguinte equação descreve os solitons gráficos nesses espaços:

$$Q[u] \doteq \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) + \frac{f(u)}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = 0,$$

onde $f(t) = \lambda^2(t) - n\rho(t)$.

Para mostrar os principais resultados deste trabalho, necessitaremos das seguintes hipóteses:

(H₁) $f(t) \geq 0$, $f'(t) \leq 0$ em (T_*, T_1) para um $T_1 \leq T_*$.

(H₂) Se $T_1 < +\infty$, então $f(T_1) = 0$.

O resultado a seguir, é mostrado no Capítulo 3. Ele garante a existência de gráficos solitons no produto warped $I \times_h M$.

Teorema 1.1 *Seja $\Omega \Subset M^n$ um domínio com bordo C^3 . Suponha que $\operatorname{Ric} \geq (n-1)\kappa^2$ em Ω , com $\kappa \geq 0$ e que a curvatura média de $\partial\Omega$ satisfaz*

$$\begin{cases} H > 0 & \text{se } \kappa = 0, \\ H \geq \kappa & \text{se } \kappa > 0. \end{cases}$$

Suponha que a função $f(t) = \lambda^2(t) - n\rho(t)$ satisfaz as hipóteses H_1 e H_2 . Então, para toda função contínua $\phi : \partial\Omega \rightarrow (T_, T_1)$, existe uma solução de*

$$\begin{cases} Q[u] = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = \phi & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Para a demonstração desse resultado, usamos o método da continuidade. Na sequência resolvemos o problema de Dirichlet com dados de bordos no infinito:

Teorema 1.2 *Nas hipóteses do Teorema (1.1), suponhamos que $T_* > -\infty$. Então, existe uma solução u de*

$$\begin{cases} Q[u] = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = T_* & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

Em 1968, no artigo JENKINS and SERRIN (1968), Jenkins e Serrin mostraram, entre outros resultados, que se $\partial\Omega$ apresenta um ponto de curvatura média negativa, é possível exibir um dado de bordo suave ϕ , com norma arbitrariamente pequena, para o qual o problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas

$$\begin{cases} Q[u] = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = \phi & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

não tem solução. Mais precisamente eles mostraram:

Teorema 1.3 ((JENKINS and SERRIN, 1968)) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado de classe C^2 . Suponha que existe $p \in \partial\Omega$ tal que $H_{\partial\Omega}(p) < 0$, onde $H_{\partial\Omega}$ é a curvatura média de $\partial\Omega$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\phi \in C^\infty(\partial\Omega)$ com $\sup_{\partial\Omega} |\phi| < \varepsilon$, para a qual o Problema de Dirichlet (3) não tem solução.*

Inspirado neste resultado, mostramos no Capítulo 4 o seguinte teorema:

Teorema 1.4 *Sejam M^n completa, simplesmente conexa e satisfazendo $\operatorname{Sect}^M \leq 0$, isto é, M é uma variedade de Cartan-Hadamard, e seja $\Omega \subseteq M$ um domínio C^3 . Seja f uma função satisfazendo a hipótese H_1 com $T_1 = +\infty$, e suponhamos que exista $y \in \partial\Omega$ tal que $H(y) < 0$. Então, existe $\phi : \partial\Omega \rightarrow (T_*, +\infty)$ de classe C^∞ tal que o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Q[u] = 0, & \text{em } \Omega \\ u = \phi, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

não tem nenhuma solução.

Finalmente, no Capítulo 5 fazemos um breve estudo de gráficos no produto warped $M \times_h \mathbb{R}$. Mostramos lá a existência local de gráficos solitons nesses espaços.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos alguns estudos preliminares sobre fluxo da curvatura média, mais especificamente, sobre solitons do fluxo da curvatura média. Aqui definimos soliton do fluxo da curvatura média em uma variedade Riemanniana N munida com um campo vetorial X , objeto central deste trabalho, e introduzimos conceitos e fatos básicos necessários para o entendimento dos capítulos seguintes. Descrevemos algumas equações para o estudo dos solitons e os espaços onde os principais resultados serão estabelecidos.

2.1 Solitons do Fluxo da Curvatura Média

Vamos começar esta seção estabelecendo algumas notações que utilizaremos ao longo deste trabalho. O leitor poderá consultar ECKER (2004), MANTEGAZZA (2011), GALLOT, HULIN, and LAFONTAINE (1990), SAKAI (1996), PETERSEN (2016), ZHU (2002) e (ALÍAS, LIRA, and RIGOLI (2020)).

Sejam M^k e N^{n+1} variedades Riemannianas. Um fluxo é uma aplicação suave

$$\Psi : [0, T) \times M \rightarrow (N, \langle, \rangle)$$

tal que $\Psi_t = \Psi(t, \cdot)$ é uma imersão para todo $t \in [0, T)$, $T > 0$. Denotaremos por $g_t = \Psi^* \langle, \rangle$ a métrica induzida por Ψ_t , Π_t e \mathbf{H}_t a segunda forma fundamental e o vetor curvatura média (normalizado), respectivamente, da imersão Ψ_t , com as convenções a seguir.

$$\Pi_t(e_i, e_j) = (\bar{\nabla}_{\Psi_* e_i} \Psi_* e_j)^\perp \quad (4)$$

$$\mathbf{H}_t(e_i, e_j) = (g_t)^{ij} \Pi_t(e_i, e_j). \quad (5)$$

Aqui e no que se segue \perp indica a projeção no fibrado normal, o referencial tangente local $\{e_i\}_{i=1}^k$ é ortonormal com respeito a métrica induzida em M por Ψ_t . Usaremos a notação $\bar{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\bar{\nabla}$ para a métrica Riemanniana e a conexão em N , respectivamente.

Com a notação acima fixada, passemos agora para definição de fluxo da curvatura média. Uma família a um parâmetro de variedades suaves evolui pelo fluxo da curvatura média, se o vetor velocidade coincide com o vetor curvatura média em cada ponto. Mais precisamente

Definição 2.1 *Dizemos que a família Ψ_t evolui pela curvatura média ou, equivalentemente, que M evolui pelo fluxo da curvatura média se satisfaz a seguinte equação*

$$\frac{\partial \Psi_t}{\partial t} \doteq \Psi_t^* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = -\mathbf{H}_t. \quad (6)$$

Em termos de quantidade escalar, temos

$$-H = \frac{1}{k} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \Psi_t, \nu \right\rangle,$$

onde H e ν são, respectivamente, a curvatura média normalizada e o vetor normal unitário de Ψ . Seguimos a convenção usual $\mathbf{H} = H\nu$, isto é, a curvatura média é calculada com respeito a ν . Observe que o vetor normal unitário é definido com sinal, mas o vetor curvatura média \mathbf{H} independe de tal escolha. Portanto, o produto $H\nu$ não depende da escolha da orientação de ν .

Observação 2.1 *A nossa convenção difere da maioria da literatura, onde o fluxo da curvatura média satisfaz*

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathbf{H}_t.$$

Observe que, pela fórmula da primeira variação da área,

$$\frac{dA(\Omega_t)}{dt} = - \int_{\Omega_t} \langle Y, \mathbf{H} \rangle,$$

com Y campo de variação, temos que a área de uma região $\Omega \subset (M, g_t)$ é crescente em t .

Os exemplos mais simples de solução para o fluxo da curvatura média são as hipersuperfícies mínimas, isto é, soluções para as quais temos $H \equiv 0$. Fisicamente, estas são as soluções que não se movem ou soluções estacionárias da equação (6). Neste trabalho, estudaremos um tipo especial de solução do fluxo da curvatura média. A saber, as soluções que se movem ao longo das curvas integrais de um campo de vetores suaves X em N .

Em geral, as equações de evolução frequentemente têm soluções especiais, que evoluem ao longo do tempo por uma transformação conforme do espaço ambiente. Consequentemente, essas soluções mantêm sua forma durante sua evolução. Tais soluções são chamadas de solitons. A importância desses objetos, entre outros motivos, reside no fato de os solitons modelarem as singularidades do fluxo da curvatura média. Veja MANTEGAZZA (2011). Nesta tese, estudaremos soluções solitons do fluxo da curvatura média que são gráficos de uma função suave. Portanto, a seguir, descreveremos em detalhes esses objetos.

Dado um campo X em N , pomos $\Phi : (a, b) \times N \rightarrow N$ para denotar o fluxo gerado pelo campo X definido no intervalo maximal (a, b) . Temos a seguinte definição.

Definição 2.2 *Dizemos que um fluxo $\Psi : [0, \omega) \times M \rightarrow N$ é uma solução soliton do fluxo da curvatura média com respeito ao campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(N)$ se*

- *Existe um difeomorfismo $t \mapsto \sigma(t)$ e*
- *Existe um fluxo de difeomorfismos $\eta : [0, \omega) \times M \rightarrow M$ gerado por um campo tangente*

$$Z = \frac{\partial \eta}{\partial t} \in \mathfrak{X}(M),$$

tais que

$$\Psi(t, x) \equiv \Phi(\sigma(t), \eta(t, x)), \quad (7)$$

para todo $(t, x) \in [0, T) \times M$.

A relação (7) é equivalente a identidade de conjuntos

$$\Psi_t(M) = \Phi_{\sigma(t)}(\Psi(M)). \quad (8)$$

Note que $s = \sigma(t)$ é a reparametrização das linhas de fluxo de X .

Exemplo 2.1 Seja $N = \mathbb{R}^{n+1}$ com a métrica Euclidiana expressa, fora da origem, em coordenadas polares $(t, \theta) \in (0, \infty) \times \mathbb{S}^n$ por $dt^2 + t^2 d\theta^2$, onde $d\theta^2$ denota a métrica canônica em \mathbb{S}^n . Sejam

$$X(x) = x$$

o campo vetor posição em \mathbb{R}^{n+1} e $\Phi(s, x) = e^s x$, onde $s = \log t$. Note que

$$\Phi_* \frac{\partial}{\partial s} = X(\Phi(s, x)).$$

Em termos de coordenadas polares, $X = t\partial_t$. Fixe $M = \mathbb{S}^n$ e seja $\psi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ aplicação inclusão canônica, onde $\psi = \Psi_0$. Escolha uma reparametrização de X , $\sigma : [0, T) \rightarrow (-\infty, \infty)$ da forma

$$s = \sigma(t) = \log t(\tau)$$

e defina a aplicação $\Psi : [0, T) \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ como

$$\Psi(t, x) = \Phi(\sigma(t), \psi(x)) = \tau(t)\psi(x).$$

Esta aplicação define um fluxo da curvatura média se, e somente, se

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{n\tau(t)} \partial_\tau$$

para todo $(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{S}^n$. Agora, temos que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \partial_\tau.$$

Logo,

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{n\tau(t)}.$$

Resolvendo esta equação, encontramos

$$\tau(t) = \sqrt{\frac{2t}{n} + c},$$

e, portanto,

$$\Psi(t, x) = \sqrt{\frac{2t}{n} + c}\psi(x),$$

para $(t, x) \in (-\frac{c}{2}n, +\infty) \times \mathbb{S}^n$, para $c > 0$.

Observe que o raio, e portanto a área, da esfera cresce à mediada que o fluxo evolui. Assim, com as convenções de sinal da equação (6), a esfera expande.

A proposição a seguir é uma consequência fundamental da definição acima. Ela é uma das motivações para a noção de soliton do fluxo da curvatura média em contextos geométricos mais gerais, como veremos adiante. Esse resultado pode ser encontrado em (ALÍAS, LIRA, and RIGOLI (2020)).

Proposição 2.1 *Seja Ψ um soliton N . Então, para todo (t, x) ,*

$$X = \frac{-(\Psi_t)_*(\eta_t^{-1})_*Z - \mathbf{H}}{\sigma'(t)}. \quad (9)$$

Prova: Diferenciando (7) em relação a t , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \frac{\partial \Phi}{\partial s}(\sigma(t), \eta_t(x)) \cdot \sigma'(t) + (\Phi_{\sigma(t)})_* \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \\ &= X(\Phi(\sigma(t)), \eta_t(x)) \cdot \sigma'(t) + (\Phi_{\sigma(t)})_*(Z) \\ &= X(\Psi_t(x)) \cdot \sigma'(t) + (\Phi_{\sigma(t)})_*(Z) \\ &= X(\Psi_t(x)) \cdot \sigma'(t) + (\Psi_t)_*(\eta_t^{-1})_*(Z), \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos que $\Psi_t = \Phi_{\sigma(t)} \circ \eta_t$.

Invocando a equação (6), concluímos a demonstração. □

Pela Proposição (2.1), em cada fatia temporal $\{t = t_0\}$, a imersão Ψ_t resolve

$$X_{|\Psi_{t_0}(x)}^\perp = \frac{-\mathbf{H}_{t_0}(x)}{\sigma'(t_0)}.$$

A menos de reescalonamento do campo X , podemos assumir $\sigma'(t_0) = 1$. Essa é a motivação para a definição a seguir, que generaliza a noção de soliton do fluxo da curvatura média com respeito a uma campo $X \in \Gamma(TN)$.

Definição 2.3 *Uma imersão $\psi : M^k \rightarrow N^{n+1}$ é chamada de soliton com respeito a*

$X \in \mathfrak{X}(N)$ se

$$X^\perp = -\mathbf{H} \quad (10)$$

em M .

Se $k = n$, isto é, a subvariedade $\psi(M)$ tem codimensão 1, a condição (10) se torna

$$nH = -\langle X, \nu \rangle,$$

onde a curvatura média H , com respeito ao campo normal local ν ao longo de ψ , é dada por

$$\mathbf{H} = nH\nu.$$

Nos gráficos, usaremos a condição de soliton $\partial_t^\perp = X^\perp = \mathbf{H}$, com \mathbf{H} não normalizado. Agora vamos apresenta alguns exemplos.

Exemplo 2.2 *Vamos considerar o fluxo da curvatura média self-similar Euclidiano Ψ , de esferas concêntricas em $N = \mathbb{R}^{n+1}$ dada no exemplo anterior. Fixe um valor particular t_o do parâmetro de fluxo t e denote. $\frac{d\sigma}{dt} = c$. Então,*

$$c = \frac{ds}{d\tau} \Big|_{\tau(t_o)} \frac{d\tau}{dt} \Big|_{t_o} = \frac{1}{\tau^2(t_o)}.$$

Assim,

$$\tau(t_o) = \sqrt{\frac{n}{c}}$$

e concluímos que a esfera $\mathbb{S}^n(\sqrt{\frac{n}{c}}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com raio $\sqrt{\frac{n}{c}}$ é um soliton da curvatura média com respeito a campo radial $X = \tau\partial_\tau$. Isso está de acordo com a noção de self-expander estabelecida pela literatura. Veja (ECKER (2004)).

Observação 2.2 *Classes importantes de solitons do fluxo de curvatura média são self-shrinkers, self-expanders e os translating. Os dois primeiros evoluem por uma homotetia, enquanto este último por uma translação. No caso particular $N = \mathbb{R}^{n+1}$ e escolhendo X como sendo o vetor posição de N , temos os self-expanders e self-shrinkers Euclidiano, estudados amplamente na literatura. Veja COLDING and MINICOZZI II (2012).*

Observe que nas definições acima não exigimos propriedades especiais para o campo X . Neste trabalho, estaremos interessados na investigação de solitons que move-se pelas trajetórias do fluxo de campos com boas propriedades, como campos conformes ou, ainda, campos de Killing. Lembramos que X é dito ser conforme se

$$\mathcal{L}_X g = 2\varphi g$$

é satisfeito, onde

$$\varphi = \frac{1}{n+1} \operatorname{div}_N X.$$

Um campo conforme X é fechado se

$$\nabla_U X = \varphi U,$$

para todo $U \in \Gamma(TN)$.

A condição (10) é necessária, mas não é suficiente para garantir que o fluxo pela curvatura média surgindo de Ψ , mova-se ao longo das curvas integrais de X . Se X é Killing, a condição (10) também é suficiente. Veja SMOCZYK (2001), HUNGERBUHLER and SMOCZYK (2000), HUNGERBUHLER and METTLER (2011).

2.2 Solitons no espaço Hiperbólico e solitons na Bola Euclidiana

Nesta seção, iremos relacionar os solitons da curvatura média em \mathbb{H}^{n+1} , com os solitons da curvatura média na bola Euclidiana B^{n+1} , com a finalidade de mostrar que não se obtém os solitons em \mathbb{H}^{n+1} com passagens triviais saindo de solitons na bola Euclidiana. Em particular, obter gráficos solitons no espaço hiperbólico, que é um dos nossos interesses neste trabalho, não é a mesma coisa que se obter gráfico solitons na bola Euclidiana. Isso justifica que os resultados obtidos nesta tese não podem ser obtidos a partir de resultados na literatura.

Seja $\Psi : [0, T] \times M^k \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ um fluxo. Representaremos \mathbb{H}^{n+1} no modelo do disco de Poincaré, com a métrica hiperbólica $\langle, \rangle_{\mathbb{H}}$. Sendo $B^{n+1} = (B_1(0), \langle, \rangle_{\mathbb{R}})$ a bola unitária de \mathbb{R}^{n+1} com a métrica plana $\langle, \rangle_{\mathbb{R}}$, temos que

$$\langle, \rangle_{\mathbb{R}} = \lambda^2(x) \langle, \rangle_{\mathbb{H}},$$

com $\lambda(x) = \frac{1 - |x|^2}{2}$. Portanto, o espaço hiperbólico e a bola Euclidiana são ligados por difeomorfismo conforme. De fato, a aplicação identidade $G = I : \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow B^{n+1}$ é um difeomorfismo conforme.

O primeiro passo é relacionar as curvaturas médias dos fluxos conformemente relacionados. Defina o fluxo

$$\bar{\Psi} = G \circ \Psi : [0, T] \times M \rightarrow B^{n+1}.$$

Faremos as contas num contexto mais geral, em seguida faremos a particularização à bola Euclidiana e ao Disco de Poincaré. Considere o fluxo

$$\Psi : [0, T] \times M^k \rightarrow (N^n, \langle, \rangle).$$

Denotaremos por $g_t = \Psi_t^*\langle, \rangle$. Seja $G : (N, \langle, \rangle) \rightarrow (\bar{N}, \langle, \rangle)$ um difeomorfismo conforme e seja $0 < \lambda \in C^\infty(\bar{N})$ tal que

$$G^*\langle, \rangle = \lambda^2(G)\langle, \rangle.$$

Sejam ∇ e $\bar{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de N e \bar{N} , respectivamente,

$$\bar{\Psi} = G \circ \Psi_t : M \rightarrow \bar{N},$$

e sejam H_t e \bar{H}_t as curvaturas médias de Ψ_t e $\bar{\Psi}_t$, respectivamente. Temos o seguinte lema:

Lema 2.1 *Com a notação acima, as curvaturas médias H_t de Ψ e \bar{H}_t de $\bar{\Psi}_t$ são relacionadas por*

$$G_*H_t = \lambda^2(\bar{\Psi}_t)(\bar{H}_t + (\bar{\nabla}\lambda)^\perp)$$

em M .

