UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FRANCISCO SÉRGIO RUFINO

CHEBYSHEV E A VARIAÇÃO DE UM POLINÔMIO

FORTALEZA
2019

FRANCISCO SÉRGIO RUFINO

CHEBYSHEV E A VARIAÇÃO DE UM POLINÔMIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia

FORTALEZA
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R865c Rufino, Francisco Sérgio.
Chebyshev e a variação de um polinômio / Francisco Sérgio Rufino. – 2019.
68 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2019.
Orientação: Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia.

1. Polinômio de Chebyshev. 2. Variação de um polinômio. I. Título.

CDD 510

FRANCISCO SÉRGIO RUFINO

CHEBYSHEV E A VARIAÇÃO DE UM POLINÔMIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia

Aprovada em: 29 de Novembro de 2019

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Dr. José Ederson Melo Braga
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva
Universidade da integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

À minha família

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo auxílio nesta dura jornada, pela vida, pelos companheiros que encontrei ao longo do curso e pelas amizades originadas dessa aproximação.

Aos professores do curso pela dedicação mostrada nas aulas, com o objetivo único de nos possibilitar uma boa ampliação do nosso conhecimento.

Em especial ao meu orientador Prof. Dr José Alberto Duarte Maia pela orientação paciente, pelo incentivo e pelas sugestões que contribuíram decisivamente na produção deste trabalho, bem como pelo tempo disponibilizado além do horário das aulas e pela forma paternal com que me ajudou no estudo do tema escolhido.

Aos professores participantes da banca examinadora Prof. Dr. José Éderson Melo Braga e o Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva pela disponibilização do tempo e pelas valiosas observações a respeito de pontos específicos no trabalho.

A todos os colegas da turma pelo ambiente fraterno que se formou entre nós.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“O fraco nunca perdoa. O perdão é a característica do forte.”
(Mahatma Gandhi)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma solução para um problema de Chebyshev, surgido 1854, a respeito da menor variação de um polinômio. Para que o objetivo seja alcançado, iniciaremos por algumas definições e teoremas matemáticos que nos fornecerão a base necessária para a resolução do problema. Dando continuidade à resolução, criaremos notações próprias, com o objetivo único de facilitar o entendimento do que será exposto, acompanhado da definição da variação de um polinômio, algumas propriedades que auxiliarão no desenvolvimento da resolução do problema, bem como representações gráficas dos tipos de polinômios envolvidos no problema. Por fim, teremos a definição dos polinômios de Chebyshev dos tipos T_n e U_n, bem como suas respectivas representações gráficas, relações de recorrências, algumas propriedades e, por fim a relação existente entre os polinômios T_n e U_n.

Palavras-chave: Variação de um polinômio. Polinômios de Chebyshev.

ABSTRACT

The present work aims to present a solution to a Chebyshev problem, arising in 1854, concerning the smallest variation of a polynomial. In order to reach the goal, we will start with some mathematical definitions and theorems that will provide us with the necessary basis for solving the problem. Continuing the resolution, we will create our own notations, with the sole purpose of facilitating the understanding of what will be exposed, accompanied by the definition of the variation of a polynomial, some properties that will help in the development of the problem resolution, as well as graphical representations of the polynomial types involved in the problem. Finally, we will have the definition of Chebyshev polynomials of the types T_n and U_n, as well as their respective graphical representations, recurrence relations, some properties and, finally, the relation between the polynomials T_n and U_n.

Keywords: Variation of a polynomial. Chebyshev Polynomials.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em 1854 , o Matemático russo *Pafnuty Chebyshev* lança um questionamento, no meu ponto de vista, um tanto interessante*: "Dentre todos os polinômios mônicos de grau n, qual deles possui a menor variação?".*

A primeira vista, achei que o problema parecia ter uma solução fácil, mas constatei que apresentava vários obstáculos em sua resolução.

Este trabalho objetiva apresentar uma solução para o problema proposto por Chebyshev, contida num artigo na Revista Kvant Selecta, de autoria de Serge Tabachnikov. Para que isso seja possível, dividimo-lo em 3 capítulos:

No capítulo 1, apresentaremos algumas definições e Teoremas importantes na Matemática, que facilitarão a compreensão da resolução, bem como nos fornecerão um embasamento teórico apropriado para esse objetivo.

No 2° capítulo, conceituaremos a Variação de um Polinômio e criaremos uma notação específica para a mesma, objetivando uma fácil compreensão do que será exposto. Avançando um pouco mais, apresentaremos algumas propriedades da Variação de um polinômio, acompanhadas de uma explicação sucinta e resolução de alguns exemplos. Em seguida, abordaremos a resolução do problema de Chebyshev propriamente dita, auxiliado por representações gráficas dos polinômios envolvidos.

O capítulo 3 tem como objetivo definir os polinômios de Chebyshev dos tipos T_n e U_n, apresentar o cálculo dos primeiros polinômios e suas respectivas representações gráficas, além de suas relações de recorrência, a paridade e os zeros de T_n e U_n, os extremos do polinômio T_n e finalmente estabelecer relações entre T_n e U_n.

2 DEFINIÇÕES E TEOREMAS IMPORTANTES

As Definições e Teoremas que apresentaremos a seguir terão um papel importante para uma melhor compreensão desse trabalho.

2.1 Polinômio

Definição 2.1.1 Um polinômio sobre $\mathbb{R}$ é uma expressão do tipo

$$p(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \ ,$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $a_j \in \mathbb{R}$, para $j = 0, 1, \ldots, n$. Também dizemos que $p(X)$ é um polinômio com coeficientes reais. O conjunto de todos os polinômios sobre $\mathbb{R}$ será denotado por $\mathbb{R}$[X].

Definição 2.1.2 Considere $p(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ um polinômio não nulo, com $a_n \neq 0$. O grau de $p(X)$ é definido como sendo o inteiro n. Usaremos a seguinte notação para indicar o grau do polinômio

$\partial p = n$ (*lê-se* "o grau de $p(X)$ é igual a n")

Nesse contexto, o coeficiente a_n é chamado de coeficiente líder de $p(X)$. Dizemos que $p(X)$ é um polinômio mônico se ocorrer $a_n = 1$.

Observação: É importante dizer que não se define grau para o polinômio nulo. De agora em diante, sempre que considerarmos um polinômio $p(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$, teremos $a_n \neq 0$.

2.2 Raiz de um Polinômio

Dados um polinômio $p(X) \in \mathbb{R}[X]$ e um número real $\beta \in \mathbb{R}$, podemos considerar o número real $p(\beta) = a_0 + a_1 \beta + \ldots + a_n \beta^n$. Com isso estamos associando a um polinômio $p(X) \in \mathbb{R}[X]$ uma função real de uma variável real, a qual dizemos ser determinada pelo polinômio. De um modo geral, diremos que uma função real de uma variável real é uma função polinomial se ela for determinada por algum polinômio.

Definição 2.2.3 Considere o polinômio $p(X) \in \mathbb{R}[X]$. Diz-se que $\beta \in \mathbb{R}$ é uma raiz de $p(X)$ se $p(\beta) = 0$. Ou seja, uma raiz de um polinômio é nada mais que um zero da função polinomial correspondente.

Exemplo 2.2.1 Determinar as raízes do polinômio $p(X) = X^2 - 1$.

Solução: Determinar as raízes do polinômio $p(X) = X^2 - 1$ é encontrar $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $p(\beta) = 0$. Ou seja,

$$\begin{aligned} &\beta^2 - 1 = 0 \\ &\beta^2 = 1 \\ &\beta = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \beta = 1 \; ou \; \beta = -1 \end{aligned}$$

2.3 Operações com Polinômios

2.3.1 Adição

Sejam os polinômios $p(X) = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j$ e $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$ sobre $\mathbb{R}$, onde $m \in \mathbb{N}$ e $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, para $j = 0, 1, \ldots, m$. Definimos a soma entre polinômios por

$$p(X) + g(X) = \sum_{j=0}^{m} (a_j + b_j) X^j$$

Observação: Caso falte algum termo de um dos polinômios envolvidos na adição, devemos escrever os polinômios na forma completa, para os graus sejam igualados.

Exemplificando, temos:

Sejam $p(X) = 4X^5 + 3X^2 + X + 8$ e $g(X) = 6X^4 + 2X^3 + 7X + 1$ dois polinômios. Qual o polinômio resultante da soma de p com g?

Para realizarmos essa operação de soma, faremos o seguinte: Escrevemos p e g na forma completa, ou seja

$p(X) = 4X^5 + 0X^4 + 0X^3 + 3X^2 + X + 8$ e $g(X) = 0X^5 + 6X^4 + 2X^3 + 0X^2 + 7X + 1$. Após, efetuaremos a soma da seguinte forma:

$$p(X)+g(X)=(4+0)X^5+(0+6)X^4+(0+2)X^3+(3+0)X^2+(1+7)X+(8+1)$$

$$p(X)+g(X)=4X^5+6X^4+2X^3+3X^2+8X+9$$

Propriedade do Grau (adição) 2.3.1. *Sejam os polinômios* $p(X)=\sum_{j=0}^{m} a_j X^j$ *e* $g(X)=\sum_{j=0}^{n} b_j X^j$ sobre $\mathbb{R}$[X]. Tem-se

$$\partial(p(X)+q(X)) \leq Max\{\partial p(X), \partial q(X)\} = \max\{m, n\}.$$

Demonstração:

Se $p(X)=0$ e $g(X)=0$ nada se tem a provar.

Considere agora $p(X)=a_0+a_1X+...+a_mX^m$ e $g(X)=b_0+b_1X+...+b_nX^n$, polinômios não nulos de grau *m* e *n,* respectivamente. Suponha, sem perda de generalidade, que $m \geq n$. Neste caso, o termo dominante de $p(X)+g(X)$ será a_m e assim $\partial(p(X)+g(X))=m=\max\{\partial f(X), \partial g(X)\}$. Caso $m=n$, temos que o termo dominante de $f(X)+g(X)$ será a_m+b_m, deste modo $\partial(p(X)+g(X))=m$, se ocorrer $a_m+b_n \neq 0$ ou $\partial(p(X)+g(X))<m$, caso $a_m+b_m=0$.

2.3.2 Produto

Sejam os polinômios $f(X)=\sum_{j=0}^{m} a_j X^j$ e $p(x)=\sum_{j=0}^{n} b_j X^j$ sobre $\mathbb{R}$, onde $m, n \in \mathbb{N}$ e $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, para $j=0,1,\ldots,m$ e $k=0,1,\ldots,n$. Definimos produto entre polinômios por

$$f(X).p(X)=\sum_{i=0}^{m+n} c_i X^i,$$

onde temos

$$\begin{array}{llll} c_0 = a_0.b_0 & & & \\ c_1 = a_0.b_1 & + a_1.b_0 & & \\ c_2 = a_0.b_2 & + a_1.b_1 & + a_2.b_0 & \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & & \ddots \end{array}$$

$$c_i = a_0.b_i + a_1.b_{i-1} + a_2.b_{i-2} + \ldots + a_i.b_0$$
$$\vdots$$
$$c_{m+n} = a_m.b_n$$

Observação: *Aqui se verifica o uso da propriedade distributiva.*

Propriedade do Grau (produto)2.3.2. *Sejam os polinômios* $p(X) = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j$ *e* $g(X) = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$ sobre $\mathbb{R}$[X]. Tem-se

$$\partial(p(X).g(X)) = \partial p(X) + \partial g(X).$$

Demonstração: Como $\partial(p(X)) = m$ e $\partial(g(X)) = n$, temos que $a_m \neq 0$ e $b_n \neq 0$. Na realização do produto $p(X).g(X)$, pela definição, o termo de variável com maior expoente será $c_{m+n} = a_m.b_n$. Por outro lado, o coeficiente do termo X^k no produto $f(X).g(X)$ é

$$c_k = a_0.b_k + a_1.b_{k-1} + \ldots + a_{k-1}.b_1 + a_k.b_0,$$

e assim, para $k > m + n$, temos que esse coeficiente é nulo, pois

$a_i = 0$, para $i > m$ e $b_j = 0$, para $j > n$

Logo, como $a_m.b_n \neq 0$,

$$\partial(p(X).g(X)) = m + n = \partial(p(X)) + \partial(g(X)).$$

2.4 Algoritmo da Divisão

Nessa secão vamos apresentar o Algorítmo da Divisão, cuja demonstração é fortemente inspirada na demonstração contida no livro *Polinômios e Equações Algébricas,* da Coleção PROFMAT – SBM.

Teorema (Algoritmo da Divisão) 2.4.1 *Consideremos dois polinômios* $p, g \in \mathbb{R}[X]$, *com g não nulo. Então, existe um único par de polinômios reais q(X) e r(X) onde se verifica as condições*

$$p = gq + r \quad e \quad 0 \leq \partial r < \partial g .$$

Prova: *Considerando que*

$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$ *e* $g(X) = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + ... + b_1 X + b_0$, *com* $a_m \neq 0$ *temos:*

Provaremos agora, a existência de q(X) e r(X)

Se $p(X) \equiv 0$, então tome $q(X) = r(X) = 0$

Suponha que $p(X) \neq 0$. Se $\partial p(X) < \partial g(X)$, então tome $q(X) = 0$ e $p(X) = r(X)$.