Prova: Seja $\{e_i, e_\alpha\}$, onde $1 \leq i \leq k$ e $k+1 \leq \alpha \leq n$, um referencial ortonormal de Darboux para $\Psi_t : (M, g_t) \rightarrow (N, \langle, \rangle)$, onde $\{e_i\}$ são vetores tangentes a $\Psi_t(M)$ e $\{e_\alpha\}$ são vetores normais. Defina um referencial ortonormal de Darboux $\{\bar{e}_i, \bar{e}_\alpha\}$ ao longo de $\bar{\Psi}_t$ por meio da identidade

$$(\bar{\Psi}_t)_*\bar{e}_a = \frac{1}{\lambda(\bar{\Psi}_t)}G_*((\bar{\Psi}_t)_*e_a),$$

com $1 \leq a \leq n$. Observe que $\{\bar{e}_i, \bar{e}_\alpha\}$ são ortonormais em \bar{N} . As componentes h_{ij}^α e \bar{h}_{ij}^α da segunda forma fundamental de Ψ e $\bar{\Psi}_t$, respectivamente, nas bases $\{e_i, e_\alpha\}$ e $\{\bar{e}_i, \bar{e}_\alpha\}$ são ligadas por

$$\bar{h}_{ij}^\alpha = \frac{1}{\lambda}h_{ij}^\alpha - \frac{\lambda_\alpha}{\lambda}\delta_{ij},$$

onde $\lambda = \lambda(\bar{\Psi}_t)$ e $\lambda_\alpha = e_\alpha(\lambda) = \lambda\bar{e}_\alpha(\lambda) \doteq \lambda\bar{\lambda}_\alpha$.

Portanto, identificando \bar{e}_α com $(\bar{\Psi}_t)_*\bar{e}_\alpha = G_*((\bar{\Psi}_t)_*\bar{e}_\alpha) \approx G_*\left(\frac{e_\alpha}{\lambda}\right)$, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{1}{k} \sum_i \bar{h}_{ii}^\alpha \bar{e}_\alpha = \frac{1}{k} \frac{1}{\lambda^2} \left[\sum_i h_{ii}^\alpha e_\alpha - k\lambda_\alpha e_\alpha \right] \\ &= \frac{1}{\lambda^2} G_*(H) - \bar{\lambda}_\alpha \bar{e}_\alpha \\ &= \frac{1}{\lambda^2} [G_*(H)] - (\bar{\nabla}\lambda)^\perp, \end{aligned}$$

como afirmado. □

Suponhamos agora, que

$$\Psi : [0, \omega] \times M \rightarrow N^{n+1}$$

é um fluxo pela curvatura média, isto é,

$$\left(\frac{\partial\Psi_t}{\partial t}\right)^\perp = -\mathbf{H}_t.$$

Então o fluxo $\bar{\Psi} = G \circ \Psi$ satisfaz,

$$\left(\frac{\partial\bar{\Psi}_t}{\partial t}\right)^\perp = G_* \left(\frac{\partial\Psi_t}{\partial t}\right)^\perp = -G_*H_t = -\lambda^2(\bar{\Psi}_t)(\bar{H}_t + (\bar{\nabla}\lambda)^\perp),$$

onde usamos que G é um difeomorfismo conforme. Isso, em geral, não é um fluxo pela curvatura média.

Por outro lado, os solitons são relacionados. De fato, suponhamos que $\Psi : [0, \omega] \times M \rightarrow N$ seja um soliton de um campo conforme X . Observe que Ψ satisfaz $\bar{\Psi}_t = G \cdot \Psi_t$. Note que $\bar{\Psi}$ ainda é um fluxo pelo campo G_*X , que é conforme. De fato,

$$\begin{aligned} G^*(\mathcal{L}_{G_*X}\langle, \rangle) &= \mathcal{L}_X G^*\langle, \rangle = \mathcal{L}_X(\lambda^2(G)\langle, \rangle) \\ &= X(\lambda^2(G))\langle, \rangle + \lambda^2(G)\mathcal{L}_X\langle, \rangle \\ &= \left[X(\lambda^2(G)) + \lambda^2(G)\frac{\operatorname{div}_{\langle, \rangle} X}{n+1} \right] \langle, \rangle. \end{aligned}$$

Ou seja, o campo G_*X é um campo conforme em N .

Pela definição, o campo conforme X em N satisfaz

$$X^\perp(\Psi_t(x)) = -H_t(x). \quad (11)$$

Aplicando G_* a (11), obtemos

$$(G_*X)^\perp = G_*X^\perp = -G_*H_t = -\lambda^2(\bar{\Psi}_t)(\bar{H}_t + (\bar{\nabla}\lambda)^\perp),$$

Isto é,

$$\left(\frac{G_*X}{\lambda^2(\bar{\Psi}_t)} + \bar{\nabla}\lambda\right)^\perp = -\bar{H}_t.$$

Essa é a equação de um soliton somente se

$$\frac{G_*X^\perp}{\lambda^2(\bar{\Psi}_t)} + (\bar{\nabla}\lambda)^\perp \quad (12)$$

é a parte normal de um campo conforme. Essa condição depende claramente da escolha da subvariedade. Se tivesse uma relação entre solitons em \bar{N} e solitons em N , deveríamos

ter (12) para cada soliton . Arbitrariamente isso significa que

$$Y \doteq \frac{G_*X}{\lambda^2(\bar{\Psi}_t)} + \bar{\nabla}\lambda$$

deve ser um campo conforme.

Agora, observe que como G_*X é um campo conforme, Y satisfaz

$$\mathcal{L}_Y\langle, \rangle = \frac{1}{\lambda^2}\mathcal{L}_{G_*X}\langle, \rangle + (d(\lambda^{-2}) \otimes G_*X_b + G_*X_b \otimes d(\lambda^{-2})) + \bar{\nabla}^2\lambda.$$

Então, Y é conforme se, e somente se,

$$(d(\lambda^{-2}) \otimes G_*X_b + G_*X_b \otimes d(\lambda^{-2})) + \bar{\nabla}^2\lambda = \mu\langle, \rangle_{\mathbb{R}}, \quad (13)$$

para uma $\mu \in C^\infty(N)$.

No caso de \mathbb{H}^{n+1} e da bola Euclidiana, (13) fica

$$\left(d\left(\frac{4}{(1-|y|^2)^2}\right) \otimes G_*X_b + G_*X_b \otimes d\left(\frac{4}{(1-|y|^2)^2}\right) \right) + \bar{\nabla}^2(1-|y|^2) = \mu\langle, \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Isto é,

$$d\left(\frac{4}{(1-|y|^2)^2}\right) \otimes G_*X_b + G_*X_b \otimes d\left(\frac{4}{(1-|y|^2)^2}\right) = (\mu + 2)\langle, \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Observe que o termo à esquerda é uma matriz com posto 1 ou posto 2, em quase todo ponto e para qualquer campo conforme X em \mathbb{H}^{n+1} . Como $n \geq 2$, a relação acima nunca poderá ser satisfeita em B^{n+1} , uma vez que o termo à direita é uma matriz de posto zero ou posto maior ou igual a 3.

Isso mostra que o estudo de solitons no espaço hiperbólico não é obtido de maneira trivial do estudo de solitons na bola do espaço Euclidiano. ■

2.3 Produtos warped do tipo $\bar{M} = I \times_h M$

Estudaremos gráficos solitons na presença de campos fechados e conforme no interessante caso dos espaços warped. Isso não é uma restrição importante, uma vez que solitons de campos fechados conforme são essencialmente produtos warped. Veja a referência MONTIEL (1999).

Nesta seção, começaremos com o caso em que N é o produto warped $\bar{M} = I \times_h M$.

Dados uma variedade completa n -dimensional (M, g) e uma função suave positiva

$$h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

vamos considerar a variedade $\bar{M} = I \times_h M$ munida com a métrica warped

$$\bar{g} = ds^2 + h^2(s)g.$$

Observe que $X = h(s)\partial_s$ é um campo conforme e fechado. Seu parâmetro de fluxo t com a normalização $t(s_0) = 0$ satisfaz

$$t = \int_{s_0}^s \frac{d\sigma}{h(\sigma)}, \quad t : I \subset \mathbb{R} \rightarrow t(I) \doteq J \subset \mathbb{R}.$$

Nas coordenadas $(t, x) \in J \times M$, a métrica \bar{g} se escreve como

$$\bar{g} = h^2(s(t))[dt^2 + g] \doteq \lambda^2(t)[dt^2 + g]$$

e $X = \partial_t$.

A derivada logarítmica $\rho(t) \doteq \frac{\lambda_t}{\lambda} = \frac{\partial_t h}{h} = \partial_s h$ satisfaz

$$\mathcal{L}_X \bar{g} = 2\rho(t)\bar{g}.$$

Na sequência veremos alguns exemplos.

Exemplo 2.3 (1) **Cones.** São variedades do tipo

$$\bar{M} = \mathbb{R}^+ \times_h M,$$

com $h(s) = s$. Neste caso,

$$t = \log\left(\frac{s}{s_0}\right), \quad \lambda(t) = s_0 e^t \quad e \quad \rho(t) = 1.$$

(2) **O Espaço Hiperbólico Fibrado Por Horoesferas.**

O modelo é $\bar{M} = \mathbb{R} \times_{e^{-s}} \mathbb{R}^n$ com a métrica $\bar{g} = ds^2 + e^{-2s}g_{\mathbb{R}^n}$. Sendo $h(s) = e^{-s}$, pondo $s_0 = 0$, obtemos $t = e^s - 1$, e assim $\lambda(t) \doteq h(s(t)) = (t+1)^{-1}$,

$$\bar{g} = \frac{1}{(t+1)^2} [dt^2 + \langle \cdot, \cdot \rangle], \quad \lambda(t) = \frac{1}{t+1}, \quad \rho = -\frac{1}{t+1}.$$

(3) **O Espaço Hiperbólico Fibrado Por Hiperesferas.**

O modelo é $\bar{M} = \mathbb{R} \times_{\cosh s} \mathbb{H}^n$ com métrica $\bar{g} = ds^2 + \cosh^2 s g_{\mathbb{H}^n}$.

De $h(s) = \cosh s$ obtemos

$$t = 2(\arctan(e^s) - \arctan(e^{s_0})).$$

(4) **Horns.** São variedades do tipo

$$\bar{M} = \mathbb{R}^+ \times_h M$$

com $h(s) \approx s$ para $a > 1$. Neste caso,

$$t = \int_{s_0}^s \frac{d\sigma}{h(\sigma)} + \text{const}$$

é definido no intervalo $J = (T_*, T^*)$, com $T_* > -\infty$.

Antes de terminar esta seção apresentaremos a seguinte definição:

Definição 2.4 Dizemos que o produto warped $\bar{M} = I \times_h M$ tem um bordo assintótico se o intervalo $t(I) = J$ é da forma (T_*, T^*) onde pelo menos um dos extremos T^* ou T_* é finito.

Um dos nossos aqui, é obter gráficos sobre domínios suáveis do bordo assintótico de \bar{M} , que são solitons pelo campo $X = h(s)\partial_s$. Iremos supor que $T_* > -\infty$.

2.4 Produtos warped do tipo $\bar{M} = M \times_h \mathbb{R}$

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana completa, $0 < h \in C^\infty(M)$ e considere o produto

$$\bar{M} = M \times_h \mathbb{R},$$

com a métrica

$$\bar{g} = g + h^2(x)ds^2.$$

Então, $X = \partial_s$ é um campo de Killing e o parâmetro de fluxo é $t = s$. Definimos

$$\hat{g} = \frac{1}{h^2(x)}g,$$

então

$$\bar{g} = h^2(x)[\hat{g} + ds^2].$$

Exemplo 2.4

(1) **O espaço hiperbólico fibrado por esferas equidistante**

O modelo é $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{H}^n \times_h \mathbb{R}$, $h(x) = \cosh(r(x))$, onde $r(x) = \text{dist}_{\mathbb{H}^n}(x, o)$ e $o \in \mathbb{H}^n$ é origem fixada.

Este modelo é relacionado com o modelo do semispaço de \mathbb{H}^{n+1} como segue.

Sejam $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ coordenadas em \mathbb{H}^{n+1} . Descrevendo o semiespaço com coordenadas polares $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times S_+^n$, onde $\theta \in S_+^n$ se escreve como

$(\varphi, \omega) \in (0, \frac{\pi}{2}) \times S^{n-1}$, por

$$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi \cdot \omega).$$

Defina $s = \log \rho$ e

$$r = \int_0^\varphi \frac{d\sigma}{\cos \sigma} = \log \left(\frac{1 + \tan \frac{\varphi}{2}}{1 - \tan \frac{\varphi}{2}} \right).$$

Temos

$$\begin{aligned} \langle, \rangle_{\mathbb{H}} &= \frac{1}{\rho^2 \cos^2 \varphi} [d(\cos \varphi)^2 + d(\rho \sin \varphi \cdot \omega)^2] \\ &= ds^2 \cosh^2 r + (dr^2 + \sinh^2 r d\omega^2). \end{aligned}$$

O campo de Killing ∂_s corresponde ao campo radial $\rho \partial_\rho$ e a variedade

$$(\mathbb{H}^n, \bar{g}) = \left(\mathbb{H}^n, \frac{1}{\cosh^2 r} [dr^2 + \sinh^2 r d\omega^2] \right) = (\mathbb{H}^n, d\varphi^2 + \sin^2 \varphi d\omega^2)$$

é isométrica a meia esfera S_+^n com a métrica redonda.

A métrica \bar{g} em \mathbb{H}^{n+1} escreve-se nas coordenadas (s, φ, ω) como

$$\bar{g} = \frac{1}{\cos^2 r} [dr^2 + \sin^2 r d\omega^2 + ds^2].$$

O valor $\varphi = \frac{\pi}{2}$ descreve um bordo assintótico difeomorfo a $\mathbb{R} \times S^{n-1}$.

(2) O Espaço Hiperbólico Fibrado por trajetórias de Campo de Killing

O modo é $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{H}^n \times_h \mathbb{R}$, onde $h(x) = e^{-r(x)}$ é uma função de Busemann em \mathbb{H}^n .

Isso é uma consequência de como é escrita a métrica do semi-espaço

$$\bar{g} = \frac{1}{x_o^2} (dx_o^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2)$$

usando $x_1 = s$, $x_0 = e^r$,

$$\bar{g} = \frac{1}{x_o^2} ds^2 + \frac{1}{x_o^2} (dx_o^2 + \hat{dx}_2^2 + \dots + dx_n^2) = \frac{1}{x_o^2} ds^2 + \langle, \rangle_{\mathbb{H}},$$

e obtemos

$$\bar{g} = e^{-2r} ds^2 + [dr^2 + e^{-2r} \langle, \rangle_{\mathbb{R}^{n-1}}].$$

Neste caso, a métrica \hat{g} em \mathbb{H}^n escreve-se como

$$\hat{g} = dx_o^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2.$$

Então (\mathbb{H}^n, \hat{g}) é o semiespaço Euclidiano $\{(x_0, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_0 \geq 0\}$, que tem bordo suave.

2.5 Gráficos Soliton

Neste trabalho estudaremos gráficos nos produtos warped $I \times_h M$ e $M \times_h \mathbb{R}$, produzindo exemplos de solitons que se movem pelo fluxo da curvatura média de acordo com o fluxo do campo conforme $X = h(s)\partial_s$, respectivamente do campo de Killing $X = \partial_s$. Inicialmente, investigaremos gráficos do tipo $t = u(x)$, onde t é o parâmetro do fluxo, $u : \Omega \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ e Ω é um domínio suave.

A existência de tais gráficos com dado de bordo $\phi \in C(\partial\Omega)$ prescrito, está relacionada com a curvatura média do bordo, $\partial\Omega$. Uma ferramenta pra tratar esse tipo de questão são os teoremas de comparação pelo Hessiano e pelo Laplaciano, os quais introduzimos a seguir. Boas referências para esta seção são (PETERSEN, 2016), ((SAKAI, 1996)), (ESCHENBURG (1987)).

Seja $\Omega \subseteq M$ um domínio suave, relativamente compacto e seja $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, a função distância $r(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Resultados gerais, (veja ITOH and TANAKA (2001) ou MANTEGAZZA and MENNUCCI (2003)) garantem que existe um aberto $D_\Omega \subseteq \Omega$ tal que

- (1) $\partial D_\Omega = \partial\Omega \amalg \text{cut}(\partial\Omega)$
- (2) r é suave em $D_\Omega \cup \partial\Omega$ e $\text{cut}(\partial\Omega)$, o cut-locus de $\partial\Omega$, tem medida nula.
- (3) $\partial\Omega \cup D_\Omega$ é difeomorfo ao subgráfico de uma função Lipschitz $c : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ e o mapa

$$\Psi : \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \partial\Omega : 0 \leq t < c(y)\} \rightarrow D_\Omega \cup \partial\Omega$$

dada por

$$(t, y) \mapsto \exp_y(t\nabla r(y))$$

é um difeomorfismo, chamado de carta de Fermi.

Dado $k \geq 0$, definimos

$$sn_k(t) = \begin{cases} t & \text{se, } k = 0 \\ \frac{\sinh(kt)}{k} & \text{se, } k > 0. \end{cases}$$

Definimos também, $cn_k(t) = sn'_k(t)$ e $tn_k(t) = \frac{sn_k(t)}{cn_k(t)}$.

Seja Π a segunda forma fundamental de $\partial\Omega$ na direção de ∇r e seja $H = \frac{1}{n} \text{tr}(\Pi)$ a curvatura média. Lembramos ainda que a curvatura seccional radial $sect$ de M é a curvatura seccional restrita a um 2-plano contendo ∇r . A seguir enunciamos o Teorema de comparação do Hessiano.

Teorema 2.1 (Comparação do Hessiano por baixo) *Sejam (M^n, g) uma variedade completa e $\Omega \Subset M^n$ domínio suave. Suponhamos que $\text{sect}^M \leq -k^2$ e $II \leq \bar{\lambda}g$ para $k \in \mathbb{R}_o^+$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$. Então,*

$$\nabla^2 r \geq \frac{-\bar{\lambda}cn_k(r) + k^2sn_k(r)}{cn_k(r) - \bar{\lambda}sn_k(r)}(g - dr \otimes dr)$$

em $(\bar{\Omega} \setminus \text{cut}(\partial\Omega)) \cap B_R(\partial\Omega)$, onde $R = tn_k^{-1}\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right)$ ($R = +\infty$ se $\bar{\lambda} \leq 0$).

Tomando o traço no Teorema (2.1), obtemos o seguinte teorema de comparação do Laplaciano:

Teorema 2.2 (Comparação do Laplaciano por baixo) *Sejam (M^n, g) uma variedade completa e $\Omega \Subset M^n$ domínio suave. Suponhamos que $\text{sect} \leq -k^2$ e $H \leq \bar{\lambda}$ para $k \in \mathbb{R}_o^+$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$. Então,*

$$\Delta r \geq (n-1) \frac{-\bar{\lambda}cn_k(r) + k^2sn_k(r)}{cn_k(r) - \bar{\lambda}sn_k(r)}$$

em $(\bar{\Omega} \setminus \text{cut}(\partial\Omega)) \cap B_R(\partial\Omega)$, onde $R = tn_k^{-1}\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right)$ ($R = +\infty$ se $\bar{\lambda} \leq 0$).

Supondo que $\Pi_{\nabla r} \geq \bar{\lambda}$ obtemos a comparação do Hessiano por cima. Usando este, obtemos a comparação do Laplaciano por cima, como enunciado a seguir.