Podemos supor $\partial p(X) \geq \partial g(X)$. A demonstração é por indução sobre $\partial g(X)$.

Se $\partial g(X) = 0$, então $g(X) \equiv b_0 \neq 0$. Daí, tomamos $q(X) = b_0^{-1}.p(X)$ e $r(X) \equiv 0$.

Suponhamos o resultado válido para polinômios com grau menor do que $\partial p(X)$, vamos mostrar que vale para $p(X)$.

Seja $p_1(X)$ o polinômio definido por

$$p_1(X) = p(X) - \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} g(X) .$$

Segue que

$$p(X) = \frac{a_m}{b_n} X^{m-n} g(X) + p_1(X) \text{ e } \partial p_1 < \partial p$$

Então, por hipótese de indução, $\exists\, q_1(X), r_1(X) \in \mathbb{R}[X]$ tais que

$$p_1(X) = q_1(X).g(X) + r_1(X)\text{, com } r_1(X) = 0 \text{ ou } \partial r_1 < \partial g\,.$$

Por conseqüência,

$$p(X) = \left(\frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + q_1(X)\right) g(X) + r_1(X)\,.$$

Agora, basta tomar $q(X) = \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + q_1(X)$ e $r(X) = r_1(X)$, o se completa a prova da existência.

Unicidade de q(X) e r(X)

Suponhamos que existam os polinômios $q_1(X),\ q_2(X), r_1(X), r_2(X) \in \mathbb{R}$ tais que

$$q_1(X)g(X) + r_1(X) = p(X) = q_2(X)g(X) + r_2(X)\text{, (i)}$$

com $\partial r_1 < \partial g$, $\partial r_2 < \partial g$, onde $r_1(X) = 0$ ou $\partial r_i < \partial g$ e $r_2(X) = 0$ ou $\partial r_2 < \partial g$.

Assim,

$$q_1(X)g(X) + r_1(X) = q_2(X)g(X) + r_2(X)$$
$$q_1(X)g(X) - q_2(X)g(X) = r_2(X) - r_1(X)$$
$$[q_1(X) - q_2(X)].g(X) = r_2(X) - r_1(X)$$

Assim, se tivermos $q_1(X) \neq q_2(X)$, então $r_1(X) \neq r_2(X)$. Mas por (i), temos

$$\partial g(X) \leq \partial g(X) + \partial(q_1(X) + q_2(X))$$
$$\partial g(X) = \partial(g(X)(q_1(X) - q_2(X)))$$
$$\partial g(X) = \partial(r(X)_2 - r_1(X))$$
$$\partial g(X) < \partial g(X) \leq \max\{\partial r_2, \partial r_1\}$$
$$\partial g(X) < \partial g(X)$$

o que gera um absurdo! Logo $q_1(X) = q_2(X)$ e $r_1(X) = r_2(X)$.

Como conseqüência do Algorítmo da Divisão, temos a proposição que fala sobre o número máximo de raízes de um polinômio não nulo:

Proposição 2.4.1 Seja $p(X)$ um polinômio não nulo com $p(X) \in \mathbb{R}[X]$, cujo grau é igual a n. Então $p(X)$ possui no máximo n raízes em $\mathbb{R}[X]$, onde $\partial p(X) = n$.

Demonstração:

Caso não exista $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $p(\beta) = 0$, a proposição está provada.

Seja $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $p(\beta) = 0$. Temos que $g(X) = X - \beta \in \mathbb{R}[X]$. Logo, pelo *Algoritmo da Divisão*, temos que $\exists q(X), r(X) \in \mathbb{R}[X]$ tais que $p(X) = q(X).(X - \beta) + r(X)$, onde $r(X) = 0$ ou $\partial r(X) < \partial g(X) = 1$ e, neste caso, $r(X) = b_0$ é um polinômio constante. Como $p(X) = q(X).(X - \beta) + b_0$ e $p(\beta) = 0$, temos que $p(\beta) = q(\beta).(\beta - \beta) + b_0 \Rightarrow b_0 = 0$. Como $\partial p(X) = \partial q(X) + \partial(X - \beta)$, segue que $\partial q(X) = n - 1$.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se tivermos $p(\alpha) = (\alpha - \beta).q(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$ ou α é raiz de $q(X) \in \mathbb{R}[X]$. Assim as raízes de $p(X)$ são as raízes de $q(X)$ e β.

Para finalizar a demonstração, utilizamos indução sobre n. Se $n = 0$, p não possui raízes em $\mathbb{R}$ e, nesse caso, não há o que demonstrar.

Suponhamos que vale para $q(X)$ com $\partial q(X) = n - 1$, ou seja, $q(X)$ possui no máximo $n - 1$ raízes em $\mathbb{R}$. Por construção $p(X) = q(X).g(X)$ e como as raízes de $q(X)$ e β são as raízes de $p(X)$, segue que $p(X)$ possui no máximo n raízes.

2.5 Teorema Fundamental da Álgebra

Iniciamos esta subseção tomando como referência as demonstrações contidas no livro do Prof. Caminha , página 114.

O Teorema Fundamental da Álgebra foi apresentado pela primeira vez em 1799, na tese de doutorado de Carl Friedrich Gauss, e diz que:

"Todo polinômio $p \in \mathbb{C}[X]$ não constante possui ao menos uma raiz complexa."

A demonstração desse teorema será encontrada em [5], página 70.

Lema 2.5.1

Se $p \in \mathbb{R}[X]$ é mônico e não tem raízes reais, então existem polinômios $g, h \in \mathbb{R}[X]$ tais que $p = g^2 + h^2$. Em particular, $p(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$**.**

Prova.

Existem números complexos não reais $z_1, z_2, \ldots, z_k$ tais que

$$p(X) = \prod_{j=1}^{k} (X - z_j).(X - \bar{z}_j).$$

Agora, se $z_j = a_j + ib_j$, com $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned}(X - z_j)(X - \bar{z}_j) &= (X - a_j - ib_j)(X - a_j + ib_j)\\ &= (X - a_j)^2 - (ib_j)^2\\ &= (X - a_j)^2 + b_j^2,\end{aligned}$$

a soma dos quadrados de dois polinômios de coeficientes reais (um deles constante).

Basta, agora, aplicar várias vezes o seguinte argumento: para $g_1, g_2, h_1, h_2 \in \mathbb{R}[X]$, temos

$$\left(g_1^2 + h_1^2\right)\left(g_2^2 + h_2^2\right) = \left(g_1 g_2 + h_1 h_2\right)^2 + \left(g_1 h_2 - g_2 h_1\right)^2.$$

Para o que falta, segue da primeira parte que

$$p(x) = g(x)^2 + h(x)^2 \geq 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$; mas, como p não tem raízes reais, a desigualdade acima deve ser estrita, para todo $x \in \mathbb{R}$. (Demonstração retirada do livro *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 6. 2ª ed. 2016 – CAMINHA)

2.6 Teorema do Valor Intermediário (Bolzano)

Se $f \in \mathbb{R}[X]$ e $a < b$ são números reais tais que $f(a).f(b) < 0$, então existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$.

Prova.

Supondo, sem perda de generalidade, que f é mônico e $f(a) < 0 < f(b)$, segue da última parte do lema anterior que f tem ao menos uma raiz real. Sejam, pois, $a_1 \leq \ldots \leq a_k$ as raízes reais de f, repetidas de acordo com suas multiplicidades. Se $g \in \mathbb{R}[X]$ é tal que

$$f(X) = g(X)(X - a_1)\ldots(X - a_k),$$

então g é mônico e não possui raízes reais, de sorte que, novamente pelo lema anterior, $g(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por contradição, suponha que não há raiz de f no intervalo (a,b) e considere três casos separadamente:

(i.) $a_k < a$: temos

$$f(a) = g(a)(a - a_1)\ldots(a - a_k) > 0$$

uma contradição.

(ii.) $b < a_1$: segue de $f(b) > 0$ que

$$g(b)(b-a_1)\dots(b-a_k)>0$$

e, daí, k é par (uma vez que $g(b)>0$ e $b-a_1<0$, para $1\leq i\leq k$).

Por outro lado, segue de $f(a)<0$ que

$$g(a)(a-a_1)\dots(a-a_k)<0$$

e, daí, k é ímpar (uma vez que $g(a)>0$ e $a-a_1<0$, para $1\leq i\leq k$).

Portanto, chegamos a uma contradição.

(iii.) $a_l<a<b<a_{l+1}$, para algum $1\leq l<k$: chegamos a um absurdo de modo análogo ao item anterior. (Por exemplo, $0<f(a)=\underbrace{g(a)}_{>0}\underbrace{(a-a_1)\dots(a-a_l)}_{>0}\underbrace{(a-a_{l+1})\dots(a-a_k)}_{<0}$ implica $k-l$ par.)

O Teorema do Valor Intermediário assegura que todo elemento do domínio possui uma imagem em um intervalo do contradomínio, isto é, se o domínio é um intervalo fechado, aberto ou semiaberto, então a imagem também é respectivamente um intervalo fechado, aberto ou semiaberto no contradomínio de f. (Demonstração retirada do livro *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 6. 2ª ed. 2016 – CAMINHA)

2.7 Teorema de Weierstrass

O teorema do valor extremo foi, originalmente, provado por Bernard Bolzano, nos anos 30 do século XIX, em seu trabalho *Function Theory,* mas a obra permaneceu não publicada até a década de 1930. A prova de Bolzano consistiu em mostrar que em uma função contínua em um intervalo fechado é limitada, e depois mostrou que a função atingia um valor máximo e mínimo. Ambas as provas envolviam o que, hoje, é conhecido como Teorema de Bolzano-Weierstrass. O mesmo resultado foi descoberto, depois, por Weierstrass, no ano de 1860.

Teorema 2.7.1 *Se* $f:[a,b]\to R$ *é continua, então* f *assume máximo e mínimo em* $[a,b]$. *Isto é, existem* $x_1,x_2\in[a,b]$ *tais que*

$$m = f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) = M, \quad \forall x \in [a,b]$$

Demonstração

Considere f contínua em $[a,b]$ e limitada em $[a,b]$.

Definindo que $A = \{f(x) / x \in [a,b]\}$ e que admitirá supremo e ínfimo, onde

$$M = \sup\{f(x) / x \in [a,b]\} \quad \text{e} \quad m = Inf\{f(x) / x \in [a,b]\}.$$

Assim, para $\forall x \in [a,b]$, $m \le f(x) \le M$.

Mostraremos que $M = f(x_2)$ para algum $x_2 \in [a,b]$.

Se tivéssemos $f(x) < M$ para $\forall x \in [a,b]$, uma função g, onde

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}, \; x \in [a,b],$$

Seria contínua em $[a,b]$, mas não limitada em $[a,b]$, que é uma contradição, pois se g fosse limitada em $[a,b]$, então existiria um $k > 0$ tal que $\forall x \in [a,b]$, teríamos

$$0 < \frac{1}{M - f(x)} < k$$

E, portanto, para $\forall x \in [a,b]$,

$$f(x) < M - \frac{1}{k}$$

E assim M não seria supremo de $A = \{f(x) / x \in [a,b]\}$.

Segue que $f(x) < M$ para $\forall x \in [a, b]$ não pode ocorrer, logo devemos ter $M = f(x_2)$ para algum $x_2 \in [a, b]$. Com raciocínio análogo, prova-se que $f(x_1) = m$ para algum $x_1 \in [a, b]$.(Demonstração obtida no livro *Um curso de cálculo: vol.1. 5. ed.* (2007) – GUIDORIZZI)

3 A VARIAÇÃO DE UM POLINÔMIO

Como toda função polinomial é uma função contínua, o Teorema de Weierstrass nos garante que em um intervalo fechado essa função assumirá um valor máximo e um valor mínimo. Dessa forma, dado um polinômio $p(X) \in \mathbb{R}[X]$ e dado um intervalo fechado [a,b], temos que existem α e β no intervalo $[a,b]$ tais que

$$p(\alpha) \leq p(X) \leq p(\beta) \text{, para todo } x \in [a,b]$$

Nesse contexto diremos que $p(\alpha)$ é o valor mínimo de $p(X)$ e $p(\beta)$ o seu valor máximo.

A Variação do Polinômio $p(X)$ é definida como o maior dentre os valores $|p(\alpha)|$ e $|p(\beta)|$.

Notação: a variação de um polinômio $p(X)$ no intervalo $[a,b]$ será denotada por $V(p(X),[a,b])$. Portanto,

$$V(p(X),[a,b]) = Max\{|p(\alpha)|,|p(\beta)|\}$$

Observação: *A variação do polinômio p(X) é ninguém menos que o valor máximo da função y=*$|p(x)|$ *no intervalo [a, b]. De modo geral, para qualquer função f contínua no intervalo [a, b], a sua variação é definida como o valor máximo de* $|f|$ *nesse intervalo.*

Para ilustrar a definição de Variação de um Polinômio, consideremos os exemplos.