Teorema 2.3 (Comparação do Laplaciano por cima) *Sejam (M^n, g) uma variedade completa e $\Omega \Subset M^n$ domínio suave. Suponhamos que $\text{Ricc} \geq -(n-1)k^2$ e $H \geq \underline{\lambda}$ para $k \in \mathbb{R}_o^+$, $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}$. Então, $(\bar{\Omega} \setminus \text{cut}(\partial\Omega)) \subset B_R(\partial\Omega)$, onde $R = tn_k^{-1}\left(\frac{1}{\underline{\lambda}}\right)$ ($R = +\infty$ se $\underline{\lambda} \notin \text{Im}(tn_k)$), e*

$$\Delta r \leq (n-1) \frac{-\underline{\lambda}cn_k(r) + k^2sn_k(r)}{cn_k(r) - \underline{\lambda}sn_k(r)}$$

pontualmente em $\bar{\Omega} \setminus \text{cut}(\partial\Omega)$ e fracamente em todo $\bar{\Omega}$.

Para uma prova rápida desses clássicos teoremas, o leitor poderá consultar BIANCHINI, MARI, and RIGOLI (2018) ou ESCHENBURG (1987).

A seguir, temos o seguinte importante corolário, peça fundamental na existência do problema de Dirichlet proposto neste trabalho.

Corolário 2.1 *Seja $\Omega \Subset M$ suave. Suponha que $\text{Ricc} \geq -(n-1)k^2$ em Ω para um $k \in \mathbb{R}_o^+$ e que ocorre uma das seguintes assertivas:*

- (1) $k = 0$ e $H > 0$ em $\partial\Omega$.
- (2) $k > 0$ e $H > k^2tn_k(\text{diam}(\Omega))$ em $\partial\Omega$.

Então, existe $\delta > 0$ dependendo de $n, k, \inf_{\partial\Omega} H$ tal que

$$\Delta r \leq -\delta$$

fracamente em $\bar{\Omega}$.

Prova: É suficiente observar que, nas hipóteses do Corolário (2.1), definindo

$$\underline{\lambda} = \inf_{\partial\Omega} H,$$

a função

$$\frac{-\underline{\lambda}cn_k(r) + k^2sn_k(r)}{cn_k(r) - \underline{\lambda}sn_k(r)} < -\delta < 0$$

para $r \in [0, \text{diam}(\Omega)]$ e aplicar o teorema de comparação do Laplaciano. □

2.6 Espaços Hölder

Se Ω é um domínio limitado e $0 < \alpha < 1$, dizemos que uma função u é Hölder contínua com expoente α em Ω se

$$[u]_{\alpha; \bar{\Omega}} = \sup_{x, y \in \bar{\Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{d(x, y)^\alpha} < \infty, \quad \text{com } x \neq y.$$

Quando a condição acima vale para $\alpha = 1$, a função u é dita Lipschitz contínua em Ω . Em ambos os casos, u é uniformemente contínua em $\bar{\Omega}$ e o conjunto

$$C^{0, \alpha}(\bar{\Omega}) = C^\alpha(\bar{\Omega}) = \{u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}; [u]_{\alpha; \bar{\Omega}} < \infty\}$$

é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{C^{0, \alpha}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{0, \alpha; \bar{\Omega}} + [u]_{\alpha; \bar{\Omega}}.$$

Para k inteiro não negativo, escrevemos $C^{k, \alpha}(\bar{\Omega})$ para indicar o espaço das funções $u \in C^k(\bar{\Omega})$ que têm derivadas de ordem $\leq k$ em $C^{0, \alpha}(\bar{\Omega})$. Munido com a norma

$$\|u\|_{C^{k, \alpha}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{k, \alpha; \bar{\Omega}} = \|u\|_{k; \bar{\Omega}} + [D^k u]_{\alpha; \bar{\Omega}}$$

$C^{k, \alpha}(\bar{\Omega})$ é um espaço de Banach.

Por simplicidade, vamos escrever

$$C^{0, \alpha}(\bar{\Omega}) = C^\alpha(\bar{\Omega}) \quad \text{e} \quad C^{k, 0}(\bar{\Omega}) = C^k(\bar{\Omega}).$$

Com essa notação, podemos considerar os espaços de classe $C^{k, \alpha}$, com $0 \leq \alpha \leq 1$.

3 GRÁFICOS EM PRODUTOS WARPED $I \times_h M$

Seja $\bar{M} = I \times_h M$ um produto warped, com coordenadas (s, x) , e seja $t = \int_{s_0}^s \frac{d\sigma}{h(\sigma)}$ o parâmetro do fluxo do campo conforme $X = h(s)\partial_s$. Vamos descrever as equações de um gráfico do tipo $t = u(x)$, onde u é uma função suave $u : \Omega \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ e $t \in J = (T_*, T^*)$.

Ponha $F(x) = (u(x), x)$ o gráfico de u . Escolha um referencial de coordenadas locais $\{\partial_i\}_{i=1}^k$ em M e seja $g_{ij}dx^i dx^j$ a expressão de g no co-referencial dual. Seja ainda

$$X_j = F_* \partial_j = \partial_j + u_j \partial_t,$$

onde $du = u_j dx^j$. A métrica gráfico $\hat{g} = F^* \bar{g}$ tem componentes

$$\hat{g}_{ij} = \lambda^2(u) (g_{ij} + u_i u_j), \quad \hat{g}^{ij} = \frac{1}{\lambda^2(u)} \left(g^{ij} - \frac{u^i u^j}{W^2} \right),$$

onde $u^j = g^{jk} u_k$ e

$$W^2 = 1 + u^j u_j = 1 + |\nabla u|^2.$$

Seja Φ_t o fluxo do campo ∂_t . O vetor normal apontando para cima escreve-se

$$\nu = \frac{1}{\lambda(u)W} (\partial_t - u^j \partial_j) = \frac{1}{\lambda(u)W} (\partial_t - (\Phi_u)_* \nabla u)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \lambda(u)W \text{II}(\partial_i, \partial_j) &= \lambda(u)W \bar{g}(\bar{\nabla}_{X_i} X_j, \nu) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{X_i} X_j, \partial_t) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{X_i} X_j, (\Phi_u)_* \nabla u) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_j + u_i \bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_j + u_j \bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_t + (\partial_{ij}^2 u) \partial_t + u_i u_j \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_t, \partial_t) \\ &\quad - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_j + u_i \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_j + u_j \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_t + (\partial_{ij}^2 u) \partial_t + u_i u_j \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_t, (\Phi_u)_* \nabla u), \end{aligned}$$

onde vetores e funções são avaliados em $F(x)$. Como ∂_t é conforme e fechado,

$$\bar{\nabla} \partial_t = \rho \text{Id} = \frac{\lambda_t}{\lambda} \text{Id}.$$

Além disso,

$$(\Phi_u)_* \nabla u = u^j \partial_j$$

é avaluado em $F(x)$. Para x fixo o slice $M_u = \{t = u(x)\}$ é homotético em M , e portanto

$$(\bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_j)^T = (\Phi_u)_* \nabla_{\partial_i} \partial_j,$$

com ∇ a conexão em (M, g_M) . Segue-se

$$\begin{aligned}\bar{g}(\bar{\nabla}_{\partial_i}\partial_j, \partial_t) &= -\bar{g}(\partial_j, \bar{\nabla}_{\partial_i}\partial_t) = -\frac{\lambda_t(u)}{\lambda(u)}\bar{g}(\partial_j, \partial_i) = -\lambda_t(u)\lambda(u)g_{ij} \\ \bar{g}(\nabla_{\partial_t}\partial_j, \partial_t) &= \bar{g}(\nabla_{\partial_j}\partial_t, \partial_t) = 0 \\ \bar{g}(\bar{\nabla}_{\partial_t}\partial_t, \partial_t) &= \frac{1}{2}\partial_t|\partial_t|^2 = \lambda(u)\lambda_t(u) \\ \bar{g}(\bar{\nabla}_{\partial_i}\partial_j, (\Phi_u)_*\nabla u) &= \bar{g}((\Phi_u)_*\nabla_{\partial_i}\partial_j, (\Phi_u)_*\nabla u) = \lambda^2(u)g_M(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \nabla u) \\ \bar{g}(\bar{\nabla}_{\partial_t}\partial_j, (\Phi_u)_*\nabla u) &= \frac{\lambda_t(u)}{\lambda(u)}\bar{g}(\partial_j, (\Phi_u)_*\nabla u) = \lambda_t(u)\lambda(u)u_j,\end{aligned}$$

o que nos dá

$$\begin{aligned}\lambda(u)W\Pi(\partial_i, \partial_j) &= -\lambda_t(u)\lambda(u)g_{ij} + \lambda^2(u)\partial_{ij}^2u + \lambda(u)\lambda_t(u)u_iu_j \\ &\quad - \lambda^2(u)g_M(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \nabla u) - 2u_iu_j\lambda_t(u)\lambda(u).\end{aligned}$$

Como as componentes u_{ij} de ∇^2u satisfaz

$$u_{ij} = \partial_{ij}^2u - g_M(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \nabla u),$$

obtemos

$$\frac{W\Pi(\partial_i, \partial_j)}{\lambda(u)} = u_{ij} - \frac{\lambda_t(u)}{\lambda(u)}[u_iu_j + g_{ij}].$$

Tomando o traço,

$$\begin{aligned}nH &= \text{Tr}(\Pi) = \left(g^{ij} - \frac{u^i u^j}{W^2}\right) \left(\frac{u_{ij}}{\lambda(u)W} - \frac{\lambda_t(u)}{W\lambda^2(u)}[g_{ij} + u_i u_j]\right) \\ &= \frac{1}{\lambda(u)}\text{div}\left(\frac{\nabla u}{W}\right) - n\frac{\lambda_t(u)}{W\lambda^2(u)},\end{aligned}\tag{14}$$

isto é,

$$\text{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) - \frac{n\rho(u)}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = n\lambda H.$$

A equação do soliton com respeito ao campo ∂_t é, portanto,

$$nH\nu = -\partial_t^\perp = -\bar{g}(\partial_t, \nu)\nu = -\frac{1}{\lambda W}|\partial_t|^2\nu = -\frac{\lambda(u)}{W}\nu.$$

Logo, $F : M \rightarrow I \times_h M$, dada por

$$F(x) = (u(x), x)$$

é um soliton da curvatura média para o campo conforme ∂_t se, e somente se, u satisfaz

$$Q[u] \doteq \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) + \frac{f(u)}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = 0, \quad (15)$$

onde $f(t) = \lambda^2(t) - n\rho(t)$.

Por simplicidade, vamos definir as seguintes quantidades:

$$W_u = \sqrt{1 + |\nabla u|^2},$$

$$\varphi(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}}$$

e

$$\Delta_\varphi u = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{W_u} \right) = \operatorname{div} \left(\frac{\varphi(|\nabla u|) \nabla u}{|\nabla u|} \right).$$

Assim, (15) se escreve da seguinte maneira:

$$Q[u] \doteq \Delta_\varphi u + \frac{f(u)}{W_u} = 0. \quad (16)$$

A equação acima satisfaz o seguintes resultado, conhecido como o princípio da comparação, e o princípio do máximo forte ou de tangência. Esses resultados são fundamentais para as estimativas do próximo capítulo.

Teorema 3.1 (Princípio da Comparação) *Se $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ satisfazem*

$$\begin{cases} \Delta_\varphi u_1 \geq -\frac{f(u_1)}{W_{u_1}} & \text{em } \Omega \\ \Delta_\varphi u_2 \leq -\frac{f(u_2)}{W_{u_2}} & \text{em } \Omega \\ u_1 \leq u_2 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $W_u = \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$ e f é decrescente no intervalo

$$[-\min\{\inf_\Omega u_1, \inf_\Omega u_2\}, \max\{\sup_\Omega u_1, \sup_\Omega u_2\}],$$

então $u_1 \leq u_2$ em Ω .

Este resultado pode ser encontrado em (PUCCI and SERRIN (2007), pag 18, Theorem 2.1.4), (GILBARG and TRUDINGER (1998), pg 263, Theorem 10.1). O teorema de comparação vale ainda quando uma das soluções é somente Lipschitz. Portanto, podemos aplicar o referido resultado para o caso em que uma das funções é uma função

suave da função distância. Para este resultado o leitor poderá consultar (PUCCI and SERRIN (2007), pag 64, Theorem 3.5.4).

Faremos ainda o uso do seguinte resultado conhecido como princípio do máximo forte ou princípio de tangência. Este resultado também pode ser encontrado em PUCCI and SERRIN (2007), desta vez na página 16, Teorema 2.1.3.

Teorema 3.2 (Princípio de Tangência) *Sejam $u, v \in C^2(\Omega)$ satisfazendo*

$$Q[u] \geq Q[v].$$

Se $u \leq v$ em Ω e $u = v$ em algum ponto $x_0 \in \Omega$, então $u \equiv v$ em Ω .

Primeiramente, queremos resolver o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Q[u] = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = \phi & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

para uma função $\phi : \partial\Omega \rightarrow J$ contínua. Depois iremos supor que \bar{M} tem um bordo assintótico, ou seja, que o intervalo J não é a reta real. A menos de sinal, iremos supor que $J = (T_*, T^*)$ com $T_* > -\infty$ e iremos resolver o problema de Dirichlet no infinito

$$\begin{cases} Q[u] = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = T_* & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Exemplos típicos são gráficos em \mathbb{H}^{n+1} fibrado por horoesferas e hiperesferas.

Para resolver o problema de Dirichlet, faremos algumas hipóteses sobre a função $f(t) = \lambda^2(t) - n\rho(t)$, chamada de “função soliton” em (ALÍAS, LIRA, and RIGOLI (2020)). Referindo-se a variável s do produto warped, observe que $\tilde{f}(s) \doteq f(t(s))$ satisfaz

$$\tilde{f}(s) = h^2(s) - nh_s(s).$$

As hipóteses são as seguintes.

(H_1) $f(t) \geq 0$, $f'(t) \leq 0$ em (T_*, T_1) para um $T_1 \geq T_*$.

(H_2) Se $T_1 < +\infty$, então $f(T_1) = 0$.

A hipótese H_2 implica que a função $u \equiv T_1$ é uma solução constante do fluxo. Já a hipótese H_1 possibilita o uso do teorema de comparação (3.1).

Exemplo 3.1 *Escolhendo a normalização da seção (2.3) temos os seguintes exemplos*

- Se $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R} \times_{e^{-s}} \mathbb{R}^n$, a função

$$\tilde{f}(s) = e^{-2s} + ne^{-s}$$

satisfaz $\tilde{f} \geq 0$ e $\tilde{f}_s \leq 0$ em $(-\infty, +\infty)$. Portanto, as hipóteses H_1 e H_2 são satisfeitas em $(T_*, +\infty)$.

- Se $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R} \times_{\cosh s} \mathbb{H}^n$, então as funções

$$\tilde{f}(s) = \cosh^2(s) - n \sinh(s) \quad e \quad \tilde{f}_s(s) = \cosh(s)(2 \sinh(s) - n)$$

satisfazem as hipóteses H_1 e H_2 para $s \in \left(-\infty, \operatorname{arcsinh} \left(\frac{n - \sqrt{n^2 - 4}}{2} \right)\right]$.

Nosso primeiro resultado garante a solubilidade do Problema de Dirichlet se $\partial\Omega$ tem curvatura média não negativa com respeito ao vetor normal unitário apontando para dentro.

Teorema 3.3 *Seja $\Omega \Subset M^n$ um domínio com bordo C^3 . Suponha que $\operatorname{Ric} \geq (n-1)\kappa^2$ em Ω , com $\kappa \geq 0$ e que a curvatura média de $\partial\Omega$ satisfaz*

$$\begin{cases} H > 0 & \text{se } \kappa = 0, \\ H \geq \kappa & \text{se } \kappa > 0. \end{cases}$$

Suponha que a função $f(t) = \lambda^2(t) - n\rho(t)$ satisfaz as hipóteses H_1 e H_2 . Então, para toda função contínua $\phi : \partial\Omega \rightarrow (T_, T_1)$, existe uma solução de*

$$\begin{cases} Q[u] = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = \phi & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (17)$$

Prova: A equação $Q[u] = 0$ escreve-se como

$$\Delta_\varphi u = -\frac{f(u)}{W_u}.$$

A existência da solução u , como usual, é mostrada via método da continuidade, o qual descrevemos a seguir.

Seja $\theta \in (T_*, T_1)$ uma constante. Vamos mergulhar o problema de Dirichlet

(17) numa família de problemas

$$\begin{cases} Q_t[u] = \Delta_\varphi u + t \frac{f(u)}{W_u} = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = (1-t)\theta + t\phi & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (18)$$

Considere o conjunto

$$\mathcal{I} = \{t \in [0, 1]; \exists u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \text{ tal que } Q_t(u) = 0 \text{ e } u|_{\partial\Omega} = (1-t)\theta + t\phi\}.$$

Note que $\mathcal{I} \neq \emptyset$, pois $u = \theta$ é uma solução quando $t = 0$. Se mostrarmos que \mathcal{I} é aberto e fechado em $[0, 1]$, por conexidade, $\mathcal{I} = [0, 1]$ e, portanto, está garantida a existência das soluções de todos os problemas em (18), em particular, mostramos que existe solução para o problema de Dirichlet (17).

i) \mathcal{I} é aberto.

Dado $t_0 \in \mathcal{I}$, precisamos mostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0, 1] \subset \mathcal{I}.$$

Para mostrar isso, usaremos o Teorema da Aplicação Implícita. Tome uma extensão $\phi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ e construa a aplicação

$$F : C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \times [0, 1] \rightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \times C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$$

dada por

$$F(u, t) = (Q_t(u), (1-t)\theta + t\phi - u).$$

Observe que $t_0 \in \mathcal{I}$ se, e somente se, $F(u_0, t_0) = (0, 0)$ e que F é de classe C^1 , pois $Q_t(u)$ também o é. Logo, basta mostrar que a derivada de F em relação a u no ponto (u_0, t_0) é um isomorfismo e pelo Teorema da Aplicação Implícita, garantiremos a existência de uma vizinhança aberta $U \subset C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, com $u_0 \in U$, e de uma função de classe C^1

$$\xi : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow U$$

tal que $F(\xi(t), t) = (0, 0)$, para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$; isso implica que \mathcal{I} é aberto em $[0, 1]$. Vamos mostrar que

$$\frac{\partial F}{\partial u} \Big|_{(u_0, t_0)} : C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \times C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$$

é um isomorfismo.

Ora,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u} \Big|_{(u_0, t_0)}(h) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} F(u_0 + sh, t_0) \\
&= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (Q_t(u_0 + sh), (1-t)\theta + t_0\phi - u_0) \\
&= \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} Q_t(u_0 + sh), -h \right).
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} Q_{t_0}(u + sh) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left(\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u + s\nabla h}{\sqrt{1 + |\nabla u + s\nabla h|^2}} \right) + \frac{f(u + sh)}{\sqrt{1 + |\nabla u + s\nabla h|^2}} \right) \\
&= \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u + s\nabla h}{\sqrt{1 + |\nabla u + s\nabla h|^2}} \Big|_{s=0} - \frac{\langle \nabla u + s\nabla h, \nabla h \rangle (\nabla u + s\nabla h)}{(1 + |\nabla u + s\nabla h|^2)^{\frac{3}{2}}} \Big|_{s=0} \right) \\
&\quad + \frac{f'(u + sh)h}{\sqrt{1 + |\nabla u + s\nabla h|^2}} \Big|_{s=0} - \frac{f(u + sh)\langle \nabla u + s\nabla h, \nabla h \rangle}{(1 + |\nabla u + s\nabla h|^2)^{\frac{3}{2}}} \Big|_{s=0} \\
&= \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} - \frac{\langle \nabla u, \nabla h \rangle \nabla u}{(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + \frac{f'(u)h}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} - \frac{f(u)\langle \nabla u, \nabla h \rangle}{(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\Delta h}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} - \frac{\langle \nabla u, \nabla h \rangle}{(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\nabla^2 h(\nabla u, \nabla u)}{(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad - \langle \nabla u, \nabla h \rangle \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + \frac{f'(u)h}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} - \frac{f(u)\langle \nabla u, \nabla h \rangle}{(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \left(\frac{g_{ij}}{W_u} - \frac{u_i u_j}{W_u^3} \right) h_{ij} + b_u^i h_i + \frac{f'(u)h}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}},
\end{aligned}$$

para um vetor $b_u = b_{ii} e_i$ dependendo de u . Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u}(h) \Big|_{(u_0, t_0)} &= \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} Q_{t_0}(u_0 + sh), -h \right) \\
&= \left(\left(\frac{g_{ij}}{W_{u_0}} - \frac{u_i u_j}{W_{u_0}^3} \right) h_{ij} + b_{u_0}^i h_i + \frac{f'(u_0)h}{\sqrt{1 + |\nabla u_0|^2}}, -h \right).
\end{aligned}$$

Mostremos que $\frac{\partial F}{\partial u}$ é injetiva e sobrejetiva.

Queremos resolver $\frac{\partial F}{\partial u}(h) \Big|_{(u_0, t_0)} = (0, 0)$, isto é,

$$\begin{cases} \left(\frac{g_{ij}}{W_{u_0}} - \frac{u_i u_j}{W_{u_0}^3} \right) h_{ij} + b_{u_0}^i h_i + \frac{f'(u_0)h}{\sqrt{1 + |\nabla u_0|^2}} = 0 & \text{em } \Omega, \\ h = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (19)$$

Primeiramente observe que, como u_0 resolve

$$\begin{cases} Q_t(u_0) = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = (1-t)\theta + t_0\phi & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (20)$$

e $u_1 = T_1$ é solução, pelos hipóteses H_1, H_2 e teorema de comparação temos que $u_0 \leq T_1$ e $f'(u_0(x)) \leq 0$ para todo $x \in \Omega$. A teoria Elíptica garante que (19) tem somente a solução $h = 0$. A teoria de Fredholm, então, garante que $\frac{\partial F}{\partial u} \Big|_{(u_0, t_0)}$ é injetivo. Pelo Teorema da

Aplicação Aberta, $\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^{-1}$ é contínua.

i) \mathcal{I} é fechado.

Enquanto que abertura de \mathcal{I} ocorre sempre que Ω é um domínio limitado de classe $C^{2,\alpha}$, o fechamento de \mathcal{I} só vai ocorrer mediante hipóteses sobre o domínio e sobre o dado de bordo. Essas hipóteses são de natureza geométrica e envolvem H , a dimensão da variedade, a curvatura média do bordo de Ω , e a regularidade do dado de bordo ϕ .

Tome uma sequência $\{t_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{I}$ com $t_k \rightarrow \bar{t} \in [0, 1]$. O objetivo é mostrar que $\bar{t} \in \mathcal{I}$. Temos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $u_k \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} Q_{t_k}(u_k) = 0 & \text{em } \Omega, \\ u_k = (1-t_k)\theta + t_k\phi & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Isto é, para cada sequência $\{t_k\} \subset \mathcal{I}$ existe uma sequência corresponde $\{u_k\}$ satisfazendo (18). Suponha por enquanto que $\|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}$ é limitada. Então, por compacidade, temos que, a menos de subsequência, $u_k \rightharpoonup \bar{u}$ em $C^{2,\beta}(\bar{\Omega})$, $\forall \beta < \alpha$, e além disso, $\bar{u} \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ e $t_k \rightharpoonup t$ em \mathbb{R} . Como a aplicação

$$F : C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \times [0, 1] \rightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \times C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$$

dada por

$$F(u, t) = (Q_t(u), (1-t)\theta + t\phi - u)$$

é contínua, vale que

$$F(\bar{u}, \bar{t}) = F(\lim_k(u_k, t_k)) = \lim_k F(u_k, t_k) = \lim_k Q_{t_k} H(u_k) = 0,$$

ou seja,

$$Q(\bar{u}) = 0 \text{ em } \Omega$$

e

$$\bar{u} = (1 - t)\theta + t\phi \text{ em } \partial\Omega.$$

Logo, $\bar{t} \in \mathcal{I}$, o que prova o fechamento de \mathcal{I} . Assim, para concluir a prova do Teorema (3.3), precisamos de estimativas para $\|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}$.

Observação 3.1 *Pela teoria elíptica temos o seguinte:*

- Por LADYZHENSKAYA and URAL'TSEVA (1968),
se $\|u_k\|_{C^1} < C$, então $\|u_k\|_{C^{1,\alpha}} < C'$.
- Por Shauder
se $\|u_k\|_{C^{1,\alpha}} < C'$, então $\|u_k\|_{C^{2,\alpha}} < C''$.

Portanto, para estimar a norma $\|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}$, basta estimar $\|u_k\|_{C^1}$.

3.1 Estimativas A Priori

Nesta seção faremos o uso de barreiras e do princípio do máximo para o gradiente, para inferir estimativas uniformes a priori para a norma C^1 das soluções do problema (3.3). Faremos isso em três etapas. A saber,

- Estimamos $\|u\|_{C^0(\Omega)}$ via o princípio do máximo;
- estimamos $\|\nabla u\|_{C^0(\partial\Omega)}$ usando barreiras dependendo de $\|u\|_{C^0(\Omega)}$;
- e, finalmente, estimamos $\|\nabla u\|_{C^0(\Omega)}$ dependendo de $\|u\|_{C^0(\Omega)}$ e $\|\nabla u\|_{C^0(\partial\Omega)}$, via o princípio do máximo.

Ou seja, faremos estimativas de altura, estimativas gradiente de bordo e estimativas gradiente interior, respectivamente.

Uma maneira de se obter essas estimativas é construir barreiras. Um modo de obter barreiras é construir subsolução e supersolução para o problema. Barreiras são construídas, em geral, utilizando funções distância aos pontos na fronteira. Algumas referências são LIRA (2012), LIRA and WANDERLEY (2015), DAJCZER, HINOJOSA, and LIRA (2008)

Começamos, então, definindo subsoluções e supersoluções e apresentamos propriedades importantes.

Definição 3.1 *Uma função $v \in C^2(\Omega)$ é dita uma supersolução para o problema $Q[\cdot] = 0$ se $Q[v] \leq 0$. Analogamente, v é dita uma subsolução se $Q[v] \geq 0$.*

A definição a seguir é mais geral, ela engloba uma classe maior de funções.

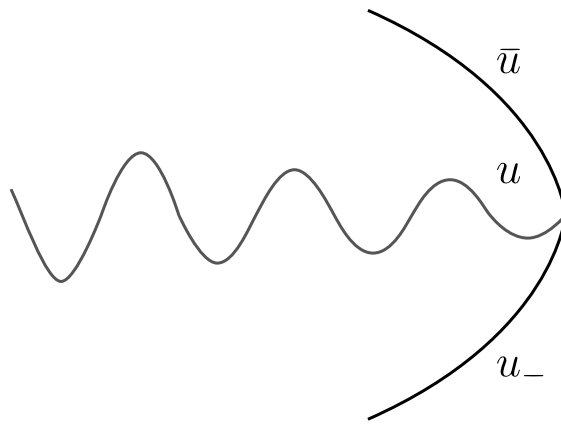
Definição 3.2 *Uma função $v \in C^0(M)$ é dita uma supersolução (resp. subsolução) para $Q[\cdot] = 0$ em M se, dado qualquer aberto limitado $\Omega \subset M$ e dada uma solução u da*

equação em Ω , a condição $u \leq v$ (resp. $u \geq v$) em $\partial\Omega$ implicar em $u \leq v$ (resp. $u \geq v$) em todo Ω .

O princípio do máximo nos dá que toda supersolução é supersolução generalizada. Além disso, esta nova definição nos permite obter boas propriedades.

Proposição 3.1 *Se v_1 e v_2 são supersoluções de $Q[\cdot] = 0$, então $v := \min\{v_1, v_2\}$ é também supersolução. Análogo para o máximo entre subsoluções.*

Prova: Seja Ω um aberto e limitado e u tal que $Q[u] = 0$ em Ω , $u \leq v$ em $\partial\Omega$, então, em particular $u \leq v_1$ e $u \leq v_2$ em $\partial\Omega$ e, portanto $u \leq v_1$ e $u \leq v_2$ em Ω . ■



3.1.1 Estimativa da Altura

Nesta seção, obtemos uma estimativa de altura a priori. Para obter a estimativa a priori nos iremos fazer o uso da técnica de barreiras. Note que como $f(t)$ satisfaz H_1 , a solução $u = c$, onde $c \in (T_*, \inf_{\partial\Omega} \phi)$ é uma constante, é uma subsolução para (17). Vamos construir uma supersolução ω para (17). Pela hipótese (H2), se $T_1 < +\infty$ então $\omega = T_1$ é uma supersolução e, pelo princípio da comparação, $u \leq \omega$ em todo Ω , e a estimativa é trivial. Vamos, portanto, supor que $T_1 = +\infty$, isto é, $f' \leq 0$ e $f \geq 0$ em $(T_*, +\infty)$.

Defina

$$\omega(x) = \|\phi\|_{\infty} + u(r),$$

onde $r(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ e $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}_0^+)$. Vamos calcular $Q[\omega]$.

Note que

$$\begin{aligned} \Delta_{\varphi}\omega &= \varphi'(u')u'' + \varphi(u')\Delta r \\ &= \frac{1}{(1+(u')^2)^{3/2}}u'' + \frac{u'\Delta r}{(1+(u')^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$Q[\omega] = \frac{u''}{(1+(u')^2)^{3/2}} + \frac{u'}{(1+(u')^2)^{1/2}} \Delta r + \frac{f(\omega)}{(1+(u')^2)^{1/2}}$$

e $Q[\omega] \leq 0$ se

$$\frac{u''}{1+(u')^2} + u' \Delta r + f(\omega) \leq 0.$$

Pelo Corolário 2.1 e assumindo que $u' \geq 0$,

$$\begin{aligned} Q[\omega] &= \frac{u''}{1+(u')^2} + u' \Delta r + f(\omega) \\ &\leq \frac{u''}{1+(u')^2} - \delta u' + f(\omega). \end{aligned}$$

Como $\omega \geq 0$ em Ω e usando a hipótese H_1 temos,

$$f(\omega) \leq f(\inf_{\partial\Omega} \phi) := C_\phi, \quad \omega \in [||\phi||_\infty, \infty).$$

Portanto,

$$Q[\omega] \leq \frac{u''}{1+(u')^2} - \delta u' + C_\phi.$$

Agora para $A > 2\text{diam}(\Omega)$ e $b \gg 0$ a ser escolhido mais tarde, defina

$$u(r) = \frac{e^{bA}}{b}(1 - e^{-br})$$

e observe que

$$u'(r) = e^{b(A-r)} \geq e^{b\frac{A}{2}} \quad \text{e} \quad u'' = -bu'.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Q[\omega] &\leq \frac{u''}{1+(u')^2} - \delta u' + C_\phi \\ &= -u' \left(\frac{b}{1+(u')^2} + \delta \right) + C_\phi \\ &= -e^{b(A-r)} \left(\frac{b}{1+e^{2b(A-r)}} + \delta \right) + C_\phi \\ &< -e^{b\frac{A}{2}} \delta + C_\phi. \end{aligned}$$

Assim, se $b > 0$ é suficientemente grande, $Q[\omega] \leq 0$.

■

3.1.2 Estimativa Gradiente de Bordo

Aqui, vamos provar uma estimativa gradiente a priori para u solução do problema de Dirichlet 17. Vamos construir barreiras da forma $u := \omega + \phi$ ao longo da vizinhança tubular Ω_ε de $\partial\Omega$, $\omega = \psi(r(x))$ para alguma função real ψ a ser escolhida e r é a função distância, $r = \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Consideraremos coordenadas de Fermi (r, y) numa vizinhança Ω_ε de $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} \psi : [0, \varepsilon] \times \partial\Omega &\rightarrow \Omega_\varepsilon \\ (r, y) &\rightarrow \exp_y(r\nabla r(y)). \end{aligned}$$

Extendemos ϕ em Ω_ε como sendo $\phi(r, y) \doteq \phi(y)$. Fixamos c_1 e c_2 tais que

$$\|\nabla^2 r\|_\infty \leq c_1 \quad \text{em} \quad \Omega_\varepsilon$$

$$\|\nabla\phi\|_\infty + n\|\nabla^2\phi\|_\infty \leq c_2 \quad \text{em} \quad \Omega_\varepsilon.$$

Temos que

$$Q[u] \doteq \text{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) + \frac{f(u)}{W}.$$

E assim,

$$\begin{aligned} Q[u] &= \text{div} \left(\frac{\nabla u}{W} \right) + \frac{f(u)}{W} \\ &= \frac{1}{W} \left[\Delta u - \nabla^2 u \left(\frac{\nabla u}{W}, \frac{\nabla u}{W} \right) + f(u) \right] \\ &= \frac{1}{W} \left[\psi'' + \psi' \Delta r + \Delta\phi - \psi'' \langle \nabla r, \frac{\nabla u}{W} \rangle^2 - \psi' \nabla^2 r \left(\frac{\nabla u}{W}, \frac{\nabla u}{W} \right) \right. \\ &\quad \left. - \nabla^2\phi \left(\frac{\nabla u}{W}, \frac{\nabla u}{W} \right) + f(u) \right] \end{aligned}$$

Como, $\nabla u = \nabla(\omega + \phi) = \psi' \nabla r + \nabla\phi$ and $\nabla\phi \perp \nabla r$,

$$\begin{aligned} \langle \nabla r, \frac{\nabla u}{W} \rangle &= \frac{1}{W} \langle \nabla r, \psi' \nabla r + \nabla\phi \rangle = \frac{\psi'}{W} \\ \left| \nabla^2 r \left(\frac{\nabla u}{W}, \frac{\nabla u}{W} \right) \right| &= \left| \nabla^2 r \left(\frac{\nabla u}{W}, \frac{\nabla u}{W} \right) \right| = \left| \frac{1}{W^2} \nabla^2 r(\nabla u, \nabla u) \right| \leq \frac{c_1 c_2}{W^2} = \frac{c_3}{W^2} \end{aligned}$$

e como $\left\| \frac{\nabla u}{W} \right\|_\infty \leq 1$. Temos ainda que

$$\left| \nabla^2\phi \left(\frac{\nabla u}{W}, \frac{\nabla u}{W} \right) \right| \leq \|\nabla^2\phi\|^2 \leq c_2,$$

além disso, $|\Delta\phi| \leq c_2$ e por hipótese $\sup_{\inf_{\partial\Omega} \phi, +\infty)} f(t) \leq c_\phi$. Assim temos,

$$Q[\omega + \phi] \leq \frac{1}{W} \left[\psi'' + \psi\Delta r + c_2 - \psi'' \frac{(\psi')^2}{W^2} + \psi' \frac{c_3}{W^2} + c_2 + c_\phi \right]$$

Como, $\Delta r < -\delta$ pelo Corolário 2.1 e supondo $\phi' \geq 0$, obtemos

$$W^3 Q[\omega + \phi] \leq W^2 \psi'' - W^2 \psi' \delta - \psi'' (\psi')^2 + \psi' c_3 + W^2 c,$$

para uma constante $c > 0$ dependendo somente de n , ϕ e Ω_ε . Agora, defina

$$\psi(r) = \mu \ln(1 + Kr),$$

para constantes $\mu > 0$ e $K > 0$ a serem escolhidas mais tarde. Temos que

$$\psi'(r) = \frac{\mu K}{1 + Kr} \quad \text{e} \quad \psi''(r) = -\frac{1}{\mu} (\psi')^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} W^3 Q[\omega + \phi] &\leq W^2 \psi'' - W^2 \psi' \delta - \psi'' (\psi')^2 + \psi' c_3 + W^2 c \\ &= -W^2 \frac{1}{\mu} (\psi')^2 - W^2 \psi' \delta + \frac{1}{\mu} (\psi')^4 + \psi' c_3 + W^2 c \\ &= -\frac{(\psi')^2}{\mu} (W^2 - (\psi')^2) - W^2 \psi' \delta + \psi' c_3 + W^2 c \\ &= -\frac{(\psi')^2}{\mu} (1 + |\nabla\phi|^2) - (W^2 \delta - c_3) \psi' + W^2 c. \end{aligned}$$

Pondo $\beta = 1 + |\nabla\phi|^2$, temos que $W^2 = \beta + (\psi')^2$ e

$$\begin{aligned} W^3 Q[\omega + \phi] &\leq -\frac{(\psi')^2}{\mu} \beta - [(\beta + (\psi')^2) \delta - c_3] \psi' + (\beta + (\psi')^2) c \\ &= \left(-\frac{\beta}{\mu} - \delta + c \right) (\psi')^2 - (\beta \delta - c_3) \psi' + \beta c \\ &\leq \left(-\frac{\beta}{\mu} - \delta + c \right) (\psi')^2 - B \psi' + D, \end{aligned}$$

onde, $B := \beta \delta - c_3$ e $D = \beta c$ são funções limitadas.

Vamos escolher μ de tal maneira que $\mu \rightarrow 0$ como $K \rightarrow \infty$, isto é,

$$\mu = \frac{\alpha}{\ln(1 + K^2)},$$

aqui α é tal que $\alpha > \|u\|_{C^0}$ e sabemos pela estimativa de altura, que $\|u\|_{C^0}$ é unifor-

memente limitado. Portanto, α pode ser escolhido independentemente de u . Com isso, escolhendo K suficientemente grande, assegura que $Q[\omega + \phi] < 0$ em uma pequena vizinhança tubular Ω_ε de $\partial\Omega$. Portanto $\bar{u} = \omega + \phi$ é uma barreira superior localmente definida para o problema de Dirichlet (17). Similarmente, como $f(t) \geq c''_\phi$ em $[\inf_{\partial\Omega} \phi, \|u\|_{C^0}]$, a função $\underline{u} = \max\{\inf_{\partial\Omega} \phi, -\omega + \phi\}$ é uma barreira inferior para (17), sendo o máximo de duas subsoluções.

3.1.3 Estimativa Gradiente Interior

Nesta seção, estabelecemos uma estimativa a priori global para o gradiente. Iremos utilizar, como usual, o princípio do máximo aplicado a função $W = \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$. Seja X um campo de vetores. Vamos definir o operador com peso

$$\Delta_{X^T}(\cdot) = \Delta(\cdot) - \langle X^T, \nabla(\cdot) \rangle,$$

onde X^T é a projeção tangente em \bar{M} . Suponha que $M^n \rightarrow (\bar{M}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um soliton para o campo vetorial conforme fechado X em \bar{M} , isto é, $nH = -\langle X, \nu \rangle$. Pondo $X = \partial_t$ temos a seguinte expressão para $\Delta_{X^T} \langle X, \nu \rangle$, com $\nu = \frac{1}{\lambda(u)W_u}(\partial_t - (\Phi_u)_*(\nabla u))$:

Lema 3.1 *Nas condições acima, vale a seguinte desigualdade*

$$\Delta_{X^T} \langle X, \nu \rangle \leq \langle X, \nu \rangle \left[(\rho - |\text{II}|^2) + \|\hat{\nabla} u\|^2 (n-1)(\kappa^2 + \rho^2 - \rho_t) \right], \quad (21)$$

onde $\hat{\nabla}$ e $\|\cdot\|$ são, respectivamente, o gradiente e a norma no gráfico.