Exemplo 3.1 Considerando o polinômio $p(X) = X^2 - 6X + 12$, onde $X \in [1,4]$, sabemos que o seu gráfico é uma parábola com concavidade voltada para cima, devido ao fato do coeficiente de X^2 ser positivo. Logo, a função atinge o seu mínimo em $X_v = -\frac{(-6)}{2} = 3$, que pertence ao intervalo dado. Portanto o valor mínimo no intervalo é $p(3) = 3^2 - 6.3 + 12 = 3$.

Por outro lado, o valor máximo será atingido em dos extremos do intervalo. Calculando esses valores, obtemos

$$p(1)=1^2-6.1+12=7 \quad \text{e} \quad p(4)=4^2-6.4+12=4$$

Pela definição de Variação de um polinômio, segue que $V(p(X),[1,4])=7$.

O gráfico de $p(X)$ a seguir mostra claramente o que acabamos de afirmar.

Figura 1

Fazendo o mesmo com o polinômio $g(X)=-2X^2+8X-6$, com $X\in[1,4]$. Aqui temos um polinômio do 2° grau com a concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de X^2 é negativo. Logo, o polinômio possui valor máximo, que será calculado pela substituição da abscissa do vértice no polinômio. Ou seja

$$X_v=-\frac{8}{2.(-2)}=2 \Rightarrow p(2)=-2.2^2+8.2-6=2$$

Calculando o valor de seus extremos, obtemos

$$p(1)=-2.1^2+8.1-6=0 \quad \text{e} \quad p(4)=-2.4^2+8.4-6=-6$$

O gráfico de $g(X)$ abaixo ilustra o que acabamos de calcular.

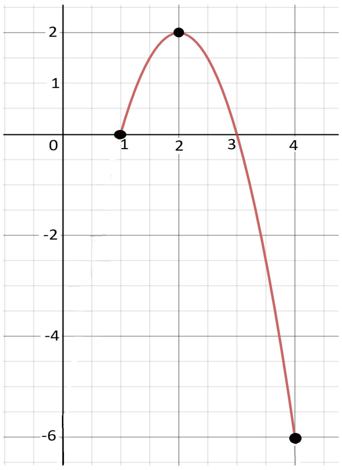

Figura 2

E pela definição de Variação de um polinômio, temos $V(p(X),[1,4]) = |p(4)| = 6$, por ser o maior valor dentre $|p(1)|$ e $|p(2)|$.

Observação: Se tivéssemos feito o gráfico de $|g(X)|$, teríamos conseguido esse resultado com maior facilidade. Vejamos:

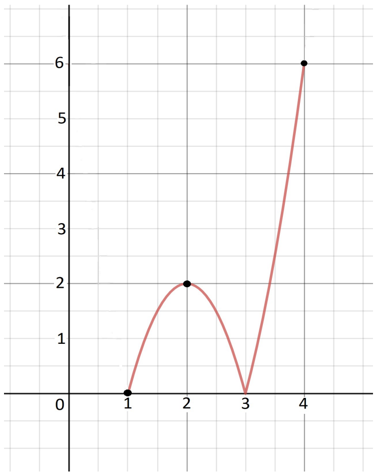

Figura 3

3.1 Propriedades da Variação de um Polinômio

A seguir, apresentaremos algumas propriedades da Variação de um polinômio que serão importantes no decorrer desse capítulo.

i.) Se $V(p(X),[a,b]) = c$, então $\forall X \in [a,b]$, vale $|\, p(X) \,| \leq c$.

ii.) $V(tp(X),[a,b]) = |t| V(p(X),[a,b])$

iii.) Se $f:[c,d] \to [a,b]$ é uma função contínua e sobrejetiva então

$$V(p(X),[a,b]) = V(pof(X),[c,d])$$

iv) Se $c \in [a,b]$ então

$$V(p(X),[a,b]) = \max\{V(p(X),[a,c]), V(p(X),[c,b])\}$$

Esclarecendo melhor a respeito das propriedades, temos:

- A propriedade i.) nos diz que o gráfico de $p(X)$ está contido na faixa $[-c,c]$, para $x \in [a,b]$. Geometricamente

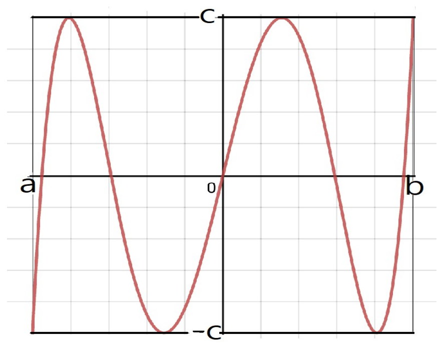

Figura 4

- A propriedade ii.) nos diz que, mesmo fixando o grau do polinômio e o intervalo $[a,b]$, podemos obter polinômios com variações tão pequenas quanto queiramos, bastando tomar valores suficientemente pequenos para o parâmetro t.

Para um exemplo de aplicação, tomando o polinômio $p(X) = 3X^2 - 5X + 2$ e o parâmetro $t = 2$, vamos calcular a variação de $p(X)$ e $2p(X)$ no intervalo $[0,2]$.

O polinômio $p(X)=3X^2-5X+2$, no intervalo $X\in[0,2]$, sabemos que o seu gráfico é uma parábola com concavidade voltada para cima, devido ao fato do coeficiente de X^2 ser positivo. Logo, calcularemos sua abscissa do vértice por

$X_v=-\dfrac{(-5)}{6}=\dfrac{5}{3}$, que pertence ao intervalo dado. Portanto o valor mínimo no intervalo é

$$p\left(\frac{5}{3}\right)=3.\left(\frac{5}{6}\right)^2-5.\left(\frac{5}{6}\right)+2=\frac{75}{36}-\frac{25}{6}+2=-\frac{3}{36}$$

Por outro lado, o valor máximo será atingido em um dos extremos do intervalo. Calculando esses valores, obtemos

$$p(0)=3.0^2-5.0+2=2 \quad \text{e} \quad p(2)=3.2^2-5.2+2=4$$

Pela definição de Variação de um polinômio, segue que $V(p(X),[1,4])=4$,

onde se verifica que

$$V(2p(X),[0,2])=2.V(p(X),[0,2])=8$$

- A propriedade iii) permite reduzir o cálculo da variação de um polinômio ou de uma função sobre um certo intervalo ao cálculo da variação de um outro polinômio ou função sobre um outro intervalo. Para ilustrar esse fato, vamos considerar o seguinte exemplo:

Considere a função $f:[1,4]\to[1,2]$, dada por $f(x)=\sqrt{x}$. Seja $p(X)=3X^2-5$. Calculando os extremos em $p(X)$ no intervalo [1,2].

$p(1)=3.1^2-5=-2$ e $p(2)=3.2^2-5=7$

Logo, $V(p(X),[1,2])=7$

Calculando $p(f(X))$ e os valores dos extremos em [1,4].

$$p(f(X))=3\left(\sqrt{X}\right)^2-5$$
$$p(f(X))=3X-5\,,$$

onde $p(f(1)) = 3.1 - 5 = -2$ e $p(f(4)) = 3.4 - 5 = 7$

Logo, $V(p(f(X)), [1, 4]) = 7$

Portando $V(p(X), [1, 2]) = V(p(f(X)), [1, 4]) = 7$

3.2 Variação de um polinômio Quadrático

Dado $p(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$, vamos determinar a variação de $p(X)$ no intervalo $[a, b]$.

Inicialmente, observe que pela propriedade (ii) tomando $t = -1$, segue que

$$V(-p(X), [a, b]) = V(p(X), [a, b])$$

Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\alpha > 0$.

Para continuar, vamos tratar o caso $\beta = 0$. Logo, ficamos com $p(X) = \alpha X^2 + \gamma$.

Ainda pela propriedade (ii), temos que

$$V(p(X), [a, b]) = \alpha V(q(x), [a, b]), \text{ onde } q(x) = x^2 + \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Portanto, basta calcularmos $V(q(x), [a, b])$. Para isso vamos considerar dois casos:

1° Caso: $0 \notin [a, b]$

Nesse caso os valores máximo e mínimo de $q(x)$ são atingidos nos extremos. Portanto, temos

$$V(q(x), [a, b]) = \max\left\{\left|a^2 + \frac{\gamma}{\alpha}\right|, \left|b^2 + \frac{\gamma}{\alpha}\right|\right\}$$

2° Caso: $0 \in [a, b]$

Nesse caso o valor mínimo de $q(x)$ em $[a, b]$ é $q(0) = \frac{\gamma}{\alpha}$ e o valor máximo é o maior dos números $a^2 + \frac{\gamma}{\alpha}$ e $b^2 + \frac{\gamma}{\alpha}$. Daí, segue que:

$$V(q(x), [a, b]) = Max\left\{ \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|, \left|a^2 + \frac{\gamma}{\alpha}\right|, \left|b^2 + \frac{\gamma}{\alpha}\right| \right\}$$

Consequentemente $V(q(x), [a, b]) = \begin{cases} \max |p(a)|, |p(b)|, \, se \; 0 \notin [a, b] \\ \max\{|p(0)|, |p(a)|, |p(b)|\}, \, se \; 0 \in [a, b] \end{cases}$.

Agora, consideramos o caso geral $p(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$, com $\beta \neq 0$.

Nesse caso, considerando a função afim $f : \left[a + \frac{\beta}{2\alpha}, b + \frac{\beta}{2\alpha} \right] \to [a, b]$, definida por $f(X) = X - \frac{\beta}{2\alpha}$, temos que

$$\begin{aligned} pof(X) &= \alpha\left(X - \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \beta\left(X - \frac{\beta}{2\alpha} \right) + \gamma \\ &= \alpha\left(X^2 - \frac{\beta}{\alpha} X + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} \right) + \beta\left(X - \frac{\beta}{2\alpha} \right) + \gamma \\ &= \alpha X^2 - \beta X + \frac{\beta^2}{4\alpha} + \beta X - \frac{\beta^2}{2\alpha} + \gamma \\ &= \alpha X^2 + \underbrace{\alpha\left(-\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \beta\left(-\frac{\beta}{2\alpha} \right) + \gamma}_{p\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)} \end{aligned}$$

O que resulta em

$$pof(X) = \alpha X^2 + p\left(-\frac{\beta}{2\alpha} \right).$$

Logo

$$pof\left(a+\frac{\beta}{2\alpha}\right)=p(a) \quad \text{e} \quad pof\left(b+\frac{\beta}{2\alpha}\right)=p(b).$$

Desse modo

$$V\big(p(X),[a,b]\big)=V\left(pof(X),\left[a+\frac{\beta}{2\alpha},b+\frac{\beta}{2\alpha}\right]\right)$$

$$=\begin{cases}\max\{|p(a)|,|p(b)|\}, se\ 0\notin\left[a+\dfrac{\beta}{2\alpha},b+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right]\\ \max\left\{\left|p\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)\right|,|p(a)|,|p(b)|\right\}, se\ 0\in\left[a+\dfrac{\beta}{2\alpha},b+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right]\end{cases}.$$

De outra forma

$$V(p(X),[a,b])=\begin{cases}\max\{|p(a)|,|p(b)|\}, se\ -\dfrac{\beta}{2\alpha}\notin[a,b]\\ \max\left\{\left|p\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)\right|,|p(a)|,|p(b)|\right\}, se\ -\dfrac{\beta}{2\alpha}\in[a,b]\end{cases}.$$

3.3 O Problema de Chebyshev

Em 1854, *Pafnuty Lvovich Chebyshev propôs o seguinte problema:*

"Dentre todos os polinômios mônicos de grau n, $p_n(X)=X^n+a_1X^{n-1}+...+a_n$*, qual deles possui a menor variação em* $X\in[a,b]$*?"*

Faremos uma abordagem do problema por meios geométricos.

Considerando $X\in[a,b]$ e $p(X)\in[m,M]$, onde m é o valor mínimo e M é máximo valor de $|p(X)|\le c$. Se a variação do polinômio for igual a c, teremos o gráfico do polinômio no interior da faixa $|y| \leq c$. Ou seja

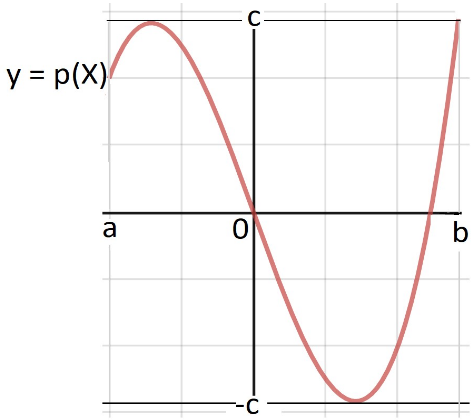

Figura 5

É possível obter uma função bijetiva afim $f:[-2,2] \rightarrow [a,b]$. Daí, compondo pof temos um polinômio de mesmo grau que p e com mesma variação.

Além disso, como f é bijetiva, podemos obter $p(X)$ a partir de $pof(X)$. Assim, se resolvermos o problema no intervalo de $[-2,2]$, poderemos achar a solução também em $[a,b]$.

Escolhendo $X \in [-2,2]$, começaremos a resolução do problema tratando dos polinômios de 1° e 2° graus, inicialmente.

Para $n = 1$, temos o polinômio do tipo $p(X) = X + k$, com $X \in [-2,2]$ e $\forall k \in \mathbb{R}$, onde obteremos que máximo e o mínimo são atingidos nos extremos. Calculemos $p(-2) = k - 2$ e $p(2) = k + 2$.

Portanto,

$$V(X + k, [-2,2]) = \max\{|k-2|, |k+2|\}$$

Fazendo a construção gráfica no parâmetro k de $|k-2|$ e $|k+2|$, iremos obter:

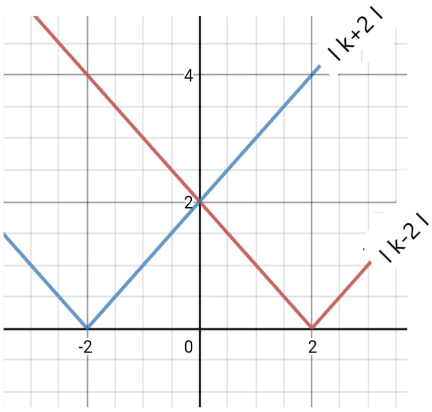

Figura 6

Logo

$$V=\left(X+k,\left[-2,2\right]\right)=\begin{cases}k+2,\ se\ k\geq 0\\ 2-k,\ se\ k<0\end{cases}$$

Portanto, $V\left(X+k,\left[-2,2\right]\right)\geq 2$ e o mínimo é atingido quando $k=0$. logo, $p(X)=X$ é a solução do problema de Chebyshev para $n=1$ no intervalo $[-2,2]$.

Agora para obtermos a solução do problema de Chebyshev no caso $n=1$, em um intervalo arbitrário $[a,b]$, consideremos a bijeção afim $f:\left[a,b\right]\rightarrow\left[-2,2\right]$ dada por

$$f(X)=\frac{4}{b-a}X-\frac{2(a+b)}{b-a}.$$

Compondo essa função com o polinômio $p(X)=X$, obtemos um polinômio de grau 1 cuja variação em $[a,b]$ é 2, pois coincide com a variação de $p(X)$ em $[-2,2]$. No entanto, o polinômio $pof(X)$ não é mônico, o que nos leva a considerar o polinômio mônico

$$p_1(X)=\frac{b-a}{4}.pof(X)=X-\frac{(a+b)}{2},$$

cuja variação em $[a,b]$ é $V\left(p_1(X),\left[a,b\right]\right)=\frac{b-a}{4}.2=\frac{b-a}{2}$.

Por outro lado, dado qualquer polinômio mônico de grau 1 $q(X) = X + k$, vamos mostrar que $V\big(q(X), [a, b]\big) \geq \dfrac{b-a}{2}$.

De fato, compondo $q(X)$ com $f^{-1}(X) = \dfrac{(b-a)X + 2(a+b)}{4} = \dfrac{b-a}{4}X + \dfrac{a+b}{2}$, obtemos $qof^{-1}(X) = \dfrac{b-a}{4}X + \dfrac{a+b}{2} + k$, cuja variação em $[-2, 2]$ coincide com a variação de $q(X)$ em $[a, b]$.

Daí, o polinômio $q_1(X) = \dfrac{4}{b-a}.qof^{-1}(X) = X + \dfrac{4}{b-a}.\left(\dfrac{a+b}{2} + k\right)$ é tal que

$$V\big(q_1(X), [-2, 2]\big) = \frac{4}{b-a} V\big(qof^{-1}(X), [-2, 2]\big) = \frac{4}{b-a} V\big(q(X), [a, b]\big)$$

E além disso, $V\big(q(X), [-2, 2]\big) \geq V\big(X, [-2, 2]\big) = 2$.

Logo, $V\big(q(X), [a, b]\big) \geq \dfrac{b-a}{2}$. Isso prova que $p_1(X) = X - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ é a solução do problema de Chebyshev em $[a, b]$.

Para o caso em que $n = 2$, temos o polinômio do tipo $p(X) = X^2 + mX + k$, com $X \in [-2, 2]$. Neste primeiro momento, estudaremos os casos $p(X) = X^2 + k$ e $p(X) = X^2 + mX$.

1° Caso: $p(X) = X^2 + k$

Verifica-se que

$Max\, p(X) = p(-2) = p(2) = 4 + k$

$Min\, p(X) = p(0) = k$

Logo,

$$V\left(X^2+k,[-2,2]\right)=\max\{|k+4|,|k|\}$$

Fazendo os gráficos dos valores no parâmetro k de $|k+4|$ e $|k|$, teremos:

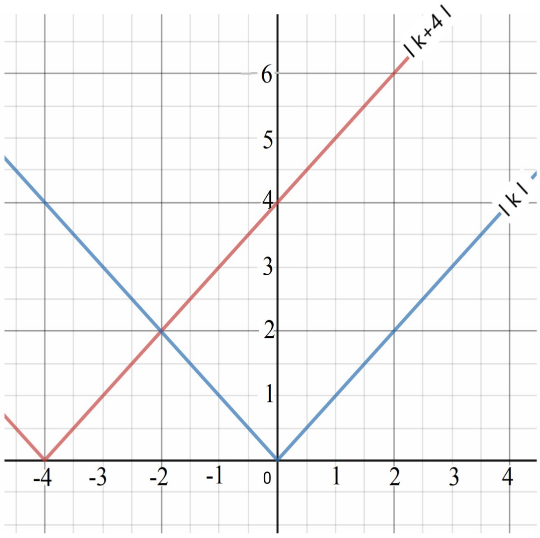

Figura 7

Logo,

$$V\left(X^2+k,[-2,2]\right)=\begin{cases}-k,\ se\ k\leq -2\\ k+4,\ se\ k>-2\end{cases}$$

Portanto, $V\left(X^2+k,[-2,2]\right)\geq 2$ e o mínimo é atingido para $k=-2.$

2° Caso: $p(X)=X^2+mX$

Verifica-se, novamente, que o valor máximo do polinômio p depende dos valores de m. O que vamos obter

$$V\left(X^2+mX,[-2,2]\right)=\max\left\{|2(2+m)|,|2(2-m)|,\frac{m^2}{4}\right\}$$

Construindo os gráficos dos valores nos parâmetros de m de $|2.(2+m)|$, $|2.(2-m)|$ e $\frac{m^2}{4}$, obtemos:

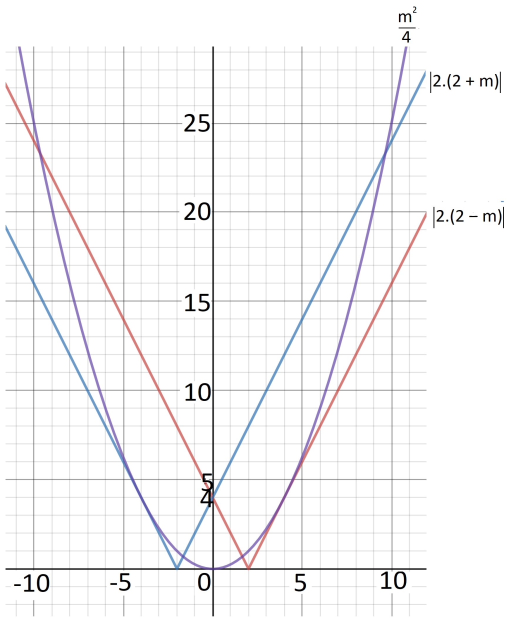

Figura 8

Logo,

$$V\left(X^2+mX,[-2,2]\right)=\begin{cases}\frac{m^2}{4}, se\ m\le -4-4\sqrt{2}\ ou\ m\ge 4+4\sqrt{2}\\ 2(2+m),\ se\ 0\le m\le 4+4\sqrt{2}\\ 2(2-m),\ se\ -4-4\sqrt{2}\le m\le 0\end{cases}$$

Portanto, $V\left(X^2+mX,[-2,2]\right)\ge 4$ e o mínimo é atingido para $m=0$.

3° Caso: $p(X)=X^2+mX+k$, com $m\ne 0\ e\ k\ne 0$.

Nesse caso, ao contrário do que fizemos nos casos já considerados, vamos determinar apenas uma cota inferior para variação do polinômio. Para isso, começamos considerando a função $f:\left[-2+\frac{m}{2}, 2+\frac{m}{2}\right]\to[-2,2]$ definida por $f(X)=X-\frac{m}{2}$. Com isso, obtemos

$$pof(X) = X^2 + \frac{4k - m^2}{4}$$

Desse modo, segue que

$$V\left(p(X), [-2, 2]\right) = V\left(X^2 + \frac{4k - m^2}{4}, \left[-2 + \frac{m}{2}, 2 + \frac{m}{2}\right]\right)$$

Para estimar essa variação, vamos considerar os casos $|m| \geq 4$ e $|m| < 4$.

No primeiro desses casos, os números $-2 + \frac{m}{2}$ e $2 + \frac{m}{2}$ possuem o mesmo sinal. Dai, se denotarmos $a = \min\left\{\left|-2 + \frac{m}{2}\right|, \left|2 + \frac{m}{2}\right|\right\}$ e $b = \max\left\{\left|-2 + \frac{m}{2}\right|, \left|2 + \frac{m}{2}\right|\right\}$ a simetria do gráfico de $pof(X)$ nos permite concluir que

$$V\left(X^2 + \frac{4k - m^2}{4}, \left[-2 + \frac{m}{2}, 2 + \frac{m}{2}\right]\right) = V\left(X^2 + \frac{4k - m^2}{4}, [a, b]\right)$$

Agora, considerando a função $g : [a^2, b^2] \rightarrow [a, b]$ definida por $g(X) = \sqrt{X}$, segue que

$$V\left(X^2 + \frac{4k - m^2}{4}, [a, b]\right) = V\left(X + \frac{4k - m^2}{4}, [a^2, b^2]\right) \geq \frac{b^2 - a^2}{2} = 4|m| \geq 16$$

Agora, no caso em que $|m| < 4$, temos $0 \in \left[-2 + \frac{m}{2}, 2 + \frac{m}{2}\right]$. Portanto, pela propriedade iv, temos

$$V\left(X^2 + \frac{4k - m^2}{4}, \left[-2 + \frac{m}{2}, 2 + \frac{m}{2}\right]\right) = \max\left\{V\left(X^2 + \frac{4k - m^2}{4}, \left[-2 + \frac{m}{2}, 0\right]\right), V\left(X^2 + \frac{4k - m^2}{4}, \left[0, 2 + \frac{m}{2}\right]\right)\right\}$$

Assim, por um raciocínio análogo ao que aplicamos no caso anterior, com $a=0$, $b=\left|-2+\frac{m}{2}\right|$ e $b=\left|2+\frac{m}{2}\right|$, respectivamente, obtemos:

$$V\left(X^2+\frac{4k-m^2}{4},\left[-2+\frac{m}{2},0\right]\right)\geq\frac{\left(-2+\frac{m}{2}\right)^2}{2}=\frac{(m-4)^2}{8}>2\text{, se } m<0.$$

$$V\left(X^2+\frac{4k-m^2}{4},\left[0,2+\frac{m}{2},0\right]\right)\geq\frac{\left(2+\frac{m}{2}\right)^2}{2}=\frac{(m+4)^2}{8}>2\text{, se } m>0.$$

Portanto, podemos concluir que $V(X^2+mX+k,[-2,2])\geq 2$ com o mínimo sendo atingido somente quando $m=0$ e $k=-2$. Em outras palavras, $p(X)=X^2-2$ é a solução do problema de Chebyshev, para grau 2, no intervalo $[-2,2]$.

Para obtermos a solução do problema de Chebyshev no caso $n=2$, em um intervalo arbitrário $[a,b]$, procedemos de modo análogo ao que fizemos no caso $n=1$. Consideremos a bijeção afim $f:[a,b]\rightarrow[-2,2]$ dada por

$$f(X)=\frac{4}{b-a}X-\frac{2(a+b)}{b-a}$$

Compondo essa função com o polinômio $p(X)=X^2-2$, obtemos um polinômio de grau 2 cuja variação em $[a,b]$ é 2, pois coincide com a variação de $p(X)$ em $[-2,2]$. No entanto, o polinômio $pof(X)$ não é mônico, o que nos leva a considerar o polinômio mônico

$$p_1(X)=\left(\frac{b-a}{4}\right)^2.pof(X)=X^2-(a+b)X+\frac{(a+b)^2+4ab}{8},$$

cuja variação em $[a,b]$ é $V(p_1(X),[a,b])=\frac{(b-a)^2}{16}.2=\frac{(b-a)^2}{8}$.

Por outro lado, dado qualquer polinômio mônico do segundo grau $q(X) = X^2 + mX + k$, vamos mostrar que $V(q(X),[a,b]) \geq \dfrac{(b-a)^2}{8}$.