Prova: Seja $\{e_i\}$ um referencial ortonormal. Diferenciando a igualdade $nH = -\langle X, \nu \rangle$ e usando a identidade de Codazzi, temos

$$e_i e_i \langle X, \nu \rangle = -e_k (nH) \langle X, e_k \rangle - \bar{R}(\nu, e_i, e_i, e_k) \langle X, e_k \rangle - \rho \text{II}(e_i, e_k) \langle e_i, e_k \rangle - \text{II}(e_i, e_k) \langle X, \text{II}(e_i, e_k) \nu \rangle$$

Como

$$-e_n (nH) \langle X, e_k \rangle = e_k (\langle X, \nu \rangle) \langle X, e_k \rangle = \langle X^T, \nabla \langle X, \nu \rangle \rangle,$$

Obtemos

$$\Delta_{X^T} \langle X, \nu \rangle = -n\rho H - |\text{II}|^2 \langle X, \nu \rangle + \overline{\text{Ric}}(\nu, X^T).$$

Agora,

$$\begin{aligned} \overline{\text{Ric}}(\nu, \partial_t^T) &= \overline{\text{Ric}}(\nu, \partial_t - \langle \partial_t, \nu \rangle \nu) \\ &= \overline{\text{Ric}}(\nu, \partial_t) - \langle \partial_t, \nu \rangle \overline{\text{Ric}}(\nu, \nu) \end{aligned}$$

e

$$\overline{\text{Ricc}}(\partial_t, \partial_t) = h^2(s)\overline{\text{Ricc}}(\partial_s, \partial_s) = h^2(s)\left(-n\frac{h''(s)}{h(s)}\right) = -nh(s)h''(s).$$

Fixe um ponto $p \in M$ e suponha $\partial_j = e_j$ ortonormais no ponto p . Então,

$$\begin{aligned}\overline{\text{Ricc}}(\nu, \partial_t) &= \frac{1}{\lambda(u)W}\overline{\text{Ricc}}(\partial_t, \partial_t) - \frac{1}{\lambda(u)W}\overline{\text{Ricc}}((\Phi_u)_*\nabla u, \partial_t) \\ &= \frac{1}{\lambda(u)W}[-nh(s)h''(s)] \\ &= -\frac{nh''(s)}{W}.\end{aligned}$$

E ainda,

$$\begin{aligned}\overline{\text{Ricc}}(\nu, \nu) &= \frac{1}{\lambda^2(u)W^2} [\overline{\text{Ricc}}(\partial_t, \partial_t) - 2\overline{\text{Ricc}}((\Phi_u)_*\nabla u, \partial_t) + \overline{\text{Ricc}}((\Phi_u)_*\nabla u, (\Phi_u)_*\nabla u)] \\ &= \frac{1}{\lambda^2(u)W^2} [-nh(s)h''(s) + u^i u^j \overline{\text{Ricc}}(h(s)\bar{e}_i, h(s)\bar{e}_j)] \\ &= \frac{1}{\lambda^2(u)W^2} \left[-nh(s)h''(s) + h^2(s)u^i u^j \left(\frac{1}{h^2(s)} \text{Ricc}_{ij} - (n-1) \left(\frac{h'}{h} \right)^2 \delta_{ij} - \frac{h''}{h} \delta_{ij} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\lambda^2(u)W^2} [-nh(s)h''(s) + \text{Ricc}(\nabla u, \nabla u) - (n(h')^2 + h''h)\|\nabla u\|^2].\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\overline{\text{Ricc}}(\nu, \partial_t^T) &= \overline{\text{Ricc}}(\nu, \partial_t) - \frac{1}{\lambda(u)W} |\partial_t|^2 \overline{\text{Ricc}}(\nu, \nu) \\ &= -\frac{nh''}{W} - \frac{h}{W} \left[\frac{1}{h^2 W^2} \{ -nhh'' + \text{Ricc}(\nabla u, \nabla u) - [(n-1)(h')^2 + h''h]\|\nabla u\|^2 \} \right] \\ &= -\frac{nh''}{W} + \frac{nh''}{W^3} - \frac{1}{hW^3} \text{Ricc}(\nabla u, \nabla u) + \frac{1}{hW^3} [(n-1)(h')^2 + h''h]\|\nabla u\|^2 \\ &= -\frac{nh''}{W^3}(W^2 - 1) - \frac{1}{hW^3} \text{Ricc}(\nabla u, \nabla u) + \frac{1}{hW^3} [(n-1)(h')^2 + h''h]\|\nabla u\|^2 \\ &\leq -\frac{nh''}{W^3}(W^2 - 1) + \frac{1}{hW^3}(n-1)\kappa^2\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{hW^3} [(n-1)(h')^2 + h''h]\|\nabla u\|^2,\end{aligned}$$

onde ∇u é o gradiente de u em M e usamos que $\text{Ricc}(\nabla u, \nabla u) \geq -(n-1)\kappa^2\|\nabla u\|^2$.

Então,

$$\begin{aligned}\Delta_{X^T} \langle X, \nu \rangle &= -n\rho H - |\text{II}|^2 \langle X, \nu \rangle + \overline{\text{Ricc}}(\nu, X^T) \\ &\leq (\rho - |\text{II}|^2) \langle X, \nu \rangle + \frac{\|\nabla u\|^2}{W^3} \left\{ -nh'' + \frac{1}{h}(n-1)\kappa^2 + \frac{1}{h}((n-1)(h')^2 + hh'') \right\}.\end{aligned}$$

Para concluir, vamos fazer as seguintes observações. Primeiro, note que $\|\nabla u\|^2$ pode ser

relacionado com $\|\hat{\nabla}u\|$. De fato,

$$\begin{aligned}\|\hat{\nabla}u\|^2 &= \hat{g}^{ij}u_iu_j = \frac{1}{\lambda^2} \left(g^{ij} - \frac{u^i u^j}{W^2} \right) u_i u_j \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \left(\|\nabla u\|^2 - \frac{\|\nabla u\|^4}{W^2} \right) = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\|\nabla u\|^2}{W^2}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\nabla u\|^2 = \lambda^2 W^2 \|\hat{\nabla}u\|^2.$$

Segundo, sendo $h(s) = \lambda(t(s))$, observe que

$$\begin{aligned}h'(s) &= \lambda_t t'(s) = \frac{\lambda_t}{\lambda} = \rho \\ h''(s) &= \rho_t t'(s) = \frac{\rho_t}{\lambda}.\end{aligned}$$

E por último,

$$\langle X, \nu \rangle = \langle \partial_t, \nu \rangle = \frac{|\partial_t|^2}{\lambda W} = \frac{\lambda}{W},$$

donde concluimos

$$\frac{\lambda^2}{W} = \lambda \langle \partial_t, \nu \rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\Delta_{X^T} \langle X, \nu \rangle &\leq (\rho - |\text{II}|^2) \langle X, \nu \rangle + \frac{\|\nabla u\|^2}{W^3} \left\{ -nh'' + \frac{1}{h}(n-1)\kappa^2 + \frac{1}{h}((n-1)(h')^2 + hh'') \right\} \\ &= (\rho - |\text{II}|^2) \langle X, \nu \rangle + \frac{\lambda^2}{W} \|\hat{\nabla}u\|^2 \left\{ -n\frac{\rho_t}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}(n-1)\kappa^2 + \frac{1}{\lambda}((n-1)\rho^2 + \rho_t) \right\} \\ &= (\rho - |\text{II}|^2) \langle X, \nu \rangle + \lambda \langle X, \nu \rangle \|\hat{\nabla}u\|^2 \left\{ -\frac{n-1}{\lambda}(-\kappa^2 - \rho^2 + \rho_t) \right\} \\ &= \langle X, \nu \rangle \left[(\rho - |\text{II}|^2) + \|\hat{\nabla}u\|^2 (n-1)(\kappa^2 + \rho^2 - \rho_t) \right],\end{aligned}$$

ou seja,

$$\Delta_{X^T} \langle X, \nu \rangle \leq \langle X, \nu \rangle \left[(\rho - |\text{II}|^2) + \|\hat{\nabla}u\|^2 (n-1)(\kappa^2 + \rho^2 - \rho_t) \right], \quad (22)$$

como queríamos mostrar. \square

Pelas estimativas de altura e gradiente, o termo entre colchetes em (22) é limitado por alguma constante \tilde{C} , dependendo da estimativa gradiente e de $\inf \phi$. Consequentemente

$$\Delta_{X^T} \langle X, \nu \rangle \leq \langle X, \nu \rangle \tilde{C},$$

sendo $\langle X, \nu \rangle > 0$. Das quantidades

$$\nu = \frac{1}{\lambda(u)W_u} (\partial_t - (\Phi_u)_* \nabla u)$$

e

$$W_u = \sqrt{1 + |\nabla u|^2},$$

Obtemos,

$$\langle X, \nu \rangle = \langle \partial_t, \nu \rangle = \frac{\lambda(u)}{W_u} > 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \Delta_{X^T} \left(\frac{W_u}{\lambda(u)} \right) &= \Delta_{X^T} \left(\frac{\lambda}{W_u} \right)^{-1} \\ &= - \left(\frac{\lambda}{W_u} \right)^{-2} \Delta_{X^T} \left(\frac{\lambda}{W_u} \right) + 2 \left(\frac{\lambda}{W_u} \right)^{-3} \left| \nabla \left(\frac{\lambda}{W_u} \right) \right|^2 \\ &\geq - \left(\frac{\lambda}{W_u} \right)^{-2} \left(\frac{\lambda}{W_u} \right) \tilde{C} + 2 \left(\frac{\lambda}{W_u} \right)^{-3} \left| \nabla \left(\frac{\lambda}{W_u} \right) \right|^2 \\ &\geq - \frac{W_u}{\lambda} \tilde{C} + 2 \cdot \frac{\left| \nabla \left(\frac{W_u}{\lambda} \right) \right|^2}{\frac{W_u}{\lambda}}. \end{aligned}$$

Defina $f = \frac{W_u}{\lambda}$. Então,

$$\Delta_{X^T} f \geq -f \tilde{C} + 2 \cdot \frac{|\nabla f|^2}{f}.$$

Considere o operador

$$\mathcal{L}g = \Delta_{X^T} g - 2 \left\langle \frac{\nabla f}{f}, \nabla g \right\rangle.$$

Note que $\mathcal{L}f \geq -f \tilde{C}$. Seja $\eta \geq 0$ uma função cut-off a ser escolhida mais tarde, e considere $\varphi = \eta f$. Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\varphi &= \Delta_{X^T} \varphi - 2 \left\langle \frac{\nabla f}{f}, \nabla \varphi \right\rangle \\ &= \Delta_{X^T} (\eta f) - 2 \left\langle \frac{\nabla f}{f}, \nabla (\eta f) \right\rangle \\ &= \eta \Delta_{X^T} f + f \Delta_{X^T} \eta - 2\eta \frac{|\nabla f|^2}{f} \\ &= \eta \left(\Delta_{X^T} f - 2 \frac{|\nabla f|^2}{f} \right) + f \Delta_{X^T} \eta \\ &\geq f [\Delta_{X^T} \eta - \tilde{C} \eta]. \end{aligned}$$

Agora, considere um ponto x_0 tal que $\text{dist}(x_0, \bar{\Omega}) = \frac{\text{diam}(\Omega)}{2}$ e a função

$$\eta(x) = e^{-Ar(x)},$$

onde $r(x)$ é a função distância de x_0 e seja $\bar{\kappa} \geq \kappa$ de maneira que

$$\text{Ric} \geq -(m-1)\bar{\kappa}^2$$

em $B_{\frac{3\text{diam}(\Omega)}{2}}(x_0)$. Pela Comparação do Laplaciano,

$$\Delta r \leq (m-1)\kappa \coth(\kappa r) \leq (m-1)\kappa \coth\left(\kappa \frac{\text{diam}(\Omega)}{2}\right) \doteq c_k \quad \text{em } \Omega.$$

Então,

$$\begin{aligned} \Delta \eta &= \Delta(e^{-Ar}) = -Ae^{-Ar} \Delta r + A^2 e^{-Ar} \\ &= [-A\Delta r + A^2]e^{-Ar} \\ &\geq [A^2 - Ac_k]e^{-Ar}, \end{aligned}$$

em Ω . Assim,

$$\begin{aligned} \Delta_{X^T} \eta &= \Delta \eta - \langle X^T, \nabla \eta \rangle \\ &\geq (A^2 - Ac_k)e^{-Ar} - \langle X^T, -Ae^{-Ar} \nabla r \rangle \\ &= (A^2 - Ac_k)e^{-Ar} - Ae^{-Ar} |X| \\ &= (A^2 - Ac_k)e^{-Ar} - Ae^{-Ar} \cdot \lambda^2 \\ &\geq (A^2 - Ac_k)e^{-Ar} - Ae^{-Ar}(C_1), \end{aligned}$$

onde a constante uniforme C_1 é limitante superior para $\lambda = \lambda(\omega)$. Consequentemente,

$$\Delta_{X^T} \eta - \tilde{C} \eta \geq e^{-Ar} (-Ac_k - AC_1 + A^2).$$

Escolhendo A suficientemente grande, podemos garantir que $\Delta_{X^T} \eta - \tilde{C} \eta \geq 0$ em Ω . Portanto $\mathcal{L}\varphi \geq 0$ em Ω . Pelo princípio do máximo e pela definição de φ ,

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} \left(e^{-Ar(x)} \frac{W_u(x)}{\lambda(u)} \right) &\leq \sup_{\partial\Omega} \left(e^{-Ar(x)} \frac{W_u(x)}{\lambda(u)} \right) \\ &\leq e^{-A \frac{\text{diam}(\Omega)}{2}} \bar{C}_1 \sqrt{1 + \max_{\partial\Omega} |\nabla u|^2}. \end{aligned}$$

Usando que $\forall x \in \Omega$,

$$e^{-Ar(x)} \frac{W_u(x)}{\lambda(u)} \geq e^{-A[\text{diam}(\Omega) + \text{dist}(x_0, \Omega)]} \frac{W_u(x)}{\lambda(u)} \geq e^{-3A \frac{\text{diam}(\Omega)}{2}} \frac{W_u(x)}{\lambda(u)},$$

obtemos

$$W_u(x) \leq e^{A \text{diam}(\Omega)} C_1 \sqrt{1 + \max_{\partial\Omega} |\nabla u|^2},$$

o que prova a estimativa gradiente interior. Isso conclui a prova do Teorema 3.3 ■

Observação 3.2 *Do teorema de comparação segue a unicidade do Teorema acima.*

Agora, estamos em condições para resolver o problema de Dirichlet no infinito.

Teorema 3.4 *Nas hipóteses do Teorema(3.3), suponhamos que $T_* > -\infty$. Então, existe uma única solução u de*

$$\begin{cases} Q[u] = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = T_* & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (23)$$

Prova: Fixado $\varepsilon > 0$ seja u_ε solução de

$$\begin{cases} \Delta_\varphi u_\varepsilon = -\frac{f(u_\varepsilon)}{\sqrt{1 + |\nabla u_\varepsilon|^2}} & \text{em } \Omega, \\ u_\varepsilon = T_* + \varepsilon & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (24)$$

Pelo teorema de comparação, $u_\varepsilon \leq u_{\varepsilon'}$ se $\varepsilon < \varepsilon'$. Queremos mostrar que o limite

$$u(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x)$$

satisfaz $u > T_*$ em Ω . De fato, mostraremos que para todo $K \subset \Omega$ compacto, existe um δ_K^* tal que $u > T_* + \delta_K$ em K . Isto é, u é localmente limitada por baixo.

Fixe $x_0 \in \Omega$ e $R > 0$ e seja $r = \text{dist}(x, x_0)$. Vamos construir uma subsolução para o problema de Dirichlet (24) da forma $\omega = u(r)$ com $u' < 0$, e $(0, R]$ e $u'(0) = 0$. Note que

$$\Delta_\varphi u = \varphi'(u)u'' + \varphi(u)\Delta r$$

e

$$\Delta r \leq (m-1) \frac{cn_k(r)}{sn_k(r)}.$$

Para $c \in (-1, 0)$ fixado, e pondo $v(r) = (sn_k r)^{n-1}$, vamos considerar o problema de EDO

$$\begin{cases} (v\varphi(u'))' = c.v \\ u'(0) = 0, u(R) = T_* \quad \text{em } [0, R] \end{cases} . \quad (25)$$

Suponhamos que $R \in (0, 1)$. Então, a solução de (25) existe é dada por

$$u_R(r) = T_* + \int_r^R \varphi^{-1} \left(\frac{|c|}{v(t)} \int_0^t v(s) ds \right) dt.$$

Note que sendo $|c| \leq 1$ e $v(t)$ crescente,

$$\sqrt{1 + |\nabla u_R|^2} \leq \sqrt{1 + (\varphi^{-1}(|c|R))^2} \leq \sqrt{1 + (\varphi^{-1}(R))^2},$$

onde $\varphi^{-1}(R)$ existe, pois $R \in (0, 1)$. Portanto, u_R é bem definida e

$$\begin{aligned} u_R(r) &= T_* + \int_r^R \varphi^{-1} \left(\frac{|c|}{v(t)} \int_0^t v(s) ds \right) dt \\ &\leq T_* + \int_0^R \varphi^{-1} \left(\frac{1}{v(t)} \int_0^t v(s) ds \right) dt := \delta_R \end{aligned}$$

Uma vez que f é decrescente e não negativa, de $u_R < \delta_R$, concluímos que $f(u_R) \geq f(\delta_R)$.

Defina

$$|c| := \min \left\{ 1, \frac{|f(\delta_R)|}{\sqrt{1 + (\varphi^{-1}(R))^2}} \right\}.$$

Então, pelo teorema de comparação do Laplaciano,

$$\Delta_\varphi u_R \geq c \geq \frac{-f(\delta_R)}{\sqrt{1 + (\varphi^{-1}(R))^2}} \geq \frac{-f(\delta_R)}{\sqrt{1 + |\nabla u_R|^2}} \geq \frac{-f(u_R)}{\sqrt{1 + |\nabla u_R|^2}}$$

e temos que

$$\begin{cases} \Delta_\varphi u_\varepsilon + f(u_\varepsilon) \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u_\varepsilon|^2}} = 0 \\ \Delta_\varphi u_R + f(u_R) \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u_R|^2}} \geq 0 \\ u_\varepsilon \geq u_R = T_* \quad \text{em } \partial B_R(x_0). \end{cases} .$$

Por comparação, $u_\varepsilon \geq u$. Usando estimativas elípticas, veja (GILBARG and TRUDINGER (1998)), $u_\varepsilon \downarrow u > 0$ localmente em $C_{loc}^2(\Omega)$ e, então, u resolve (23).

Para finalizar, vamos mostrar a unicidade em cada problema de Dirichlet com dado assintótico. Sejam u e v soluções de (23). Como a função soliton f é decrescente,

para cada constante positiva c , a função $v + c$ é uma supersolução. Considere o

$$U = \{x; u(x) > v(x) + c\}.$$

Suponha por contradição que o conjunto U seja não-vazio. Aplicando o teorema de comparação a u e $v + c$, obtemos que em U ,

$$u \leq v + c$$

em U . Isso contradiz a definição de U . Portanto, U é vazio e $u \leq v + c$. Fazendo c tender a zero, temos que $u \leq v$. Intercambiando os papéis de u e v , temos que $u = v$. ■

4 TEOREMA TIPO JENKINS-SERRIN

No capítulo anterior, vimos um teorema de existência para o problema de Dirichlet (17). Para demonstração do resultado, a curvatura média $H_{\partial\Omega}$ do bordo de Ω desempenhou um papel fundamental.

O objetivo deste capítulo é mostrar que quando o bordo $\partial\Omega$ de um domínio C^3 apresenta pontos de curvatura negativa, sempre será possível exibir um dado de bordo $\phi \in C^\infty(\partial\Omega)$ tal que o Problema de Dirichlet (17) não admite solução.

Este resultado foi inspirado pelo célebre trabalho de Jenkins-Serrin. Em 1968, no artigo JENKINS and SERRIN (1968), Jenkins e Serrin mostraram, entre outros resultados, que se $\partial\Omega$ apresenta um ponto de curvatura média negativa, é possível exibir um dado de bordo suave ϕ , com norma arbitrariamente pequena, para o qual o problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas

$$\begin{cases} Q[u] = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = \phi & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (26)$$

não tem solução. Mais precisamente eles mostraram:

Teorema 4.1 ((JENKINS and SERRIN, 1968)) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado de classe C^2 . Suponha que existe $p \in \partial\Omega$ tal que $H_{\partial\Omega}(p) < 0$, onde $H_{\partial\Omega}$ é a curvatura média de $\partial\Omega$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\phi \in C^\infty(\partial\Omega)$ com $\sup_{\partial\Omega} |\phi| < \varepsilon$, para a qual o Problema de Dirichlet (26) não tem solução.*

Aqui cabe algumas considerações. Enquanto no resultado de Jenkins-Serrin, é possível encontrar um dado de bordo com norma arbitrariamente pequena, no caso do nosso resultado isso não ocorre.

Teorema 4.2 *Sejam M^n completa, simplesmente conexa e satisfazendo $\operatorname{Sect}^M \leq 0$, isto é, M é uma variedade de Cartan-Hadamard, e seja $\Omega \subseteq M$ um domínio C^3 . Seja f uma função satisfazendo a hipótese H_1 com $T_1 = +\infty$, e suponhamos que exista $y \in \partial\Omega$ tal que $H(y) < 0$. Então, existe $\phi : \partial\Omega \rightarrow (T_*, +\infty)$ de classe C^∞ tal que o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Q[u] = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) + \frac{f(u)}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = 0, & \text{em } \Omega \\ u = \phi, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

não tem nenhuma solução.

Para a demonstração do Teorema (4.2) necessitamos de alguns lemas preliminares de interesse independente, e do seguinte teorema de comparação que pode ser encontrado em SERRIN (1969).

Teorema 4.3 (Princípio da Comparação Refinado) *Seja f satisfazendo a hipótese H_1 com $T_1 = +\infty$ e suponha que $\partial\Omega$ contém um conjunto relativamente aberto $\Gamma \neq \partial\Omega$ de classe C^1 . Seja $\omega \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ tal que $Q[\omega + b] \leq 0, \forall b > 0$ e $\frac{\partial\omega}{\partial\nu} = -\infty$ em cada ponto de Γ , onde ν é o vetor normal interior a Γ . Se $u \in C^2(\Omega \cup \Gamma) \cap C^0(\bar{\Omega})$ é solução de $Q[u] = 0$ e $u \leq \omega$ em $\partial\Omega \setminus \Gamma$, então $u \leq \omega$ em Ω .*

Prova: Suponha por contradição que existe $x_0 \in \bar{\Omega}$ tal que $(u - \omega)(x_0) = \max(u - \omega) = \delta > 0$. Pelo princípio de tangência, 3.2, necessariamente $x_0 \in \partial\Omega$, pois se por absurdo tivermos $x \in \Omega$, sendo $Q[u] \geq 0, Q[\omega + \delta] \leq 0, u \leq \omega + \delta$ e $u = \omega + \delta$ em x_0 , teríamos que ter $u \equiv \omega + \delta$ em todo Ω . Como $x_0 \in \partial\Omega$ e $u \leq \omega$ em $\partial\Omega \setminus \Gamma$, temos que $x_0 \in \Gamma$.

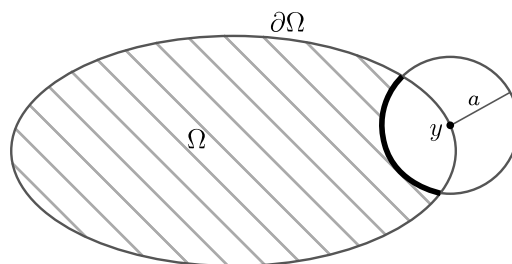
Seja $\gamma(t)$ a geodésica normal apontando para dentro, partindo de x_0 , isto é, $\gamma(t) = x_0$ e $\gamma'(0) = \nu$. Como $(u - \omega)(t) \doteq (u - \omega)(\gamma(t))$ tem um máximo em x_0 e $u \in C^1(\Gamma)$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{(u - \omega)(t) - (u - \omega)(0)}{t} = \frac{\partial u}{\partial \nu} - \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{\omega(t) - \omega(0)}{t} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \nu} + \infty = +\infty, \end{aligned}$$

que é uma contradição.

Seja $y \in \partial\Omega$. Vamos denotar por $B_r(y)$ a bola geodésica de raio r centrada em y . O primeiro lema nos diz que dados um ponto y no bordo do conjunto Ω e $a > 0$ pequeno, podemos estimar o valor da função u no conjunto $\Omega \setminus B_a(y)$ com o valor da função no conjunto $\partial\Omega \setminus B_a(y)$ mais a altura da barreira. Em particular, o valor de u na fronteira da bola $B_a(y)$ contida em Ω , não supera o valor de u no conjunto $\partial\Omega \setminus B_a(y)$ mais uma constante.

Figura 1 – Lema 4.1 estima o $\sup u$ no conjunto $\Omega \setminus B_a(y)$ em termos do $\sup u$ no conjunto $\partial\Omega \setminus B_a(y)$



Fonte: O autor

Lema 4.1 *Seja f satisfazendo a hipótese H_1 , com $T_1 = +\infty$. Então, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $a_o(\varepsilon, \text{diam}(\Omega), n)$ e uma constante C absoluta tais que, se u é solução da equação $Q[u] = 0$, então*

$$\sup_{\Omega \setminus B_a(y)} u \leq \varepsilon + \sup_{\partial\Omega \setminus B_a(y)} u + Cf\left(\sup_{\partial\Omega \setminus B_a(y)} u\right),$$

para todo $a < a_o$.

Prova: Seja $D = 2\text{diam}(\Omega)$, seja $r(x) = \text{dist}(x, y)$ e considere a função

$$\bar{u}(r) = \omega(r(x)) + \sup_{\partial\Omega \setminus B_a(y)} u,$$

onde $\omega \in C^2((a, D]) \cap C^0((a, D])$ a ser escolhido mais tarde, satisfaz $\omega(D) = 0$, $\omega' \leq 0$ e $\omega'(a) = -\infty$. Vamos computar $Q[\bar{u}]$. Como

$$\begin{aligned} \Delta_\varphi \bar{u} &= \varphi'(\omega')\omega'' + \varphi(\omega')\Delta r \\ &= \frac{\omega''}{(1 + (\omega')^2)^{3/2}} + \frac{\omega'\Delta r}{(1 + (\omega')^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Pelo teorema de comparação do Laplaciano por baixo, $\Delta r \geq \frac{n-1}{r}$ e por suposição $\omega' < 0$, então

$$\begin{aligned} Q[\bar{u}] &= \frac{\omega''}{(1 + (\omega')^2)^{3/2}} + \frac{1}{1 + (\omega')^2)^{1/2}} \cdot \left[\frac{n-1}{r}\omega' + f(\bar{u}) \right] \\ &\leq \frac{\omega''}{(1 + (\omega')^2)^{3/2}} + \frac{f(\bar{u})}{(1 + (\omega')^2)^{1/2}} + \frac{n-1}{r} \frac{\omega'}{(1 + (\omega')^2)^{1/2}} \\ &\leq \frac{1}{(1 + (\omega')^2)^{3/2}} \left[\omega'' + \left(\omega' \frac{n-1}{r} + f(\bar{u}) \right) (1 + (\omega')^2) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Definimos por simplicidade $m = \sup_{\partial\Omega \setminus B_a(y)} u$. Pela hipótese H_1 e sendo $\omega > 0$, temos que $f(\bar{u}) \leq f(m)$. Então,

$$Q[\omega] \leq \frac{1}{(1 + (\omega')^2)^{3/2}} \left[\omega'' + \left(\omega' \frac{n-1}{r} + f(m) \right) (1 + (\omega')^2) \right].$$

Para termos $Q[\bar{u}] < 0$, parece necessário que

$$\omega' \frac{n-1}{r} + f(m) \leq 0.$$

Por exemplo, iremos escolher ω tal que

$$\left| \omega' \frac{n-1}{r} \right| \geq 2f(m).$$

Sendo $r \leq D$, é suficiente requerer que

$$\omega' \leq \frac{-2D}{n-1} f(m),$$

e nesse caso,

$$\omega' \frac{n-1}{r} + f(\omega) \leq \frac{n-1}{2r} \omega'.$$

Portanto, para encontrar uma $\bar{u} = \omega + m$ tal que $Q[\bar{u}] \leq 0$ é suficiente resolver

$$\omega'' + \omega' \frac{n-1}{2r} (1 + (\omega')^2) \leq 0 \quad (28)$$

$$\omega' \leq -\frac{2D}{n-1} f(m) \quad (29)$$

Agora, observe que (28) pode ser escrita como segue

$$\begin{aligned} & \omega'' + \omega' \frac{n-1}{2r} (1 + (\omega')^2) = \\ & = n + (n-1)(\omega')^2 \left[\frac{(\omega')^2}{n + (n-1)(\omega')^2} \cdot \frac{\omega''}{(\omega')^2} + \omega' \frac{n-1}{2r} \cdot \frac{1 + (\omega')^2}{n + (n-1)(\omega')^2} \right]. \end{aligned}$$

Pondo $\psi(t) = \frac{n + (n-1)t^2}{t^2}$ e usando que $\frac{(n-1)(1 + (\omega')^2)}{n + (n-1)(\omega')^2} \geq \frac{n-1}{n}$, encontramos que

$$\omega'' + \omega' \frac{n-1}{2r} (1 + (\omega')^2) \leq [n + (n-1)(\omega')^2] \left[\frac{\omega''}{\psi(\omega')(\omega')^3} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{2r} \right] \omega'.$$

Assim, uma solução para a equação $\frac{\omega''}{\psi(\omega')(\omega')^3} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{2r} \leq 0$ resolve (29). Vamos começar a procurar uma solução $\bar{\omega}$ para

$$\frac{\bar{\omega}''}{\Psi(\bar{\omega}')(\bar{\omega}')^3} + \frac{n-1}{2nr} = 0.$$

Considere, então, a função $F : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ dada por

$$F(s) = \int_s^\infty \frac{d\tau}{\psi(\tau)\tau^3}.$$

Observe que $\psi(\tau) \rightarrow (n-1)$ quando $\tau \rightarrow +\infty$. Donde concluímos que

$$F(s) \sim \frac{1}{2(n-1)} s^{-2}$$

quando $s \rightarrow \infty$ e

$$F(s) \sim \frac{1}{n} \log s$$

quando $s \rightarrow 0^+$. Ademais, F é estritamente decrescente e $F(0^+) = \infty$ e $F(+\infty) = 0^+$. Logo existe F^{-1} . Note que

$$\frac{d}{dr} (F(-\bar{\omega}'(r))) = -\frac{\bar{\omega}''}{\psi(\bar{\omega}')(\bar{\omega}')^3}$$

e, portanto,

$$\frac{\bar{\omega}''}{\psi(\bar{\omega}')(\bar{\omega}')^3} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{2r} = -\frac{d}{dr} (F(-\bar{\omega}'(r))) + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{2r}.$$

Integrando a equação

$$-\frac{d}{dr} (F(-\bar{\omega}'(r))) + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{2r} = 0.$$

em $[a, r]$ e usando que $\bar{\omega}'(a) = -\infty$, obtemos

$$F(-\bar{\omega}'(r)) = \frac{n-1}{2n} \log\left(\frac{r}{a}\right),$$

ou seja,

$$-\bar{\omega}'(r) = F^{-1}\left(\frac{n-1}{2n} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right).$$

Finalmente, usando o desenvolvimento de Taylor,

$$\frac{n-1}{2n} \log\left(\frac{r}{a}\right) \sim \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{r-a}{a}$$

quando $r \rightarrow a$. Além disso, como $F(s) \sim \frac{1}{2(n-1)}s^{-2}$ quando $s \rightarrow \infty$ deduzimos que, pondo $s = F^{-1}(t)$, $t \asymp F^{-1}(t)^{-2}$ quando $t \rightarrow 0^+$. Assim $F^{-1}(t) \asymp \frac{1}{\sqrt{t}}$ quando $t \rightarrow 0$ e, portanto, $\bar{\omega}'(r)$ é integrável em $r = a$. Integrando em $[r, D]$, obtemos

$$\bar{\omega}(r) = \int_r^D F^{-1}\left(\frac{n-1}{2n} \log\left(\frac{t}{a}\right)\right) dt.$$

Então a função $\bar{\omega}$ assim produzida resolve (28). Para também resolver (29), definimos

$$\omega(r) = \bar{\omega}(r) + \frac{2D}{n-1} f(m)(D-r).$$

É imediato verificar que $\omega(r)$ satisfaz (28) e (29), e, portanto, $\bar{u} = \omega(r) + m$ é uma supersolução. Note que fazendo a mudança de variável $s = \frac{t}{a}$, obtemos

$$\bar{\omega} = \int_r^D F^{-1}\left(\frac{n-1}{2n} \log\left(\frac{t}{a}\right)\right) dt = a \int_1^{\delta/a} F^{-1}\left(\frac{n-1}{2n} \log s\right) ds.$$

Temos que $\bar{\omega}(a) \rightarrow 0$ quando $a \rightarrow 0$ e, portanto, $\bar{\omega} < \varepsilon$ se a_0 for escolhido

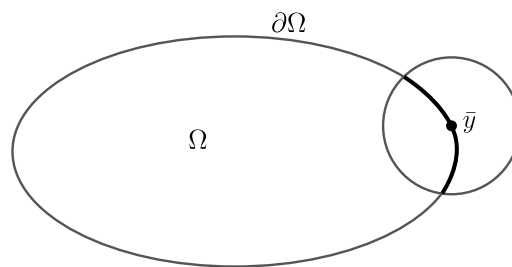
suficientemente pequeno. Pelo teorema de comparação 4.3, $u \leq \omega + m$ em $\Omega \setminus B_a(y)$. Então, para $a \leq a_0$, a_0 suficientemente pequeno, temos

$$\sup_{\Omega \setminus B_a(y)} u \leq \varepsilon + \frac{2D^2}{n-1} f(m) + m.$$

Pondo $C = \frac{2D^2}{n-1}$, segue a tese do lema. ■

O próximo lema estima o valor de u na bola $B_a(y)$ em termos do valor de u no conjunto $\Omega \cap \partial B_a(y)$.

Figura 2 – Estimativas do $\sup u$ no Lema 4.2



Fonte: O autor

Lema 4.2 *Como no Lema 4.1, seja f satisfazendo a hipótese H_1 , com $T_1 = +\infty$. Ponha $m' = \sup_{\Omega \cap \partial B_a(y)} u$ e fixe $\bar{\varepsilon} > 0$. Supondo $H(y) < 0$, então existe $a_o = a_o(\Omega, \bar{\varepsilon}, m')$ tal que para todo $a \leq a_o$, vale a seguinte desigualdade em $\Omega \cap B_a(y)$:*

$$u \leq m' + \bar{\varepsilon}.$$

Prova: Defina $\rho(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ e fixe constantes $\varepsilon \in (0, a)$, $k > 1$ a serem escolhidas depois. Considere

$$\omega(x) = m' + h(\rho(x)),$$

onde $h \in C^2((\varepsilon, a])$ tal que $h' \leq -k$ em $(\varepsilon, a]$, $h(\varepsilon), h(a) > 0$. Observe que

$$\Delta_\varphi \omega = \varphi'(h'(\rho))h''(\rho) + \varphi(h'(\rho))\Delta\rho.$$

Seja $\Psi : [0, \delta] \times \partial\Omega \rightarrow B_\delta(\partial\Omega)$ carta de Fermi, com $\delta < \frac{1}{\max\{\lambda_j\}}$ e λ_j autovalores positivos, se houver, da segunda forma fundamental de $\partial\Omega$. Usando a hipótese $H(y) < 0$, podemos escolher a_0 de maneira que

- (1) $a_0 < \delta$, e portanto, $B_a(y) \subseteq B_\delta(\partial\Omega), \forall a < a_0$
- (2) Para cada $x = \Psi(\rho, z) \in B_\delta(y)$, temos $H(z) < 0$.