De fato, compondo $q(X)$ com $f^{-1}(X) = \dfrac{(b-a)X + 2(a+b)}{4} = \dfrac{b-a}{4}X + \dfrac{a+b}{2}$, obtemos $qof^{-1}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{16}X^2 + \dfrac{b-a}{4}(a+b+m)X + q\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$, cuja variação em $[-2, 2]$ coincide com a variação de $q(X)$ em $[a,b]$.

Daí, o polinômio

$$q_1(X) = \left(\frac{4}{b-a}\right)^2 .qof^{-1}(X) = X^2 + \frac{4}{b-a}(a+b+m)X + \left(\frac{4}{b-a}\right)^2 q\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{ é tal que}$$

$$V(q_1(X),[-2,2]) = \left(\frac{4}{b-a}\right)^2 V(qof^{-1}(X),[-2,2]) = \left(\frac{4}{b-a}\right)^2 V(q(X),[a,b])$$

E, além disso, $V(q_1(X),[-2,2]) \geq V(X,[-2,2]) = 2$.

Logo, $V(q(X),[a,b]) \geq \dfrac{(b-a)^2}{8}$. Isso prova que o polinômio

$$p_1(X) = X^2 - (a+b)X + \frac{(a+b)^2 + 4ab}{8}$$

é a solução do problema de Chebyshev, para $n = 2$, em $[a,b]$.

3.4 A Solução Geral do Problema de Chebyshev

Vamos supor que tenhamos encontrado um polinômio mônico $p_n(X)$ de grau n, com $V(p_n(X),[a,b]) = c \in \mathbb{R}$, de tal forma que sua representação gráfica sobre o intervalo $[a,b]$ se encontra contida na faixa $|y| \leq c$ e contenha $(n+1)$ pontos da fronteira dessa faixa, distribuídos de forma alternada sobre as retas $y = c$ e $y = -c$, conforme ilustração abaixo (para n = 5).

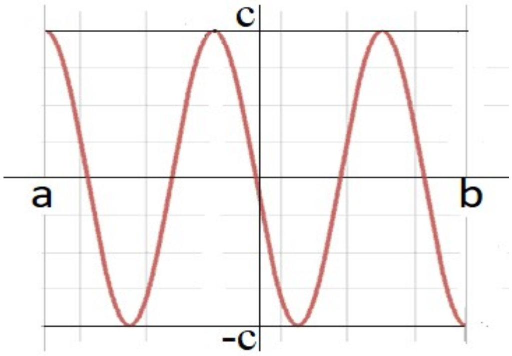

Figura 9

A existência de um polinômio nas condições acima tem fortes implicações a respeito da variação dos polinômios de grau n no intervalo $[a, b]$. Especificamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.4.1 *A variação de todo polinômio mônico de grau n, diferente de* $p_n(X)$*, no intervalo* $[a, b]$ *é maior do que c.*

Demonstração: Considere um polinômio mônico $g(X)$, cuja variação em $[a, b]$ seja menor ou igual a *c*. Verifica-se que seu gráfico também está contido na mesma faixa $|y| \leq c$, em que o gráfico de $p_n(X)$ está construído (figura 10).

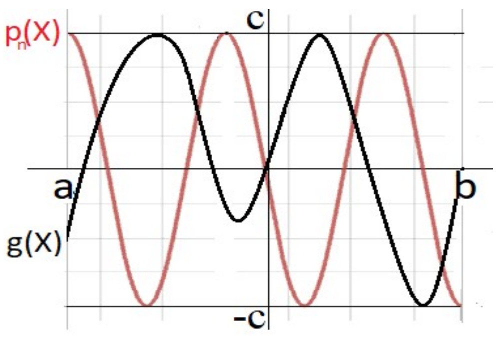

Figura 10

Subdividimos essa faixa do plano por segmentos verticais determinados pelos $n+1$ *pontos* em que o gráfico de $p_n(X)$ toca a fronteira da faixa. Esses $n+1$ segmentos juntamente com as retas $y = c$ e $y = -c$ determinam n retângulos de altura $2c$ e cuja soma das larguras é menor ou igual a $b - a$ (veja figura 11 para $n = 5$). Em cada um desses retângulos o gráfico de $p_n(X)$ une um par de vértices opostos. Consequentemente, em cada um desses retângulos o gráfico de $g(X)$ intersecta o gráfico de $p_n(X)$. O que concluímos que a equação $p_n(X) - g(X) = 0$ possui n raízes distintas. Porém, como estamos trabalhando com polinômios mônicos de grau n, se $p_n(X) - g(X)$ não fosse identicamente nulo, seu grau seria no máximo $n - 1$, o que impossibilita a existência de n raízes. Portanto nesse caso, podemos concluir que $p_n(X) = g(X)$.

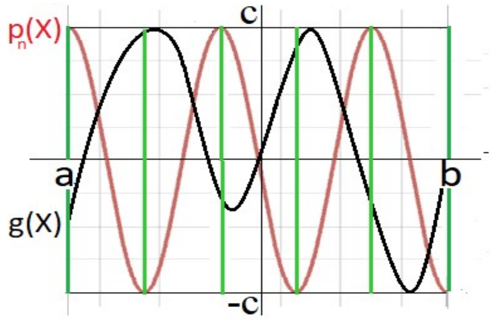

Figura 11

Por outro lado, se em um dado retângulo o ponto de intersecção entre os gráficos ocorrer em um vértice pertencente a dois retângulos adjacentes (veja figura 12), segue que o referido ponto é ponto de máximo ou de mínimo para ambas as funções. Em particular, nessa situação, ambos os gráficos têm tangente horizontal e a abscissa do ponto é raiz de multiplicidade pelo menos dois para a equação $p_n(X) - g(X) = 0$. Desse modo, também no caso presente a contagem de raízes com as devidas multiplicidades é pelo menos n. Portanto, em qualquer caso concluímos que $p_n(X) = g(X)$, o que prova o Teorema.

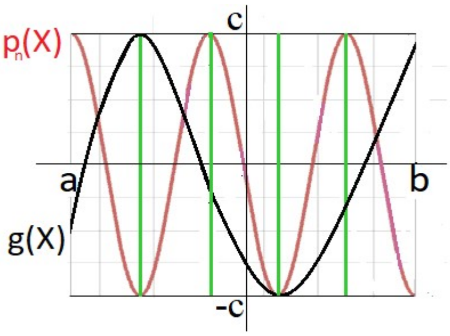

Figura 12

Observação: A demonstração do teorema mostrou-nos que fixados o grau n e o intervalo só há um polinômio mônico de grau n com variação mínima no referido intervalo. Além disso, para encontrá-lo é suficiente construir um polinômio que em sua faixa de variação tangencie a fronteira da faixa em $n+1$ pontos alternadamente. Encontrar um polinômio nas condições acima também nos permitirá conhecer o valor mínimo para a variação de qualquer polinômio de grau n no intervalo fixado.

A existência do polinômio $p_n(X)$ que é solução do problema de Chebshev no intervalo $[-2, 2]$ é garantida pelo seguinte resultado e sua construção é recursiva com respeito ao grau.

Lema 3.4.1 Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um polinômio $p_n(X)$ mônico de grau *n*, tem-se para todo $\beta \in \mathbb{R}$, tal que $p_n(2\cos\beta) = 2\cos n\beta$.

Prova: Vamos provar o lema por indução completa.

Suponha que foi provado para os números $(n-1)$ e n. Assim existem dois polinômios $p_n(X)$ de grau n e $p_{n-1}(X)$ de grau $n-1$ tais que

$$2\cos[(n-1)\beta] = p_{n-1}(2\cos\beta) \text{ e } 2\cos n\beta = p_n(2\cos\beta)$$

Daí utilizando-se da fórmula $\cos[(n+1)\beta] + \cos[(n-1)]\beta = 2\cos\beta.\cos n\beta$, e multiplicando ambos os membros por 2 , teremos a seguintes identidades:

$$2\cos[(n+1)\beta] + 2\cos[(n-1)]\beta = 2\cos\beta.2\cos n\beta$$
$$2\cos[(n+1)\beta] = 2\cos\beta.\cos n\beta - 2\cos[(n-1)\beta]$$
$$2\cos[(n+1)\beta] = 2\cos\beta.p_n(2\cos\beta) - p_{n-1}(2\cos\beta)$$

Dessa forma, definindo

$$p_{n+1}(X) := X.p_n(X) - p_{n-1}(X),\ \forall n \geq 3$$

A sequência de polinômios fica determinada quando observamos que $p_1(X) = X$ e $p_2(X) = X^2 - 2$.

Com isso, segue que $p_n(X)$ é mônico pra todo

$$p_{n+1}(2\cos\beta) = 2\cos[(n+1)\beta]$$

A obtenção dessa fórmula recursiva para calcular o polinômio $p_n(X)$, conclui a prova do lema.

Agora vamos verificar que os polinômios $p_n(X)$ satisfazem as condições admitidas no início dessa seção. De fato, tomando $x_k = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, com $k = 0, 1, \ldots, n$, vemos que $x_k \in [-2, 2]$ e $p_n(x_k) = 2.(-1)^k$. Além disso, para todo $x \in [-2, 2]$ existe $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $x = 2\cos\alpha$. Consequentemente, $|p_n(X)| = |p_n(2\cos\alpha)| = |2\cos n\alpha| \leq 2$ e portanto, para todo n, o gráfico do polinômio $p_n(X)$ sobre o intervalo $[-2, 2]$ está contido na faixa $|y| \leq 2$ e toca alternadamente em $(n+1)$ pontos dos limites superior e inferior da faixa. Segue-se que $p_n(X)$ é o polinômio desejado, aquele com a menor variação no intervalo $[-2, 2]$, sendo que essa variação mínima é 2 para todo n. Esses polinômios são chamados Polinômios de Chebyshev.

Dos resultados obtidos, e aplicando argumentos análogos aos que aplicamos nos casos $n = 1$ e $n = 2$ chegamos ao seguinte resultado:

Teorema 3.4.2 A variação de um polinômio mônico de grau n em um intervalo $[a, b]$ é maior ou igual que $2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n$. Além disso, o único polinômio mônico cuja variação atinge esse mínimo é:

$$p(X) = \left(\frac{b-a}{4}\right)^n p_n\left(\frac{4}{b-a}X - \frac{2(a+b)}{b-a}\right)$$

Corolário 3.4.1 Para qualquer polinômio mônico de grau n, existe um ponto no intervalo $[a,b]$, de modo que o valor absoluto do polinômio neste ponto é maior ou igual a $2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n$.

4 POLINÔMIOS DE CHEBYSHEV

Os *Polinômios de Chebyshev* ou *Polinômios de Tchebychev* receberam esse nome após matemático Pafnuty Chebyshev defini-los como uma sequência de polinômios relacionadas com a fórmula de Moivre e obtíveis por recursividade. Costuma-se denotar os polinômios de *Chebychev* de primeira ordem por T_n o os polinômios de *Chebychev* de segunda ordem por U_n. O uso da letra T para os polinômios de primeira ordem foi dado devido a uma das transliterações de Tchebychev.

Os polinômios de Tchebychev T_n ou U_n são polinômios de grau n e a sequência dos polinômios de todos os graus formam uma sequência polinomial.

Serão apresentados neste capítulo dois tipos polinômios de Chebyshev: T_n e U_n, suas respectivas definições de recorrências e a relação existente entre T_n e U_n.

4.1 Polinômio de Chebyshev do tipo T_n

Definição 4.1.4 São Polinômios de Chebyshev do tipo T_n os polinômios gerados pela relação de recorrência de ordem 2, com as correspondentes condições iniciais.

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, \ para\ n = 0 \\ T_1(x) = x, \ para\ n = 1 \\ T_n(x) = 2x.T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \ para\ n = 2, 3, \ldots, n. \end{cases} \quad \text{, com } x \in \mathbb{R}.$$

4.2 Cálculo dos Primeiros Termos T_n

Os primeiros termos de T_n são conseguidos pela a atribuição de valores a n.