Pelo teorema de comparação do Laplaciano por baixo,

$$\Delta\rho \geq -\frac{(n-1)H}{1-H\rho}$$

em $B_a(y) \cap \Omega$. Além disso, $f(t)$ é decrescente e, portanto, $f(\omega) \leq f(m')$ em $B_a(y) \cap \Omega$. Note que $H < 0$ numa vizinhança de $y \in \partial\Omega$. Assim,

$$\begin{aligned} Q[\omega] &= \frac{h''}{(1+(h')^2)^{3/2}} + \frac{h'\Delta\rho}{(1+(h')^2)^{1/2}} + \frac{1}{(1+(h')^2)^{1/2}}f(\omega) \\ &\leq \frac{h''}{(1+(h')^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1+(h')^2)^{3/2}} \frac{h'(n-1)H}{1-H\rho} + \frac{f(m')}{(1+(h')^2)^{1/2}} \\ &\leq \frac{n+(n-1)(h')^2}{(1+(h')^2)^{3/2}} \left[\frac{(h')^2}{n+(n-1)(h')^2} \frac{h''}{(h')^2} - \frac{h'(1+(h')^2)}{n+(n-1)(h')^2} \frac{(n-1)H}{1-H\rho} \right. \\ &\quad \left. + \frac{f(m')(1+(h')^2)^{3/2}}{(1+(h')^2)^{1/2}(n+(n-1)(h')^2)} \right]. \end{aligned} \tag{30}$$

Agora, observe que quando $t \rightarrow -\infty$, vale

$$\begin{aligned} \frac{(1+t^2)^{3/2}}{n+(n-1)t^2} - \frac{|t|}{n-1} &= \frac{(n-1)(1+t^2)^{3/2} - n|t| - (n-1)|t|^3}{(n+(n-1)t^2)(n-1)} \\ &= \frac{(n-1)|t|^3 \left(1 + \frac{3}{2t^2}\right) - n|t| - (n-1)|t|^3 + o(1)}{(n+(n-1)t^2)(n-1)} \\ &= \frac{\frac{n-3}{2}|t| + o(1)}{(n+(n-1)t^2)(n-1)} \leq \frac{C}{|t|}, \end{aligned}$$

onde C é uma constante uniforme para $t \geq 1$. Logo,

$$\frac{f(m')}{(1+(h')^2)^{1/2}} \frac{(1+(h')^2)^{3/2}}{n+(n-1)(h')^2} = \frac{-h'f(m')}{(n-1)(1+(h')^2)^{1/2}} + O\left(\frac{1}{k}\right). \quad (31)$$

Analogamente, como

$$\frac{(1+t^2)(n-1)}{n+(n-1)t^2} - 1 = -\frac{1}{n+(n-1)t^2},$$

temos que

$$\frac{(1+(h')^2)(n-1)}{n+(n-1)(h')^2} = 1 + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (32)$$

quando $k \rightarrow +\infty$. e $|h'| \geq k$. Pondo

$$\psi(t) = \frac{n+(n-1)t^2}{t^2}$$

a expressão (30) pode ser reescrita como a seguir:

$$\begin{aligned} Q[\omega] &\leq \frac{n+(n-1)(h')^2}{(1+(h')^2)^{3/2}} \left[\frac{h''}{\psi(h')(h')^2} - h' \frac{H}{1-H\rho} - \frac{h'f(m')}{(n-1)(1+(h')^2)^{1/2}} + O\left(\frac{1}{k}\right) \right] \\ &= \frac{n+(n-1)(h')^2}{(1+(h')^2)^{3/2}} \left[\frac{h''}{\psi(h')(h')^2} - \left(\frac{H}{1-H\rho} + \frac{f(m')}{(n-1)(1+(h')^2)^{1/2}} \right) h' + O\left(\frac{1}{k}\right) \right]. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$(n-1)(1+(h')^2)^{1/2} \geq -h'(n-1),$$

encontramos que

$$\frac{-h'f(m')}{(n-1)(1+(h')^2)^{1/2}} \leq \frac{f(m')}{n-1} := \hat{C}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} Q[\omega] &\leq \frac{n + (n-1)(h')^2}{(1 + (h')^2)^{3/2}} \left[\frac{h''h'}{\psi(h')(h')^3} - \frac{H}{1 - H\rho} h' + \hat{C} + O\left(\frac{1}{k}\right) \right] \\ &\leq \frac{n + (n-1)(h')^2}{(1 + (h')^2)^{3/2}} \left[\frac{h''}{\psi(h')(h')^3} - \frac{H}{1 - H\rho} + O\left(\frac{1}{k}\right) \right] h'. \end{aligned}$$

Agora, supondo $H(y) < 0$, e devido a nossa escolha de a_0 , existe $\theta > 0$ tal que em $B_a(y) \cap \Omega$,

$$-\frac{H}{1 - H\rho} - O\left(\frac{1}{k^2}\right) \geq \theta > 0$$

se k é suficientemente grande. Portanto, se $k \geq k_0$ e k_0 suficientemente grande, temos

$$Q[\omega] \leq \frac{n + (n-1)(h')^2}{(1 + (h')^2)^{3/2}} \left[\frac{h''}{\psi(h')(h')^3} + \theta \right] h', \quad (33)$$

Como $h' < 0$, para termos $Q[\omega] \leq 0$ basta encontrarmos h tal que

$$\frac{h''}{\psi(h')(h')^3} + \theta \geq 0.$$

Vamos, então, resolver a equação

$$\frac{h''}{\psi(h')(h')^3} + \theta = 0. \quad (34)$$

Defina

$$F(t) = \int_t^{+\infty} \frac{d\tau}{\psi(\tau)\tau^3}.$$

Temos que

$$\frac{d}{d\rho} F(-h'(\rho)) = -\frac{-h''}{\psi(-h')(-h')^3} = -\frac{h''}{\psi(h')(h')^3} = \theta.$$

Integrando a expressão acima de ε a ρ e usando que $h'(\varepsilon) = -\infty$, obtemos

$$F(-h'(\rho)) = \theta(\rho - \varepsilon).$$

Agora, note que $F : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ é decrescente, $F(+\infty) = 0^+$ e $F(0^+) = +\infty$. Portanto, existe F^{-1} e

$$h'(\rho) = -F^{-1}(\theta(\rho - \varepsilon)).$$

Além disso, tendo em conta que $F^{-1}(\sigma) \sim \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$ quando $\sigma \rightarrow 0$, concluimos que $h'(\rho)$ é

integrável em $\rho = \varepsilon$, pois $\frac{1}{\sqrt{\sigma}}$ o é em $\sigma = 0$. Ponha

$$h(\rho) = \int_{\rho}^{a_0} F^{-1}(\theta(t - \varepsilon)) dt,$$

onde restringimos a_0 ainda mais de maneira a satisfazer

$$a_0 = \frac{1}{\theta} \int_{k_0}^{\infty} \frac{ds}{\psi(s)s^3}.$$

Observe que

$$|h'| = |F^{-1}(\theta(\rho - \varepsilon))| \geq |F^{-1}(\theta a_0)| := k_0$$

e que $|F^{-1}(\theta a)| \geq k_0$ é equivalente a

$$a \leq \frac{1}{\theta} F(k_0) = \frac{1}{\theta} \int_{k_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\psi(\tau)\tau^3} := a_0.$$

Logo, $h' \leq k_0$ e portanto ω satisfaz $Q[\omega] \leq 0$. Pelo princípio da comparação,

$$u \leq \omega = m' + h(\rho) \geq m' + h(\varepsilon) = m' + \int_{\varepsilon}^{a_0} F^{-1}(\theta(t - \varepsilon)) dt.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$h(\varepsilon) \rightarrow h(0) = \int_0^{a_0} F^{-1}(\theta(t - \varepsilon)) dt.$$

Portanto a integral converge e é infinitesimal quando $a \rightarrow 0$. Logo, se $a \leq a_0$ e a_0 é suficientemente pequeno,

$$u \leq m' + h(0) \leq m' + \int_0^{a_0} F^{-1}(t) \leq m' + \bar{\varepsilon}.$$

Donde concluímos que em $B_a(y) \cap \Omega$, vale

$$u \leq m' + \bar{\varepsilon}.$$

□

Prova do Teorema (4.2) Suponha que existe $\bar{y} \in \partial\Omega$ tal que $H(\bar{y}) < 0$. Fixe $\varepsilon > 0$ e seja $a > 0$ suficientemente pequeno, a ser escolhido mais tarde. Seja $\phi \in C^2(\partial\Omega)$ uma função satisfazendo

$$\begin{cases} \phi \equiv T_* + 1 & \text{em } \partial\Omega \setminus B_a(\bar{y}), \\ T_* + 1 \leq \phi \leq 3\varepsilon + T_* + 1 + Cf(T_* + 1) & \text{em } \partial\Omega \cdot \\ \phi(\bar{y}) = 3\varepsilon + T_* + 1 + Cf(T_* + 1) \end{cases} \quad (35)$$

Como $u = T_* + 1$ em $\partial\Omega \setminus B_a(\bar{y})$, se $a \leq a_0$ e a_0 é escolhido como no Lema (4.1),

$$\sup_{\Omega \setminus B_a(\bar{y})} u \leq T_* + 1 + Cf(T_* + 1) + \varepsilon,$$

para cada $0 < a < a_0$. Em particular,

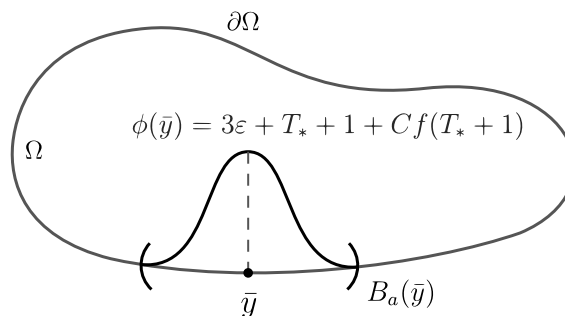
$$u \leq T_* + 1 + Cf(T_* + 1) + \varepsilon$$

em $\Omega \cap \partial B_a(\bar{y})$. Pelo Lema 4.2, a menos de reduzir a_0 ,

$$u(\bar{y}) \leq \varepsilon + \sup_{\Omega \cap \partial B_a(\bar{y})} u \leq 2\varepsilon + T_* + 1 + Cf(T_* + 1).$$

Contradizendo $u \equiv \phi$ e $\phi(\bar{y}) = 3\varepsilon + T_* + 1 + Cf(T_* + 1)$. Isto conclui a prova. ■

Figura 3 – A função ϕ na prova do Teorema 4.2



Fonte: O autor

5 GRÁFICOS EM PRODUTOS WARPED $M \times_h \mathbb{R}$

Seja $\bar{M} = M \times_h \mathbb{R}$ com métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle = g_M + h(x)^2 ds^2$, e seja Φ_s o fluxo do campo de Killing ∂_s . Seja $\Omega \subset M$ e defina o gráfico

$$F : \Omega \rightarrow \bar{M}, \quad F(x) = (x, u(x)).$$

Escolha um referencial de coordenadas locais $\{\partial_i\}$ e seja $g_{ij} dx^i dx^j$ a expressão de g_M no co-referencial dual. Então, a métrica do gráfico \hat{g}_M em M tem componentes

$$\hat{g}_{ij} = g_{ij} + h^2 u_i u_j, \quad \hat{g}^{ij} = g^{ij} - \frac{h^2 u^i u^j}{W^2},$$

onde $du = u_j dx^j$, $u^j = g^{jk} u_k$ and $W^2 = 1 + h^2 |\nabla u|^2$. O vetor normal se escreve

$$\nu = \frac{1}{hW} (\partial_s - h^2 u^j \partial_j) = \frac{1}{hW} (\partial_s - h^2 (\Phi_u)_* \nabla u),$$

e portanto

$$\text{II}(\partial_i, \partial_j) = h \frac{u_{ij}}{W} + \frac{h_i u_j}{W}.$$

Tomando o traço

$$\begin{aligned} nH &= \text{Tr}_{\hat{g}}(\text{II}) = \left(g^{ij} - \frac{h^2 u^i u^j}{W^2} \right) \left(h \frac{u_{ij}}{W} + \frac{h_i u_j}{W} \right) \\ &= \text{div} \left(\frac{h \nabla u}{W} \right) + g_M \left(\frac{\nabla u}{W}, \nabla h \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Um soliton deve satisfazer $nH = -\langle \partial_s^\perp, \nu \rangle = -\langle \partial_s, \nu \rangle = -\frac{h}{W}$, oque leva a equação

$$Q[u] \doteq \text{div} \left(\frac{h \nabla u}{\sqrt{1 + h^2 |\nabla u|^2}} \right) + g_M \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + h^2 |\nabla u|^2}}, \nabla h \right) + \frac{h}{W} = 0. \quad (37)$$

A proposta inicial deste capítulo, era encontrar o gráfico de uma função u sobre M tal que u se estenda continuamente para $\partial_\infty M$ com valor de bordo ϕ . A ideia era adaptar o argumento em (RIPOLL and TELICHEVESKY, 2019) para o caso dos solitons. O problema é a construção de barreiras. Conseguimos construir barreiras locais, Teorema (5.1) abaixo, mas não conseguimos barreiras globais. Isso será objeto de pesquisas futuras.

Teorema 5.1 *Seja $\Omega \subset M$ um aberto suave, relativamente compacto. Suponha que*

$$\text{Ricc} \geq -(n-1)\kappa^2 \quad \text{on } \Omega,$$

e que a curvatura média normalizada H de $\partial\Omega$ na direção do vetor normal apontando para dentro satisfaz

$$H > \kappa \tanh(\kappa \cdot \text{diam}(\Omega)). \quad (38)$$

Então, para cada $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, com $\alpha \in (0,1)$, existe uma solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Q[w] = 0 & \text{em } \Omega, \\ w = \phi & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (39)$$

onde Q é o operador (37).

Seja r a distância de $\partial\Omega$, com a escolha $r > 0$ em Ω . Como no capítulo anterior, mostraremos as estimativas de altura, estimativas gradiente de bordo e estimativas gradiente interior.

5.1 Estimativas de Altura

Vamos definir

$$w(x) = \|\phi\|_\infty + z(r),$$

para $z \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+)$, e vamos calcular $Q[w]$. Nas componentes com respeito ao referencial local $\{\partial_i\}$ em Ω

$$w_i = z' r_i, \quad w_{ij} = z'' r_i r_j + z' r_{ij},$$

Portanto, pondo $W = \sqrt{1 + h^2 |\nabla w|^2} = \sqrt{1 + h^2 (z')^2}$, a curvatura média não normalizada,

$$\begin{aligned} \hat{Q}[w] &\doteq nH = \left(g^{ij} - \frac{h^2 w^i w^j}{W^2} \right) \left(h \frac{w_{ij}}{W} + \frac{h_i w_j}{W} \right) \\ &= \text{div} \left(\frac{h \nabla w}{W} \right) + g_M \left(\frac{\nabla w}{W}, \nabla h \right) \end{aligned}$$

satisfaz

$$\hat{Q}[w] = \left(g^{ij} - \frac{h^2 (z')^2 r^i r^j}{W^2} \right) \left(\frac{h z'' r_i r_j + h z' r_{ij}}{W} + \frac{z' h_i r_j}{W} \right). \quad (40)$$

Vamos usar que $r_{ij}r^i = 0$ para deduzir

$$\begin{aligned}\hat{Q}[w] &= \frac{hz''}{W} \left(|\nabla r|^2 - \frac{h^2(z')^2 |\nabla r|^4}{W^2} \right) + \frac{hz'}{W} \Delta r \\ &\quad + \frac{z'}{W} \langle \nabla h, \nabla r \rangle \left(1 - \frac{h^2(z')^2 |\nabla r|^2}{W^2} \right) \\ &= \frac{hz''}{W^3} + \frac{hz'}{W} \Delta r + \frac{z'}{W^3} \langle \nabla h, \nabla r \rangle.\end{aligned}\tag{41}$$

Os cálculos são realizados no conjunto dos pontos onde r é suave (aberto e denso em Ω).

O cut-locus de r será tratado mais tarde.

Iremos supor agora que $z' > 0$. Então, da desigualdade

$$\langle \nabla h, \nabla r \rangle \leq h \|\nabla \log h\|_{L^\infty(\Omega)} \doteq C_1 h$$

obtemos

$$\hat{Q}[w] = \frac{hz''}{W^3} + \frac{hz'}{W} \Delta r + \frac{z'}{W^3} \langle \nabla h, \nabla r \rangle \leq \frac{h}{W^3} [z'' + C_1 z'] + \frac{hz'}{W} \Delta r.$$

Para $A > 2\text{diam}(\Omega)$, e $b \gg 0$ a ser escolhido mais tarde, defina

$$z(r) = \frac{e^{bA}}{b} (1 - e^{-br}),$$

e note

$$z' = e^{b(A-r)} \geq e^{bA/2}, \quad z'' = -bz'.$$

Do Lema 1,

$$\hat{Q}[w] \leq \frac{hz'}{W^3} [-b + C_1] + \frac{hz'}{W} \Delta r \leq \frac{hz'}{W^3} [-b + C_1] - \delta \frac{hz'}{W},$$

e assim, denotando por Q o operador soliton em (37),

$$\begin{aligned}Q[w] &= \hat{Q}[w] + \frac{h}{W} \leq \frac{hz'}{W^3} [-b + C_1] - \delta \frac{hz'}{W} + \frac{h}{W} \\ &\leq \frac{hz'}{W^3} [-b + C_1] + \frac{h}{W} [1 - \delta e^{bA/2}].\end{aligned}$$

Cada termo no lado direito pode ser negativo desde que b seja suficientemente grande, o que nos dá

$$\begin{cases} Q[w] \leq 0 & \text{em } \Omega \setminus \text{cut}(\partial\Omega), \\ w \geq \phi & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}\tag{42}$$

Como z é crescente, a desigualdade (42) pode ser estendida para uma desigualdade fraca em todo $\Omega/\text{cut}(\partial\Omega)$. Veja [PIGOLA, RIGOLI, and SETTI (2005), Lemma 2.2], onde o resultado é feito para o operador laplaciano, mas com mudanças triviais segue para o

nosso operador Q . Como o gráfico soliton u com dado de bordo ϕ satisfaz

$$\begin{cases} Q[u] = 0 & \text{em } \Omega \\ u = \phi & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo teorema de Comparação, temos $u \leq w$, o que prova as nossas estimativas de altura para u desejadas.

5.2 Estimativas do gradiente na fronteira

Nesta seção, nossa tarefa é produzir estimativas a priori do gradiente ao longo de $\Gamma = \partial\Omega$ para o problema de Dirichlet. Vamos construir barreiras da forma $\omega + \phi$ ao longo de uma vizinhança tubular Ω_ϵ de Γ . Aqui, $\omega = \psi(r(x))$ para alguma função real ψ a ser escolhida e r é a função distância de $\partial\Omega$. Ademais, o dado de bordo ϕ é estendido para Ω_ϵ tomando $\phi(t^i, r) = \phi(t^i)$.

Usando (40) podemos escrever a equação da curvatura média

$$\hat{Q}[\varphi] = \left(\frac{h}{W_\varphi} g^{ij} - \frac{h^3 \varphi^i \varphi^j}{W_\varphi^3} \right) \varphi_{ij} + g^{ij} \frac{h_i}{W_\varphi} \varphi_j - \frac{h^2 h_i \varphi^i \varphi^j \varphi_j}{W_\varphi^3} \quad (43)$$

A principal parte da equação da curvatura média (43) é dada pela matriz

$$A^{ij} := \frac{h}{W_\varphi} g^{ij} - \frac{h^3 \varphi^i \varphi^j}{W_\varphi^3}.$$

Esta matriz é positiva definida. De fato, temos que

$$\frac{h}{W_\varphi^3} |\xi|^2 \leq A^{ij} \xi_i \xi_j \leq \frac{h}{W_\varphi} |\xi|^2. \quad (44)$$

Usando (5.2) obtemos

$$\begin{aligned} Q[\omega + \phi] &= a^{ij}(x, \nabla\omega + \nabla\phi)(\omega_{ij} + \phi_{ij}) + b(x, \nabla\omega + \nabla\phi) + \frac{h}{W} \\ &\leq a^{ij} \omega_{ij} + \frac{h}{W} \|\phi\|_{2,\alpha} + b + \frac{h}{W}. \end{aligned} \quad (45)$$

onde,

$$a^{ij}(x, \nabla\omega + \nabla\phi) = \frac{h}{W} g^{ij} - \frac{h^3}{W^3} (\omega + \phi)^i (\omega + \phi)^j, \quad (46)$$

$$b(x, \nabla\omega + \nabla\phi) = g^{ij} \frac{h_i}{W} (\omega + \phi)_j - \frac{h^2 h_i}{W^3} (\omega + \phi)^i (\omega + \phi)^j (\omega + \phi)_j \quad (47)$$

e

$$W^2 = 1 + h^2(\psi')^2 + h^2|\nabla\phi|^2 \quad (48)$$

Segue-se de $|\nabla r| = 1$ e $r_{ij}r^i = 0$ que

$$\omega^i\omega^j\omega_{ij} = (\psi')^2 r^i r^j (\psi'' r_i r_j + \psi' r_{ij}) = (\psi')^2 \psi'' |\nabla r|^4 + (\psi')^3 r_{ij} r^i r^j = (\psi')^2 \psi''.$$

$$\omega^i \phi^j \omega_{ij} = \psi' r^i \phi^j (\psi'' r_i r_j + \psi' r_{ij}) = \psi' \psi'' \langle \nabla r, \nabla \phi \rangle = 0.$$

e

$$\phi^i \phi^j \omega_{ij} = \psi' \phi^i \phi^j r_{ij}.$$

Em particular, obtemos de (48)

$$\frac{h}{W} \psi'' - \frac{h^3}{W^3} (\psi')^2 \psi'' = \frac{h}{W^3} \psi'' (1 + h^2 |\nabla \phi|^2)$$

Por outro lado,

$$\Delta \omega = \psi'' + \psi' \Delta r.$$

Concluimos que

$$a^{ij} \omega_{ij} = \frac{h}{W^3} \psi'' (1 + h^2 |\nabla \phi|^2) + \frac{h}{W} \psi' \Delta r - \frac{h^3}{W^3} \psi' \phi^i \phi^j r_{ij}.$$