- Para $n = 0$, temos $T_0(x) = 1$
- Para $n = 1$, temos $T_1(x) = x$
- Para $n = 2$, temos $T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x.x - 1 = 2x^2 - 1$
- Para $n = 3$, temos $T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x.(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$
- Para $n = 4$, temos $T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - 2x^2 + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$
- Para $n = 5$, temos $T_5(x) = 2xT_4(x) - T_3(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 - 1) - 4x^3 + 3x = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

Temos, então, a representação gráfica dos seis primeiros polinômios de Chebyshev, feitas no aplicativo Desmos.

$$T_0(x) = 1$$

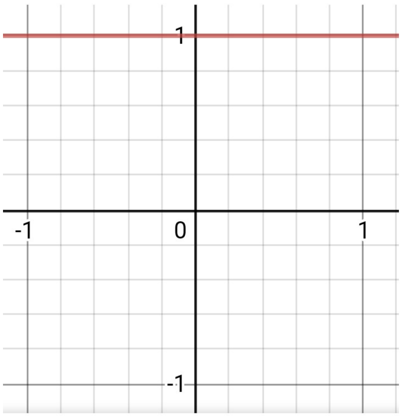

Figura 13

$$T_1(x) = x$$

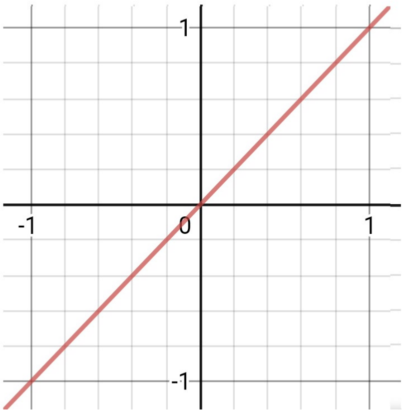

Figura 14

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

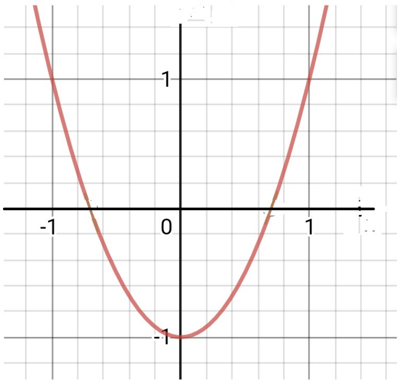

Figura 15

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

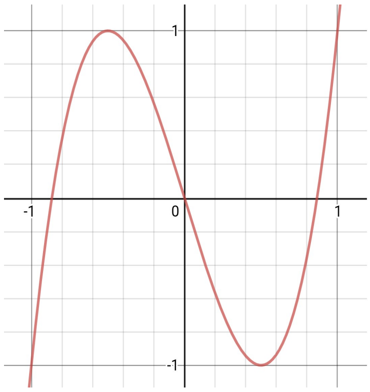

Figura 16

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

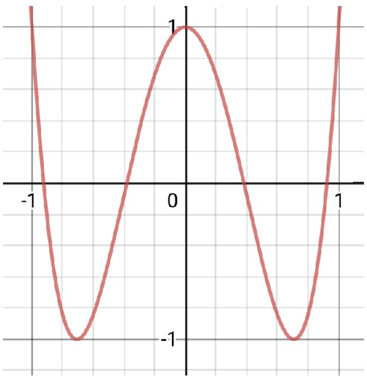

Figura 17

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

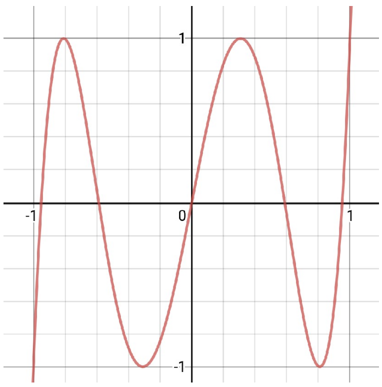

Figura 18

4.3 Representando o Polinômio T_n de Outra Forma

Resolvendo a Equação de Recorrência dada, vamos encontrar outra forma de representar o polinômio de *Chebyshev* do tipo $T_n(x)$.

Proposição 4.3.2 *Seja* T_n *o n-ésimo polinômio de Chebyshev. Então,*

$$T_n(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{2}$$

Demonstração: Provaremos por Indução Finita a sua veracidade.

i) Vamos atribuir valores 0 e 1 a n.

$$n=0 \to T_0(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^0 + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^0}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ (verdade)}$$

$$n=1 \to T_1(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^1 + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^1}{2} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}+x-\sqrt{x^2-1}}{2} = \frac{2x}{2} = x \text{ (verdade)}$$

ii) Considerando que, por hipótese de indução para $n = k$ seja verdadeiro, mostraremos que a expressão serve pra qualquer $n = k+1$.

Como já demonstramos que $T_{n+1} = 2x.T_n(x) - T_{n-1}$, temos

$$T_{n+1}(x) = 2x.\left[\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{2}\right] - \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1} + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}}{2}$$

$$T_{(k+1)+1}(x) = 2x.\left[\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{k+1} + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{k+1}}{2}\right] - \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{k+1-1} + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{k+1-1}}{2}$$

$$T_{(k+1)+1}(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{k+1}}{2}.\left[2x - \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-1}\right] + \frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{k+1}}{2}.\left[2x - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{-1}\right]$$

$$T_{(k+1)+1}(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{k+1}}{2}.\left[2x-\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\right]+\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{k+1}}{2}.\left[2x-\frac{1}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}\right]$$

$$T_{(k+1)+1}(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{k+1}}{2}.\left[2x-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{\left(x^2-x^2+1\right)}\right]+\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{k+1}}{2}.\left[2x-\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\left(x^2-x^2+1\right)}\right]$$

$$T_{(k+1)+1}(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{k+1}}{2}.\left[2x-x+\sqrt{x^2-1}\right]+\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{k+1}}{2}.\left[2x-x-\sqrt{x^2-1}\right]$$

$$T_{(k+1)+1}(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{k+1}}{2}.\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{k+1}}{2}.\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$T_{(k+1)+1}=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{(k+1)+1}+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{(k+1)+1}}{2}$$

O que prova que $T_n=\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{2}$ é verdadeiro para $\forall n\geq 1,\ n\in \mathrm{N}$.

4.4 Algumas Propriedades do Polinômio de Chebyshev do tipo T_n

4.4.1 Paridade

Definição 4.4.5 *Uma sucessão de polinômios* $\{M_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$**,** *tal que, o grau de* $M_n(x)$ *é igual a* n**,** *diz-se simétrica se, e somente se:*

$$M_n(-x)=(-1)^n M_n(x),\ \ \forall x\in\mathbb{R}$$

Isto quer dizer que, se o valor para n é par, teremos $M_n(-x)=M_n(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$**.** E nesse caso, o polinômio chamar-se-á *Polinômio Par.* Caso o valor atribuído a n seja ímpar, teremos $M_n(-x)=-M_n(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$**,** que se chamará *Polinômio ímpar.*

Proposição 4.4.3 A sucessão de polinômios $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é simétrica.

Demonstração: Usaremos a demonstração pelo método da indução finita.
Considerando os polinômios obtidos pelo processo recursivo, temos:

Para $n=0$, $T_0(x)=T_0(-x)=1$ é par, pois $T_0(-x)=T_0(x)$.

Para $n=1$, pela definição de simetria é ímpar, pois $T_1(-x)=-x=-T_1(x)$.

Para $n=2$, $T_2(x)=T_2(-x)=2x^2-1$, pois $T_2(x)=2x^2-1$ e $T_2(-x)=2(-x)^2-1=2x^2-1$.

Sendo $n\in\mathbb{N}$, suponhamos que, para cada $\forall k\geq 0$ e $k\in\mathbb{N}$, tenhamos $T_k(x)$ *par*, se k for *par,* e $T_k(x)$ ímpar se k for ímpar, demonstraremos que $T_{n+1}(x)$ possui a mesma propriedade de $T_n(x)$.

Sabemos que

$$T_{n+1}(x)=2x.T_n(x)-T_{n-1}(x)$$

Consideraremos dois casos:

i) Se $n+1$ for par, n será ímpar e $n-1$ será par. Pela hipótese de indução, afirmaremos que $T_n(x)$ é uma função ímpar e $T_{n-1}(x)$ é uma função par . Uma vez que x é uma função ímpar, então $x.T_n(x)$ é uma função par, por ser produto de duas funções ímpares. O que se verifica que $T_{n+1}(x)$ é par, por resulta da soma de duas funções pares.

ii) Se $n+1$ for ímpar, n será par e $n-1$ será ímpar. Aplicando a hipótese de indução, podemos afirmar que $T_n(x)$ é uma função par e $T_{n-1}(x)$ é uma função ímpar. Agora, sendo x uma função ímpar, então $x.T_n(x)$ é uma função ímpar, por ser um produto de uma função ímpar com uma par . O que se deduz que $T_{n+1}(x)$ é ímpar, por ser o resultado da soma de duas funções ímpares.

O que demonstra a simetria da sucessão de polinômios $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

4.4.2 Raízes do Polinômio de Chebyshev do Tipo T_n

Proposição 4.4.4 $T_n(x)$ *tem* n *zeros reais em* $[-1,1]$, *dados pela seguinte fórmula:*

$$x_k = \cos\beta_k \text{ , onde } \beta_{n,k} = \frac{\pi(2k-1)}{2n}\pi\text{, } k = 1, 2, 3, \ldots, n\text{.}$$

Demonstração: As raízes do polinômio $T_n(x)$, para $x \in [-1, 1]$, que correspondem às raízes da função $\cos n\beta$, para $\beta \in [0, \pi]$, resultam da resolução da equação trigonométrica a seguir:

$$\cos n\beta = 0 \Leftrightarrow \cos n\beta = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi \Leftrightarrow n\beta = \frac{(2k-1)\pi}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$$

Logo, as raízes do polinômio $T_n(x)$, quando $x = \cos\beta$, podem ser obtidas por

$$\beta = \frac{(2k-1)\pi}{2n}\text{, para } k = 1, 2, \ldots, n$$

Como exemplo, temos:

Se tivermos $n = 3$, teremos $T_3(x) = 4x^3 - 3x$. Ou seja, as suas raízes são:

- $k = 1 \Rightarrow \beta = \frac{(2.1-1)\pi}{2.3} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $k = 2 \Rightarrow \beta = \frac{(2.2-1)\pi}{2.3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \cos\frac{\pi}{2} = 0$
- $k = 3 \Rightarrow \beta = \frac{(2.3-1)\pi}{2.3} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \cos\frac{5\pi}{6} = \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Se tivermos $n = 4$, teremos $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$. Ou seja, as suas raízes são

- $k = 1 \Rightarrow \beta = \frac{(2.1-1)\pi}{2.4} = \frac{\pi}{8} \Rightarrow x = \cos\frac{\pi}{8} \cong 0{,}9238795325$
- $k = 2 \Rightarrow \beta = \frac{(2.2-1)\pi}{2.4} = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow x = \cos\frac{3\pi}{8} \cong 0{,}3826834323$
- $k = 3 \Rightarrow \beta = \frac{(2.3-1)\pi}{2.4} = \frac{5\pi}{8} \Rightarrow x = \cos\frac{5\pi}{8} \cong -0{,}3826834323$

- $k = 4 \Rightarrow \beta = \dfrac{(2.4-1)\pi}{2.4} = \dfrac{7\pi}{8} \Rightarrow x = \cos\dfrac{7\pi}{8} \cong -0{,}9238795325$

4.4.3 Extremos

Proposição 4.4.5 $T_n(x)$ apresenta $(n+1)$ extremos locais no intervalo $[-1,\ 1]$, alternados entre -1 e 1 e esses extremos são dados por:

$$x_{n,k} = \cos\left(\frac{n-k}{n}\right)\pi, \quad k = 0, 1, ..., \quad n$$

Demonstração: Pela definição trigonométrica, sabe-se que $T_n(x)$ admite extremos, então

$$T_n(x) = \cos(n\beta) \rightarrow T'(x) = \frac{dT_n(x)}{dx} = \frac{dT_n(x)}{d\beta}\frac{d\beta}{dx} =$$
$$= \frac{d\cos(n\beta)}{d\beta}\frac{d\beta}{d\cos\beta} = nsen\,(n\beta)\frac{1}{sen\,\beta} = \frac{nsen\,(n\beta)}{sen\,\beta}$$

Os zeros da derivada correspondem aos zeros da função $sen(n\beta)$, isto é,

$$sen(n\beta) = 0 \rightarrow sen(n\beta) = sen\,0 \Leftrightarrow n\beta = k\pi \Leftrightarrow \beta = \frac{k\pi}{n}, \; k = 0, 1, ..., n$$

Como exemplo, temos:

Para $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, os extremos são:

- $x_{3,0} = \cos\left(\dfrac{3-0}{3}\right)\pi = \cos\pi = -1$
- $x_{3,1} = \cos\left(\dfrac{3-1}{3}\right)\pi = \cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$
- $x_{3,2} = \cos\left(\dfrac{3-2}{3}\right)\pi = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$
- $x_{3,3} = \cos\left(\dfrac{3-3}{3}\right)\pi = \cos 0 = 1$

Para $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$, os extremos são:

- $k = 0 \Rightarrow x_{4,0} = \cos\left(\dfrac{4-0}{4}\right)\pi = \cos\dfrac{4\pi}{4} = \cos\pi = -1$
- $k = 1 \Rightarrow x_{4,1} = \cos\left(\dfrac{4-1}{4}\right)\pi = \cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $k = 2 \Rightarrow x_{4,2} = \cos\left(\dfrac{4-2}{4}\right)\pi = \cos\dfrac{2\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$
- $k = 3 \Rightarrow x_{4,3} = \cos\left(\dfrac{4-3}{4}\right)\pi = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $k = 4 \Rightarrow x_{4,4} = \cos\left(\dfrac{4-4}{4}\right)\pi = \cos 0 = 1$

Vale ressaltar que, nos exemplos citados, verificamos a alternância dos extremos no intervalo $[-1, 1]$, bem como a facilidade com que são calculados esses extremos por meio da relação $x_{n,k} = \cos\left(\dfrac{n-k}{n}\right)\pi$.