Além disso, de (48) e $|\nabla \omega + \nabla \phi|^2 = (\psi')^2 + |\nabla \phi|^2$ temos

$$b = \frac{1}{W^3} \langle \nabla h, \nabla \omega + \nabla \phi \rangle = \frac{\psi'}{W^3} \langle \nabla h, \nabla r \rangle + \frac{1}{W^3} \langle \nabla h, \nabla \phi \rangle. \quad (49)$$

concluimos de (45) que

$$\begin{aligned} \frac{W^3}{h} Q[\omega + \phi] &\leq \psi'' (1 + h^2 |\nabla \phi|^2) + W^2 \psi' \Delta r - \psi' h^2 \phi^i \phi^j r_{ij} \psi' + \frac{\psi'}{h} \langle \nabla h, \nabla r \rangle \\ &+ \langle \frac{\nabla h}{h} \nabla \phi \rangle + W^2 + W^2 \|\phi\|_{2,\alpha}. \end{aligned}$$

Agora, defina

$$\psi(r) = \mu \ln(1 + Kr)$$

para constantes $\mu > 0$ e $K > 0$ a serem escolhidas mais tarde. temos

$$\psi' = \frac{\mu K}{1 + Kr} \quad \text{e} \quad \psi'' = -\frac{1}{\mu} (\psi')^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{W^3}{h}Q[\omega + \phi] &\leq -\frac{1}{\mu}(1 + h^2|\nabla\phi|^2)(\psi')^2 + W^2\psi'\Delta r - \psi'h^2\phi^i\phi^j r_{ij}\psi' + \frac{\psi'}{h}\langle\nabla h, \nabla r\rangle \\ &+ \left\langle \frac{\nabla h}{h}, \nabla\phi \right\rangle + W^2 + W^2\|\phi\|_{2,\alpha}. \end{aligned}$$

Do Lema 1 e das desigualdades,

$$\langle\nabla h, \nabla r\rangle \leq h\|\nabla \log h\|_{L^\infty(\Omega)} \doteq C_1h$$

$$\langle\nabla h, \nabla\phi\rangle \leq C_1h\|\nabla\phi\|,$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \frac{W^3}{h}Q[\omega + \phi] &\leq -\frac{1}{\mu}(1 + h^2|\nabla\phi|^2)(\psi')^2 - (W^2\delta + h^2\phi^i\phi^j r_{ij} - C_1)\psi' \\ &+ C_1\|\nabla\phi\| + W^2 + W^2\|\phi\|_{2,\alpha} \\ &\geq \left(-\frac{1}{\mu}(1 + h^2|\nabla\phi|^2) + h^2(1 + \|\phi\|_{2,\alpha})\right)(\psi')^2 - (h^2\phi^i\phi^j r_{ij} - C_1)\psi' \\ &+ C_1\|\nabla\phi\| + (1 + h^2\|\nabla\phi\|^2)(1 + \|\phi\|_{2,\alpha}). \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{W^3}{h}Q[\omega + \phi] \leq \left(-\frac{1}{\mu} + B\right)(\psi')^2 + C\psi' + D,$$

onde $B = \|h\|_\infty^2(1 + \|\phi\|_{2,\alpha})$, $C = -\|h\|_\infty^2\|\nabla^2 r(\nabla\phi, \nabla\phi)\| + C_1$ e $D = C_1\|\nabla\phi\| + (1 + \|h\|_\infty^2\|\nabla\phi\|^2)(1 + \|\phi\|_{2,\alpha})$. Como h e ϕ são uniformemente limitadas, temos que B, C e D são funções limitadas.

agora, escolha μ de tal maneira que $\mu \rightarrow 0$ quando $K \rightarrow \infty$. A saber,

$$\mu = \frac{c}{\ln(1 + K^2)},$$

onde c é tal que $c > \|u\|_{c^0}$. Portanto, escolhendo K suficientemente grande, garantimos que $Q[\omega + \phi] < 0$ em uma pequena vizinhança tubular Ω_ϵ de $\partial\Omega$. Note que em $\partial\Omega$, $\omega + \phi = \phi$. Assim, $\omega + \phi$ é uma barreira superior localmente definida para o problema de Dirichlet. Similarmente, podemos ver que $-\omega + \phi$ é uma barreira inferior.

5.3 Estimativa de Gradiente no Interior

Como no capítulo anterior, estimativas interior do gradiente são obtidas por meio do princípio do máximo aplicado a função $W = \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$. Seja X o campo

gerador do soliton . Vamos definir o operador com peso

$$\Delta_{X^T}(\cdot) = \Delta(\cdot) - \langle \nabla X^T, \nabla(\cdot) \rangle. \quad (50)$$

O Laplaciano de $nH = -\langle X, \nu \rangle$ é dado por:

$$\Delta_{X^T} \langle X, \nu \rangle = -(|II|^2 - \overline{Ric}(\nu, \nu)) \langle X, \nu \rangle, \quad (51)$$

onde X é campo de Killing em $\bar{\mathbb{H}}^{m+1}$.

O campo $X = \partial_s$ é um campo de Killing na métrica $\langle, \rangle = g_M + h(x)^2 ds^2$ e

$$\nu = \frac{1}{hW_u} (\partial_s - h^2(\Phi_u)_* \nabla u)$$

é um vetor normal ao gráfico de u . Assim,

$$nH = -\langle \partial_s, \nu \rangle = -\frac{h}{W_u}.$$

Como $\|u\|_{C^0}$ é limitado, em $\Omega \times [-2\|u\|_{C^0}, 2\|u\|_{C^0}]$, temos $\overline{Ric}(\nu, \nu) \geq -\sigma^2$ para algum $\sigma > 0$ e portanto

$$\begin{aligned} \Delta_{X^T} \left(\frac{W_u}{h(u)} \right) &= \Delta_{X^T} \left(\frac{h}{W_u} \right)^{-1} \\ &= - \left(\frac{h}{W_u} \right)^{-2} \Delta_{X^T} \left(\frac{h}{W_u} \right) + 2 \left(\frac{h}{W_u} \right)^{-3} \left| \nabla \left(\frac{h}{W_u} \right) \right|^2 \\ &= - \left(\frac{h}{W_u} \right)^{-2} [-|II|^2 + \overline{Ric}(\nu, \nu)] \left(\frac{h}{W_u} \right) + 2 \left(\frac{h}{W_u} \right)^{-3} \left| \nabla \left(\frac{h}{W_u} \right) \right|^2 \\ &= \left(\frac{W_u}{h} \right) [|II|^2 - \overline{Ric}(\nu, \nu)] + 2 \cdot \frac{\left| \nabla \left(\frac{W_u}{h} \right) \right|^2}{\frac{W_u}{h}} \\ &\geq -\frac{W_u}{h} \sigma^2 + 2 \cdot \frac{\left| \nabla \left(\frac{W_u}{h} \right) \right|^2}{\frac{W_u}{h}}. \end{aligned}$$

Defina $f = \frac{W_u}{h}$. Então,

$$\Delta_{X^T} f \geq -f\sigma^2 + 2 \cdot \frac{|\nabla f|^2}{f}.$$

Considere a equação

$$\mathcal{L}g = \Delta_{X^T} g - 2 \left\langle \frac{\nabla f}{f}, \nabla g \right\rangle.$$

Note que $\mathcal{L}f \geq -f\sigma^2$. Seja η uma função ser escolhida mais tarde, e considere $\varphi = \eta f$.

Então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\varphi &= \Delta_{X^T}\varphi - 2 \left\langle \frac{\nabla f}{f}, \nabla\varphi \right\rangle \\
&= \Delta_{X^T}\eta f - 2 \left\langle \frac{\nabla f}{f}, \nabla\eta f \right\rangle \\
&= \eta\Delta_{X^T}f + f\Delta_{X^T}\eta - 2\eta\frac{|\nabla f|^2}{f} \\
&= \eta \left(\Delta_{X^T}f - 2\frac{|\nabla f|^2}{f} \right) + f\Delta_{X^T}\eta \\
&\geq f[\Delta_{X^T}\eta - \sigma^2\eta].
\end{aligned}$$

Agora, considere um ponto $x_0 \notin \bar{\Omega}$ e a função $\eta(x) = e^{-Ar(x)}$, onde $r(x)$ é a distância de x_0 e $A > 0$ é uma constante a ser escolhida mais tarde. Sejam $R > 0$ e $\bar{k} > 0$ tais que $\Omega \subset B_R(x_0)$ e $\text{Ricc} \geq -(n-1)\bar{k}^2$ in $B_R(x_0)$. Pelo Teorema de Comparação do Laplaciano, $\Delta r \leq (n-1)\frac{\xi'(r)}{\xi(r)}$, with $\xi(r) = \frac{\sinh(\bar{k}r)}{\bar{k}}$. Então,

$$\begin{aligned}
\Delta\eta &= \Delta(e^{-Ar}) = -Ae^{-Ar}\Delta r + A^2e^{-Ar} \\
&= [-A\Delta r + A^2]e^{-Ar} \\
&\geq \left[-A\frac{(n-1)\xi'}{\xi} + A^2 \right] e^{-Ar},
\end{aligned}$$

Note que $\frac{\xi'}{\xi} = \bar{k} \coth(\bar{k}r) \geq 0$ on \mathbb{R}^+ and since $x_0 \notin \bar{\Omega}$, $\coth(\bar{k}r)$ é limitada. Assim,

$$\begin{aligned}
\Delta_{X^T}\eta &= \Delta\eta - \langle X^T, \nabla\eta \rangle \\
&\geq \left[-A\frac{(n-1)\xi'}{\xi} + A^2 \right] e^{-Ar} - \langle X^T, -Ae^{-Ar}\nabla r \rangle \\
&= \left[-A\frac{(n-1)\xi'}{\xi} + A^2 \right] e^{-Ar} - Ae^{-Ar}|X| \\
&= \left[-A\frac{(n-1)\xi'}{\xi} + k^2 \right] e^{-Ar} - Ae^{-Ar} \cdot h \\
&\geq [-AC + A^2]e^{-Ar} - Ae^{-Ar}(C_1),
\end{aligned}$$

para alguma constante uniforme C, C_1 . Consequentemente,

$$\Delta_{X^T}\eta - \sigma^2\eta \geq e^{-Ar}(-AC + A^2 - AC_1 - \sigma^2).$$

Escolhendo k suficientemente grande, obtemos $\Delta_{X^T}\eta - \sigma^2\eta \geq 0$ on Ω . Logo $\mathcal{L}\varphi \geq 0$ em

Ω . Pelo princípio do máximo e pela definição de φ ,

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} \left(e^{-Ar(x)} \frac{W(x)}{h(x)} \right) &\leq \sup_{\partial\Omega} \left(e^{-Ar(x)} \frac{W(x)}{h(x)} \right) \\ &\leq e^{-A \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)} \bar{C}_1 \sqrt{1 + \max_{\partial\Omega} h^2 |\nabla u|^2}. \end{aligned}$$

Usando que $\forall x \in \Omega$,

$$e^{-Ar(x)} \frac{W(x)}{h(x)} \geq e^{-A[\operatorname{diam}(\Omega) + \operatorname{dist}(x_0, \Omega)]} \frac{W(x)}{h(x)},$$

obtemos

$$W(x) \leq e^{A \operatorname{diam}(\Omega)} C_1 \sqrt{1 + \max_{\partial\Omega} h^2 |\nabla u|^2},$$

o que mostra a estimativa interior gradiente, como desejado. ■

6 CONCLUSÃO

Para garantir a existência de gráficos solitons da curvatura média sobre um domínio limitado Ω , a hipótese da curvatura média do bordo $\partial\Omega$ ser positiva é fundamental. De fato, como vimos no Teorema 4.2, a existência de um ponto no bordo de Ω com curvatura não positiva implica na não existência de solução do problema do Dirichlet 17.

REFERÊNCIAS

- ALÍAS, L.J.; LIRA, J.H.; RIGOLI, M. Mean Curvature Flow Solitons in the Presence of Conformal Vector Fields. **J Geom Anal**, local, v. 30, n. 2, p. 1466–1529, 2020.
- BIANCHINI, B.; MARI, L.; RIGOLI, M. On the interplay among maximum principles, compact support principles and Keller-Osserman conditions on manifolds. **ArXiv e-prints**, 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1801.02102.pdf>>. Acesso em: 12 de abril de 2020.
- BORISENKO, A.; MIQUEL, V. Mean curvature flow of graphs in warped products. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 364, n. 9, p. 4551–4587, 2012.
- BRAKKE, K. **The motion of a surface by its mean curvature**. volume 20 of Mathematical Notes. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1978.
- CHEN, Y.-G.; GIGA, Y.; GOTO, S. Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations. **J. Differential Geometry**, v. 33, n. 8, p. 749–786, 1991.
- COLDING, T. H.; MINICOZZI II, W. P. Generic mean curvature flow I; generic singularities. **Annals of Mathematics**, v. 175, n. 2, p. 755–833, 2012.
- COLDING, T. H.; MINICOZZI II, W. P. Rigidity of generic singularities of mean curvature flow. **Publ. Math. Inst. Hautes tudes Sci.**, v. 121, p. 363–382, 2015.
- COLDING, T. H.; MINICOZZI II, W. P.; PEDERSEN, E. Mean curvature flow. **Bull.Amer. Math. Soc.**, v. 52, n. 2, p. 297–333, 2015.
- DAJCZER, M; HINOJOSA, P.; LIRA, J. H. Killing graphs with prescribed mean curvature. **Calc. Var. Partial Diff. Equations**, v. 33, p. 231–248, 2008.
- ECKER, K. **Regularity theory for mean curvature flow**. Differential Equations and Their Application, v. 57, Springer Science+Business, 2004.
- ECKER, K.; HUISKEN, G. Mean curvature evolution of entire graphs. **Ann. of Math.**, v. 130, n. MR1025164, p. 453–471, 1989.
- ECKER, K.; HUISKEN, G. Interior estimates for hypersurfaces moving by mean curvature. **invent. Math.**, v. 105, n. MR1117150, p. 547–569, 1991.
- ESCHENBURG, J. H. Comparison theorems and hypersurfaces. **Manuscripta Math**, Belo Horizonte, v. 68, n. 3, p. 295–323, 1987.

EVANS, L.; SPRUCK, J. Motion of level sets by mean curvature i. **J. Differential Geom.**, v. 33, p. 635–681, 1991.

EVANS, L.; SPRUCK, J. Motion of level sets by mean curvature ii. **Trans. Amer. Math.**, v. 330, p. 321–332, 1992a.

EVANS, L.; SPRUCK, J. Motion of level sets by mean curvature iii. **J. Geom. Anal.**, v. 2, p. 121–150, 1992b.

EVANS, L.; SPRUCK, J. Motion of level sets by mean curvature iv. **J. Geom. Anal.**, v. 5, p. 77–114, 1995.

GALLOT, S.; HULIN, D.; LAFONTAINE, J. **Riemannian Geometry**. New York: Springer-Verlag, 1990.

GILBARG, D.; TRUDINGER, N. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**. Third ed., Springer-Verlag, 1998.

HUISKEN, G. Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres. **J. Differential Geometry**, v. 20, n. 1, p. 237–266, 1984.

HUISKEN, G. Asymptotic behaviour for singularities of the mean curvature flow. **J. Differential Geometry**, v. 31, n. 1, p. 285–299, 1990.

HUNGERBUHLER, N.; METTLER, T. Soliton solutions of the mean curvature flow and minimal hypersurfaces. **Amer. Math. Soc.**, v. 140, n. 6, p. 2117–2126, 2011.

HUNGERBUHLER, N.; ROOST, B. Mean curvature flow solitons. **Société Mathématique de France**, v. 19, p. 129–158, 2009.

HUNGERBUHLER, N.; SMOCZYK, K. Soliton solutions for the mean curvature flow. **Differential Integral Equations**, v. 13, n. 10-12, p. 1321–1345, 2000.

ILMANEN, T. Convergence of the allen-cahn equation to brakke's motion by mean curvature. **J. Differential Geometry**, v. 38, n. 8, p. 417–461, 1993.

ITOH, J.; TANAKA, M. The Lipschitz continuity of the distance function to the cut locus. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 353, n. 1, p. 21–40, 2001.

JENKINS, H.; SERRIN, J. The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimensions. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 223, n. 2, p. 170–187, 1968.

LADYZHENSKAYA, O. A.; URAL'TSEVA, N. N. **Linear and Quasilinear Elliptic Equations**. Academic Press, New York, 1968.

- LIRA, J. H.; WANDERLEY, G. A. Mean curvature flow of Killing graphs. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 367, n. 7, p. 4303–4726, 2015.
- LIRA, M., J. H. and DAJCZER. Conformal Killing graphs with prescribed mean curvature. **J. Geom. Anal.**, v. 22, n. 3, p. 780–799, 2012.
- MANTEGAZZA, C. **Lecture Notes on Mean Curvature Flow**. Birkhauser, 2011.
- MANTEGAZZA, C.; MENNUCCI, A. C. Hamilton-Jacobi equations and distance functions on Riemannian manifolds. **Appl. Math. Optim**, , v. 47, n. 1, p. 1–25, 2003.
- MONTIEL, S. Unicity of constant mean curvature hypersurfaces in some Riemannian manifolds. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 48, n. 2, p. 711–748, 1999.
- MULLINS, W. Two-dimensional motion of idealized grain boundaries. **J. Appl. Phys**, v. 27, n. 3, p. 900–904, 1956.
- OSHER, S.; SETHIAN, J. Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. **J. Comput. Phys.**, v. 79, n. 1, p. 12–49, 1988.
- PETERSEN, P. **Riemannian Geometry**. 2. ed. New York: Springer, 2016.
- PIGOLA, S.; RIGOLI, M.; SETTI, A. G. Maximum principles on Riemannian manifolds and applications. **Mem. Amer. Math. Soc.** , v. 174, n. 822, p. 1–25, 2005.
- PUCCI, P.; SERRIN, J. The maximum principle. **Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhäuser Verlag, Basel**, v. 73, n. 1, p. x+235pp, 2007.
- RIPOLL, J.; TELICHEVESKY, M. On the Asymptotic Plateau Problem for CMC Hypersurfaces in Hyperbolic Space. **Bull Braz Math Soc**, v. 50, p. 575–585, 2019.
- SAKAI, Takashi. **Riemannian Geometry**. American Mathematical Society, Providence, RI (Translations of Mathematical Monographs, 149), 1996.
- SERRIN, J. The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic equations with many independent variables. **Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser.** , v. A, n. 264, p. 413 – 496, 1969.
- SMOCZYK, K. A relation between mean curvature flow solitons and minimal submanifolds. **Math. Nachr.**, v. 229, n. 1, p. 175–186, 2001.
- SMOCZYK, K. Mean curvature flow in higher codimension: Introduction and survey. **Global differential geometry**, v. 17, p. 231–274, 2012.

UNTERBERGER, P. **Mean curvature evolution in hyperbolic space.** Ph. D. Thesis – University of Melbourne, Australia, 1998.

UNTERBERGER, P. Evolution of radial graphs in hyperbolic space by their mean curvature. **Communications in Analysis and Geometry**, v. 11, n. 1, p. 675–695, 2003.

ZABUSKY, N.; KRUSKAL, M. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. **Appl. Math. Optim**, , v. 15, p. 240–243, 1965.

ZHU, X.-P. **Lectures on Mean Curvature Flows.** American Mathematical Society, 2002.