4.5 Polinômio de Chebyshev do tipo U_n

No livro *CHEBYSHEV POLYNOMIALS, de J. C. Mason, o polinômio de Chebyshev do tipo* U_n é assim definido:

Definição 4.5.6 *O polinômio Chebyshev* U_n *do segundo tipo é um polinômio de grau n em x, definido por*

$$U_n(x) = \frac{sen(n+1)\beta}{sen\beta}$$

$$com\ \ x = \cos\beta,\ onde\ \ x \in [-1, 1]\ \ e\ \ \beta \in [0, \pi]$$

4.6 Cálculo dos Primeiros Polinômios U_n

Os primeiros polinômios do tipo U_n são conseguidos pela atribuição de valores a n.

- Para $n = 0$, teremos $U_0(x) = \dfrac{sen\beta}{sen\beta} = 1$

- Para $n = 1$, teremos $U_1(x) = \dfrac{sen2\beta}{sen\beta} = \dfrac{2sen\beta\cos\beta}{sen\beta} = 2\cos\beta = 2x$

- Para $n = 2$, teremos $U_2(x) = \dfrac{sen3\beta}{sen\beta} = \dfrac{4senx.\cos^2 x - sen\,x}{sen\beta} = 4\cos^2 x - 1 = 4x^2 - 1$

- Para $n = 3$, teremos $U_3(x) = \dfrac{sen4\beta}{sen\beta} = \dfrac{sen\beta.(8\cos^3\beta - 4\cos\beta)}{sen\beta} = 8\cos^3\beta - 4\cos\beta = 8x^3 - 4x$

E assim, pela substituição de valores naturais a n, conseguimos descobrir alguns polinômios do tipo U_n.

Temos, então, a representação gráfica dos quatro primeiros polinômios de Chebyshev do tipo U_n, feitas no aplicativo Desmos.

$U_0(x) = 1$

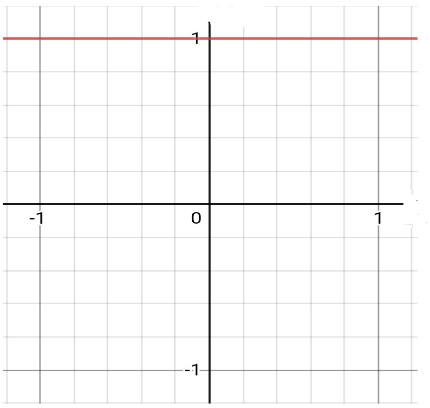

Figura 19

$U_1(x) = 2x$

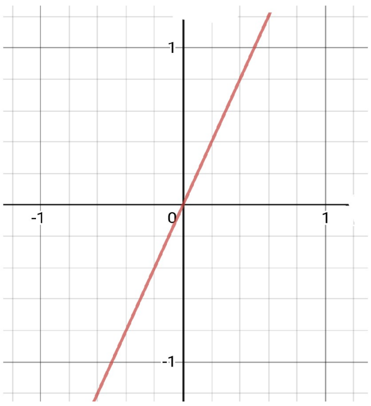

Figura 20

$U_2(x) = 4x^2 - 1$

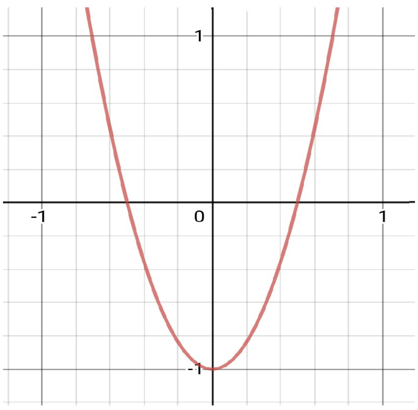

Figura 21

$U_3(x) = 8x^3 - 4x$

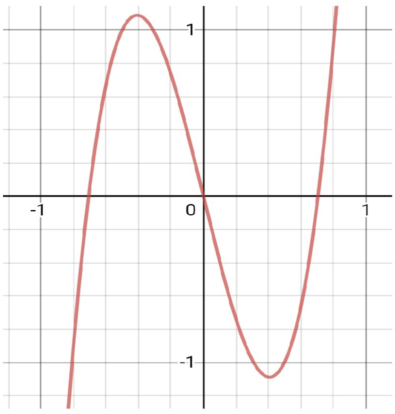

Figura 22

4.7 Relação de Recorrência para Obtenção de U_n

O polinômio de Chebyshev do 2° tipo pode ser conseguido através da seguinte recorrência

$$\begin{cases} U_0(x) = 1, \; para \; n = 0 \\ U_1(x) = 2x, \; para \; n = 1 \\ U_n(x) = 2x.U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \; para \; n = 2, 3, \ldots, n. \end{cases} \quad \text{, com } x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Na demonstração para a obtenção dos polinômios de Chebyshev de grau 2**,** a partir da recorrência, utilizaremos as identidades $sen(a+b)$ e $sen(a+b)$.

Fazendo $a = n\beta$ e $b = \beta$**,** obteremos:

I) $sen(n\beta + \beta) = sen(n\beta).\cos\beta - sen(n\beta).\cos n\beta$

e

II) $sen(n\beta - \beta) = sen(n\beta).\cos\beta + sen(n\beta).\cos n\beta$

Ao somarmos as identidades I) e II), conseguimos:

$$sen(n\beta + \beta) + sen(n\beta - \beta) = 2.sen(n\beta).\cos\beta$$
$$sen((n+1)\beta) = 2\cos\beta.sen(n\beta) - sen((n-1)\beta)$$
$$sen((n+1)\beta) = 2\cos\beta.sen(n\beta - \beta + \beta) - sen(n\beta - \beta - \beta + \beta)$$
$$sen((n+1)\beta) = 2\cos\beta.sen[(n\beta - \beta) + \beta] - sen[(n\beta - 2\beta) + \beta]$$
$$sen((n+1)\beta = 2.\cos\beta.sen[(n-1)+1]\beta - sen[(n-2)+1]\beta$$

Considerando que $sen\beta$ seja diferente de zero, dividiremos ambos os membros por $sen\beta$ e teremos:

$$\frac{sen[(n+1)]\beta}{sen\beta} = \frac{2.\cos\beta.sen[(n-1)+1]\beta}{sen\beta} - \frac{sen[(n-2)+1]\beta}{sen\beta}$$

O que resultou na recorrência procurada.

$$U_n(x) = 2x.U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$$

Agora com o uso da recorrência, obteremos alguns polinômios do tipo U_n com maior facilidade.

- $U_0(x) = 1$
- $U_1(x) = 2x$
- $U_2(x) = 2x.U_1(x) - U_0(x) = 2x.2x - 1 = 4x^2 - 1$
- $U_3(x) = 2x.U_2(x) - U_1(x) = 2x.(4x^2 - 1) - 2x = 8x^2 - 2x - 2x = 8x^3 - 4x$
- $U_4(x) = 2x.U_3(x) - U_2(x) = 2x.(8x^3 - 4x) - (4x^2 - 1) = 16x^3 - 8x^2 - 4x^2 + 1 = 16x^4 - 12x^2 + 1$

4.8 Representando o Polinômio U_n de Outra Forma

Resolvendo a Equação de Recorrência $U_{n+1}(x) = 2x.U_n(x) - U_{n-1}(x)$, vamos encontrar outra forma de representar o polinômio de Chebyshev do segundo tipo:

Proposição 3.8.6. *Seja U_n o n-ésimo polinômio de Chebyshev. Então,*

$$U_n = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^{n+1} - \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^{n+1}}{2\sqrt{x^2 - 1}}$$

Demonstração: Usaremos a Indução Finita

i) Vamos atribuir valores 0 e 1 a n.

Sendo $n = 0 \to U_0 = \dfrac{x + \sqrt{x^2 - 1} - x + \sqrt{x^2 - 1}}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \dfrac{2\sqrt{x^2 - 1}}{2\sqrt{x^2 - 1}} = 1$ (verdade)

Sendo $n = 1 \to U_1 = \dfrac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^2 - \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^2}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \dfrac{4x\sqrt{x^2 - 1}}{2\sqrt{x^2 - 1}} = 2x$ (verdade)

ii) Considerando que, por hipótese de indução para $n = k$ seja verdadeiro, mostraremos que a expressão serve pra qualquer $n = k+1$.

Como já foi demonstrado que $U_{n+1} = 2x.U_n(x) - U_{n-1}(x)$, temos:

$$U_{n+1}(x) = 2x.\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}} - \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1-1} - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1-1}}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$U_{(k+1)+1}(x) = 2x.\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{k+1+1} - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{k+1+1}}{2\sqrt{x^2-1}} - \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{k+1} - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{k+1}}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$U_{k+2}(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{k+2}}{2\sqrt{x^2-1}}\left[2x - \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-1}\right] - \frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{k+2}}{2\sqrt{x^2-1}}\left[2x - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{-1}\right]$$

$$U_{k+2}(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{k+2}}{2\sqrt{x^2-1}}\left[2x - \left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)\right] - \frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{k+2}}{2\sqrt{x^2-1}}\left[2x - \left(\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right)\right]$$

$$U_{k+2}(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{k+2}}{2\sqrt{x^2-1}}\left[2x - x + \sqrt{x^2-1}\right] - \frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{k+2}}{2\sqrt{x^2-1}}\left[2x - \left(\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right)\right]$$

$$U_{k+2}(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{k+2}}{2\sqrt{x^2-1}}\left[2x - x + \sqrt{x^2-1}\right] - \frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{k+2}}{2\sqrt{x^2-1}}\left[2x - x - \sqrt{x^2-1}\right]$$

$$U_{k+2}(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{k+2}}{2\sqrt{x^2-1}}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - \frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{k+2}}{2\sqrt{x^2-1}}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$U_{k+2}(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{(k+1)+2}}{2\sqrt{x^2-1}} - \frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{(k+1)+2}}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$U_{k+2}(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{(k+2)+1} - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{(k+2)+1}}{2\sqrt{x^2-1}}$$

O que prova que $U_n = \dfrac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}}$ é verdadeiro para $\forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.

4.9 Duas Propriedades do Polinômio de Chebyshev do tipo U_n

Estudaremos duas importantes propriedades do polinômio do segundo tipo.

4.9.1 Paridade

A demonstração para a simetria do polinômio do segundo tipo $U_n(x)$, onde classificaremos o polinômio em par ou ímpar, será realizada da mesma forma usada na do primeiro tipo $T_n(x)$.

Proposição 4.9.7 A sucessão de polinômios $\{U_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é simétrica.

***Demonstração**:* Usaremos a demonstração pelo método da indução finita.

Considerando os polinômios obtidos pelo processo recursivo, temos:

Para $n=0$, $U_0(x)=U_0(-x)=1$ é par.

Para $n=1$, pela definição de simetria é ímpar, pois $U_1(-x)=-2x=-U_1(x)$.

Para $n=2$, $U_2(x)=U_2(-x)=4x^2-1$.

Sendo $n \in \mathbb{N}$, vamos supor que, para cada $\forall k \geq 0$ e $k \in \mathbb{N}$, $T_k(x)$ *será Par* se k for par e será ímpar se k for ímpar. Iremos demonstrar que $U_{n+1}(x)$ possui a mesma propriedade de $T_{n+1}(x)$.

Sabemos que

$$U_{n+1}(x)=2x.U_n(x)-U_{n-1}(x)$$

Consideraremos dois casos:

i) Se $n+1$ for par, n será ímpar e $n-1$ será par. Aplicando a hipótese de indução, podemos afirmar que $U_n(x)$ é uma função ímpar e $U_{n-1}(x)$ é uma função par. Uma vez que x é uma função ímpar, então $x.U_n(x)$ é uma função par, por ser um produto de duas funções ímpares. Sendo assim, $U_{n+1}(x)$ é par por ser a soma de duas funções Pares.

ii) Se $n+1$ for ímpar, n será Par e $n-1$ será ímpar. Aplicando a hipótese de indução, podemos afirmar que $U_n(x)$ é uma função par e $U_{n-1}(x)$ é uma função ímpar. Uma vez que x é uma função ímpar, então $x.U_n(x)$ é uma função ímpar, por ser um produto de uma função ímpar com uma par. Sendo assim, $U_{n+1}(x)$ é ímpar por ser a soma de duas funções ímpares.

O que demonstra a simetria da sucessão de polinômios $\{U_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

4.9.2. Raízes

Proposição 4.9.8: $U_n(x)$ *apresenta* n *zeros reais no intervalo* $[-1, 1]$ *e esses zeros são dados pela fórmula*

$$x_{n,k} = \cos\left(\frac{k}{n+1}\right)\pi, \quad k = 1, \ldots, \quad n$$

Demonstração: *Verifica-se que* os zeros da equação $sen\ (n+1)\beta$ nos fornece as raízes do polinômio $U_n(x)$. Ou seja

$$sen\ (n+1)\beta = 0 \Leftrightarrow (n+1)\beta = k\pi \Leftrightarrow \beta = \frac{k\pi}{n+1},\ k = 1, 2, \ldots, n$$

Exemplificando para $U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$, temos as seguintes raízes:

- $k = 1 \Rightarrow x_{4,1} = \cos\left(\frac{1}{4+1}\right)\pi = \cos\frac{\pi}{5} \cong 0{,}8090169943$
- $k = 2 \Rightarrow x_{4,2} = \cos\left(\frac{2}{4+1}\right)\pi = \cos\frac{2\pi}{5} \cong 0{,}3090169943$
- $k = 3 \Rightarrow x_{4,3} = \cos\left(\frac{3}{4+1}\right)\pi = \cos\frac{3\pi}{5} \cong -0{,}3090169943$

- $k = 4 \Rightarrow x_{4,4} = \cos\left(\frac{4}{4+1}\right)\pi = \cos\frac{4\pi}{5} \cong -0{,}8090169943$

4.10 Relação entre os Polinômios $T_n(x)$ e $U_n(x)$

Dentre as perguntas que podemos fazer sobre os tipos $T_n(x)$ e $U_n(x)$, encontra-se a que diz respeito sobre a relação existente entre esses dois polinômios. Verificando as relações trigonométricas, temos a transformação da diferença entre senos em produto de outras duas funções trigonométricas, que conterão as funções seno e cosseno, justamente o que se precisa pra obtermos a relação desejada. Ou seja,

Sendo $sen(p) - sen(q) = 2sen\left(\frac{p-q}{2}\right).\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$ e fazendo $p = (n+1)\beta$ e $p = (n-1)\beta$, temos:

$$sen(n+1)\beta - sen(n-1)\beta = 2sen\left(\frac{(n+1)\beta - (n-1)\beta}{2}\right).\cos\left(\frac{(n+1)\beta + (n-1)\beta}{2}\right)$$

$$sen(n+1)\beta - sen(n-1)\beta = 2sen(\beta).\cos(n\beta)$$

$$sen(n+1)\beta + sen(n-1)\beta = 2sen(\beta).\cos(n\beta)$$

Considerando que $sen(\beta) \neq 0$, dividiremos ambos os membros por $sen(\beta)$.

$$\frac{sen(n+1)\beta}{sen\,\beta} - \frac{sen(n-1)\beta}{sen\,\beta} = \frac{2sen(\beta).\cos(n\beta)}{sen\,\beta}$$

$$\frac{sen(n+1)\beta}{sen\,\beta} - \frac{sen[(n-2)+1]\beta}{sen\,\beta} = \frac{2sen(\beta).\cos(n\beta)}{sen\,\beta}$$

$$U_n(x) - U_{n-2}(x) = 2T_n(x)$$

O que se obtém

$$T_n(x) = \frac{U_n(x) - U_{n-2}(x)}{2}, \text{ para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Como exemplo, temos as seguintes relações:

- Para $n = 2 \rightarrow T_2(x) = \dfrac{U_2(x) - U_0(x)}{2} = \dfrac{4x^2 - 1 - 1}{2} = 2x^2 - 1$
- Para $n = 3 \rightarrow T_3(x) = \dfrac{U_3(x) - U_1(x)}{2} = \dfrac{8x^3 - 4x - 2x}{2} = 4x^3 - 3x$
- Para $n = 4 \rightarrow T_4(x) = \dfrac{U_4(x) - U_2(x)}{2} = \dfrac{16x^4 - 12x^2 + 1 - 4x^2 + 1}{2} = 8x^4 - 8x^2 + 1$
- Para $n = 5 \rightarrow T_5(x) = \dfrac{U_5(x) - U_3(x)}{2} = \dfrac{32x^5 - 32x^3 + 6x - 8x^3 + 4x}{2} = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

E assim por diante.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho iniciou-se por meio de algumas definições e alguns Teoremas, que puderam nos fornecer um embasamento teórico substancial com o objetivo único de resolver um problema proposto por Chebyshev em 1854, a respeito da variação de um polinômio.

Após um estudo sobre a variação de polinômios de graus 1 e 2, que contou com algumas demonstrações e representações gráficas através do aplicativo Desmos, foi possível chegar a solução do problema proposto por Chebyshev para esses polinômios.

E prosseguindo nessa discussão, conseguimos encontrar uma forma de representar os polinômios de Chebyshev por meio de uma relação trigonométrica. A partir dessa representação do polinômio, conseguimos obter uma relação de recorrência para o cálculo dos primeiros polinômios do tipo T_n e, posteriormente, do tipo U_n. As relações de recorrências para a obtenção dos polinômios T_n e U_n nos possibilitou calcular uma outra forma de representar tais polinômios, bem como as relações existentes entre eles.

E finalmente, através das aplicações dos conhecimentos adquiridos nas disciplinas do Mestrado, foi possível compreender, estudar e conhecer melhor os Polinômios de Chebyshev dos tipos T_n e U_n.

REFERÊNCIAS

AFONSO, Rafaela Ferreira. **Um estudo do comportamento dos zeros dos Polinômios de Gengebauer**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2016.

CAMINHA, A. **Tópicos de matemática elementar**: teoria dos números. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM 2016. v.5

CAMINHA, A. **Tópicos de matemática elementar:** polinômios.1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo.** 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2007. v.1

HEFEZ, Abramo ;VILLELA, Maria Lúcia Torres. Polinômios e equações algébricas. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

MASON, J. C.; HANDSCOM, D. C. **Chebyshev polynomials**. Boca Raton, Flórida: Chapman & Hall, 2003.

SCARPELLI, Raquel Tavares. **Polinômios de Chebyshev e curvas maximais**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

SPIEGEL, M. R. **Manual de fórmulas e tabelas matemáticas**. São Paulo : McGraw Hill, 1974.

TABACHNIKOV, Serge. **Kvant Selecta**: algebra and analysis. Providence, R.I. : American Mathematical Society. 1999.

APÊNDICE - ALGUMAS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Relação Fundamental da Trigonometria

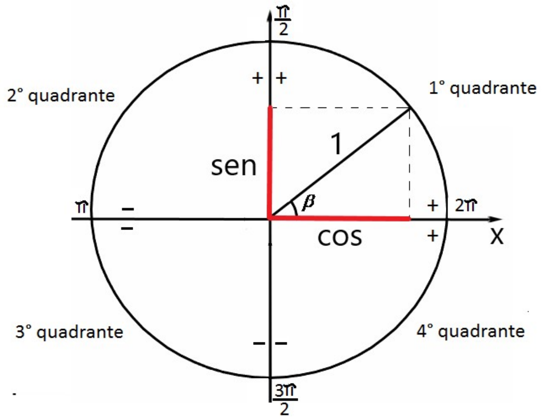

Fig. 1

Utilizando o Teorema de Pitágoras para o triângulo ACO, obtemos a Relação Fundamental da Trigonometria, válida para $\forall \beta \in \Re$:

$$sen^2\,\beta + \cos^2\beta = 1$$

O que teremos

$$\begin{cases} sen^2\,\beta + \cos^2\beta = 1 \Rightarrow sen^2\beta = 1 - \cos^2\beta \\ ou \\ sen^2\,\beta + \cos^2\beta = 1 \Rightarrow \cos^2\beta = 1 - sen^2\beta \end{cases}$$

Outras relações Trigonométricas

- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - sen\alpha.sen\beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + sen\alpha.sen\beta$
- $sen(\alpha + \beta) = sen\alpha.\cos\beta - senb\alpha.\cos\beta$
- $sen(a - b) = sena.\cos b - senb.\cos a$

$$sen\,(a-b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right).\cos(-b)+sen\left(\frac{\pi}{2}-a\right).sen(-b)$$
$$sen\,(a-b)=sena.\cos b+\cos a.(-senb)$$
$$sen\,(a-b)=sena.\cos b-senb.\cos a$$

O que podemos dizer que $sen\,(a-b)=sena.\cos b-senb.\cos a$

DUPLICAÇÃO DE ARCOS

Tendo obtido a soma de arcos, calcularemos a duplicação dos arcos seno e cosseno por meio da seguinte substituição: $a=x$ e $b=x$.

No que iremos obter:

- $sen(a+b)=sena.\cos b+senb.\cos a$

  $sen(x+x)=senx.\cos x+senx.\cos x$

  $sen(2x)=2sen\,x.\cos x$

- $\cos(a+b)=\cos a.\cos b-sena.senb$

  $\cos(x+x)=\cos x.\cos x-senx.senx$

  $$\cos(2x)=\cos^2 x-sen^2 a=\begin{cases}\cos^2 x-(1-\cos^2 x)=2\cos^2 x-1\\ ou\\ 1-sen^2x-sen^2x=1-2sen^2x\end{cases}$$

  Ou seja

  $$\begin{array}{lcl}\cos(2x)=\cos^2 x-sen^2 a & & \cos(2x)=\cos^2 x-sen^2 a\\ \cos(2x)=\cos^2 x-(1-\cos^2 x) & \text{e} & \cos(2x)=(1-sen^2x)-sen^2x\\ \cos(2x)=2\cos^2 x-1 & & \cos(2x)=1-2sen^2x\end{array}$$

Para outros resultados, basta fazer $a=m\,x$ e $b=n\,x$. Ou seja:

- $sen\,3x=sen(2x+x)=sen2x.\cos x+senx.\cos 2x$

  $=2.senx.\cos x.\cos x+senx.(2\cos^2 x-1)$

  $=2.senx.\cos^2 x+2senx.\cos^2 x-sen\,x=4senx.\cos^2 x-sen\,x$

- $sen\,4x=sen(2x+2x)=sen2x.\cos 2x+sen2x.\cos 2x$

$$= 2sen2x.\cos 2x$$

$$= 2.2.senx.\cos x.(2\cos^2 x - 1)$$

$$= .senx.(8\cos^3 x - 4\cos x)$$

- $\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x.\cos x - sen2x.senx$

$$= (2\cos^2 x - 1).\cos x - 2senx.\cos x.senx$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x.sen^2 x$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x.(1 - \cos^2 x)$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

- $\cos 4x = \cos(2x + 2x) = \cos 2x.\cos 2x - sen2x.sen2x$

$$= \cos^2 2x - sen^2 2x$$

$$= (2\cos^2 x - 1)^2 - (2senx.\cos x)^2$$

$$= 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 - 4sen^2 x.\cos^2 x$$

$$= 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 - 4(1 - \cos^2 x).\cos^2 x$$

$$= 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 - 4\cos^2 x + 4\cos^4 x$$

$$= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

Usando o mesmo raciocínio, iremos obter os valores $sen5\beta, sen6\beta, \cos 5\beta, \cos 6\beta, \ldots$.

TRANSFORMAÇÃO EM PRODUTO

A transformação da soma de arcos em produto de arcos é de grande importância, porque facilita algumas demonstrações de identidades trigonométricas.

Transformação das somas $senp + senq$ e $\cos p + \cos q$

Somando as identidades abaixo, teremos:

$sen(a + b) + sen(a - b) = sen\, a.\cos b + sen\, b.\cos a + sen\, a.\cos b - sen\, b.\cos a$

$sen(a + b) + sen(a - b) = 2sen\, a.\cos b$

Fazendo uma mudança de valores, chamando $a+b=p$ e $a-b=q$ e resolvendo o sistema, iremos obter a seguinte identidade:

$$sen(p)+sen(q)=2sen\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

O mesmo faremos com as identidades (10) e (11)

$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=\cos a.\cos b-sen\,a.sen\,b+\cos a.\cos b+sen\,a.sen\,b$$
$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a.\cos b$$

Fazendo uma mudança de variáveis, chamando $a+b=p$ e $a-b=q$ e resolvendo o sistema, iremos obter a seguinte identidade:

$$\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Transformação das diferenças $senp-senq$ em e $\cos p-\cos q$

Fazendo a diferença entre as identidades abaixo, teremos:

$$sen(a+b)-sen(a-b)=sen\,a.\cos b+sen\,b.\cos a-sen\,a.\cos b+sen\,b.\cos a$$
$$sen(a+b)-sen(a-b)=2sen\,b.\cos a$$

Fazendo uma mudança de valores, chamando $a+b=p$ e $a-b=q$ e resolvendo o sistema, iremos obter a seguinte identidade:

$$sen(p)-sen(q)=2sen\left(\frac{p-q}{2}\right).\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

O mesmo faremos com as identidades seguintes

$$\cos(a+b)-\cos(a-b)=\cos a.\cos b-sen\,a.sen\,b-\cos a.\cos b-sen\,a.sen\,b$$
$$\cos(a+b)-\cos(a-b)=-2sena.senb$$

Fazendo uma mudança de variáveis, chamando $a+b=p$ e $a-b=q$ e resolvendo o sistema, iremos obter a seguinte identidade:

$$\cos(p)-\cos(q)=-2sen\left(\frac{p+q}{2}\right).sen\left(\frac{p-q}{2}\right)$$